

517.95  
П84



Н.П. ПРОЦАХ  
Б.Й. ПТАШНИК

# НЕЛІНІЙНІ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ

$$u_t + xu_y - u_{xx} = f(x, y, t)$$

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ  
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

Н. П. ПРОЦАХ, Б. Й. ПТАШНИК

НЕЛІНІЙНІ  
УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ  
РІВНЯННЯ  
ТА ВАРІАЦІЙНІ  
НЕРІВНОСТІ

---

*ПРОЕКТ*  
*«НАУКОВА КНИГА»*

---

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2017

УДК 517.95

У праці досліджено однозначну розв'язність і встановлено оцінки розв'язків у обмежених і необмежених областях мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь із нелінійностями в головній частині та в молодших членах, для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, які вироджуються на гіперплощині задання початкових даних, та нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегро-диференціальним оператором, задач без початкових умов для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з монотонними та немонотонними головними частинами, обернених задач визначення множників, залежних від часової змінної, у правих частинах слабконелінійних ультрапараболічних рівнянь, а також нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей другого та вищих порядків. Крайові задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь є моделями багатьох явищ фізики, механіки, біології, економіки та ін. Результати монографії можна використати в теорії опціонів, досліджуючи чисельності популяцій та моделюючи процеси дифузії з інерцією тощо.

Для науковців, аспірантів і студентів старших курсів, які спеціалізуються в галузі диференціальних рівнянь і математичної фізики.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук М. М. БОКАЛО,  
доктор фізико-математичних наук С. Д. ІВАСИШЕН

*Затверджено до друку вченою радою  
Інституту прикладних проблем механіки  
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
(протокол № 8 від 31 серпня 2015 р.)*

***Видання здійснено за кошти Цільової комплексної програми  
«Створення та розвиток науково-видавничого комплексу  
НАН України»***

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *О. А. Микитенко*

© Н. П. Процах, Б. Й. Пташник, 2017  
© НВП «Видавництво “Наукова думка”  
НАН України», дизайн, 2017

ISBN 978-966-00-1575-3

## ЗМІСТ

### ПЕРЕДМОВА

<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ І СКОРОЧЕНЬ</b>	<b>5</b>
<b>1. РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ТА ЗАСТОСУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ</b>	<b>7</b>
1.1. Лінійні ультрапараболічні рівняння.....	7
1.1.1. Означення та приклади.....	7
1.1.2. Задача Коші.....	8
1.1.3. Мішані та крайові задачі.....	13
1.2. Нелінійні ультрапараболічні рівняння.....	18
1.2.1. Задача Коші.....	18
1.2.2. Мішані задачі.....	20
1.2.3. Обернені задачі.....	24
1.3. Процеси, описані ультрапараболічними рівняннями.....	25
1.3.1. Випадкові рухи.....	25
1.3.2. Броунівський рух.....	25
1.3.3. Динаміка росту популяцій.....	26
1.3.4. Європейські, азіатські та американські опціони.....	27
<b>2. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ</b>	<b>29</b>
2.1. Функційні простори та їхні властивості.....	29
2.2. Методи теорії диференціальних рівнянь.....	33
2.2.1. Метод Фаєдо–Гальоркіна.....	33
2.2.2. Метод компактності.....	34
2.2.3. Метод монотонності.....	35
2.2.4. Метод заміни основного простору.....	35
<b>3. МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ</b>	<b>36</b>
3.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями в головній частині.....	36

3.2. Рівняння зі степеневими нелінійностями в молодших членах.....	52
3.2.1. Випадок, коли показник нелінійності більший ніж 2.....	52
3.2.2. Випадок, коли показник нелінійності належить проміжку (1; 2].	64
3.3. Рівняння з подвійними степеневими нелінійностями.....	65
3.3.1. Випадок сталих показників степеневих нелінійностей.....	65
3.3.2. Випадок змінних показників степеневих нелінійностей.....	85
3.4. Рівняння з ліпшицевими нелінійностями.....	93
3.5. Рівняння, збурені інтегро-диференціальним доданком типу оператора пам'яті.....	100
3.6. Рівняння з виродженням на гіперплощині задання початкових даних .....	109
3.6.1. Виродження біля похідної за часовою змінною від шуканої функції.....	109
3.6.2. Виродження біля других похідних шуканої функції за про- сторовими змінними.....	123
3.7. Рівняння з немонотонними головними частинами .....	130
3.8. Рівняння в нециліндричних областях.....	140
<b>4. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРА- БОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ</b>	<b>149</b>
4.1. Мішані задачі в необмежених за просторовими змінними областях .....	149
4.1.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями.....	150
4.1.2. Рівняння з інтегро-диференціальним доданком типу опера- тора пам'яті.....	161
4.2. Мішані задачі в необмежених за часовою змінною областях.....	163
4.2.1. Рівняння зі степеневими нелінійностями.....	163
4.2.2. Рівняння з інтегро-диференціальним доданком типу опера- тора пам'яті.....	167
4.3. Задачі без початкових умов.....	172
4.3.1. Рівняння з нелінійностями в молодших членах.....	172
4.3.2. Напівлінійні рівняння.....	183
4.3.3. Рівняння з подвійними степеневими нелінійностями зі змін- ними показниками.....	193
4.3.4. Рівняння з немонотонними головними частинами.....	200
<b>5. НЕЛІНІЙНІ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВ- НОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ І НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ</b>	<b>206</b>
5.1. Варіаційні нерівності з початковою умовою.....	206
5.1.1. Нерівності другого порядку.....	206
5.1.2. Нерівності вищих порядків.....	219

5.2. Варіаційні нерівності без початкових умов .....	222
5.2.1. Нерівності другого порядку.....	222
5.2.2. Нерівності вищих порядків.....	236

**6. ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ПРАВИХ ЧАСТИН**

<b>СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ</b>	<b>239</b>
6.1. Існування та єдиність розв'язку.....	239
6.2. Асимптотична поведінка розв'язку.....	254

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**