

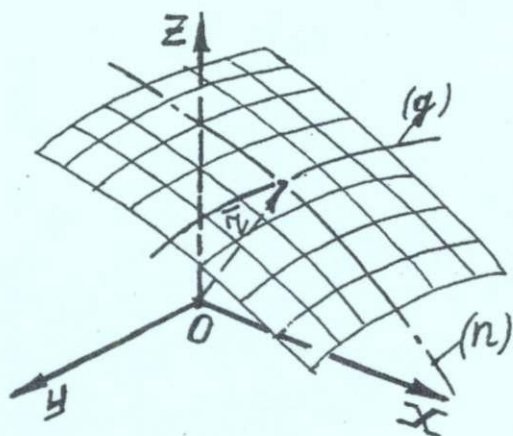
L. V. Kurpa, O. S. Mazur, T. V. Shmatko

---

# DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SERIES

---

The Educational Textbook  
for Students of Technical Universities



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,  
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Харківський політехнічний інститут»

**L. V. Kurpa, O. S. Mazur, T. V. Shmatko**  
**Л. В. Курпа, О. С. Мазур, Т. В. Шматко**

## **DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SERIES**

The Educational Textbook  
for Students of Technical Universities

## **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА РЯДИ**

Навчальний посібник  
для студентів технічних університетів

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол №2 від 06.12.2012 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2013

УДК 517.2 (075)

ББК 22.161.1

К93

### Рецензенти:

*О. Н. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків;

*Н. Д. Сизова*, д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний Технічний Університет Будівництва та Архітектури, м. Харків.

Друкується за рішенням Вченої ради НТУ «ХПІ»,  
протокол № 2 від 06.12.2012 р.

Навчальний посібник присвячено викладенню теоретичного матеріалу з наступних розділів: диференціальні рівняння; ряди. Посібник містить доведення всіх необхідних теорем, передбачених робочою програмою з математичного аналізу стосовно розглянутих тем, а також задачі, що рекомендовано для розв'язання в аудиторії разом з викладачем, і домашні завдання. Для кожної теми пропонуються варіанти контрольних завдань. Призначено для викладачів і студентів технічних університетів, які використовують англійську мову для викладання курсу вищої математики.

**Курпа Л. В.**

**К93** Differential Equations and Series = Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа, О. С. Мазур, Т. В. Шматко : навч. посіб. - Харків : НТУ "ХПІ", 2013. - 288 с. - Англ. мовою.

**ISBN 978-617-05-0064-9**

Theoretical material for study of differential equations and series is presented. The manual contains different tasks recommended for work as in the class so at work. Variants of practical tests are proposed for each topic. This book is for students of technical universities that use English for teaching higher mathematics.

**Лл. 75. Бібліогр.:** 7 назв.

УДК 517.2(075)

ББК 22.161.1

**ISBN 978-617-05-0064-9**

© Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В., 2013

## CONTENT

<b>INTRODUCTION</b> .....	3
<b>PART I. DIFFERENTIAL EQUATIONS</b> .....	4
<b>CHAPTER 1. DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER</b> .....	4
1.1. Problems Leading to Necessity Solving of Differential Equations. The Main Concepts and Definition.....	4
1.2. The General and Partial Solution. Problem by Cauchy.....	7
1.3. Equations with Separable Variables.....	10
1.4 Practice Lesson № 1. Integration of the Equations with Separable Variables.....	14
1.5. Homogeneous Differential Equations in Euler's Sense.....	15
1.6 Practice Lesson №2. Integration of the Homogeneous Differential Equations in Euler's Sense.....	20
1.7. Linear Differential Equations and Solving Methods for Linear Equations of the First Order.....	22
1.8. Practice Lesson №3 Integration of the linear equations.....	28
1.9. Bernoulli's Equation.....	29
1.10. Practice Lesson №4. Integration of the Bernoulli's Equations.....	32
1.11. Exact Differential Equations (Equations in Total Differentials).....	32
1.12. Practice Lesson №5. Integration of the Exact Differential Equations.....	34

1.13.	Practice Lesson №6. Different types of the Differential Equations.....	35
1.14.	Envelope of a One-Parametric Family of Plane Curves.....	37
1.15.	Singular Solutions of Differential Equations.....	38
1.16.	Equations not Solved for Derivative.....	41
1.17.	Equations by Lagrange and Clairaut.....	44
1.18.	Practice lessons №7. Integration of the equations by Lagrange and Clairaut.....	49
1.19.	Practical Test.....	51
<b>CHAPTER 2. DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND AND HIGHER ORDER.....</b>		<b>54</b>
2.1.	General Conceptions.....	54
2.2.	Some Types of Second - Order Differential Equation Reducible to the First - Order Equations.....	57
2.3.	Practice lessons №8. Integration of the Second - Order Differential Equations Reducible to the First - Order Equations...	60
2.4.	Linear Differential Equations of the Second Order. The General Theorems. Wronskian's Determinant.....	62
2.5.	Ostrogradskiy-Liuvill's Formula.....	65
2.6.	Homogeneous Linear equations of the Second Order with Constant Coefficients..	70
2.7.	Practice lessons № 9. Integration of the Homogeneous Linear Equations of the Second Order with Constant Coefficients..	73
2.8.	The General Theorems for Inhomogeneous Linear Equations of the Second Order (INHLDE).....	74

2.9.	The Linear Differential Equation of the Second Order with Constant Coefficients and Special Right Part.....	78
2.10.	The Method of Variation of an Arbitrary Constants.....	86
2.11.	Practice lesson № 10, № 11. Integration of the Inhomogeneous Linear Equations of the Second Order with Constant Coefficients.....	88
2.12.	Homogeneous Linear Equations of the n-th Order with Constant Coefficients.....	93
2.13.	Higher - Order Inhomogeneous Linear Equations.....	95
2.14.	Practice lesson № 12. Integration of the Linear Equations of the n-th Order with Constant Coefficients.....	97
2.15.	Practical Test.....	99
<b>CHAPTER 3. SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS.....</b>		<b>102</b>
3.1.	The General Concept and Definition.....	102
3.2.	The Method of Elimination.....	102
3.3.	The Method of Integrating Combinations...	108
3.4.	Systems of Linear Differential Equations...	110
3.5.	Systems of Linear Homogenous Differential Equations with Constant Coefficients.....	111
3.6.	Practice lesson № 13. Integration of the Systems of Differential Equations.....	125
3.7.	Practical Test.....	128
<b>PART II. SERIES.....</b>		<b>139</b>
<b>CHAPTER 1. NUMERICAL SERIES.....</b>		<b>131</b>
1.1.	The Main Concepts and Definition.....	131

1.2.	Necessary Condition for Convergence of a Series.....	136
1.3.	Practice Lesson №1. Numerical series. General concepts.....	139
1.4.	Comparison of the Series with Positive Terms.....	140
1.5.	Practice Lesson № 2. Investigation of the Series for the Convergence by the Comparison Tests.....	143
1.6.	Test by d'Alembert.....	144
1.7.	The Radical Test by Cauchy.....	147
1.8.	Integral Cauchy's Test.....	148
1.9.	Practice Lesson № 3, Practice Lesson № 4. Investigation of Series for Convergence by d'Alembert's Test, Radical and Integral Test by Cauchy.....	152
1.10.	Alternating Series Theorem by Leibniz . . .	155
1.11.	Plus-and-minus Series. Absolute and Conditional Convergence.....	157
1.12.	Practice Lesson № 5. Investigation of Alternating Series.....	160
1.13.	Practical Test.....	162
	<b>CHAPTER 2. Functional Series.....</b>	<b>166</b>
2.1	Concept of Functional Series.....	166
2.2	Uniform Convergence. Test by Weierstrass	169
2.3	Integration and Differentiation of the Functional Series.....	174
2.4.	Practice Lesson № 6. Investigation of the Functional Series.....	178
2.5.	Power Series. Interval of Convergence. . . .	179
2.6.	Practice Lesson № 7. Investigation of the Power Series.....	189

2.7	Differentiation of Power Series.....	189
2.8.	Taylor's Series and Maclaurin's Series. . . .	194
2.9	Expansion of Functions in a Series.....	196
2.10.	Practice Lesson № 8. Expansion the Functions in Taylor's Series and Maclaurin's Series. Integration and Differentiation of the Series.....	202
2.11.	Application of the Series for Approximate Calculation.....	207
2.12.	Practice Lesson № 9. Approximate Calculation by Series.....	216
<b>CHAPTER 3. Fourier's Series.....</b>		<b>219</b>
3.1.	Definition. Statement of the Problem . . . .	219
3.2.	A remark on the Expansion of a Periodic Function in a Fourier's Series.....	226
3.3.	Fourier's Series for Even and Odd Functions.....	229
3.4.	The Fourier's Series for a Function with Period $2l$ .....	230
3.5.	The Expansion of a Nonperiodic Function in a Fourier's Series.....	231
3.6.	The Fourier's Series in Complex Form. . . .	233
3.7.	Fourier Integral.....	235
3.8.	The Fourier Integral in Complex Form. . . .	240
3.9.	Practice Lesson № 10. Investigation of series by Fourier.....	243
3.10	Practical Test.....	247
<b>REFERENCES.....</b>		<b>250</b>
<b>DICTIONARY.....</b>		<b>251</b>
APPENDIX 1.....		251
APPENDIX 2.....		268
<b>CONTENT.....</b>		<b>283</b>