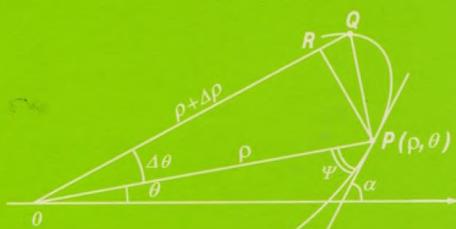


51  
K21

Prof. AHMET A. KARADENİZ

# YÜKSEK MATEMATİK

CİLT 1



DİFERANSİEL VE  
İNTEGRAL HESAP



Çağlayan Kitabevi

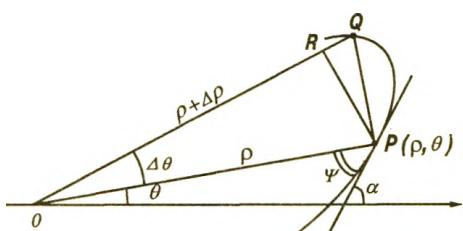
Beyoğlu - İSTANBUL

YÜKSEK MATEMAT K

Cilt: 1  
Diferansiel ve integral Hesap

**Prof. AHMET A. KARADENİZ**

# **YÜKSEK MATEMATİK**



**C LT. 1**

**D FERANS EL VE  
INTEGRAL HESAP**



**Çağlayan Kitabevi**

stiklal Caddesi 166 Tokatlıyan hanı Kat: 1/7-8-9

Beyoğlu - STANBUL

Tel:(0.212) 245 44 33 Faks: 249 17 94

e-mail:info@caglayan.com

Ondördüncü Baskı  
2011

ISBN: 978-975-436-050-9

© Prof. Ahmet A. Karadeniz  
(Z. Çınar - H.U. Karadeniz)

© Türk Ceza Kanunu ve 5846 sayılı F.S.E. Kanunu gere i her hakkı mahfuzdur.  
Bu kitap veya bir kısmı Ça layan Kitabevi ve Yazarın müsaadesi alınmaksızın  
tab ve kopya edilemez.

Baskı ve Cilt:  
Avcı Ofset Matbaacılık  
Davutpaşa Cad. 1. pek Merkezi No:6/13  
Zeytinburnu - İstanbul

## Ç N D E K L E R

### 1. BÖLÜM

#### SAYI, DE İKEN, FONKSİYON

1.1	Sayılar .....	1
1.1-1	Reel sayılar .....	1
1.1-2	Bir reel sayının mutlak değeri .....	3
1.2	Değişken ve sabit büyüklükler .....	5
1.2-1	Tanım .....	5
1.2-2	Bir değişkenin tanım aralığı .....	6
1.3	Fonksiyon .....	7
1.3-1	Fonksiyon tanımı .....	7
1.3-2	Fonksiyonların muhtelif ekilde gösterilmeleri .....	8
1.3-3	Bölge çok kullanılan fonksiyonlar .....	9
1.3-4	Fonksiyon fonksiyonu (bileşik fonksiyon) .....	14
1.3-5	Elemanter fonksiyon tanımı .....	14
1.3-6	Tek ve çift fonksiyonlar .....	15
1.3-7	Cebirsel fonksiyonlar .....	15
1.3-8	Yüksek fonksiyonlar .....	17
	1. Bölüme ait problemler .....	17

### 2. BÖLÜM

#### LİMİT VE SÜREKLİLİK

2.1	Bir değişkenin limiti .....	19
2.1-1	Tanım .....	19
2.1-2	Sonsuz büyük ve sonsuz küçük tanımı .....	21
2.2	Bir fonksiyonun limiti .....	21

## VIII

2.2- 1	Tanım .....	21
2.2- 2	Sa dan ve soldan limit .....	23
2.2- 3	Sonsuza yakla an fonksiyonlar .....	25
2.2- 4	Simrlı fonksiyonlar .....	27
2.2- 5	Çok kullanılan bazı limitler .....	27
2.3	Limite ait esas teoremler .....	28
2.4	Limite ait uygulamalar .....	31
2.4- 1	$x$ in bir tam çok terimlisinin $x \rightarrow \infty$ halinde limiti	31
2.4- 2	$x \rightarrow \infty$ halinde bir rasyonel kesrin limiti .....	32
2.4- 3	Bir rasyonel kesrin pay ve paydasının beraberce sıfır yakla ması halinde limiti .....	33
2.4- 4	Irrasyonel cebirsel fonksiyonların limitleri .....	34
2.4- 5	$x \rightarrow 0$ halinde $\frac{\sin x}{x}$ in limiti .....	35
2.5	Fonksiyonların süreklili i .....	38
2.5- 1	Süreklik tanımı .....	38
2.5- 2	Süreksizlik tanımı .....	41
2.5- 3	Sürekli fonksiyonların özellikleri .....	43
2.5- 4	Örnekler .....	44
2.	Bölümde ait problemler .....	45

## 3. BÖLÜM

### TÜREV

3.1	Türevin tanımı .....	50
3.2	Türevin geometrik anlamı .....	52
3.3	Türetilebilen fonksiyonlar .....	54
3.4	$y = x^n$ in türevi .....	56
3.5	$y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonlarının türevi .....	58
3.6	Bir sabitin ve bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevleri .....	59
3.7	Toplam, çarpım ve bölümün türevleri .....	61
3.8	Bir bile ik fonksiyonun türevi .....	66
3.9	$y = \operatorname{tg} u$ , $y = \operatorname{cotg} u$ , $y = \sec u$ , $y = \operatorname{cosec} u$ nun türevleri .....	69
3.9- 1	$y = \operatorname{tg} u$ nun türevi .....	69
3.9- 2	$y = \operatorname{cotg} u$ nun türevi .....	70

3.9-3 $y = \sec u$ nun türevi .....	70
3.9-4 $y = \operatorname{cosec} u$ nun türevi .....	71
3.10    Kapalı fonksiyonlar ve türevleri .....	72
3.11    Ters fonksiyonların türevleri .....	73
3.12    Yüksek mertebeden türevler .....	75
3.13    Bir çarpımın $n$ mertebe türevi için Leibnitz formülü .....	77
3.14    Kapalı fonksiyonlarda yüksek mertebeden türevler .....	79
3.    Bölümde ait problemler .....	81

## 4.    BÖLÜM

## TÜREVİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

4.1    Bir eğrinin doğrultusu .....	85
4.2    İki eğrinin kesim açısısı .....	86
4.3    Təctə ve normal denklemleri ; təctəaltı ve normal altı uzunlukları .....	87
4.4    Artan ve azalan fonksiyonlar .....	91
4.5    Bir eğrinin konkavlığını inşası .....	92
4.6    Bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerleri .....	94
4.7    Büküm noktaları .....	98
4.8    Maksimum ve minimum problemleri .....	99
4.9 $y = f(x)$ denklemi ile verilmiş bir eğrinin çizimi .....	103
4.10    Asimptotlu eğriler .....	105
4.10-1 $oy$ ekseni paralel asimptotlar .....	106
4.10-2 $ox$ ekseni paralel asimptotlar .....	106
4.10-3    Eşik asimptot .....	107
4.    Bölümde ait problemler .....	112

## 5.    BÖLÜM

## TERSİNİN GÖRÜNTÜ FONKSİYONLARI

5.1 $y = \operatorname{Arcsin} x$ fonksiyonu .....	118
5.1-1 $y = \operatorname{Arcsin} x$ in türevi .....	119
5.1-2 $y = \operatorname{Arcsin} x$ in eğrisi .....	120
5.2 $y = \operatorname{Arccos} x$ fonksiyonu .....	121

## X

5.2-1	$y = \text{Arccos } x$ in türevi .....	122
5.2-2	$y = \text{Arccos } x$ in e risi .....	123
5.3	$y = \text{Arctg } x$ fonksiyonu .....	125
5.3-1	$y = \text{Arctg } x$ in türevi .....	126
5.3-2	$y = \text{Arctg } x$ in e risi .....	128
5.	Bölüme ait problemler .....	130

## 6. BÖLÜM

### ÜSTEL FONKS YON VE LOGAR TMA FONKS YONU

6.1	Üstel fonksiyon .....	134
6.1-1	$a > 1$ halinde üstel fonksiyonun özellikleri .....	134
6.1-2	$a < 1$ halinde üstel fonksiyonun özellikleri .....	135
6.2	Logaritma fonksiyonu .....	136
6.2-1	Logaritma kuralları .....	137
6.2-2	Çe itli tabanlı logaritmalar .....	137
6.2-3	Taban de i tirme .....	138
6.2-4	e sayısının tanımı .....	138
6.3	$y = \log_a x$ in türevi .....	141
6.4	$y = a^u$ nun türevi .....	144
6.5	Logaritmik türev alma .....	145
6.6	Üstel ve logaritma fonksiyonlarının e rileri .....	147
6.7	Türev tablosu .....	149
6.	Bölüme ait problemler .....	150

## 7. BÖLÜM

### H PERBOL K FONKS YONLAR

7.1	Tanımları .....	155
7.2	Hiperbolik fonksiyonların özellikleri .....	156
7.3	Hiperbolik fonksiyonların türevleri .....	161
7.3-1	$y = \text{ch } u$ nun türevi .....	161
7.3-2	$y = \text{sh } u$ nun türevi .....	162
7.3-3	$y = \text{th } u$ nun türevi .....	163
7.4	Hiperbolik fonksiyonların e rileri .....	164

7.4-1 $y = \operatorname{ch} x$ in eğrisi .....	164
7.4-2 $y = \operatorname{sh} x$ in eğrisi .....	164
7.4-3 $y = \operatorname{th} x$ in eğrisi .....	165
7.5 Ters hiperbolik fonksiyonlar .....	166
7.5-1 $y = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} x$ fonksiyonu .....	166
7.5-2 $y = \operatorname{Arg} \operatorname{sh} x$ fonksiyonu .....	169
7.5-3 $y = \operatorname{Arg} \operatorname{th} x$ fonksiyonu .....	170
7. Bölüme ait problemler .....	172

## 8. BÖLÜM

### PARAMETRİK DENKLEMLER

8.1 Parametrik denklem tanımı .....	175
8.2 Parametrik denklemlerde türev .....	178
8.2-1 Parametrik denklemlerde ikinci mertebe türevler .....	179
8.3 Parametrik denklemleriyle verilmeye rilerin asimptodlarının bulunması .....	182
8.3-1 Koordinat eksenlerine paralel asimptodlar .....	182
8.3-2 E ik asimptod .....	182
8.4 Parametrik denklemleriyle verilmeye rilerin çizimi .....	184
8. Bölüme ait problemler .....	188

## 9. BÖLÜM

### KUTUPSAL KOORDİNALAR

9.1 Kutupsal koordinatlar tanımı .....	193
9.2 Kutupsal koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasındaki bağlantılar .....	194
9.3 Dörunun kutupsal denklemi .....	195
9.4 Dairenin kutupsal denklemleri .....	197
9.5 Koniklerin kutupsal denklemleri .....	198
9.6 Kutupsal denklemi ile verilmiş bir eğrinin herhangibir noktasındaki teğeti ile kutupsalının arasındaki açının hesabı .....	199
9.7 Kutupsal denklemleriyle verilen iki eğrinin kesim açısı .....	201
9.8 Kutupsal teğet altı ve normal altı .....	202

## XII

9.9	Kutupsal denklemleriyle verilmeli eplerin asimptodlarının belirtilmesi .....	204
9.10	Kutupsal denklemiyle verilmeli eplerin çizimi .....	208
9.10-1	Simetri özelikleri .....	208
9.10-2	Kutupsal denklemi ile verilmeli eplerin çizimine ait örnekler .....	213
9.	Bölüme ait problemler .....	221

## 10. BÖLÜM

### SONSUZ KÜÇÜKLER

10.1	Tanım ve ba lıca özelikleri .....	224
10.2	Sonsuz küçüklerin mukayesesi .....	225
10.	Bölüme ait problemler .....	229

## 11. BÖLÜM

### D FERANS EL

11.1	Diferansiel tanımı .....	231
11.2	Diferansielin geometrik anlamı .....	234
11.3	Diferansiel kuralları .....	235
11.3-	1 Diferansiel tablosu .....	237
11.3-	2 Kapalı fonksiyonların diferansielleri .....	238
11.4	Yüksek mertebeden diferansieller .....	238
11.5	Yakla ik hesapta diferansielin kullanılması .....	240
11.6	Yay uzunlu unun diferansili (Kartezyen, parametrik ve kutupsal denklemlerde) .....	244
11.	Bölüme ait problemler .....	248

## 12. BÖLÜM

### E R L K, E R L K YARIÇAPI, E R L K DA RES , BASIT, MEBSUT

12.1	E rilik tanımı ve kartezyen denklemi ile verilmiş bir e ri nin e rili i .....	254
12.1-1	Parametrik denklemlerde e rilik .....	257

12.1-	2 Kutupsal denklemlerde e rilik .....	258
12.2	E rilik yarıçapı .....	260
12.3	E rilik dairesi, e rilik merkezi, basit ve mebsut e rileri	263
12.	Bölüme ait problemler .....	267

### 13. BÖLÜM

#### ORTALAMA TEOREM ; TAYLOR VE MACLAURIN FORMÜLLER ; BEL RS Z EK LLER

13.1	Rolle teoremi .....	271
13.2	Ortalama teoremi.....	273
13.2-1	Cauchy teoremi (iki fonksiyon için ortalama teoremi) .....	277
13.2-2	Ortalama formülünün genelleştirilmesi .....	279
13.3	Taylor ve Maclaurin formülleri .....	280
13.4	Belirsiz ekiller .....	286
13.4-1	$\frac{0}{0}$ belirsiz ekli (L'hospital kuralı) .....	286
13.4-2	$\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz ekli .....	288
13.4-3	$0 \times \infty$ belirsiz ekli .....	290
13.4-4	$\infty - \infty$ belirsiz ekli .....	292
13.4-5	$1^\infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ belirsiz ekilleri .....	293
13.	Bölüme ait problemler .....	296

### 14. BÖLÜM

#### BEL RS Z INTEGRAL

14.1	İkinci fonksiyon - Belirsiz integral .....	301
14.2	Belirsiz integralin tanımından çıkarılabilen özelikleri .....	302
14.3	Integral hesabı - Vasıtasız integrasyon .....	303
14.4	Vasıtılı integrasyon .....	305
14.4-1	Basit elemanlara ayırma ile integrasyon .....	305
14.4-2	De i ken de i tirilmesi yardımıyle integrasyon .....	306

## XIV

14.4-3	$\sqrt{a^2 - x^2}$ veya $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ yi içeren integraller .....	310
14.4-4	Kısmi integrasyon kuralı (Parparti) .....	314
14.4-5	$ax^2 + bx + c$ veya $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ yi içeren integraller .....	320
14.4-6	Trigonometrik ifadelerin integralleri .....	330
14.4-7	Rasyonel kesirlerin integralleri .....	335
14.4-8	irrasyonel cebirsel fonksiyonların integralleri.....	345
14.4-9	Bazı yüksek fonksiyonların integralleri .....	356
14.	Bölümde ait problemler .....	365

## 15. BÖLÜM

### BELİRLİ INTEGRAL

15.1	Bir eğri altındaki alanın hesabı .....	381
15.2	Bir toplamın limiti olarak integral .....	385
15.3	Belirli integralin bazı özelikleri .....	389
15.4	Belirli integralin geometrik uygulamaları .....	390
15.4-1	Kartezyen koordinatlarda alan hesabı .....	390
15.4-2	Kutupsal koordinatlarda alan hesabı .....	398
15.4-3	Hacim hesabı .....	401
15.4-4	Bir eğri yayının uzunluğu .....	410
15.4-5	Dönel yüzeylerin alanlarının hesabı .....	415
15.5	Bir fonksiyonun ortalama değerinin hesabı .....	419
15.6	Improper integraller .....	422
15.6-1	Birinci türden improper integraller .....	422
15.6-2	İkinci türden improper integraller .....	424
15.7	Yaklaşık integrasyon .....	426
15.7-1	Yamuklar kuralı .....	426
15.7-2	Simpson kuralı .....	429
15.	Bölümde ait problemler .....	432