



**А.Ф. Дащенко,  
Л.В. Коломиец,  
В.Ф. Оробей,  
Н.Г. Сурьянинов**

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ  
МЕТОД ГРАНИЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

**Том 1**

А. Ф. Дашченко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов

# **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Том 1**

Одесса-2010  
ВМВ

ББК38. 112я73

Б163

УДК 531/534:624(075.8)

Дашенко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. /Численно-аналитический метод граничных элементов / В 2-х томах. Т.1. — Одесса. — БМВ, 2010. — 415 с.

**ISBN 978-966-413-178-7**

В монографии представлено наиболее полное руководство по теории и применению численно-аналитического варианта метода граничных элементов для расчета различных линейных систем одномерных модулей. В качестве технического приложения рассмотрены линейно-упругие стержневые, пластинчатые и оболочечные конструкции, испытывающие статические, динамические и бифуркационные воздействия.

Подробно изложен алгоритм МГЭ, основанный на использовании фундаментальных ортонормированных функций и аппарата обобщенных функций. Приведены новые решения дифференциальных уравнений линейных задач и примеры, иллюстрирующие эффективность разработанного метода. Много внимания уделено решению обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Широко используется среда программирования MATLAB. Материал монографии разбит на два тома и отражает 25-летний период работы авторов по развитию метода.

Для студентов, аспирантов и преподавателей высших технических учебных заведений, специалистов в области механики деформируемого твердого тела и строительной механики.

### **Рецензенты:**

Д.т.н., проф., зав. каф. высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета **Усов Анатолий Васильевич.**

Д.т.н., проф., зав. каф. теоретической и прикладной механики Одесского национального морского университета **Гришин Владимир Александрович.**

Д.т.н., проф., зав. каф. строительной механики Одесской государственной академии строительства и архитектуры **Яременко Александр Федорович.**

**ISBN 978-966-413-178-7**

© Дашенко А. Ф., Коломиец Л. В.,  
Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г., 2010.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ГЛАВА 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ.....	12
1.1. Предмет и задачи строительной механики.....	12
1.2. Основные виды опор.....	14
1.3. Условия геометрической неизменяемости стержневых систем..	15
1.4. Статическая определимость геометрически неизменяемых стержневых систем.....	18
1.5. Примеры кинематического анализа.....	20
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	25
2.1. Идея метода, преимущества и недостатки.....	25
2.2. Краткий исторический обзор и классификация МГЭ.....	26
2.3. Линейные дифференциальные уравнения.....	29
2.4. Импульсные функции в методе граничных элементов.....	33
2.5. Описание нагрузок на модуль через обобщённые функции и сплайны.....	40
2.6. Соотношения между граничными параметрами модуля и правила знаков.....	45
2.7. Решение краевых задач для линейных систем.....	51
ГЛАВА 3. СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	59
3.1. Растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб стержней.....	59
3.2. Кручение тонкостенных стержней.....	62
3.3. Пространственный случай деформирования прямолинейного стержня.....	64
3.4. Плоские и пространственные стержневые системы.....	66
3.4.1. Растяжение-сжатие ступенчатого стержня.....	66
3.4.2. Статически определимые и неопределимые фермы.....	70

3.4.3. Кручение тонкостенных неразрезных балок и рам.....	79
3.4.4. Изгиб и кручение тонкостенных балок.....	89
3.4.4.1. Основные уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля.....	89
3.4.4.2. Построение системы фундаментальных функций.....	91
3.4.4.3. Функция Грина для стесненного кручения тонкостенного стержня.....	95
3.4.4.4. Построение вектора нагрузок.....	97
3.4.4.5. Обобщение методики расчета на стержни произвольного поперечного сечения.....	99
3.4.4.6. Пример расчета тонкостенного стержня открытого профиля методом граничных элементов.....	103
3.4.5. Неразрезные балки и плоские рамы.....	110
3.4.6. Учет продольных перемещений в рамах.....	119
3.4.7. Пространственные рамы.....	122
3.5. Статика арокных систем.....	124
3.5.1. Дифференциальные уравнения деформирования кругового стержня в своей плоскости.....	125
3.5.2. Фундаментальные решения для кругового стержня с учетом деформаций изгиба и растяжения.....	127
3.5.3. Расчет плоских арок и арокных систем.....	137
3.6. Соотношения МГЭ для стержней с переменной геометрией.....	145
3.7. Применение системного подхода.....	159
3.8. Учет действия температуры.....	158
3.9. Приложение метода к расчету крупногабаритных рам из тонкостенных элементов.....	162
3.10. Изгиб балок с распределенными параметрами.....	171
<b>ГЛАВА 4. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....</b>	<b>179</b>
4.1. Определение частот и форм собственных колебаний стержневых систем МГЭ.....	180

4.2. Продольные, крутильные и поперечные колебания прямолинейного стержня.....	181
4.3. Общий случай гармонического динамического воздействия.....	185
4.4. Выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний.....	189
4.5. Учет сосредоточенных масс.....	194
4.6. Стержневые системы с подвижными и неподвижными узлами. ....	195
4.6.1. Уточнение динамических моделей.....	200
4.6.2. Расчет неразрезных балок.....	208
4.6.3. Расчет рам с неподвижными узлами.....	228
4.6.4. Учет сил инерции подвижных стержней.....	231
4.7. Крутильные колебания тонкостенных балок.....	238
4.8. Дифференциальные уравнения колебаний кругового стержня в своей плоскости. Динамика арок и арочных систем.....	256
4.9. Колебания балок с распределенными параметрами.....	268
ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	278
5.1. Фундаментальные решения для продольно-поперечного изгиба прямолинейного стержня.....	279
5.2. Определение спектра критических сил и форм потери устойчивости статическим методом.....	281
5.3. Устойчивость свободных стержней и стержней на жестких и упругих опорах.....	282
5.4. Устойчивость стержневых систем с подвижными и неподвижными узлами.....	289
5.5. Динамический метод решения задач устойчивости.....	297
5.5.1. Методика учета следящих сжимающих сил.....	299
5.5.2. Фундаментальные решения для поперечных колебаний с учетом продольной силы.....	301
5.5.3. Стержень на упругом основании.....	302

5.5.4. Модель балки С.П. Тимошенко.....	315
5.5.5. Устойчивость систем от следящих консервативных сил.....	324
5.5.6. Устойчивость систем от неконсервативных сил.....	326
5.5.7. Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости.....	336
5.5.8. Применение модели С.П. Тимошенко.....	339
5.6. Численно-аналитическое решение краевых задач устойчивости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.....	344
5.6.1. Интегрирование уравнений устойчивости.....	345
5.6.2. Задачи устойчивости при наличии чистого изгиба.....	350
5.6.3. Задачи устойчивости при произвольной функции $M_2$ .....	364
5.7. Устойчивость арок и арочных систем в своей плоскости.....	372
5.8. Устойчивость балок с распределенными параметрами.....	386
ЛИТЕРАТУРА.....	397