

517.2
К93

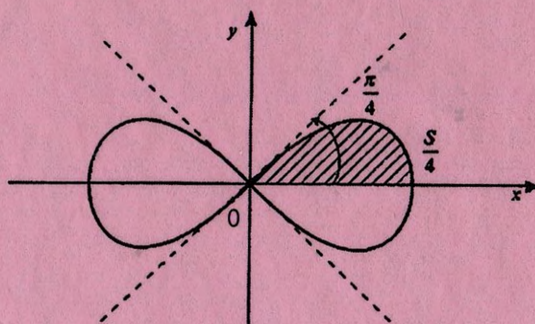
L. V. Kurpa, T. V. Shmatko
Л. В. Курпа, Т. В. Шматко

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS FOR ONE VARIABLE FUNCTIONS

The Educational Textbook
for Students of Technical Universities

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей



$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

L. V. Kurpa, T. V. Shmatko
Л. В. Курпа, Т. В. Шматко

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS FOR ONE VARIABLE FUNCTIONS

The Educational Textbook
for Students of Technical Universities

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «
Харківський політехнічний інститут»

Харків
НТУ «ХПІ»
2017

УДК 517.2 (075)

ББК 22.161.1

К93

Рецензенти:

О. Н. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків;

О. Г. Ніколасв, д-р фіз.-мат. наук, професор, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків.

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей, протокол № 7 від 23.09.2016 р.

В навчальному посібнику розглядається теоретичний матеріал з таких розділів вищої математики: теорія границь, неперервність функцій, диференціальне та інтегральне числення для функцій однієї змінної. Посібник містить в собі доведення всіх необхідних теорем, передбачених робочою програмою з математичного аналізу стосовно розглянутих тем, та ілюстрацію їх на конкретних прикладах.

Призначено для студентів технічних університетів, які вивчають вищу математику англійською мовою.

Курпа Л. В.

К93 Differential and Integral Calculus for One Variable Functions = Диференціальне та інтегральне числення для функцій однієї змінної: навч. посіб. / Л. В. Курпа, Т. В. Шматко. – Харків : НТУ «ХП», 2017. – 324 с. – Англ. мовою.

ISBN 978-617-05-0226-1

The educational textbook includes theoretical material of the following sections of the higher mathematics: Limits theory, continuity of functions, differential and integral calculus for functions of one variable. The manual contains all necessary proof of theorems provided the work program of mathematical analysis regarding topics discussed, and their illustration on concrete examples.

The educational textbook would be useful for students of technical universities, who are studying the higher mathematics in English.

Лл. 171. Табл. 9. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 517.2 (075)
ББК 22.161.1

ISBN 978-617-05-0226-1

© Курпа Л. В., Шматко Т. В., 2017.

CONTENT

INTRODUCTION.....	3
CHAPTER 1. FUNCTIONS OF ONE VARIABLE.....	9
1.1. Basic Logic Symbols.....	9
1.2. The Simplest Concepts and Designations of the Sets Theory	9
1.3. The Absolute Value (Modulus) of a Real Number and its Properties.....	11
1.4. Numerical Sets. Interval. A Neighbourhood of a Point.....	13
1.5. Constants and Variables Quantities. Classification of Variables	14
1.6. Function.....	15
1.7. Ways of Function Representation.....	17
1.8. Implicit and Explicit Functions.....	19
1.9. Even and Odd Functions. Periodic Functions	19
1.10. Inverse Function.....	21
1.11. Basic Elementary Functions.....	22
1.12. Composite Function.....	29
1.13. Elementary Functions.....	30
CHAPTER 2. LIMITS THEORY.....	31
2.1. Limit of Numerical Sequence.....	31
2.2. The Simplest Properties of the Limits.....	35
2.3. Limit of Monotonic Sequence.....	39
2.4. Infinitesimals and their Main Properties.....	40
2.5. Properties of Limits Connected with Arithmetic Operations	43
2.6. Infinitely Large Values and Th&ir Main Properties.....	45
2.7. Connection Between Infinitely Large and Infinitesimals.....	46
2.8. Limits of a Function at a Point and on Infinity.....	47
2.9. One-Sided Limits of a Function at a Point.....	49
2.10. Properties of the Function Limits.....	52
2.11. The Second Definition of a Function Limit at a Point and on Infinity.....	56
2.12. The first Remarkable Limit.....	58
2.13. The Number e as Limit of the Numerical Sequence.....	60
2.14. The Second Remarkable Limit.....	61
2.15. Comparison of the Infinitesimals.....	63
2.16. Equivalent Infinitesimals.....	65

CHAPTER 3. CONTINUITY OF A FUNCTION	68
3.1. Definition of Continuous Function at a Point.....	68
3.2. Another Definitions of the Function Continuity.....	69
3.3. Arithmetic Operations on Continuous Functions.....	71
3.4. Continuity of the Composite Function.....	71
3.5. Theorem about Retaining Sign of a Continuous Function.....	72
3.6. Continuity of the Inverse Function.....	73
3.7. Continuity of the Basic Elementary Functions.....	73
3.8. Classification of Discontinuity Points.....	76
3.9. Corollaries of the Second Remarkable Limit.....	83
3.10. Limit of Power-exponential Function.....	87
3.11. Lemma about Contracting Segments.....	87
3.12. Lemma By Boltsano-Weierstrass.....	88
3.13. Properties of the Functions. Continuous on Closed Interval.....	89
3.14. Uniform Continuity of a Function.....	94
CHAPTER 4. FUNDAMENTALS OF THE DIFFERENTIAL CALCULUS FOR ONE VARIABLE FUNCTIONS.....	95
4.1. Derivative of a Function and its Geometric Sense.....	95
4.2. Connection Between Continuity and Differentiability of a Function.....	99
4.3. The Basic Rules for Finding Derivatives.....	100
4.4. Derivative of the Inverse Function.....	104
4.5. Derivatives of the Inverse Trigonometric Functions.....	105
4.6. Derivatives of the Hyperbolic and Inverse Hyperbolic Functions	106
4.7. The Table of the Basic Formulas and Rules of Differentiation	107
4.8. Derivative of the Composite Function.....	108
4.9. Differentiation of the Implicit Functions.....	109
4.10. Logarithmic Differentiation.....	112
4.11. Geometric and Physical Applications of the Derivatives.....	114
4.12. Parametric Representation of a Function.....	117
4.13. The Equations of Some Curves in Parametric Form.....	118
4.14. The Derivative of a Function Represented Parametrically.....	121
4.15. The Differential.....	124
4.16. The Geometric Meaning of the Differential.....	129
4.17. Derivatives of Different Orders.....	130
4.18. Differentials of Higher Orders.....	133
4.19. Derivatives of Higher Order of the Functions Represented Parametrically.....	135

CHAPTER 5. INVESTIGATION OF THE BEHAVIOUR OF FUNCTIONS.....	137
5.1. The Mean-Value Theorems of Differential Calculus.....	137
5.2. L'Hospital's Rule for Evaluating Indeterminate Forms of the Type $\frac{0}{0}$	143
5.3. Evaluating Indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$ Using L'Hospital's Rule	146
5.4 Evaluating Power-Exponential Indeterminate Forms.....	148
5.5 Theorems About Increase and Decrease of a Function on an Interval.....	149
5.6. Extremum of a function.....	151
5.7. Sufficient Condition for Existence of an Extremum (the First Rule).....	152
5.8. Testing a Differentiable Function for Maximum and Minimum with a Help of the First Derivative.....	155
5.9. Testing a Function for Maximum and Minimum by a Second Derivative.....	157
5.10. The Greatest and the Smallest Values of a Function on an Interval	158
5.11. Applying the Theory Maxima and Minima of Functions to the Solving Problems.....	160
5.12. Convexity and Concavity of a Curve. Points of Inflection.....	161
5.13. Asymptotes.....	165
5.14. General Plan for Investigating Functions and Constructing Graphs.....	169
5.15. Taylor's formula.....	173
CHAPTER 6. AN INDEFINITE INTEGRAL.....	179
6.1. Antiderivative of a function. Definition of an Indefinite Integral	179
6.2. Some Properties of an Indefinite Integral.....	181
6.3. Table of Integrals.....	182
6.4. Methods of Integration.....	184
6.4.1. Direct Integration of the Function.....	184
6.4.2. Integrals of Function Containing a Quadratic Trinomial.....	187
6.4.3. Integration by Substitution (Change of Variable).....	188
6.4.4. Method of Integration by Parts.....	193
6.5. Complex Numbers and Operations With Them.....	198

6.5.1. Definition. Algebraic Form of the Complex Number.....	198
6.5.2. Geometric Representation of the Complex Numbers.....	202
6.5.3. Trigonometric Form of the Complex Number.....	204
6.5.4. Complex Power of “ e ” Number.....	206
6.5.5. Exponential Form and Logarithm of the Complex Number.....	210
6.5.6. Formulas by Euler.....	211
6.6. Integration of the Rational Functions.....	212
6.6.1. Decomposition of a Polynomial into Factors.....	213
6.6.2. Integration of Partial Rational Fractions.....	216
6.6.3. Integration of the Proper Rational Fraction.....	223
6.7. Integration of Some Irrational Functions.....	226
6.8. Integration of Certain Classes of Trigonometric Functions	229
CHAPTER 7. DEFINITE INTEGRAL.....	234
7.1. A Definition of the Definite Integral.....	234
7.2. The Classes of the Integrable Functions.....	238
7.3. Basic Properties of Definite Integrals.....	239
7.4. Review questions and exercises.....	244
7.5. Evaluating a definite integral. The Formula by Newton-Leibniz	244
7.6. Methods of Calculation of Definite Integrals.....	249
7.6.1. Method by substitution. (Change of Variable in the Definite Integral).....	249
7.6.2. Integration by parts.....	252
7.7. The definite integral of even and odd functions.....	254
CHAPTER 8. APPLICATIONS OF THE DEFINITE INTEGRAL	255
8.1. Computing Area of Plane Figures.....	255
8.1.1. Area in Rectangular Coordinates.....	255
8.1.2. Area Between Two Curves.....	256
8.1.3. Calculation of the Area Bounded by a Curve Given Parametrically.....	257
8.1.4. The Area of a Curvilinear Sector in Polar Coordinates.....	259
8.2. The Arc Length of a Curve.....	261
8.2.1. The Arc Length of a Curve in Rectangular Coordinates.....	261
8.2.2. Calculation of Arc Length of the Curve Given by Parametricall)	263
8.2.3. The Arc Length of a Curve in Polar Coordinate	264
8.3. Applications of the Definite Integral o Calculation of Solid Volumes.....	266
8.3.1. Computing the Volume of a Solid by “Method of Slicing” (Parallel Section).....	266

8.3.2. The Volume of a Revolution Solid.....	268
8.3.3. Method of cylindrical shells.....	269
8.3.4. Area of a Surface of Revolution.....	271
CHAPTER 9. IMPROPER INTEGRALS.....	275
9.1. Integrals with Infinite Limits (I-kind).....	275
9.2. Generalized Formula by Newton-Leibniz.....	277
9.3. Signs of Comparison for Non-Negative Functions.....	278
9.4. Improper Integrals of the 2 nd Kind (Integrals of Unbounded Functions, Integrals of a Discontinuous Functions).....	282
9.5. The Comparison Signs for Convergence of an Improper Integrals of the Second Kind for Non-Negative Function.....	285
REFERENCES.....	287
APPENDIX 1. ENGLISH-UKRAINIAN-RUSSIAN VOCABULARY OF MATHEMATICAL TERMS.....	288
APPENDIX 2. RUSSIAN-ENGLISH VOCABULARY OF MATHEMATICAL TERMS.....	301
APPENDIX 3. УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ СЛОВОСПОЛУЧЕНЬ.....	311