

51
В17

**В. А. ВАНИН,
Ю. Л. ГЕВОРКЯН, А. Л. ГРИГОРЬЕВ**

СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

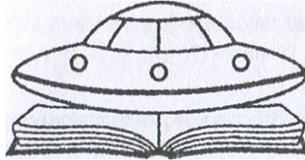
ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ИНЖЕНЕРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ОБЩИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 3

Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»



ФУНДАМЕНТАЛЬНА ОСВІТА
ДЛЯ ВИСОКИХ ТЕХНОЛОГІЙ

В. А. ВАНИН, Ю. Л. ГЕВОРКЯН, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ИНЖЕНЕРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальные главы курса высшей математики

В трёх томах

Том 3

Харьков
Підручник НТУ «ХПІ»
2012

УДК 51(075)

ББК 22.1я7

В17

Рецензенты:

А. Г. Николаев, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный аэрокосмический университет им. М. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»;

Е. Я. Хруслов, д-р физ.-мат. наук, проф., академик НАНУ. Физико-технический институт низких температур им. Б. Е. Веркина НАН Украины

Интеллектуальная собственность авторов. Все права защищены.

При перепечатке материалов пособия ссылка на первоисточник обязательна.

Серия основана в 2010 году

Містить систематичний виклад інтегралів по мірі та теорії поля, орієнтований на використання відповідних методів для вирішення практичних інженерних задач. Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників технічних університетів.

Ванин В. А.

В17 Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования : специальные главы курса высшей математики : в 3 т. – Т. 3 / В. А. Ванин, Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. – Х. : Підручник НТУ «ХП», 2012. – 464 с. – На рус. яз. – (Серия «Фундаментальна освіта для високих технологій»).

ISBN 978-966-2426-16-8 (полное собр.)

ISBN 978-966-2426-63-2 (том 3)

Содержит систематическое изложение интегралов по мере и теории поля, ориентированное на использование соответствующих методов для решения практических инженерных задач. Предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников технических университетов.

Ил.: 389 рис. + 99 порт. Табл. 1. Библиогр.: 41 назв.

УДК 51(075)

ББК 22.1я7

ISBN 978-966-2426-16-8 (полное собр.)

ISBN 978-966-2426-63-2 (том 3)

© Ванин В. А., Геворкян Ю. Л.,
Григорьев А. Л., 2012

© Підручник НТУ «ХП», 2012

Оглавление

Предисловие.....	9
Часть 1.	
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы по мере.....	13
Глава 1. Кратные интегралы.....	14
§ 1. Замкнутые области.....	14
<i>Перфорированная пластина. Поверхность опоры.</i>	
§ 2. Двойной интеграл: определения и свойства.....	16
<i>Жорданова сеть. Приграничная полоса. Интеграл, равный объёму пирамиды. Оценка для интегрирования по кругу.</i>	
§ 3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.....	22
<i>Интеграл по прямоугольной области. Форма границы влияет на порядок интегрирования. Выбор порядка для правильной области. Экспоненты интегрируются просто. Квадрат в квадрате.</i>	
§ 4. Двойной интеграл в полярных координатах.....	26
<i>Цилиндрическое отверстие в шаре. Псевдополярные координаты. Момент инерции эллипса.</i>	
§ 5. Общая замена переменных в двойном интеграле.....	31
<i>Эллиптический якобиан. Якобиан для косоугольной системы.</i>	
§ 6. Тройной интеграл: определения и свойства.....	34
<i>Трёхмерные сети. Лемма о «приграничном слое». Нулевое продолжение функции. Методы Монте-Карло.</i>	
§ 7. Сведение тройного интеграла к повторному.....	38
<i>Правильные и неправильные тела. Интеграл по пирамиде. Учет и контроль. Интеграл «два в одном».</i>	
§ 8. Замена переменных в тройном интеграле.....	42
<i>Тройной интеграл по симметричной области. Объём эллипсоида. «Гуттаперчевый якобиан».</i>	
Глава 2. Криволинейные и поверхностные интегралы.....	50
§ 9. Спряжляемые кривые.....	50
<i>Длина конической спирали. Трёхгранник Френе. Что означает термин «спряжляемая»? Длины плоских спиралей. Натуральный параметр кривой.</i>	

§ 10. Интеграл по длине дуги.....	55
<i>Неплоская криволинейная трапеция. Интегрирование по периметру прямоугольника. Момент инерции цилиндрической спирали. Якобиан криволинейного интеграла. Несобственный криволинейный интеграл.</i>	
§ 11. Квадрируемые поверхности.....	62
<i>Дифференциал площади в цилиндрических координатах. Дифференциал площади в сферических координатах. «Сапог Шварца». Касательные и секущие плоскости: интуиция молчит. Натуральные параметры цилиндрической поверхности. Геодезические линии. Нормальные геодезические параметры. Площадь крыши цирка. Площадь сферического купола.</i>	
§ 12. Интеграл по площади поверхности.....	74
<i>Объём наклонной башни. Интегрирование по граням куба. Момент инерции сферы. Якобиан для дирижабля.</i>	
Глава 3. Интегралы по мере.....	82
§ 13. Мера замкнутой области. Интеграл по мере.....	82
<i>Иерархия мер. «Древние греки не знали меры». Мера Жордана. Геодезические линии, кривизна и мера пространства. Многомерный интеграл. Группировка интегралов. Интегрирование разрывной функции.</i>	
§ 14. Физические и технические приложения интегралов по мере.....	91
<i>Объём параболоида. Площадь эллипса. Длина листа в рулоне. Масса Солнца. Масса конической шайбы. Момент инерции шайбы. Момент инерции цилиндра. Центр масс для квадранта эллипса. Центр масс для первого октанта эллипсоида. Центр масс сферического купола. Теорема о моменте инерции относительно смещённой оси.</i>	
§ 15. Несобственные интегралы по мере.....	100
<i>Интегрирование по полосе. Шкала сходимости степенных интегралов. Оценка двойного несобственного интеграла. Энергия центрального поля. Моменты экспоненциальной функции. Оценка для интеграла от осциллирующей функции. Круги на поверхности плиты. Интегрируемые и неинтегрируемые особенности. Логарифмическая особенность. Несобственный интеграл от нечётной функции. Степенной интеграл по всему пространству. Неограниченность функции на границе области. Интегрирование функции, неограниченной на разрезе. Несобственные интегралы третьего рода.</i>	
§ 16. Векторный интеграл по мере и его приложения.....	121
<i>Теорема о центре масс многосвязной области. Поле заряженного цилиндра. Магнитное поле петли с током. Поле соленоида. Интеграл Пуассона. Взаимодействие вращающихся дисков. Гравитационная индукция: миф или реальность? Похожие противоположности. Гравитационное взаимодействие шаров. Поле заряженного шара. Путешествие к центру астероида. Равновесие Солнца. Электростатическая защита. Что первично: интеграл или интегральная сумма?</i>	

Часть 2.

Теория поля	147
Глава 4. Начала векторного анализа	148
§ 17. Основные понятия и классификация полей.....	148
<i>Завещание Эйнштейна. Связанность физического поля. Квазистационарное поле. Силовые поля внутри атома. Тензорные поля.</i>	
§ 18. Методы визуализации поля. Векторные линии и трубки.....	157
<i>Сечения параболоида. Мнимое опровержение очевидного. Сечения четырёхмерной сферы. Эллипсоидальные поверхности уровня. Векторные линии на цилиндре. Винтовое движение. Центр для поля вращений. Узел поля. Седло плоского векторного поля. Собственные векторы и фокус линейного поля. Вихревой источник линейного поля. Векторные линии однородного поля. Векторные линии центрального поля и диполя.</i>	
§ 19. Элементарные поля источников.....	170
<i>Законы сохранения поля. Поляризация вещества и ... поля. Линейная нелинейность. Поле прямолинейного проводника с током. Поле заряженного отрезка. Изоморфизм плоских векторных полей. Неэлементарное поле нуклона.</i>	
§ 20. Ограниченность поля источников.....	182
<i>Условие Липшица. Краевые эффекты. Концентраторы поля. Тайны пирамиды. Ближнее поле проводника с током. Поле заряженного стержня.</i>	
§ 21. Асимптотика дальнего поля.....	196
<i>Центр приведения источников поля. Центрирование, диполя и диполей. Монопольное поле. Диполи и мультиполи. Монопольная асимптотика магнитного поля. Дальнее поле петли с током. Дипольные моменты петель. Асимптоты плоских полей. Линейность и симметрия асимптоты. Физические диполи фундаментальных полей.</i>	
§ 22. Области непрерывности и дифференцируемости поля.....	212
<i>Регулярная область поля. Ударные волны. Атмосферный фронт. Поле грозового облака. Поле заряженной поверхности. Векторный потенциал поверхностных токов. Сингулярные точки физических полей. Внутреннее поле скалярных источников.</i>	
Глава 5. Инвариантные производные поля	232
§ 23. Градиент скалярного поля.....	232
<i>Оператор Гамильтона. Градиент кулоновского потенциала. Определение напряжённости поля по его скалярному потенциалу. Производные квадрата радиус-вектора. Производные и линии уровня скалярно-</i>	

го поля. Потенциальные течения. Градиент температуры или концентрации. Нормальные напряжения и токи смещения Максвелла. Гармоничность кулоновского потенциала. Гравитационное давление. Вольвокс, или галактика в пруду. «Место под солнцем» расположено на коротационной окружности. Звёздные пленники галактического диска. Аксиальные колебания звёзд Галактики.

§ 24. Производные векторного поля. Первая теорема Гельмгольца..... 251

Поле скоростей движения сплошной среды. Ротор и угловая скорость. Линейные деформации и след тензора. Дивергенция радиус-вектора. Углы скашивания и нелинейные инварианты тензора. Условие Громеки.

§ 25. Специальные векторные поля. Вторая теорема Гельмгольца..... 260

Условие соленоидальности центрального поля. Теорема Эренфеста. Симметричные решения уравнения Лапласа. Градиент, дивергенция и ротор в криволинейных координатах. Спектральные свойства тензора специального поля. Специальные плоские поля. Поле направлений.

§ 26. Инвариантные производные второго порядка..... 274

Перестановочность производных. Волновые уравнения. Волны Даламбера. Уравнение и метод Фурье. Уравнения Гельмгольца и Клейна-Гордона. Цилиндрические волны переноса. Уравнение Шредингера. Волновые поля. Температурные волны. Изохронные и синфазные колебания. Синфазные колебания кулоновского поля. Почему протон такой массивный?

Глава 6. Определённые интегралы векторного поля..... 294

§ 27. Поток векторного поля и методы его вычисления..... 294

Ориентированные поверхности. Лист Мёбиуса. Бутылки Клейна. Поток сквозь сферу. Поток плоского поля.

§ 28. Поверхностные интегралы второго рода..... 299

Поток поля сквозь конус. Поверхностный интеграл по треугольной площадке. Поверхностный интеграл по граням пирамиды.

§ 29. Формула Гаусса-Остроградского..... 304

Доказательство эффективности формулы. Поток поля через параболоид с крышкой. Поток через часть параболоида. Что втекает, то и вытекает. Формула Гаусса – Остроградского для плоского поля.

§ 30. Вихревые трубки. Третья теорема Гельмгольца..... 309

Деформации плазмы. Вихревые нити атмосферного вихря. Укорачивание вихревой трубки в зазоре электромагнита. Механизм торможения корабля. Катастрофы дирижаблей. Магниты Кеплера, вихри Декарта и «гравитоны» Лесажа. Силовые линии полей Фарадея. Неразрывная связь. Изоморфизм материального и информационного полей.

§ 31. Инвариантное определение дивергенции. Закон Гаусса.....	320
<i>Пузырьковая среда. Сохранение потока и закон Гаусса для плоского поля. Напряжённость центрального гравитационного поля.</i>	
§ 32. Линейный интеграл и циркуляция: свойства и методы вычисления.....	326
<i>Движущие силы электромагнетизма. Линейные интегралы центрального поля. Циркуляция скорости вращения.</i>	
§ 33. Криволинейные интегралы второго рода.....	329
<i>Интеграл по цилиндрической спирали. Интеграл по дуге эллипса. Зависимость интеграла от пути интегрирования.</i>	
§ 34. Формулы Грина и Стокса.....	332
<i>Независимое доказательство. Циркуляция по сторонам треугольника. Геометрическое применение формулы Грина. Циркуляция напряжённости магнитного поля. Циркуляция по сечению конуса. Теорема Кельвина. «Четвёртая теорема Гельмгольца».</i>	
§ 35. Инвариантное определение ротора. Закон полного тока.....	341
<i>Уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Условие Лоренца. Уравнения Максвелла для механических колебаний упругой среды. Вибромеханика сплошной упругой среды. Изоморфизм Пуанкаре. «Лестница Максвелла», или почему его уравнения признали великими. Магнитные монополи. Вектор энергии и теорема Умова-Пойтинга.</i>	
Глава 7. Потенциалы поля и общие теоремы векторного анализа.....	358
§ 36. Условия независимости линейного интеграла от пути интегрирования.....	358
<i>«Своё», «чужое» или «иное» векторное поле. Групповые свойства специальных полей. Первичность определения для математики и физики.</i>	
§ 37. Методы вычисления потенциалов для полей специального вида.....	362
<i>Потенциал «чужого» поля. Криволинейный интеграл с переменным пределом интегрирования. Интегрирование системы для векторного потенциала.</i>	
§ 38. Комплексный потенциал плоского лапласового поля.....	366
<i>Восстановление аналитической функции. Обтекание цилиндра. Парадокс Даламбера. Обтекание вращающегося цилиндра. Роторы Флетнера. Функция Жуковского и подъёмная сила крыла. Журавлиный клин.</i>	
§ 39. Свойства гармонических функций.....	379
<i>Принцип электростатической защиты. Интеграл Коши. Интегралы Пуассона. Бигармонические уравнения и функции.</i>	

§ 40. Обратная задача векторного анализа.....	383
<i>Отказ от реликтового поля. «Неконструктивность» потенциалов Пуассона в нестационарной задаче. Потенциалы Ньютона. Электродинамические потенциалы. Термодинамический потенциал и температурная волна движущегося источника. Преобразование Галилея. Преобразование Лоренца. Электромагнитное поле заряда. Релятивистская инвариантность уравнений в частных производных. Парадокс Майкельсона-Морли. Фитцджеральдово сокращение тел. Теории «увлечения эфира». «Эфирный ветер» в опытах Миллера. Теории газо-подобного эфира и опыты Галаева. Теория «вытеснения пространства». И всё-таки она ... пульсирует.</i>	
§ 41. Общие теоремы и аналогии векторного и скалярного анализа.....	406
<i>Работа потенциального поля. Поток магнитной индукции. Интегрирование по частям в линейном интеграле. Интегрирование по частям при помощи формулы Грина. Формулы Грина для гармонических функций. Потенциалы простого и двойного слоя. Скалярный и векторный анализ колебаний цилиндрического стержня. Потенциалы Герца и волны переноса для стержня. Кручение стержня. Энергия и масса фонона. Преобразование Лоренца для волн переноса в стержне. «Параллельные миры» цилиндрического стержня и сферы. Механика поля синфазных колебаний упругой среды. Источник энергии для однородного поля колебаний давления в среде Максвелла. Синфазное поле спинов и среда Коссера. Принцип Маха. Волны инерционного давления. Реальное поле ускорений и виртуальное поле сил инерции. Гравитация вещества и кристаллизация эфира. Будущее высоких технологий. Гравитационный диполь. Общий пульс и некоторые парадоксы времени. Тайна Нострадамуса. Эйнштейн как образец для подражания.</i>	
Заключение.....	450
Список дополнительной литературы.....	453
Краткий именной указатель.....	455
Алфавитный указатель терминов.....	457