



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ДУБОВИКА

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ХАРЬКОВСКИЙ ФИЛИАЛ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ

А. П. ФИЛИППОВ

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ – 1965

В монографии рассмотрены вопросы, связанные с колебаниями механических систем, и приведены методы их расчета, удобные для практических приложений, с широким использованием электронных быстродействующих вычислительных машин. Значительная часть монографии посвящена расчету свободных и вынужденных колебаний стержней и стержневых систем (стержни, валы, рамы и т. д.).

Подробно изучены колебания плит прямоугольных, плит в виде параллелограмма и неполного сектора, плит, лежащих на упругом полупространстве. Изучены колебания лопаток и дисков турбомашин. Подробно рассмотрены переходные процессы в механических системах. Кратко изложены основные методы нелинейных колебаний. Изучено воздействие движущейся нагрузки на балки конечной длины и бесконечно длинные, лежащие на упругом основании. Исследован неупругий удар по балкам и плитам, а также упругий удар с учетом деформаций в месте контакта.

Рассчитана на научных работников, инженеров-конструкторов, аспирантов и студентов вузов строительных и машиностроительных специальностей.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН УССР
Л. А. ШУБЕНКО-ШУБИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Колебания линейной системы с одной степенью свободы	
Простейшие случаи колебания.....	5
Крутильные колебания	8
Свободные колебания при затухании	10
Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	14
Биения.....	16
Вынужденные колебания при затухании	18
Вынужденные колебания при упругом подвесе.....	22
Глава II. Колебания системы с несколькими степенями свободы	
Основные уравнения динамики	24
Связи системы и обобщенные координаты.....	24
Уравнения движения Лагранжа второго рода.....	27
Канонические уравнения движения Гамильтона.....	30
Колебания системы в случае связей, не зависящих от времени	31
Основные методы решения характеристического уравнения	33
Метод А. Н. Крылова.....	33
Метод А. М. Данилевского.....	34
Метод Ш. Е. Микеладзе.....	35
Матричные методы.....	36
Основные понятия теории матриц	36
Характеристическая матрица и соотношение Келди—Гамильтона	39
Формула Сильвестра.....	40
Вычисление собственных значений.....	41
Решение численных уравнений	43
Основные методы.....	43
Обобщенный метод Ньютона — Рафсона.....	43
Итеративный метод Вегстейна.....	45
Метод Мюллера.....	46
Колебания невесомых балок.....	47
Составление уравнения частоты для невесомой балки с помощью коэффициентов влияния.....	47
Дифференциальное уравнение поперечных колебаний	48
Поперечные колебания невесомых балок постоянного сечения при наличии сосредоточенных масс.....	50
Изменение жесткости балки по ступенчатому закону	52

Невесомая балка, опертая по концам, с тремя сосредоточенными массами.....	53
Балка с n равными массами m , расположенными на одинаковых расстояниях	56
Вынужденные колебания.....	59

Глава III. Изгибно-крутильные колебания стержней

Общие представления о деформации стержней.....	60
Влияние касательных напряжений на деформацию	60
Депланация при кручении	62
Центр изгиба.....	64
Компоненты перемещений.....	68
Дифференциальные уравнения свободных изгибно-крутильных колебаний	69
Энергия деформации стержня.....	69
Общие дифференциальные уравнения движения стержня	72
Уравнения изгибно-крутильных колебаний.....	74
Общие уравнения.....	74
Колебания свободно опертого стержня, имеющего плоскость симметрии.....	75
Колебания консольного стержня, имеющего плоскость симметрии	77
Понятие о флаттере.....	80

Глава IV. Поперечные колебания весомых стержней постоянного сечения

Свободные колебания незагруженного стержня.....	85
Частотные уравнения.....	85
Фундаментальные функции.....	90
Свободные колебания балки с сосредоточенными массами и упругими опорами.....	93
Колебания балки с сосредоточенными нагрузками	93
Стержень, упруго опертый в точках.....	99
Частотные уравнения для частных случаев.....	100
Колебания балки, с концом которой связано твердое тело	108
Колебания стержня с n — 1 сосредоточенными массами на одинаковых расстояниях.....	110
Колебания неразрезных балок.....	112
Метод решения.....	112
Неразрезная опертая балка с n пролетами при распределенной нагрузке.....	113
Вычисление частоты основного тона неразрезной балки с различными сечениями в пролетах	118
Балка на сплошном упругом основании.....	121
Влияние инерции поворота сечений и перерезывающих сил	122
Дифференциальное уравнение.....	122
Свободные колебания.....	123
Условия закрепления для общего случая.....	124
Колебания балки при наличии сосредоточенных грузов	125

Глава V. Приближенные методы определения частот колебаний

Вариационные методы.....	132
Вариационные уравнения Лагранжа и формула Кастильяно	132
Принцип Остроградского — Гамильтона.....	133
Метод Ритца.....	135
Метод Б. Г. Галеркина.....	136

Примеры.....	138
Заключительные замечания.....	143

Глава VI. Колебания балок с учетом затухания

Причины, вызывающие рассеяние энергии.....	144
Основные гипотезы, учитывающие рассеяние энергии при затухании.....	146
Методы определения декремента затухания и данные для ряда материалов.....	148
Методы непосредственного интегрирования уравнения поперечных колебаний стержней.....	152
Уравнение поперечных колебаний с учетом затухания.....	152
Вынужденные колебания при наличии сосредоточенных масс.....	154
Поперечные колебания с учетом затухания для любого закона изменения возмущающей силы.....	164
Вынужденные колебания стержня с сосредоточенным грузом.....	168
Применение метода разложения по фундаментальным функциям.....	170
Свободные колебания с учетом затухания.....	170
Вынужденные колебания балок под действием периодических сил.....	172
Консольный стержень с сосредоточенной массой.....	175
Консольный стержень, упруго подкрепленный в точке 	177

Глава VII. Колебания плоских рам

Точный метод.....	181
Общий метод составления уравнений частот.....	181
Колебания прямоугольной рамы.....	185
Колебания многоярусных рам.....	189
Приближенные методы подсчета частот колебаний плоских рам.....	191
Вычисление основной частоты для прямоугольных рам по методу Релея.....	191
Вычисление основной частоты для многоярусной рамы по методу Релея.....	197
Влияние жесткости поперечных ригелей плоских рам на частоты колебаний.....	202
Вычисление частот колебаний обертонов для рам с абсолютно жесткими ригелями.....	204
Вычисление частот колебаний обертонов для плоских рам как систем с ограниченным числом степеней свободы.....	209
Влияние перерезывающих сил и инерции поворота сечений на частоты колебаний рам.....	213
Колебания пространственных рам с абсолютно жесткими ригелями, связывающими плоские рамы.....	217
Составление уравнения частоты.....	218
Колебания рамных каркасов при упругих поперечных ригелях.....	228
Составление уравнения частоты для распределенных масс ригелей.....	228
Уравнение частоты для сосредоточенных масс.....	229

Глава VIII. Колебания решетчатых конструкций

Составная стойка с параллельными поясами.....	232
Частотные уравнения с учетом решетки.....	232
Колебания стержневой фермы.....	236
Дифференциальные уравнения движения.....	236
Подсчет основной частоты по энергетическому методу.....	239

Глава IX. Колебания плит

Основные зависимости.....	248
Дифференциальное уравнение колеблющейся плиты	248
Потенциальная и кинетическая энергия плиты.....	251
Граничные условия	253
Свободные колебания ненагруженных плит.....	255
Плита, опертая по контуру	255
Плита с двумя опертymi краями.....	257
Плита, заделанная по контуру	258
Плита со свободными краями.....	260
Колебания круглых плит.....	261
Дифференциальное уравнение.....	261
Свободные колебания круглой плиты	261
Круглая пластинка под действием равномерно растягивающих или сжимающих сил.....	264
Кольцевые круглые плиты.....	265
Колебание эллиптической пластинки	267
Свободные колебания нагруженных прямоугольных плит.....	268
Изложение "метода".....	268
Прямоугольная плита, нагруженная сосредоточенными грузами.....	272
Составление уравнения частот для случая нескольких грузов	274
Прямоугольная плита, опертая по контуру, с сосредоточенным грузом	275
Квадратная плита с четырьмя симметрично расположенными равными грузами.....	277
Колебания прямоугольных плит, подкрепленных ребрами одного на- правления и нагруженных сосредоточенными грузами.....	278
Изложение, метода.....	278
Плита, подкрепленная одним ребром и подпертая в двух точках.....	281
Квадратная плита, подкрепленная двумя ребрами.....	282
Прямоугольная плита, подкрепленная двумя ребрами с грузом посередине.....	283
Прямоугольная плита, опертая по контуру и подкрепленная ребрами одинаковой жесткости на равных расстояниях	286
Вынужденные колебания.....	291
Применение приближенных методов к определению собственных частот плит, подкрепленных ребрами.....	292
Плиты, подкрепленные перекрестными ребрами.....	292
Плиты, подкрепленные ребрами одного направления	297
Колебания плит переменной и постоянной жесткости со сложными граничными условиями	305
Изложение метода.....	305
Прямоугольная консольная пластина постоянной толщины	308
Консольная косоугольная пластинка	310
Секториальная плита в виде неполного сектора (кругового прямоугольника).....	311
Определение частот и форм колебаний пластин типа лопастей осевых поворотнлопастных гидравлических турбин	312
Метод решения.....	312
Колебание пластины типа лопасти низконапорной турбины.....	312
Определение частот и форм собственных колебаний пластин типа лопастей высоконапорных осевых поворотнлопастных гидротурбин.....	313
Результаты расчета модели.....	318

Глава X. Колебания турбинных лопаток

Колебание отдельной лопатки.....	320
Работа центробежных сил.....	320
Уравнение колебаний лопатки в поле центробежных сил	323
Энергетический метод определения частот колебаний турбинной лопатки.....	325
Кориолисовы силы, действующие на лопатку.....	328
Колебания лопаток, связанных бандажом.....	329
Моменты, вызываемые упругими связями.....	329
Определение собственных частот лопаток по методу начальных параметров.....	331
Колебания лопаток с учетом затухания.....	341
Уравнение поперечных колебаний	341
Амплитуды вынужденных колебаний.....	344
Свободные колебания стержня с учетом затухания, зависящего от удлинения.....	351
Влияние заделки на частоту колебаний.....	352

Глава XI. Колебания дисков

Тангенциальные колебания дисков	354
Основные типы колебаний	354
Дифференциальное уравнение колебаний кручения и удлинения диска.....	354
Тангенциальные колебания невращающегося диска с лопатками.....	356
Возможные формы колебаний.....	356
Уравнения колебаний кручения облопаченных дисков гиперболического профиля.....	357
Граничные условия и условия сопряжения.....	358
Значение функций $K(a)$ для дисков гиперболического профиля	361
Влияние продольной растягивающей силы.....	363
Приложение полученных результатов к частным случаям	364
Тангенциальные колебания вращающегося диска совместно с лопатками	369
Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины и его решение.....	369
Частотное уравнение для вращающегося облопаченного диска	372
Колебания дисков с учетом напряженного сечения в срединной плоскости	374
Напряжения в срединной плоскости.....	374
Применение метода Ритца к определению частот и форм колебаний системы диск — лопатки.....	376

Глава XII. Колебания оболочек

Уравнения движения оболочек.....	380
Общие уравнения в ортогональных координатах.....	380
Уравнение технической теории оболочек	382
Колебания цилиндрических оболочек	383
Формы колебаний оболочек	383
Дифференциальные уравнения колеблющейся оболочки и метод интегрирования.....	384
Применение тригонометрических рядов	387
Колебания оболочки, опертой и заделанной по торцам.....	390
Применение энергетических методов к определению частот	396
Колебания цилиндрических оболочек в жидкости.....	399
Колебания оболочек других форм	401

Глава XIII. Продольные и крутильные колебания стержней

Свободные колебания.....	403
Дифференциальное уравнение продольных колебаний с учетом затухания.....	403
Свободные колебания стержня с грузом на конце при отсутствии затухания.....	405
Продольные колебания стойки с равными массами на одинаковых расстояниях.....	407
Свободные колебания нагруженной стойки с учетом затухания.....	413
Вынужденные колебания кручения валов при учете затухания.....	417
Дифференциальное уравнение колебаний кручения.....	417
Крутильные колебания вала с дисками.....	417
Частные случаи.....	423
Крутильные колебания многомассовых систем.....	425
Дифференциальные уравнения свободных колебаний многомассовой системы.....	426
Определение собственных частот и форм крутильных колебаний системы.....	428
Прямой метод расчета крутильных колебаний.....	428
Метод остатков (метод Толле).....	428
Метод непрерывных дробей (метод проф. Терских).....	429
Расчет собственных частот и форм крутильных колебаний на электронно-вычислительной машине.....	435

Глава XIV. Колебания с нелинейными и переменными характеристиками

Нелинейные колебания.....	438
Предварительные замечания.....	438
Метод Ляпунова — Крылова.....	439
Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.....	443
Метод Ван-дер-Поля.....	445
Точное решение для колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой.....	448
Одновременное действие двух гармонических возмущающих сил на нелинейную систему.....	450
Вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы.....	451
Квазигармонические колебания.....	455
Сущность явления.....	455
Нахождение решений уравнения Хилла.....	457
Определитель Хилла.....	460
Колебание груза на пружине с периодически изменяющейся жесткостью.....	464
Поперечные колебания балки под действием периодической продольной силы [10, 46].....	466
Поперечные колебания стержней при действии продольной периодической силы при учете затухания.....	469
Внутреннее трение, зависящее от амплитуды колебаний.....	471
Поперечные колебания стоек с грузом на конце при учете сжатия стоек.....	474
Поперечные колебания стоек с грузом при учете сжатия и затухания.....	478
Самовозбуждающиеся колебания (автоколебания).....	482
Сущность явления.....	482
Колебания маятника, насаженного на вращающийся вал.....	482
Автоколебания ротора при наличии гироскопических моментов [48].....	485

Глава XV. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс

Прохождение через резонанс линейной системы с одной степенью свободы	498
Уравнение движения и его интеграл при линейной скорости прохождения	498
Возрастание частоты p	500
Изменение амплитуды силы по закону $P(t) = q\varepsilon^2 t^2$	501
Убывание частоты p	501
Пропорциональность амплитуды возмущающей силы квадрату убывающей частоты	505
Решение задачи при учете сил трения в комплексной форме	503
Максимальные динамические коэффициенты при переходе через резонанс	509
Прохождение через резонанс системы с несколькими степенями свободы	513
Уравнения движения и их интегрирование	513
Крутильные колебания трехмассовой системы	514
Прохождение через резонанс линейной системы с нелинейно изменяющейся частотой возмущающей силы	517
Прохождение через резонанс при изменении частоты по параболическому закону	517
Пропорциональность возмущающей силы квадрату мгновенной частоты	523
Изменение частот колебаний по степенной функции третьего порядка	524
Применение моделирующей машины	526
Поперечные колебания стержней постоянного сечения при переходе через резонансные состояния	529
Колебания стержня с сосредоточенным грузом	529
Нестационарные колебания стержня, вызываемые заданным движением опоры	532
Колебания прямоугольных пластин при переходе через резонанс	535
Изменение частоты по линейному закону	535
Изменение возмущающей силы по закону $P_0 \varepsilon^2 t^2$	537
Нестационарные колебания дисков турбомашин	539
Диск постоянной толщины	539
Действие сосредоточенной постоянной силы P	540
Нестационарные колебания цилиндрической оболочки	542
Ортотропная оболочка	542
Построение асимптотических решений нелинейного уравнения с переменными коэффициентами	544
Сущность метода	544
Построение приближенного решения уравнения	546
Переход через резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы	551
Нестационарные колебания в линейной системе с периодически изменяющимися параметрами	555
Уравнение движения	555
Интегрирование уравнения для переходного процесса	557

Глава XVI. Колебания вращающихся валов

Критические числа оборотов многоопорных валов	561
Колебания вала на жестких опорах	561
Колебания вала на упругих опорах	565
Нестационарные колебания вала с неодинаковыми главными моментами инерции поперечного сечения	570
Дифференциальные уравнения движения	570

Интегрирование уравнений движения и результаты исследования	572
Переход гибкого вала через критическую скорость	574
Уравнения движения для гибкого вала	574
Вал на упруго-податливых опорах	575
Колебания гибкого ротора на линейно-упругих опорах с учетом гироскопического эффекта	578
Уравнения движения	578
Применение асимптотического метода	582
Нестационарные изгибно-крутильные колебания, системы двигатель-ротор	584
Уравнения движения и их интегрирование	584
Численные результаты	587

Глава XVII. Колебание балки под действием движущейся нагрузки

Движение груза по невесомой балке	591
Уравнение движения груза	591
Колебание весомой балки под действием движущегося груза	593
Уравнения движения в обобщенных координатах	593
Решение уравнений в обобщенных координатах	596
Движение груза по балке с промежуточной упругой опорой	599
Нахождение динамических прогибов под грузом	602
Динамические прогибы под грузом для весомой балки	602
Совместное действие движущейся гармонической силы и катящейся массы	603
Динамические прогибы под грузом для невесомой балки	605
Колебание трубы при протекании в ней жидкости со скоростью v	608
Установившиеся колебания балки на упругом основании при движении груза и воздействии периодической силы	612
Сущность задачи	612
Колебания балки при действии периодической силы на движущийся груз	613
Движение груза при действии периодической силы на подвесенную массу	615
Расчеты для частных случаев	618
Установившиеся колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом полупространстве, под действием движущейся силы	619
Дифференциальные уравнения движения упругой среды и их решение	619
Условия сопряжения балки и полупространства и перемещения балки	623
Вычисление интегралов $S(u)$ для различных u	626
Расчеты для частных случаев	630

Глава XVIII. Колебания плит, лежащих на упругом основании

Определение перемещений и напряжений основания и плиты	634
Сущность задачи	634
Дифференциальные уравнения колебаний	635
Определение перемещений упругого основания	637
Исследование полученных решений	643
Изучение интегралов в комплексной области	643
Разложение подынтегрального выражения по степеням s_p	648
Тонкая плита, лежащая на упругом полупространстве	649
Приложение к частным случаям	650

Амплитуды вынужденных колебаний плиты под действием силы	650
Амплитуды вынужденных колебаний плиты при сосредоточенной массе	651

Глава XIX. Удар и колебания упругих тел

Состояние вопроса	654
Неупругий удар по стержням и плитам.....	655
Поперечный удар по балке при учете затухания в ней	655
Удар по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании.....	659
Удар по круглой пластинке, лежащей на упругом основании	664
Упругий удар и колебания.....	680
Общие сведения.....	680
Упругий удар по балке.....	681
Расчеты для частных случаев.....	684
Упругий удар по тонкой плите.....	689
Приложение.....	693
Литература.....	702

Анатолий Петрович Филиппов

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Печатается по постановлению ученого совета Харьковского филиала
Института механики Академии наук Украинской ССР*

Редактор *Н. К. Сытник*

Художественный редактор *И. П. Антонюк*

Оформление художников *Б. И. Бродского, Д. Д. Грибова*

Технический редактор *М. А. Рекес*

Корректоры *В. А. Литовкина, М. М. Раскина*

БФ 05595. Зак. № 1482. Изд. № 174. Тираж 3270. Формат бумаги 60x90^{1/16}. Печ. физ. листов 44,75. Условн. печ. листов 44,75. Учетно-изд. листов 39,58. Подписано к печати 29.XII 1964 г. Цена 2 р. 18 коп. Т. п. 1964, поз. 180.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевская книжная типография № 5 Государственного комитета Совета Министров УССР
по прессе — Киев, Репина, 4