

579.6  
У-66

**КОМП'ЮТИНГ**

В. А. Андруник, В. А. Висоцька,  
В.В. Пасічник, Л.Б. Чирун, Л.В. Чирун

# **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В КОМП'ЮТЕРНИХ НАУКАХ**

Том 2



omputing

**Навчальний посібник**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА  
ПОЛІТЕХНІКА"

**В. А. Андруник, В. А. Висоцька,  
В. В. Пасічник, Л. Б. Чирун, Л. В. Чирун**

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В  
КОМП'ЮТЕРНИХ НАУКАХ  
Том 2**

**Навчальний посібник**

за науковою редакцією д.т.н., професора,  
Лауреата державної премії України у галузі науки та техніки  
В. В. Пасічника

**Львів - 2018  
Видавництво «Новий Світ - 2000»**

УДК 81:004.93  
ББК 22.19я73  
А 64

*Гриф надано Науково-методичною радою  
Національного університету «Львівська політехніка»  
(Протокол № 28 від 27.04.2017 р.)*

**Рецензенти:**

*Госай О.П.* доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії Чорноморського національного університету імені Петра Могили,

*Дзвек І.І.* кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

*Дронюк І.М.* кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри автоматизованих систем управління Національного університету «Львівська політехніка».

*Квєтний Р.Н.* доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації та інформаційно-виміральної техніки Вінницького національного технічного університету, член-кореспондент Національної академії педагогічних наук України,

*Шаронюк Н.В.* доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інтелектуальних комп'ютерних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

**Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В.** Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник. Том 2 за ред. В. В. Пасічника - Львів: Видавництво «Новий Світ- 2000», 2018. - 536 с.

Навчальний посібник містить матеріал для вивчення основних теоретичних засад, функціональних можливостей та практичного застосування теорії чисельних методів, розроблення прикладних засобів та інформаційних систем аналізу та опрацювання інформації за допомогою чисельних методів Теоретичний та практичний матеріал викладено у доступній формі. Виклад матеріалу супроводжується значною кількістю прикладів, що полегшує його сприйняття та засвоєння. Подається перелік питань та тестів для самоконтролю, а також завдання для самостійного виконання трьох рівнів складності та довідкова інформація для розв'язування задач. Навчальний посібник призначається для студентів, що навчаються за спеціальностями 122 «Комп'ютерна наука» та 124 «Системний аналіз» і споріднених спеціальностей, які пов'язані з вивченням чисельних методів в інформатиці та інформаційних технологіях. Може бути використаний аспірантами в якості підґрунтя для наукових досліджень та викладачами в якості дидактичного матеріалу, а також для самостійного вивчення та підвищення кваліфікації. Книга призначена для спеціалістів із проектування, розроблення та впровадження інтелектуальних систем опрацювання інформаційних ресурсів, науковців в галузі глобальних інформаційних системи, систем штучного інтелекту, Інтернет-технологій, фахівців з електронної комерції, Інтернет-маркетингу та Інтернет-реклами, менеджерів комплексних Web-проектів, а також для здобувачів 3-ого (освітньо-наукового) рівня вищої освіти в галузі знань 12 «Інформаційні технології»

**ISBN 978-617-7519- 12-5**

© Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б.,  
Чирун Л. В. . 2018

© ФОП Піча С. В., Видавництво «Новий світ- 2000», 2018

# Зміст

Передмова наукового редактора серії підручників та навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ».....	10
Вступне слово авторів.....	15
<b>Розділ 1. Чисельні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.....</b>	<b>24</b>
1.1. Загальна постановка задачі.....	25
1.2. Метод Ейлера.....	27
1.2.1. Загальна постановка задачі.....	27
1.2.2. Графічна інтерпретація.....	28
1.3. Метод Рунге-Кутта.....	30
1.3.1. Загальна постановка задачі.....	30
1.3.2. Метод Рунге-Кутта другого порядку точності.....	31
1.4. Багатокрокові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.....	33
1.4.1. Метод Рунге-Кутта третього порядку точності.....	33
1.4.2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.....	35
1.5. Особливості методу Рунге-Кутта.....	36
1.5.1. Ідея методу Рунге-Кутта.....	36
1.5.2. Загальний підхід отримання формул Рунге-Кутта.....	38
1.5.3. Часткові випадки методу Рунге-Кутта.....	39
1.6. Різницьві методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).....	44
1.6.1. Екстраполяційні та інтерполяційні різницьві формули.....	44
1.6.2. Часткові випадки різницьвих формул. Екстраполяційні формули Адамса.....	46
1.6.3. Часткові випадки різницьвих формул. Інтерполяційні формули Адамса.....	48
1.7. Методи скінчених різниць розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь.....	49
1.7.1. Загальна постановка задачі.....	49
1.7.2. Основні різницьві співвідношення.....	50
1.7.3. Метод скінчених різниць розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь.....	52
1.7.4. Метод прогонки розв'язування апроксимуючої СЛАР для крайової задачі диференціальних рівнянь з точністю $o(h)$ .....	52
1.7.5. Метод прогонки розв'язування апроксимуючої СЛАР з точністю $o(h^2)$ .....	55
1.8. Чисельні методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних. Метод сіток розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь еліптичного типу.....	55
1.8.1. Метод розв'язування задачі Діріхле.....	55
1.8.2. Розв'язування рівняння Пуассона.....	58
1.9. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язування задачі Діріхле (метод Рейхенбаха).....	59
1.10. Часткові випадки методу Рейхенбаха.....	60
1.10.1. Перша різницєва схема розв'язування рівняння Пуассона.....	60
1.10.2. Друга різницєва схема розв'язування рівняння Пуассона.....	61
1.10.3. Третя різницєва схема розв'язування рівняння Пуассона.....	62
1.11. Апроксимація крайових умов методом Коллатца.....	63

1.12.	Розв'язування різницевих рівнянь.....	64
1.12.1.	Різницевий принцип максимуму.....	64
1.12.2.	Розв'язування різницевої системи.....	65
1.13.	Розв'язування рівнянь гіперболічного типу.....	66
1.13.1.	Метод сіток розв'язування задачі Коші для рівнянь гіперболічного типу.....	66
1.13.2.	Вибір сітки для рівнянь гіперболічного типу.....	68
1.14.	Метод сіток розв'язування лінійного рівняння параболічного типу (для розв'язування задачі Коші).....	69
	<i>Контрольні питання</i> .....	71
	<i>Задачі для самостійної роботи</i> .....	71
	<i>Завдання до лабораторної роботи</i> .....	72
<b>Розділ 2.</b>	<b>Чисельні методи розв'язування задач оптимізації</b> .....	<b>73</b>
2.1.	Загальна постановка задачі оптимізації.....	75
2.1.1.	Визначення цільової функції.....	75
2.1.2.	Формальне визначення задачі оптимізації.....	77
2.1.3.	Класифікація задач оптимізації.....	78
2.1.4.	Метод переведення критеріїв в обмеження.....	80
2.1.5.	Метод контрольних показників.....	80
2.1.6.	Задача багатокритеріального математичного програмування.....	81
2.1.7.	Деякі методи багатокритеріальної оптимізації.....	84
2.1.8.	Метод квазіоптимізації локальних критеріїв (метод послідовних поступок).....	88
2.1.9.	Метод згортання векторного критерію в суперкритерій.....	90
2.2.	Безумовна оптимізація.....	90
2.2.1.	Метод штрафних функцій.....	91
2.2.	Геометрична інтерпретація штрафних функцій.....	93
2.3.	Аналіз алгоритмів розв'язування задачі методом штрафних функцій.....	95
2.4.	Обчислювальні складнощі, що пов'язані зі штрафними функціями.....	99
2.5.	Аналіз та інтерпретація отриманих результатів.....	104
2.3.	Багатокритеріальні задачі оптимізації та основні підходи до їх розв'язування.....	105
2.3.1.	Основні поняття багатокритеріальної задачі оптимізації.....	105
2.3.2.	Геометрична ілюстрація багатокритеріальної задачі.....	105
2.3.3.	Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації.....	108
2.3.4.	Еталонні точки.....	108
2.3.5.	Критерії оптимальності. Критерій Парето.....	108
2.3.6.	Лексикографічний порядок.....	109
2.3.7.	Скаляризація.....	109
2.3.8.	Зважена сума.....	110
2.3.9.	Функція скаляризації Чебишева.....	110
2.3.10.	Метод зміни обмежень ( $\epsilon$ -обмеження).....	110
2.3.11.	Методи розв'язування. Інтерактивність. Еволюційні методи.....	111
2.4.	Лінійне програмування.....	111
2.4.1.	Місце лінійного програмування в системі задач математичного програмування.....	111
2.4.2.	Формальна постановка задачі лінійного програмування.....	112
2.4.3.	Чисельні методи оптимізації. Методи прямого пошуку.....	113
2.4.4.	Лінійний пошук без використання похідних.....	116
2.4.5.	Інтервал невизначеності.....	117
2.4.6.	Функції однієї змінної.....	118

2.4.7	Функції $n$ змінних .....	119
2.4.8	Методи прямого пошуку для функцій однієї змінної .....	120
2.4.9	Задача оптимізації методом Ньютона .....	120
2.5.	Порівняння методів лінійного пошуку без розрахунку похідної .....	122
2.5.1	Класифікація методів лінійного пошуку без розрахунку похідної .....	122
2.5.2	Рівномірний пошук .....	123
2.5.3	Послідовний пошук .....	123
2.5.4	Задача оптимізації методом дихотомічного пошуку (ділення пополам) .....	123
2.5.5	Задача оптимізації за методом золотого січення .....	126
2.5.6	Задача оптимізації за методом Фібоначчі .....	130
2.5.7	Методи апроксимації. Квадратична інтерполяція .....	136
2.6.	Аналіз методів та алгоритмів розв'язування задачі нелінійного програмування .....	138
2.6.1.	Класифікація методів нелінійного програмування .....	138
2.6.2	Формальна постановка задачі з використанням методів прямого пошуку для оптимізації унімодальних функцій якості без обмежень .....	139
2.6.3.	Визначення та основні властивості опуклих функцій .....	142
2.7.	Методи прямого пошуку для функцій $n$ змінних .....	145
2.7.1.	Метод покоординатного спуску .....	147
2.7.2.	Метод Хука - Дживса .....	147
2.7.3.	Метод Нелдера - Міда .....	149
2.7.4.	Метод циклічного покоординатного спуску .....	156
2.7.5	Метод Розенброка .....	160
2.7.6.	Метод спряжених градієнтів Флетчера та Рівса .....	166
	<i>Контрольні питання</i> .....	176
	<i>Задачі для самостійної роботи</i> .....	176
<b>Розділ 3.</b>	<b>Основи статистичного моделювання</b> .....	<b>187</b>
3.1.	Моделювання випадкових величин на комп'ютері .....	190
3.1.1.	Моделювання на комп'ютері рівномірно розподіленої величини $\alpha$ на $[0,1]$ , $[a,b]$ .....	190
3.1.2.	Моделювання на комп'ютері випадкової величини з довільним законом розподілу .....	194
3.1.3.	Моделювання нормально-розподіленої випадкової величини $\zeta$ з $M\zeta=0, D\zeta=1$ .....	197
3.2.	Обчислення інтегралів методом статистичного моделювання .....	197
3.2.1.	Аналітичний метод обчислення однократного інтеграла .....	197
3.2.2.	Метод площ обчислення визначеного інтеграла .....	198
3.2.3.	Обчислення кратних інтегралів .....	198
3.2.3.1.	Метод $n$ -кратних об'ємів .....	199
3.2.3.2.	Метод середнього значення (аналітичний метод) .....	200
3.3.	Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .....	200
3.3.1.	Метод Дж. фон Неймана-Улама .....	200
3.3.2.	Побудова імітаційної моделі розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) .....	204
3.3.3.	Випадкове блукання частинки з поглинаючим екраном .....	206
3.3.4.	Теорема про побудову $X(\omega)$ .....	208
3.3.5.	Обчислення оберненої матриці методом статистичного моделювання .....	209
3.3.6.	Алгоритм методу статистичного моделювання розв'язку СЛАР .....	210
3.4.	Розв'язок першої крайової задачі для рівняння $\Delta u=f$ .....	211

3.5. Марківські ланцюги та інтегральні рівняння.....	214
3.5.1. Загальна постановка задачі.....	214
3.5.2. Лінійні оцінки та умови неусувної.....	215
3.6. Методи статистичного моделювання для розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь.....	218
3.6.1. Загальна постановка задачі.....	218
3.6.2. Збіжність методу Ейлера в середньому квадратичному.....	221
3.6.3. Збіжність методу Ейлера як збіжність розподілів.....	224
3.6.4. Оптимальні різницеві схеми розв'язку стохастичних рівнянь.....	225
3.7. Наближене інтегрування стохастичних диференціальних рівнянь.....	227
3.7.1. Однокрокова апроксимація.....	228
3.7.2. Апроксимація на скінченному проміжку.....	230
3.7.3. Узагальнення на системи рівнянь.....	232
3.8. Методи побудови емпіричних формул за вибірковими значеннями.....	233
3.8.1. Загальна постановка задачі.....	233
3.8.2. Лінійна залежність.....	235
3.8.3. Метод вирівнювання.....	236
3.8.4. Квадратична (параболічна) залежність.....	239
3.8.5. Визначення параметрів емпіричної формули.....	241
3.8.6. Метод вибраних точок.....	242
3.8.7. Метод середніх.....	243
3.8.8. Метод найменших квадратів.....	245
3.8.9. Деякі міркування про вибір емпіричної формули з двома параметрами.....	249
3.8.10. Емпіричні формули, які містять три параметри.....	254
3.8.11. Уточнення отриманої емпіричної формули.....	258
3.8.12. Загальний метод визначення параметрів емпіричної формули.....	260
3.9. Метод статистичного аналізу економетрики.....	264
3.9.1. Метод кореляційного аналізу.....	264
3.9.2. Метод регресійного аналізу.....	275
3.9.3. Задача оптимізації статистичного аналізу складних процесів.....	280
3.9.4. Алгебра планування експерименту.....	281
3.9.5. Метод Бокса-Вілсона.....	289
3.10. Приклади математичного опису складних об'єктів експериментально-статистичними методами.....	299
3.10.1. Математичний опис промислового об'єкту методом пасивного експерименту.....	299
3.10.2. Математичний опис напіввиробничого об'єкту методом активного експерименту.....	300
3.11. Кількість спостережень.....	302
3.12. Квантування за часом.....	306
3.13. Метод експертних оцінок перевірки адекватності математичних моделей.....	311
3.14. Комп'ютерні технології ідентифікації виробничих агрегатів.....	315
3.15. Методичні прийоми дослідження впливу факторів на виробничі та економічні процеси.....	320
3.16. Контрольні питання.....	325
3.17. Задачі для самостійної роботи.....	325
3.18. Завдання до лабораторної роботи.....	326

<b>Комп'ютерний проект 1. Аналіз статистичних даних.....</b>	<b>330</b>
1. Форми та методи подання і попереднє статистичне опрацювання числових даних часових послідовностей.....	332
1.1. Попереднє опрацювання даних та подання результатів.....	332
1.2. Формування файлу даних у формі Excel та Word таблиць.....	332
1.3. Графічне подання даних.....	334
1.4. Описова статистика - кількісні характеристики даних.....	335
1.5. Побудова гістограми.....	337
1.6. Побудова кутуляти.....	338
2. Виявлення тенденції часового ряду методами згладжування.....	339
2.1. Методи згладжування часових рядів.....	340
2.2. Метод рухомого середнього.....	341
2.3. Метод зваженого рухомого середнього.....	342
2.4. Властивості рухомого середнього.....	343
2.5. Медіанна фільтрації.....	347
2.6. Нормування часових послідовностей.....	349
2.7. Критерії ефективності згладжування часових рядів.....	349
2.8. Формули для зваженого рухомого середнього.....	349
3. Кореляційний аналіз часових послідовностей.....	352
3.1. Кореляційне поле.....	353
3.2. Коефіцієнт кореляції.....	356
3.3. Кореляційне відношення.....	359
3.4. Властивості кореляційного відношення.....	360
3.5. Кореляційна матриця.....	360
3.6. Автокореляція.....	361
3.7. Автокореляція в часових рядах.....	361
3.8. Розрахунок автокореляції.....	362
4. Ієрархічний агломеративний кластерний аналіз багатовимірних даних.....	365
5. Порядок роботи.....	378
6. Хід роботи.....	379
7. Форма звітності.....	381
<b>Комп'ютерний проект 2. Розрахункова робота реалізації чисельних методів.....</b>	<b>383</b>
1. Алгоритми розв'язування нелінійних рівнянь.....	286
1.1. Основні поняття та визначення.....	386
1.2. Метод половинного ділення.....	387
1.2.1. Постановка задачі.....	387
1.2.2. Алгоритм методу.....	388
1.3. Метод хорд.....	389
1.3.1. Постановка задачі.....	389
1.3.2. Алгоритм методу.....	391
1.4. Метод Ньютона (метод дотичних).....	391
1.4.1. Постановка задачі.....	392
1.4.2. Правила визначення рухомого кінця для методу Ньютона.....	395
1.5. Метод ітерацій (метод послідовних наближень).....	396
2. Система лінійних алгебраїчних рівнянь.....	400
2.1. Основні поняття та визначення.....	400
2.1.1. Поняття матриці.....	400
2.1.2. Приклади матриць.....	401
2.1.3. Рівність матриць.....	402



2.1.4.	Додавання матриць.....	402
2.1.5.	Множення матриці на число.....	403
2.1.6.	Віднімання матриць.....	403
2.1.7.	Множення матриць.....	403
2.1.8.	Транспонування матриць.....	404
2.1.9.	Обернена матриця.....	405
2.1.10.	Властивості оберненої матриці.....	405
2.2.	Класифікація методів розв'язання СЛАР на ПК.....	405
2.3.	Особливості методів Гауса.....	407
2.4.	Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих.....	408
2.5.	Метод Крамера.....	411
2.6.	Метод оберненої матриці.....	413
2.7.	Матричний метод.....	414
3.	Інтерполювання функцій.....	422
3.1.	Математична постановка задачі інтерполювання.....	424
3.2.	Інтерполяційний многочлен Лагранжа.....	426
3.3.	Перша інтерполяційна формула Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполяції.....	429
3.4.	Метод Гауса.....	432
3.5.	Метод Стірлінга.....	432
3.6.	Метод Бесселя.....	432
4.	Розв'язування нелінійних та трансцендентних рівнянь.....	433
4.1.	Метод половинного ділення.....	434
4.2.	Метод пропорційних частин (хорд).....	435
4.3.	Метод Рибаківа.....	437
4.4.	Метод простих ітерацій.....	438
5.	Точність чисельного інтегрування.....	439
6.	Методи розв'язку крайових задач.....	440
6.1.	Метод прогону.....	440
6.2.	Проекційні методи (на прикладі методу Гальоркіна).....	442
7.	Методи пошуку максимуму функцій двох змінних.....	447
7.1.	Метод попокоординатного спуску.....	447
7.2.	Метод спірального попокоординатного спуску.....	448
8.	Розв'язування чисельними методами диференціальних рівнянь.....	449
8.1.	Основні поняття та визначення.....	449
8.2.	Класифікація чисельних методів розв'язування задачі Коші.....	452
8.3.	Одноточкові методи розв'язування задачі Коші на ПК.....	454
8.3.1.	Метод Ейлера.....	454
8.3.2.	Метод Рунге-Кутта.....	456
9.	Гradientні методи пошуку екстремуму.....	459
9.1.	Лінійні рівня.....	459
9.2.	Найпростіший gradientний метод оптимізації функцій.....	460
9.2.1.	Властивості gradientів.....	460
9.2.2.	Алгоритм gradientного методу.....	462
9.2.3.	Вплив величини кроку на gradientний пошук.....	462
9.2.4.	Критерій закінчення пошуку.....	463
9.2.5.	Недоліки gradientного методу.....	464
9.2.6.	Обчислення похідних.....	464
9.2.7.	Модифікації алгоритмів gradientного методу.....	464

9.3. Метод найшвидшого спуску.....	465
9.4. Метод Ньютона .....	465
9.5. Модифікований метод Ньютона.....	466
9.6. Методи змінної метрики.....	466
9.7. Недоліки та переваги методу ДФП.....	467
10. Диференціальні рівняння в частинних похідних.....	468
10.1. Різницьові методи розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних.....	469
10.2. Етапи чисельного розв'язування диференціальних рівнянь (ДР) у частинних похідних на ПК.....	470
10.3. Гіперболічні рівняння.....	475
10.4. Параболічні рівняння.....	475
10.5. Приклади розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних в середовищі MathCAD.....	476
11. Контрольні питання.....	478
12. Задачі для самостійної роботи.....	480
13. Завдання до розрахункової роботи.....	481
Список літератури.....	513