



Проект «Наукова книга»

Д. А. КОВТОНЮК
Р. Р. САЛИМОВ
Е. А. СЕВОСТЬЯНОВ

К ТЕОРИИ
ОТБРАЖЕНИЙ
КЛАССОВ СОБОЛЕВА
И ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Д.А. КОВТОНЮК
Р.Р. САЛИМОВ
Е.А. СЕВОСТЬЯНОВ

К ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ
КЛАССОВ СОБОЛЕВА
И ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора В.И. РЯЗАНОВА

*ПРОЕКТ «НАУКОВА КНИГА»
(МОЛОДИ ВЧЕНІ)*

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2013

В монографии подведены итоги исследований Донецкой школы по теории отображений, которые проводились в последние годы под руководством член-корреспондента НАН Украины В.Я. Гутлянского и заведующего отделом теории функции Института прикладной математики и механики НАН Украины В.И. Рязанова. Книга написана на основе работ молодых ученых. В книге рассмотрен широкий круг проблем, относящихся к традиционным задачам теории отображений, которые связаны с локальным и граничным поведением, для класса Соболева $W_{loc}^{1,p}$ на плоскости и классов Орлича—Соболева $W_{loc}^{1,p}$ при условии типа Кальдерона на функцию φ в пространстве \mathbb{R}^n при $n \geq 3$, в частности, классов Соболева $W_{loc}^{1,p}$ при $p > n - 1$. Исследования основаны на модульной и емкостной технике. Приведены приложения к краевым задачам для уравнений Бельтрами с вырождением и римановым многообразием.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории функций и отображений.

У монографії підведено підсумки досліджень донецької школи з теорії відображень, що проводилися в останні роки під керівництвом член-кореспондента НАН України В.Я. Гутлянского і завідувача відділа теорії функцій ІПММ НАН України В.І. Рязанова. Книгу написано на основі праць молодих вчених. У книзі розглянуто широке коло проблем, що відносяться до традиційних завдань теорії відображень, пов'язаних з локальною і граничною поведінкою, для класу С о б о л е в а на площині і класів Орлича—Соболева $W_{loc}^{1,p}$ за умови типу Кальдерона на функцію φ у просторах \mathbb{R}^n при $n \geq 3$, зокрема, класів Соболева $W_{loc}^{1,p}$ при $p > n - 1$. Дослідження засновано на модульній і ємнісній техніці. Наведено застосування до крайових задач для рівнянь Бельтрамі з виродженням та римановим багатовидами.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються в галузі теорії функцій і відображень.

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Б. ЗЕЛИНСКИЙ,
доктор физ.-мат. наук А.Ф. ТАДЕЕВ

Утверждено к печати ученым советом

Института прикладной математики и механики НАН Украины

*Видання здійснено за державним замовленням
на випуск видавничої продукції*

Научно-издательский отдел физико-математической
и технической литературы

Редактор В. В. Вероцкая

© Д.А. Ковтонюк, Р.Р. Салимов,
Е.А.Севостьянов, 2013

© НВП «Видавництво “Наукова
думка” НАН України»,
дизайн, 2013

Оглавление

Оглавление	3
Предисловие	7
Часть I. К теории классов отображений с модульными условиями	11
Глава 1. О сходимости и компактности пространственных гомеоморфизмов	11
1.1. Введение	12
1.2. Функции классов ВМО, VMO и FMO	15
1.3. О некоторых интегральных неравенствах	17
1.4. Сходимость общих гомеоморфизмов	24
1.5. Сходимость гомеоморфизмов с модульными условиями	27
1.6. Полнота кольцевых Q-гомеоморфизмов	35
1.7. Нормальные семейства кольцевых Q-гомеоморфизмов	36
1.8. Компактность семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов	40
1.9. Точность условий сходимости, нормальности, компактности	42
Глава 2. Продолжение кольцевых Q-гомеоморфизмов на границу в R^n	47
2.1. Предварительные сведения	47
2.2. Лемма о непрерывном продолжении на границу	48
2.3. Основные следствия	50
2.4. Продолжение на границу обратных отображений	52
2.5. Устранение изолированных особенностей	53
Глава 3. О нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля	55
3.1. Кольцевые Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля	55
3.2. Характеризация кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля	58
3.3. Искажение объема	61
3.4. Поведение в точке	66

Оглавление

3.5. Конечная липшицевость кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля.....	68
3.6. Модули семейств поверхностей.....	72
3.7. Нижние Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля	75
3.8. Взаимосвязь нижних и верхних модульных неравенств . . .	77
Глава 4. Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах	79
4.1. Введение.....	79
4.2. Непрерывное продолжение на границу.....	85
4.3. Дальнейшие следствия и приложения.....	88
4.4. Гомеоморфное продолжение на границу.....	90
Часть II. К теории отображений классов Соболева на плоскости	91
Глава 5. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами	91
5.1. Введение.....	91
5.2. Связь класса с нижними Q -гомеоморфизмами	93
5.3. Связь с кольцевыми Q -гомеоморфизмами.....	96
5.4. Об областях с регулярными границами.....	100
5.5. Граничное поведение гомеоморфных решений.....	103
5.6. Регулярные решения задачи Дирихле в односвязных областях	106
5.7. Псевдрегулярные решения в многосвязных областях ...	111
5.8. Многозначные решения в многосвязных областях.....	113
Глава 6. К теории отображений с ограничениями интегрального типа	115
6.1. Введение.....	115
6.2. Теоремы сходимости.....	117
6.3. Теоремы нормальности.....	122
6.4. Теоремы компактности.....	125
Глава 7. К теории отображений с ограничениями теоретико-множественного типа	126
7.1. Введение.....	126
7.2. Теоремы сходимости.....	127
7.3. Теоремы нормальности.....	131
7.4. Теоремы компактности.....	137

Оглавление

Часть III. К теории отображений классов Орлича-Соболева в пространстве	139
Глава 8. К общей теории классов Орлича—Соболева	139
8.1. Введение.....	139
8.2. Предварительные сведения.....	143
8.3. Дифференцируемость открытых отображений.....	148
8.4. Условие Лузина и свойство Сарда на поверхностях	150
8.5. О компактных классах Орлича-Соболева.....	155
8.6. Нижние и кольцевые Q-гомеоморфизмы.....	159
8.7. Нижние Q-гомеоморфизмы и классы Орлича-Соболева . .	162
Глава 9. Локальное и граничное поведение классов Орлича-Соболева	166
9.1. Равностепенно непрерывные семейства гомеоморфизмов .	166
9.2. Об областях с регулярными границами.....	171
9.3. Непрерывное продолжение на границу.....	174
9.4. Продолжение на границу обратных отображений.....	177
9.5. Гомеоморфное продолжение на границу.....	179
9.6. Устранение изолированных особенностей.....	181
9.7. Устранение NED-множеств	185
Глава 10. Сходимость и компактность отображений классов Соболева	187
10.1. Введение.....	187
10.2. Сходимости гомеоморфизмов классов Орлича-Соболева .	188
10.3. Нормальные семейства гомеоморфизмов.....	193
10.4. Классы Орлича-Соболева и интеграл Дирихле.....	195
10.5. Основная лемма.....	201
10.6. Полунепрерывность дилатаций в среднем.....	205
10.7. Компактность гомеоморфизмов классов Соболева.....	217
10.8. Точность условий.....	224

Оглавление

Часть IV. Граничное поведение отображений на многообразиях	229
Глава 11. Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов	229
11.1. Введение.....	229
11.2. Предварительные замечания	230
11.3. О непрерывном продолжении на границу . . .	236
11.4. О продолжении на границу обратных отображений	240
11.5. О гомеоморфном продолжении на границу.....	240
Глава 12. Об отображениях классов Орлича-Соболева на римановых многообразиях	242
12.1. Введение.....	242
12.2. Связь с нижними Q -гомеоморфизмами.....	244
12.3. Связь нижних Q -гомеоморфизмов с кольцевыми.....	249
12.4. Граничное поведение нижних Q -гомеоморфизмов.....	252
12.5. Следствия для классов Орлича-Соболева.....	256
Приложение А. О дифференцируемости абсолютно непрерывных функций по Кальдерону	259
Приложение Б. Об оценках емкости конденсаторов в пространственных областях по В.И. Кругликову	271
Список литературы	276
Предметный указатель	301