

579.6
У-66

КОМП'ЮТИНГ

В. А. Андруник, В. А. Висоцька,
В.В. Пасічник, Л.Б. Чирун, Л.В. Чирун

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В КОМП'ЮТЕРНИХ НАУКАХ

Том 1

omputing

Навчальний посібник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

В. А. Андруник, В. А. Висоцька,
В. В. Пасічник, Л. Б. Чирун, Л. В. Чирун

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В КОМП'ЮТЕРНИХ НАУКАХ

Том 1

Навчальний посібник

Серія "Комп'ютинг"

за науковою редакцією д.т.н., професора,
Лауреата державної премії України у галузі наук та техніки
В. В. Пасічника

Видавництво «Новий Світ - 2000»

Львів

2018

УДК 519.6

БКБ22.19я73

А 64

*Гриф надано Науково-методичною радою
Національного університету «Львівська політехніка»
(Протокол № 28 від 27.04.2017 р.)*

Рецензенти:

Гожий О. П. - доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії Чорноморського національного університету імені Петра Могили;

Дяк І. І. - кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка;

Дронюк І. М. - кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри автоматизованих систем управління Національного університету «Львівська політехніка»;

Кветний Р. Н. - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автомататики та інформаційно-вимірювальної техніки Вінницького національного технічного університету, член-кореспондент Національної академії педагогічних наук України;

Шаронова Н. В. - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інтелектуальних комп'ютерних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В.

Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник за заг. ред. В. В. Пасічника
-Львів: Видавництво «Новий світ-2000». 2018. -470 с.

Видавництво «Новий світ-2000»

ISBN 978-617-7519-06-4

Навчальний посібник містить матеріал для вивчення основних теоретичних засад, функціональних можливостей та практичного застосування теорії чисельних методів, розроблення прикладних засобів та інформаційних систем аналізу та опрацювання інформації за допомогою чисельних методів. Теоретичний та практичний матеріал викладено у доступній формі. Викладення матеріалу супроводжується значною кількістю прикладів, що полегшує його сприйняття та засвоєння. Подається перелік питань та тестів для самоконтролю, а також завдання для самостійного виконання трьох рівнів складності та довідкова інформація для розв'язання задач. Навчальний посібник призначається для студентів, що навчаються за спеціальностями 122 «Комп'ютерні науки» та 124 «Системний аналіз» і споріднених спеціальностей, які пов'язані з вивченням чисельних методів в інформатиці та інформаційних технологій. Може бути використаний аспірантами в якості підґрунтя для наукових досліджень та викладачами в якості дидактичного матеріалу, а також для самостійного вивчення та підвищення кваліфікації. Книга призначена для спеціалістів із проектування, розроблення та впровадження інтелектуальних систем опрацювання інформаційних ресурсів, науковців у галузі глобальних інформаційних системи, систем штучного інтелекту, Інтернет-технологій, фахівців з електронної комерції, Інтернет-маркетингу та Інтернет-реклами, менеджерів комплексних Web-проектів, а також для здобувачів 3-ого (освітньо-наукового) рівня вищої освіти в галузі знань 12 «Інформаційні технології».

ISBN 978-617-7519-06-4

© Андруник В. А, Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б. Чирун Л. В., 2018
© ФОП Піча С. В., «Новий світ - 2000», 2018

Зміст

Передмова наукового редактора серії підручників та навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ».....	9
Вступне слово авторів.....	13
Розділ 1. Математичне моделювання.....	17
1.1. Чисельні методи та використання персонального комп'ютера для розв'язування прикладних задач.....	
1.1.1.1 Наближений аналіз. Джерела та класифікація похибок.....	21
1.2. Обчислювальна задача.....	23
1.2.1. Аналіз постановки задачі.....	23
1.2.2. Приклади постановки задачі обчислення.....	24
1.3. Чисельне розв'язування коректних задач. Структура похибки розв'язку.....	26
1.3.1. Обчислювальна задача. Похибки.....	26
1.3.2. Похибка заокруглення.....	27
1.3.3. Похибка функції.....	30
1.4. Контрольні питання.....	32
1.5. Задачі для самостійної роботи.....	32
Розділ 2. Елементи теорії похибок.....	33
2.1. Абсолютна та відносна похибки.....	34
2.1.1. Постановка задачі знаходження похибок.....	34
2.1.2. Приклади знаходження абсолютної та відносної похибок.....	36
2.2. Пряма задача теорії похибок.....	38
2.2.1. Аналіз постановки задачі.....	38
2.2.2. Приклади постановки прямої задачі теорії похибок.....	40
2.3. Обернена задача теорії похибок.....	42
2.3.1. Аналіз постановки оберненої задачі теорії похибок.....	42
2.3.2. Приклади постановки оберненої задачі теорії похибок.....	43
2.4. Контрольні питання.....	44
2.5. Задачі для самостійної роботи.....	44
Розділ 3. Методи розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь.....	47
3.1. Чисельне розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	49
3.2. Основні поняття та класифікація систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	49
3.3. Основні поняття та особливості матриць.....	51
3.3.1. Операції над матрицями.....	52
3.3.2. Квадратна матриця й суміжні визначення.....	53
3.3.3. Властивості матриць.....	54
3.3.4. Обчислення оберненої матриці.....	54
3.4. Метод Крамера.....	57
3.4.1. Аналіз постановки задачі.....	57
3.4.2. Приклади розв'язування системи за формулами Крамера.....	58
3.5. Метод оберненої матриці.....	64
3.6. Особливості методу Гауса.....	69
3.6.1. Аналіз постановки задачі для методу Гауса.....	70
3.6.2. Метод Гауса (метод заміни змінних).....	72

3.6.3. Частковий випадок застосування методу Гауса з послідовним виключенням невідомих.....	74
3.6.4. Метод Гауса за схемою Халецького (метод LU факторизації).....	78
3.6.5. Метод Гауса з вибором головного елемента.....	81
3.6.6. Метод Гауса з одиничними коефіцієнтами.....	82
3.6.7. Метод Гауса-Жордана.....	84
3.6.8. Приклади розв'язування системи методом Гауса.....	86
3.6.9. Несумісні системи. Системи із загальним розв'язком. Часткові розв'язки.....	98
3.6.10. Способи знаходження оберненої матриці.....	111
3.6.11. Застосування методу Гауса до обчислення визначника.....	115
3.6.12. Застосування методу Гауса до інверсії матриці.....	117
3.7. Метод простої ітерації.....	125
3.7.1. Аналіз постановки задачі.....	125
3.7.2. Приклади розв'язування системи методом простої ітерації.....	127
3.8. Метод Гауса-Зейделя (метод поліпшеної ітерації).....	129
3.8.1. Аналіз постановки задачі.....	129
3.8.2. Приклади розв'язування системи методом Зейделя.....	130
3.9. Особливості трьохдіагональної матриці.....	131
3.9.1. Обчислення детермінанту трьохдіагональної матриці.....	131
3.9.2. Метод прогонки для розв'язування трьохдіагональних систем лінійних рівнянь.....	133
3.10. Аналіз числових методів розв'язування СЛАР.....	134
3.10.1. Загальна характеристика методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	134
3.10.2. Збіжність метричної геометричної прогресії.....	135
3.10.3. Збіжність методу простої ітерації.....	139
3.10.4. Збіжність методу Зейделя розв'язування СЛАР.....	141
3.10.5. Збіжність методу Зейделя за елементами матриці.....	145
3.11. Методи розв'язування повної проблеми власних значень і власних векторів.....	147
3.11.1. Наближене знаходження власних значень матриці.....	147
3.11.2. Ідея методу Данилевського.....	149
3.11.3. Обчислення власних векторів методом Данилевського.....	152
3.11.4. Метод невизначених коефіцієнтів.....	153
3.11.5. Загальна постановка задачі методів розв'язування повної проблеми власних значень і власних векторів.....	155
3.11.6. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язування повної проблеми власних значень і власних векторів.....	156
3.11.7. Метод інтерполявання розв'язування повної проблеми власних значень.....	157
3.12. Приклади розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	158
3.13. Контрольні питання.....	164
3.14. Задачі для самостійної роботи.....	164
3.15. Завдання до лабораторної роботи.....	167
Розділ 4. Розв'язування нелінійних рівнянь.....	170
4.1. Загальна постановка задачі.....	172
4.2. Методи розв'язування нелінійних рівнянь.....	174
4.3. Розв'язування функціональних рівнянь з однією змінною.....	180
4.3.1. Початковий етап: відокремлення коренів.....	182

4.3.2. Відокремлення кореня трансцендентного рівняння.....	183
4.3.3. Відокремлення дійсних коренів алгебраїчного рівняння.....	186
4.3.4. Теорема про число коренів.....	189
4.3.5. Другий етап: уточнення коренів.....	190
4.4. Ітераційні методи уточнення коренів скалярних нелінійних рівнянь.....	190
4.4.1. Ідея ітераційних методів.....	190
4.4.2. Застосування принципу стислих відображень до дослідження ітераційних процесів.....	191
4.4.3. Поняття порядку ітерації.....	194
4.5. Метод ділення проміжку навпіл (метод дихотомії, Мюллера).....	195
4.5.1. Аналіз постановки задачі.....	195
4.5.2. Геометрична інтерпретація методу.....	196
4.5.3. Обчислення похибки.....	197
4.6. Метод хорд.....	197
4.6.1. Аналіз постановки задачі.....	197
4.6.2. Геометрична інтерпретація методу.....	199
4.6.3. Обчислення похибки.....	200
4.7. Метод Ньютона (метод дотичних).....	201
4.7.1. Аналіз постановки задачі.....	201
4.7.2. Геометрична інтерпретація методу.....	201
4.7.3. Обчислення похибки.....	203
4.7.4. Інтерпретація методу дотичних через ітераційний процес.....	204
4.7.5. Модифікований метод Ньютона.....	206
4.8. Комбінований метод хорд і дотичних.....	206
4.8.1. Аналіз постановки задачі.....	206
4.8.2. Геометрична інтерпретація методу.....	207
4.8.3. Обчислення похибки.....	208
4.9. Метод січних.....	208
4.9.1. Аналіз постановки задачі.....	208
4.9.2. Геометрична інтерпретація методу.....	208
4.9.3. Обчислення похибки.....	209
4.9.4. Інтерпретація методу січних через ітераційний процес.....	209
4.10. Метод простої ітерації або метод послідовних наближень.....	212
4.10.1. Аналіз постановки задачі.....	212
4.10.2. Геометрична інтерпретація методу простої ітерації.....	213
4.10.3. Обчислення похибки.....	214
4.10.4. Вплив обчислювальної похибки на збіжність ітераційного процесу.....	216
4.11. Метод релаксації.....	218
4.11.1. Аналіз постановки задачі.....	218
4.11.2. Геометрична інтерпретація методу.....	220
4.11.3. Обчислення похибки.....	220
4.12. Метод парабол (метод Д. Мюллера) знаходження коренів многочлена з комплексними коефіцієнтами.....	221
4.12.1. Аналіз постановки задачі.....	221
4.12.2. Обчислення похибки.....	226
4.13. Розв'язування систем нелінійних рівнянь.....	227
4.14. Приклади розв'язування нелінійних рівнянь.....	230
4.15. Контрольні питання.....	233
4.16. Задачі для самостійної роботи.....	233

4.17. Завдання до лабораторної роботи.....	235
Розділ 5. Задача інтерполяції та наближення функцій.....	238
5.1. Основи теорії інтерполювання та числового диференціювання.....	239
5.1.1. Загальна постановка задачі інтерполювання.....	239
5.1.2. Загальна задача лінійного інтерполювання.....	240
5.1.3. Постановка задачі інтерполяції функції однієї дійсної змінної.....	242
5.1.4. Поліноміальна інтерполяція. Існування та унікальність інтерполяційного полінома.....	243
5.1.5. Типи інтерполювання.....	244
5.2. Інтерполяційний поліном Лагранжа.....	254
5.2.1. Аналіз загальної постановки задачі.....	254
5.2.2. Інтерполяційна формула Лагранжа. Частковий випадок.....	255
5.2.3. Побудова інтерполяційного многочлена Лагранжа.....	257
5.2.4. Інтерполяційний многочлен Лагранжа з рівновіддаленими вузлами.....	260
5.2.5. Інтерполяційна схема О. Ейткена.....	261
5.2.6. Похибка інтерполювання для інтерполяційного многочлена Лагранжа.....	265
5.3. Вибір вузлів інтерполювання.....	267
5.3.1. Многочлени Чебишева. Властивості.....	267
5.3.2. Вибір вузлів інтерполювання.....	268
5.3.3. Поведінка похибки на інтервалі інтерполювання.....	270
5.4. Інтерполяційний поліном Ньютона.....	271
5.4.1. Аналіз загальної постановки задачі.....	271
5.4.2. Інтерполяційний многочлен Ньютона.....	274
5.4.3. Поділені різниці та їх властивості.....	275
5.4.4. Інтерполяційна формула Ньютона за поділеними різницями та нерівновіддаленими вузлами.....	277
5.4.5. Скінченні різниці та їх властивості.....	280
5.4.6. Формула Ньютона вперед і назад за скінченими різницями.....	283
5.5. Числове диференціювання.....	285
5.5.1. Числове диференціювання для нерівновіддалених вузлів.....	285
5.5.2. Формули числового диференціювання для рівновіддалених вузлів.....	286
5.5.3. Формули числового диференціювання методом невизначених коефіцієнтів.....	287
5.6. Раціональна інтерполяція.....	288
5.7. Інтерполювання функцій комплексної змінної.....	289
5.8. Інтерполювання функцій багатьох змінних.....	290
5.8.1. Труднощі інтерполювання функцій багатьох змінних.....	290
5.8.2. Побудова інтерполяційних формул за поділеними різницями.....	291
5.9. Збіжність інтерполяційного процесу.....	292
5.10. Інтерполювання сплайнами.....	295
5.11. Приклади розв'язку задачі інтерполяції функцій.....	297
5.12. Контрольні питання.....	302
5.13. Задачі для самостійної роботи.....	303
5.14. Завдання до лабораторної роботи.....	305
Розділ 6. Основні відомості про методи наближення.....	307
6.1. Основні відомості про методи наближення.....	310
6.2. Формулювання задачі наближення функцій.....	312
6.3. Апроксимація методом найменших квадратів.....	315

6.4. Поняття сплайн-апроксимації.....	321
6.4.1. Аналітичне подання сплайнів.....	321
6.4.2. Апроксимація кубічними сплайнами.....	324
6.5. Розв'язування задач рівномірного сплайн-наближення.....	331
6.5.1. Означення та властивості рівномірного сплайн-наближення.....	331
6.5.2. Однорідне сплайн-наближення з заданою похибкою.....	332
6.5.3. Побудова неоднорідне сплайн-наближення.....	334
6.6. Методи обчислення рівномірного (мінімаксного) наближення функцій.....	335
6.6.1. Загальна постановка задачі найкращого мінімаксного наближення функцій.....	335
6.6.2. Апроксимаційні залежності.....	337
6.6.3. Доведення про найкраще рівномірне наближення функцій.....	341
6.7. Метод Є. Я. Ремеза.....	343
6.7.1. Загальна постановка задачі схеми Є. Я. Ремеза.....	343
6.7.2. Мінімакс. Визначення параметрів мінімаксимальної моделі за алгоритмом Є. Я. Ремеза.....	346
6.8. Метод Валле-Пуссена.....	349
6.8.1. Загальна постановка задачі.....	349
6.8.2. Алгоритм Валле-Пуссена.....	350
6.9. Застосування методу найменших квадратів багатовимірного регресійного аналізу в економіці.....	351
6.9.1. Загальна постановка задачі.....	351
6.9.2. Знаходження параметрів лінійного множинного рівняння регресії методом найменших квадратів.....	354
6.9.3. Стандартна похибка оцінки за рівнянням.....	361
6.9.4. Коефіцієнт детермінації й кореляції.....	362
6.9.5. Вибіркова похибка коефіцієнта множинної регресії.....	364
6.9.6. Вибіркова похибка множинної регресії.....	365
6.9.7. Похибка індивідуальної оцінки множинної регресії.....	367
6.9.8. Вибіркова похибка коефіцієнта множинної кореляції.....	369
6.9.9. Часткова регресія та кореляція.....	370
6.9.10. Приклад розрахунку потреб ринку на основі множинних рівнянь регресії.....	373
6.9.11. Приклад розрахунку потреб ринку на основі економічної оцінки.....	378
6.9.12. Приклад дослідження на основі багатовимірного регресійного аналізу.....	380
6.10. Контрольні питання.....	384
6.11. Задачі для самостійної роботи.....	385
6.12. Завдання до лабораторної роботи.....	387
Розділ 7. Чисельне інтегрування.....	390
7.1. Постановка задачі чисельного інтегрування.....	391
7.2. Особливості чисельного інтегрування функцій.....	392
7.3. Формула прямокутників. Графічна інтерпретація.....	394
7.4. Формула трапецій.....	395
7.4.1. Постановка задачі.....	395
7.4.2. Графічна інтерпретація.....	396
7.5. Формула Сімпсона (парабол).....	398
7.5.1. Постановка задачі.....	398
7.5.2. Графічна інтерпретація.....	399

7.6. Економічний алгоритм реалізації принципу подвійного перерахунку та автоматичний вибір кроку інтегрування.....	402
7.7. Наближене обчислення багатократних інтегралів.....	403
7.8. Метод комірок.....	404
7.9. Послідовне інтегрування.....	407
7.10. Кубатурна формула типу Сімпсона.....	409
7.11. Методи числового інтегрування.....	414
7.11.1. Задача обчислення визначеного інтеграла.....	414
7.11.2. Три підходи квадратурної формули.....	415
7.11.3. Інтерполяційні квадратурні формули Ньютона-Котеса.....	416
7.11.4. Частинні випадки інтерполяційних формул Ньютона-Котеса.....	419
7.12. Квадратурні формули Гаусса найкращого степеня точності.....	425
7.12.1. Ідея побудови квадратурних формул Гаусса.....	425
7.12.2. Метод Гаусса знаходження вузлів КФ.....	426
7.12.3. Метод Гаусса вибору коефіцієнтів.....	428
7.12.4. Застосування формули Гаусса.....	430
7.13. Квадратні формули чисельного інтегрування Чебишова.....	432
7.13.1. Постановка задачі.....	432
7.13.2. Метод Чебишова знаходження вузлів КФ.....	433
7.13.3. Побудова квадратурних формул Чебишова.....	434
7.14. Збіжність квадратних формул.....	436
7.15. Числові методи обчислення кратних інтегралів.....	440
7.15.1. Методи повторного інтегрування для двократного інтегрування.....	440
7.15.2. Метод заміни підінтегральної функції інтерполяційним многочленом.....	442
7.16. Контрольні питання.....	444
7.17. Задачі для самостійної роботи.....	445
7.18. Завдання до лабораторної роботи.....	446
7.19. Варіанти завдання (рівняння для розв'язування).....	447
Література.....	449