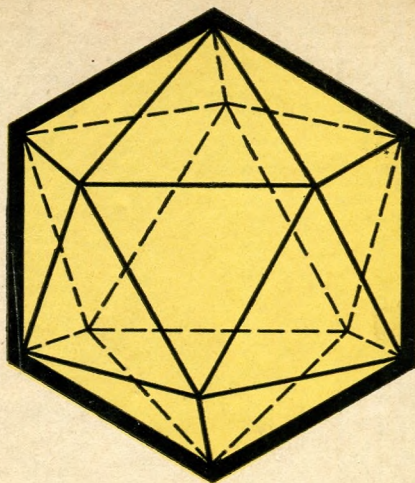


BARTSCH



# Mathematische Formeln

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

# MATHEMATISCHE FORMELN

Von Dipl.-Ing. HANS-JOCHEN BARTSCH

5., erweiterte Auflage

Mit 336 Bildern

**fv**

VEB FACHBUCH VERLAG LEIPZIG 1966

## INHALTSVERZEICHNIS

### 1. Arithmetik

1.1. Mengenlehre .....	15
1.1.1. Grundbegriffe.....	15
1.1.2. Mengenoperationen.....	16
1.1.3. Abbildungen, Mächtigkeit.....	17
1.2. Reelle Zahlen .....	19
1.2.1. Allgemeines.....	19
1.2.2. Addition und Subtraktion von reellen Zahlen.....	21
1.2.3. Multiplikation von reellen Zahlen.....	22
1.2.4. Division von reellen Zahlen .....	24
1.2.5. Bruchrechnung.....	27
1.2.6. Potenzieren von reellen Zahlen .....	28
1.2.7. Radizieren von reellen Zahlen.....	30
1.2.8. Irrationale Zahlen.....	34
1.2.9. Binomialkoeffizienten, Binomischer Satz .....	34
1.3. Imaginäre und komplexe Zahlen.....	38
1.3.1. Imaginäre Zahlen.....	38
1.3.2. Komplexe Zahlen in arithmetischer Form.....	39
1.3.3. Komplexe Zahlen in goniometrischer Form .....	41
1.3.4. Komplexe Zahlen in Exponentialform .....	43
1.3.5. Natürliche Logarithmen von komplexen und negativen Zahlen.....	45
1.3.6. Graphische Verfahren .....	46
1.4. Proportionen.....	50
1.5. Logarithmieren und Rechenstab.....	53
1.5.1. Logarithmieren.....	53
1.5.2. Bestimmung von dekadischen Logarith- men aus Logarithmentafeln.....	55
1.5.3. Der Rechenstab .....	57

1.6. Kombinatorik.....	68
1.6.1. Permutationen .....	68
1.6.2. Variationen .....	70
1.6.3. Kombinationen.....	71
1.7. Prozentrechnung, Zinsrechnung.....	72
1.7.1. Prozentrechnung (Promillerochnung) ...	72
1.7.2. Zinsrechnung.....	72
1.8. Folgen und Reihen.....	73
1.8.1. Allgemeines.....	73
1.8.2. Arithmetische Folgen und Reihen.....	75
1.8.3. Geometrische Folgen und Reihen .....	77
1.8.4. Zinseszinsrechnung.....	78
1.8.5. Rentenrechnung.....	80
1.9. Determinanten .....	82
1.9.1. Allgemeines.....	82
1.9.2. Determinantengesetze .....	84
1.9.3. Anwendungen der Determinanten.....	89
1.10. Matrizen.....	91
1.10.1. Allgemeines.....	91
1.10.2. Matrizenetze .....	95
1.10.3. Anwendungen.....	102

## 2. Gleichungen, Funktionen, Vektorrechnung'

2.1. Gleichungen.....	103
2.1.1. Allgemeines.....	103
2.1.2. Algebraische Gleichungen mit einer Variablen.....	104
2.1.2.1. Lineare Gleichungen.....	104
2.1.2.2. Quadratische Gleichungen.....	105
2.1.2.3. Kubische Gleichungen.....	107
2.1.2.4. Bestimmungsgleichung $n$ -ten Grades.....	109
2.1.3. Transzendente Gleichungen .....	110
2.1.3.1. Exponentialgleichungen.....	110
2.1.3.2. Logarithmische Gleichungen . . . . .	111
2.1.4. Näherungsverfahren zur Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung.....	112

2.1.4.1.	Regula falsi .....	112
2.1.4.2.	Newtonsche Näherungsmethode .....	113
2.1.4.3.	Iterationsverfahren.....	114
2.1.4.4.	Graphische Lösung von Gleichungen .....	115
2.1.5.	Gleichungssysteme.....	116
2.1.5.1.	Lineare Gleichungen mit 2 Veränderlichen .....	110
2.1.5.2.	Lineare Gleichungen mit 3 Veränderlichen .....	117
2.1.5.3.	Gaußscher Algorithmus .....	119
2.1.5.4.	Quadratische Gleichungen mit 2 Veränderlichen.....	120
2.1.5.5.	Graphische Lösung von Gleichungssystemen mit 2 Veränderlichen .....	122
2.2.	Funktionen .....	124
2.2.1.	Allgemeines .....	124
2.2.2.	Weitere Arten der analytischen Darstellung.....	128
2.2.3.	Graphische Darstellung von Funktionen .....	131
2.3.	Vektorrechnung.....	137
2.3.1.	Grundbegriffe.....	137
2.3.2.	Multiplikation von Vektoren .....	141
2.3.3.	Geometrische Anwendungen der Vektorrechnung .....	144
<b>3.</b>	<b>Geometrie</b>	
3.1.	Allgemeines .....	150
3.2.	Planimetrie .....	156
3.2.1.	Das Dreieck $ABC$ .....	156
3.2.2.	Vierecke.....	162
3.2.3.	Vielecke ( $n$ -Ecke) .....	164
3.2.4.	Der Kreis.....	168
3.3.	Stereometrie.....	171
3.3.1.	Allgemeine Sätze.....	171
3.3.2.	Ebenflächig begrenzte Körper .....	172
3.3.3.	Krummflächig begrenzte Körper.....	177

3.4.	Goniometrie, ebene Trigonometrie, Hyperbelfunktionen .....	184
3.4.1.	Goniometrie.....	184
3.4.2.	Trigonometrische Formeln für das schiefwinklige Dreieck.....	198
3.4.3.	Goniometrische Gleichungen .....	203
3.4.4.	Inverse trigonometrische Funktionen (zyklometrische Funktionen, Arcusfunktionen) .....	207
3.4.5.	Hyperbelfunktionen.....	210
3.4.6.	Inverse Hyperbelfunktionen (Areafunktionen).....	215
3.5.	Sphärische Trigonometrie.....	217
3.5.1.	Allgemeines.....	217
3.5.2.	Das rechtwinklige sphärische Dreieck .....	218
3.5.3.	Das schiefwinklige sphärische Dreieck .....	219
3.5.4.	Mathematische Geographie.....	225

#### **4. Analytische Geometrie**

4.1.	Analytische Geometrie der Ebene .....	228
4.1.1.	Die verschiedenen Koordinatensysteme.....	228
4.1.2.	Punkte und Strecken.....	230
4.1.3.	Die Gerade .....	232
4.1.4.	Der Kreis.....	236
4.1.5.	Die Parabel.....	241
4.1.6.	Die Ellipse.....	248
4.1.7.	Die Hyperbel .....	257
4.1.8.	Die allgemeine Gleichung 2. Grades in $x; y$ .....	267
4.2.	Analytische Geometrie des Raumes .....	273
4.2.1.	Die verschiedenen Koordinatensysteme.....	273
4.2.2.	Punkte und Strecken im Raum.....	276
4.2.3.	Die Ebene im Raum .....	278
4.2.4.	Die Gerade im Raum.....	282
4.2.5.	Flächen 2. Ordnung .....	287
4.2.6.	Die allgemeine Gleichung 2. Grades in $x, y$ und $z$ .....	293

**5. Differentialrechnung**

5.1.	Grenzwerte .....	296
5.2.	Differenzenquotient, Differentialquotient, Differential.....	298
5.3.	Differentiationsregeln .....	300
5.4.	Ableitungen der Elementarfunktionen.....	306
5.5.	Differentiation einer Vektorfunktion .....	308
5.6.	Graphische Differentiation.....	309
5.7.	Extremstellen von Funktionen (Maxima und Minima).....	310
5.8.	Mittelwertsätze.....	316
5.9.	Unbestimmte Ausdrücke.....	318
5.10.	Unendliche Reihen.....	321
	5.10.1. Konvergenzkriterien.....	321
	5.10.2. Einige unendliche konvergente Zahlen- reihen .....	323
	5.10.3. Potenzreihen.....	324
	5.10.4. Näherungsformeln .....	329

**6. Differentialgeometrie**

6.1.	Ebene Kurven.....	331
	6.1.1. Hauptelemente ebener Kurven .....	331
	6.1.2. Einige wichtige ebene Kurven.....	340
6.2.	Raumkurven.....	350
6.3.	Krumme Flächen .....	358

**7. Integralrechnung**

7.1.	Definition des unbestimmten Integrals.....	359
7.2.	Grundintegrale .....	359
7.3.	Integrationsregeln .....	360
7.4.	Einige besondere Integrale .....	370
	7.4.1. Integrale rationaler Funktionen .....	370
	7.4.2. Integrale irrationaler Funktionen.....	373
	7.4.3. Integrale trigonometrischer Funktionen	375
	7.4.4. Integrale der Hyperbelfunktionen.....	381

7.4.5. Integrale der Exponentialfunktionen.....	384
7.4.6. Integrale von logarithmischen Funktionen.....	385
7.4.7. Integrale der Arcusfunktionen.....	387
7.4.8. Integrale der Areafunktionen.....	388
7.5. Das bestimmte Integral.....	388
7.5.1. Allgemeines.....	388
7.5.2. Mittelwertsätze der Integralrechnung.....	389
7.5.3. Geometrische Deutung des bestimmten Integrals .....	390
7.5.4. Näherungsmethoden für bestimmte Inte- grale .....	392
7.5.5. Graphische Integration.....	394
7.5.6. Uneigentliche Integrale.....	395
7.5.7. Einige bestimmte Integrale.....	396
7.5.8. Anwendungen der bestimmten Integrale	398
7.6. Linienintegral.....	402
7.6.1. Linienintegral in der Ebene.....	402
7.6.2. Linienintegral im Raum.....	404
7.6.3. Linienintegral eines Vektors.....	404
7.7. Mehrfache Integrale.....	406
7.7.1. Doppelintegral .....	406
7.7.2. Dreifache Integrale.....	411
 <b>8. Differentialgleichungen</b>	
8.1. Allgemeines .....	414
8.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ord- nung .....	415
8.2.1. Trennung der Variablen .....	415
8.2.2. Homogene Differentialgleichung.....	416
8.2.3. Inhomogene Differentialgleichung.....	417
8.2.4. Totale (exakte) Differentialgleichung.....	420
8.2.5. Integrierender Faktor.....	421
8.2.6. Bernoullische Differentialgleichung.....	422
8.2.7. Clairautsche Differentialgleichung.....	423
8.2.8. Riccatische Differentialgleichung .....	424
8.3. Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ord- nung .....	425



8.3.1.	Sonderfälle.....	425
8.3.2.	Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	429
8.3.3.	Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizien- ten .....	431
8.3.4.	Eulersche Differentialgleichung.....	432
8.3.5.	Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	436
8.3.6.	Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffi- zienten .....	439
8.4.	Gewöhnliche Differentialgleichungen 3. Ord- nung .....	442
8.4.1.	Lineare homogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	442
8.4.2.	Lineare inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	443
8.5.	Integration von Differentialgleichungen durch Potenzreihen.....	443
8.6.	Partielle Differentialgleichungen.....	444
8.6.1.	Einfache partielle Differentialgleichungen.....	445
8.6.2.	Lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $z = f(x; y)$ .....	445
 <b>9. Fourier-Reihen und Fourier-Integral</b>		
9.1.	Allgemeines .....	448
9.2.	Besondere Fourier-Reihen.....	452
9.3.	Fourier-Integral .....	460
 <b>10. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung</b>		
10.1.	Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	461
10.2.	Statistik.....	466
10.3.	Fehlerrechnung.....	471
10.4.	Ausgleichsrechnung.....	472

<b>Anhang</b>	
Mathematische Zeichen (Auszug aus TGL 0-1302) .....	478
Das dyadische System.....	481
Das römische Zehnersystem.....	481
Griechisches Alphabet.....	482
Deutsches Alphabet .....	482
Häufig gebrauchte Zahlen und ihre dekadischen Logarithmen .....	483
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	488
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	490