

І. В. Алексєєва  
О. О. Диховичний

51  
М 34

В. О. Гайдей  
Л. Б. Федорова

# МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

## Том 3



- Інтегральне числення функцій однієї змінної
- Інтегральне числення функцій кількох змінних
- Теорія поля
- Диференціальні рівняння

 **КОНДОР**

І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей,  
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

# МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 3

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як підручник для студентів технічних університетів*



Київ  
2021

УДК [517.3+517.9](075.8)

М34

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 7 від 25. 06. 2018 р.)*

Рецензенти:

*В. В. Гавриленко* — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету,

*П. В. Задерей* — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технологій та дизайну,

*Б. В. Олійник* — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

М34

Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. В. Федорова ; за ред. О. І. Клєсова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2021. — Т. 3. — 456 с.

ISBN 978-617-7939-84-8

«Математика в технічному університеті» є навчальним комплексом, що складається з підручника та практикуму. Теоретична і практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики бакалавріату технічних університетів. Комплекс може бути застосований для забезпечення як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Для студентів технічних університетів.

ISBN 978-617-7939-84-8

УДК [517.3+517.9](075,8)

© І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей,  
О. О. Диховичний, Л. В. Федорова, 2021  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021  
© Видавничий дім «Кондор», 2021

# ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	9
<b>Основні позначення</b> .....	13
<b>Розділ 9. Інтегральне числення функцій однієї змінної</b> .....	15
9.1. Невизначений інтеграл.....	17
9.1.1. Первісна.....	17
9.1.2. Невизначений інтеграл.....	18
9.1.3. Основні правила інтегрування.....	19
9.1.4. Основні формули інтегрування.....	20
9.2. Основні методи інтегрування.....	22
9.2.1. Метод безпосереднього інтегрування.....	22
9.2.2. Метод інтегрування заміною змінної.....	23
9.2.3. Уведення функції під знак диференціала.....	24
9.2.4. Метод інтегрування частинами.....	26
9.2.5. Узагальнений метод інтегрування частинами.....	28
9.3. Інтегрування раціональних функцій.....	29
9.3.1. Раціональні функції.....	29
9.3.2. Розклад на елементарні дроби.....	30
9.3.3. Метод невизначених коефіцієнтів.....	31
9.3.3. Інтегрування раціональних дробів.....	34
9.4. Інтегрування тригонометричних виразів.....	35
9.4.1. Універсальна тригонометрична підстановка.....	35
9.4.2. Окремі випадки підстановок.....	37
9.4.3. Перетворення підінтегрального виразу.....	38
9.5. Інтегрування ірраціональних виразів.....	39
9.5.1. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей.....	39
9.5.2. Інтегрування квадратичних ірраціональностей.....	40
9.5.3. Інтегрування диференціального біному.....	41
9.6. Визначений інтеграл за відрізком.....	42
9.6.1. Задача про площу плоскої фігури.....	42
9.6.2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком.....	43
9.6.3. Умови інтегровності.....	45
9.6.4. Властивості визначеного інтеграла.....	46
9.6.5. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє.....	47
9.7. Методи обчислення визначеного інтеграла.....	48
9.7.1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею.....	49
9.7.2. Формула Ньютона — Ляйбніца.....	50
9.7.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.....	52
9.7.4. Інтеграл від парних, непарних і періодичних функцій.....	52
9.7.5. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	54

9.8. Невластиві інтеграли.....	54
9.8.1. Невластивий інтеграл з нескінченними межами інтегрування (1-го роду).....	55
9.8.2. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 1-го роду.....	58
9.8.3. Невластиві інтеграли від необмежених функцій (2-го роду).....	59
9.8.4. Ознаки збіжності невластивих інтегралів 2-го роду.....	60
9.9. Застосування визначеного інтеграла.....	61
9.9.1. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутних координатах.....	62
9.9.2. Обчислення площі криволінійного сектора в полярних координатах.....	64
9.9.3. Об'єм тіла.....	65
9.9.4. Обчислення об'єму тіла обертання та площі поверхні обертання.....	66
9.9.5. Деякі фізичні застосування.....	67
Запитання та завдання для самоконтролю.....	68
Формули, твердження, алгоритми.....	87
Практикум 9.1. Метод безпосереднього інтегрування.....	99
Практикум 9.2. Метод заміни змінної.....	104
Практикум 9.3. Метод інтегрування частинами.....	110
Практикум 9.4. Інтегрування раціональних функцій.....	115
Практикум 9.5. Інтегрування тригонометричних виразів.....	125
Практикум 9.6. Інтегрування ірраціональних виразів.....	130
Практикум 9.7. Обчислення визначених інтегралів.....	138
Практикум 9.8. Застосування визначених інтегралів.....	147
Практикум 9.9. Обчислення та дослідження невластивих інтегралів.....	155
Основні поняття та вміння.....	162
<b>Розділ 10. Інтегральне числення функцій кількох змінних.....</b>	<b>163</b>
10.1. Інтеграли за геометричними об'єктами.....	165
10.1.1. Міри геометричних об'єктів.....	165
10.1.2. Визначений інтеграл за геометричним об'єктом.....	166
10.1.3. Властивості інтегралів за геометричними об'єктами.....	168
10.2. Подвійні інтеграли.....	169
10.2.1. Задача про об'єм криволінійного циліндра.....	170
10.2.2. Поняття подвійного інтеграла.....	171
10.2.3. Основні властивості подвійного інтеграла.....	172
10.2.4. Обчислення подвійного інтеграла у ПДСК.....	173
10.2.5. Подвійний інтеграл у полярних координатах.....	175
10.2.6. Загальний випадок заміни змінної.....	177
10.2.7. Застосування подвійних інтегралів.....	179
10.3. Потрійні інтеграли.....	180
10.3.1. Означення потрійного інтеграла.....	181
10.3.2. Основні властивості потрійного інтеграла.....	182
10.3.3. Обчислення потрійного інтеграла.....	182
10.3.4. Заміна змінних у потрійному інтегралі.....	183
10.3.5. Перехід до сферичних координат у потрійному інтегралі.....	184

---

10.3.6. Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі.....	185
10.3.7. Застосування потрійного інтеграла.....	186
10.4. Криволінійні інтеграли першого роду.....	188
10.4.1. Задача про довжину дуги кривої.....	188
10.4.2. Диференціал довжини дуги кривої.....	189
10.4.3. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду.....	190
10.4.4. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду.....	191
10.4.5. Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду.....	192
10.4.6. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду.....	193
10.5. Криволінійні інтеграли другого роду.....	194
10.5.1. Задача про роботу.....	194
10.5.2. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду.....	195
10.5.3. Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду.....	197
10.5.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду.....	198
10.5.5. Формула Остроградського — Гріна.....	199
10.5.6. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування.....	201
10.5.7. Відновлення функції за її повним диференціалом.....	203
10.5.8. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду.....	205
10.6. Поверхневі інтеграли першого роду.....	206
10.6.1. Задача про площу поверхні.....	206
10.6.2. Означення поверхневого інтеграла 1-го роду.....	208
10.6.3. Основні властивості поверхневого інтеграла 1-го роду.....	208
10.6.4. Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду.....	209
10.6.5. Застосування поверхневого інтеграла 1-го роду.....	210
10.7. Поверхневі інтеграли другого роду.....	210
10.7.1. Орієнтація поверхні.....	210
10.7.2. Означення поверхневого інтеграла 2-го роду.....	211
10.7.3. Основні властивості поверхневого інтеграла 2-го роду.....	213
10.7.4. Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду.....	214
10.7.5. Формула Остроградського - Гауса.....	216
10.7.6. Формула Стокса.....	218
Запитання та завдання для самоконтролю.....	220
Формули, твердження, алгоритми.....	234
Практикум 10.1. Подвійні інтеграли.....	246
Практикум 10.2. Потрійні інтеграли.....	264
Практикум 10.3. Криволінійні інтеграли 1-го роду.....	273
Практикум 10.4. Криволінійні інтеграли 2-го роду.....	281
Практикум 10.5. Поверхневі інтеграли 1-го роду.....	291
Практикум 10.6. Поверхневі інтеграли 2-го роду.....	297
Основні поняття та вміння.....	302

<b>Розділ 11. Теорія поля</b> .....	303
11.1. Характеристики скалярних і векторних полів.....	305
11.1.1. Скалярні й векторні поля.....	305
11.1.2. Похідна за напрямом і градієнт скалярного поля.....	307
11.1.3. Потік і дивергенція векторного поля.....	308
11.1.4. Циркуляція і ротор векторного поля.....	312
11.2. Диференціальні операції над полями.....	316
11.2.1. Оператор Гамільтона.....	316
11.2.2. Диференціальні операції 2-го порядку.....	318
11.3. Основні класи векторних полів.....	320
11.3.1. Соленоїдальне поле.....	320
11.3.2. Потенціальне поле.....	321
11.3.3. Гармонічне поле.....	322
Запитання та завдання для самоконтролю.....	324
Формули, твердження, алгоритми.....	328
Практикум 11.1. Характеристики скалярних і векторних полів.....	332
Практикум 11.2. Спеціальні типи векторних полів.....	341
Основні поняття та вміння.....	344
<b>Розділ 12. Диференціальні рівняння</b> .....	345
12.1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	347
12.1.1. Основні поняття.....	347
12.1.2. Розв'язки диференціального рівняння.....	348
12.1.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	351
12.1.4. Однорідні диференціальні рівняння.....	354
12.1.5. Лінійні диференціальні рівняння.....	356
12.1.6. Диференціальні рівняння Бернуллі.....	359
12.1.7. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.....	359
12.2. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	361
12.2.1. Задача Коші.....	361
12.2.2. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку.....	362
12.2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку.....	364
12.2.4. Властивості лінійного однорідного ДР.....	365
12.2.5. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи функцій.....	366
12.2.6. Загальний розв'язок лінійного однорідного ДР.....	367
12.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами... 369	
12.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку.....	370
12.3.2. Рівняння вільних механічних коливань.....	372
12.3.3. Лінійні однорідні ДР n-го порядку.....	374
12.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	375
12.4.1. Властивості розв'язків лінійного неоднорідного ДР.....	376

---

12.4.2. Інтегрування лінійного неоднорідного ДР методом варіювання довільних сталих.....	377
12.4.3. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.....	379
12.4.4. Вимушені коливання. Резонанс.....	382
12.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь.....	383
12.5.1. Задача Лотки — Вольтерри (система хижак-жертва).....	383
12.5.2. Основні поняття.....	384
12.5.3. Лінійні системи диференціальних рівнянь.....	385
12.5.4. Метод Ойлера розв'язання однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	386
Запитання та завдання для самоконтролю.....	388
Формули, твердження, алгоритми.....	394
Практикум 12.1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	403
Практикум 12.2. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	419
Практикум 12.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.....	424
Практикум 12.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	428
Практикум 12.5 Системи лінійних диференціальних рівнянь.....	436
Основні поняття та вміння.....	441
<b>Додаток А. Походження деяких термінів та позначень.....</b>	<b>442</b>
<b>Список використаної та рекомендованої літератури.....</b>	<b>444</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>446</b>
<b>Іменний покажчик.....</b>	<b>451</b>