

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В. И. Милых

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ  
В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ  
электротехнического профиля  
для отечественных и иностранных  
студентов и аспирантов

Рекомендовано ученым советом НТУ «ХПИ»

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2018

УДК 621.318.001.24  
М75

*Рецензенты:*

*М. Я. Острроверхов*, проф., д-р техн. наук,  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт» им. Игоря Сикорского;  
*В. А. Яровенко*, проф., д-р техн. наук,  
Одесский национальный морской университет

Рекомендовано ученым советом НТУ «ХПИ» как учебное пособие  
электротехнического профиля, протокол № 8 от 02.11.2018 г.

Розглядаються аналітичні і чисельні методи розрахунків магнітних полів і визначення електромагнітних і силових параметрів електротехнічних пристроїв на цій основі. Викладаються теорія і принципи розрахунку перехідних процесів в нелінійних електромагнітних системах, змінних електромагнітних полів і вихрових струмів. Усе це пристосовано до реальних електротехнічних об'єктів, починаючи від поодинокого провідника і закінчуючи електричними машинами. Ряд тем, що розглядаються, забезпечений прикладами розв'язання задач.

Призначено для вітчизняних й іноземних студентів та аспірантів електротехнічного профілю.

**Милых В. И.**

**М75** Теория и практика электромагнитных полей и процессов в электротехнике : учебное пособие / В. И. Милых. - Харьков : ФЛП Панов А. Н., 2018. - 374 с. - На рус. яз.  
**ISBN 978-617-7722-60-0**

Рассматриваются аналитические и численные методы расчетов магнитных полей и определение электромагнитных и силовых параметров электротехнических устройств на этой основе. Излагаются теория и принципы расчета переходных процессов в нелинейных электромагнитных системах, переменных электромагнитных полей и вихревых токов. Все это связано с реальными электротехническими объектами, начиная от одиночного проводника и заканчивая электрическими машинами. Ряд рассматриваемых тем снабжен примерами решения задач.

Предназначено для отечественных и иностранных студентов и аспирантов электротехнического профиля.

Ил. 279. Табл. 9. Библиогр. 76 назв.

**УДК 621.318.001.24**

**ISBN 978-617-7722-60-0**

© В. И. Милых, 2018  
© НТУ «ХПИ», 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ И ИХ РАСЧЕТАХ.....	10
1.1. Основы электромагнитных явлений.....	10
1.2. Электрическое поле: порождение, формальное представление и описывающие величины.....	11
1.3. Магнитное поле: порождение, формальное представление и описывающие величины.....	14
1.4. Электрический ток.....	18
1.5. Законы электромагнетизма, относящиеся к электромагнитным полям.....	18
1.6. Характеристика задач расчета магнитного поля.....	21
1.7. Расчетный принцип наложения магнитных полей.....	24
1.8. Общие принципы анализа электромагнитных полей математическим моделированием.....	25
2. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.....	29
2.1. Исходные замечания.....	29
2.2. Магнитное поле бесконечно длинного проводника круглого сечения.....	30
2.3. Векторное представление магнитного поля бесконечно длинного проводника круглого сечения.....	32
2.4. Магнитное поле двух и более бесконечно длинных проводников круглого сечения.....	34
2.5. Магнитное поле длинной шины прямоугольного поперечного сечения.....	37
2.6. Программа расчета магнитного поля длинной шины прямоугольного поперечного сечения.....	41
2.7. Магнитное поле системы длинных шин прямоугольного сечения.....	44
2.8. Магнитные поля проводников конечной длины.....	47
2.8.1. Закон Био-Савара-Лапласа - основа расчета магнитного поля проводников конечной длины.....	47
2.8.2. Магнитное поле прямолинейного проводника конечной длины с током в однородном пространстве.....	48
2.9. Векторное представление магнитного поля проводника конечной длины.....	51
2.9.1. Проводник расположен параллельно оси $O-z$ .....	52
2.9.2. Проводник расположен параллельно оси $O-x$ .....	54
2.10. Магнитные поля объектов конечных размеров с прямоугольной структурой.....	55
2.10.1. Магнитное поле прямоугольного контура с током.....	55
2.10.2. Магнитное поле прямоугольной катушки с током.....	59
2.10.3. Магнитное поле совокупности прямоугольных катушек.....	64

2.11.	Магнитные поля объектов с круглой структурой.....	64
2.11.1.	Магнитное поле коаксиального кабеля.....	64
2.11.2.	Магнитное поле торообразной катушки.....	66
2.11.3.	Оценочная формула для магнитного поля в середине соленоида относительно большой длины.....	67
2.11.4.	Магнитное поле на оси кругового витка с током.....	68
2.11.5.	Магнитное поле на оси круглой катушки с током.....	70
3.	<b>МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.....</b>	<b>75</b>
3.1.	Исходные положения.....	75
3.2.	Граничные условия для магнитного поля на разделе двух сред с разными магнитными свойствами.....	75
3.2.1.	Граничное условие для магнитной индукции на разделе двух сред.....	76
3.2.2.	Граничное условие для напряженности магнитного поля на разделе двух сред.....	77
3.2.3.	Условия преломления силовых линий магнитного поля на границе раздела сред.....	79
3.3.	Метод зеркальных отражений для расчета магнитного поля в неоднородных средах.....	79
3.3.1.	Исходные замечания.....	79
3.3.2.	Расчет магнитного поля вблизи плоской границы раздела сред.....	80
3.3.3.	Особенности метода зеркального отражения в случае разных границ раздела разнородных магнитных сред.....	84
3.4.	Расчеты электромагнитных параметров методом магнитной цепи.....	87
3.4.1.	Понятие о магнитных цепях и их однородных участках.....	87
3.4.2.	Законы магнитных цепей.....	91
3.4.2.1	Закон Ома для магнитной цепи.....	91
3.4.2.2	Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.....	92
3.4.2.3	Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи.....	92
3.4.3.	Задачи расчета магнитных цепей постоянного магнитного потока.....	94
3.4.4.	Прямая задача расчета магнитной цепи.....	95
3.4.5.	Обратная задача расчета магнитной цепи.....	97
3.4.5.1	Графоаналитический метод.....	97
3.4.5.2	Метод последовательных приближений.....	97
3.5.	Представление кривой намагничивания при компьютерных расчетах.....	100
3.6.	Программный алгоритм решения обратной задачи расчета магнитной цепи.....	101
3.7.	Особые случаи определения параметров участков магнитных цепей.....	103
3.7.1.	Магнитное напряжение на участке со слоистой структурой.....	103
3.7.2.	Магнитное напряжение зазора, ограниченного зубчатой структурой.....	105

4.	СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МАКСВЕЛЛА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ.....	109
4.1.	Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля .....	109
4.2.	Частные случаи электромагнитного поля.....	111
4.2.1.	Электростатическое и квазистационарное электрическое поле в диэлектрике.....	111
4.2.2.	Магнитостатическое и квазистационарное магнитное поле при отсутствии вихревых токов.....	111
4.2.3.	Переменное магнитное поле в проводящей среде.....	112
4.2.4.	Поле электрических токов в проводящей среде.....	113
4.3.	Взаимосвязь электрического и магнитного полей - единое электромагнитное поле.....	114
4.4.	Аналогия между основными уравнениями системы Максвелла и уравнениями электромагнетизма.....	115
4.4.1.	Закон непрерывности силовых линий магнитного поля.....	115
4.4.2.	Закон полного тока.....	116
4.4.3.	Закон электромагнитной индукции.....	116
4.5.	Понятие о вихревых и потенциальных полях.....	117
4.6.	Выражение уравнения магнитного поля через скалярный магнитный потенциал.....	118
4.7.	Выражение уравнения магнитного поля через векторный магнитный потенциал.....	120
4.8.	Общее решение уравнения Пуассона в однородной среде через векторный магнитный потенциал.....	123
4.9.	Выражение составляющих магнитной индукции через векторный магнитный потенциал.....	124
4.10.	Частные случаи уравнений магнитного поля, выраженных через векторный магнитный потенциал в однородной линейной среде.....	126
4.11.	Магнитное поле кругового витка с током, расположенного в немагнитной среде.....	127
4.12.	Принципы расчета магнитного поля круглой катушки и совокупности таких катушек.....	131
4.13.	Расчет магнитного поля методом разделения переменных.....	133
4.13.1.	Объект исследования и принятые допущения.....	133
4.13.2.	Математическая модель магнитного поля в чередующейся кольцевой структуре.....	135
4.13.3.	Метод решения задачи расчета магнитного поля в чередующейся кольцевой структуре.....	136
4.13.4.	Определение коэффициентов - постоянных интегрирования для уравнений, описывающих магнитное поле.....	138

5.	РАСЧЕТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ.....	142
5.1.	Уравнения, описывающие магнитное поле в неоднородной нелинейной среде.....	142
5.2.	Общее представление о численных методах расчета магнитных полей. Дискретизация среды области расчета.....	143
5.3.	Представление производных векторного магнитного потенциала в конечно-разностной форме.....	147
5.4.	Конечно-разностные выражения составляющих и модуля магнитной индукции.....	148
5.5.	Преобразование дифференциального уравнения магнитного поля в конечно-разностное алгебраическое уравнение.....	149
5.6.	Общие принципы расчета магнитного поля методом конечных разностей.....	154
5.7.	Программное построение процесса расчета магнитного поля методом конечных разностей.....	158
5.7.1.	Решение системы алгебраических уравнений, связывающих векторный магнитный потенциал в сеточной структуре.....	158
5.7.2.	Способы ускорения завершения итерационного процесса расчета распределения векторного магнитного потенциала.....	160
5.7.3.	Критерии завершения итерационного процесса расчета векторного магнитного потенциала.....	161
5.7.4.	Итерационный метод учета нелинейных магнитных свойств ферромагнетиков при численном расчете магнитных полей.....	162
5.7.5.	Критерии завершения итерационного процесса пересчета магнитных свойств ферромагнетиков.....	164
5.8.	Алгоритм расчета магнитного поля методом конечных разностей с учетом нелинейных магнитных свойств среды.....	164
5.9.	Программная реализация алгоритма расчета магнитного поля методом конечных разностей.....	166
5.10.	Метод конечных разностей для плоскопараллельного магнитного поля в полярной системе координат.....	174
5.10.1.	Исходные уравнения магнитного поля.....	174
5.10.2.	Особенности использования полярной сеточной модели при расчете магнитного поля методом конечных разностей.....	175
5.10.3.	Конечно-разностная аппроксимация выражений магнитной индукции в полярной системе координат.....	180
5.11.	Особенности использования метода конечных разностей при расчете плоскомеридианного магнитного поля.....	180

5.12.	Метод конечных элементов для расчета магнитных полей.....	186
5.12.1.	Основы метода конечных элементов.....	186
5.12.2.	Программные продукты для расчета магнитных полей на основе метода конечных элементов.....	190
5.12.3-	Примеры расчета двухмерных магнитных полей в поперечных сечениях электрических машин методом конечных элементов по программе FEMM.....	192
5.13.	Условия симметрии и ограничение области расчета.....	197
5.14.	Граничные условия в электрической машине при расчетах магнитных полей.....	199
5.15.	Примеры использования граничных условий в электрических машинах при расчетах магнитных полей.....	201
5.16.	Адаптация плоскопараллельной модели магнитного поля для расчетов электрических машин с неоднородностью силовых длин участков магнитопровода.....	208
5.16.1.	Исходные замечания и объект для расчетных демонстраций.....	208
5.16.2.	Тестовые расчеты ДПТ по программе FENN и сравнение их с экспериментальными данными.....	209
5.16.3.	Метод учета различных аксиальных длин участков магнитопровода при численных расчетах магнитных полей.....	211
5.16.4.	Расширение возможностей FEMM: частный принцип учета различных аксиальных длин участков магнитопровода.....	215
5.16.5.	Результаты расчетов по программе FEMM с расширенными возможностями.....	217
6.	<b>ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СИЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТОВ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ.....</b>	222
6.1.	Итоговая информация о магнитном поле после его расчета.....	222
6.2.	Расчеты магнитного потока.....	222
6.2.1.	Принципы расчета магнитного потока через распределение магнитной индукции.....	223
6.2.2.	Принципы расчета магнитного потока через распределение векторного магнитного потенциала.....	225
6.3.	Принципы расчета магнитного потокоцепления.....	226
6.4.	Магнитные характеристики электротехнических устройств.....	228
6.5.	Расчет падения магнитного напряжения по результатам расчета магнитного поля.....	229

6.6.	Расчет магнитной проводимости и магнитного сопротивления для магнитного поля катушки.....	230
6.7.	Индуктивности и взаимоиндуктивности: определение по результатам расчета магнитного поля.....	230
6.8.	Принципы расчета энергии магнитного поля (линейный и нелинейный случаи).....	233
6.9.	Удельная энергия магнитного поля.....	235
6.10.	Принципы расчета механических сил, порожденных магнитным полем.....	236
6.10.1.	Силовое взаимодействие прямолинейных проводников.....	237
6.10.2.	Сила, действующая на шину с током, расположенную в магнитном поле.....	238
6.11.	Сила, действующая на сектор обмотки с кольцеобразным сечением, расположенной в магнитном поле.....	239
6.12.	Общий случай силового взаимодействия токонесущих контуров или катушек.....	240
6.13.	Силовое воздействие магнитного поля на ферромагнитный сердечник через магнитную энергию по построенным магнитным характеристикам.....	242
6.14.	Силовое воздействие магнитного поля на ферромагнитный сердечник через магнитную индукцию в зазоре.....	243
6.15.	Электромагнитный момент, действующий на обмотку, расположенную в зазоре электрической машины.....	243
6.16.	Определение сил через тензор магнитного натяжения.....	245
6.17.	Электромагнитный момент, действующий на ротор с обмоткой, расположенной в пазах сердечника электрической машины.....	246
6.18.	Базовые выражения для определения ЭДС.....	248
6.19.	Принципы расчета ЭДС обмотки, расположенной в зазоре электрической машины.....	250
6.20.	Принципы расчета ЭДС обмотки, расположенной в пазах сердечника.....	252
6.21.	Принципы расчета гармонического состава ЭДС по результатам расчета магнитного поля.....	255
6.22.	Другие возможности определения параметров электротехнических устройств на основе расчетов магнитных полей.....	256
7.	<b>ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ....</b>	259
7.1.	Общая постановка задачи расчета переходного процесса в нелинейной электромагнитной системе.....	259
7.2.	Общий принцип численного решения нелинейных дифференциальных уравнений.....	261



7.3.	Алгоритм расчета переходного процесса при подключении катушки индуктивности к источнику постоянного напряжения.....	263
7.4.	Принцип численного определения производной методом Рунге-Кутты IV порядка.....	264
7.5.	Сравнительное решение линеаризованной задачи расчета переходного процесса.....	266
7.6.	Исследование динамического рабочего режима линейного импульсного электродвигателя.....	270
7.6.1.	Представление объекта исследования и постановка задачи.....	270
7.6.2.	Математическая модель ЛИЭД при последовательном соединении обмоток.....	271
7.6.3.	Оперирование с двухпараметрическими функциями.....	276
7.6.4.	Алгоритм расчета ударного режима работы ЛИЭД.....	279
7.6.5.	Тестовый расчет динамики работы ЛИЭД.....	283
8.	<b>ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ПРИНЦИПЫ ИХ РАСЧЕТА.....</b>	<b>285</b>
8.1.	Определение переменного электромагнитного поля.....	285
8.2.	Уравнение непрерывности.....	286
8.3.	Уравнения Максвелла в комплексной форме записи.....	286
8.4.	Теорема Умова-Пойнтинга для мгновенных значений.....	287
8.5.	Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме записи.....	289
8.6.	Уравнения Максвелла для проводящей среды.....	290
8.7.	Плоская электромагнитная волна.....	291
8.8.	Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве.....	293
8.9.	Глубина проникновения и длина волны.....	295
8.10.	Магнитный поверхностный эффект.....	296
8.11.	Распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу ферромагнитного сердечника.....	298
8.12.	Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе.....	299
9.	<b>ВИХРЕВЫЕ ТОКИ В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ.....</b>	<b>304</b>
9.1.	Общие замечания относительно расчетов вихревых токов.....	304
9.2.	Расчетный анализ вихревых токов без учета их реакции.....	305
9.2.1.	Теоретические основы расчета вихревых токов без учета их реакции.....	305
9.2.2.	Принципы конечно-разностной реализации расчета вихревых токов без учета их реакции.....	308
9.2.3.	Принципы расчета вихревых токов без учета их реакции методом конечных элементов на основе электромагнитной аналогии.....	314
9.3.	Цепно-полевой метод анализа вихревых токов.....	319

9.3.1.	Общий подход к анализу вихревых токов с использованием цепно-полевой расчетной модели.....	319
9.3.2.	Расчет вихревых токов в обмотке якоря машины постоянного тока в режиме холостого хода.....	323
9.4.	Анализ вихревых токов в идеализированном экране.....	340
9.4.1.	Общий подход к анализу вихревых токов с идеализацией свойств электромагнитного экрана.....	340
9.4.2.	Анализ вихревых токов в экране системы возбуждения криодвигателя постоянного тока.....	343
9.5.	Анализ гармонических электромагнитных процессов с реалистичным учетом реакции вихревых токов.....	345
9.5.1.	Общие замечания относительно обусловленного анализа.....	345
9.5.2.	Теоретические основы расчета гармонических электромагнитных процессов с учетом вихревых токов.....	346
9.5.3.	Расчетный анализ гармонического магнитного поля и индуцируемых вихревых токов.....	348
	 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	 352
	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	358
	 Приложение А Формулы векторной алгебры и векторного анализа.....	 361
	 Приложение Б Системы координат и ориентация векторного поля.....	 362
	 Приложение В Общее выражение для эллиптических интегралов.....	 364
	 Приложение Г Электромагнитные параметры через магнитное поле, рассчитанное МКР в полярной системе координат.....	 365