

ВЫСШАЯ

МАТЕМАТИКА

в примерах и задачах

Учебное пособие

Том 2

Под редакцией Ю.Л. Геворкяна

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

в примерах и задачах

Учебное пособие

В двух томах

Том 2

под редакцией Ю.Л. Геворкяна

Харьков
Видавництво «Підручник НТУ «ХП»
2011

ББК22.1
В93
УДК 51

Рецензенты:

Ю. В. Гандель, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики Харьковского национального университета им.

В. Н. Каразина;

А.И. Колосов, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Харьковской государственной академии городского хозяйства.

Авторы: Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян,
В. Д. Крупка, Л. И. Курпа, Т. С. Полянская,
О. М. Прохорова, И. А. Токмакова, И. Н. Юхно.

У посібнику викладено методи вирішення основних типів завдань з курсів «Лінійна алгебра» і «Математичний аналіз». Кожен розділ містить необхідний теоретичний матеріал, що включає в себе основні визначення, формулювання теорем, докладні рішення прикладів, а також завдання для самостійної роботи з відповідями.

Призначається для студентів технічних вузів денної, заочної та дистанційної форм навчання, аспірантів, викладачів і наукових співробітників технічних університетів.

Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособие : в 2 т. /
В93 Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [и др.] / под ред.
Ю. Л. Геворкяна - Харьков: Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. -
376 с. — На рус. яз.

ISBN 978-966-2426-19-9 (полное издание)

ISBN 978-966-2426-21-2 (т. 2)

В пособии изложены методы решения основных типов задач по курсам «Линейная алгебра» и «Математический анализ». Каждый раздел содержит необходимый теоретический материал, включающий в себя основные определения, формулировки теорем, подробные решения примеров, а также задания для самостоятельной работы с ответами.

Предназначается для студентов технических вузов дневной, заочной и дистанционной форм обучения, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников технических университетов.

Ил. 78. Табл. 1. Библиогр.: 17 назв.

ББК22.1

УДК 51

© Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян,
В. Д. Крупка, Л. И. Курпа, Т. С. Полянская,
О. М. Прохорова, И. А. Токмакова, И. Н. Юхно, 2011
ISBN 978-966-2426-19-9 © Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011
ISBN 978-966-2426-21-2 (т. 2)

Оглавление

Глава 9. Дифференциальные уравнения	4
§56. Общие понятия и определения.....	4
§57. Дифференциальные уравнения первого порядка.....	5
Существование и единственность решения.....	5
Дифференциальные уравнения, не содержащие искомую функцию.....	7
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.....	7
Задачи для самостоятельного решения.....	10
Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.....	11
Задачи для самостоятельного решения.....	13
Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	14
Задачи для самостоятельного решения.....	17
Уравнение Бернулли.....	18
Задачи для самостоятельного решения.....	20
§58. Дифференциальные уравнения второго порядка.....	21
Общие определения.....	21
Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Уравнение вида $y'' = f(x)$	22
Задачи для самостоятельного решения.....	22
Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно переменной y	23
Задачи для самостоятельного решения.....	25
Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно переменной x	26
Задачи для самостоятельного решения.....	28
§59. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка.....	29
Основные понятия.....	29
Построение ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами.....	30
ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.....	31
Задачи для самостоятельного решения.....	33
Отыскание частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида: $L[y] = P_m(x)e^{\gamma x}$	34
ЛНДУ вида: $L[y] = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, $L[y] = P_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$	36

Принцип суперпозиции.....	38
Задачи для самостоятельного решения.....	38
Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).....	40
Задачи для самостоятельного решения.....	42
§60. Системы линейных дифференциальных уравнений.....	44
Основные понятия.....	44
Метод исключения решения систем ЛДУ.....	45
Матричный способ решения однородной системы ЛДУ с постоянными коэффициентами.....	46
Задачи для самостоятельного решения.....	50
Глава 10. Ряды.....	52
§ 61. Числовые ряды с произвольными и знакопостоянными членами	52
Основные понятия	52
Задачи для самостоятельного решения.....	54
Необходимый признак сходимости.....	54
Задачи для самостоятельного решения.....	55
Достаточные признаки сходимости числовых рядов с знакопостоянными членами.....	56
Признаки сравнения.....	56
Предельная форма признака сравнения.....	57
Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$	58
Задачи для самостоятельного решения.....	59
Признак Даламбера.....	59
Задачи для самостоятельного решения.....	60
Радикальный признак Коши.....	60
Задачи для самостоятельного решения.....	60
Интегральный признак Коши.....	61
Задачи для самостоятельного решения.....	62
Числовые ряды с произвольными членами. Условная и абсолютная сходимось.....	62
Задачи для самостоятельного решения.....	64
§ 62 . Функциональные ряды.....	65
Понятие функционального ряда. Область сходимости.....	65
Задачи для самостоятельного решения.....	67

Правильная, равномерная сходимость функционального ряда.....	67
Задачи для самостоятельного решения.....	68
Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.....	68
§ 63. Степенные ряды.....	69
Интервал и радиус сходимости степенного ряда.....	69
Задачи для самостоятельного решения.....	72
Свойства степенных рядов.....	72
Задачи для самостоятельного решения.....	76
§ 64. Ряды Тейлора и Маклорена.....	76
Формулы Тейлора и Маклорена.....	76
Ряды Тейлора и Маклорена.....	77
Задачи для самостоятельного решения.....	80
Ряды Маклорена элементарных функций.....	81
Задачи для самостоятельного решения.....	84
§ 65. Некоторые приложения степенных рядов.....	85
Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.....	85
Задачи для самостоятельного решения.....	86
Приближенные вычисления интегралов с помощью степенных рядов.....	88
Задачи для самостоятельного решения.....	90
§ 66. Ряды Фурье.....	90
Разложение в ряд Фурье $2l$ -периодической функции.....	90
Разложение в ряд Фурье 2π -периодической функции.....	93
Разложение в ряд Фурье четных и нечетных $2l$ -периодических функций.....	95
Задачи для самостоятельного решения.....	99
Применение рядов Фурье для определения сумм числовых рядов.....	102
Задачи для самостоятельного решения.....	103
Глава 11. Двойные и тройные интегралы.....	104
§ 67. Приведение двойного интеграла к повторному.....	104
Задачи для самостоятельного решения.....	110
§ 68. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.....	112
Задачи для самостоятельного решения.....	118
§ 69. Двойной интеграл в полярной системе координат.....	121
Задачи для самостоятельного решения.....	128

§ 70. Механические приложения двойных интегралов.....	131
Задачи для самостоятельного решения.....	135
§ 71. Основные свойства тройных интегралов и их приложения.....	136
Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах.....	139
Задачи для самостоятельного решения.....	144
§ 72. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.....	147
Задачи для самостоятельного решения.....	151
§ 73. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.....	153
Задачи для самостоятельного решения.....	157
Глава 12. Криволинейные и поверхностные интегралы.....	160
§ 74. Криволинейные интегралы.....	160
Криволинейные интегралы первого рода.....	160
Вычисление криволинейных интегралов первого рода.....	161
Задачи для самостоятельного решения.....	164
Приложения криволинейных интегралов первого рода к решению некоторых задач.....	165
Задачи для самостоятельного решения.....	166
Криволинейные интегралы второго рода.....	167
Физический смысл криволинейного интеграла второго рода.....	168
Вычисление криволинейных интегралов второго рода.....	169
Задачи для самостоятельного решения.....	173
Криволинейные интегралы по замкнутому контуру.....	174
Формула Грина.....	177
Задачи для самостоятельного решения.....	181
Условие независимости интеграла от пути интегрирования.....	182
Нахождение функции по ее полному дифференциалу.....	184
Задачи для самостоятельного решения.....	188
§ 75. Поверхностные интегралы.....	189
Поверхностные интегралы первого рода.....	189
Вычисление поверхностных интегралов первого рода.....	190
Задачи для самостоятельного решения.....	195
Приложения поверхностных интегралов первого рода.....	195
Задачи для самостоятельного решения.....	199

Понятие ориентированной поверхности.....	200
Поверхностные интегралы второго рода.....	201
Физический смысл поверхностных интегралов второго рода.....	203
Вычисление поверхностных интегралов второго рода.....	203
Задачи для самостоятельного решения.....	211
Формула Остроградского.....	212
Задачи для самостоятельного решения.....	218
Формула Стокса.....	218
Задачи для самостоятельного решения.....	225
Глава 13 . Элементы теории поля.....	227
§ 76. Скалярное поле.....	227
Производная по направлению.....	228
Задачи для самостоятельного решения.....	232
Градиент скалярного поля.....	233
Свойства градиента скалярного поля.....	234
Задачи для самостоятельного решения.....	238
§ 77. Векторное поле.....	239
Задачи для самостоятельного решения.....	244
Поток векторного поля.....	244
Задачи для самостоятельного решения.....	250
Дивергенция.....	251
Свойства дивергенции.....	252
Циркуляция векторного поля.....	253
Ротор векторного поля.....	256
Формула Стокса в векторной форме.....	257
Свойства ротора.....	259
Потенциальное поле.....	259
Критерий потенциальности поля.....	260
Задачи для самостоятельного решения.....	263
Глава 14. Элементы теории функции	
 комплексного переменного.....	266
§ 78. Комплексные числа и действия над ними.....	266
Алгебраическая форма комплексного числа.....	266
Действия над комплексными числами в алгебраической форме.....	266
Задачи для самостоятельного решения.....	268

Геометрическое изображение, модуль и аргумент комплексного числа.....	269
Задачи для самостоятельного решения.....	272
Тригонометрическая форма комплексного числа.....	273
Задачи для самостоятельного решения.....	277
Показательная форма комплексного числа.....	279
Задачи для самостоятельного решения.....	280
§ 79. Основные понятия теории функций комплексного переменного.....	281
Понятие области.....	281
Задачи для самостоятельного решения.....	285
§ 80. Понятие функции комплексного переменного.....	286
Задачи для самостоятельного решения.....	289
§ 81. Основные элементарные функции комплексного переменного.....	290
Задачи для самостоятельного решения.....	297
§ 82. Дифференцирование функций комплексного переменного.....	299
Условия Коши-Римана. Аналитические функции.....	299
Задачи для самостоятельного решения.....	301
Гармонические функции.....	302
Задачи для самостоятельного решения.....	305
Интегрирование функций комплексного переменного.....	306
Свойства интеграла от функции комплексного переменного.....	307
Задачи для самостоятельного решения.....	311
Интегральная формула Коши.....	313
Задачи для самостоятельного решения.....	317
§ 83. Ряды в комплексной области.....	317
Числовые ряды с комплексными членами.....	317
Степенные ряды.....	319
Задачи для самостоятельного решения.....	322
Ряд Тейлора.....	323
Задачи для самостоятельного решения.....	325
Ряд Лорана.....	326
Задачи для самостоятельного решения.....	329
§ 84. Изолированные особые точки. Вычеты.....	331
Классификация изолированных особых точек.....	331
Задачи для самостоятельного решения.....	334

Вычет функции. Вычисление вычетов.....	335
Задачи для самостоятельного решения.....	338
§ 85. Основная теорема о вычетах.....	338
Задачи для самостоятельного решения.....	341
Глава 15. Операционное исчисление.....	342
§ 86. Преобразование Лапласа. Основные понятия.....	342
§ 87. Свойства преобразования Лапласа.....	344
§ 88. Свертка функций. Теорема о свёртке. Формула Дюамеля.....	352
§ 89. Применения преобразования Лапласа.....	354
Преобразование Лапласа периодической функции.....	354
Решение дифференциальных уравнений.....	357
Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	358
Решение интегральных уравнений.....	358
§ 90. Теоремы разложения.....	359
Задачи для самостоятельного решения.....	360
Таблица изображений Лапласа.....	367
Список рекомендованной литературы.....	368