



ИЗДАНИЕ
ДРУГОЕ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ХАРЬКОВСКИЙ ФИЛИАЛ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ

А. П. ФИЛИППОВ

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ – 1965

В монографии рассмотрены вопросы, связанные с колебаниями механических систем, и приведены методы их расчета, удобные для практических приложений, с широким использованием электронных быстродействующих вычислительных машин. Значительная часть монографии посвящена расчету свободных и вынужденных колебаний стержней и стержневых систем (стержни, валы, рамы и т. д.).

Подробно изучены колебания плит прямоугольных, плит в виде параллелограмма и неполного сектора, плит, лежащих на упругом полупространстве. Изучены колебания лопаток и дисков турбомашин. Подробно рассмотрены переходные процессы в механических системах. Кратко изложены основные методы нелинейных колебаний. Изучено воздействие движущейся нагрузки на балки конечной длины и бесконечно длинные, лежащие на упругом основании. Исследован неупругий удар по балкам и плитам, а также упругий удар с учетом деформаций в месте контакта.

Рассчитана на научных работников, инженеров-конструкторов, аспирантов и студентов вузов строительных и машиностроительных специальностей.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН УССР
Л. А. ШУБЕНКО-ШУБИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Предисловие | 3 |
| Глава I. Колебания линейной системы с одной степенью свободы | |
| Простейшие случаи колебания..... | 5 |
| Крутильные колебания | 8 |
| Свободные колебания при затухании | 10 |
| Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы | 14 |
| Биения..... | 16 |
| Вынужденные колебания при затухании | 18 |
| Вынужденные колебания при упругом подвесе..... | 22 |
| Глава II. Колебания системы с несколькими степенями свободы | |
| Основные уравнения динамики | 24 |
| Связи системы и обобщенные координаты..... | 24 |
| Уравнения движения Лагранжа второго рода..... | 27 |
| Канонические уравнения движения Гамильтона..... | 30 |
| Колебания системы в случае связей, не зависящих от времени | 31 |
| Основные методы решения характеристического уравнения | 33 |
| Метод А. Н. Крылова..... | 33 |
| Метод А. М. Данилевского..... | 34 |
| Метод Ш. Е. Микеладзе..... | 35 |
| Матричные методы..... | 36 |
| Основные понятия теории матриц | 36 |
| Характеристическая матрица и соотношение Келли—Гамильтона | 39 |
| Формула Сильвестра..... | 40 |
| Вычисление собственных значений..... | 41 |
| Решение численных уравнений | 43 |
| Основные методы..... | 43 |
| Обобщенный метод Ньютона — Рафсона..... | 43 |
| Итеративный метод Вегстейна..... | 45 |
| Метод Мюллера..... | 46 |
| Колебания невесомых балок..... | 47 |
| Составление уравнения частоты для невесомой балки с помощью коэффициентов влияния..... | 47 |
| Дифференциальное уравнение поперечных колебаний | 48 |
| Поперечные колебания невесомых балок постоянного сечения при наличии сосредоточенных масс..... | 50 |
| Изменение жесткости балки по ступенчатому закону | 52 |

| | |
|--|----|
| Невесомая балка, опертая по концам, с тремя сосредоточенными массами..... | 53 |
| Балка с n равными массами m , расположенными на одинаковых расстояниях | 56 |
| Вынужденные колебания..... | 59 |

Глава III. Изгибно-крутильные колебания стержней

| | |
|---|----|
| Общие представления о деформации стержней..... | 60 |
| Влияние касательных напряжений на деформацию | 60 |
| Депланация при кручении | 62 |
| Центр изгиба..... | 64 |
| Компоненты перемещений..... | 68 |
| Дифференциальные уравнения свободных изгибно-крутильных колебаний | 69 |
| Энергия деформации стержня..... | 69 |
| Общие дифференциальные уравнения движения стержня | 72 |
| Уравнения изгибно-крутильных колебаний..... | 74 |
| Общие уравнения..... | 74 |
| Колебания свободно опертого стержня, имеющего плоскость симметрии..... | 75 |
| Колебания консольного стержня, имеющего плоскость симметрии | 77 |
| Понятие о флаттере..... | 80 |

Глава IV. Поперечные колебания весомых стержней постоянного сечения

| | |
|---|-----|
| Свободные колебания незагруженного стержня..... | 85 |
| Частотные уравнения..... | 85 |
| Фундаментальные функции..... | 90 |
| Свободные колебания балки с сосредоточенными массами и упругими опорами..... | 93 |
| Колебания балки с сосредоточенными нагрузками | 93 |
| Стержень, упруго опертый в точках..... | 99 |
| Частотные уравнения для частных случаев..... | 100 |
| Колебания балки, с концом которой связано твердое тело | 108 |
| Колебания стержня с n — 1 сосредоточенными массами на одинаковых расстояниях..... | 110 |
| Колебания неразрезных балок..... | 112 |
| Метод решения..... | 112 |
| Неразрезная опертая балка с n пролетами при распределенной нагрузке..... | 113 |
| Вычисление частоты основного тона неразрезной балки с различными сечениями в пролетах | 118 |
| Балка на сплошном упругом основании..... | 121 |
| Влияние инерции поворота сечений и перерезывающих сил | 122 |
| Дифференциальное уравнение..... | 122 |
| Свободные колебания..... | 123 |
| Условия закрепления для общего случая..... | 124 |
| Колебания балки при наличии сосредоточенных грузов | 125 |

Глава V. Приближенные методы определения частот колебаний

| | |
|--|-----|
| Вариационные методы..... | 132 |
| Вариационные уравнения Лагранжа и формула Кастильяно | 132 |
| Принцип Остроградского — Гамильтона..... | 133 |
| Метод Ритца..... | 135 |
| Метод Б. Г. Галеркина..... | 136 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| Примеры..... | 138 |
| Заключительные замечания..... | 143 |

Глава VI. Колебания балок с учетом затухания

| | |
|---|-----|
| Причины, вызывающие рассеяние энергии..... | 144 |
| Основные гипотезы, учитывающие рассеяние энергии при затухании..... | 146 |
| Методы определения декремента затухания и данные для ряда материалов..... | 148 |
| Методы непосредственного интегрирования уравнения поперечных колебаний стержней..... | 152 |
| Уравнение поперечных колебаний с учетом затухания..... | 152 |
| Вынужденные колебания при наличии сосредоточенных масс..... | 154 |
| Поперечные колебания с учетом затухания для любого закона изменения возмущающей силы..... | 164 |
| Вынужденные колебания стержня с сосредоточенным грузом..... | 168 |
| Применение метода разложения по фундаментальным функциям..... | 170 |
| Свободные колебания с учетом затухания..... | 170 |
| Вынужденные колебания балок под действием периодических сил..... | 172 |
| Консольный стержень с сосредоточенной массой..... | 175 |
| Консольный стержень, упруго подкрепленный в точке | 177 |

Глава VII. Колебания плоских рам

| | |
|--|-----|
| Точный метод..... | 181 |
| Общий метод составления уравнений частот..... | 181 |
| Колебания прямоугольной рамы..... | 185 |
| Колебания многоярусных рам..... | 189 |
| Приближенные методы подсчета частот колебаний плоских рам..... | 191 |
| Вычисление основной частоты для прямоугольных рам по методу Релея..... | 191 |
| Вычисление основной частоты для многоярусной рамы по методу Релея..... | 197 |
| Влияние жесткости поперечных ригелей плоских рам на частоты колебаний..... | 202 |
| Вычисление частот колебаний обертонов для рам с абсолютно жесткими ригелями..... | 204 |
| Вычисление частот колебаний обертонов для плоских рам как систем с ограниченным числом степеней свободы..... | 209 |
| Влияние перерезывающих сил и инерции поворота сечений на частоты колебаний рам..... | 213 |
| Колебания пространственных рам с абсолютно жесткими ригелями, связывающими плоские рамы..... | 217 |
| Составление уравнения частоты..... | 218 |
| Колебания рамных каркасов при упругих поперечных ригелях..... | 228 |
| Составление уравнения частоты для распределенных масс ригелей..... | 228 |
| Уравнение частоты для сосредоточенных масс..... | 229 |

Глава VIII. Колебания решетчатых конструкций

| | |
|---|-----|
| Составная стойка с параллельными поясами..... | 232 |
| Частотные уравнения с учетом решетки..... | 232 |
| Колебания стержневой фермы..... | 236 |
| Дифференциальные уравнения движения..... | 236 |
| Подсчет основной частоты по энергетическому методу..... | 239 |

Глава IX. Колебания плит

| | |
|--|-----|
| Основные зависимости..... | 248 |
| Дифференциальное уравнение колеблющейся плиты | 248 |
| Потенциальная и кинетическая энергия плиты..... | 251 |
| Граничные условия | 253 |
| Свободные колебания ненагруженных плит..... | 255 |
| Плита, опертая по контуру | 255 |
| Плита с двумя опертymi краями..... | 257 |
| Плита, заделанная по контуру | 258 |
| Плита со свободными краями..... | 260 |
| Колебания круглых плит..... | 261 |
| Дифференциальное уравнение..... | 261 |
| Свободные колебания круглой плиты | 261 |
| Круглая пластинка под действием равномерно растягивающих или сжимающих сил..... | 264 |
| Кольцевые круглые плиты..... | 265 |
| Колебание эллиптической пластинки | 267 |
| Свободные колебания нагруженных прямоугольных плит..... | 268 |
| Изложение "метода..... | 268 |
| Прямоугольная плита, нагруженная сосредоточенными грузами..... | 272 |
| Составление уравнения частот для случая нескольких грузов | 274 |
| Прямоугольная плита, опертая по контуру, с сосредоточенным грузом | 275 |
| Квадратная плита с четырьмя симметрично расположенными равными грузами..... | 277 |
| Колебания прямоугольных плит, подкрепленных ребрами одного на- правления и нагруженных сосредоточенными грузами..... | 278 |
| Изложение, метода..... | 278 |
| Плита, подкрепленная одним ребром и подпертая в двух точках..... | 281 |
| Квадратная плита, подкрепленная двумя ребрами..... | 282 |
| Прямоугольная плита, подкрепленная двумя ребрами с грузом посередине..... | 283 |
| Прямоугольная плита, опертая по контуру и подкрепленная ребрами одинаковой жесткости на равных расстояниях | 286 |
| Вынужденные колебания..... | 291 |
| Применение приближенных методов к определению собственных частот плит, подкрепленных ребрами..... | 292 |
| Плиты, подкрепленные перекрестными ребрами..... | 292 |
| Плиты, подкрепленные ребрами одного направления | 297 |
| Колебания плит переменной и постоянной жесткости со сложными граничными условиями | 305 |
| Изложение метода..... | 305 |
| Прямоугольная консольная пластина постоянной толщины | 308 |
| Консольная косоугольная пластинка | 310 |
| Секторная плита в виде неполного сектора (кругового прямоугольника)..... | 311 |
| Определение частот и форм колебаний пластин типа лопастей осевых поворотнлопастных гидравлических турбин | 312 |
| Метод решения..... | 312 |
| Колебание пластины типа лопасти низконапорной турбины..... | 312 |
| Определение частот и форм собственных колебаний пластин типа лопастей высоконапорных осевых поворотнлопастных гидротурбин..... | 313 |
| Результаты расчета модели..... | 318 |

Глава X. Колебания турбинных лопаток

| | |
|--|-----|
| Колебание отдельной лопатки..... | 320 |
| Работа центробежных сил..... | 320 |
| Уравнение колебаний лопатки в поле центробежных сил | 323 |
| Энергетический метод определения частот колебаний турбинной лопатки..... | 325 |
| Кориолисовы силы, действующие на лопатку..... | 328 |
| Колебания лопаток, связанных бандажом..... | 329 |
| Моменты, вызываемые упругими связями..... | 329 |
| Определение собственных частот лопаток по методу начальных параметров..... | 331 |
| Колебания лопаток с учетом затухания..... | 341 |
| Уравнение поперечных колебаний | 341 |
| Амплитуды вынужденных колебаний..... | 344 |
| Свободные колебания стержня с учетом затухания, зависящего от удлинения..... | 351 |
| Влияние заделки на частоту колебаний..... | 352 |

Глава XI. Колебания дисков

| | |
|---|-----|
| Тангенциальные колебания дисков | 354 |
| Основные типы колебаний | 354 |
| Дифференциальное уравнение колебаний кручения и удлинения диска..... | 354 |
| Тангенциальные колебания невращающегося диска с лопатками..... | 356 |
| Возможные формы колебаний..... | 356 |
| Уравнения колебаний кручения облопаченных дисков гиперболического профиля..... | 357 |
| Граничные условия и условия сопряжения..... | 358 |
| Значение функций $K(a)$ для дисков гиперболического профиля | 361 |
| Влияние продольной растягивающей силы..... | 363 |
| Приложение полученных результатов к частным случаям | 364 |
| Тангенциальные колебания вращающегося диска совместно с лопатками | 369 |
| Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины и его решение..... | 369 |
| Частотное уравнение для вращающегося облопаченного диска | 372 |
| Колебания дисков с учетом напряженного сечения в срединной плоскости | 374 |
| Напряжения в срединной плоскости..... | 374 |
| Применение метода Ритца к определению частот и форм колебаний системы диск — лопатки..... | 376 |

Глава XII. Колебания оболочек

| | |
|--|-----|
| Уравнения движения оболочек..... | 380 |
| Общие уравнения в ортогональных координатах..... | 380 |
| Уравнение технической теории оболочек | 382 |
| Колебания цилиндрических оболочек | 383 |
| Формы колебаний оболочек | 383 |
| Дифференциальные уравнения колеблющейся оболочки и метод интегрирования..... | 384 |
| Применение тригонометрических рядов | 387 |
| Колебания оболочки, опертой и заделанной по торцам..... | 390 |
| Применение энергетических методов к определению частот | 396 |
| Колебания цилиндрических оболочек в жидкости..... | 399 |
| Колебания оболочек других форм | 401 |

Глава XIII. Продольные и крутильные колебания стержней

| | |
|--|-----|
| Свободные колебания..... | 403 |
| Дифференциальное уравнение продольных колебаний с учетом затухания..... | 403 |
| Свободные колебания стержня с грузом на конце при отсутствии затухания..... | 405 |
| Продольные колебания стойки с равными массами на одинаковых расстояниях..... | 407 |
| Свободные колебания нагруженной стойки с учетом затухания..... | 413 |
| Вынужденные колебания кручения валов при учете затухания..... | 417 |
| Дифференциальное уравнение колебаний кручения..... | 417 |
| Крутильные колебания вала с дисками..... | 417 |
| Частные случаи..... | 423 |
| Крутильные колебания многомассовых систем..... | 425 |
| Дифференциальные уравнения свободных колебаний многомассовой системы..... | 426 |
| Определение собственных частот и форм крутильных колебаний системы..... | 428 |
| Прямой метод расчета крутильных колебаний..... | 428 |
| Метод остатков (метод Толле)..... | 428 |
| Метод непрерывных дробей (метод проф. Терских)..... | 429 |
| Расчет собственных частот и форм крутильных колебаний на электронно-вычислительной машине..... | 435 |

Глава XIV. Колебания с нелинейными и переменными характеристиками

| | |
|---|-----|
| Нелинейные колебания..... | 438 |
| Предварительные замечания..... | 438 |
| Метод Ляпунова — Крылова..... | 439 |
| Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова..... | 443 |
| Метод Ван-дер-Поля..... | 445 |
| Точное решение для колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой..... | 448 |
| Одновременное действие двух гармонических возмущающих сил на нелинейную систему..... | 450 |
| Вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы..... | 451 |
| Квазигармонические колебания..... | 455 |
| Сущность явления..... | 455 |
| Нахождение решений уравнения Хилла..... | 457 |
| Определитель Хилла..... | 460 |
| Колебание груза на пружине с периодически изменяющейся жесткостью..... | 464 |
| Поперечные колебания балки под действием периодической продольной силы [10, 46]..... | 466 |
| Поперечные колебания стержней при действии продольной периодической силы при учете затухания..... | 469 |
| Внутреннее трение, зависящее от амплитуды колебаний..... | 471 |
| Поперечные колебания стоек с грузом на конце при учете сжатия стоек..... | 474 |
| Поперечные колебания стоек с грузом при учете сжатия и затухания..... | 478 |
| Самовозбуждающиеся колебания (автоколебания)..... | 482 |
| Сущность явления..... | 482 |
| Колебания маятника, насаженного на вращающийся вал..... | 482 |
| Автоколебания ротора при наличии гироскопических моментов [48]..... | 485 |

Глава XV. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс

| | |
|--|-----|
| Прохождение через резонанс линейной системы с одной степенью свободы | 498 |
| Уравнение движения и его интеграл при линейной скорости прохождения | 498 |
| Возрастание частоты p | 500 |
| Изменение амплитуды силы по закону $P(t) = q\varepsilon^2 t^2$ | 501 |
| Убывание частоты p | 501 |
| Пропорциональность амплитуды возмущающей силы квадрату убывающей частоты | 505 |
| Решение задачи при учете сил трения в комплексной форме | 503 |
| Максимальные динамические коэффициенты при переходе через резонанс | 509 |
| Прохождение через резонанс системы с несколькими степенями свободы | 513 |
| Уравнения движения и их интегрирование | 513 |
| Крутильные колебания трехмассовой системы | 514 |
| Прохождение через резонанс линейной системы с нелинейно изменяющейся частотой возмущающей силы | 517 |
| Прохождение через резонанс при изменении частоты по параболическому закону | 517 |
| Пропорциональность возмущающей силы квадрату мгновенной частоты | 523 |
| Изменение частот колебаний по степенной функции третьего порядка | 524 |
| Применение моделирующей машины | 526 |
| Поперечные колебания стержней постоянного сечения при переходе через резонансные состояния | 529 |
| Колебания стержня с сосредоточенным грузом | 529 |
| Нестационарные колебания стержня, вызываемые заданным движением опоры | 532 |
| Колебания прямоугольных пластин при переходе через резонанс | 535 |
| Изменение частоты по линейному закону | 535 |
| Изменение возмущающей силы по закону $P_0 \varepsilon^2 t^2$ | 537 |
| Нестационарные колебания дисков турбомашин | 539 |
| Диск постоянной толщины | 539 |
| Действие сосредоточенной постоянной силы P | 540 |
| Нестационарные колебания цилиндрической оболочки | 542 |
| Ортотропная оболочка | 542 |
| Построение асимптотических решений нелинейного уравнения с переменными коэффициентами | 544 |
| Сущность метода | 544 |
| Построение приближенного решения уравнения | 546 |
| Переход через резонанс нелинейной системы с одной степенью свободы | 551 |
| Нестационарные колебания в линейной системе с периодически изменяющимися параметрами | 555 |
| Уравнение движения | 555 |
| Интегрирование уравнения для переходного процесса | 557 |

Глава XVI. Колебания вращающихся валов

| | |
|--|-----|
| Критические числа оборотов многоопорных валов | 561 |
| Колебания вала на жестких опорах | 561 |
| Колебания вала на упругих опорах | 565 |
| Нестационарные колебания вала с неодинаковыми главными моментами инерции поперечного сечения | 570 |
| Дифференциальные уравнения движения | 570 |

| | |
|--|-----|
| Интегрирование уравнений движения и результаты исследования | 572 |
| Переход гибкого вала через критическую скорость | 574 |
| Уравнения движения для гибкого вала | 574 |
| Вал на упруго-податливых опорах | 575 |
| Колебания гибкого ротора на линейно-упругих опорах с учетом гироскопического эффекта | 578 |
| Уравнения движения | 578 |
| Применение асимптотического метода | 582 |
| Нестационарные изгибно-крутильные колебания, системы двигатель-ротор | 584 |
| Уравнения движения и их интегрирование | 584 |
| Численные результаты | 587 |

Глава XVII. Колебание балки под действием движущейся нагрузки

| | |
|---|-----|
| Движение груза по невесомой балке | 591 |
| Уравнение движения груза | 591 |
| Колебание весомой балки под действием движущегося груза | 593 |
| Уравнения движения в обобщенных координатах | 593 |
| Решение уравнений в обобщенных координатах | 596 |
| Движение груза по балке с промежуточной упругой опорой | 599 |
| Нахождение динамических прогибов под грузом | 602 |
| Динамические прогибы под грузом для весомой балки | 602 |
| Совместное действие движущейся гармонической силы и катящейся массы | 603 |
| Динамические прогибы под грузом для невесомой балки | 605 |
| Колебание трубы при протекании в ней жидкости со скоростью v | 608 |
| Установившиеся колебания балки на упругом основании при движении груза и воздействии периодической силы | 612 |
| Сущность задачи | 612 |
| Колебания балки при действии периодической силы на движущийся груз | 613 |
| Движение груза при действии периодической силы на подвесенную массу | 615 |
| Расчеты для частных случаев | 618 |
| Установившиеся колебания бесконечно длинной балки, лежащей на упругом полупространстве, под действием движущейся силы | 619 |
| Дифференциальные уравнения движения упругой среды и их решение | 619 |
| Условия сопряжения балки и полупространства и перемещения балки | 623 |
| Вычисление интегралов $S(u)$ для различных u | 626 |
| Расчеты для частных случаев | 630 |

Глава XVIII. Колебания плит, лежащих на упругом основании

| | |
|---|-----|
| Определение перемещений и напряжений основания и плиты | 634 |
| Сущность задачи | 634 |
| Дифференциальные уравнения колебаний | 635 |
| Определение перемещений упругого основания | 637 |
| Исследование полученных решений | 643 |
| Изучение интегралов в комплексной области | 643 |
| Разложение подынтегрального выражения по степеням s_p | 648 |
| Тонкая плита, лежащая на упругом полупространстве | 649 |
| Приложение к частным случаям | 650 |

| | |
|---|-----|
| Амплитуды вынужденных колебаний плиты под действием силы | 650 |
| Амплитуды вынужденных колебаний плиты при сосредоточенной массе | 651 |

Глава XIX. Удар и колебания упругих тел

| | |
|--|-----|
| Состояние вопроса | 654 |
| Неупругий удар по стержням и плитам..... | 655 |
| Поперечный удар по балке при учете затухания в ней | 655 |
| Удар по прямоугольной пластинке, лежащей на упругом основании..... | 659 |
| Удар по круглой пластинке, лежащей на упругом основании | 664 |
| Упругий удар и колебания..... | 680 |
| Общие сведения..... | 680 |
| Упругий удар по балке..... | 681 |
| Расчеты для частных случаев..... | 684 |
| Упругий удар по тонкой плите..... | 689 |
| Приложение..... | 693 |
| Литература..... | 702 |

Анатолий Петрович Филиппов

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Печатается по постановлению ученого совета Харьковского филиала
Института механики Академии наук Украинской ССР*

Редактор *Н. К. Сытник*

Художественный редактор *И. П. Антонюк*

Оформление художников *Б. И. Бродского, Д. Д. Грибова*

Технический редактор *М. А. Рекес*

Корректоры *В. А. Литовкина, М. М. Раскина*

БФ 05595. Зак. № 1482. Изд. № 174. Тираж 3270. Формат бумаги 60x90^{1/16}. Печ. физ. листов 44,75. Условн. печ. листов 44,75. Учетно-изд. листов 39,58. Подписано к печати 29.XII 1964 г. Цена 2 р. 18 коп. Т. п. 1964, поз. 180.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевская книжная типография № 5 Государственного комитета Совета Министров УССР
по прессе — Киев, Репина, 4