

І. В. Алексєєва
О. О. Диховичний

51
М34

В. О. Гайдей
Л. Б. Федорова

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 2



- Функції однієї змінної
- Теорія границь
- Диференціальне числення функцій однієї змінної
- Диференціальне числення функцій кількох змінних

КОНДОР

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей,
О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова

МАТЕМАТИКА В ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Том 2

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів технічних університетів*



Київ
2019

УДК 517(075.8)

МЗ 4

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 25.06.2018 р.)*

Рецензенти:

В. В. Гавриленко — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету,

П. В. Задерей — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Київського національного університету технологій та дизайну,

Б. В. Олійник — д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

МЗ4 Математика в технічному університеті : Підручник /
І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ;
за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видав-
ничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.

ISBN 978-617-7841-40-0

«Математика в технічному університеті» є навчальним комплексом, що складається з підручника та практикуму. Теоретична і практична частини комплексу відповідають навчальним програмам з вищої математики бакалавріату технічних університетів. Комплекс може бути застосований для забезпечення як денної форми навчання, так і дистанційної чи змішаної.

Для студентів технічних університетів.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-617-7841-40-0

© І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей,

О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

© Видавничий дім «Кондор», 2019

ЗМІСТ

Передмова	8
Основні позначення	12
Розділ 5. Функції однієї змінної	15
5.1. Числові функції.....	17
5.1.1. Основні поняття.....	17
5.1.2. Способи задавання функції.....	19
5.1.3. Обернена функція.....	20
5.1.4. Складена функція.....	21
5.1.5. Класифікація функцій.....	22
5.2. Основні характеристики поведження функції.....	23
5.2.1. Нулі і знак функції на множині.....	23
5.2.2. Парність і непарність функції.....	24
5.2.3. Періодичність функції.....	25
5.2.4. Монотонність функції.....	26
5.2.5. Опуклість функції.....	27
5.2.6. Обмеженість функції.....	28
5.2.7. Деякі неелементарні функції.....	29
5.3. Многочлени.....	30
5.3.1. Стала функція.....	30
5.3.2. Лінійна функція.....	30
5.3.3. Квадратична функція.....	31
5.3.4. Многочлен n -го степеня.....	33
5.3.5. Ділення многочлена на многочлен.....	34
5.3.6. Корені многочлена.....	35
5.3.7. Тотожна рівність многочленів.....	37
5.3.8. Многочлени з дійсними коефіцієнтами.....	37
5.4. Степеневі функції.....	38
5.4.1. Степені дійсного числа.....	38
5.4.2. Степенева функція.....	41
5.4.3. Дробово-лінійна функція.....	42
5.5. Тригонометричні функції.....	43
5.5.1. Тригонометричні функції числового аргументу.....	43
5.5.2. Основні співвідношення для тригонометричних функцій.....	47
5.5.3. Основні характеристики тригонометричних функцій.....	49
5.5.4. Обернені тригонометричні функції.....	50
5.5.5. Основні характеристики обернених тригонометричних функцій.....	51
5.6. Показникова та логарифмічна функції.....	53

5.6.1. Показникова функція.....	53
5.6.2. Логарифм.....	54
5.6.3. Основні формули для логарифмів.....	54
5.6.4. Логарифмічна функція.....	55
5.6.5. Гіперболічні функції.....	56
5.7. Геометричні перетворення графіків функцій.....	58
5.7.1. Паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис.....	58
5.7.2. Паралельне перенесення графіка вздовж осі ординат.....	59
5.7.3. Стискання (розтягування) вздовж осі абсцис.....	59
5.7.4. Стискання (розтягування) вздовж осі ординат.....	60
5.7.5. Дзеркальне відбивання відносно осі абсцис.....	60
5.7.6. Дзеркальне відбивання відносно осі ординат.....	61
5.7.7. Графік функції $y = f(x)$	61
5.7.8. Графік функції $y = f(x) $	62
5.7.9. Графік рівняння $ y = f(x)$	62
5.7.10. Графік гармонічної залежності.....	63
Запитання та завдання для самоконтролю.....	64
Формули, твердження, алгоритми.....	80
Практикум 5.1. Числові функції.....	105
Практикум 5.2. Основні характеристики функцій.....	115
Практикум 5.3. Многочлени.....	122
Практикум 5.4. Степенева функція.....	132
Практикум 5.5. Тригонометричні функції.....	139
Практикум 5.6. Показникова та логарифмічна функції.....	152
Практикум 5.7. Побудова графіків за допомогою геометричних перетворень.....	159
Основні поняття та вміння.....	166
Розділ 6. Теорія границь.....	167
6.1. Границя функції.....	169
6.1.1. Границя функції в точці.....	169
6.1.2. Однобічні границі функції.....	172
6.1.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.....	173
6.1.4. Знаходження границі функції.....	176
6.1.5. «Визначеності» й невизначеності.....	176
6.2. Границя числової послідовності.....	179
6.2.1. Числова послідовність.....	179
6.2.2. Границя послідовності.....	180
6.2.3. Границя обмеженої монотонної послідовності.....	181
6.3. Еквівалентні нескінченно малі функції.....	184
6.3.1. Порівняння нескінченно малих функцій.....	184
6.3.2. Перша визначна границя.....	187

6.3.3. Друга визначна границя.....	188
6.3.4. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій.....	189
6.4. Неперервність функції.....	191
6.4.1. Неперервність функції в точці.....	191
6.4.2. Точки розриву функції.....	194
6.4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку.....	196
Запитання та завдання для самоконтролю.....	200
Формули, твердження, алгоритми.....	213
Практикум 6.1. Границя функції.....	225
Практикум 6.2. Границя послідовності.....	242
Практикум 6.3. Еквівалентні нескінченно малі функції.....	255
Практикум 6.4. Неперервність функції. Точки розриву функції.....	264
Основні поняття та вміння.....	272
Розділ 7. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	273
7.1. Похідна та диференціал функції.....	275
7.1.1. Похідна функції.....	275
7.1.2. Диференційовність функції.....	277
7.1.3. Правила диференціювання.....	278
7.1.4. Основні формули диференціювання.....	281
7.1.5. Диференціал функції.....	284
7.1.6. Геометричний і механічний зміст похідної та диференціала.....	285
7.2. Похідні та диференціали вищих порядків.....	289
7.2.1. Похідні вищих порядків.....	289
7.2.2. Диференціали вищих порядків.....	291
7.2.3. Похідні вищих порядків від функцій, заданих параметрично.....	293
7.3. Основні теореми диференціального числення.....	294
7.3.1. Теорема Ферма.....	294
7.3.2. Теореми про середнє значення.....	294
7.3.3. Правило Бернуллі - Лопітала.....	297
7.4. Тейлорова формула.....	299
7.4.1. Многочлен і формула Тейлора.....	299
7.4.2. Різні форми Тейлорової формули.....	300
7.4.3. Розвинення за формулою Тейлора — Маклорена елементарних функцій.....	302
7.4.4. Застосування Тейлорової формули.....	303
7.5. Дослідження функцій.....	305
7.5.1. Монотонність функцій.....	305
7.5.2. Локальні екстремуми функції.....	307
7.5.3. Найменше та найбільше значення функції.....	309
7.5.4. Опуклість функцій і точки перегину.....	310
7.5.5. Асимптоти графіка функції.....	312

7.5.6. Схема повного дослідження функції.....	314
Запитання та завдання для самоконтролю.....	315
Формули, твердження, алгоритми.....	330
Практикум 7.1. Похідні функцій.....	340
Практикум 7.2. Застосування похідної.....	353
Практикум 7.3. Похідні вищих порядків.....	361
Практикум 7.4. Правило Бернуллі — Лопітала.....	366
Практикум 7.5. Тейлорова формула.....	373
Практикум 7.6. Дослідження функцій за допомогою похідних.....	379
Практикум 7.7. Побудова, графіків функцій.....	389
Основні поняття та вміння.....	400
Розділ 8. Диференціальне числення функцій кількох змінних.....	401
8.1. Функції кількох змінних.....	103
8.1.1. Арифметичний простір і його підмножини.....	403
8.1.2. Функції кількох змінних.....	404
8.1.3. Границя функції кількох змінних.....	406
8.2. Похідні та диференціали функцій кількох змінних.....	408
8.2.1. Частинні похідні 1-го порядку.....	408
8.2.2. Диференційовність функції.....	410
8.2.3. Повний диференціал функції.....	412
8.2.4. Похідна складеної функції.....	412
8.2.5. Похідна неявної функції.....	414
8.2.6. Частинні похідні вищих порядків.....	415
8.2.7. Диференціали вищих порядків.....	416
8.2.8. Тейлорова формула для функції двох змінних.....	417
8.3. Вектор-функції.....	417
8.3.1. Поняття векторної функції.....	418
8.3.2. Границя й неперервність вектор-функції.....	418
8.3.3. Похідна вектор-функції.....	419
8.3.4. Геометричний і механічний зміст похідної вектор-функції.....	420
8.3.5. Дотична пряма й нормальна площина до просторової кривої.....	421
8.4. Похідна за напрямом і градієнт функції.....	421
8.4.1. Похідна за напрямом.....	422
8.4.2. Градієнт функції.....	423
8.4.3. Геометричний зміст градієнта.....	424
8.4.4. Дотична площина й нормаль до поверхні.....	425
8.4.5. Геометричний зміст частинних похідних і диференціала.....	427
8.5. Екстремуми функції двох змінних.....	428
8.5.1. Локальні екстремуми функції двох змінних.....	428
8.5.2. Достатні умови локального екстремуму.....	430
8.5.3. Найбільше та найменше значення функції всередині замкненої області.....	432

8.5.4. Умовний екстремум.....	432
Запитання та завдання для самоконтролю.....	435
Формули, твердження, алгоритми.....	446
Практикум 8.1. Функції кількох змінних.....	456
Практикум 8.2. Похідні й диференціали функцій кількох змінних.....	462
Практикум 8.3. Похідна за напрямом. Градієнт.....	471
Практикум 8.4. Дотична й нормаль до поверхні та кривої.....	475
Практикум 8.5. Екстремуми функції кількох змінних.....	480
Основні поняття та вміння.....	489
Додаток А. Походження деяких термінів та позначень.....	492
Список використаної та рекомендованої літератури.....	493
Предметний покажчик.....	495
Іменний покажчик.....	501