



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХПІ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 1-2 (2) 2021

**Харків
2021**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 1-2 (2) 2021

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 1-2 (2) 2021

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2021

Kharkiv
NTU "KhPI", 2021

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2021. — № 1-2 (2). — 124 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ № 24552-14462Р від 15 липня 2020 року.

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров С. С., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Григор'єв О. Л., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Литвин О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Меньшиков О. В., д-р фіз.-мат. наук, Абердинський університет, Великобританія;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Ольшанський В. П., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНТУСГ ім. Василенка, Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірнін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук., НТУ «ХПІ», Україна.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Grigoriev O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Lytvyn O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., UEPA, Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Menshykov O., Dr. Phys.-Math. Sci., University of Aberdeen, UK;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Ol'shanskii V., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., KhNTUA, Ukraine;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Docent, NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 11 від 26 листопада 2021 р.

M. Y. BOSIN, Y. P. GOMOZOV, T. G. DRYGACH

MATHEMATICAL MODEL OF THE DEVELOPMENT OF A SINGLE TWIN LAYER IN METAL CRYSTALS

By analyzing the experimental data available in the scientific literature, a mathematical model of the development of a single twin layer in metal crystals has been obtained. The model has the form of a differential equation, the order of which is determined by the required accuracy of obtaining the results associated with the solution of this equation. Even in the linear approximation of one of the main parameters of the phenomenological model, the latter gives qualitatively the same dependences of the development of single twins under different loading conditions compared to the experiment. Despite a large number of experimental works devoted to twinning, there is still no rigorous quantitative theory of the development of twinning layers in different media and under different conditions. However, in these works, the mathematical approach was demonstrated only in relation to elastic twins. This work is an introduction to the creation of a quantitative theory of twinning in metal crystals. Comparisons with the experimental results of the proposed phenomenological model were limited in this work to the task of demonstrating the performance of the model in the sense of predicting the most specific effects of the development of twins under various conditions and loading modes. In particular, the model implies the effect of loss and subsequent restoration of hardening by twin boundaries during stress pulsations, the Bauschinger effect upon a change in the sign of the applied voltage, and a number of other effects observed experimentally on a number of different metal crystals.

Key words: model, twin, crystal, loading mode, differential equation, forest dislocations.

М. Є. БОСІН, Є. П. ГОМОЗОВ, Т. Г. ДРИГАЧ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ ОДИНИЧНОГО ДВІЙНИКОВОГО ПРОШАРКУ В МЕТАЛИЧНИХ КРИСТАЛАХ

За останні десять років двійникування почало досить активно використовуватися при створенні наноструктур та нанотехнологій. За допомогою аналізу експериментальних даних, які знаходяться у науковій літературі, отримана математична модель розвитку одиничного двійникового прошарку в металевих кристалах. Модель має вид диференціального рівняння, порядок якого визначається необхідною точністю отримання результатів, пов'язаних з розв'язком цього рівняння. Навіть у лінійному наближенні одного із основних параметрів феноменологічної моделі, остання дає якісно однакові із експериментом залежності розвитку одиничних двійників при різних режимах навантаження. Незважаючи на велику кількість експериментальних робіт, присвячених двійникуванню, строгої кількісної теорії розвитку двійникових прошарків у різних середовищах та в різних умовах поки що немає. В деяких роботах описувався розвиток двійників в термінах дислокаційних взаємодій. Однак, в цих роботах математичний підхід продемонстрований тільки стосовно пружних двійників. Ця робота є вступом до створення кількісної теорії двійникування в металевих кристалах. Порівняння з експериментальними результатами запропонованої феноменологічної моделі були обмежені у цій роботі задачею демонстрації працездатності моделі в сенсі передбачення найбільш специфічних ефектів розвитку двійникові за різних умов та режимів навантаження. Зокрема, з моделі слідує ефект втрати та подальшого відновлення зміцнення межами двійників при пульсації прикладеної напруги, ефект Баушингера при зміні знаку прикладеної напруги та ряд інших ефектів, що спостерігаються експериментально на ряді різних металевих кристалів.

Ключові слова: модель, двійник, кристал, режим навантаження, диференціальне рівняння, дислокації лісу.

М. Е. БОСИН, Е. П. ГОМОЗОВ, Т. Г. ДРЫГАЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЕДИНИЧНОЙ ДВОЙНИКОВОЙ ПРОСЛОЙКИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

С помощью анализа имеющихся в научной литературе экспериментальных данных получена математическая модель развития единичной двойниковой прослойки в металлических кристаллах. Модель имеет вид дифференциального уравнения, порядок которого определяется необходимой точностью получения результатов, связанных с решением этого уравнения. Даже в линейном приближении одного из основных параметров феноменологической модели, последняя дает качественно одинаковые с экспериментом зависимости развития единичных двойников при разных режимах нагружения. Несмотря на большое количество экспериментальных работ, посвященных двойникованию, строгой количественной теории развития двойниковых прослоек в разных средах и в разных условиях пока нет. В некоторых работах описывалось развитие двойников в терминах дислокационных взаимодействий. Однако, в этих работах математический подход был продемонстрирован только применительно к упругим двойникам. Данная работа является вступлением к созданию количественной теории двойникования в металлическом кристалле. Сравнения с экспериментальными результатами предложенной феноменологической модели были ограничены в данной работе задачей демонстрации работоспособности модели в смысле предсказания наиболее специфических эффектов развития двойников при различных условиях и режимах нагружения. В частности, из модели следует эффект потери и последующего восстановления упрочнения границами двойников при пульсации напряжений, эффект Баушингера при изменении знака приложенного напряжения и ряд других эффектов, наблюдаемых экспериментально на ряде различных металлических кристаллов.

Ключевые слова: модель, двойник, кристалл, режим нагружения, дифференциальное уравнение, дислокации леса.

Introduction. *Twinning deformation* has become the subject of close study in connection with the development of cryogenic technology, which is necessary both for space research and for the development of technologies requiring low-temperature conditions. Over the past decade, twinning has begun to be used in the creation of *nanostuctures* and *nanotechnology*. Despite a large number of experimental works devoted to twinning, there is still no rigorous quantitative theory of the development of twinning layers in different media and under different conditions.

Analysis of recent research. The development of twins in terms of dislocation interactions is described in [1]. The work [2] is also of some interest in this sense. However, in these works, the mathematical approach was demonstrated only in relation to elastic twins. The experimental results that we used in this work were obtained, firstly, on different materials (primarily on metals): zinc [3, 5, 7, 8, 9, 11], beryllium [6,12], bismuth [10], iron and its alloys [4], etc.; sec-

only, under different loading conditions: under creep [9], under shock loads [11], under cyclic loads [12], under uniform loads [4; 7], under stress pulsations [8]. It was also interesting to take into account the presence of defects in crystals, for example, the type and density of forest dislocations [7], radiation defects [10].

Formulation of the problem. In this work, an attempt is made to obtain an *isotropic mathematical model* of the behavior of twinning layers, the conclusions of which would correspond to the experimental results. We emphasize that so far we are not talking about the creation of a rigorous mathematical theory; only after clarifying the exact meaning of the phenomenological parameters can we talk about the transformation of the phenomenological model into a *physical and mathematical theory*.

Mathematical model. Fig. 1 shows a particular case of the arrangement of a twinning layer in the parent crystal. Particularly, firstly, the twin is plane-parallel (most of the twins are wedge-shaped, and the top of the twinned wedge can be located inside the crystal), and secondly, twin boundaries are perpendicular to the faceting of the sample only at a certain orientation of the latter. The initial thickness of the twin is indicated in Fig. 1 through « b_0 ». After the load P is

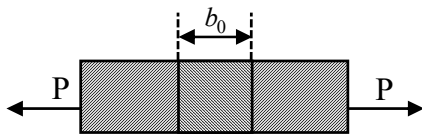


Fig. 1 – particular case of arrangement of twinning layer in parent crystal.

applied (as shown in Fig. 1), the thickness of the twin increases and reaches the value Δb . We denote the relative thickening of the twin by ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta b}{b_0}. \quad (1)$$

Taking into account the property of twin boundaries to accumulate and possibly lose hardening which is irreversibility and reversibility observed during the development of twins, we represent the relative thickening of the

twin in the form:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad (2)$$

where ε_e – is the elastic part of the thickening, which disappears after stress relief, and ε_p – the plastic (irreversible) part of the thickening.

For ε_e by analogy with *Hooke's law*, we write

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{G_2}, \quad (3)$$

here G_2 plays the role of an elastic modulus for a single twin.

For ε_p , using the concept of *viscous resistance forces* that cause irreversibility of the displacement of twin boundaries, we can write by analogy with the well-known *Newton's law* (the stress of resistance to plastic shear is proportional to the strain rate):

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} \equiv \dot{\varepsilon}_p = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (4)$$

here η is a parameter that has the dimension of the usual viscosity coefficient.

With the growth of the twin, the value of η changes in connection with a change in the dislocation structure in the vicinity of the twin boundaries and, consequently, with a change in the "viscous resistance" forces. That's why

$$\eta = \eta(\varepsilon_p). \quad (5)$$

Restricting ourselves to the linear part of the expansion of $\eta(\varepsilon_p)$ in the *Maclaurin series*, we write:

$$\eta(\varepsilon_p) \approx \eta_0 + \frac{d\eta}{d\varepsilon_p} \varepsilon_p, \quad (6)$$

here η_0 is the value of η at $\varepsilon_p=0$. From (6) and (4) we find:

$$\sigma = \left(\eta_0 + \frac{d\eta}{d\varepsilon_p} \varepsilon_p \right) \dot{\varepsilon}_p = \eta_0 \dot{\varepsilon}_p + \frac{d\eta}{d\varepsilon_p} \times \frac{d\varepsilon_p}{dt} \varepsilon_p = \eta_0 \dot{\varepsilon}_p + \dot{\eta} \varepsilon_p. \quad (7)$$

The parameter $\dot{\eta}$ has the dimension of the elastic modulus, so we introduce the notation:

$$\dot{\eta} = G_1. \quad (8)$$

From (2), (3), (7) and (8) we obtain a differential equation connecting σ and ε :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = G(\varepsilon + \tau_\sigma \dot{\varepsilon}), \quad (9)$$

here

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{G_1 + G_2}, \quad G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad \tau_\sigma = \frac{\eta_0}{G_1}. \quad (10)$$

Note that equation (9) has a form similar to the equation of the *standard linear body*. The value of G in this model is the *relaxed elastic modulus*, τ_ε and τ_σ – are the stress relaxation times (at constant deformation) and deformation (at constant stress), respectively.

Solving equation (9) with either law $\sigma(t)$ or $\varepsilon(t)$ given, we find the other function. Comparing the curves $\varepsilon(t)$ and $\sigma(t)$, that is, making a formal change in the solution $t \rightarrow t(\sigma)$ or $t \rightarrow t(\varepsilon)$, one can construct diagrams $\sigma - \varepsilon$. Comparing these diagrams with the experimental curves $\sigma(\varepsilon)$, it is possible to recover the parameters G_1, G_2, η_0 (see below).

Equation (9) is an approximate model of the twin development process. To increase the accuracy, one can take into account the next (quadratic) term in the expansion of $\eta(\varepsilon_p)$ in powers of ε_p . Then instead of equation (6) we get the formula:

$$\eta(\varepsilon_p) \approx \eta_0 + \frac{d\eta}{d\varepsilon_p} \varepsilon_p + \frac{1}{2} \times \frac{d^2\eta}{d\varepsilon_p^2} \varepsilon_p^2, \quad (11)$$

and instead of (9), the equation

$$\sigma = \eta_0 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{G_2} \right) + G_1 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_2} \right)^2}{\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{G_2} \right)^2} \left[\xi \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{G_2} \right) - G_1 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_2} \right) \right]. \quad (12)$$

Here ξ is a new parameter, the meaning of which, like the meaning of other parameters, can be determined by studying their dependence on various factors (temperature, speed and loading mode, structure, etc.).

Let's consider the main loading modes.

1. Creep mode.

Equation (9) can be written under the condition $\sigma = const$:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_\sigma} \varepsilon = \frac{\sigma}{G\tau_\sigma}. \quad (13)$$

The solution of the resulting linear inhomogeneous differential equation with the initial condition $\varepsilon|_{t=0} = 0$ has the form:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right). \quad (14)$$

Comparison of equation (14) with the experimental creep curve will make it easy to recover the parameters G and τ_σ .

Equation (12) gives a more cumbersome expression for the creep. Substituting $\sigma = const$ into equation (12) and resolving the result obtained with respect to the highest derivative, we obtain:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{2\dot{\varepsilon}^2 (\eta_0 \dot{\varepsilon} - \sigma)}{G_1 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_2} \right)^2} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon - \frac{\sigma}{G_2}} + \frac{\xi}{G_1} \dot{\varepsilon}. \quad (15)$$

Equation (15) does not explicitly contain the time t and therefore admits a decrease in the order.

2. Active loading mode at $\dot{\sigma} = const$.

We put $\dot{\sigma} = \mathcal{L}$, that is,

$$\sigma = \mathcal{L}t. \quad (16)$$

Equation (9) then takes the form

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_\sigma} \varepsilon = \frac{\mathcal{L}}{G\tau_\sigma} (t + \tau_\varepsilon) \quad (17)$$

The solution to this equation under the initial condition $\varepsilon|_{t=0} = 0$ is the function

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{L}}{G} (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right) + \frac{\mathcal{L}}{G} t. \quad (18)$$

The relaxation times τ_ε and τ_σ in metals are most often related by the inequality $\tau_\varepsilon \ll \tau_\sigma$ that is, $G_2 \gg G_1$. For a loading duration $t \ll \tau_\sigma$ from equation (18) we obtain:

$$\varepsilon = \frac{\mathbb{C}}{2\eta_0} t^2. \quad (19)$$

Substituting (16) into a more precise equation (12), we get:

$$\ddot{\varepsilon} = 2 \frac{\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{C}}{G_2}\right)^2}{\left(\varepsilon - \frac{\mathbb{C}}{G_2} t\right)^2} \left[\frac{\eta_0}{G_1} \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{C}}{G_2}\right) + \left(\varepsilon - \frac{\mathbb{C}}{G_2} t\right) - \frac{\mathbb{C}}{G_1} t \right] + \frac{\xi}{G_1} \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{C}}{G_2}\right). \quad (20)$$

If we introduce an auxiliary function $\varphi(t) = \varepsilon - \frac{\mathbb{C}}{G_2} t$, then instead of (20) we can write

$$\ddot{\varphi} = 2 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 \left(\frac{\eta_0}{G_1} \dot{\varphi} + \varphi - \frac{\mathbb{C}}{G_1} t\right) + \frac{\xi}{G_1} \dot{\varphi}. \quad (21)$$

Recall that $\frac{\mathbb{C}}{G_2} t = \frac{\sigma}{G_2}$ is the elastic part of the deformation, so that the function $\varphi(t)$ has the meaning of the irreversible part of the deformation $\varepsilon_P = \varepsilon - \varepsilon_e$.

3. *Active loading mode at $\dot{\varepsilon} = const$.*

Let $\varepsilon = kt$, i.e., the rate of deformation change is

$$\dot{\varepsilon} = k. \quad (22)$$

Equation (9) then takes the form

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_\varepsilon} \sigma = \frac{kG}{\tau_\varepsilon} (t + \tau_\sigma). \quad (23)$$

The solution of this equation with the initial condition $\sigma|_{t=0} = 0$ leads to the function

$$\sigma = kGt + kG(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}}\right). \quad (24)$$

Expression (24) can be simplified by expanding the exponent in a Maclaurin series and choosing 2 – 3 terms in the expansion. But this requires the fulfillment of the inequality $t \ll \tau_\varepsilon$ which should be dictated by the conditions of the experiment.

Substituting (22) into equation (12), we obtain:

$$\ddot{\varphi} = 2 \frac{G_2}{G_1} \times \frac{\left(k - \frac{\dot{\sigma}}{G_2}\right)^2}{\left(kt - \frac{\sigma}{G_2}\right)^2} \left[\sigma - \eta_0 \left(k - \frac{\dot{\sigma}}{G_2}\right) - G_1 \left(kt - \frac{\sigma}{G_2}\right) \right] - \frac{G_2}{G_1} \left(k - \frac{\dot{\sigma}}{G_2}\right) \xi. \quad (25)$$

We introduce an auxiliary function

$$\psi(t) = kt - \frac{\sigma}{G_2}. \quad (26)$$

This function has the same meaning as $\varphi(t)$, introduced earlier, that is, it is the difference between deformation and its elastic part. But since plastic deformation in the modes $\dot{\sigma} = const$ and $\dot{\varepsilon} = const$ proceeds in different ways, the functions $\psi(t)$ and $\varphi(t)$ are significantly different. Taking into account (26), equation (25) can be written in the form:

$$\ddot{\psi} = 2 \frac{\dot{\psi}^2}{\psi^2} \left(\frac{\eta_0}{G_1} \dot{\psi} + \frac{G_1 + G_2}{G_1} \psi - \frac{G_2}{G_1} kt \right) - \frac{G_2}{G_1} \xi \dot{\psi}. \quad (27)$$

The solution of this equation under the initial condition $\sigma|_{t=0} = 0$ or, which is the same, $\psi|_{t=0} = 0$ gives the dependence $\sigma(t)$ during loading. The latter can be measured experimentally. Comparison, firstly, provides information about the effectiveness of the model, and secondly, it allows to determine the parameters G_1 , G_2 , η_0 , ξ .

4. *Mode of pulsating loads.*

Let us choose for the pulsation the regime $\dot{\sigma} = const = \mathbb{C}$ during loading and $\dot{\sigma} = const = \mathbb{C}'$ during unloading. Let also the loading rate be significantly less than the unloading rate $\mathbb{C} \ll \mathbb{C}'$, as it was in the experiments [8]. The voltage ripple amplitude is denoted by σ_0 . Solving equation (9) sequentially, first for loading at a rate of $\dot{\sigma} = \mathbb{C}$, then for unloading at a rate of $\dot{\sigma} = \mathbb{C}'$, then for repeated loading at the same rate \mathbb{C} and for unloading at a rate \mathbb{C}' , etc., we obtain a diagram similar to that obtained experimentally in [8]: with each cycle, a certain displacement of twin boundaries is ob-

served, which decays with the number of cycles. For each repeated cycle, the relative displacement of twin boundaries is equal to

$$\beta_k = \varepsilon' e^{-k \frac{G_1 \eta_0}{\tau_0 \zeta}}, \quad (28)$$

here $\varepsilon' = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{G_2}$ is the relative displacement of twin boundaries during the first loading cycle minus the elastic part $\frac{\sigma_0}{G_2}$. Experiments [8, 12] show that the most stable measure of this loss effect and the subsequent restoration of hardening by twin boundaries under voltage pulsations is the value $\delta = \sum \beta_k$. The series with terms given by (28) is convergent, it is easy to calculate its sum:

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \varepsilon' \frac{1}{e^{\frac{G_1 \sigma_0}{\tau_0 \zeta}} - 1}. \quad (29)$$

Relation (29) is in satisfactory agreement with experiment.

5. Mode of alternating loads.

Let us apply equation (9) to study the behavior of twin boundaries under alternating loading of the sample. Let the second loading, in contrast to the case considered above, be performed at a speed $\dot{\sigma} = -\zeta$, that is, a load of the opposite sign $\sigma = -\zeta t$ is applied (the time is counted from the beginning of repeated loading). Under the initial condition $\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon'$ for $\varepsilon(t)$ we find:

$$\varepsilon = \left[\varepsilon' + \frac{\zeta}{G} (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma) \right] e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} + \frac{\zeta}{G} (\tau_\sigma - \tau_\varepsilon - t). \quad (30)$$

By the time t_0 , stress $-\sigma_0$ and deformation ε_2 will be reached, which is calculated by substituting the value $t_0 = \frac{\sigma_0}{\zeta}$ into expression (30). If we postpone the $\varepsilon(\sigma)$ curve under loading of the opposite sign in the positive direction of the coordinate axes, as is done in the illustration of the *Bauschinger effect* [13], then for $\sigma = \sigma_0$ the deformation value will be

$$\varepsilon'_2 = 2\varepsilon' - \varepsilon_2. \quad (31)$$

The measure of the Bauschinger effect is usually taken as the measure of the discrepancy between the curves of repeated loading in the forward and reverse directions at $|\sigma| = \sigma_0$. Denoting it by β_B , we obtain

$$\beta_B = 2\varepsilon' \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}} \right). \quad (32)$$

or, making the substitution $t_0 = \frac{\sigma_0}{\zeta}$, instead of (32) we write

$$\beta_B = 2\varepsilon' \left(1 - e^{-\frac{\sigma_0}{\zeta \tau_\sigma}} \right). \quad (33)$$

Expressions (32) and (33) make it possible to estimate the measure of the Bauschinger effect in twinning within the framework of the phenomenological consideration described above. To simplify calculations, consider the limiting case $\tau_\varepsilon \ll \tau_\sigma$ and $t \ll \tau_\sigma$. Moreover, from (32) we find:

$$\beta_B \approx 2\varepsilon' \frac{G_1}{\eta_0} t_0, \quad (34)$$

and from (19) for t_0 we have

$$t_0 \approx \sqrt{\frac{2\eta_0 \varepsilon_0}{\zeta}}, \quad (35)$$

Substituting (35) into (34), we obtain

$$\beta_B \approx 2\varepsilon' G_1 \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\zeta \eta_0}} \quad (36)$$

or, setting $\varepsilon' \approx \varepsilon_0$ (since for $G_2 \gg G_1$ $\varepsilon_e \ll \varepsilon_p$, $\varepsilon_e \ll \varepsilon$), instead of (36) we can write

$$\beta_B \approx 2\sqrt{2} \frac{G_1}{\sqrt{\eta_0 \zeta}} \varepsilon_0^{\frac{2}{3}}. \quad (37)$$

Approximate formula (37) is more convenient for analyzing the dependences of β_B on various factors.

6. Values of phenomenological parameters.

Thus, the mechanical behavior of twin boundaries under different loading conditions within the framework of the proposed phenomenological consideration is described in terms of three parameters G_1 , G_2 , and η_0 . These parameters are determined both by the characteristics of the twin boundaries themselves and by the defect structure of their surroundings and should, therefore, depend on the degree of incoherence of twin boundaries, the type and density of forest dislocations in crystals, the presence of clusters of point defects, etc.

The parameter η_0 is most easily determined by comparing the experimental dependence $\varepsilon(t)$ during the loading period with the approximate formula (19), which includes only this parameter. The comparison showed that this parameter is sensitive to the density of dislocations of the body in crystals: with an increase in the initial density of the pyramidal forest in Zn crystals from 10^3 to 10^7 cm^{-2} , the value of η_0 increases from $9 \cdot 10^3$ to $4,5 \cdot 10^4$ $\text{MPa} \cdot \text{s}$. This makes it possible to assume that the viscous deceleration of twin boundaries is largely due to the presence of forest dislocations in the crystal.

The parameter G_1 with a known value of η_0 can be found from the measured values δ or β_B using formulas (29) and (36). The order of this value for twins in Bi and Zn crystals is 10 MPa.

The parameter G_2 is easily estimated from the reverse displacement of the twin boundaries after unloading the crystal, that is, from the value of the elastic part of the relative deformation ε_e using formula (3). The order of this value $G_2 \sim 10^2$ MPa (for Bi) and $G_2 \sim 10^3$ MPa (for Zn), which confirms the condition $G_2 \gg G_1$ used above.

Results of work. Thus, the proposed model predicts the behavior of twin boundaries under various loading conditions. After obtaining a mathematical model by comparing its conclusions and experimental data, some conclusions were made about the meaning of the phenomenological parameters included in the model equation.

In particular, the model implies the effect of loss and subsequent restoration of hardening by twin boundaries during stress pulsations, the Bauschinger effect when the applied voltage changes sign, described in the literature, and a number of other effects observed experimentally on a number of different metal crystals.

Prospects for further research. In the future, the authors intend, by analyzing all the experimental data available in the literature, to clarify the meaning of all the phenomenological parameters of the phenomenological model proposed in the work. Only after this can we talk about the creation of a quantitative theory of twinning.

Conclusions. This work is an introduction to the creation of a quantitative theory of twinning in metal crystals. Comparisons with the experimental results of the proposed phenomenological model were limited in this work to the task of demonstrating the performance of the model in the sense of predicting the most specific effects of the development of twins under various conditions and loading modes.

Bibliography

1. Бойко В. С., Гарбер П. И., Хосевич А. М. Обратимая деформация кристаллов. – М. : «Наука», 1991. – 268 с.
2. Christian I. W., Mahajan S. Deformation Twinning. Progress in Materials Science. – 1995. – Vol. 39 – P. 157 – 167.
3. Босин М. Е., Лаврентьев Ф. Ф., Никифорова В. Н., Салима О. П. Особливості двійникування в ростових бікрystalах цинку двійникової орієнтації // УФЖ. – 1995. – Т. 40. – № 6. – С. 559 – 562.
4. Босин М. Е., Лаврентьев Ф. Ф., Никифорова В. Н. О движении ростовой межзеренной границы двойниковой ориентации в бикристалле сплава (Fe+3,5% Si) // ФТТ. – 1996. – Т. 38, – № 12. – С. 3625 – 3627.
5. Bosin M. E., Lavrentev F. F., Nikiforenko V. N. On the Motion of a Crown Interganular Boundary with Twin Orientation in Bycrystals of Pure Zine // Physica status solidi (a). – 1996. – Vol. 157. – P. 213 – 216.
6. Bosin M. E. Specific features of twin boundaries motion in beryllium single crystals at the twinning and untwining // Functionnal materials. – 1997. – Vol. 4. – № 4 – P. 557 – 559.
7. Босин М. Е., Лаврентьев Ф. Ф., Никифорова В. Н. Область аккомодации – мера релаксации напряжений, локализованных на границах двойников в монокристаллах цинка // The XXI International Conference on Relaxation Phenomena In Solids (RPS-21). – Voronezh, 2004.
8. Босин М. Е., Лаврентьев Ф. Ф., Никифорова В. Н. Дуализм влияния дислокаций леса на развитие двойникового в монокристаллах цинка // The Third International Conference «Deformation and Fracture of Materials and Nanomaterials». – Москва. – 2009. – С. 82 – 83.
9. Босин М. Е., Русскин В. М. Особенности влияния дислокаций леса на скорость движения границ двойников в монокристаллах цинка при ползучести // Сб. докладов Международной научной конференции «Актуальные проблемы физики твердого тела» (ФТТ – 2011). – Минск, 2011. – С. 260 – 262.
10. Босин М. Е., Гомозов Е. П. Влияние нейтронного облучения на движение границ двойника в монокристаллах висмута // Материалы докладов XX Петербургских чтений по проблемам прочности. – Санкт-Петербург, 2012. – С. 217 – 219.
11. Босин М. Е., Омельченко Н. В. Движение границ двойников в монокристаллах цинка при ударном нагружении // Сб. трудов Международной конференции «Актуальные проблемы прочности». – Харьков, 2014. – С. 123 – 124.
12. Босин М. Е., Русскин В. М. Закономерности движения двойниковых границ в монокристаллах бериллия и его сплавах с медью при многократном циклическом нагружении // Сб. трудов XIX Международной конференции «Физика прочности и пластичности материалов». – Самара, 2015. – С. 643 – 644.
13. Башманов В. М., Босин М. Е., Папиров И. И. Циклический эффект Баушингера на границах механических двойников бериллия // ФММ. – 1973. – Т. 35. – № 1. – С. 220 – 221.

References (transliterated)

1. Boyko V. S., Garber R. I., Khosevich A. M. *Obratimaya deformatsiya kristallov* [Reversible deformation of crystals]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 268 p.
2. Christian I. W., Mahajan S. Deformation Twinning. *Progress in Materials Science*. 1995, vol. 39, pp. 157–167.
3. Bosin M. E., Lavrent'ev F. F., Nikiforenko V. N., Salita O. P. Osoblyvi divnynykuvannya v rostovykh bikrystalakh zynku divnynykovoyi orientatsiyi [Features of twinning in growth bicrystals of zinc of twin orientation]. *UFZh* [Ukrainian Journal of Physics]. 1995, vol. 40, no. 6, pp. 559–562.
4. Bosin M. E., Lavrent'ev F. F., Nikiforenko V. N. O dvizhenii rostovoy mezhzyerenny granitsy dvoynikovoy orientatsii v bikristalle splava (Fe + 3.5% Si) [On the motion of the growth grain boundary of twin orientation in the bicrystal of the alloy (Fe + 3.5% Si)]. *FTT* [Solid State Physics]. 1996, vol. 38, no. 12, pp. 3625–3627.
5. Bosin M. E., Lavrent'ev F. F., Nikiforenko V. N. On the Motion of a Crown Interganular Boundary with Twin Orientation in Bycrystals of Pure Zine. *Physica status solidi (a)*. 1996, vol. 157, pp. 213–216.
6. Bosin M. E. Specific features of twin boundaries motion in beryllium single crystals at the twinning and untwining. *Functionoal materials*. 1997, vol. 4, no. 4, pp. 557–559.
7. Bosin M. E., Lavrent'ev F. F., Nikiforenko V. N. Oblast' akkomodatsii – mera relaksatsii napryazheniy, lokalizovannykh na granitsakh dvoynokov v monokristallakh tsinka [The accommodation region is a measure of relaxation of stresses localized at the boundaries of twins in zinc single crystals]. *The XXI International Conference on RELAXATION PHENOMENA IN SOLIDS (RPS-21)*. Voronezh, 2004.
8. Bosin M. E., Lavrent'ev F. F., Nikiforenko V. N. Dualizm vliyaniya dislokatsiy lesa na razvitie dvoynikovaniya v monokristallakh tsinka [Dualism of the influence of forest dislocations on the development of twinning in zinc single crystals]. *The Third International Conference «Deformation and Fracture of Materials and Nanomaterials»*. Moscow, 2009, pp. 82–83.
9. Bosin M. E., Russkin V. M. Osobennosti vliyaniya dislokatsiy lesa na skorost' dvizheniya granits dvoynikov v monokristallakh tsinka pri polzuchesti [Features of the influence of forest dislocations on the speed of motion of twin boundaries in zinc single crystals during creep]. *Sb. dokladov Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Aktual'nye problemy fiziki tvyerdogo tela» (FTT – 2011)* [Sat. reports of the International Scientific Conference "Actual Problems of Solid State Physics" (SSP – 2011)]. Minsk, 2011, pp. 260–262.
10. Bosin M. E., Gomofov E. P. Vliyanie neytronogo oblucheniya na dvizhenie granits dvoynika v monokristallakh bismuta [Influence of neutron irradiation on the motion of twin boundaries in bismuth single crystals]. *Materialy dokladov XX Peterburgskikh chteniy po problemam prochnosti* [Proceedings of the XX St. Petersburg Readings on Strength Problems]. St. Petersburg, 2012, pp. 217–219.
11. Bosin M. E., Omel'chenko N. V. Dvizhenie granits dvoynikov v monokristallakh tsinka pri udarnom nagruzhenni [Movement of twin boundaries in zinc single crystals under shock loading]. *Sb. trudov XIX Mezhdunarodnoy konferentsii «Aktual'nye problemy prochnosti»* [Sat. Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Strength"]. Kharkov, 2014, pp. 123–124.
12. Bosin M. E., Russkin V. M. Zakonomernosti dvizheniya dvoynikovykh granits v monokristallakh berilliya i ego splavakh s med'yu pri mnogokratnom tsiklicheskom nagruzhenni [Regularities of motion of twin boundaries in single crystals of beryllium and its alloys with copper under multiple cyclic loading]. *Sb. trudov XIX Mezhdunarodnoy konferentsii «Fizika prochnosti i plastichnosti materialov»* [Sat. Proceedings of the XIX International Conference "Physics of Strength and Plasticity of Materials"]. Samara, 2015, pp. 643–644.
13. Bashmanov V. M., Bosin M. E., Papirova I. I. Tsiklicheskiy eyffekt Baushingera na granitsakh mekhanicheskikh dvoynikov berilliya [Cyclic Bauschinger effect on the boundaries of mechanical twins of beryllium]. *FMM* [Physics of Metals and Metal Science]. 1973, vol. 35, no. 1, pp. 220–221.

Received (надійшла) 05.11.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Босін Марк Євгенович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та фізики, Харківська гуманітарно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 732-87-33; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Босин Марк Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры математики и физики, Харьковская гуманитарно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 732-87-332; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Bosin Mark Yevgenovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Physics, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv; tel.: (057) 732-87-33; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Гомозов Євген Павлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Yevgen.Gomozov@khpі.edu.ua.

Гомозов Евгений Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Yevgen.Gomozov@khpі.edu.ua.

Gomozov Yevgen Pavlovych – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-63-51; e-mail: Yevgen.Gomozov@khpі.edu.ua.

Дригач Тетяна Григорівна – кандидат педагогічних наук, старший викладач, Харківська гуманітарно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 732-87-33; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Дрыгач Татьяна Григорьевна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Харьковская гуманитарно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 732-87-33; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Drygach Tetyana Grygorivna – Candidate of Pedagogics Sciences, Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics and Physics, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv; tel.: (057) 732-87-33; e-mail: kafedramath.ph36@gmail.com.

Е. Е. АЛЕКСАНДРОВ, В. А. ВАНИН, Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА, Б. В. ВАНИН

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СТАБИЛИЗАТОРА ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрена задача выбора значений варьируемых параметров стабилизатора подвижного объекта, доставляющих минимум аддитивному квадратичному интегральному функционалу, отражающему комплекс требований к замкнутой системе стабилизации. Для решения поставленной задачи авторами предложен комбинированный метод параметрического синтеза стабилизатора, представляющий собой последовательную комбинацию метода сеток Соболя и метода Нелдера-Мида. На первом этапе синтеза с помощью метода сеток Соболя рабочая точка замкнутой системы в пространстве варьируемых параметров переходит в окрестность точки глобального минимума функционала качества, а на втором этапе с помощью метода Нелдера-Мида рабочая точка попадает в малую окрестность глобального минимума. Предлагаемый метод включает специальный алгоритм выбора весовых коэффициентов аддитивного функционала качества, а также использует «главные координаты» вектора состояния объекта стабилизации наиболее адекватно описывающих его динамические свойства.

Ключевые слова: объект стабилизации; стабилизатор; параметрический синтез; главные координаты; аддитивный интегральный квадратичный функционал.

Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, В. А. ВАНИН, Т. Є. АЛЕКСАНДРОВА, Б. В. ВАНИН
ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ СТАБІЛІЗАТОРА РУХОМОГО ОБ'ЄКТУ

Розглянута задача вибору значень змінюваних параметрів стабілізатора рухомого об'єкту які доставляють мінімум адитивному квадратичному інтегральному функціоналу, враховуючого комплекс вимог до замкнутої системи стабілізації. Для розв'язання поставленої задачі запропоновано комбінований метод параметричного синтезу стабілізатора у вигляді послідовного комбінування методу сіток Соболя та методу Нелдера-Міда. На першому етапі синтезу за допомогою методу сіток Соболя робоча точка замкненої системи у просторі змінюваних параметрів переміщується в окіл глобального мінімуму функціоналу якості, а на другому етапі за допомогою методу Нелдера-Міда робоча точка попадає в малий окіл глобального мінімуму. Запропонований алгоритм включає спеціальний алгоритм вибору вагових коефіцієнтів адитивного функціоналу якості, а також використовуються «головні координати» вектору стану об'єкту стабілізації найбільш адекватно описуючі його динамічні особливості. Проведені чисельні дослідження властивостей математичної моделі керованої динамічної системи із розривним керуванням процесом стабілізації. Із аналізу графіків у фазовому просторі стану динамічної системи відслідковується неспірально вихід системи в положення рівноваги. Синтезоване управління реалізовано у вигляді послідовності перемикачів.

Ключові слова: об'єкт стабілізації; стабілізатор; параметричний синтез; головні координати; адитивний інтегральний квадратичний функціонал.

YE. YE. ALEKSANDROV, V. A. VANIN, T. YE. ALEKSANDROVA, B. V. VANIN
PARAMETRIC SYNTHESIS OF A MOVING OBJECT STABILIZER

The problem of choosing the variable parameters of a stabilizer of an object which minimize an additive quadratic integral functional reflecting the complex of requirements for a closed stabilization system is considered. To solve the problem a combined method of parametric synthesis of the stabilizer, which is a sequential combination of the Sobol grid method and the Nelder-Mead method, is proposed. At the first stage of the method by applying the Sobolev grid method a working point of the closed system in the space of its variable parameters is transferred into a neighborhood of the quality functional global minimum point. Then at the second stage the Nelder-Mead method is used to relocate the working point into a small neighborhood of the global minimum. The method proposed comprises a particular algorithm for choosing the weight coefficient of the additive quality functional as well as makes use of the stabilization object state vector main coordinates, which provide the most adequate description of its dynamic features. The properties of a mathematical model of controlled system with discontinuous stabilization process control are studied numerically. The analysis of the plots in the dynamical system state phase space indicates non-spiral approach of the system to its equilibrium state. The synthesized control is realized in the form of a sequence of switchovers.

Key words: stabilization object; stabilizer; parametric synthesis; main coordinates; additive integral quadratic functional.

Введение. Системы автоматического управления движением подвижных объектов получили широкое распространение в различных областях человеческой деятельности, особенно при создании систем вооружений и военной техники. Системы наблюдения, наведения и стабилизации вооружений подвижных космических, воздушных, наземных и морских объектов строятся на основе следующих общих принципов:

-- разработка математической модели управления объекта исследований как совокупности трех моделей – модели возмущенного движения объекта, модели аналогового или цифрового стабилизатора и имитационной модели внешних воздействий;

-- линеаризация математической модели эволюции объекта стабилизации и получение системы линейных дифференциальных уравнений – математическая модель первого приближения;

-- исследование характеристического уравнения математической модели первого приближения и *D* – разбиение пространства варьируемых параметров стабилизатора и выделение области устойчивости, являющейся областью допустимых значений варьируемых параметров;

-- отыскание в области варьируемых параметров стабилизатора значений, обеспечивающих необходимые показатели качества.

К показателям качества замкнутой системы стабилизации относятся:

-- запас устойчивости замкнутой системы стабилизации;

-- быстродействие системы;

-- точность стабилизации объекта относительно заданной траектории движения.

Под *запасом устойчивости* понимают удаленность рабочей точки системы от границы области устойчиво-

сти, а под *быстродействием* – время затухания переходных процессов в системе. Эти два показателя тесно связаны друг с другом. Действительно, запас устойчивости замкнутой системы стабилизации обычно оценивают расстоянием α от мнимой оси системы координат в плоскости корней характеристического уравнения системы первого приближения до ближайшего действительного корня или ближайшей пары комплексно-сопряженных корней. Чем больше α , тем выше запас устойчивости замкнутой системы. С другой стороны, быстродействие замкнутой системы стабилизации t_n связано с ее запасом устойчивости α следующим эмпирическим соотношением [1]:

$$t_n = \frac{3}{|\alpha|}.$$

С повышением запаса устойчивости системы уменьшается время затухания переходных процессов, следовательно, повышается ее быстродействие.

Точность стабилизации объекта относительно заданной траектории движения оценивается значением *интегрального квадратичного функционала* отклонения траекторий объекта от заданной. Обычно стабилизатор, обеспечивающий высокую точность стабилизации объекта, доставляет высокий запас устойчивости и быстродействия замкнутой системы стабилизации.

Теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), созданная в 60-х годах предыдущего столетия А. М. Летовым, Р. Беллманом, А. А. Красовским и Н. Н. Красовским представляет собой метод решения задачи *структурно-параметрического синтеза* оптимального регулятора, доставляющего на решениях замкнутой системы автоматического управления минимум аддитивному интегральному квадратичному функционалу. Вместе с тем, теория АКОР не нашла широкого распространения в инженерной практике в связи со следующими обстоятельствами:

- отсутствие работоспособной методики выбора *весовых коэффициентов* аддитивного интегрального квадратичного функционала;
- необходимость непрерывного измерения значений всех компонент вектора состояний объекта управления с целью формирования управляющего воздействия.

В данной статье предлагается метод параметрического синтеза стабилизатора подвижного объекта, обеспечивающего высокоточную стабилизацию объекта. Метод апробирован в процессе проектирования систем наведения и стабилизации подвижных объектов военного назначения:

- основного вооружения танка;
- космической ступени ракеты-носителя;
- автомобиля-топливозаправщика.

Анализ последних исследований. Важность проблемы выбора весовых коэффициентов аддитивного интегрального квадратичного функционала качества была отмечена еще основоположником АКОР А. М. Летовым [2]. Им же указано направление решения этой проблемы, следуя которому М. Е. Салуквадзе предложил методику решения этой проблемы [3]. В дальнейшем эта методика была усовершенствована А. Н. Ворониным [4, 5] и в окончательном виде приведена в [6].

Вторая основная причина, связанная с необходимостью измерения всех компонент вектора состояния стабилизируемого объекта, детально рассмотрена в работах [7, 8], где показана возможность учета в алгоритме управления только его *главных координат*, которые в наибольшей степени характеризуют стабилизируемый процесс.

В работе [9] изложены основы алгоритмического метода параметрического синтеза стабилизаторов нелинейных подвижных объектов, основанного на использовании главных координат объекта стабилизации и предусматривающего целенаправленный выбор значений весовых коэффициентов аддитивного функционала качества. Алгоритмический метод предполагает использование *вычислительной процедуры Нелдера – Мида* для поиска минимума аддитивного функционала. Однако, процедура Нелдера – Мида позволяет отыскать точку локального минимума аддитивного функционала, ближайшую к стартовой точке.

В настоящей статье отыскание минимума функционала осуществляется *комбинированным методом*, представляющим собой комбинацию *метода сеток Соболя*, являющегося одной из разновидностей *метода Монте-Карло* [10] и метода Нелдера – Мида, реализованного в программных продуктах Optimization Toolbox пакета MathLAB и Minimize программного пакета MATCAD.

Алгоритмический метод параметрического синтеза стабилизатора. Математическую модель *стохастической динамической системы* представим в виде:

$$\dot{X}(t) = \Phi(X(t), k, t) + CF(t), \quad (1)$$

где $X(t)$ – n – мерный вектор состояния системы; k – m – мерный вектор варьируемых параметров; $F(t)$ – s – мерный вектор внешних возмущений; C – матрица размером $n \times s$; $\Phi(X(t), k, t)$ – n – мерная вектор-функция правой части динамической системы (1). Предполагается, что вектор варьируемых параметров (вектор

управления) принадлежит некоторой области допустимых значений

$$k \in G(k). \quad (2)$$

Задача параметрического синтеза динамической системы (1) состоит в решении следующей задачи. Найти решение (1) при всех допустимых значениях варьируемых параметров которое доставляет минимум функционалу

$$J(k) = M_j \left\{ \int_0^T X_j(k, t), QX_j(k, t) dt \right\}, \quad (3)$$

где j – номер реализации вектора $F_j(t)$; M_j – математическое ожидание по реализациям стохастического вектора внешних воздействий; Q – диагональная матрица; T – время функционирования системы.

Квадратичная форма под знаком интеграла в соотношении (3) имеет вид:

$$X_j(k, t), QX_j(k, t) = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 x_{ij}^2(k, t), \quad (4)$$

где $Q = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_n^2 \end{pmatrix}$ – матрица весовых коэффициентов.

Для упрощения решения задачи параметрического синтеза динамических систем в квадратичной форме (4) можно сохранить не все n компонент вектора состояния $X_j(k, t)$ j -й реализации, а только p «главных компонент», определяющих функционал качества (3). Тогда

$$\bar{J}(k) = M_j \left\{ \int_0^T \sum_{i=1}^p \beta_i^2 x_{ij}^2(k, t) dt \right\} \quad (5)$$

перепишем в виде

$$\bar{J}(k) = \sum_{i=1}^p \beta_i^2 M_j \left\{ \int_0^T x_{ij}^2(k, t) dt \right\}. \quad (6)$$

Введем частные функционалы

$$J_i(k) = M_j \left\{ \int_0^T x_{ij}^2(k, t) dt \right\}, \quad (i = 1 \div p), \quad (7)$$

тогда (6) с учетом (7) примет вид

$$\bar{J}(k) = \sum_{i=1}^p \beta_i^2 J_i(k). \quad (8)$$

Первым шагом решения задачи параметрического синтеза является вычисление p частных функционалов (7) на решениях динамической системы (1) с их последующей минимизацией. Для этого используется реализованный в библиотеке ПК генератор белого шума $\xi_j(t)$. Известно [11], что при подаче на динамическое звено с передаточной функцией $W(s)$ входного сигнала со спектральной плотностью $S_\xi(t)$ выходной сигнал имеет плотность

$$S_Y(\omega) = W^2(j\omega) S_\xi(t), \quad (9)$$

а в случае «белого шума» $\xi_j(t)$ с единичной спектральной плотностью, имеем:

$$S_Y(\omega) = W^2(j\omega). \quad (10)$$

Имея кривую спектральной плотности каждой из компонент вектора $F(t)$, можно подобрать передаточную функцию формирующего динамического звена $W_{Fv}(s)$, ($v = 1 \div s$). Подавая на такое звено j -ю реализацию единичного «белого шума» имеем соответствующую реализацию компонент вектора $F_j(t)$.

Для вычисления значений частного i -того функционала на решениях системы (1) при j -й реализации «белого шума» рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \Phi(X(t), k, t) + CF_j(t); \\ \dot{x}_{n+1}(t) = x_{ij}^2(k, t). \end{cases} \quad (11)$$

С учетом формулы (7) можно записать

$$J_i^j(k) = x_{n+1}^j(T); \quad (12)$$

$$J_i(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N J_i^j(k), \quad (i = 1 \div p). \quad (13)$$

Таким образом, для отыскания значений частного функционала (13) на решениях (1) необходимо построить N решений системы (11) с некоторыми начальными условиями при N реализациях случайной вектор-функции $F_j(t)$, ($j = 1 \div N$), а затем, используя (12) и (13), получим значения i -того частного функционала $J_i(k)$, ($i = 1 \div p$).

Сначала построим область допустимых значений $G1(k)$. Затем следует на множестве допустимых значений $G(k)$ вектора варьируемых параметров k отыскать минимум по k каждого из p частных функционалов $J_i(k)$, ($i = 1 \div p$):

$$k_i^* = \min_{k \in G(k)} J_i(k). \quad (14)$$

В качестве такой области естественно принять область устойчивости динамической системы (1) варьируемых параметров. Рассмотрим систему первого приближения для (1):

$$\dot{X}(t) = A(k, t)X(t), \quad (15)$$

где

$$A(k, t) = \frac{\partial \Phi(X_0, k, t)}{\partial X(t)} - \text{матрица Якоби}. \quad (16)$$

Элемент матрицы (16) вычисляются в точке установившегося равновесия X_0 , которая определяется из уравнения:

$$\Phi(X_0, k, t) = 0. \quad (17)$$

По *теореме Ляпунова* система (1) устойчива [12], если устойчива ее система первого приближения (15). Характеристическое уравнение системы (15) имеет вид:

$$D(k, t, s) = \det(A(k, t) - sE) = 0. \quad (18)$$

В общем случае коэффициенты характеристического уравнения (18) могут зависеть от времени. Тогда для построения множества $G1(k)$ применяют *метод замороженных коэффициентов*, разбивая временной интервал $[0, T]$ на участки их постоянства. Тогда

$$G1(k) = \bigcap_{l=0}^m G(k, t_l).$$

Поиск весовых коэффициентов аддитивного функционала качества. Результаты исследований. После отыскания глобальных минимумов частных функционалов (7) переходим к нахождению весовых коэффициентов аддитивного функционала (3). Частные функционалы имеют разную размерность и, соответственно, весовые коэффициенты β_i ($i = 1 \div p$) тоже разной размерности.

Рассмотрим пример динамической системы (1) в виде:

$$a(t)\ddot{\psi}(t) = \delta(t) + f(t); \quad (19)$$

$$T_1^2 \ddot{\delta}(t) + T_2 \dot{\delta}(t) + \delta(t) = u(t). \quad (20)$$

Уравнение (19) описывает возмущенное движение стабилизируемого объекта с главной координатой $\psi(t)$, на который действует стабилизирующее воздействие $\delta(t)$ и внешнее случайное возмущение $f(t)$. Уравнение (20) описывает динамику стабилизатора, формирующего стабилизирующее воздействие $\delta(t)$. При этом управляющая функция определяется параметризованным соотношением:

$$u(t) = \begin{cases} G(t) & \text{при } u^* \leq G(t); \\ u^* \operatorname{sign} G(t) & \text{при } |G(t)| < u^*; \\ u^{**} \operatorname{sign} G(t) & \text{при } |G(t)| > u^{**}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$G(t) = k_1 \psi(t) + k_2 \dot{\psi}(t). \quad (22)$$

Динамическая система (19) – (22) нелинейна. Соответствующая система первого приближения запишется так:

$$a(t)\ddot{\psi}(t) = \delta(t) + f(t);$$

$$T_1^2 \ddot{\delta}(t) + T_2 \dot{\delta}(t) + \delta(t) = k_1 \psi(t) + k_2 \dot{\psi}(t). \quad (23)$$

Функция времени $a(t)$ характеризует переменные инерционные свойства подвижного объекта. Изменение $a(t)$ во времени может быть интенсивным, например, при рассмотрении полета ракеты [14] или медленным как в задаче о стабилизации автомобиля [15].

Значения постоянных времени стабилизатора примем равными $T_1 = 0.1$ с, $T_2 = 0.5$ с, а значение $a(t) = 1$. Тогда уравнение (23) запишем в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3 + f(t); \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = 100k_1x_1 + 100k_2x_2 - 100x_3 - 50x_4, \end{cases} \quad (24)$$

где вектор состояния замкнутой системы первого приближения имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \delta(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{pmatrix}.$$

Матрица динамической системы (24) и ее характеристическое уравнение запишется как

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100k_1 & 100k_2 & -100 & -50 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\det(A(k) - sE) = s^4 + 50s^3 + 100s^2 - 100k_2s - 100k_1 = 0.$$

Произведя замену в (25) $s = j\omega$, выделим вещественную и мнимую часть и приравняем нулю. Из полученных уравнений найдем:

$$k_1 = -\omega^2 + 0.01\omega^4, \quad k_2 = -0.5\omega^2. \quad (26)$$

Используя соотношения (26), в плоскости варьируемых параметров (k_1, k_2) построим область их допустимых значений при $\omega \in [0, \infty]$ (рис. 1). Из (26) видно, что область допустимых параметров $G1(k)$ ограничена участком параболы

$$k_1 = 2k_2 + 0.04k_2^2$$

в третьем квадранте плоскости (k_1, k_2) и осью Ok_2 .

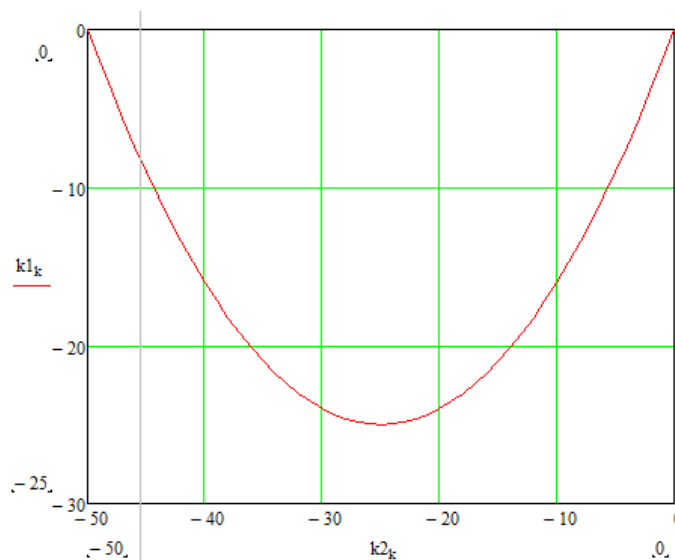


Рис. 1 – Область допустимых значений варьируемых параметров.

В качестве множества Соболя выберем прямоугольник $-25 \leq k_1 \leq 0$, $-50 \leq k_2 \leq 0$. Нанесем сетку в виде единичных квадратов, покрывающую область $G(k)$, и в узлах сетки вычислим значения частных функционалов:

$$J_1(k) = M_j \left\{ \int_0^T \psi_j^2(t) dt \right\}, \quad J_2(k) = M_j \left\{ \int_0^T \dot{\psi}_j^2(t) dt \right\}$$

и аддитивного функционала

$$J(k) = \beta_1^2 J_1(k) + \beta_2^2 J_2(k).$$

На решениях уравнения (24) возмущенного движения системы при различных реализациях «белого шума» $\xi_j(t)$, ($j = 1 \div N$).

Предположим, что передаточная функция формирующего динамического звена, преобразующего единичный «белый шум» в случайную функцию $f(t)$, имеет следующий вид:

$$W_f(s) = \frac{K_f}{\tau_1^2 s^2 + \tau_2 s + 1}.$$

Тогда дифференциальное уравнение формирующего динамического звена записывается в виде:

$$\tau_1^2 \ddot{f}_j(t) + \tau_2 \dot{f}_j(t) + f_j(t) = K_f \xi_j(t). \quad (27)$$

Рассмотрим поведение системы (23), (27) при $\tau_1 = 0.05$ с, $\tau_2 = 0.01$ с, $K_f = 0.1$. В результате имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_j(t) = \delta_j(t) + f_j(t); \\ \ddot{\delta}_j(t) = -50\dot{\delta}_j(t) - 100\delta_j(t) + 100u_j(t); \\ \ddot{f}_j(t) = -4\dot{f}_j(t) - 400f_j(t) + 40\xi_j(t); \\ \dot{x}_j(t) = \psi_j^2(k, t); \\ \dot{y}_j(t) = \dot{\psi}_j^2(k, t) \end{cases} \quad (28)$$

при нулевых начальных условиях.

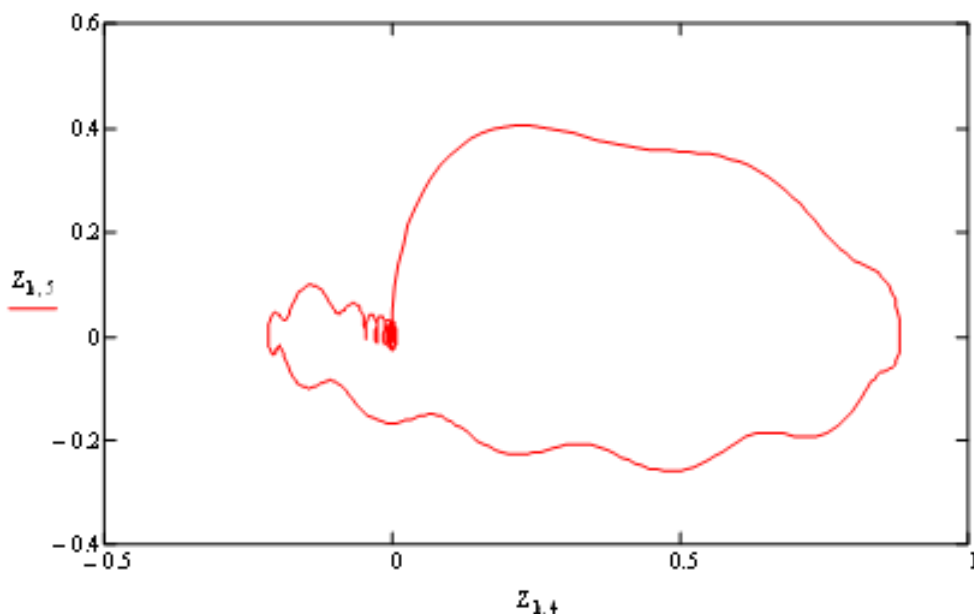


Рис. 2 – Стабилизация в фазовом пространстве ($k_1 = -15$, $k_2 = -35$, $T = 30$ с), $Z_{k,4} = \psi(t_k)$, $Z_{k,5} = \dot{\psi}(t_k)$.

В соотношении (28) для $u_j(t)$ принято $u^* = 0.1$ В, $u^{**} = 10$ В. Частные функционалы найдем как в (12), (13):

$$J_1^j(k) = x_j(T), \quad J_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N J_1^j(k); \quad (29)$$

$$J_2^j(k) = y_j(T), \quad J_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N J_2^j(k). \quad (30)$$

Затем, используя комбинированный метод оптимизации, находим минимальные значения функционалов J_1^* и J_2^* , а также оцениваем максимальные значения главных координат ψ_{max} и $\dot{\psi}_{max}$. На рис. 2 приведен стабилизируемый процесс, соответствующий точкам минимума частных функционалов.

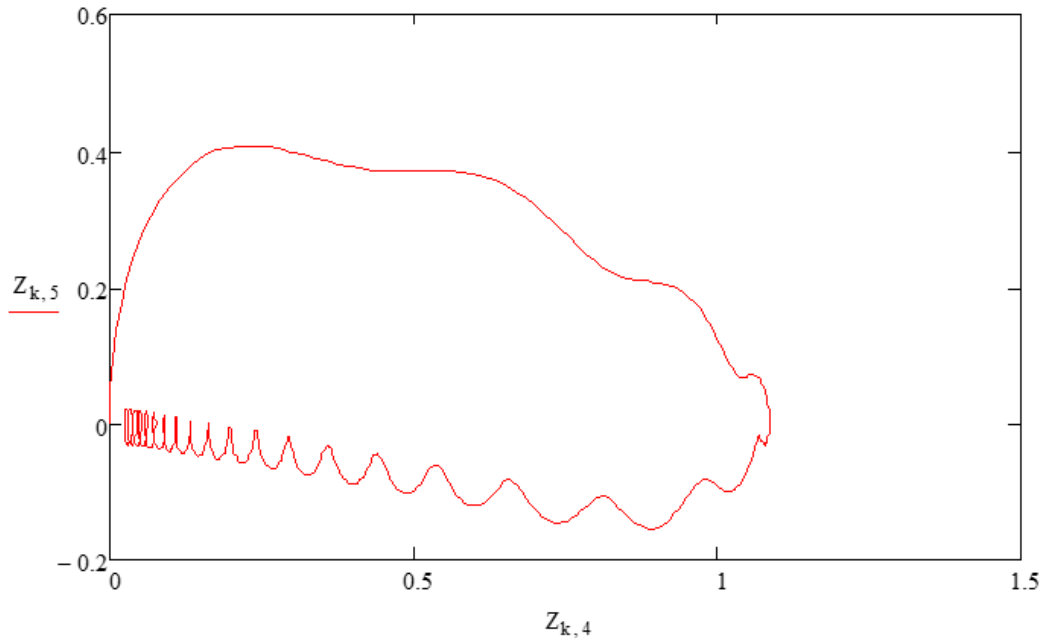


Рис. 3 – Стабилизация в фазовом пространстве ($k_1 = -5$, $k_2 = -35$, $T = 30$ с), $Z_{k,4} = \psi(t_k)$, $Z_{k,5} = \dot{\psi}(t_k)$.

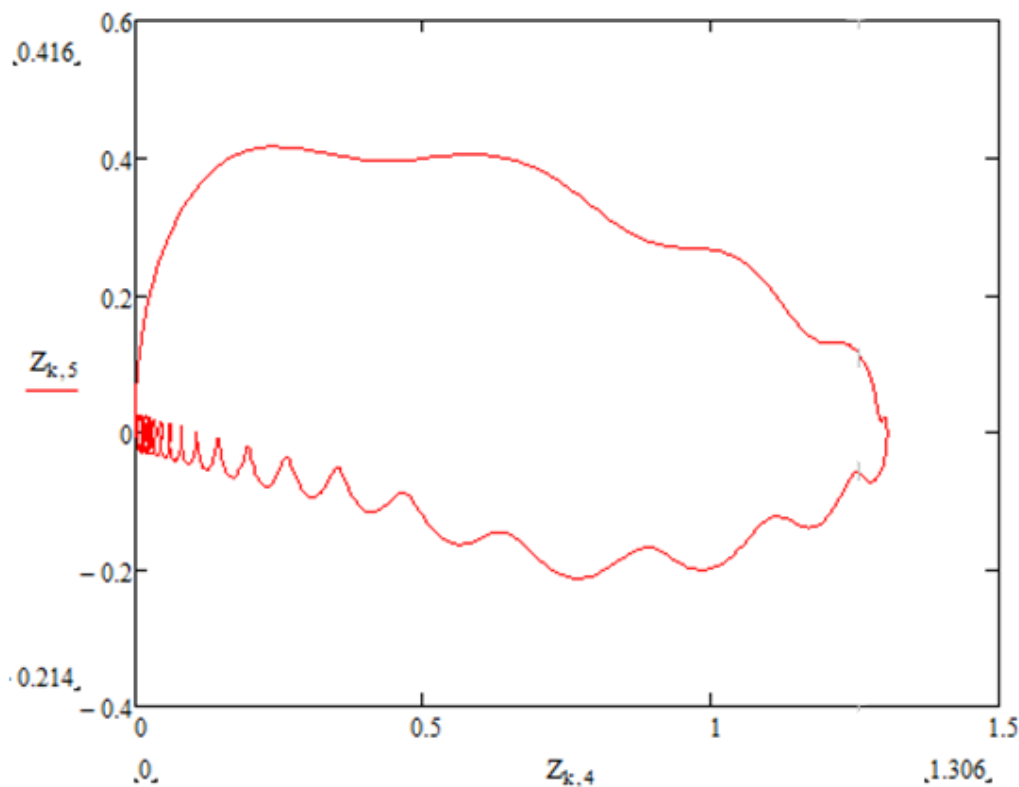


Рис. 4 – Стабилизации в фазовом пространстве ($k_1^* = -4.95$ В, $k_2^* = -24.8$ Вс, $T = 30$ с), $Z_{k,4} = \psi(t_k)$, $Z_{k,5} = \dot{\psi}(t_k)$.

Из анализа результатов исследования процессов следует $\psi_{max} = 1.2$, $\dot{\psi}_{max} = 0.41$ с⁻¹ (рис. 2, 3). Минималь-

ные значения частных функционалов составляют $J_1^* = 3.117$, $J_2^* = 0.439 \text{ с}^{-1}$. Можем найти значения весовых коэффициентов в аддитивном функционале

$$J(k) = \beta_1^2 J_1(k) + \beta_2^2 J_2(k) \tag{31}$$

из соотношений

$$\beta_1 = \frac{\psi_{max}}{J_1^* \left(\frac{\psi_{max}^2}{J_1^*} + \frac{\dot{\psi}_{max}^2}{J_2^*} \right)}, \quad \beta_2 = \frac{\dot{\psi}_{max}}{J_2^* \left(\frac{\psi_{max}^2}{J_1^*} + \frac{\dot{\psi}_{max}^2}{J_2^*} \right)}$$

и они равны $\beta_1 = 0.436 \text{ с}^{-1}$, $\beta_2 = 1.06$.

Переходим к последнему этапу – минимизации аддитивного функционала (31). Расширим систему (28) дифференциальным уравнением

$$\dot{z}_j(t) = \beta_1^2 \psi_j^2(k, t) + \beta_2^2 \dot{\psi}_j^2(k, t) \tag{32}$$

и на ней оценим аддитивный функционал (43)

$$J^j(k) = z_j(T), \quad J(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j(T). \tag{33}$$

Используя комбинированный метод оптимизации функционала (32) на сетке Соболя найдем узел, в котором функционал достигает минимума. Используя этот узел в качестве стартовой точки для программы «minimize» в Mathcad находим вектор варьируемых параметров $k^* \in G1(k)$ для динамической системы (19) – (20).

Найдено $k_1^* = -4.95 \text{ В}$, $k_2^* = -24.8 \text{ В} \cdot \text{с}$. На рис. 4 представлены процессы стабилизации замкнутой системы, соответствующие точке минимума аддитивного функционала (33).

На рис. 5 приведены характерные зависимости показателей состояния системы (положение и скорость) и синтезированного управления от времени.

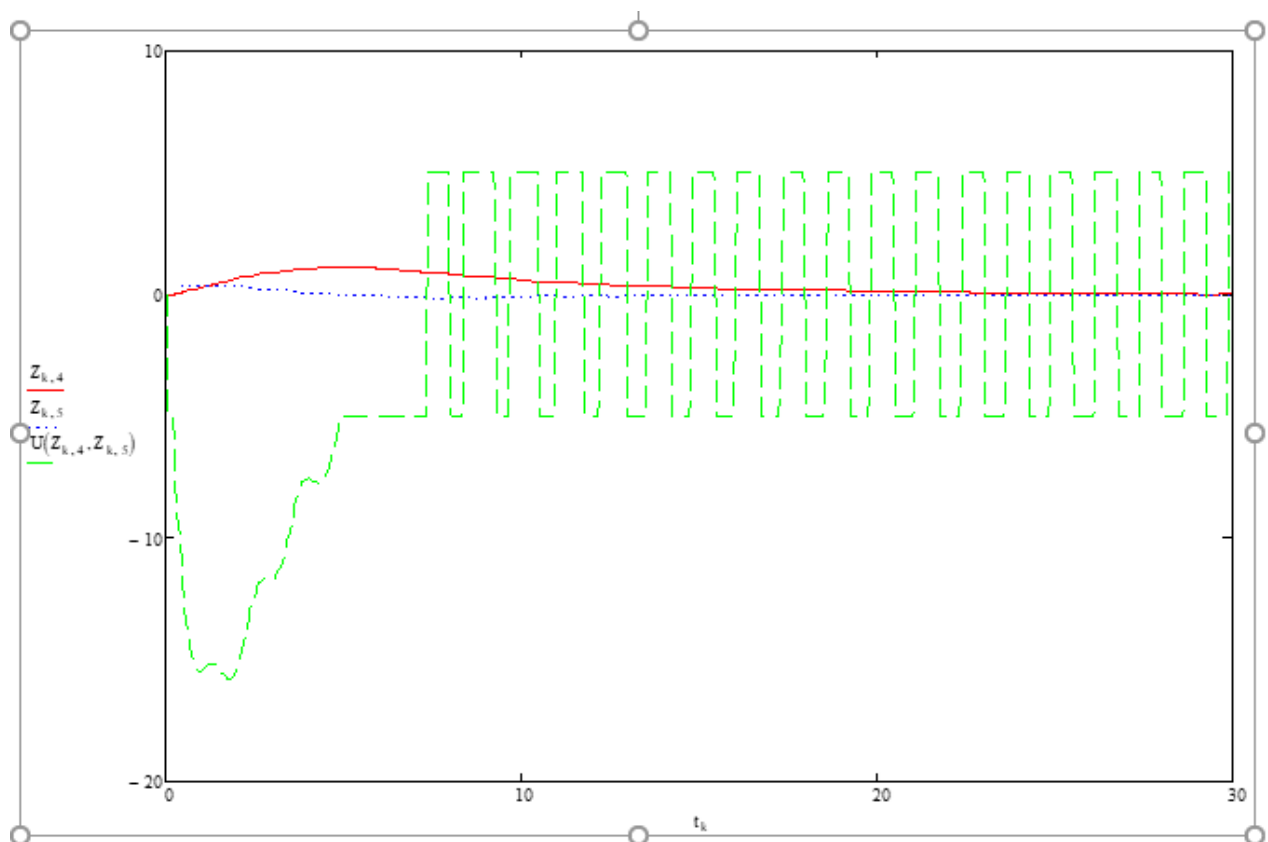


Рис. 5 – Характерное поведение показателей состояния системы и управления $U(Z_{k,4}, Z_{k,5})$, $Z_{k,4} = \psi(t_k)$, $Z_{k,5} = \dot{\psi}(t_k)$.

В рассмотренных моделях реализация управления по входящим данным $Z_{k,4}, Z_{k,5}$ предполагает их абсолютную точность и мгновенность управляющего воздействия. Реальные управляющие системы работают с неточными (измеренными) входными данными и неустраняемым запаздыванием. Необходимы математические модели с учетом указанных реальных погрешностей для упреждающей (интеллектуальной) компенсации их влияния.

Выводы. 1. Теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) не нашла широкого использования в инженерной практике из-за сложного выбора весовых коэффициентов аддитивного интегрального квадратичного функционала удовлетворяющих системе ограничений для замкнутой системы стабилизации. Трудности возникают и в связи с необходимостью непрерывного измерения всех компонент вектора состояния объекта стабилизации. Возникает необходимость привлечения эффективных численных методов оптимизации в задачах управления. Известные методы Хука-Джевса и Нелдера-Мида не всегда эффективны при поиске глобального минимума функционала цели.

2. Рассматриваемый в статье алгоритм комбинированного метода параметрического синтеза стабилизатора управляемого объекта предусматривает целенаправленный выбор значений коэффициентов аддитивного функционала его качества. Используются не все компоненты вектора состояния объекта, а лишь «главные» - существенно важные для его динамики. Комбинация методов сеток Соболя и Нелдера-Мида с дальнейшим уточнением на линеаризованной задаче точки глобального минимума позволяет настроить стабилизатор на необходимые показатели.

3. Рассмотренный пример синтеза стабилизатора для управляемой системы демонстрирует возможность приближенного решения поставленной задачи оптимального управления с достаточной точностью.

Список литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. – СПб. : Профессия, 2003. – 703 с.
2. Летов А. М. Динамика полета и управления. – М. : Наука, 1969, – 312 с.
3. Салуквадзе М. Е. Об оптимизации векторных функционалов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №9. – С. 5 – 15.
4. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – К. : Наукова Думка, 1992. – 160 с.
5. Воронин А. Н., Зиятдинов Ю. К., Козлов А. И., Чабанюк В. С. Векторная оптимизация динамических систем. – К. : Техніка, 1999, – 284 с.
6. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Выбор оптимизируемого функционала в задачах параметрического синтеза систем стабилизации // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2004. – №2. – С. 23 – 26.
7. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Метод главных координат в теории стабилизируемых систем // Проблемы управления и информатики. – 2017. – №2. – С. 65 – 75.
8. Aleksandrov Ye. Ye., Aleksandrova T. Ye. The Method of Main Coordinate in the Theory of Parametric Synthesis of the Linear Stabilized System // Journal Automation and Information Sciences. – 2017. – № 49(3). – P. 34 – 45.
9. Александров Е. Е., Александрова Т. Е., Северин В. П. Основы современной теории управления. – Х. : ХНАДУ, 2019. – 324 с.
10. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. – М. : Наука, 1973. – 311 с.
11. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М. : Физматгиз, 1962. – 883 с.
12. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М. – Л. : ГИТЛ, 1952. – 432 с.
13. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М. : Мир, 1975. – 534 с.
14. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Параметрический синтез цифрового стабилизатора космической ступени ракеты-носителя с жидкостным двигателем на активном участке траектории полета // Проблемы управления и информатики. – 2020. – № 3. – С. 80 – 92.
15. Aleksandrov Ye. Ye., Aleksandrova T. Ye., Morgun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – № 6/9(102). – P. 39 – 45.

References (transliterated)

1. Bessekersky V. A., Popov E. P. *Teoriya system avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automated control systems]. SanktPeterburg, Profesiya Publ., 2003. 703 p.
2. Letov A. V. *Dinamika poleta i upravleniya* [Dynamics of flight and control]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 312 p.
3. Salukvadze M. E. Ob optimizatsii vektornykh funktsionalov [On optimization of vector functionals]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics]. 1978, no. 9, pp. 5–15.
4. Voronin A. N. *Mnogokriterial'nyy sintez dinamicheskikh system* [Multicriteria synthesis of dynamical systems]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1992. 160 p.
5. Voronin A. N., Ziatdinov Yu. K., Kozlov A. I., Chabanyuk V. S. *Vektornaya optimizatsiya dinamicheskikh sistem* [Vector optimization of dynamical systems]. Kyiv, Tekhnika Publ., 1999. 284 p.
6. Aleksandrov E. E., Aleksandrova T. E. Vybory optimiziruемого funktsionala v zadachakh parametricheskogo sinteza system stabilizatsii [Choosing optimization functional in problems of stabilization systems' parametric synthesis]. *Artilleriyskoe i strelkovoe vooruzhenie* [Artillery and small arms]. 2004, no. 2, pp. 23–26.
7. Aleksandrov E. E., Aleksandrova T. E. Metod glavnnykh koordinat v teorii stabiliziruemykh system [Principal component method in the theory of stabilized systems]. *Problemy upravleniya i infomatiki* [Problems of control and informatics]. 2017, no. 2, pp. 65–75.
8. Aleksandrov Ye. Ye., Aleksandrova T. Ye. The Method of Main Coordinate in the Theory of Parametric Synthesis of the Linear Stabilized System. *Journal Automation and Information Sciences*. 2017, no. 49(3), pp. 34–45. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i3.50.

9. Aleksandrov E. E., Aleksandrova T. E., Severin V. P. *Osnovy sovremennoy teorii upravleniya* [Fundamentals of modern control theory]. Kharkov, XNAДУ Publ., 2019. 324 p.
10. Sobol' I. M. *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Monte Carlo numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 311 p.
11. Pugachev V. S. *Teoriya sluchaynykh funktsiy i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* [Incidental function theory and its application to automated control problems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 883 p.
12. Malkin I. G. *Teoriya ustoychevosti dvizheniya* [Theory of stability of motion]. Moscow – Leningrad, GITL Publ., 1952. 432 p.
13. Khimmel'blau D. *Prikladnoye nelineynoye programmirovaniye* [Applied non-linear programming]. Moscow, Mir Publ., 1975. 534 p.
14. Aleksandrov E. E., Aleksandrova T. E. Parametricheskii sintez tsifrovogo stabilizatora kosmicheskoy stupeni rakety-nositelya s zhidkosnym dvigatelem na aktivnom uchastke traektorii poleta [Parametric synthesis of digital stabilizer for space stage of launch vehicle with liquid-fueled engine on active part of flight trajectory]. *Problemy upravleniya i infomatiki* [Problems of control and informatics]. 2020, no. 3, pp. 80–92.
15. Aleksandrov Ye. Ye., Aleksandrova T. Ye., Morgun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, no. 6/9(102), pp. 39–45. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.188185.

Поступила (received) 15.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Александров Євген Євгенович – доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії, заслужений діяч науки і техніки України, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 625-68-40; e-mail: alexandrov.ye.ye@gmail.com.

Александров Евгений Евгеньевич – доктор технических наук, профессор, лауреат Государственной премии, заслуженный деятель науки и техники Украины, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 625-68-40; e-mail: alexandrov.ye.ye@gmail.com.

Aleksandrov Yevgen Yevgenovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Laureate of State Prize, Honoured Scientist and Engineer of Ukraine, Kharkov National Automobile and Highway University demy, Kharkiv; tel.: (050) 625-68-40; e-mail: alexandrov.ye.ye@gmail.com.

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Ванин Виктор Антонович – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Александрова Тетяна Євгенівна – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 079-50-00; e-mail: alexandrov.t.ye@gmail.com.

Александрова Татьяна Евгеньевна – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (097) 079-50-00; e-mail: alexandrov.t.ye@gmail.com.

Aleksandrova Tetyana Yevgenivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (097) 079-50-00; e-mail: alexandrov.t.ye@gmail.com.

Ванін Борис Вікторович – інженер, Robocode, м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Ванин Борис Викторович – инженер, Robocode, г. Харьков; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Boris Viktorovich – engineer, Robocode, Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

ВЫДЕЛЕНИЕ УПРУГОЙ, ВЯЗКОЙ И ИНЕРЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ИЗ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННОЙ К ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматривается механическая система, состоящая из прямоугольной пластины, опертой по контуру, и дополнительной вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик. Влияние характеристик дополнительной опоры на деформированное состояние пластины исследуется с помощью оригинального подхода для разделения упругой, вязкой и инерционной составляющих из общей реакции. Предполагается, что пластина имеет прямоугольную форму, среднюю толщину и является изотропной и упругой. Используются уравнения деформирования пластины в рамках гипотез Тимошенко. Колебания пластины вызваны приложением внешнего нестационарного нагружения. Влияние дополнительной опоры заменяется действием трёх неизвестных независимых нестационарных сосредоточенных сил. В работе приведены основные аналитические соотношения для получения системы трёх интегральных уравнений Вольтерра. Полученная система решается численно-аналитически. После выполнения дискретизации по времени система интегральных уравнений преобразуется в систему матричных уравнений. Полученная система матричных уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера для блочных матриц и метода регуляризации А. Н. Тихонова. Укажем, что изложенный подход применим и для других объектов, имеющих дополнительные опоры (балки, пластины и оболочка, которые могут иметь различное опирание по контуру и разные формы в плане). Приведены результаты вычислений по определению составляющих (вязкой, упругой и инерционной) полной реакции на пластину, возникающей из-за наличия дополнительной опоры. Достоверность предлагаемого подхода подтверждается совпадением результатов сопоставления реакций, найденных двумя методами: численно-аналитическим для одной полной реакции и численным для суммарной реакции (полученной, сложением трех составляющих).

Ключевые слова: нестационарные колебания, прямоугольная пластина средней толщины, дополнительная вязкоупругая опора, массово-инерционные характеристики, сосредоточенная масса, интегральное уравнение Вольтерра.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

ВИДІЛЕННЯ ПРУЖНОЇ, В'ЯЗКОЇ ТА ІНЕРЦІЙНОЇ СКЛАДОВИХ З ПОВНОЇ РЕАКЦІЇ ДОДАТКОВОЇ ОПОРИ, ПРИЄДНАНОЇ ДО ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглядається механічна система, яка складається з прямокутної пластини, опертої по контуру та додаткової в'язкопружної опори з урахуванням її масово-інерційних характеристик. Вплив характеристик додаткової опори на деформований стан пластини досліджується за допомогою оригінального підходу для поділу пружної, в'язкої та інерційної складових із повної реакції. Передбачається, що пластина має прямокутну форму, середню товщину, а також є ізотропною і пружною. Використовуються рівняння деформування пластини в рамках гіпотез Тимошенко. Коливання пластини викликані прикладенням зовнішнього нестационарного навантаження. Вплив додаткової опори замінюється дією трьох невідомих незалежних нестационарних зосереджених сил. У роботі наведені основні аналітичні співвідношення для отримання системи трьох інтегральних рівнянь Вольтерра. Отримана система розв'язується чисельно-аналітично. Після виконання дискретизації за часом система інтегральних рівнянь перетворюється в систему матричних рівнянь. Отримана система матричних рівнянь розв'язується з використанням узагальненого алгоритму Крамера для блокових матриць і методу регуляризації А. М. Тихонова. Зазначимо, що викладений підхід може бути застосовано і для інших об'єктів, що мають додаткові опорні (балки, пластини і оболонки, які можуть мати різне опирання по контуру і різні форми в плані). Наведено результати обчислень по визначенню складових (пружної, в'язкої та інерційної) повної реакції на пластину, що виникає внаслідок наявності додаткової опори. Достовірність запропонованого підходу підтверджується збігом результатів зіставлення реакцій, знайдених двома методами: чисельно-аналітичним для однієї повної реакції і чисельним для сумарної реакції (отриманої, складанням трьох складових).

Ключові слова: нестационарні коливання, прямокутна пластина середньої товщини, додаткова в'язкопружна опора, масово-інерційні характеристики, зосереджена маса, інтегральне рівняння Вольтерра.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV

EXTRACTION OF ELASTIC, VISCOUS AND INERTIAL COMPONENTS FROM THE TOTAL REACTION OF AN ADDITIONAL SUPPORT ATTACHED TO A RECTANGULAR PLATE

The paper deals with a mechanical system consisting of a hinged rectangular plate and an additional viscoelastic support with considering its mass-inertia. The impact of the characteristics of additional support on the plate strained state is studied by an original approach of extracting elastic, viscous and inertial components from the total reaction. The plate is assumed to be medium thickness, elastic and isotropic. The Timoshenko hypothesis is used for deformation equations. The external non-stationary force initiates plate vibrations. The impact of the additional support is replaced by the action of three unknown independent non-stationary concentrated forces. The basic formulas for deriving system of three Volterra integral equations are proposed. The system is then solved by numerical and analytical method. By discretizing in time the system of Volterra integral equations is reduced to a system of matrix equations. The system of matrix equations is solved with using generalized Kramer's algorithm for block matrices and Tikhonov's regularization method. Note that the approach proposed is applicable for other objects with additional supports, such as beams, plates and shells having various boundary contour and boundary supporting. The results of computing elastic, viscous and inertial components of total reactions on the plate are given. The approach proposed is verified by matching the results of computations by two different methods, namely numerical and analytical for one total reaction and numerical for the total reaction obtained by adding elastic, viscous and inertial components.

Key words: non-stationary vibrations, medium thickness rectangular plate, additional viscoelastic support, mass-inertial characteristics, concentrated mass, Volterra integral equation.

Введение и постановка задачи. При необходимости повысить жесткость, прочность или несущую способность конструкций используются *дополнительные опоры*. Также опоры и демпферы могут применяться с целью уменьшения амплитуд перемещений или гашения колебаний, в задачах виброзащиты, а также управления напряженно-деформированным состоянием. Во многих литературных источниках описано деформирование

подпертых элементов конструкций с использованием абсолютно жестких дополнительных опор или ребер жесткости. В реальности дополнительные опоры имеют вязкоупругие, а также инерционные свойства, то есть имеют вязкую, упругую и инерционную составляющие.

Существует значительное количество работ, в которых рассматриваются прямые постановки задач для конструкций с учетом инерционных характеристик объектов. Так в монографии [1] рассматривается влияние подвижной массы на балку и тонкую прямоугольную пластину, лежащую на упругом основании. В статье [2] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием *метода Ньютона* и *итерационных схем* для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор. В работе [3] представлены решения прямой и обратной задач для балок с дополнительными опорами, однако учитываются только упругие их характеристики.

Исследование вязкоупругих характеристик опор при динамическом взаимодействии моста и подвижного состава приведены в [4]. В статье [5] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с *дискретным динамическим гасителем* с использованием метода конечных элементов. В [6] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы.

Данная статья является продолжением исследований *нестационарного деформирования механических систем*, состоящих из балок и пластин, которые, кроме основного опирания по контуру, имеют дополнительные сосредоточенные опоры. В предыдущих работах [7 – 9] приведены решения прямых и обратных задач для пластин с дополнительной вязкоупругой опорой. В статье [7] описаны возможные постановки обратных задач, а также приведено решение одной обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой. В работе [8] основное внимание посвящено учету массово-инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при моделировании, а в статье [9] предложен метод разделения реакции вязкоупругой опоры на вязкую и упругую составляющие.

В случае, когда при решении задачи приоритетом является определение внешнего возмущающего воздействия во времени $P(t)$, методика, описанная в работе [8], демонстрирует достаточно высокую эффективность. В указанных задачах (рис. 1, а) влияние вязкоупругой опоры, заменялось одной реакцией:

$$R_i(t) = m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dw(t)}{dt} + c \cdot w(t), \quad (1)$$

что позволяло определить ее в результате решения соответствующей прямой или обратной задачи.

Выражение для прогиба в точке приложения полной реакции вязкоупругой опоры с учетом её массы будет:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \text{ где } K_{fi}(t) = \frac{1}{m_i} \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i t}{2m_i}} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t).$$

Укажем, что $K_{fi}(t)$ – конечно-разностное ядро интеграла типа свёртки, учитывающее вязкие, упругие и массово-инерционные характеристики дополнительной опоры в i -й точке, а $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – собственная частота, соответствующая i -й дополнительной вязкоупругой опоре с учетом её массы.

Однако для задач, связанных с идентификацией параметров вязкоупругой опоры (жесткости, вязкости и массы), или при оптимальном проектировании дополнительных опор, снижающих амплитуды прогибов, определение полной реакции недостаточно. Необходимо знать отдельно влияние вязкой и упругой, а также инерционной составляющих реакции. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу в следующей постановке: пусть прямоугольная пластина имеет две независимые дополнительные опоры – вязкую (*демпфирующую*) и линейно-упругую, которые приложены в двух разных точках (рис. 1, б), а также к пластине присоединена сосредоточенная масса, вес которой равен весу дополнительной вязкоупругой опоры. Считается, что точка D с координатами проекции в срединной плоскости пластины (x_D, y_D) – это место контакта с демпфером, действие которого заменяется реакцией $R_D(t) = \kappa \cdot dw(x_D, y_D, t)/dt$, точка C с координатами (x_C, y_C) – место контакта с линейно-упругой дополнительной опорой (своего рода жесткой пружиной), реакция которой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$, а точка M с координатами (x_M, y_M) – место присоединения сосредоточенной массы. При решении задачи предполагается, что точки C , D и M не совпадают, то есть, получены аналитические соотношения для общего случая – пластины с дополнительной линейно-упругой и линейно-вязкой опорой, а также присоединённой сосредоточенной массой. Хотя с точки зрения механики, если точки расположены на небольшом расстоянии, то в силу принципа суперпозиции совместное воздействие вязкой и линейно-упругой опор, а также сосредоточенной массы эквивалентно действию вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик:

$$R(t) = R_M(t) + R_D(t) + R_C(t).$$

Вычислительные эксперименты показали, что полученное решение оказалось справедливо и для частного случая, когда координаты точек C , D и M совпадают, поскольку разрешающая система уравнений получилась невырожденной.

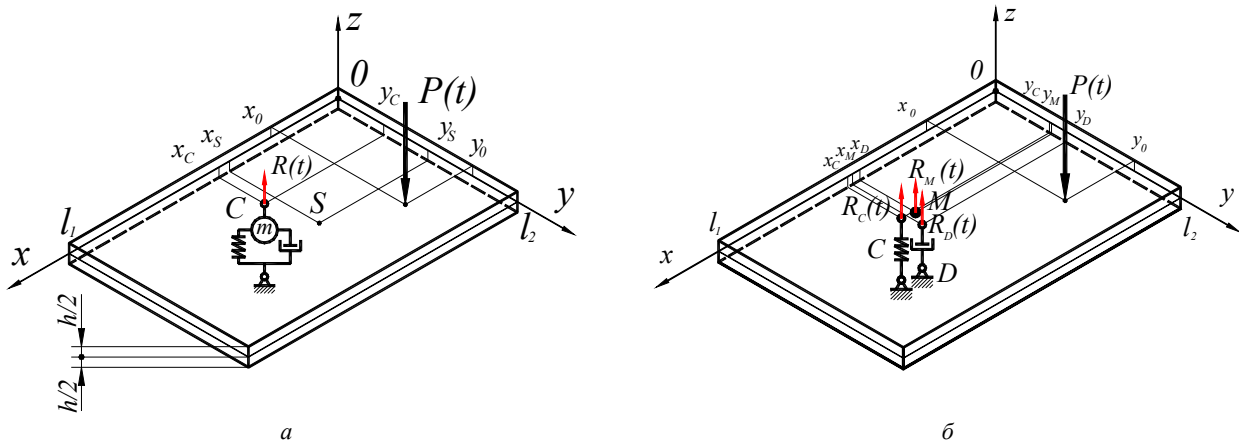


Рис. 1 – Схема нагружения:

a – пластина с дополнительной вязкоупругой опорой; *б* – пластина с независимыми дополнительными опорами.

Прямая задача. Выражение для прогиба пластины в случае, когда на неё действует несколько независимых поперечных нагрузок ($P_i(t)$, $i \in \overline{1, N}$), приведенное, например, в [10], имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x, y, t - \tau) \cdot P_i(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – разностное ядро интегрального уравнения, типа свертки, для i -той нагрузки в точке пластины с координатами (x, y) . Методы получения ядер и их вид также описаны в [10].

На основе (2) можно записать следующие выражения для точек контакта с демпфером (x_D, y_D) , линейно-упругой дополнительной опорой (x_C, y_C) и сосредоточенной массой (x_M, y_M) :

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_{PC}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CC}(t - \tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CD}(t - \tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CM}(t - \tau) \cdot R_M(\tau) d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t K_{PD}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DC}(t - \tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DD}(t - \tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DM}(t - \tau) \cdot R_M(\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t K_{PM}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MC}(t - \tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MD}(t - \tau) \cdot R_D(\tau) d\tau - \int_0^t K_{MM}(t - \tau) \cdot R_M(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (3)$$

где $P(t)$ – внешняя возмущающая нестационарная нагрузка; $K_{ij}(t)$ – ядра, записанные для конкретной i -той нагрузки в j -той точке, вид которых будет приведен ниже; $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ – соответствующие реакции в точках контакта с массой, демпфером и линейно-упругой опорой.

Укажем, что реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$, действующие со стороны дополнительных опор и массы на пластину, считались условно отрицательными (взяты в выражениях (3) со знаком минус), действия со стороны пластины на массу, демпфер и пружину считались равными по величине, но условно положительными (для удобства записи):

$$R_M(t) = +m \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2}, \quad R_D(t) = +\kappa \cdot \frac{dw(x_D, y_D, t)}{dt} \quad \text{и} \quad R_C(t) = +c \cdot w(x_C, y_C, t). \quad (4)$$

Из соотношений (4) для прогибов в точках (x_M, y_M) , (x_D, y_D) и (x_C, y_C) можно получить следующие выражения:

$$w(x_M, y_M, t) = \frac{1}{m} \int_0^t R_M(\tau) (t - \tau) d\tau, \quad w(x_D, y_D, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t R_D(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad w(x_C, y_C, t) = \frac{1}{c} R_C(t). \quad (5)$$

Если считать, что возмущающая сила, а также реакции дополнительных опор и массы являются сосредоточенными нагрузками, то соответствующие ядра $K_{ij}(t)$ в интегралах свертки для шарнирно-опертой пластины средней толщины типа С. П. Тимошенко будут иметь вид:

$$K_{ij}(t) = C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin \omega_{1kn}(t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_i}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_i}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_j}{l_2}\right), \quad (6)$$

где l_1 и l_2 – длина и ширина пластины, м; h – толщина пластины, м; (x_i, y_i) – координаты точки, в которой прикладывается i -тая нагрузка, а (x_j, y_j) – это координаты j -той точки, в которой определяется изменение прогиба во времени,

$$C = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right); \quad c_T^2 = \frac{G'}{\rho}; \quad c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}; \quad E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{\left(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4}, \quad \Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1kn}};$$

$$\Omega_{2kn} = \omega_{2kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2kn}};$$

E – модуль упругости материала пластины; ρ – плотность; ν – коэффициент Пуассона; G' – приведенный модуль сдвига $G' = k' \cdot G$ (отметим, что k' – коэффициент сдвига, подробные сведения о котором приведены в [11]).

Укажем, что ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \Delta_{kn})} \quad \text{и} \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \Delta_{kn})}.$$

В случае, когда нагрузка $P(t)$ известна, систему интегральных уравнений (3) относительно неизвестных сил $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ можно дополнить выражениями в точках контакта (5). Исключим из уравнений прогибы и перенесем известные слагаемые в правую часть:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t K_{CM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau + \int_0^t K_{DM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{MC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{MD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t K_{MM}(t-\tau) \cdot R_M(\tau) d\tau + \frac{1}{m} \int_0^t R_M(\tau)(t-\tau) d\tau = \int_0^t K_{PM}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Для решения системы интегральных уравнений (7) была выполнена дискретизация по времени ($\Delta t = T / J$, где T – исследуемый промежуток, а J – число шагов дискретизации) методом частичного интегрирования. То есть на малых дискретных участках времени сила $P(t) = P(j \cdot \Delta t) = P_j$, а также реакции $R_C(j \cdot \Delta t)$, $R_D(j \cdot \Delta t)$ и $R_M(j \cdot \Delta t)$ считались условно постоянными. В результате получена следующая система матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{CD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{CM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PC} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{DC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{DM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PD} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{MC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{MD} \cdot \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MM} \cdot \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PM} \cdot \mathbf{P}, \end{cases} \quad (8)$$

где матрицы \mathbf{A}_{PC} , \mathbf{A}_{PD} , \mathbf{A}_{PM} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{PC}(t-\tau)$, $K_{PD}(t-\tau)$ и $K_{PM}(t-\tau)$, элементы которых могут быть найдены в виде $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, как значения дискретно проинтегрированного ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau) d\tau.$$

Укажем, что систему матричных уравнений (8) можно представить в виде блочной матрицы.

Матрицы \mathbf{A}_{ij} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{ij}(t-\tau)$ при $i \neq j$.

В случае, когда $i = j$ матрицы \mathbf{A}_{ii} , находящиеся на главной диагонали блочной матрицы, модифицируются с учетом особенности (для дополнительной упругой и вязкой опоры, а также сосредоточенной массы).

Матрица \mathbf{A}_{CC} эквивалентна выражению:

$$\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}_{CC}^* + \frac{1}{c} \mathbf{E},$$

где матрица \mathbf{A}_{CC}^* соответствует частично проинтегрированному ядру $K_{CC}(t-\tau)$, а \mathbf{E} – единичная матрица.

Матрица \mathbf{A}_{DD} соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] \cdot R_D(\tau) d\tau .$$

Матрица \mathbf{A}_{MM} соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{MM}(t-\tau) + \frac{t-\tau}{m} \right] \cdot R_M(\tau) d\tau .$$

Система (8) решается с использованием *обобщенного алгоритма Крамера* для блочных матриц [12] и регуляризирующего *алгоритма А. Н. Тихонова* [13]. В результате решения (8) определяются \mathbf{R}_C , \mathbf{R}_D и \mathbf{R}_M , являющиеся дискретными аналогами неизвестных независимых реакций $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l_1 = 0.6 \text{ м}$; $l_2 = 0.4 \text{ м}$. Коэффициент жесткости дополнительной опоры $c = 10^8 \text{ Н/м}$, коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; величина массы опоры $m = 5 \text{ кг}$. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 . Укажем, что коэффициент жесткости c был принят таким, чтобы его величина была сопоставима с жесткостью исходной пластины, а остальные параметры дополнительной опоры (κ и m) такими, чтобы величины реакций $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ были одного порядка.

Далее приведено два расчета:

1) *тестовый случай*, когда координаты всех точек совпадали с центром пластины, то есть предполагалось, что внешняя возмущающая нагрузка приложена в центре пластины к верхней лицевой поверхности, а дополнительная опора установлена в этой же точке (строго под ней), только присоединена к нижней лицевой поверхности. Координаты точки имеют значения: $x_0 = 0.3 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$;

2) *расчетный случай*, когда все точки специально не совпадают:

– координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$;

– координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_{CD} = 0.2 \text{ м}$, $y_{CD} = 0.2 \text{ м}$;

– координаты точки, в которой исследовалось изменение прогиба пластины: $x_S = 0.3 \text{ м}$, $y_S = 0.2 \text{ м}$.

На рис. 2 показаны схемы нагружения в плане для первого и второго случаев: \times – точка приложения возмущающей нагрузки; \bullet – точка присоединения дополнительной опоры; \square – точка установки датчика прогиба.

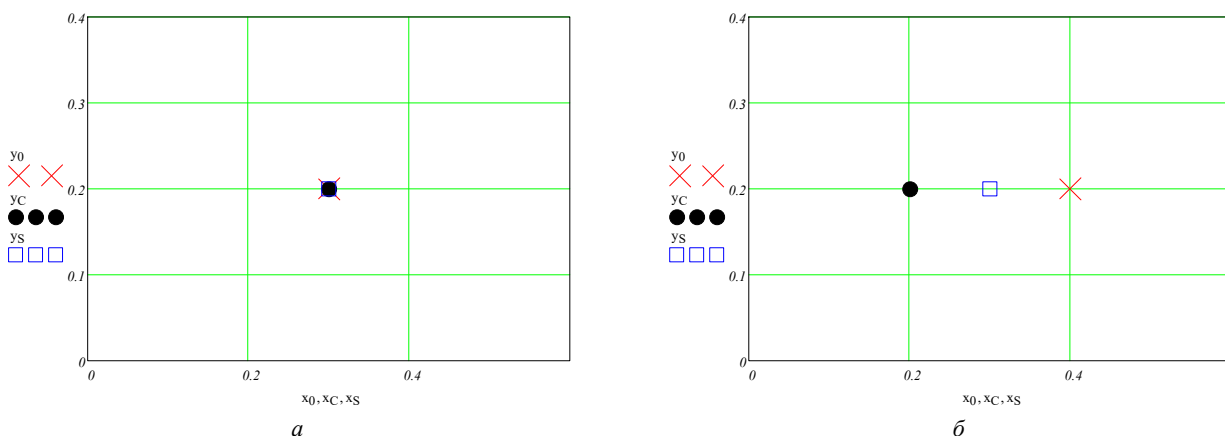


Рис. 2 – Схема нагружения пластины в плане.

На рис. 3 показаны результаты вычислений для первого случая. Составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой, определенные в результате численно-аналитического решения системы интегральных уравнений (7), приведены на рис. 3, а:

1-я кривая – упругая составляющая $R_C(t)$;

2-я кривая – вязкая составляющая $R_D(t)$;

3-я кривая – инерционная составляющая $R_M(t)$.

Для удобства анализа на рис. 3, б показаны те же составляющие $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ (их графики полностью идентичны рис. 3, а), а также добавлена суммарная реакции вязкоупругой опоры $R_{\Sigma}(t) = R_C(t) + R_D(t) + R_M(t)$ – она показана чёрной жирной кривой.

На рис. 4, *a* показаны две кривые, соответствующие полной реакции вязкоупругой опоры с учётом массы $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$. Укажем, что $R_{\Sigma}(t)$ – суммарная реакция, которая также приведена выше рис. 3, *a*, получена численно, а $R_f(t)$ – это реакция именно вязкоупругой опоры (1), вычисленная согласно методике, описанной в работе [7], она получена численно-аналитически. На рис. 4, *б* кроме кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ (что и на рис. 4, *a*), показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды), что позволяет оценить абсолютное отличие кривых, полученных разными методами. Укажем, что незначительное расхождение кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ на рис. 4, *a* можно объяснить разностью методов, а именно, кривая $R_f(t)$, полученная численно-аналитическим методом, является более точной, а суммарная реакция $R_{\Sigma}(t)$, полученная сложением трёх составляющих, является некоторым усреднением, и поэтому кажется сглаженной относительно $R_f(t)$. Близость кривых $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ доказывает правильность решения и возможность использования любого из двух методов для определения реакции вязкоупругой опоры с учётом её массово-инерционных характеристик.

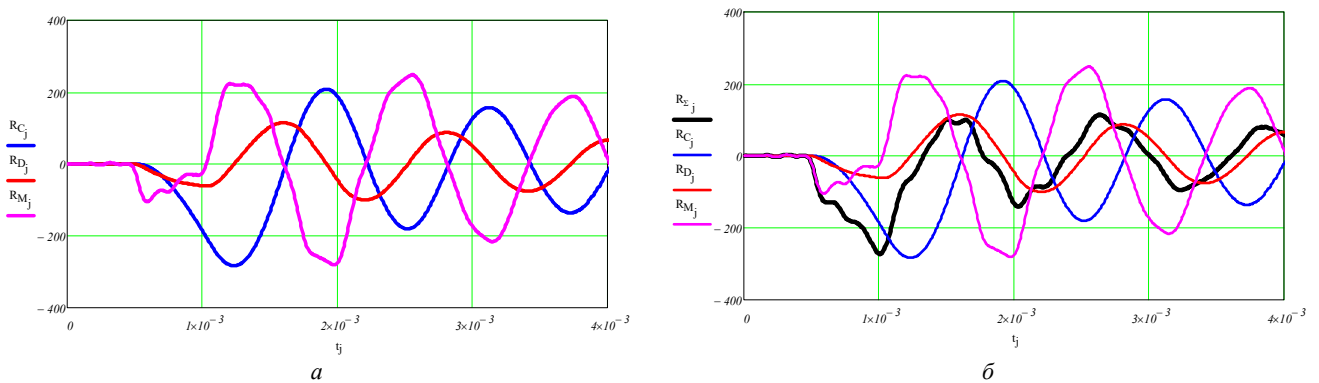


Рис. 3 – Реакция вязкоупругой опоры:
a – составляющие реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$; *б* – составляющие реакции и суммарное воздействие $R_{\Sigma}(t)$.

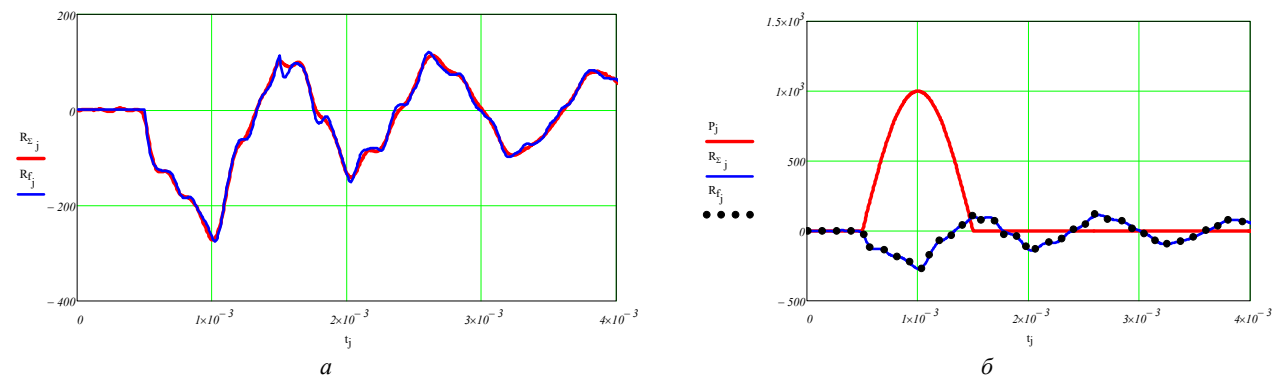


Рис. 4 – Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами:
a – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$; *б* – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ дополненные внешней возмущающей силой $P(t)$.

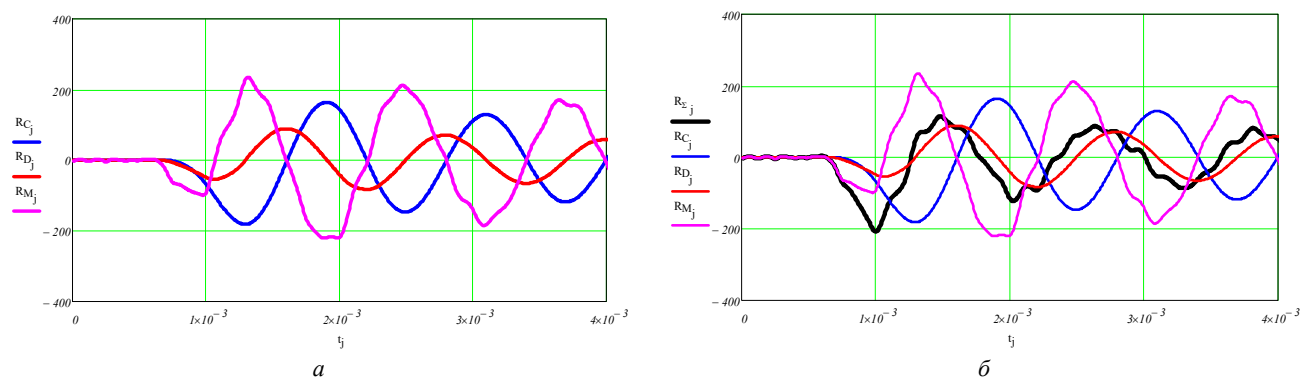


Рис. 5 – Реакция вязкоупругой опоры:
a – составляющие реакции $R_C(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$; *б* – составляющие реакции и их суммарное воздействие $R_{\Sigma}(t)$.

На рис. 5 – 7 показаны результаты вычислений для второго случая.
Описание рис. 5 – 6 полностью идентично описанию рис. 3 – 4 соответственно.

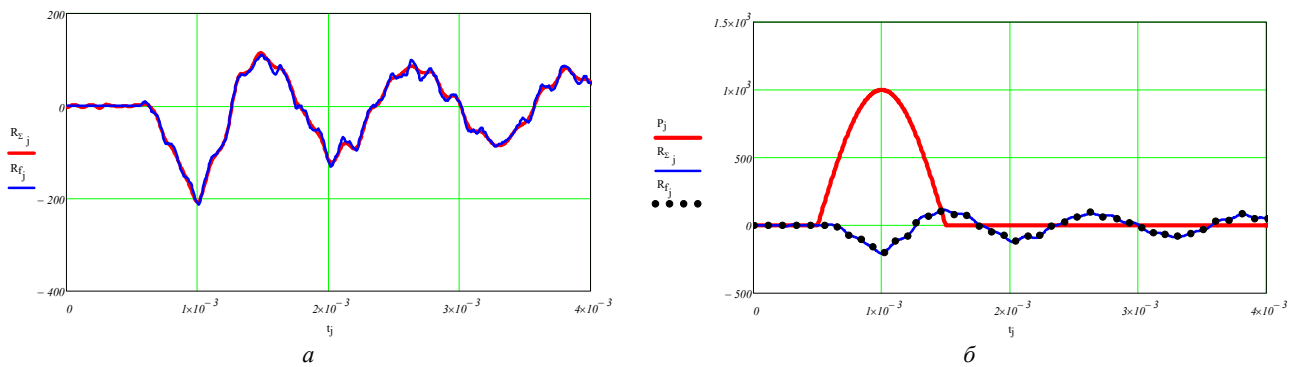


Рис. 6 – Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами:
а – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$; б – реакции $R_{\Sigma}(t)$ и $R_f(t)$ дополненные внешней возмущающей силой $P(t)$.

Изменение прогибов пластины в некоторой точке S с координатами (x_S, y_S) показано на рис. 7.

Причем на рис. 7, а показано 3 кривых:

- $w_{PS}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только внешней возмущающей нагрузки $P(t)$;
- $w_{Rf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$, как будто это действовала внешняя возмущающая сила с законом изменения как у $R_f(t)$;
- $w_{\Sigma Sf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное совместным действием реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$ и внешней возмущающей силы $P(t)$ – реальное изменение прогиба пластины с дополнительной опорой.

На рис. 7, б показано 4 кривых:

- $w_{Rf}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием только реакции вязкоупругой опоры $R_f(t)$ – вторая кривая рис. 7, а,
- а также три составляющие этого прогиба, вызванные отдельно упругой, вязкой и инерционной составляющими:
- $w_{Rc}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_C(t)$;
- $w_{Rd}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_D(t)$;
- $w_{Rm}(t)$ – изменение прогибов пластины в точке S , вызванное действием $R_M(t)$.

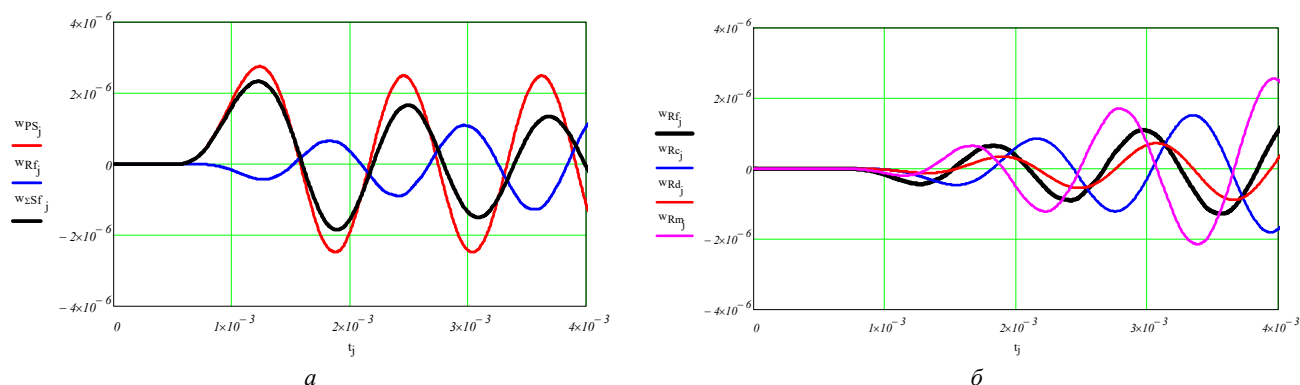


Рис. 7 – Изменение прогибов пластины в точке с координатами (x_S, y_S) :
а – кривые $w_{PS}(t)$, $w_{Rf}(t)$, $w_{\Sigma Sf}(t)$; б – показано кривые $w_{Rf}(t)$, $w_{Rc}(t)$, $w_{Rd}(t)$, $w_{Rm}(t)$.

Указанные кривые позволяют оценить отдельный вклад каждой из составляющих реакции дополнительной опоры в изменение прогиба и на колебательный процесс в целом. Однако приведенные результаты справедливы только для конкретного расчетного случая, и их обобщение возможно только качественно. Для количественных

выводов необходимо выполнять отдельный расчет для каждого конкретного случая.

Перспективы дальнейших исследований. Во первых, изложенный в работе подход целесообразно распространить кроме пластин на другие «несущие» объекты типа балок и оболочек, для которых выполнить аналогичные вычислительные эксперименты и подтвердить возможность обобщения и эффективность, если таковая будет иметь место.

Поскольку появилась возможность достаточно детально учитывать влияние дополнительной вязкоупругой опоры, а также её массово-инерционные характеристики, авторы считают, что в дальнейших работах необходимо исследовать в первую очередь внутренние резонансные явления, которые могут возникнуть при совпадении собственной частоты дополнительной опоры $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ с собственными частотами «несущего» объекта (в данном случае – прямоугольной пластины средней толщины).

Также вызывает определенный интерес при развитии описанной модели возможность учета более сложного контура опирания, например, не «чистый» прямоугольный контур, а прямоугольный, имеющий скругления по углам или овальный.

Актуальным является приближение к реальности не только при моделировании дополнительной опоры, но и основного опирающего контура, так как в технике не часто встречаются закрепления, соответствующие шарнирному или свободному опиранию (это механические идеализации). Так по аналогии с дополнительными реакциями, которые прикладываются к пластине вместо дополнительной опоры, можно приложить дополнительные нагрузки, моделирующие, например, трение в основном опорном контуре.

Перспективными будут являться исследования, связанные с учетом диссипации энергии в самом материале пластины, так как реальные конструкционные материалы [14] зачастую обладают вязкоупругими свойствами.

Выводы. В работе описан оригинальный подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде трёх неизвестных независимых нестационарных сил – упругой, вязкой и инерционной составляющих реакции между пластиной и дополнительной опорой. Достоверность предлагаемого подхода подтверждается путем совпадения результатов сопоставления реакций, найденных двумя методами: численно-аналитически для одной полной реакции, как в работе [7], и численно – суммарной (сложением трех составляющих).

Описанный подход позволяет получать устойчивые численно-аналитические решения для задач нестационарного деформирования пластины с дополнительной опорой.

Методика решения прямой задачи по аналогии с работой [9] может быть обобщена и на обратные задачи идентификации неизвестных нагрузок, вызывающих нестационарное деформирование пластины с дополнительной вязкоупругой опорой.

Список литературы

1. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
2. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
3. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. О., Гришакин В. Т. Розв’язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S. J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations // Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME. – 2021. – Vol. 143. – Issue 5. – Article num. 051003. DOI:10.1115/1.4049374.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // Journal of Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43. – P. 1513 – 1533. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.001.
6. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // Journal of Sound & Vibration. – 2007. – № 300(1–2). – P. 250 – 264. DOI:10.1016/j.jsv.2006.08.015.
7. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета «ХПИ». Серия : Динамика и прочность машин. – X. : НТУ «ХПИ», 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
8. Воропай А. В., Егоров П. А. Учёт влияния массово-инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при нестационарном деформировании прямоугольной пластины // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – X: НТУ «ХПИ», 2020. – № 1. – С. 15 – 23. DOI: 10.20998/2222-0631.2020.01.02.
9. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2016. – №16 (1188). – С. 16 – 22. – Бібліогр. : 7 назв. – ISSN 2222-0631.
10. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
11. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.

13. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – С 200 с.
14. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К. : Наукова думка, 1971. – 375 с.

References (transliterated)

1. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruyemykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Vibration of deformable systems under the pulse and travelling loading]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
2. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. *Kolebaniya mnogopropyetnykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke* [Vibrations of multispan beams on elastic support under travelling loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
3. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernenykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyrannyam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
4. Li H., Gomez D., Dyke S. J., Xu Z., Dai J. Investigating Coupled Train-Bridge-Bearing System under Earthquake-and Train-Induced Excitations. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*. 2021, vol. 143, Issue 5, Article num. 051003. DOI:10.1115/1.4049374
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2005, vol. 43, pp. 1513–1533. DOI:10.1016/j.tws.2005.07.001
6. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor. *Journal of Sound & Vibration*. 2007, no. 300(1–2), pp. 250–264. DOI:10.1016/j.jsv.2006.08.015
7. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyazkouprugoy oporoy [Inverse problem in nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik NTU «KhPI». Seriya : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
8. Voropay A. V., Egorov P. A. Uchiet vliyaniya massovo-inertsionnoy kharakteristiki dopolnitel'noy vyazkouprugoy opory pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny [The influence of mass and inertial characteristics of an additional viscoelastic support in the nonstationary deforming of a rectangular plate]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 1, pp. 15–23. DOI: 10.20998/2222-0631.2020.01.02
9. Voropay A. V. Raspredelenie vyazkoy i uprugoy sostavlyayushchikh v reaktsii dopolnitel'noy vyazkouprugoy opory, kontaktiruyushhey s plastynoy [Distribution of viscous and elastic components of the reaction of additional viscoelastic support in contact with plate]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 16–22.
10. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yanchevskiy I. V., Sharapata A. S. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Loading Identification in Solid Pulse Deforming. Monograph in 2 parts. Part]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 212 p.
11. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdukh deformiruyemykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
12. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry Publ., 1967. 576 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushchiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.
14. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. *Vibroproshchayushchiye svoystva konstruksionnykh materialov* [Vibro-absorbing properties of structural materials]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 375 p.

Поступила (received) 29.09.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Егоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Sciences Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

О. А. ГАЛУЗА, О. В. КОСТЮК, А. О. САВЧЕНКО, А. А. БОЙКО

КІЛЬКІСНЕ ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ КРИТЕРІЇВ КОЛІРНОЇ БЛИЗЬКОСТІ ОБ'ЄКТІВ З ВІДОМИМИ СПЕКТРАМИ

Робота присвячена проблемі порівняння об'єктів за кольором. Розглянуто таку постановку задачі: серед множини об'єктів необхідно знайти такий об'єкт, колір якого найбільш схожий на колір заданого об'єкта. При цьому вважається, що для кожного об'єкта відомий тільки його спектр (пропускання, відбиття чи випромінювання), що є вичерпною характеристикою кольору об'єкта. Крім того, вважається відомим спектр джерела випромінювання. Використання стандартних методів визначення колірних відмінностей показало, що задача немає однозначного розв'язку. Запропоновано два підходи до її вирішення: перший заснований на переході від спектру до колірних просторів з подальшим обчисленням евклідової відстані, а другий – на безпосередньому порівнянні спектрів як функціональних залежностей інтенсивності від довжини хвилі. В рамках кожного з підходів запропоновано два критерії «схожості» об'єктів за кольором, та запропоновано оригінальний підхід до оцінки ефективності цих критеріїв. Цей підхід ґрунтується на використанні експертних оцінок колірної близькості зразків скла з відомими спектрами пропускання зі стандартного набору. Для кожного зразка з набору експерти відбирали найближче за кольором скло з тих, що залишилися, після чого сформувався узагальнену думку експертів. Для отримання оцінки якості кожного з критеріїв, по кожному з них і для кожного тестового скла, решта зразків ранжувалися в порядку збільшення колірної відстані до даного досліджуваного скла. Після цього результати роботи критеріїв порівнювалися з узагальненою думкою експертів. Щоб зробити результат порівняння «нечітким», для кожного тестового скла запропоновано розглядати множину з п'яти найближчих за кольором зразків (по кожному з критеріїв). Отримано результуючі оцінки ефективності кожного з критеріїв для набору з 89 стекол та запропоновано підхід до побудови більш ефективних комплексних критеріїв.

Ключові слова: кольоровий зір, кольорова близькість об'єктів, колірні моделі, спектр, порівняння спектрів, багатокритеріальна оптимізація.

А. А. ГАЛУЗА, О. В. КОСТЮК, А. А. САВЧЕНКО, А. А. БОЙКО

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЕВ ЦВЕТОВОЙ БЛИЗОСТИ ОБЪЕКТОВ С ИЗВЕСТНЫМИ СПЕКТРАМИ

Работа посвящена проблеме сравнения объектов по цвету. Рассмотрена следующая постановка задачи: среди множества объектов необходимо найти такой объект, цвет которого наиболее похож на цвет заданного объекта. При этом предполагается, что для каждого объекта известен только его спектр (пропускания, отражения, излучения), который является исчерпывающей характеристикой цвета объекта. Кроме того, предполагается известным спектр источника излучения. Использование стандартных методов определения цветовых различий показало, что задача не имеет однозначного решения. Предложено два подхода к ее решению: первый основан на переходе от спектра к цветовым пространствам с последующим вычислением евклидова расстояния, а второй – на непосредственном сравнении спектров как функциональных зависимостей интенсивности от длины волны. В рамках каждого из подходов предложено два критерия «схожести» объектов по цвету, и предложен оригинальный подход к оценке эффективности этих критериев. Этот подход основан на использовании экспертных оценок цветовой близости образцов стекол с известными спектрами пропускания из стандартного набора. Для каждого образца из набора эксперты отбирали ближайшее по цвету стекло из оставшихся, после чего формировалось обобщенное мнение экспертов. Для получения оценки качества каждого из критериев, по каждому из них и для каждого тестового стекла, остальные образцы ранжировались в порядке увеличения цветového расстояния до данного исследуемого стекла. После этого результаты работы критериев сравнивались с обобщенным мнением экспертов. Чтобы сделать результат сравнения «нечетким», для каждого тестового стекла предложено рассматривать множество из пяти ближайших по цвету стекол (по каждому из критериев). Получены результующие оценки эффективности каждого из критериев для набора из 89 стекол и предложен подход к построению более эффективных комплексных критериев.

Ключевые слова: цветное зрение, цветовая близость объектов, цветовые модели, спектр, сравнение спектров, многокритериальная оптимизация.

A. A. GALUZA, O. V. KOSTIUK, A. A. SAVCHENKO, A. A. BOIKO

QUANTITATIVE COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF THE COLOR PROXIMITY CRITERIA OF OBJECTS WITH KNOWN SPECTRA

The work is devoted to the problem of comparing objects by color. The following statement of the problem is considered: among the set of objects it is necessary to find such an object, the color of which is most similar to the color of the given object. It is assumed that for each object only its spectrum (transmission, reflection, radiation) is known, which is an exhaustive characteristic of the color of the object. In addition, the spectrum of the radiation source is assumed to be known. The use of standard methods for determining color differences has shown that the problem does not have an unambiguous solution. Two approaches to its solution have been proposed: the first is based on the transition from the spectrum to color spaces with the subsequent calculation of the Euclidean distance, and the second is based on a direct comparison of the spectra as functional dependences of the intensity on the wavelength. Within each of the approaches, two criteria for the "similarity" of objects in color are proposed, and an original approach to assessing the effectiveness of these criteria is proposed. This approach is based on the use of expert assessments of the color proximity of glass samples with known transmission spectra from a standard set. For each sample from the set, experts selected the glass closest in color from the remaining ones, after which a generalized opinion of experts was formed. To obtain an assessment of the quality of each of the criteria, for each of them and for each test glass, the remaining samples were ranked in order of increasing color distance to the given test glass. After that, the results of the criteria were compared with the generalized opinion of experts. To make the comparison result "fuzzy", for each test glass it was proposed to consider a set of five glasses closest in color (for each of the criteria). The resulting estimates of the effectiveness of each of the criteria for a set of 89 glasses are obtained and an approach to the construction of more effective complex criteria is proposed.

Key words: color vision, color proximity of objects, color models, spectrum, spectra comparison, multi-criterial optimization.

Вступ. Для людини колір – одна з найважливіших характеристик предметів навколишнього світу. Крім естетичної цінності, колір предметів має велику інформаційну цінність. Наприклад, колір харчових продуктів містить інформацію про їх якість [1], колір слизових оболонок пов'язаний зі станом здоров'я людини чи тварини

[2], відтінки дорогоцінних каменів та мінералів дозволяють судити про їх походження та композиційні характеристики [3] тощо. З іншого боку, у дизайні, криміналістиці, текстилі, поліграфії тощо часто виникає задача вибору об'єктів, подібних за кольором до даного об'єкта. Наприклад, відомо, що стекла однієї марки, але з різних партій, дещо відрізняються за кольором [4]. Відповідно, дизайнеру може знадобитися знайти вітраж з різних партій, який за кольором максимально наближений до наявного. Навпаки, криміналіст повинен визначити партію, з якої виходить конкретний зразок скла. Порівнюючи колір слизової оболонки пацієнта з атласом кольору слизової для різних патологій, можна поставити правильний діагноз [5].

Людське око може розрізнити до 10 мільйонів відтінків кольору, і навіть незначна різниця в кольорі може здатися нам помітною. Водночас людське сприйняття кольору відносно, тобто людина чітко бачить різницю кольорів двох сусідніх об'єктів, але не може відтворити колір об'єкта, який вона бачила раніше. Крім того, сприйняття кольору людиною дуже індивідуальне і залежить від багатьох об'єктивних та суб'єктивних факторів. Тому люди не є найкращим інструментом кількісного аналізу кольору [6].

Аналіз останніх досліджень. Для об'єктивного кількісного опису кольору були створені різні спеціальні математичні моделі, так звані *кольорові простори (КП)*, які дозволяють розглядати колір як точку у *багатовимірному* (зазвичай *тривимірному*) просторі [7]. Такі уявлення дозволяють використовувати *математичні методи* для роботи з кольором, зокрема для вимірювання відстані між кольорами. Однак виявляється, що навіть моделі, спеціально створені для вимірювання кольорних відмінностей, дають різні результати та мають обмежену сферу застосування [8].

Колір предметів є наслідком того факту, що кожен з них має унікальний *спектр пропускання* (або *випромінювання, поглинання, відбиття*). Спектр однозначно визначає колір об'єкта (але не навпаки), відповідно, саме спектр є вичерпною характеристикою кольору. Тому, швидше за все, точніше порівнювати кольори об'єктів, порівнюючи безпосередньо їх спектри. На практиці спектри вимірюються за допомогою спеціальних оптичних приладів: *спектрофотометрів* та *рефлектометрів*. Пряме оцінювання спектрального кольору – це безконтактний і неруйнівний метод, який є значною перевагою з практичної точки зору.

Особлива складність у порівнянні кольорів полягає у виділенні однакових кольорів (відтінків). Це пояснюється нерівномірністю всіх наявних КП [9]. Нерівномірність КП означає, що рівні геометричні відстані відповідають не різним кольоровим відмінностям у різних областях КП. Спроби вирішити цю проблему йдуть шляхом побудови нелінійних перетворень і поки не привели до остаточного успіху. Це підтверджується великою кількістю різних методів розрахунку невеликих кольорних відмінностей (понад 100), створених для різних застосувань [10, 11]. Ці методи регулярно оновлюються, що підтверджує актуальність цієї проблеми.

В якості критерію наближеності об'єктів за кольором можна використати або відстань між кольорами, як точками у відповідних КП, або близькість їх спектрів безпосередньо. Відповідно, можна запропонувати численну кількість таких критеріїв, але залишається питання, який з них найкраще відповідає дійсності.

Враховуючи вище сказане, актуальною **задачею** є вирішення проблеми вибору найкращої підмножини об'єктів, подібних за кольором до даного, за умови, що всі об'єкти визначені їх спектрами. **Метою роботи** є розробка методології кількісного порівняння критеріїв та формулювання рекомендації щодо їх використання у розглянутій проблемі.

Постановка задачі. Нехай для деякого об'єкта r задано спектр (пропускання або відбиття) $t(\lambda)$. Надалі цей об'єкт буде називатися *опорним об'єктом*. Нехай також буде задано множину $S = \{s_k\}$ ($k = 1 \dots K$) із K об'єктів (далі – *тестові об'єкти*). Кожен з тестових об'єктів також визначається своїм спектром $T_k(\lambda)$ ($k = 1 \dots K$). Необхідно вибрати з множини S об'єкт, найбільш близький за кольором до опорного об'єкта r . Таким чином, ми отримуємо задачу оптимізації:

$$J(t(\lambda), T_k(\lambda)) \rightarrow \min_{k=1 \dots K}, \quad (1)$$

де $J(x(\lambda), y(\lambda))$ є мірою відмінності кольору об'єктів з довільними спектрами $x(\lambda)$ і $y(\lambda)$.

Для розрахунків отримаємо табульовані значення спектрів із кроком $\Delta\lambda$ на проміжку $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Оскільки ми маємо справу з видимим діапазоном, ми встановили $\lambda_{\min} = 380$ нм, $\lambda_{\max} = 720$ нм. Потім представляємо спектр еталонного об'єкта у вигляді вектору:

$$t = (t_i) = (t(\lambda_i)), \quad i = 1 \dots N \quad (2)$$

і набір спектрів тестових об'єктів у вигляді матриці:

$$T = (T_{i,k}) = T_k(\lambda_i), \quad i = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots K, \quad (3)$$

де $\lambda_i = \lambda_{\min} + (i-1)\Delta\lambda$ – довжина хвилі; $N = \frac{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})}{\Delta\lambda} + 1$ – кількість табульованих значень λ ; K – кіль-

кість тестованих об'єктів. У цьому позначенні функціонал (1) набуває вигляду:

$$J(t, T) \rightarrow \min_{k=1 \dots N} . \quad (4)$$

Таким чином, для завершення формальної постановки проблеми необхідно побудувати критерій J . Оскільки йдеться про кольори, здається розумним використати одну із стандартних метрик у відповідному КП як міру наближеності (відмінності) кольорів. У рамках цього підходу необхідно перетворити спектри об'єктів до точок у певному векторному просторі (звичай тривимірному) з подальшим вимірюванням відстані між цими точками. Однак, як зазначалося вище, таких КП та показників існує велика кількість. Велика кількість просторів і метрик пов'язана з емпіричним характером їх побудови і свідчить про відсутність на даний момент єдиного «правильного» підходу до вимірювання різниці кольорів. З іншого боку, здається розумним безпосередньо порівнювати спектри об'єктів як функціональні залежності інтенсивності випромінювання від довжини хвилі.

Отже, у цьому дослідженні для аналізу було обрано чотири критерії ($J_1 \dots J_4$) близькості кольорів двох об'єктів, заданих своїми спектрами. Критерії J_1 і J_2 ґрунтуються на подібності спектральних кривих, а J_3 і J_4 – на вимірюванні евклідової відстані у двох різних КП.

Коефіцієнт кореляції Пірсона використовується у якості критерію J_1 як міра різниці між двома функціональними залежностями [12]:

$$J_1(t, T_k) = -\sum_{i=1}^N \frac{(\bar{t} - t_i)(\bar{T}_k - T_{i,k})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{t} - t_i)^2 \sum_{i=1}^N (\bar{T}_k - T_{i,k})^2}} \rightarrow \min_{k=1 \dots N} , \quad (5)$$

де верхню ризикою позначено усереднення відповідного значення.

Критерієм J_2 є середньоквадратична різниця спектрів:

$$J_2(t, T_k) = \sum_{i=1}^N (t_i - T_{i,k})^2 \rightarrow \min_{k=1 \dots N} . \quad (6)$$

Критерії J_3 і J_4 – це евклідова відстань між векторами відповідно до кольорових просторів CIE XYZ та CIE Lab [7].

Вибір цих двох просторів обумовлений наступним. XYZ, еталонна колірна модель, є головною моделлю для більшості інших КП, що використовуються в технічних областях. При розробці цієї моделі було враховано особливості сприйняття кольорів людиною та використано функції зіставлення кольорів стандартного колориметричного спостерігача. У свою чергу, простір CIE Lab є одним з найбільш однорідних просторів, і тому широко використовується для вимірювання невеликих колірних відмінностей у різних сферах застосування [7]. Наприклад, стандартний метод аналізу стійкості кольору текстильних матеріалів використовує цей простір [13].

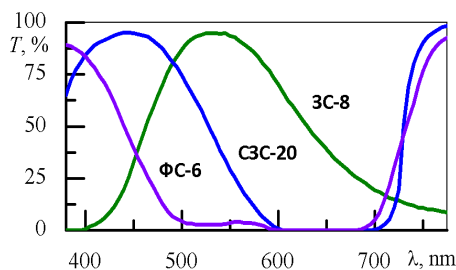


Рис. 1 – Фотографічне зображення зразків (а) і спектри пропускання стекол 3С8, 3С20 і ФС6 (б).

У нашому випадку кольори як точки в колірному просторі насправді є проєкціями точок з простору $C_{[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]}$ функцій, які є неперервними в інтервалі $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ спектру у простір R^3 . Або, у випадку дискретного представлення спектрів, проєкціями від R^N до R^3 . Спосіб побудови такої проєкції визначає конкретний КП. Математичні перетворення «спектр \rightarrow CIE XYZ \rightarrow CIE Lab» досить громіздкі і наведені у численних джерелах [7, 8], тому ми не наводимо їх тут.

Після перетворень «спектр \rightarrow CIE XYZ» та «CIE XYZ \rightarrow CIE Lab» колір опорного об'єкта r представляється у вигляді векторів $t^{XYZ} = (t^X, t^Y, t^Z)$ і $t^{Lab} = (t^L, t^a, t^b)$ у відповідних просторах. Аналогічно, множина S тестових об'єктів представлена $(K \times 3)$ –матрицею:

$$T^{XYZ(Lab)} = \left(T_k^{X(L)}, T_k^{Y(a)}, T_k^{Z(b)} \right), \quad K = 1 \dots K . \quad (7)$$

Відповідно критерії J_3 і J_4 набувають вигляду:

$$J_{3(4)}\left(t^{XYZ(Lab)}, T_k^{XYZ(Lab)}\right) = \left|t^{XYZ(Lab)} - T_k^{XYZ(Lab)}\right| \rightarrow \min_{k=1...N}, \quad (8)$$

де $|\cdot|$ позначено евклідову відстань у R^3 .

Таким чином, сформульовано 4 критерії (5) – (8) для вибору об'єкта з множини S , найближчого за кольором до опорного об'єкта r . S задається або набором спектрів (3), або набором кольірних координат (7). Далі сформулюємо підхід до оцінки ефективності критеріїв з метою вибору найкращого критерію.

Оцінка ефективності критеріїв для порівняння кольорів об'єктів. В якості тестових об'єктів використовувались стекла із набору $K = 89$ стандартних кольорових стекол (фільтрів) з відомими спектрами пропускання [4]. Об'єктами були пластини 40×40 мм товщиною $2 \div 3$ мм. На рис. 1 показано фотографії кількох стекол (рис. 1, а) та відповідні спектри пропускання (рис. 1, б). Стекла в цьому наборі є відсічними та смуговими фільтрами для всього видимого діапазону довжин хвиль, що дозволяє використовувати різноманітні кольори та відтінки. Кожне скло у S ідентифікується серійним номером i ($i = 1...K$) та унікальною текстовою назвою (марка скла).

Для оцінки ефективності побудованих критеріїв було використано експертні оцінки. Із множини S було вибрано підмножину R ($P = |R| = 43$) еталонних об'єктів. Для кожного об'єкта $r \in R$, група з 5 експертів обрали найближче за кольором скло з решти підмножини S/r . Для отримання експертних оцінок ми використовували установку, описану в [14], зі стандартним джерелом світла D65 (Philips Master TL-D 90 DeLuxe 18W/965).

Для узагальнення висновків експертів використовувався стандартний метод [15]. В результаті утворюється множина E пар:

$$E = \left\{ \left(z_j, w_j \right) \right\}, \quad j = 1...P, \quad (9)$$

де z_j і w_j – марки j -го еталонного скла та його найближчого аналога з S/r (відповідно до думки експертів) відповідно. Фрагмент множини E показано у табл. 1.

Таблиця 1 – Фрагмент множини E
(j – номер елемента з множини R)

j	z_j	w_j
1	ЖЗС-1	ЗС-1
2	ЖЗС-5	ЖЗС-6
3	СЗС-20	СЗС-22
.....		
42	СС-5	СС-8
43	ФС-6	ФС-7

M залежить від конкретної задачі. Оскільки значення M жодним чином не впливає на всі подальші міркування, встановимо $M = 5$. Таким чином, у цій роботі ми шукаємо множину $Top5 \subset S/r$.

У рамках цього підходу кожному j -му еталонному склу ставимо у відповідність множину $Top5_j^h$ з п'яти елементів (марки 5 найближчих стекол) для кожного критерію J_h ($h = 1...4$):

$$Top5_j^h = \left(k_{j1}^h, k_{j2}^h, \dots, k_{j5}^h \right) = \left(k_{jl}^h \right), \quad j = 1...P, \quad (10)$$

де $l = 1...5$ – це місце, де скло k_j^h знаходиться у $Top5_j^h$ за критерієм J_h .

Таблиця 2 – Набори $Top5_j^h$ для деяких еталонних стекол j для кожного з критеріїв J (z_j – марка j -го скла, а w_j – марка для j -го скла за думкою експертів) множини E (j – номер елемента з множини R)

j	z_j	w_j	J_1	J_2	J_3	J_4
2	ЖЗС-5	ЖЗС-6	ЖЗС-10, ЖЗС-6, ЖС-16, ЖС-12, ЖС-3	ЖЗС-10, ОС-6, ЖЗС-6, ЖС-16, ЖС-12	ОС-6, ЖЗС-10, ЗС-8, НС-6, ПС-5	ЖС-12, ЖС-19, ЖЗС-10, ЗС-8, ОС-6
3	ЖЗС-13	ЖЗС-17	ЖЗС-12, ЗС-2, ЖЗС-1, ЗС-10, ЗС-1	ТС-4, ТС-2, ЖЗС-12, НС-13, НС-10	КС-18, КС-19, КС-17, ИКС-1, ТС-6	ТС-4, ТС-2, НС-13, ТС-6, ТС-7
7	ЖС-16	ЖС-17	ЖС-19, ЖЗС-5, ЖС-17, ЖС-12, ЖЗС-6	ЖС-17, ЖС-12, ЖЗС-5, ЖЗС-10, ОС-6	ЖС-17, ЖС-19, ЖС-12, ЖЗС-10, ОС-6	ЖЗС-6, ЖЗС-18, ОС-6, ЖЗС-5, ЖС-19
12	ЗС-8	ЖЗС-9	ЗС-1, ЖЗС-9, ЖЗС-1, ТС-2, ЗС-11	ЖЗС-9, ЖЗС-18, СЗС-16, НС-7, ЖЗС-6	ЖЗС-18, ЖЗС-6, ЖЗС-5, НС-1, СЗС-16	ЖЗС-5, ЖС-12, ЖЗС-10, ЖС-19, ЖЗС-9

Продовження таблиці 2						
15	ИКС-1	УФС-6	ФС-7, НС-1, УФС-8, ФС-6, УФС-6	НС-10, НС-13, ТС-4, ТС-2, ЖЗС-13	ТС-6, ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5	ТС-6, ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5
24	ПС-8	ОС-14	КС-11, КС-10, КС-13, КС-14, ТС-7	КС-13, КС-11, КС-10, КС-14, ОС-5	КС-11, КС-10, ТС-1, ЖЗС-1, ЗС-10	КС-14, КС-13, КС-15, КС-11, КС-17
29	СЗС-20	СЗС-22	СС-1, СС-13, СС-9, СС-5, СС-2	СС-1, СС-2, ФС-6, СЗС-8, СЗС-22	СЗС-22, СЗС-8, СС-2, СЗС-9, СЗС-3	СЗС-9, СЗС-22, СЗС-8, СЗС-3, СЗС-21
33	СС-4	СС-15	ФС-6, ПС-15, СС-2, ПС-11, ФС-7	ФС-6, ПС-15, ПС-11, ФС-7, НС-3	ПС-11, СС-14, ПС-15, СС-8, СС-11	ПС-11, СС-11, СС-14, ПС-15, СС-5
37	ТС-1	ТС-7	КС-18, КС-19, КС-17, НС-13, ТС-6	НС-9, УФС-8, ТС-7, НС-3, НС-8	НС-3, КС-13, НС-9, ЗС-6, ЗС-11	НС-3, ТС-4, ЖЗС-12, НС-13, ТС-2
42	ФС-1	ФС-7	СС-11, СС-14, СС-9, ФС-6, СС-8	СС-14, СС-11, СС-8, СС-5, ПС-13	ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5, УФС-6	ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5, УФС-6
43	ФС-6	ФС-7	ФС-7, СС-4, СС-11, ИКС-1, ФС-1	СС-4, ФС-7, ФС-1, СС-11, ПС-15	ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5, УФС-6	ТС-7, УФС-1, УФС-2, УФС-5, УФС-6

У табл. 2 наведені множини $Top5_j^h$ для деяких еталонних стекол відповідно до всіх критеріїв J_h ($h = 1...4$). З табл. 2 видно, що множини $Top5_j^h$ є різними для всіх h і j . Скло w_j (вибір експертів) рідко займає перше місце у $Top5_j^h$, більше того, для деяких стекол z_j експертна оцінка w_j взагалі не потрапила до $Top5$.

Обчисливши $Top5_j^h$ для кожного скла j ($j = 1...P$) та для кожного критерію J_h (табл. 2), порівняємо їх з відповідними експертними оцінками (табл. 1). Для цього нами запропоновано такий підхід. Задаємо числові оцінки $Est_j^h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ за критеріями J_h ($h = 1...4$) для кожного скла z_j . Якщо скло w_j , рекомендоване експертами як найближче за кольором до скла j , знаходиться на першому місці у $Top5_j^h$ $w_j = k_{j1}^h$, критерій h отримує 5 балів, якщо $w_j = k_{j5}^h$, то 1 бал. Якщо вибір експертів w_j не належить $Top5_j^h$, то критерій отримує 0 балів. Тобто, відповідно до (10), якщо $w_j = k_{jl}^h$, то $Est_j^h = \max(0, M - l + 1)$.

У табл. 3 представлено оцінки ефективності всіх критеріїв для еталонних стекол з табл. 2. Значення Est_j^h вважаються мірою узгодженості критерію J_h та експертних оцінок w_j ($j = 1...P$).

Таблиця 3 – Оцінки Est_j^h для деяких стекол j

j	z_j	w_j	J_1	J_2	J_3	J_4
2	ЖЗС-5	ЖЗС-6	<u>4</u>	3	0	0
3	ЖЗС-13	ЖЗС-17	0	0	0	0
7	ЖС-16	ЖС-17	3	<u>5</u>	<u>5</u>	0
12	ЗС-8	ЖЗС-9	4	<u>5</u>	0	1
15	ИКС-1	УФС-6	1	0	0	0
19	НС-1	НС-6	0	1	2	<u>5</u>
23	ПС-5	ПС-7	0	0	0	0
24	ПС-8	ОС-14	0	0	0	0
29	СЗС-20	СЗС-22	0	1	<u>5</u>	5
33	СС-4	СС-15	0	0	0	0
37	ТС-1	ТС-7	0	3	0	0
42	ФС-1	ФС-7	0	0	0	0
43	ФС-6	ФС-7	<u>5</u>	4	0	0

Аналіз табл. 3 показує, що деякі стекла рекомендовано лише за першим (наприклад, №№ 2 та 43), лише за другим (наприклад, №№ 7, 12 та 37), лише за третім (наприклад, № 29) або лише за четвертим (наприклад, № 19) критерієм. Для деяких стекол кілька критеріїв дали однакові результати (наприклад, № 7). Для 5 стекол ($j = 3, 23, 24, 33, 42$) відповідність взагалі не вдалося знайти. Загалом, найменша кількість помилок було допущено за критерієм J_2 (6 помилок), а найбільша за критерієм J_3 (14 помилок). Більш того, різні критерії дають «правильні» результати для різних стекол.

Результати оцінки ефективності критеріїв. Як інтегральну оцінку якості кожного критерію на всій мно-

жині S знаходимо середню оцінку Est^h по всій множині R еталонних стеклол:

$$Est^h = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P Est_j^h. \quad (11)$$

Інтегральні (на множині R) оцінки ефективності для всіх критеріїв наведено в табл. 4.

Таблиця 4 – Інтегральні оцінки ефективності критеріїв

Критерій	J_1 (Пірсона)	J_2 (СКВ)	J_3 (XYZ)	J_4 (Lab)
Est^h	2.79	3.26	2.74	2.93

Із таблиці видно, що всі критерії мають досить низький середній бал. Найкращий результат має критерій J_2 (6), заснований на середньоквадратичній різниці спектрів (3,26 бала). Найближчий до найліпшого результату критерій J_4 (8), заснований на вимірюванні колірної відстані в просторі CIE Lab, отримав лише 2,93 бали, хоча це, по суті, один із найпоширеніших методів вимірювання малих колірних відмінностей. Решта критеріїв J_1 (Пірсон) та J_3 (CIE XYZ) мають приблизно однаковий результат. Водночас слід зазначити, що для деяких зразків найкращі результати дали J_1 $j = (15, 43)$ або J_3 ($j = 29$).

Перспективи подальших досліджень. Таким чином, неможливо вказати єдиний ефективний критерій. Зважаємо, однак, що за окремими критеріями знайдено менше відповідних стеклол, ніж хоча б за одним критерієм. Тому, на думку авторів, видається доцільним побудувати єдиний комбінований критерій на основі критеріїв, розглянутих у цій роботі. Крім того, відсутність очевидного лідера серед розглянутих критеріїв дозволяє зробити висновок, що задача порівняння за кольором об'єктів, визначених їх спектрами, ще далека від вичерпного рішення.

Висновки. В роботі розглянуто задачу вибору колірної аналога (або множини аналогів) об'єкта з набору доступних, у випадку, коли всі об'єкти задані своїми спектрами пропускання.

Розглянуто чотири критерії порівняння за кольором подібних об'єктів. Два з них засновані на порівнянні безпосередньо спектральних кривих (середньоквадратична різниця та критерій Пірсона), а два – на колірній відстані у просторах CIE XYZ та Lab.

Запропоновано підхід до порівняння ефективності різних критеріїв вибору найближчого за кольором об'єкта з множини заданих. Запропонований метод заснований на порівнянні з вибором експерта. Виявилось, що найкращий середній результат дає критерій, заснований на середньоквадратичному порівнянні спектрів об'єктів.

Показано, що всі розглянуті критерії в даній задачі дають досить низький ступінь збігу з експертними оцінками. З іншого боку, показано, що множини еталонних об'єктів, на яких помиляється кожен із критеріїв, різні. Цей результат є підставою для побудови більш складних векторних критеріїв (заснованих на всіх розглянутих критеріях), а також для пошуку нових критеріїв порівняння об'єктів в розглянутих умовах.

Список літератури

1. Lee K., Baek S., Kim D., Seo J. A freshness indicator for monitoring chicken-breast spoilage using a Tyvek sheet and RGB color analysis // Food Packaging and Shelf Life. – 2019. - Vol. 19. – P. 40 – 46.
2. Schafer D., Glass S. A guide to yellow oral mucosal entities: etiology and pathology // Head and Neck Pathology. – 2019. – Vol. 13. – P. 33 – 46.
3. Sun I., Schmitt A., Häger T., Schneider M., Pappalardo L., Russo M. Natural blue zircon from Vesuvius // Mineralogy and Petrology. – 2021. – Vol. 115. – P. 21 – 36.
4. ГОСТ 9411 – 91. Стекло оптическое цветное. Технические условия. – М. : Комитет стандартизации и метрологии СССР, 1992. – 48 с.
5. Latini G., De Felice C., Barducci A., Chitano G., Pignatelli A., Grimaldi L., Tramacere F., Laurini R., Andreassi M., Portaluri M. Oral mucosal color changes as a clinical biomarker for cancer detection // European Journal of Cancer Prevention. – 2012. – Vol. 21. – issue 4. – P. 360 – 366.
6. Kremers J., Baraas R., Marshall N. Human color vision. – Cham : Springer, 2016. – 361 p.
7. Fairchild M. Color Appearance models. - John Wiley & Sons, 2013. – 472 p.
8. Hunt R. W. G. The Reproduction of color. - John Wiley & Sons, 2004. – 724 p.
9. Hill B., Roger Th., Vorhagen F. Comparative analysis of the quantization of color spaces on the basis of the CIELAB color-difference formula // ACM Transactions on Graphics. – 1997. – Vol. 16. – P. 109 – 154.
10. Shamey R., Cárdenas L., Hinks D., Woodard R. Comparison of naïve and expert subjects in the assessment of small color differences // Journal of Optical Society of America A. – 2010. - Vol. 27. – no.6. - P. 1482 – 1489.
11. Imai F., Tsumura N., Miyake Y. Perceptual color difference metric for complex images based on Mahalanobis distance // Journal of Electronic Imaging. – 2001. - Vol. 10. – issue 2. – P. 385 – 393.
12. Dalgaard P. Introductory Statistics with R. – Cham : Springer, 2008. – 364 p.
13. Textiles – Tests for colour fastness – Part J03 : Calculation of colour differences, ISO Standard No. 105-J03:2009, 2020.
14. Galuza A., Shkoda M., Protsay N., Savchenko A. Modeling of an object chromaticity with a given emission spectrum // 2019 9th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies, Ceske Budejovice, Czech Republic, 2019. - P. 13 – 16.
15. Kochenderfer M. Decision making under uncertainty: theory and application. – Boston : The MIT Press, 2015. – 352 p.

References (transliterated)

1. Lee K., Baek S., Kim D., Seo J. A freshness indicator for monitoring chicken-breast spoilage using a Tyvek sheet and RGB color analysis. *Food Packaging and Shelf Life*. 2019, vol. 19, pp. 40–46.
2. Schafer D., Glass S. A guide to yellow oral mucosal entities: etiology and pathology. *Head and Neck Pathology*. 2019, vol. 13, pp. 33–46.
3. Sun I., Schmitt A., Häger T., Schneider M., Pappalardo L., Russo M. Natural blue zircon from Vesuvius. *Mineralogy and Petrology*. 2021, vol. 115, pp. 21–36.
4. GOST 9411 – 91. *Steklo opticheskoye tsvetnoye. Tekhnicheskiye usloviya* [Colored optical glass. Specifications]. Moscow, Committee for Standardization and Metrology of the USSR Publ., 1992. 48 p.
5. Latini G., De Felice C., Barducci A., Chitano G., Pignatelli A., Grimaldi L., Tramacere F., Laurini R., Andreassi M., Portaluri M. Oral mucosal color changes as a clinical biomarker for cancer detection. *European Journal of Cancer Prevention*. 2012, vol. 21, issue 4, pp. 360–366.
6. Kremers J., Baraas R., Marshall N. *Human color vision*. Cham, Springer, 2016. 361 p.
7. Fairchild M. *Color Appearance models*. John Wiley & Sons, 2013. 472 p.
8. Hunt R. W. G. *The Reproduction of color*. John Wiley & Sons, 2004. 724 p.
9. Hill B., Roger Th., Vorhagen F. Comparative analysis of the quantization of color spaces on the basis of the CIELAB color-difference formula. *ACM Transactions on Graphics*. 1997, vol. 16, pp. 109–154.
10. Shamey R., Cárdenas L., Hinks D., Woodard R. Comparison of naïve and expert subjects in the assessment of small color differences. *Journal of Optical Society of America A*. 2010, vol. 27, no.6, pp. 1482–1489.
11. Imai F., Tsumura N., Miyake Y. Perceptual color difference metric for complex images based on Mahalanobis distance. *Journal of Electronic Imaging*. 2001, vol. 10, issue 2, pp. 385–393.
12. Dalgaard P. *Introductory Statistics with R*. Cham, Springer, 2008. 364 p.
13. Textiles – Tests for colour fastness – Part J03 : Calculation of colour differences, ISO Standard No. 105-J03:2009, 2020.
14. Galuza A., Shkoda M., Protsay N., Savchenko A. Modeling of an object chromaticity with a given emission spectrum. *2019 9th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies*. Ceske Budejovice, Czech Republic, 2019. pp. 13–16.
15. Kochenderfer M. *Decision making under uncertainty: theory and application*. Boston, The MIT Press, 2015. 352 p.

Надійшла (received) 09.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Галуза Олексій Анатолійович – доктор фізико-математичних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Oleksii.Haluza@khpi.edu.ua.

Галуза Алексей Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Oleksii.Haluza@khpi.edu.ua.

Galuz Alexey Anatol'evich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-63-51; e-mail: Oleksii.Haluza@khpi.edu.ua.

Костюк Ольга Василівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 790-74-58; e-mail: Olha.Kostiuk@khpi.edu.ua.

Костюк Ольга Васильевна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 790-74-58; e-mail: Olha.Kostiuk@khpi.edu.ua.

Kostiuk Olga Vasylivna – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 790-74-58; e-mail: Olha.Kostiuk@khpi.edu.ua.

Савченко Алла Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-63-37; e-mail: Alla.Savchenko@khpi.edu.ua.

Савченко Алла Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-63-37; e-mail: Alla.Savchenko@khpi.edu.ua.

Savchenko Alla Oleksandrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-63-37; e-mail: Alla.Savchenko@khpi.edu.ua.

Бойко Анастасія Андрійвна – студентка, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Anastasiia.Boiko@cs.khpi.edu.ua.

Бойко Анастасия Андреевна – студентка, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-63-51; e-mail: Anastasiia.Boiko@cs.khpi.edu.ua.

Boiko Anastasiia Andriivna – Student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-63-51; e-mail: Anastasiia.Boiko@cs.khpi.edu.ua.

Н. С. ГОЛОСКУБОВА, Ю. В. МИХЛІН

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ В ДЕЯКИХ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

Стійкість нормальних форм коливань аналізується за допомогою двох підходів. Перший з них – це так званий метод алгебраїзації за Айнсом, коли обирається нова незалежна змінна, пов'язана з розв'язком, що розглядається. Тоді рівняння в варіаціях перетворюється в рівняння з особливими точками. Проблема отримання розв'язків, що відповідають границям між областями стійкості / нестійкості, в цьому випадку зводиться до проблеми отримання розв'язків, що мають сингулярності в цих особливих точках. Такі розв'язки можна отримати у вигляді степеневих рядів, коефіцієнти яких задовольняють системі однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь. Умова існування нетривіальних розв'язків подібних систем дає границі між областями стійкості/ нестійкості в просторі параметрів вихідної системи. Перевага методу алгебраїзації є в тому, що нема потреби використовувати представлення у часі розв'язку, що досліджується на стійкість. Інший підхід до проблеми стійкості форм коливань пов'язаний з класичним визначенням стійкості за Ляпуновим. Запропонований аналітико-числовий тест може бути використаний в задачі стійкості форм коливань тоді, коли ця проблема не має аналітичного розв'язку. Він також дозволяє отримати границі між областями стійкості / нестійкості у просторі параметрів системи. В роботі перший підхід використано для аналізу стійкості нормальних форм коливань в системі пов'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі, а другий - для аналізу стійкості горизонтальної форми коливань в так званому стохастичному абсорбері.

Ключові слова: нормальні форми коливань, рівняння у варіаціях, алгебраїзація за Айнсом, стійкість за Ляпуновим.

Н. С. ГОЛОСКУБОВА, Ю. В. МИХЛІН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В НЕКОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Устойчивость нормальных форм колебаний анализируется при помощи двух подходов. Первый из них – это так называемый метод алгебраизации по Айнсу, когда выбирается новая независимая переменная, связанная с рассматриваемым решением. При этом уравнение в вариациях преобразуется к виду уравнения с особыми точками. Такие решения можно получить в виде степенных рядов, коэффициенты которых удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Условие существования нетривиальных решений подобных систем дают границы областей устойчивости / неустойчивости в пространстве параметров исходной системы. Задача получения решений, которые отвечают границам между областями устойчивости / неустойчивости, в этом случае сводится к задаче определения решений, которые имеют сингулярности в этих особых точках. Преимущество метода алгебраизации состоит в том, что здесь не требуется использовать представление во времени решения, которое исследуется на устойчивость. Другой подход к решению задачи устойчивости связан с классическим определением устойчивости по Ляпунову. Предложенный аналитико-числовой тест может быть использован в задаче устойчивости форм колебаний в том случае, когда эта задача не имеет аналитического решения. Он также позволяет определять границы областей устойчивости / неустойчивости в пространстве параметров системы. В работе первый подход используется для анализа устойчивости нормальных форм колебаний в системе связанных осцилляторов на существенно нелинейной упругой опоре, а второй - для анализа устойчивости горизонтальной формы колебаний в так называемом стохастическом абсорбере.

Ключевые слова: нормальные формы колебаний, уравнения в вариациях, алгебраизация по Айнсу, устойчивость по Ляпунову.

N. S. GOLOSKUBOVA, YU. V. MIKHLIN

INVESTIGATION OF THE NORMAL VIBRATION MODES STABILITY IN SOME ESSENTIALLY NONLINEAR SYSTEMS

In the paper stability of nonlinear normal modes is analyzed by two approaches. One of them is the method of Ince algebraization, when a new independent variable associated with the unperturbed solution is introduced in the problem. In this case equations in variations are transformed to equations with singular points. The problem of determination of solutions corresponding to boundaries of the stability/ instability regions is reduced here to the problem of determination of functions that have singularity at the mentioned points. Such solutions can be obtained in the form of power series, which coefficients are satisfying a system of homogeneous linear algebraic equations. The condition ensuring the existence non-trivial solutions for such systems determines the boundaries between the stability / instability regions in the system parameter space. An advantage of the Ince algebraization is that we do not use the time-presentation of the solution when studying its stability. Other approach to investigating steady state stability is associated with the classical Lyapunov definition of stability. The analytical-numerical test proposed in the paper can be applied to a stability problem when the problem has no analytical solution. It also allows to obtain boundaries between the stability / instability regions in the system parameter space. In the present paper the first approach is used to analyze stability of normal vibration modes in the system of connected oscillators on the essentially nonlinear elastic support, and the second one is used to analyze stability of a horizontal vibration mode in the so-called stochastic absorber.

Key words: nonlinear normal modes, equations in variations, Ince algebraization, Lyapunov stability.

Вступ. Нелінійні нормальні форми коливань (ННФ), які є вельми важливими режимами багатьох нелінійних динамічних систем, були вперше розглянуті в роботах Г. Каудерера [1] та Р. Розенберга [2]. Ці форми коливань є узагальненням нормальних коливань лінійних систем. У режимі нормальних коливань скінченновимірна нелінійна система веде себе подібно консервативній системі з одним ступенем свободи, а всі позиційні координати є однозначними функціями однієї з них. Концепція ННФ за Каудерером – Розенбергом базується на побудові траєкторій в конфігураційному просторі системи. Основні положення теорії ННФ та застосування цієї теорії представлено в кількох книгах та оглядах, зокрема, в [3 – 5].

Для розв'язання задачі стійкості коливальних режимів використовуються різні підходи. Ми представимо лише кілька книг, присвячених цій проблемі [6 – 8]. Зазначимо, що стійкість може бути ефективно проаналізована з використанням так званої Алгебраїзації за Айнсом [9]. Цей підхід базується на введенні нової незалежної

змінної, що пов'язана з розв'язком, який досліджується на стійкість. Перевага цього підходу є у тому, що тут немає необхідності використовувати представлення цього розв'язку у часі. *Метод алгебраїзації* був раніше успішно використаний в задачі щодо стійкості ННФ в деяких нелінійних консервативних системах [10].

Концепція ННФ може бути використана не тільки для періодичних коливань. Зокрема, неплінійні нормальні форми коливань з гладкими траєкторіями в конфігураційному просторі та хаотичною поведінкою за часом можуть бути знайдені у *пружних системах*, що знаходяться у *закритичному стані* під дією зовнішніх періодичних впливів, тобто, після втрати стійкості вихідного положення рівноваги під дією стискаючої сили. В цьому випадку проблема стійкості форм коливань не має аналітичного розв'язання, і ми використовуємо деякий *чисельно-аналітичний тест*, що базується на відомому визначенню *стійкості руху за Ляпуновим* [6]. Цей тест було запропоновано та використано в роботі [11].

В даній роботі розглянуто обидва підходи до розв'язання задачі стійкості форм. Метод алгебраїзації використано для дослідження стійкості форм коливань в системі *зв'язаних осциляторів* на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого *звукового вакууму*. За допомогою чисельно-аналітичного тесту досліджується стійкість горизонтальної форми коливань в так званому *стохастичному абсорбері*.

Основні результати.

1. Два підходи до вивчення стійкості форм коливань в нелінійних системах.

1.1. Метод алгебраїзації рівнянь в варіаціях за Айнсом. Для дослідження стійкості періодичних розв'язків, зокрема, нормальних форм коливань, в багатьох випадках може бути застосована алгебраїзація рівнянь в варіаціях за Айнсом [9]. Цей підхід базується на тому, що в якості нової незалежної змінної вибирається деяка позиційна координата, пов'язана з розв'язком, яка досліджується на стійкість. Так, наприклад, замість t можна ввести змінну x , що визначає рух уздовж прямолінійної траєкторії ННФ, або швидкість \dot{x} , або кінетичну енергію на цьому розв'язку та ін. Таким чином, алгебраїзація може бути виконана різними способами. В результаті рівняння в варіаціях з періодичними коефіцієнтами перетворюються в рівняння з особливими точками. Цей метод дослідження стійкості має ту перевагу, що тут не потрібно використовувати розкладання періодичного розв'язку, що досліджується на стійкість, в *ряд Фур'є*. До недоліків методу відноситься те, що структура рівнянь з особливими точками є складнішою, ніж рівнянь у варіаціях з періодичними коефіцієнтами. Для побудови розв'язків, що визначають границі областей стійкості та нестійкості, в такому випадку можна використовувати степеневі ряди. Так, наприклад, якщо лінійне диференціальне рівняння має особливість при $z = z_0$, то розв'язок такого лінійного рівняння представляється у вигляді:

$$y(z) = (z - z_0)^r \left[a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \right], \quad (1)$$

де число r – це так званий показник особливої точки.

Використання подібної алгебраїзації можливо та найбільш ефективно насамперед для тих випадків, коли відомий перший інтеграл (наприклад, інтеграл енергії) для того розв'язку, що розглядається.

1.2. Чисельно-аналітичний метод як реалізація критерію стійкості за Ляпуновим. Хоча методи аналітичного дослідження стійкості руху досить добре розвинені, точне або наближене аналітичне рішення для систем з декількома ступенями свободи може бути отримано лише в небагатьох окремих випадках.

Описаний далі підхід до визначення границь областей *стійкості/нестійкості* форм коливань можна охарактеризувати як чисельну реалізацію класичного визначення стійкості за Ляпуновим.

Досліджуємо, зокрема, стійкість нелінійної нормальної форми коливань нелінійної системи з двома ступенями свободи. Якщо траєкторія такої ННФ в конфігураційному просторі системи визначається прямою лінією, то стійкість форми коливань визначається варіаціями в ортогональному до траєкторії напрямку. Як це прийнято в теорії стійкості, припускаємо, що значення цих варіацій в області стійкості розглянутої форми коливань значно менше амплітудних значень змінних, що описують форму коливань.

Розглянемо класичне визначення стійкості руху за Ляпуновим [6]. Розв'язок є стійким, якщо для будь-якого ε можна знайти таке $\delta \geq 0$, що для усіх $y_i(0) \in N_\delta(0)$ и $t \geq 0$ буде виконано умову $y_i(t) \in N_\varepsilon(0)$. Тут $N_\delta(0)$ та $N_\varepsilon(0)$ означають, відповідно, δ - та ε - околи розв'язку $y_i = 0$. Такий окіл може бути обраним різними способами, наприклад, $N_\gamma = (|y_i| \leq \gamma)$.

Введемо зв'язок між параметром ε та початковим значенням змінної $y_2(0)$. Нехай

$$\varepsilon = \rho |y_i(0)| \leq \rho \delta, \quad (\rho = \text{const}). \quad (2)$$

Умова (2) означає, що величина δ не може бути довільно малою, вона обмежена знизу, тому що

$$\delta \geq \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Перепишемо останню нерівність так:

$$\rho \geq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Крім того, з визначення стійкості, беручи до уваги нерівність (2), знаходимо, що в разі стійкості повинна виконуватися нерівність $|y_i(t)| \leq \rho |y_i(0)|$. Враховуючи цю останню нерівність, отримаємо звідси умову нестійкості рішення: $y_i = 0$. Отже, нестійкість рішення фіксується, якщо виконується нерівність:

$$|y_i(t)| \geq \rho |y_i(0)|; \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3)$$

В умові (3), на відміну від класичного визначення, введено обмежений час руху T . Вибір цієї величини при розрахунку стійкості обговорюється далі.

Обговоримо спочатку вибір величини ρ . Постійна ρ – це верхня границя відношення ε/δ , тому значення ρ^{-1} визначає малість початкових збурень по відношенню до максимально допустимих збурень для будь-яких $t \geq 0$. Зростання величини ρ означає, що допустимі початкові значення варіацій зменшуються. Є істотне свавілля у виборі ρ в області нестійкості, тому що в області нестійкості при зростанні t варіації вийдуть за межі ε – околи вихідного розв'язку при будь-якому виборі цієї величини. Надалі скористаємося наступним міркуванням. Кажуть, що деяка величина α є на порядок більшою за β , якщо $\alpha/\beta \approx 10$. Тому при аналізі стійкості можна прийняти $\rho = 10$.

Аналіз стійкості/нестійкості проводиться на площині параметрів системи. Для побудови областей стійкості/нестійкості значення параметрів на цій площині задаються у вигляді деякої сітки. Для кожної точки сітки проводиться чисельний розрахунок, для чого використовується пряме чисельне інтегрування динамічної системи, наприклад, методом Рунге – Кутта. Як критерій нестійкості вибирається нерівність (3). Розрахунок границь областей стійкості/нестійкості проводиться при фіксованому значенні T . За результатами розрахунку будуються границі областей стійкості/нестійкості в вузлах даної сітки. Після знаходження такої границі величина T збільшується, і весь розрахунок границі повторюється знову. Якщо границі для різних значень T є близькими, наприклад, виявляються меншими за задалегідь задану малу величину, розрахунок припиняється. В іншому випадку величина T збільшується, і розрахунок повторюється знову. Таким чином, визначається час обчислень T . Зрозуміло, що час розрахунку T збільшується, коли крок сітки зменшується, а число вузлів відповідно зростає.

Величини ρ та T пов'язані між собою, причому зменшення величини ρ веде до зменшення часу розрахунку T . Підкреслимо, однак, що значення ρ не може бути вибрано дуже малим, оскільки це призводить до великої погрішності саме поблизу границь областей стійкості/нестійкості.

2. Стійкість нормальних форм коливань в системі суттєво нелінійних зв'язаних осциляторів. Розглянемо зараз стійкість ННФ в системі зв'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого звукового вакууму [12, 13]. Динаміка системи описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 v_1}{d\tau^2} + v_1^3 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_1 - v_2) = 0; \\ \mu \frac{d^2 v_2}{d\tau^2} + v_2^3 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_2 - v_1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Зробимо таку заміну змінних:

$$z_1 = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в рівняння (4), отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + 0.5(z_1^2 + 3z_2^2)z_1 + \frac{\mu}{3}[z_1^2 + 3z_2^2]z_1 = 0; \\ \mu \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + 0.5(z_2^2 + 3z_1^2)z_2 + \mu[z_1^2 + 3z_2^2]z_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Ця система допускає дві форми нормальних коливань:

1) $z_2 = 0$, $z_1 = z_1(t)$; відповідне рівняння в варіаціях є таким:

$$\mu \frac{d^2 u}{d\tau^2} + (1.5 + \mu) z_1^2 u = 0; \quad (7)$$

2) $z_1 = 0$, $z_2 = z_2(t)$; відповідне рівняння в варіаціях є таким:

$$\mu \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \left(1.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_2^2 u = 0. \quad (8)$$

Інтеграл енергії для першої форми коливань записується таким чином:

$$\frac{\mu}{2} \left(\frac{dz_1}{d\tau}\right)^2 + \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{z_1^4}{4} = h. \quad (9)$$

З рівняння (9) отримуємо наступне співвідношення, яке знадобиться надалі для аналізу стійкості:

$$\left(\frac{dz_1}{d\tau}\right)^2 = \frac{2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{z_1^4}{2}}{\mu}, \quad (10)$$

а з рівняння, що описує рух вздовж форми коливань,

$$\mu \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3 = 0 \quad (\text{в цьому випадку } z_2 = 0),$$

отримуємо таке:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} = -\frac{\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3}{\mu}. \quad (11)$$

Підставляючи вирази (10) та (11) в (7), маємо рівняння в варіаціях у вигляді наступного рівняння з особливими точками:

$$\frac{d^2 u}{dz_1^2} \left(2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{z_1^4}{2}\right) - \frac{du}{dz_1} \left\{\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right\} + (1.5\mu + \mu^2) z_1^2 = 0, \quad (12)$$

особливі точки якого можуть бути отримані з наступного рівняння:

$$2h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\Phi_0^4}{2} \equiv (z_1 - \Phi_0) G(\Phi_0) = 0, \quad (13)$$

де Φ_0 – корінь цього рівняння.

Відомо, що саме T – та $2T$ – періодичні розв'язки визначають границі областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів рівняння в варіаціях, де T – період коефіцієнтів цього рівняння [7 – 9]. У рівнянні з особливими точками цим *граничним розв'язкам* відповідають степеневі ряди наступного вигляду [3, 4, 6]:

$$u = z^r (a_0 + a_1 z + \dots), \quad (14)$$

де r – один з двох показників особливої точки рівняння в варіаціях (12), а $z = z_1 - \Phi_0$.

Для визначення індексів особливої точки Φ_0 введемо ряд (13) в рівняння (12). Об'єднуючи складові з найменшим ступенем z , отримаємо наступне рівняння для визначення цих показників:

$$r \left(r - \frac{1}{2}\right) \left(\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right) - r \left\{\left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) z_1^3\right\} = 0. \quad (15)$$

Звідси маємо, що

$$r_1 = 0 \quad \text{та} \quad r_2 = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Підставляючи тепер ряд (14), що відповідає нульовому індексу, у рівняння в варіаціях у формі (12) та прирівнюючи коефіцієнти з однаковими ступенями по z , ми отримуємо наступну нескінченну рекурентну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду:

$$\begin{aligned} z^0 : a_0 [1.5\mu + \mu^2] \Phi_0^2 + a_1 \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right) \Phi_0^3 + a_2 \left\{4h - \left(0.5 + \frac{\mu}{3}\right)\right\} \Phi_0^4 &= 0; \\ z^1 : a_0 \{3\mu + 2\mu^2\} \Phi_0 + a_1 (1.5 + 2.5\mu + \mu^2) \Phi_0^2 - a_2 (3 + 2\mu) \Phi_0^3 &= 0; \\ z^2 : a_1 \left\{(1.5 + 4\mu + 2\mu^2) \Phi_0 + [1.5\mu + \mu^2]\right\} + a_2 [-2 - 2.5\mu + \mu^2] \Phi_0^2 &= 0; \\ z^3 : a_1 \left(-0.5 + \frac{7}{6}\mu + \mu^2\right) + a_2 \Phi_0 \left[-1 + \frac{7}{3}\mu + 2\mu^2\right] + a_3 \Phi_0^2 (4.5 + 4.5\mu + \mu^2) &= 0 \quad \text{і т.д.} \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Цей визначник був обчисле-

ний до п'ятого порядку включно, і, таким чином, було отримано рівняння, що визначає границі областей стійкості / нестійкості ННФ в просторі параметрів системи. Зазначимо, що ці границі для визначників п'ятого порядку є близькими, тому визначники більшого порядку не було обчислено.

Розв'язок, який відповідає другому кореню r_2 , представляється у вигляді аналогічного ряду:

$$U_2 = z_1'^2 (a_0 + a_1 z_1 + \dots). \quad (18)$$

Підставляючи цей ряд у рівняння в варіаціях (12) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z , отримуємо нескінченну рекурентну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладання (18):

$$\begin{aligned} z^{-\frac{1}{2}} : a_1 \frac{3}{4} \left(2h - \left(0.25 + \frac{\mu}{2} \right) \Phi_0^4 \right) &= 0; \\ z^{\frac{1}{2}} : a_0 \left\{ 1.25\mu - 0.375 + \mu^2 \right\} \Phi_0^2 - a_1 \left(1 + \frac{2}{3} \mu \right) \Phi_0^3 + a_2 \frac{15}{4} \left(2h - \left(0.25 + \frac{\mu}{2} \right) \Phi_0^4 \right) &= 0; \\ z^{\frac{3}{2}} : a_0 \left(2.5\mu + 2\mu^2 - 0.5 \right) \Phi_0 - a_1 \left(3.375 + 0.75\mu - \mu^2 \right) \Phi_0^2 - a_2 \left(5 + \frac{10\mu}{3} \right) \Phi_0^3 &= 0; \\ z^{\frac{5}{2}} : a_0 \left(1.375\mu + 2\mu^2 - 0.1875 - \Phi_0 \left(0.5 + \frac{\mu}{3} \right) \right) + a_1 \left(\Phi_0 \left(0.5 + \frac{10}{3} \mu + 2\mu^2 \right) - \Phi_0^2 (2.25 + 3\mu) \right) + \\ + a_2 \left(4.5\Phi_0^2 \left(0.25 + \frac{\mu}{6} \right) + (1.5\mu + \mu^2) \Phi_0^2 - 5\Phi_0^3 \left(0.5 + \frac{\mu}{3} \right) \right) + a_3 \left(7h - 3.5\Phi_0^4 \left(0.25 + \frac{\mu}{6} \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отже, отримана ще одна система лінійних однорідних рівнянь, яка має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Цей визначник було обчислено до п'ятого порядку включно, і, таким чином, отримано рівняння, що зв'язують параметри системи і визначають границі областей стійкості/нестійкості. Зазначимо, що в цьому випадку також ці границі для визначників п'ятого порядку є близькими, тому визначники більшого порядку не було обчислено.

Повторюючи аналогічні перетворення, які тут не наведено, отримуємо рівняння у варіаціях для другої форми коливань у формі наступного рівняння з особливими точками:

$$\frac{d^2 u}{dz_2^2} \left(2h - (0.5 + \mu) \frac{z_2^4}{2} \right) - \frac{du}{dz_2} \left\{ (0.5 + \mu) z_2^3 \right\} + u \left(1.5 + \frac{\mu}{3} \right) z_2^2 = 0. \quad (20)$$

Як і раніше, розв'язки, що відповідають границям областей стійкості/нестійкості в просторі параметрів рівняння в варіаціях, визначаємо рядом (18), де показники особливої точки рівняння (20) знову визначаються співвідношеннями (16). Підставляючи цей ряд в рівняння в варіаціях, отримуємо, як і раніше, нескінченну рекурентну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду, яка тут не наведена. Ця система має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю. Це треба робити як для одного, так і для другого показника особливої точки. Таким чином, отримано рівняння, що зв'язує параметри системи і визначає границі областей стійкості/нестійкості.

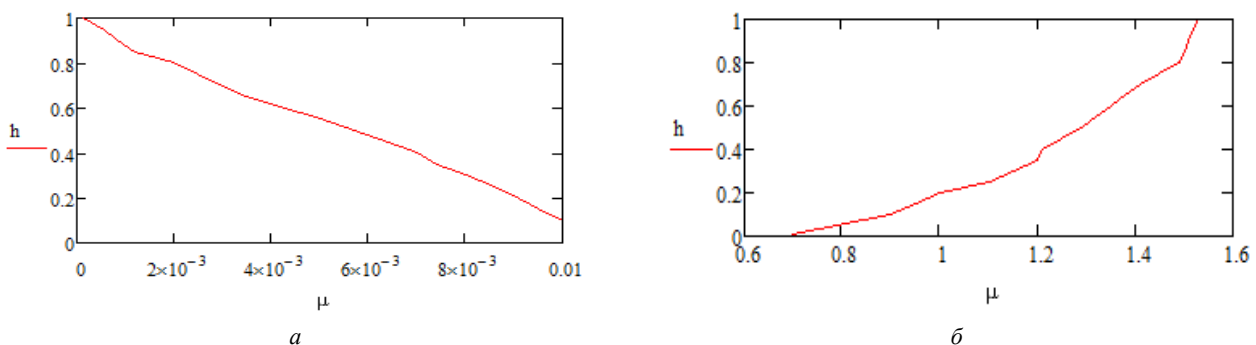


Рис. 1 – Границі між областями стійкості/нестійкості рівнянь у варіаціях у просторі параметрів (h, μ) : а – границя, отримана для першої форми коливань, $z_2 = 0$, $z_1 = z_1(t)$; б – границя, отримана для другої форми коливань, $z_1 = 0$, $z_2 = z_2(t)$.

На рис. 1 показано границі областей стійкості/нестійкості у просторі деяких обраних параметрів системи для першої форми коливань, тобто, $z_2 = 0$, $z_1 = z_1(t)$ (рис. 1, а) та для другої форми коливань, тобто, $z_1 = 0$, $z_2 = z_2(t)$ (рис. 1, б). На рис. 1, а повна енергія системи h змінюється в інтервалі $[0.1; 1]$; параметр μ

змінюється в інтервалі $[0.00013; 0.01]$ при зміні Φ_0 в інтервалі $[0.941; 1.682]$. На рис. 1, б повна енергія системи h змінюється в інтервалі $[0.008; 1]$; параметр μ змінюється в інтервалі $[0.7; 1.53]$ при зміні Φ_0 на інтервалі $[0.404; 1.185]$. Зона стійкості розташована зліва від отриманої границі на рис. 1, а, та справа – для рис. 1, б. Відзначаємо, що границі, отримані для двох різних показників особливої точки, повністю співпадають, як для першої, так і для другої форм коливань.

В якості ілюстрації методом Рунге – Кутта 4-го порядку представлено розв'язок рівняння в варіаціях (8); при цьому параметри μ, h для розрахунку вибираються з областей стійкості / нестійкості, представлених на рис. 1. Так, на рис. 2, а показано обмежений розв'язок рівняння в варіаціях. Цей розв'язок вибирається з області стійкості, представленої на рис. 1, а. А саме, енергія системи $h = 0.2$, $\mu = 0.008$; час t змінюється в інтервалі $[0; 120]$. Зростаючий розв'язок рівняння в варіаціях представлено на рис. 2, б. А саме, розв'язок, представлений на рис. 2, б, вибрано з області нестійкості, показаної на рис. 1, а; тут $h = 0.4$, $\mu = 0.009$, час t змінюється в інтервалі $[0; 600]$.

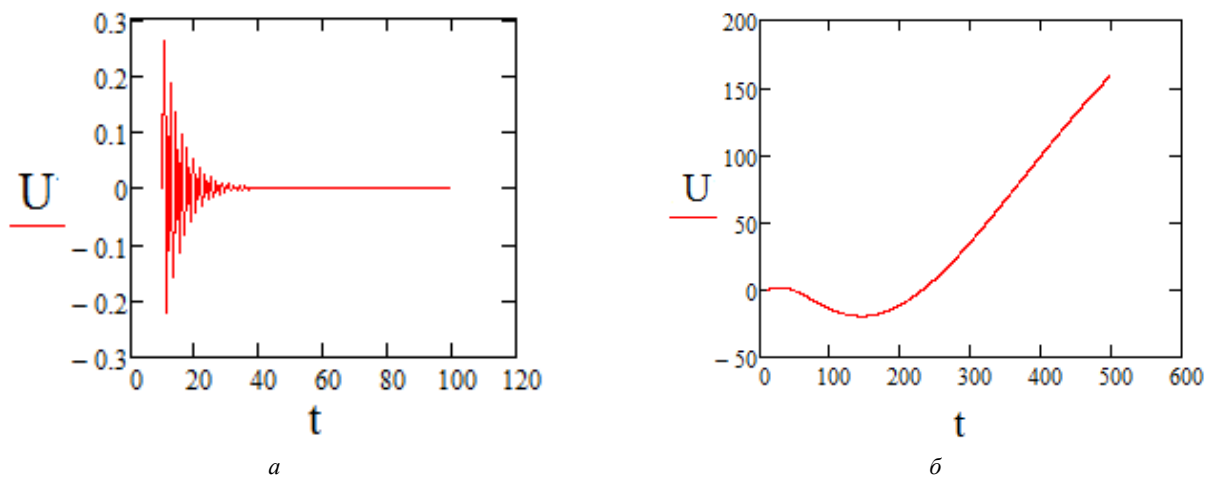


Рис. 2 – Приклади розв'язків рівняння у варіаціях: а – обмежений розв'язок, вибраний з області стійкості на рис. 1, а, розрахунки виконано для $h = 0.2$, $\mu = 0.008$; б – необмежений розв'язок, вибраний з області нестійкості на рис. 1, а, розрахунки виконано для $h = 0.4$, $\mu = 0.009$. Інші параметри відповідають використовуваним раніше для рис. 1, а.

Обмежений та необмежений розв'язки рівняння для варіацій, отримані методом Рунге – Кутта, показані на рис. 3, відповідно, для областей стійкості/нестійкості, представлених на рис. 1, б. А саме, обмежений розв'язок з області стійкості представлено на рис. 3, а для $h = 0.2$, $\mu = 1.4$, час t змінюється на інтервалі $[0; 600]$. Необмежений розв'язок з області нестійкості показано на рис. 3, б для $h = 0.5$, $\mu = 0.8$, час t змінюється на інтервалі $[0, 600]$. Інші параметри, які використовуються в чисельних розрахунках, ті ж, що використовувалися для отримання границі на рис. 1, б.

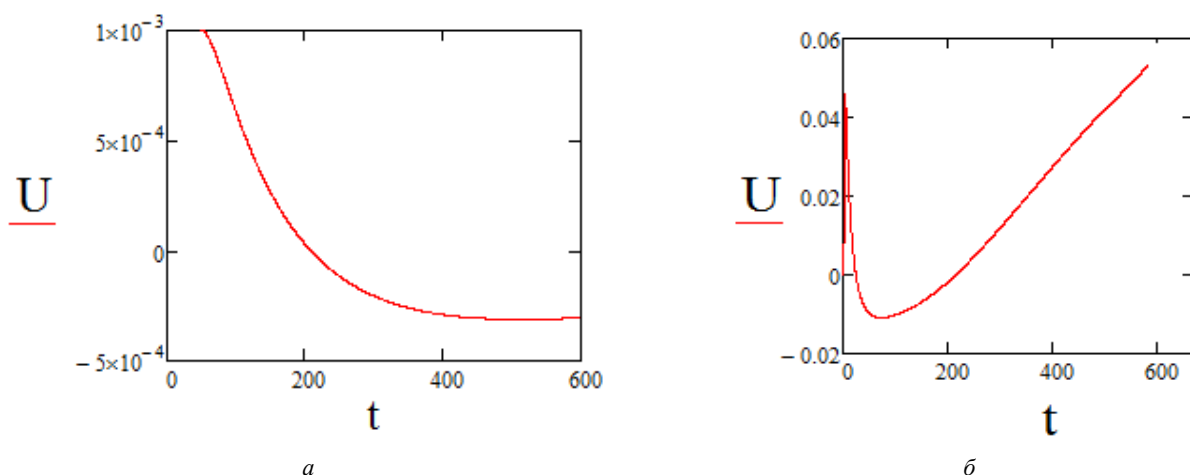


Рис. 3 – Приклади розв'язків рівняння у варіаціях: а – обмежений розв'язок, вибраний з області стійкості на рис. 1, б, розрахунки виконано для $h = 0.2$, $\mu = 1.4$; б – необмежений розв'язок, вибраний з області нестійкості на рис. 1, б, розрахунки виконано для $h = 0.5$, $\mu = 0.8$. Інші параметри відповідають тим, що використані для рис. 1, б.

Як можна побачити з представлених рисунків, так і з результатів аналогічних інших розрахунків розв'язків рівнянь у варіаціях, метод алгебраїзації дозволяє отримати границі областей стійкості та нестійкості з вельми задовільною точністю.

3. Дослідження стійкості форми коливань в моделі стохастичного абсорбера. У цьому розділі розглядається стійкість режиму горизонтальної вібрації в моделі так званого стохастичного абсорбера. Відповідна модель, яка є перспективною для задачі гасіння коливань, вперше розглянута в роботі [14]. Стохастичний абсорбер має форму деякого нежорсткого контуру, що відповідає потенційній енергії системи, яка визначає взаємодію однієї або декількох внутрішніх частинок зі стінкою контейнера. Контейнер кріпиться до масивної стінки лінійно-пружною пружиною (рис. 4).

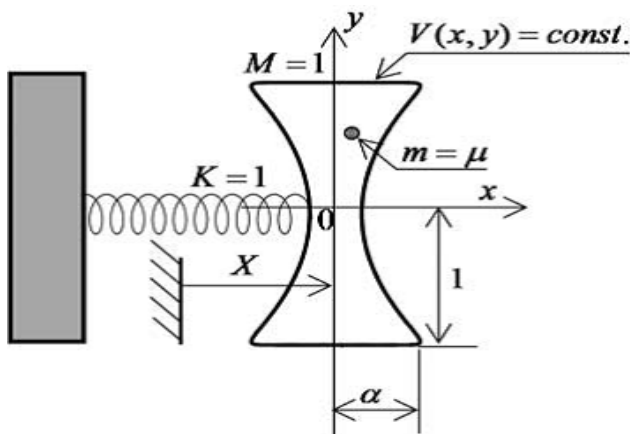


Рис. 4 – Модель стохастичного абсорбера.

Суттєво нелінійні рівняння руху одиночної частинки для системи в малому околі горизонтальної форми коливань $y = 0$ мають такий вигляд [14]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x^{2n-1} &= \frac{\mu}{1+\mu} + \left[\ddot{x} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{\gamma} X \right]; \\ \dot{y} + \lambda x^{2n} y &= 0; \\ \ddot{X} + \mu(\ddot{X} + \dot{x}) + X &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

де β – основний геометричний параметр, що визначає кривизну контура k поблизу прямої $y = 0$; α та μ визначено на рис. 4; $\lambda = -2\beta(\alpha - \beta)$. Кривизну контура представлено у наступному вигляді:

$$k = \frac{2\beta}{(1 + 4\beta^2 y^2)^{3/2}}.$$

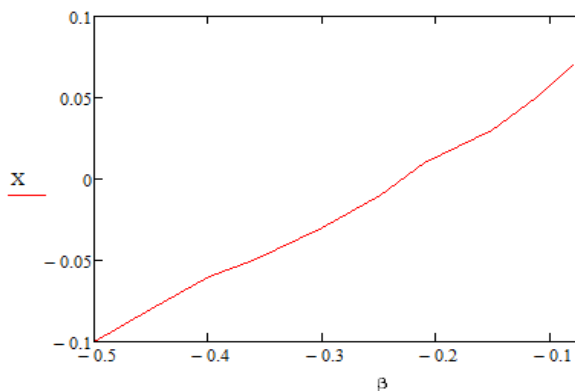


Рис. 5 – Границя стійкості/нестійкості областей для режиму $y = 0$ стохастичного абсорбера.

для $\alpha = 0,5$, $\mu = 0,01$, $n = 10$. Область стійкості розташована праворуч на рис. 5.

Траєкторії руху частинок всередині контейнера протягом проміжку часу $t \leq 3000$ показані на рис. 6 для параметрів, що відповідають областям стійкості / нестійкості, представленим на рис. 5. В даному випадку розрахунок виконано при наступних фіксованих параметрах:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \gamma = 1; \quad n = 10.$$

Обираються різні форми контура, представленого на рис. 4. Для всіх випадків початкове положення частинки є таким: $(x; y) = (0; 0.01)$ з нульовими швидкостями. Нестійкі рухи представлено на рис. 6, а, б, в. Стійкі рухи представлено на рис. 6, г, д, е.

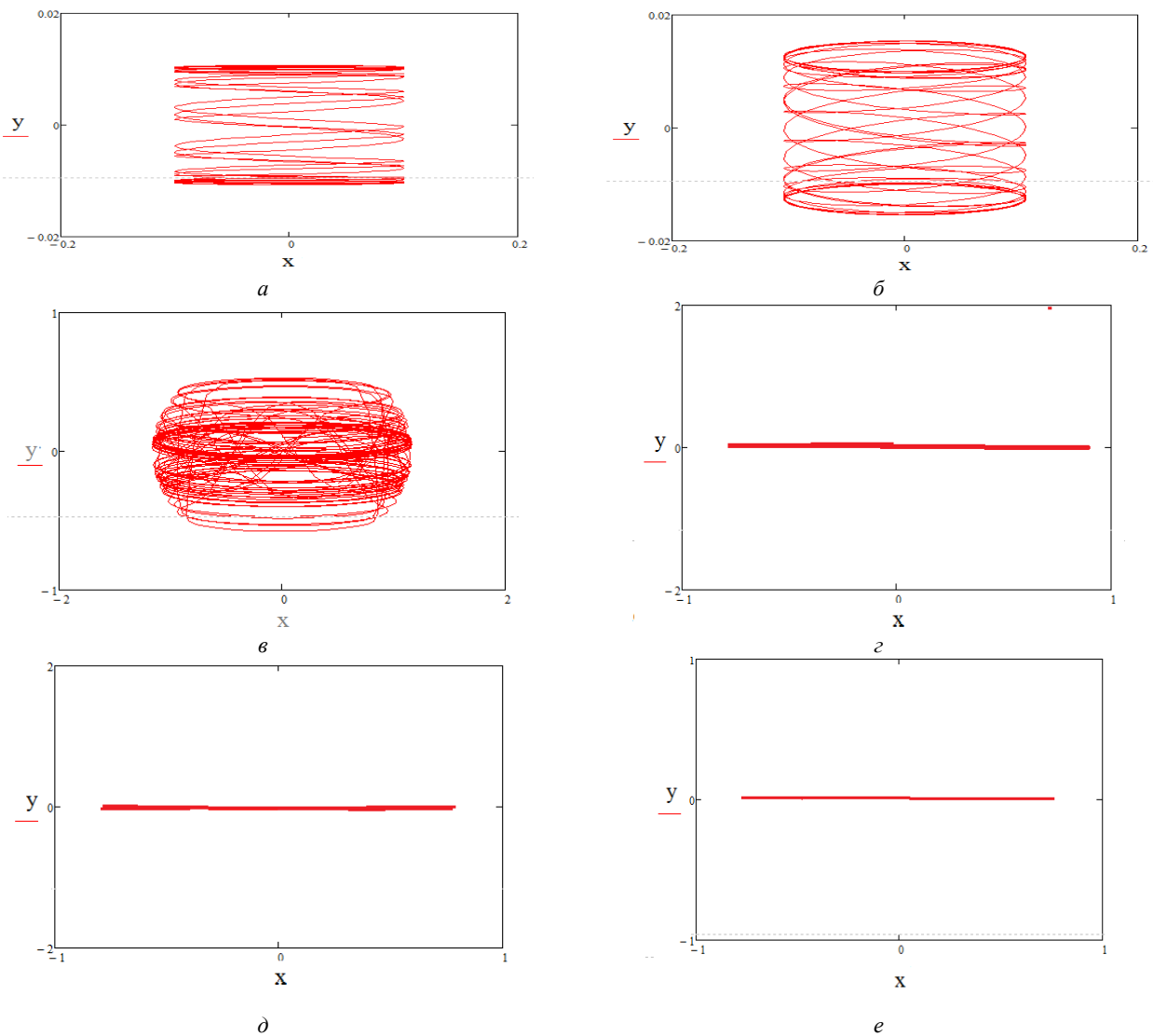


Рис. 6 – Траєкторії руху частинок в середині контейнера (абсорбера) за проміжок часу $t \leq 3000$, отримані при $\alpha = 1/2$; $\gamma = 1$; $n = 10$ та різних формах контуру, а саме: $a - \beta = -0.2$, $X = 0.06$; $b - \beta = -0.1$, $X = 0.09$; $c - \beta = -0.15$, $X = 0.08$; $d - \beta = -0.2$, $X = -0.04$; $e - \beta = -0.1$, $X = 0.04$; $e - \beta = -0.5$, $X = 0.05$.

Висновки. Двома підходами було розглянуто стійкість нелінійних нормальних форм коливань (ННФ) в системі зв'язаних осциляторів на суттєво нелінійній пружній опорі в умовах так званого звукового вакууму та горизонтальної форми коливань для так званого стохастичного абсорбера. Для першої системи проведено дослідження стійкості нелінійних нормальних форм коливань методом алгебраїзації за Айнсом. Границі областей стійкості/нестійкості отримано шляхом аналізу рівняння у варіаціях, що приведено до рівняння з сингулярними точками. Розв'язки, що визначають границі областей стійкості та нестійкості, отримано у вигляді степеневих рядів. Коефіцієнти цих рядів задовольняють системам лінійних однорідних рівнянь, що мають нетривіальний розв'язок, якщо їх визначники дорівнюють нулю. Ця умова дозволяє отримати рівняння, що зв'язують параметри системи і визначають границі областей стійкості/нестійкості. Для другої системи, де аналітичне дослідження рівняння в варіаціях неможливо, використано чисельно-аналітичний критерій стійкості, що пов'язаний з відомим критерієм стійкості за Ляпуновим. Чисельне моделювання за допомогою метода Рунге – Кутта демонструє непогану точність отриманих результатів. Обидва підходи демонструють свою ефективність, що приводить до висновку щодо можливості їх використання в інших задачах дослідження стійкості форм коливань в нелінійних системах. Зокрема, перспективною для застосування вказаних підходів є задача стійкості просторових форм коливань в розподілених пружних системах після дискретизації вказаних систем методом Бубнова – Гальоркіна. В докритичній стадії тут може бути застосований метод алгебраїзації за Айнсом, а в закритичній стадії, коли вихідне положення рівноваги стає нестійким, доцільно використовувати вказаний вище чисельно-аналітичний критерій стійкості. Це пов'язано з тим, що в закритичній стадії під дією зовнішнього періодичного навантаження можливо виникнення області хаотичних коливань такої системи. Зазначимо, що нестійкість деякої просторової форми коливань в подібних системах означає так звану «перекачку енергії» в інші форми просторових коливань.

Список літератури

1. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. – Berlin : Springer-Verlag, 1958. – 696 p.
2. Rosenberg R. M. Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Adv. Appl. Mech.* – 1966. – Vol. 9. – P. 156 – 243. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70008-5.
3. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. – New York : Wiley, 1996. – 552 p.
4. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // *Appl. Mech. Rev.* – 2010. – Vol. 63 (6). – 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
5. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // *Appl. Mech. Rev.* – 2013. – Vol. 65 (2). – 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
6. Lyapunov A. M. *Stability of Motion*. – New York : Academic Press, 1966. – 261 p.
7. Cesari L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. – New York : Springer-Verlag, 1971. – 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85671-6.
8. LaSalle J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. – Philadelphia : SIAM, 1976. – 73 p. DOI: 10.1137/1.9781611970432.
9. Ince E. L. *Ordinary Differential Equations*. – London : Longmans Green, London, 1926. – 558 p.
10. Mikhlin Yu. V., Zhupiev A. L. An application of the Ince algebraization to the stability of non-linear normal vibration modes // *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. – 1997. – Vol. 32 (2). – P. 393 – 409. DOI: 10.1016/S0020-7462(96)00047-9.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions // *Comp. Structures*. – 2004. – Vol. 82. – P. 2733 – 2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
12. Koroleva (Kikot) I. P., Manevitch L. I. Weakly coupled oscillators in the presence of elastic support in the conditions of acoustic vacuum // *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. – 2014. – Vol. 10 (3). – P. 245 – 263. DOI: 10.20537/ND1403001.
13. Koroleva (Kikot) I., Manevitch L., Vakakis A. F. Non-stationary resonance dynamics of a nonlinear sonic vacuum with grounding supports // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 357. – P. 349 – 364. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.07.026.
14. Pilipchuk V. Stochastic energy absorbers based on analogies with soft-wall billiards // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 98. – P. 2671 – 2685. DOI: 10.1007/s11071-019-05109-z.

References (transliterated)

1. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. – Berlin : Springer-Verlag, 1958. 696 p.
2. Rosenberg R. M. Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Adv. Appl. Mech.* 1966, vol. 9, pp. 156–243. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70008-5.
3. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. New York, Wiley, 1996. 552 p.
4. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010, vol. 63 (6), 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
5. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013, vol. 65 (2), 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
6. Lyapunov A. M. *Stability of Motion*. New York, Academic Press, 1966. 261 p.
7. Cesari L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1971. 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85671-6.
8. LaSalle J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. Philadelphia, SIAM, 1976. 73 p. DOI: 10.1137/1.9781611970432.
9. Ince E. L. *Ordinary Differential Equations*. London, Longmans Green, London, 1926. 558 p.
10. Mikhlin Yu. V., Zhupiev A. L. An application of the Ince algebraization to the stability of non-linear normal vibration modes. *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. 1997, vol. 32 (2), pp. 393–409. DOI: 10.1016/S0020-7462(96)00047-9.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Comp. Structures*. 2004, vol. 82, pp. 2733–2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
12. Koroleva (Kikot) I. P., Manevitch L. I. Weakly coupled oscillators in the presence of elastic support in the conditions of acoustic vacuum. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2014, vol. 10 (3), pp. 245–263. DOI: 10.20537/ND1403001.
13. Koroleva (Kikot) I., Manevitch L., Vakakis A. F. Non-stationary resonance dynamics of a nonlinear sonic vacuum with grounding supports. *Journal of Sound and Vibration*. 2015, vol. 357, pp. 349–364. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.07.026.
14. Pilipchuk V. Stochastic energy absorbers based on analogies with soft-wall billiards. *Nonlinear Dynamics*. 2019, vol. 98, pp. 2671–2685. DOI: 10.1007/s11071-019-05109-z.

Надійшла (received) 29.09.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Голоскубова Наталія Сергіївна – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Голоскубова Наталья Сергеевна – аспірант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Goloskubova Natalia Sergeevna – PhD Student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (098) 310-20-71; e-mail: nataligoloskubova1992@ukr.net.

Міхлін Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri.Mikhlin@gmail.com.

Михлин Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri. Mikhlin@gmail.com.

Mikhlin Yuri Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuri.Mikhlin@gmail.com.

Д. В. КУРНОСЕНКО, В. П. САВЧУК, Г. Я. ТУЛУЧЕНКО

УМОВИ МОНОТОННОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КРИВИХ РАМСЕЯ ТА ЇХ МОДИФІКАЦІЙ

Розроблено алгоритм апроксимації експериментальних даних кривою Рамсея та її модифікаціями, який забезпечує монотонне зростання наближаючої функції на проміжку $[0; +\infty)$ та існування заданої кількості точок перегибу. Крива Рамсея належить до сім'ї логістичних кривих, які широко використовуються при моделюванні процесів обмеженого росту в різних предметних галузях. Класична крива Рамсея має два параметри та володіє лівою фіксованою асиметрією. Відома також її трьохпараметрична модифікація, яка забезпечує можливість зміщення по осі ординат. Широке практичне використання кривої Рамсея як з двома параметрами, так і її модифікацій з більшою кількістю параметрів, для наближення експериментальних залежностей стримується частою втратою цією кривою логістичної форми при виконанні апроксимації без додаткових вимог до співвідношень між її параметрами. В статті розглядаються модифікації кривої Рамсея з трьома та п'ятьма параметрами. Перша та друга похідні від досліджуваних модифікацій функції Рамсея мають особливу структуру. Вони є добутками поліноміальної та експоненціальної функцій. Це дозволяє використовувати теорему Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку для контролю форми апроксимуючої кривої. Показано, що з ростом кількості параметрів у модифікованій кривій значно зростає кількість можливих сполучень обмежень на значення параметрів, які забезпечують збереження її S -подібної форми. Розв'язання задачі апроксимації в цьому випадку складається з розв'язання низки задач умовної глобальної оптимізації з різними обмеженнями та вибору розв'язку, який забезпечує найменшу похибку наближення. Також виконані дослідження щодо точності оцінювання параметрів кривої Рамсея в залежності від точності експериментальних даних. Для імітації наявності похибок вимірювань до значень детермінованої послідовності додавалися значення нормально розподіленої випадкової величини з математичним сподіванням, рівним нулю, та різними значеннями середньоквадратичного відхилення для різних серій обчислювальних експериментів. Обчислювальні експерименти показали суттєву чутливість значень параметрів функції Рамсея до точності вимірювань експериментальних даних.

Ключові слова: крива Рамсея, апроксимація, умови монотонності, види асиметрії логістичних кривих, теорема Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку.

Д. В. КУРНОСЕНКО, В. П. САВЧУК, Г. Я. ТУЛУЧЕНКО

УСЛОВИЯ МОНОТОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ КРИВЫХ РАМСЕЯ И ИХ МОДИФИКАЦИЙ

Разработан алгоритм аппроксимации экспериментальных данных кривой Рамсея и ее модификациями, который обеспечивает монотонное возрастание приближающей функции на промежутке $[0; +\infty)$ и существование заданного количества точек перегиба. Кривая Рамсея принадлежит к семье логистических кривых, которые широко используются при моделировании процессов ограниченного роста в разных предметных областях. Классическая кривая Рамсея имеет два параметра и владеет левой фиксированной асимметрией. Известна также ее трехпараметрическая модификация, которая обеспечивает возможность смещения по оси ординат. Широкое практическое использование кривой Рамсея как с двумя параметрами, так и с большим количеством параметров, для приближения экспериментальных зависимостей сдерживается частой потерей этой кривой логистической формы при выполнении аппроксимации без дополнительных требований к соотношениям между ее параметрами. В статье рассматриваются модификации кривой Рамсея с тремя и пятью параметрами. Первая и вторая производные от исследуемых модификаций функции Рамсея имеют особую структуру. Они являются произведениями полиномиальной и экспоненциальной функций. Это позволяет использовать теорему Штурма о количестве корней полинома на отрезке для контроля формы аппроксимирующей кривой. Показано, что с ростом количества параметров у модифицированной кривой существенно возрастает количество возможных сочетаний ограничений на значения параметров, которые обеспечивают сохранение ее S -подобной формы. Решение задачи аппроксимации в этом случае состоит из решения последовательности задач условной глобальной оптимизации с разными ограничениями и выборе решения, которое обеспечивает наименьшую ошибку приближения. Также выполнены исследования точности оценивания параметров кривой Рамсея в зависимости от точности экспериментальных данных. Для имитации наличия ошибок измерений к значениям детерминированной последовательности прибавлялись значения нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием, равным нулю, и разными значениями среднего квадратического отклонения для разных серий вычислительных экспериментов. Вычислительные эксперименты показали существенную чувствительность значений параметров функции Рамсея к точности измерения экспериментальных данных.

Ключевые слова: кривая Рамсея, аппроксимация, условия монотонности, виды асимметрии логистических кривых, теорема Штурма о количестве корней полинома на отрезке.

D. V. KURNOSENKO, V. P. SAVCHUK, H. YA. TULUCHENKO

CONDITIONS OF MONOTONE APPROXIMATION OF RAMSEY CURVES AND THEIR MODIFICATIONS

The algorithm for approximating the experimental data of the Ramsey curve and its modifications has been developed, which provides a monotonic increase of the approximating function in the interval $[0; +\infty)$ and an existence of a given number of inflection points. The Ramsey curve belongs to the family of logistic curves that are widely used in modeling of limited increasing processes in various subject fields. The classical Ramsey curve has two parameters and has a left constant asymmetry. It is also known that its three-parameter modification provides the possibility of displacement along the axes of ordinate. The extensive practical use of the Ramsey curve with both two and more parameters for approximating experimental dependences is restrained by the frequent loss by this curve of the logistic shape when approximating without additional restrictions on the relationships between its parameters. The article discusses modifications of the Ramsey curve with three and five parameters. The first and second derivatives of the studied modifications of the Ramsey function have a special structure. They are products of polynomial and exponential functions. This allows using Sturm's theorem on the number of polynomial roots in a given interval to control the shape of the approximating curve. It has been shown that with an increase in the number of parameters for the modified curve, the number of possible combinations of restrictions on the values of the parameters ensuring the preservation of its S -like shape increases significantly. The solution to the approximation problem in this case consists of solving a sequence of conditional global optimization problems with different constraints and choosing a solution that provides the smallest approximation error. Also, the studies of the accuracy of estimating the parameters of the Ramsey curve in accordance with the accuracy of the experimental data have been carried out. In order to simulate the presence of measurement errors, the values of a normally distributed random variable with a mathematical expectation equal to

zero and different values of the standard deviation for different series of computational experiments were added to the values of the deterministic sequence. Computational experiments have shown a significant sensitivity of the values of the Ramsey function parameters to the measurement accuracy of experimental data.

Key words: Ramsey curve, approximation, monotonicity conditions, kinds of logistic curves asymmetry, Sturm theorem on the number of polynomial roots in a given interval.

Вступ. Для різних предметних галузей актуальною є проблема підвищення точності оцінювання параметрів логістичних кривих за результатами експериментального дослідження динамічних процесів. Модель Рамсея найчастіше використовується в економічних дослідженнях [1 – 3, 5 – 7], але її застосування представляє інтерес і при моделюванні фізичних процесів. Криві з великою кількістю параметрів краще описують експериментальні залежності зі складною структурою, проте можуть втрачати очікувану форму при розв'язанні задач апроксимації без додаткових обмежень. Залучення лінеаризуючих перетворень, як правило, приводить до отримання змішених оцінок параметрів наближаючої кривої. Вказані питання потребують подальшого дослідження, зокрема, стосовно кривої Рамсея та її модифікацій.

Аналіз останніх досліджень. Крива Рамсея, запропонована в роботі [7], відрізняється від інших S – подібних кривих тим, що в неї практично відсутня стадія повільного зростання. Позитивною якістю кривої Рамсея є можливість виконання її ідентифікації аналітично після застосування Z – перетворення [6].

У роботі [1] досліджуються особливості ідентифікації двопараметричної кривої Рамсея по послідовності експериментальних даних, що містять шуми, які моделюються значеннями нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним сподіванням та обмеженою дисперсією. Автором публікації [1] порівнюється точність відновлення параметрів кривої Рамсея декількома методами розв'язання задачі апроксимації:

- з попереднім застосуванням Z – перетворення до моделі;
- методу узагальнених повних найменших квадратів;
- методу розширених інструментальних змінних.

На підставі аналізу результатів обчислювальних експериментів робиться висновок, що класичний метод найменших квадратів у комбінації з Z – перетворенням моделі приводить до отримання змішених оцінок значень параметрів.

Переваги двох останніх методів виявляються в залежності від кроку дискретизації експериментальних даних.

У роботі [5] досліджуються модифіковані криві Рамсея з трьома і чотирма параметрами, які дозволяють зміщувати класичну криву Рамсея вздовж координатних осей. Для оцінки точності відновлення значень коефіцієнтів до детермінованої послідовності експериментальних даних також додається стохастична компонента. Для розв'язання задачі апроксимації застосовується класичний метод найменших квадратів у комбінації з Z – перетворенням та метод Левенберга – Марквардта. Суттєвої переваги одного методу перед іншими не виявлено. Очікувано точність ідентифікації в обох випадках зростає з ростом об'єму вибірки експериментальних даних. Авторами роботи [5] також окремо вивчається точність розв'язків задачі апроксимації експериментальних залежностей кривою Рамсея для випадків наявності та відсутності точки перегину.

Постановка задачі. Встановити умови збереження проміжків монотонності при апроксимації експериментальних даних кривими Рамсея та їх модифікаціями.

Основні результати.

1. Дослідження властивостей функції Рамсея.

1.1. Загальні положення.

Розглянемо цікавий з точки зору практичних застосувань випадок функції Рамсея, коли її графік проходить через початок координат:

$$f(x) = K + (-K + Bx) \cdot \exp(-rx), \quad (1)$$

де $K \geq 0$, $r \geq 0$.

Для того, щоб функція (1) на проміжку $[0; +\infty)$ монотонно зростала, її похідна на цьому проміжку повинна набувати додатних значень. Особливі структури виразів першої похідної:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (B + rK - rBx) \cdot \exp(-rx) \quad (2)$$

та другої похідної функції (1):

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = r \cdot (-2B - rK + rBx) \cdot \exp(-rx) \quad (3)$$

дозволяють використовувати *теорему Штурма* про кількість коренів полінома на відрізьку для контролю проміжків монотонності та опуклості функції Рамсея.

1.2. Дослідження умов монотонного зростання функції Рамсея на проміжку $[0; +\infty)$.

Із виразу (2) першої похідної функції Рамсея очевидно, що знак похідної залежить від першого множника, який є поліномом. Позначимо цей множник за $G(x)$:

$$G(x) = B + rK - rBx. \quad (4)$$

Побудуємо для полінома (4) систему поліномів Штурма (табл. 1):

$$G_0(x) = B + rK - rBx; \quad G_1(x) = -rB. \quad (5)$$

Таблиця 1 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (4) в точках 0 та $+\infty$

Q	$G_0(Q)$	$G_1(Q)$
0	$\text{sgn}(B + rK)$	$\text{sgn}(-rB)$
$+\infty$	$\text{sgn}(-rB)$	$\text{sgn}(-rB)$

Таблиця 2 – Можливі випадки чергування знаків значень системи поліномів Штурма (5)

№ варіанта	Q	$G_0(Q)$	$G_1(Q)$	Кількість змін знаків
1	0	+	+	0
	$+\infty$	+	+	0
2	0	-	-	0
	$+\infty$	-	-	0
3	0	-	+	1
	$+\infty$	+	+	0
4	0	+	-	1
	$+\infty$	-	-	0

Із даних табл. 2 робимо висновок, що монотонне зростання функції Рамсея (1) на проміжку $[0; +\infty)$ забезпечується тільки при варіанті 1 зміни знаків. При чому використання нестрогих нерівностей не змінює нульової різниці кількості змін знаків поліномів Штурма в 0 та $+\infty$. Таким чином, для монотонного зростання функції Рамсея (1) на проміжку $[0; +\infty)$ повинні виконуватися обмеження:

$$\{K \geq 0; \quad r \geq 0; \quad B \leq 0; \quad B + rK \geq 0. \quad (6)$$

1.3. Дослідження проміжків опуклості функції Рамсея.

Із виразу (3) другої похідної функції Рамсея очевидно, що знак другої похідної залежить від поліноміально-го множника $(-2B - rK + rBx)$. Позначимо його за $P(x)$:

$$P(x) = -2B - rK + rBx. \quad (7)$$

Побудуємо для полінома (7) систему поліномів Штурма (табл. 3):

$$P_0(x) = -2B - rK + rBx; \quad P_1(x) = rB. \quad (8)$$

Таблиця 3 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (7) в точках 0 та $+\infty$

Q	$P_0(Q)$	$P_1(Q)$
0	$\text{sgn}(-2B - rK)$	$\text{sgn}(rB)$
$+\infty$	$\text{sgn}(rB)$	$\text{sgn}(rB)$

Таблиця 4 – Можливі випадки чергування знаків значень системи поліномів Штурма (8)

№ варіанта	Q	$P_0(Q)$	$P_1(Q)$	Кількість змін знаків
1	0	+	+	0
	$+\infty$	+	+	0
2	0	-	-	0
	$+\infty$	-	-	0
3	0	-	+	1
	$+\infty$	+	+	0
4	0	+	-	1
	$+\infty$	-	-	0

Враховуючи систему обмежень (6) на значення коефіцієнтів функції Рамсея, з табл. 4 для подальших досліджень обираємо варіанти 2 та 4.

При варіанті 2 функція Рамсея є опуклою на проміжку $[0; +\infty)$, а при варіанті 4 має одну точку перегину. Продовжимо дослідження четвертого варіанту, як більш цікавого для практичних застосувань. Таким чином, монотонне зростання функції Рамсея на проміжку $[0; +\infty)$ з наявністю на цьому проміжку однієї точки перегину забезпечується системою нерівностей:

$$\begin{cases} K \geq 0; & r \geq 0; & B \leq 0; \\ & B + rK \geq 0; \\ & 2B + rK \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

або остаточно:

$$\begin{cases} K \geq 0; & r \geq 0; & B \leq 0; \\ & B \geq -rK; \\ & B \leq -\frac{rK}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Окремо відзначимо, що вимога $B \leq 0$ є надлишковою, оскільки вона автоматично виконується при виконанні двох останніх нерівностей з системи (10) при вказаних значеннях параметрів K та r .

2. Дослідження властивостей модифікованих функцій Рамсея.

2.1. Модифікована функція Рамсея з кубічним поліномом.

У монографії [5, С. 38 – 40] вказується на можливість узагальнення функції Рамсея (1) за рахунок підвищення степеня поліноміального множника при експоненті, але одразу зазначається, що така модифікація без спеціальних обмежень на значення коефіцієнтів неминуче приведе до втрати логістичного характеру форми графіку модифікованої функції.

Розглянемо модифіковану криву Рамсея з кубічним поліномом:

$$f(x) = k_0 + (-k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3) \cdot \exp(-rx), \quad (11)$$

де $k_0 \geq 0, r \geq 0$.

Перша похідна функції (11) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3) \cdot \exp(-rx), \quad (12)$$

а друга похідна функції (11) – у вигляді:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = (2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3) \cdot \exp(-rx). \quad (13)$$

Очевидно, що структура похідних модифікованої функції Рамсея (11) також дозволяє контролювати форму її графіку за допомогою згадуваної вище теореми Штурма.

2.1.1. Дослідження умов монотонного зростання на проміжку $[0; +\infty)$ модифікованої функції Рамсея з кубічним поліномом.

Позначимо поліноміальний множник у виразі першої похідної (12) модифікованої функції Рамсея (11) за $G(x)$:

$$G(x) = k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3. \quad (14)$$

Побудуємо для полінома (14) систему поліномів Штурма:

$$G_0(x) = k_1 + rk_0 + (2k_2 - rk_1)x + (3k_3 - rk_2)x^2 - rk_3x^3;$$

$$G_1(x) = (2k_2 - rk_1) + 2(3k_3 - rk_2)x - rk_3x^2;$$

$$G_2(x) = -\frac{1}{9rk_3} \left(6k_3k_2 + (6k_3k_1 - 2k_2^2)r + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^2 \right) + \frac{2}{9rk_3} \cdot \left(-9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2 \right) x;$$

$$G_3(x) = \frac{9}{4} \cdot \frac{rk_3}{\left(-9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2 \right)^2} \cdot \left((18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^4 - \right. \\ \left. - 4(3k_1k_3 - k_2^2)r^2 + 4k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r + 36k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2) \right). \quad (15)$$

Введемо позначення для складових частин системи поліномів Штурма (15):

$$G_{2,0} = -\frac{1}{k_3} \left(6k_3k_2 + (6k_3k_1 - 2k_2^2)r + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^2 \right);$$

$$G_{2,\infty} = \frac{1}{k_3} \cdot \left(-9k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2 \right);$$

$$G_{3,0,\infty} = k_3 \cdot \left((18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^4 - 4(3k_1k_3 - k_2^2)^2 r^2 + \right. \\ \left. + 4k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r + 36k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2) \right).$$

Таблиця 5 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (14) в точках 0 та $+\infty$

Q	$G_0(Q)$	$G_1(Q)$	$G_2(Q)$	$G_3(Q)$
0	$\text{sgn}(k_1 + rk_0)$	$\text{sgn}(2k_2 - rk_1)$	$\text{sgn}(G_{2,0})$	$\text{sgn}(G_{3,0,\infty})$
$+\infty$	$\text{sgn}(-rk_3)$	$\text{sgn}(-rk_3)$	$\text{sgn}(G_{2,\infty})$	$\text{sgn}(G_{3,0,\infty})$

Очевидно, що в табл. 5 можливі 256 випадки різних розстановок знаків. З них необхідно відібрати ті, які задовольняють певним вимогам:

- 1) $\text{sgn}(G_0(0)) > 0$;
- 2) $\text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_0(x)\right) > 0$;
- 3) $\text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_0(x)\right) = \text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x)\right)$;
- 4) $\text{sgn}(G_3(0)) = \text{sgn}\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G_3(x)\right)$;
- 5) $W(0) = W(+\infty)$, W – кількість змін знаків в рядках табл. 5.

Перша і друга вимоги забезпечують зростання функції (11), коли $x=0$ та $x \rightarrow +\infty$. Третя вимога викликана тим, що коефіцієнти при старших мономах в поліномах $G_0(x)$ та $G_1(x)$ є однаковими. Четверта вимога відповідає тому факту, що поліном $G_3(x)$ є константою і не змінює свого знаку. П'ята вимога відповідає умові теореми Штурма і забезпечує рівну кількість змін знаків в кожному рядку табл. 5.

Після врахування всіх перелічених вимог з 256 випадків залишається 10. Всі ці випадки забезпечують монотонне зростання модифікованої функції Рамсея на проміжку $[0; +\infty)$. Відзначимо, що в даному дослідженні не враховуються можливі нульові значення поліномів з системи Штурма, як малоймовірні, оскільки коефіцієнти поліномів розраховуються на підставі експериментальних даних, які містять похибки вимірювань.

Для кожного з 10 відібраних випадків формується система обмежень на коефіцієнти (15) модифікованої функції Рамсея та розв'язується відповідна задача умовної глобальної мінімізації середньоквадратичної похибки наближення. З отриманих розв'язків обирається той, який доставляє найменше значення цільової функції.

В табл. 6 наведені три з 10 випадків чергування знаків коефіцієнтів (15), які забезпечують монотонне зростання функції.

Таблиця 6 – Приклади можливих випадків чергування знаків значень системи поліномів Штурма (15)

№ варіанта	Q	$G_0(Q)$	$G_1(Q)$	$G_2(Q)$	$G_3(Q)$	Кількість змін знаків
1	0	+	+	+	+	0
	$+\infty$	+	+	+	+	0
2	0	+	+	+	-	1
	$+\infty$	+	+	-	-	1
3	0	+	-	+	+	2
	$+\infty$	+	+	-	+	2

За табл. 6 робимо висновок, що варіанту 3, наприклад, відповідає система обмежень:

$$\begin{cases} k_0 \geq 0; r \geq 0; \\ k_1 + rk_0 > 0; \\ 2k_2 - rk_1 < 0; \\ G_{2,0} > 0; G_{3,0,\infty} > 0; \\ k_3 < 0; G_{2,\infty} < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Інші системи обмежень формуються аналогічно.

2.1.2. Дослідження проміжків опуклості модифікованої функції Рамсея з кубічним поліномом.

Із виразу (13) другої похідної модифікованої функції Рамсея (11) також очевидно, що знак другої похідної залежить від поліноміального множника, який позначимо за $P(x)$:

$$P(x) = 2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3. \quad (17)$$

Побудуємо для полінома (17) систему поліномів Штурма:

$$P_0(x) = 2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0 + (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)x + r(-6k_3 + rk_2)x^2 + r^2k_3x^3; \quad (18)$$

$$P_1(x) = (6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1) + 2r(-6k_3 + rk_2)x + 3r^2k_3x^2;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{9rk_3} \left(-36k_3^2 + 12k_3k_2r + (12k_3k_1 - 4k_2^2)r^2 + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^3 \right) + \\ + \frac{2}{9k_3} \cdot (18k_3^2 + (-3k_3k_1 + k_2^2)r^2)x;$$

$$P_3(x) = -\frac{9}{4} \cdot \frac{k_3}{(-18k_3^2 + (3k_3k_1 - k_2^2)r^2)^2} \times \left((18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^6 - \right. \\ \left. - 4(3k_1k_3 - k_2^2)r^4 + 8k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r^3 + 144k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2)r^2 - 432k_3^4 \right).$$

Введемо позначення для складових частин системи поліномів Штурма (18):

$$P_{2,0} = \frac{1}{k_3} \left(-36k_3^2 + 12k_3k_2r + (12k_3k_1 - 4k_2^2)r^2 + (k_1k_2 + 9k_3k_0)r^3 \right);$$

$$G_{2,\infty} = \frac{1}{k_3} \cdot (18k_3^2 + (-3k_3k_1 + k_2^2)r^2);$$

$$P_{3,0,\infty} = -k_3 \cdot \left((18k_0k_1k_2k_3 - k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3 - 4k_0k_2^3 + 27k_0^2k_3^2)r^6 - 4(3k_1k_3 - k_2^2)r^4 + \right. \\ \left. + 8k_3(9k_1k_2k_3 + 27k_0k_3^2 - 2k_2^3)r^3 + 144k_3^2(3k_1k_3 - k_2^2)r^2 - 432k_3^4 \right).$$

Таблиця 7 – Значення знаків системи поліномів Штурма для полінома (17) в точках 0 та $+\infty$

Q	$P_0(Q)$	$P_1(Q)$	$P_2(Q)$	$P_3(Q)$
0	$\text{sgn}(2k_2 - 2rk_1 - r^2k_0)$	$\text{sgn}(6k_3 - 4rk_2 + r^2k_1)$	$\text{sgn}(P_{2,0})$	$\text{sgn}(P_{3,0,\infty})$
$+\infty$	$\text{sgn}(k_3)$	$\text{sgn}(k_3)$	$\text{sgn}(P_{2,\infty})$	$\text{sgn}(P_{3,0,\infty})$

У табл. 7 також можливі 256 випадки різних розстановок знаків. У разі наявності апріорної інформації про кількість точок перегину досліджуваної функції, з повного набору відбирають ті випадки, які забезпечують потрібну кількість точок перегину. Цими обмеженнями доповнюють обмеження з пп. 2.1.1.

Результати обчислювальних експериментів.

Загальні умови проведення обчислювальних експериментів.

Усі обчислювальні експерименти з оцінки параметрів кривої Рамсея та її модифікацій проводилися шляхом розв'язання задачі умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією:

$$S = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2, \quad (19)$$

де N – кількість експериментальних даних; $(x_i; y_i)$ – координати експериментальних точок; $f(x)$ – рівняння кривої Рамсея або її модифікацій.

Обмеження на припустимі значення оцінок параметрів описуються нижче, в кожному тестовому прикладі окремо, відповідно до умов збереження проміжків монотонного зростання та наявності точок перегину в досліджуваній кривій Рамсея або її модифікацій.

Для імітації наявності похибок вимірювань до значень детермінованої послідовності додаються значення нормально розподіленої випадкової величини ξ_i з математичним сподіванням $M(\xi) = 0$ та середньо квадратичним відхиленням $\sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$ або $\sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$.

Для знаходження оцінок параметрів досліджуваних моделей за згенерованими експериментальними даними використовується метод Conjugate Direction with Orthogonal Shift (CDOS), що реалізований в пакеті DirectSearch, який сумісний з математичним процесором Maple [4].

Для пошуку умовного глобального екстремуму задачі оптимізації методом CDOS необхідно вказувати діапазони змін початкових значень шуканих параметрів. Як відомо [1], традиційна крива Рамсея може бути лінеаризована відносно своїх параметрів за допомогою Z – перетворення. Тому на допоміжному кроці оцінки параметрів кривої Рамсея можуть бути отримані за методикою, описаною в роботі [1]. На їх підставі визначається інтервал зміни значень шуканої оцінки параметра θ^* як $[0,5 \cdot \theta^*; 1,5 \cdot \theta^*]$, який може бути розширений у разі локалізації точки умовного глобального екстремуму в околах кінців вказаного відрізка. Задача встановлення проміжків зміни шуканих оцінок параметрів кривої Рамсея та її модифікацій є окремою задачею і виходить за межі даного дослідження.

Потреба в повторному розв'язанні задачі оцінювання параметрів досліджуваної кривої обумовлюється низкою причин. По-перше, отримані після лінеаризації оцінки значень параметрів є зміщеними оцінками [1]. По-друге, розглянуті в статті модифікації кривої Рамсея не можуть бути реалізовані вказаним в роботі [1] методом.

Тест 1. Оцінка параметрів кривої Рамсея з трьома параметрами.

Змодельємо послідовність експериментальних даних на основі кривої Рамсея з параметрами $K=1$, $r=1$, $B=-0.75$:

$$f(x) = 1 + (-1 - 0.75x) \cdot \exp(-x). \quad (20)$$

Нехай для обчислювального експерименту число експериментальних даних становить $N=11$, які генеруються в рівновіддалених точках відрізка $[0; 5]$ з кроком $\Delta x = 0.5$.

Оцінимо значення параметрів кривої (1) за експериментальними даними $(x_i; y_i)$, де $x_i = 0 + (i-1) \cdot \Delta x$; $i=1 \dots N$; $y_i = f(x_i) + \xi_i$; функція $f(x)$ визначається формулою (20).

Для цього розв'яжемо задачу умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією (19) та обмеженнями (6). Приклади ідентифікації функції (20) за випадково згенерованими послідовностями експериментальних даних представлені в табл. 8 та на рис. 1.

Таблиця 8 – Результати оцінювання параметрів функції (20)

Метод оцінювання	$\sigma(\xi)$	Оцінки параметрів функції (20)			Середньо квадратична похибка апроксимації
		K	B	r	
Точні значення	0,00	1,00	-0,75	1,00	0,00
Оцінки за допомогою CDOS	$5 \cdot 10^{-2}$	1,27	-0,00	0,33	$3,91 \cdot 10^{-3}$
	$1 \cdot 10^{-2}$	1,00	-0,75	1,00	$1,10 \cdot 10^{-4}$

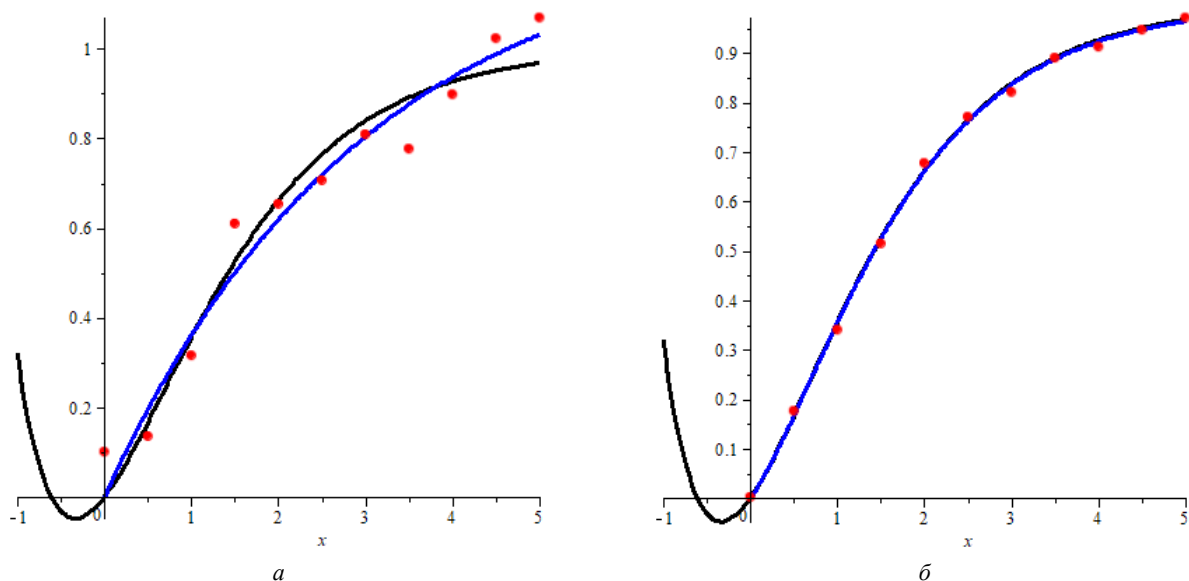


Рис. 1 – Приклади ідентифікації функції (20), коли: а – $\sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$; б – $\sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$;

— — графік функції (20) з точними значеннями параметрів; — — графік функції (1) з оцінками параметрів;
• — точки експериментальної послідовності.

З рис. 1 очевидно, що точність оцінювання параметрів очікувано залежить від точності визначення експериментальних даних. Але за будь-яких обставин відновлена функція є зростаючою на проміжку $[0; +\infty)$, навіть, коли експериментальна залежність на цьому проміжку не є монотонною (рис. 1).

Тест 2. Оцінка параметрів кривої Рамсея з п'ятьма параметрами.

Змодельємо послідовність експериментальних даних на основі кривої Рамсея (11) з параметрами $k_0 = 1$, $k_1 = -0.75$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = -0.4$, $r = 1$:

$$f(x) = 1 + (-1 - 0.75x + 0.5x^2 - 0.4x^3) \cdot \exp(-x). \quad (21)$$

На відрізку $[0; 10]$ згенеруємо експериментальну послідовність із 21 точки з кроком по осі абсцис $\Delta x = 0.5$.

Параметри стохастичної компоненти збережемо рівними до обраних в тесті 1.

Для оцінки параметрів кривої (11) розв'яжемо задачу умовної глобальної оптимізації з цільовою функцією (19) та кожним набором обмежень, які обговорювалися в пп. 2.1.1. Приклади ідентифікації функції (21) за випадково згенерованими послідовностями експериментальних даних представлені в табл. 9 та на рис. 2.

Для обох значень дисперсії стохастичної компоненти розв'язок оптимізаційної задачі був знайдений для обмежень виду:

$$\begin{cases} k_0 \geq 0; & r \geq 0; \\ k_1 + rk_0 > 0; \\ 2k_2 - rk_1 > 0; \\ G_{2,0} < 0; & G_{3,0,\infty} < 0; \\ k_3 < 0; & G_{2,\infty} > 0. \end{cases}$$

Таблиця 9 – Результати оцінювання параметрів функції (21)

Метод оцінювання	$\sigma(\xi)$	Оцінки параметрів функції (21)					Середньо квадратична похибка апроксимації
		k_0	k_1	k_2	k_3	r	
Точні значення	0,00	1,00	-0,75	0,50	-0,40	1	0,00
Оцінки за допомогою CDOS	$5 \cdot 10^{-2}$	0,98	-0,50	0,12	-0,21	0,91	$2,87 \cdot 10^{-3}$
	$1 \cdot 10^{-2}$	1,00	-0,47	0,13	-0,25	0,94	$1,10 \cdot 10^{-4}$

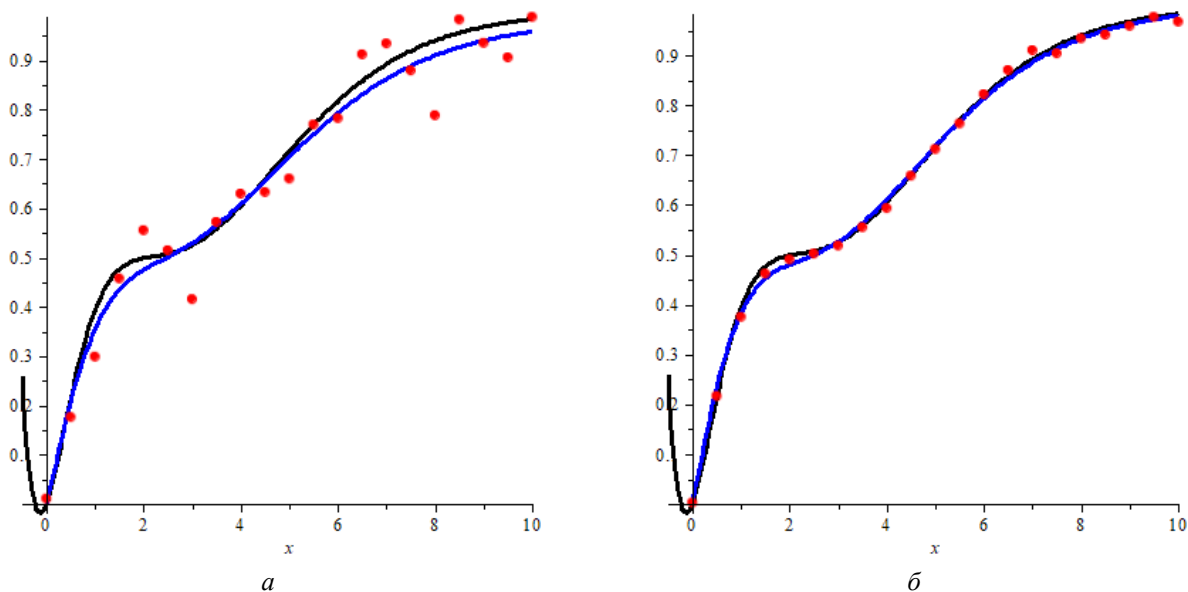


Рис. 2 – Приклади ідентифікації функції (21), коли: $a - \sigma(\xi) = 5 \cdot 10^{-2}$; $b - \sigma(\xi) = 1 \cdot 10^{-2}$;

— — графік функції (21) з точними значеннями параметрів; — — графік функції (11) з оцінками параметрів;
 • — точки експериментальної послідовності.

Перспективи подальших досліджень. Практичний та теоретичний інтерес представляють дослідження

властивостей інших модифікацій кривої Рамсея. Серед них відзначимо такі.

У подальших дослідження доцільно розглянути модифіковану функцію Рамсея з мономами довільних степенів:

$$f(x) = K + (-K + Bx^b) \cdot \exp(-rx^a), \quad (22)$$

де $K \geq 0$, $r \geq 0$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$.

Перша похідна функції (22) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (arKx^{a-1} + bBx^{b-1} - arBx^{a+b-1}) \cdot \exp(-rx^a), \quad (23)$$

а друга похідна функції (22) – у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = & (a^2r^2Bx^{2a+b-2} - arB(a+2b-1)x^{a+b-2} - a^2r^2Kx^{2a-2} + \\ & + arK(a-1)x^{a-2} + bB(b-1)x^{b-2}) \cdot \exp(-rx^a). \end{aligned} \quad (24)$$

Оскільки типовою є вимога неперервності першої та другої похідної апроксимуючої функції, тому логічно розглядати показники степенів мономів, які є більшими за 2, тобто $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$, як це впливає з виразів похідних (23) та (24).

Певним обмеженням для практичного застосування функції (22) є необхідність попереднього встановлення значень показників степенів a і b за інформацією з предметної галузі, для якої виконується моделювання.

При відомих значеннях показників степенів a і b реалізація алгоритму формування обмежень, які забезпечують монотонність апроксимуючої функції та наявність в неї заданої кількості точок перегину, повністю співпадає з описаною вище в пп. 1.2, 2.1.

Очевидною наступною модифікацією кривої Рамсея є функція:

$$f(x) = K + (-K + P(x)) \cdot \exp(-rx^a), \quad (25)$$

де $K \geq 0$, $r \geq 0$, $P(x) = \sum_{i=1}^n k_i x^i$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

Перша похідна функції (25) може бути подана у вигляді:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(arx^{a-1}(K - P(x)) + \frac{d}{dx} P(x) \right) \cdot \exp(-rx^a), \quad (26)$$

а друга похідна функції (25) – у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) = & \left(ar(a-1)(K - P(x))x^{a-2} - arx^{a-1} \frac{d}{dx} P(x) + \frac{d^2}{dx^2} P(x) - \right. \\ & \left. - arx^{a-1} \left(arx^{a-1}(K - P(x)) + \frac{d}{dx} P(x) \right) \right) \cdot \exp(-rx^a). \end{aligned} \quad (27)$$

Для забезпечення неперервності першої та другої похідної апроксимуючої функції (25) також доцільно розглядати показник степеня $a \geq 2$.

Для зведення подібних доданків у поліноміальних множниках похідних (26) та (27) показник степеня a та степінь n полінома $P(x)$ повинні бути відомими під час виконання апроксимації функцією (25).

Висновки. У даній роботі на підставі теореми Штурма про кількість коренів полінома на відрізьку розроблено алгоритм ідентифікації модифікованих кривих Рамсея. В явному вигляді виписані обмеження на коефіцієнти рівнянь цих кривих, які забезпечують збереження ними S – подібної форми. Це дозволило дослідити властивості таких модифікацій кривої Рамсея, які схильні втрачати логістичну форму при їх використанні в якості апроксимуючих функцій.

На відміну від інших дослідників розв'язання відповідних задач апроксимації здійснювалося за допомогою методу Conjugate Direction with Orthogonal Shift (CDOS) [4], який дозволяє не виконувати лінеаризацію моделі.

Точність оцінювання параметрів розглянутих в статті модифікацій кривої Рамсея суттєво залежить від величини дисперсії стохастичної компоненти експериментальної залежності. Даний висновок збігається з висновками інших дослідників, які вивчали властивості інших модифікацій кривої Рамсея.

Список літератури

1. *Иванов Д. В.* Модифицированный метод идентификации логистической кривой Рамсея // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – № 8(2). – С. 18 – 88.
2. *Конюховский П. В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. – СПб. : Питер, 2001. – 224 с.
3. *Крянев А. В., Лукин Г. В.* Математические методы обработки неопределенных данных. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.
4. *Моисеев С. Н.* Универсальный метод оптимизации без использования производных с квадратичной сходимостью. – Воронеж, 2011. – Режим доступа – <http://www.twirpx.com/file/1534928/>. – Дата звертання : 05 вересня 2021.
5. *Семеновичев В. К., Кожухова В. Н.* Анализ и предложения моделей экономической динамики с кумулятивным логистическим трендом: Монография. – Самара : СамНЦ РАН, 2013. – 156 с
6. *Семеновичев В. К., Семеновичев Е. В.* Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 217 с.
7. *Ramsay J. O.* A Comparative Study of Several Robust Estimates of Slope, Intercept a Scale in Linear Regression // Journal of the American Statistical Association. – 1977. – Vol.72. – № 359. – P. 608 – 615.

References (transliterated)

1. Ivanov D. V. Modifitsirovannyi metod identifikatsii logisticheskoy krivoy Ramseya [Modified Ramsey Logistic Curve Identification Method]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information]. 2020, no. 8(2), pp. 18–88.
2. Konyukhovskiy P. V. *Mikroekonomicheskoe modelirovanie bankovskoy deyatel'nosti* [Microeconomic Modeling of Banking]. Saint Petersburg, Piter Publ., 2001. 224 p.
3. Kryanov A. V., Lukin G. V. *Matematicheskie metody obrabotki neopredelennykh dannykh* [Mathematical Methods for Processing Undefined Data]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 216 p.
4. Moiseev S. N. *Universal'nyy metod optimizatsii bez ispol'zovaniya proizvodnykh s kvadrachnoy skhodimost'yu* [Universal Derivative-Free Optimization Method with Quadratic Convergence]. Voronezh, 2011. Available at : <http://www.twirpx.com/file/1534928/> (accessed 5 September 2021).
5. Semenychev V. K., Kozhukhova V. N. *Analiz i predlozheniya modeley ekonomicheskoy dinamiki s kumulyativnym logisticheskim trendom* : *Monografiya* [Analysis and Proposals of Models of Economic Dynamics with a Cumulative Logistic Trend: Monograph]. Samara, SamNTs RAN Publ., 2013. 156 p.
6. Semenychev V. K., Semenychev E. V. *Informatsionnye sistemy v ekonomike. Ekonometricheskoe modelirovanie innovatsiy. Chast 1* [Information Systems in the Economy. Econometric Modeling of Innovation. Part 1]. Samara, Izd-vo Samar. gos. aerokosm. un-ta Publ., 2006. 217 p.
7. Ramsay J. O. A Comparative Study of Several Robust Estimates of Slope, Intercept a Scale in Linear Regression. *Journal of the American Statistical Association*. 1977, vol.72, no. 359, pp. 608–615.

Надійшла (received) 29.09.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Курносенко Дар'я Вікторівна – аспірант, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (095) 549-43-72; e-mail: dasha10021991@gmail.com.

Курносенко Дарья Викторовна – аспірант, Херсонская государственная морская академия, г. Херсон; тел.: (095) 549-43-72; e-mail: dasha10021991@gmail.com.

Kurnosenko Daria Viktorivna – PhD Student, Kherson State Maritime Academy, Kherson; tel.: (095) 549-43-72; e-mail: dasha10021991@gmail.com.

Савчук Володимир Петрович – кандидат технічних наук, доцент, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (067) 489-77-64; e-mail: postsavchuk@gmail.com.

Савчук Владимир Петрович – кандидат технических наук, доцент, Херсонская государственная морская академия, г. Херсон; тел.: (067) 489-77-64; e-mail: postsavchuk@gmail.com.

Savchuk Volodymyr Petrovych – Candidate of Technical Sciences, Docent, Kherson State Maritime Acad, Kherson; tel.: (067) 489-77-64; e-mail: postsavchuk@gmail.com.

Тулущенко Галина Яківна – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-70-60; e-mail: tuluchenko.galina@ukr.net.

Тулущенко Галина Яковлевна – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 465-70-60; e-mail: tuluchenko.galina@ukr.net.

Tuluchenko Halyna Yakivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 465-70-60; e-mail: tuluchenko.galina@ukr.net.

О. В. МЕНЬШИКОВ, В. О. МЕНЬШИКОВ, О. Ю. КЛАДОВА

НЕЛИНІЙНА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ ЗСУВУ

Розглядається лінійна тріщина між двома різними пружними ізотропними півпросторами при нормально напрямленому гармонічному зсувному навантаженні з урахуванням контактної взаємодії протилежних берегів тріщини. Задача вирішується методом граничних інтегральних рівнянь, а складові розв'язку представлені рядами Фур'є. Контактні обмеження виражено односторонніми обмеженнями Сіньйоріні, а саме забезпечується відсутність взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, причому нормальна складова сили контакту одностороння і присутня лише в зоні контакту. Закон кулонівського тертя дозволяє враховувати або відносний покій протилежних граней тріщини в тангенціальній площині, доки вони утримуються силою тертя, або їх рух під час ковзання. Врахування контактних обмежень реалізовано за допомогою алгоритму ітераційної корекції на основі ортогональних проєкцій на множини обмежень. Адекватність математичної моделі перевіряється шляхом порівняння з класичними модельними розв'язками, отриманими для статичних задач з контактної взаємодії берегів. Виконано чисельні розрахунки, що демонструють вплив тертя на розподіл переміщень і контактних сил, а також на розмір зони контакту. Представлено та проаналізовано вплив контакту берегів і значення коефіцієнта тертя на розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) нормального розриву та поперечного зсуву, які є параметрами руйнування біматеріалу. Показано, що характер зміни розподілів КІН для умов навантаження хвилями розтягу та зсуву відрізняється принципово. Зроблено висновок про можливість поширення запропонованого підходу на проблеми тривимірної механіки руйнування для композитів з міжфазними тріщинами при довільному динамічному навантаженні.

Ключові слова: міжфазна тріщина, навантаження біматеріалу, гармонічна зсувна хвиля, контакт берегів з тертям, граничні інтегральні рівняння, ряди Фур'є, механіка руйнування.

A. V. MENSHYKOV, V. O. MENSHYKOV, O. YU. KLADOVA

НЕЛИНІЙНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЛНЫ СДВИГА

Рассматривается линейная трещина между двумя разными упругими изотропными полупространствами при нормально направленной гармонической сдвиговой нагрузке с учетом контактного взаимодействия противоположных берегов трещины. Задача решается методом предельных интегральных уравнений, а составляющие решения представлены рядами Фурье. Контактные ограничения выражены односторонними ограничениями Синьорини, а именно обеспечивается отсутствие взаимопроникновения противоположных берегов трещины, причем нормальная составляющая силы контакта односторонняя и присутствует только в зоне контакта. Закон кулоновского трения позволяет учитывать либо относительный покой противоположных граней трещины в тангенциальной плоскости, пока они удерживаются силой трения, либо их движение во время скольжения. Учет контактных ограничений реализован с помощью алгоритма итерационной коррекции на основе ортогональных проекций на множество ограничений. Адекватность математической модели проверяется путем сравнения с классическими модельными решениями, полученными для статических задач по контактному взаимодействию берегов. Выполнены численные расчеты, демонстрирующие влияние трения на распределение перемещений и контактных сил, а также на размер зоны контакта. Представлено и проанализировано влияние контакта берегов, и значение коэффициента трения на распределение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) нормального разрыва и поперечного сдвига, которые являются параметрами разрушения биматериала. Показано, что характер изменения распределений КИН для условий нагрузки волнами растяжения и смещения отличается принципиально. Сделан вывод о возможности распространения предлагаемого подхода на проблемы трехмерной механики разрушения для композитов с межфазными трещинами при произвольной динамической нагрузке.

Ключевые слова: межфазная трещина, нагрузка биматериала, гармоническая сдвиговая волна, контакт берегов с трением, граничные интегральные уравнения, ряды Фурье, механика разрушения.

O. V. MENSHYKOV, V. O. MENSHYKOV, O. YU. KLADOVA

NONLINEAR PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF AN INTERFACE CRACK SUBJECTED TO SHEAR WAVE

Solution for the problem for an interface crack under the action of a harmonic shear wave in normal direction is presented. The contact of the crack faces is put into consideration. The problem is solved by the boundary integral equations method, the vector components in the boundary integral equations are presented by Fourier series. The unilateral Signorini boundary conditions are involved to prevent the interpenetration of the crack faces and the emergence of tensile forces in the contact zone. Amonton-Coulomb Friction Law included allows to put into consideration relative resting of the crack opposite faces or their relative motion when one crack face is slipping or sliding across another face. The contact boundary restrictions are implemented using the iterative correction algorithm. The mathematical model adequacy is checked by comparing with classical model solution for statics problems that takes into account the crack faces contact. Numerical researches of friction influence on the displacement and contact forces distribution, size of contact zone are carried out. Influence of the faces contact and value of the friction coefficient on the distribution of stress intensity coefficients of normal rupture and transverse shear, which are the parameters of the biomaterial fracture, are presented and analyzed. It is shown that the nature of change in the distribution of the stress intensity coefficients for the conditions of tensile and shear waves is fundamentally different. It is concluded that it is possible to extend the approach proposed to the problems of three-dimensional fracture mechanics for composites with interfacial cracks at arbitrary dynamic loading.

Key words: interface crack, biomaterial loading, harmonic shear wave, friction face contact, boundary integral equations, Fourier series, fracture mechanics.

Вступ. Сучасний рівень розвитку техніки та технологій вимагає використання *композитних матеріалів*, що одночасно відзначаються легкістю, міцністю, надійністю і стійкістю до впливу навколишнього середовища. Внаслідок технології виготовлення та умов експлуатації композита виникають *міжкомпонентні дефекти*: тріщини, розшарування, зони ослаблення *адгезії*. Розуміння механізмів руйнування та погіршення властивостей матеріалу є питаннями, що становлять великий інтерес для інженерної науки та промисловості [1 – 3]. Оскільки

в цей час використання композитних матеріалів постійно зростає, проблеми механіки руйнування матеріалів з міжфазними тріщинами при різних типах навантаження дуже важливі.

Задачі механіки руйнування для кусково-однорідних пружних середовищ із тріщинами на межах поділу є модельними задачами механіки композитів з мікротріщинами між матрицею та матеріалом, що армує. Існує велика кількість наукових праць, присвячених розв'язанню задач у даній області механіки для випадку статичних навантажень (дивіться, наприклад, огляд робіт в [1]). Але експлуатація конструкцій і механізмів у переважній більшості випадків відбувається при динамічних навантаженнях, що призводить до зростання наявних і до утворення нових тріщиноподібних дефектів.

При розв'язуванні задач для тіл з тріщинами під впливом гармонічного навантаження звичайно припускають, що в процесі деформування тіла протилежні береги тріщин переміщуються відносно один одного і допускається взаємопроникнення берегів. Однак у реальності протилежні береги тріщин змикаються та взаємодіють між собою. Область контакту берегів змінюється протягом всього циклу навантаження, а її форма та розміри залежать від параметрів хвилі, що падає. На поверхні тріщин в області контакту берегів виникають області зчеплення та ковзання берегів, що залежать від величин коефіцієнта тертя та контактних сил взаємодії, що з'являються. Окремо підкреслимо, що форма та розміри області контакту берегів тріщин, а відповідно й області зчеплення і ковзання, невідомі заздалегідь та можуть бути встановлені лише під час розв'язування задачі, що й обумовлює її нелінійність. Все вищезгадане приводить до істотної зміни напружено-деформованого стану в околі фронту тріщин, що суттєво впливає на параметри механіки руйнування. Тому розв'язання динамічних нелінійних задач для матеріалів з міжфазними тріщинами досить актуально.

Аналіз останніх досліджень. Лінійні тріщини між однорідними ізотропними матеріалами при статичному навантаженні були розглянуті в [4], де був представлений алгоритм оцінки інтегралів, який можна використовувати для розрахунків параметрів механіки руйнування (коефіцієнтів інтенсивності напружень). Цей алгоритм може бути реалізований у випадку тріщин криволінійного розрізу. Використання методу Галеркіна для розв'язання задач динамічного навантаження однорідного матеріалу з тріщинами при контактній взаємодії берегів розглянуто в [5]. У [6] представлено багатопараметричний ітераційний алгоритм розв'язання двовимірної задачі для міжфазної тріщини при навантаженні хвилею розтягу-стиску, проведено дослідження збіжності алгоритму, вивчено вплив частоти навантаження на напружено деформований стан. Чисельні розв'язання тривимірних динамічних задач для матеріалів з міжфазною тріщиною без урахування контакту берегів представлені в [7, 8]. Лінійна та кругова міжфазні тріщини під гармонічним зсувним навантаженням розглянуто в роботах [9, 10]. Задачі розв'язувалися методом граничних елементів з використанням системи граничних сингулярних інтегральних рівнянь, отримані коефіцієнти інтенсивності напружень для різних хвильових чисел, але автори нехтували контактною взаємодією берегів тріщини. Метод граничних елементів був використаний для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень у [11], де розглядалася тріщина між двома анізотропними матеріалами при статичному навантаженні та давалися рекомендації щодо вибору оптимального підходу до аналізу граничних елементів. Проблеми для кругової тріщини між напівпростором і тонким верхнім шаром при статичному та динамічному гармонічному за часом горизонтальному навантаженні досліджувалися в [12]. Зв'язані подвійні інтегральні рівняння розв'язувалися аналітично для випадку статичного навантаження та чисельно для динамічного навантаження. Двовимірний квазікристалічний біматеріал з міжфазною тріщиною досліджувався у [13]. Загальний розв'язок та перехід Фур'є були використані для одержання фундаментального рішення для методу розриву переміщень. За допомогою запропонованого методу були отримані коефіцієнти інтенсивності напружень. Міжматеріальні тріщини в одновимірному квазікристалічному покритті під площинним навантаженням були розглянуті в [14]. Для чисельного моделювання автори використали метод граничних елементів розриву зсуву. Напівнескінченна поверхнева тріщина у поропружній смузі під зсувною хвилею досліджена в [15]. Для отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень було використано інтегральне перетворення Фур'є та метод Вінера – Хопфа. У роботі [16] представлено аналіз розміру контактної зони для лінійної міжфазної тріщини при нормальному гармонічному зсувному навантаженні. Проблема вирішена за допомогою алгоритму ітераційної корекції, щоб врахувати закриття тріщини та тертя її берегів. Були представлені та проаналізовані зміщення та контактні сили на берегах тріщини, але коефіцієнти інтенсивності напружень не розраховувались.

Нинішнє дослідження присвячене параметричному аналізу впливу контакту берегів тріщини та їх тертя на коефіцієнти інтенсивності напружень для біматеріалу з лінійною поверхнею з'єднання при нормальному падінні хвилі зсуву. Результати перевіряються шляхом порівняння з модельними розв'язками, які отримані для статичних задач з тертям і без тертя [2].

Постановка задачі та метод розв'язання. Розглянемо пружний біматеріал, що складається з двох однорідних ізотропних напівпросторів (півплощин) $\Omega^{(1)}$ і $\Omega^{(2)}$ з тріщиною кінцевої довжини $2L$, розташованою на межі розділу напівпросторів. Тріщина не має початкового відкриття, і до біматеріалу застосовується моногармонійне зсувне навантаження, що падає перпендикулярно до лінії розподілу, з частотою $\omega = 2\pi/T$ [9, 16].

В обох напівпросторах рівняння руху та узагальнений закон Гука призводять до лінійних рівнянь Ламе динамічної теорії пружності для поля зміщення зі стандартними початковими та граничними умовами для переміщень та напружень, а саме:

- відсутні початкові деформації біматеріалу;
- умова типу випромінювання Зоммерфельда на нескінченності;
- умови безперервності для напружень та зсувів на межі з'єднання $\Gamma^* = \Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)}$;
- відомі початкові зусилля $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ на протилежних берегах тріщини $\Gamma^{(1)cr}$, $\Gamma^{(2)cr}$, спричинені падінням зовнішнього навантаження.

Компоненти поля переміщень можна представити граничними зміщеннями та зусиллями на межі напівпросторів, використовуючи динамічні співвідношення Сомільяни:

$$u_j^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \int_T \int_{\Gamma^{(m)}} \left(p_i^{(m)}(\mathbf{y}, \tau) U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) - u_i^{(m)}(\mathbf{y}, \tau) W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \right) dy d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega^{(m)}, \quad t \in T, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

з відповідними фундаментальними розв'язками $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ та $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ [6, 16, 17].

Через закриття берегів тріщини вектор зусиль на поверхні тріщини є суперпозицією відомого початкового зусилля $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, спричиненого зовнішнім навантаженням, і сили контакту $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, що з'являється в зоні контакту берегів. Розмір і форма контактної зони за часом невідомі, залежать від параметрів зовнішнього навантаження, механічних властивостей біматеріала та коефіцієнта тертя на поверхнях контактуючих берегів і повинні бути визначені під час розв'язання задачі.

Щоб врахувати контактну взаємодію, для нормальної та тангенціальної складових розриву зміщення $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$, та контактних сил $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ необхідно ввести односторонні обмеження Сіньйорі-ні та закон кулонівського тертя з коефіцієнтом тертя k_τ [6, 16, 17]:

$$[u_n(\mathbf{x}, t)] \geq 0, \quad q_n(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad [u_n(\mathbf{x}, t)] q_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| < k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$|q_\tau(\mathbf{x}, t)| = k_\tau q_n(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \frac{q_\tau(\mathbf{x}, t)}{|q_\tau(\mathbf{x}, t)|} \left| \frac{\partial u_\tau(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|. \quad (4)$$

Контактні обмеження (2) – (4) забезпечують відсутність взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, нормальна складова сили контакту є односторонньою і присутня лише в зоні контакту; а протилежні грані тріщин не рухаються в тангенціальній площині, поки вони утримуються силою тертя до того, як відбудеться ковзання.

Контактна взаємодія робить задачу нелінійною, а розв'язок є циклічним багатогармонійним навіть для розглянутого випадку моногармонійного навантаження. Ось чому нормальна та тангенціальна складові розриву зміщення та зусилля на поверхні тріщини можуть бути апроксимовані експоненційними рядами Фур'є що до часу:

$$f(\bullet, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(\bullet) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad f^k(\bullet) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T f^k(\bullet, t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad (5)$$

де $\omega_k = 2\pi k/T$, i – уявна одиниця.

Якщо припустити, що розподіли граничних зсувів і зусиль є достатньо плавними, то після граничного переходу до межі розділу біматеріала рівняння (1) у часовій області може бути перетворена у таку систему граничних інтегральних рівнянь у частотній області [6, 16]:

$$-\int_{\Gamma^{(1)cr}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(1)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(1)cr}; \quad (6)$$

$$-\int_{\Gamma^{(2)cr}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,(2)}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{(2)cr}; \quad (7)$$

$$-\int_{\Gamma^{(1)cr}} \tilde{p}_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(1)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*; \quad (8)$$

$$-\int_{\Gamma^{(2)cr}} \tilde{p}_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2} u_i^{k,*}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{(1)cr}} u_i^{k,(2)}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma^*} u_i^{k,*}(\mathbf{y}) W_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma^*} p_i^{k,*}(\mathbf{y}) U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \quad (9)$$

де $\tilde{p}_i^{k,(m)}(\mathbf{y})$, $\tilde{p}_i^{k,*}(\mathbf{y})$, $u_i^{k,(m)}(\mathbf{y})$ та $u_i^{k,*}(\mathbf{y})$ – коефіцієнти Фур'є зусиль та переміщень на берегах тріщини та межі з'єднання.

Фундаментальні розв'язки в частотній області $U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ та $W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ мають такий вигляд [6, 16]:

$$U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left(\psi_k^{(m)} \delta_{ij} - \chi_k^{(m)} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^2} \right); \quad (10)$$

$$W_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \lambda^{(m)} n_i^{(m)}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + \mu^{(m)} n_k^{(m)}(\mathbf{y}) \left[\frac{\partial}{\partial y_k} U_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + \frac{\partial}{\partial y_i} U_{kj}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right]. \quad (11)$$

Тут δ_{ij} – дельта Кронекера, $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$ – коефіцієнти Ламе, $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1|$ – це відстань між точками спостереження та навантаження.

Функції $\psi_k^{(m)}$ та $\chi_k^{(m)}$ при гармонічному навантаженні у двовимірному випадку подаються так:

$$\psi_k^{(m)} = K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left[K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right], \quad \chi_k^{(m)} = K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right),$$

де $l_{1,k}^{(m)} = i \omega_k r / c_1^{(m)}$, $l_{2,k}^{(m)} = i \omega_k r / c_2^{(m)}$, $K_n(\bullet)$ – модифікована функція Бесселя другого роду та порядку n ; $c_1^{(m)} = \sqrt{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) / \rho^{(m)}}$ і $c_2^{(m)} = \sqrt{\mu^{(m)} / \rho^{(m)}}$ – швидкості поздовжньої та поперечної хвиль у верхньому та нижньому півпросторах.

Для розглянутого випадку ядра мають такий вигляд:

$$U_{12}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = U_{21}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0; \quad (12)$$

$$U_{11}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left[K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left(K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right) \right]; \quad (13)$$

$$U_{22}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi\mu^{(m)}} \left[\left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) - K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + K_0 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + \frac{1}{l_{2,k}^{(m)}} \left(K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - \frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right) \right]; \quad (14)$$

$$W_{11}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = W_{22}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = 0; \quad (15)$$

$$W_{12}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y_1} \left[l_{2,k}^{(m)} K_1 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) - 2K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + 2 \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right]; \quad (16)$$

$$W_{21}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y_1} \left[\frac{\lambda^{(m)} \mu^{(m)}}{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)})^2} l_{1,k}^{(m)} K_1 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) - 2K_2 \left(l_{2,k}^{(m)} \right) + 2 \left(\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} \right)^2 K_2 \left(l_{1,k}^{(m)} \right) \right]. \quad (17)$$

Для кожного числа коефіцієнтів Фур'є, k , відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (подібну до тієї, що представлена в [7]) можна отримати з системи граничних інтегральних рівнянь (6) – (9) і розв'язати чисельно, тому можна знайти зміщення і зусилля у вигляді експоненціального ряду Фур'є (5) з кінцевою кількістю членів. Зауважимо також, що гіперсингулярні, сингулярні та слабосингулярні інтеграли залежно від типу та порядку наближення використовуюваного простору повинні бути регульовані та обчислені для всіх інтегральних ядер. У поточному дослідженні було використано найпростіше *кускво-постійне наближення* (оскільки воно успішно довело свою ефективність для двовимірних задач, порівнюючи, наприклад, з методом Галеркіна [5]).

Для того, щоб врахувати контактні обмеження (2) – (4), слід використовувати алгоритм ітераційної корекції на основі ортогональних проєкцій на множини обмежень. У поточному дослідженні використовується наступний алгоритм, представлений у [6, 16]:

- отримується моногармонійне розв'язання задачі, яке нехтує ефектами закриття тріщини та тертя;
- розв'язання виправляється із застосуванням контактних обмежень (2) – (4), а коефіцієнти Фур'є поступово змінюються до тих пір, поки не знайдеться багатогармонійний розв'язок, що задовольняє контактним обмеженням.

Дослідження збіжності алгоритму щодо кількості коефіцієнтів Фур'є, використаних у ряді (5), кількості граничних елементів, та розміру елементів поблизу кінчиків тріщини, кількості часових інтервалів представлені в [6] для лінійних тріщин у біматеріалах під *гармонічним навантаженням стиску – розтягу*, тому в цьому дослідженні ми слідували цим рекомендаціям.

Тестові розрахунки. Для обґрунтування числової моделі розглядали міжматеріальну тріщину довжиною $2L$ без початкового розкриття при нормальному зсувному навантаженні амплітуди σ_0 з нормованим хвильовим числом $k_2^{(2)}L = \omega L/c_2^{(2)} = 0.01$ [16]. Механічні властивості матеріалу: $\nu^{(1)} = 0,1$ і $E^{(1)} = 29,0$ ГПа, $\nu^{(2)} = 0,49$ і $E^{(2)} = 400,0$ ГПа, були обрані таким чином, щоб задовольнити таке співвідношення [2]:

$$\beta = \frac{\mu^{(2)}(\kappa^{(1)} - 1) - \mu^{(1)}(\kappa^{(2)} - 1)}{\mu^{(2)}(\kappa^{(1)} + 1) + \mu^{(1)}(\kappa^{(2)} + 1)} = 0.5 .$$

Тут: $\nu^{(m)}$ – коефіцієнт Пуассона, $E^{(m)}$ – модуль Юнга, $\mu^{(m)}$ – модуль зсуву матеріалів, $\kappa^{(m)} = 3 - 4\nu^{(m)}$.

Стрибок нормальних компонентів переміщень протилежних берегів $[u_n]2\mu_0/L\sigma_0$ та сили контакту q_n/σ_0 на поверхні тріщини представлені на рис. 1, а та рис. 1, б для різних значень коефіцієнта тертя $k_\tau = 0.0$ та $k_\tau = 1.0$; параметр μ_0 заданий наступним чином [9]:

$$\mu_0 = \mu^{(1)} \frac{1 - \gamma_2}{1 + \kappa^{(1)}}, \text{ де } \gamma_2 = \left(\frac{a_1}{2} - a_2 \right), \quad a_1 = \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}\kappa^{(1)}}, \quad a_2 = \frac{\mu^{(2)}\kappa^{(1)} - \mu^{(1)}\kappa^{(2)}}{2(\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\kappa^{(2)})} .$$

Сили контакту та розмір контактної зони порівнюються з модельним статичним рішенням [2].

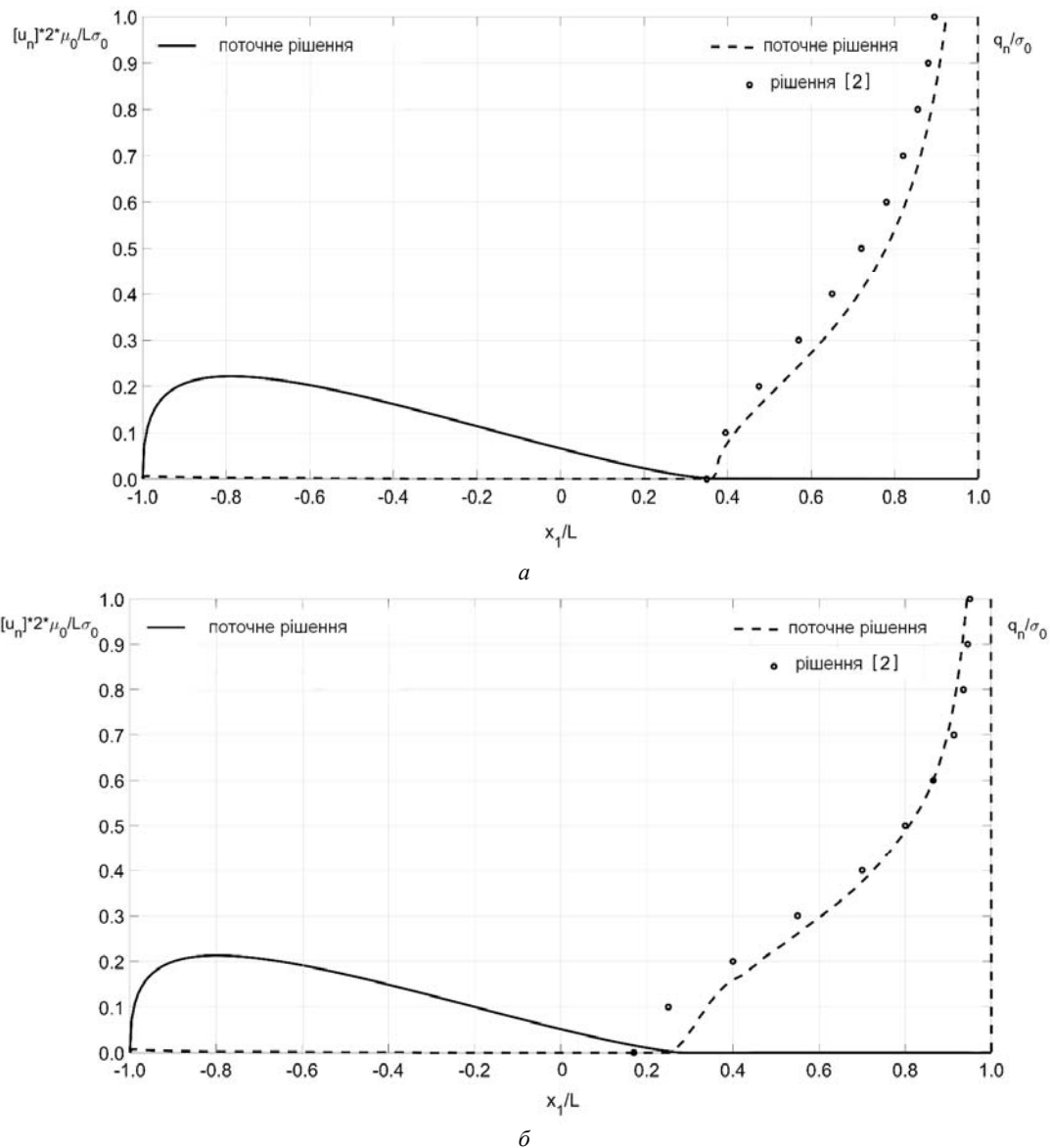


Рис. 1 – Стрибок нормальних компонентів переміщень протилежних берегів $[u_n]2\mu_0/L\sigma_0$ та сили контакту q_n/σ_0 на поверхні тріщини для значень коефіцієнта тертя: а – $k_\tau = 0.0$; б – $k_\tau = 1.0$.

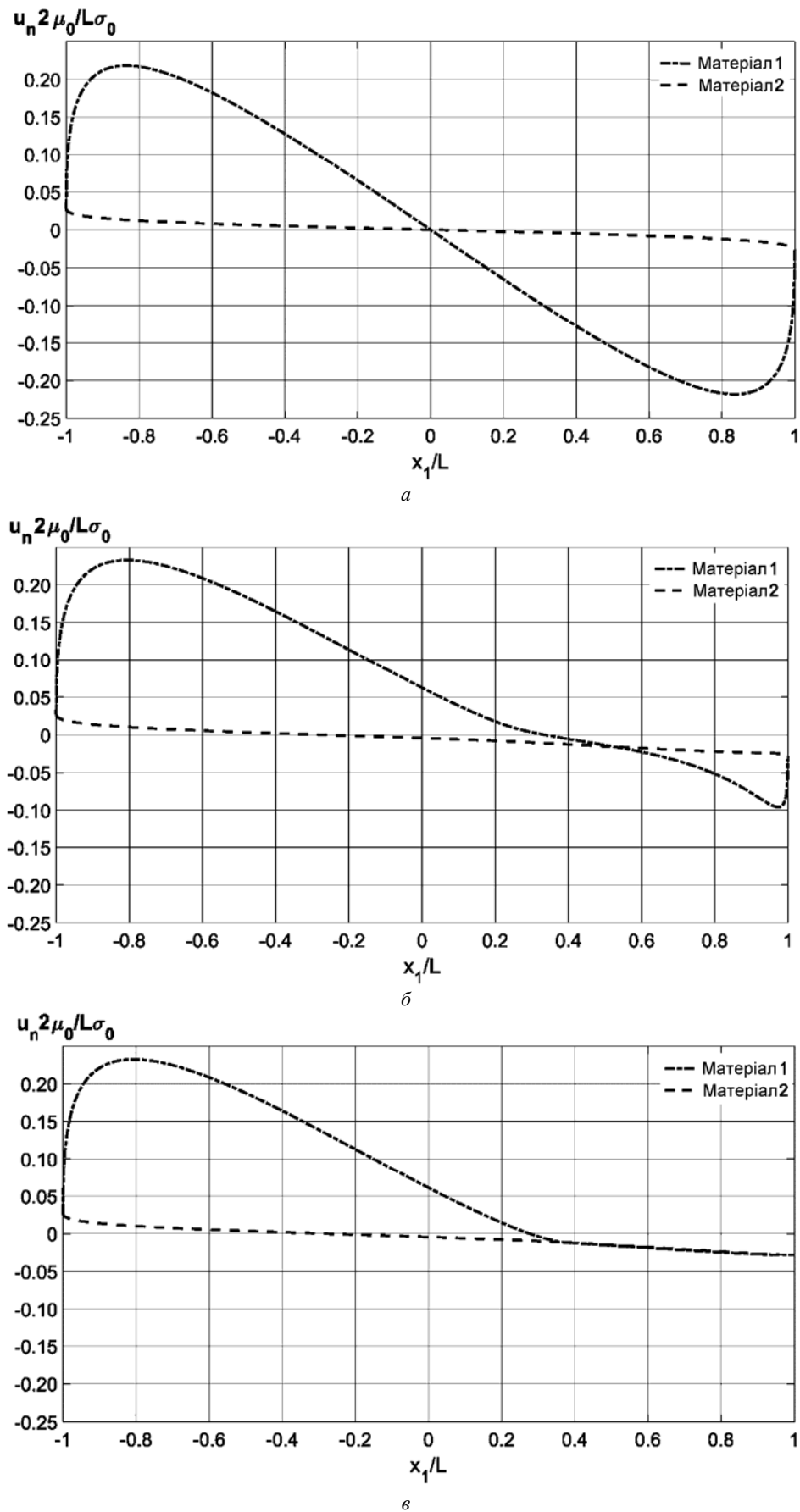


Рис. 2 – Результати ітераційної корекції розподілів уздовж довжини тріщини відносних нормальних компонент переміщень протилежних берегів тріщини для випадку $k_r = 0$: а – 1 ітерація; б – 50 ітерація; в – 600 ітерація.

Як бачимо, результати добре узгоджуються. Слід зазначити, що зміна коефіцієнта тертя суттєво вплинуло на розв'язок, змінивши розмір зони контакту, розподіл переміщень та сил навіть у «квазістатичному» випадку, розглянутому в цьому розділі лише з метою перевірки.

На рис. 2, *a* – 2, *b* наведено результати ітераційної корекції розподілів уздовж довжини тріщини відносних нормальних компонент переміщень протилежних берегів тріщини для випадку $k_\tau = 0$.

Рис. 2, *a* – 1-а ітерація без корекції граничних умов. Видно, що на ділянці тріщини $(0, 1)$ існує «взаємопроникнення» берегів.

Рис. 2, *b* – 50-а ітерація, проміжний розв'язок в результаті послідовної корекції граничних умов на основі обмежень (2) – (4). Ділянка «взаємопроникнення» берегів зменшується від ітерації до ітерації і формується зона контакту.

Рис. 2, *b* ілюструє розв'язок після 600 ітерацій з корекцією. Тут «взаємопроникнення» берегів відсутнє, зона контакту берегів міжфазної тріщини сформувалася.

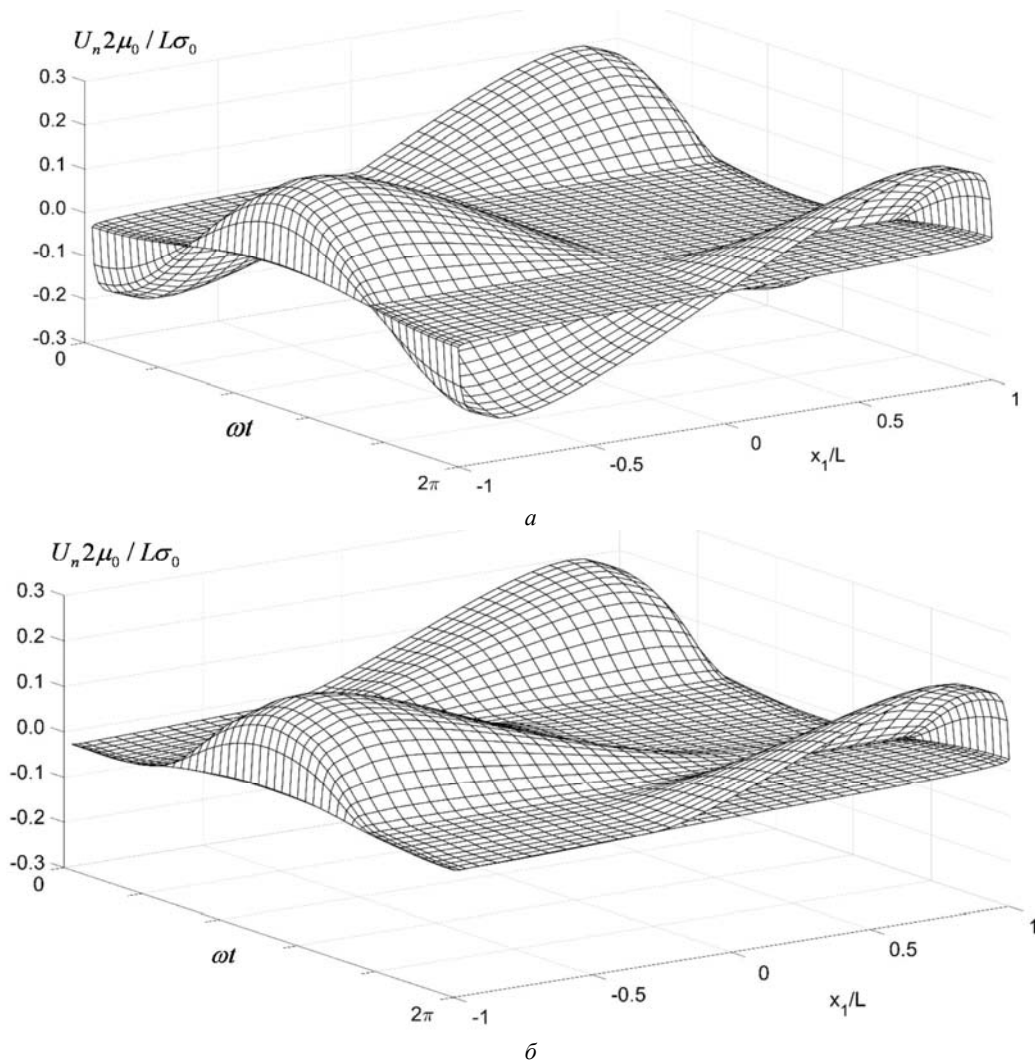


Рис. 3 – Принципова різниця між розв'язками задачі про міжфазну тріщину під впливом хвилі зсуву: *a* – без врахування контакту протилежних берегів; *b* – з врахуванням контакту протилежних берегів.

На рис. 3 демонструється принципова різниця між розв'язками задачі про міжфазну тріщину під впливом хвилі зсуву без врахування контакту протилежних берегів (рис. 3, *a*) і з врахуванням цього контакту (рис. 3, *b*).

Підкреслимо, що, як було також показано в [16], після ітераційної корекції контактні обмеження (2) – (4) виконуються на всій поверхні тріщини, найголовніше, що немає взаємопроникнення протилежних берегів тріщини, тертя впливає на розподіл переміщень і контактних сил, а також на розмір зони контакту. Аналіз наведених результатів розрахунків і порівняння протяжності зони контакту, величин контактних сил взаємодії берегів міжфазної тріщини з даними інших авторів [2] свідчить про достовірність отриманих нами результатів.

Розрахункові дослідження. Розрахунки виконані для біматеріалу з тріщиною-відрізком довжини $2L = 2$ уздовж лінії з'єднання двох півплощин (ізотропних матеріалів). Механічні властивості біматеріалу для узго-

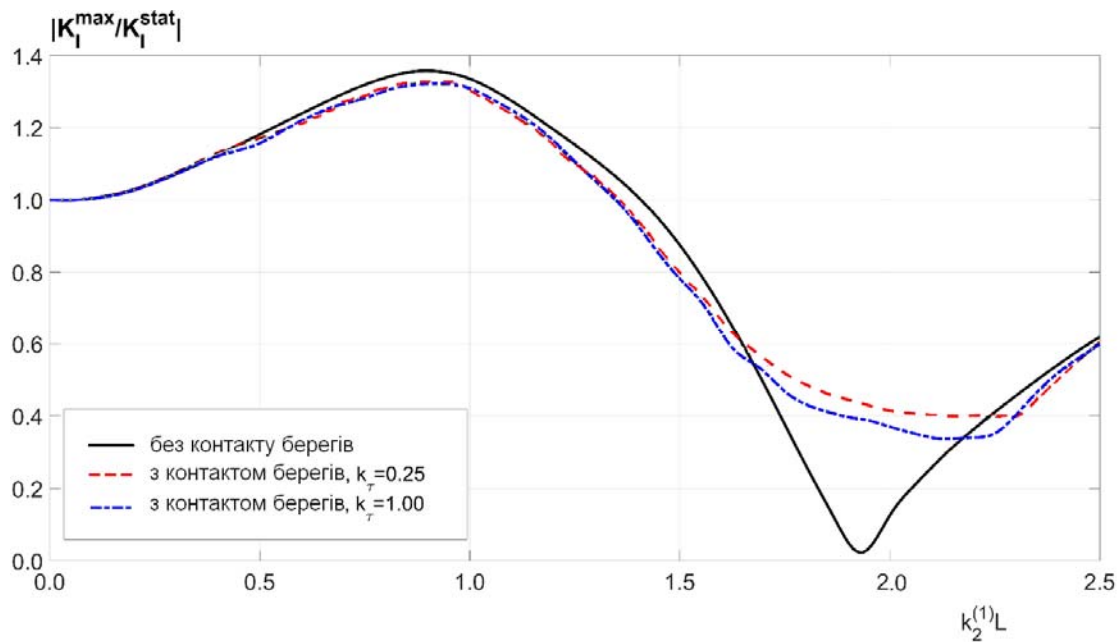
дження з результатами, представленими в [9], були взяті таким чином:

- коефіцієнт Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.25$;
- щільність $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 7800 \text{ кг/м}^3$;
- модуль Юнга $E^{(1)} = 200 \text{ ГПа}$ і $E^{(2)} = 100 \text{ ГПа}$.

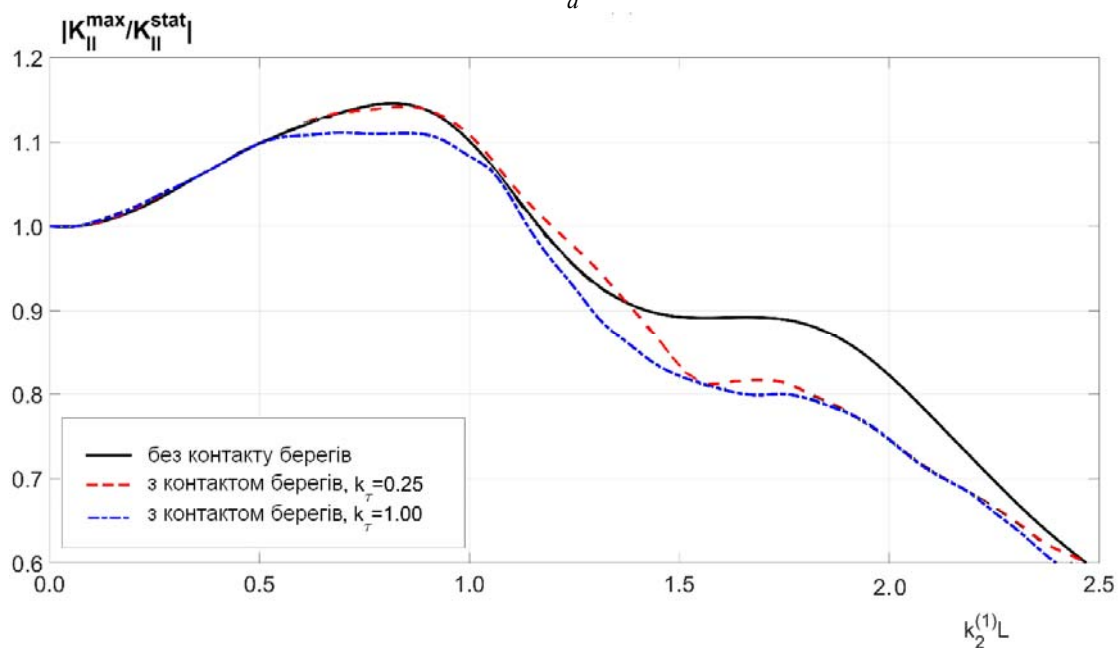
Дослідження виконані в частині знаходження параметрів руйнування біматеріалу так званих *коефіцієнтів інтенсивності напружень (КИН)*. Динамічні КИН: першої моди (нормального розриву) K_I^{\max} та другої моди (поперечний зсув) K_{II}^{\max} обчислювались поблизу вершини тріщини за такими асимптотичними формулами [9]:

$$K_I^{\max} = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} p_n^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}; \quad K_{II}^{\max} = \max_t \lim_{r \rightarrow 0} p_\tau^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}.$$

Тут $p_n^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}$ і $p_\tau^*(R+r, t) \sqrt{2\pi r}$ – нормальна та дотична складові вектора зусилля на межі з'єднання матеріалів, r – відстань від вершини тріщини.



a



б

Рис. 4 – Розподіл відносних динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень при двох коефіцієнтах тертя $k_\tau = 0.25$ та $k_\tau = 1.00$ в порівнянні з розв'язком без контакту: *a* – КИН першої моди; *б* – КИН другої моди.

Розподіл відносних динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) представлено на рис. 4, *a* – КІН першої моди, рис. 4, *б* – КІН другої моди при двох коефіцієнтах тертя $k_\tau = 0.25$ та $k_\tau = 1.00$ в порівнянні з розв'язком без контакту.

Нормування виконано статичними коефіцієнтами інтенсивності напружень першої та другої моди K_I^{stat} , K_{II}^{stat} .

Бачимо, що врахуванням контакту берегів мало змінюють максимальні значення відносних КІН першої моди в порівнянні зі значеннями без контакту (рис. 4, *a*). Лише в зоні частот $1,75 \leq k_2^{(1)}L \leq 2,25$ існує суттєва різниця в значеннях КІН першої моди з контактом і без контакту берегів. Але значення відносних КІН другої моди в задачі з врахуванням контакту берегів суттєво відрізняється від результатів, де контакт не враховано (рис. 4, *б*). Особливо цей факт виявляється при зчепленні контактуючих поверхонь берегів ($k_\tau = 1.0$)

З іншого боку бачимо (рис. 4), що зміна коефіцієнта тертя не дуже впливає на розв'язок. Дійсно, протилежні берега тріщини здебільшого ковзають, але сила тертя, яка залежить від нормальної складової сили контакту, досить мала для розглянутих тут зсувних навантажень. Тому корекція нормального відкриття тріщини відповідно до односторонніх обмежень Синьйоріні в основному призвела до зміни обох розподілів коефіцієнтів інтенсивності напружень. Зауважимо, що цей висновок суттєво відрізняється від тих, які були отримані раніше для хвиль стиску-розтягу, де нормальне відкриття із зрозумілих причин є домінуючим режимом [6].

Висновки і перспективи. Чисельно розв'язана динамічна нелінійна задача механіки руйнування для біматеріалу з міжфазної тріщиною. Показано, що після застосування ітераційної корекції розв'язку, відсутні взаємопроникнення протилежних берегів тріщини.

Аналіз розподілів переміщень берегів міжфазної тріщини свідчить про те, що зона розкриття берегів і зона їх контакту кардинально змінює своє положення на тріщині протягом періоду навантаження.

На основі знайдених параметрів НДС розраховані динамічні КІН нормального розриву і КІН поперечного зсуву. Проведено розрахункові дослідження залежності КІНів від коефіцієнтів тертя берегів міжфазної тріщини при навантаженні біматеріалу хвилею зсуву. Показано, що значення відносних КІН поперечного зсуву в задачі з врахуванням контакту берегів (при зчепленні поверхонь) суттєво відрізняється від результатів, де не враховано контакту.

На закінчення слід додати, що запропонований підхід може бути поширений на проблеми тривимірної механіки руйнування для композитів з міжфазними тріщинами при довільному динамічному навантаженні. Особливо увагу треба приділяти розв'язку задач поблизу фронту тріщин [1, 18, 19].

Список літератури

1. Comninou M. An overview of interfacial cracks // Eng Fract Mech. – 1990. – № 37(1). – P. 197 – 208.
2. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J Elast. – 1980. – № 10. – P. 203 – 212.
3. Gross D., Seelig T. Fracture Mechanics with the introduction to Micromechanics. – Springer Heidelberg Dordrecht. – 2001. – 376 p.
4. Tafreshi A. Computation of the J_k – integrals for bimaterial interface cracks using boundary element crack shape sensitivities // Theor App Fract Mech. – 2016. – № 82. – P. 77 – 87.
5. Menshykov O. V., Menshykova M. V., Wendland W. L. On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // Int App Mech. – 2005. – № 41(11). – P. 1324 – 1329.
6. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems // Eng Anal Bound Elem. – 2011. – № 35(5). – P. 735 – 749.
7. Menshykov O. V., Menshykov V. A., Guz I. A. Elastodynamics of a crack on the bimaterial interface // Eng Anal Bound Elem. – 2009. – № 33(3). – P. 294 – 301.
8. Men'shikov V. A., Men'shikov A. V., Guz I. A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading // Int App Mech. – 2007. – № 43(8). – P. 865 – 873.
9. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave // Comput Model Eng Sci. – 2009. – № 48(2). – P. 107 – 120.
10. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Penny-shaped crack at the interface between elastic half-spaces under the action of a shear wave // Int App Mech. – 2009. – № 45(5). – P. 534 – 539.
11. Shiah Y. C., Hwu C., Yao J. J. Boundary element analysis of the stress intensity factors of plane interface cracks between dissimilarly adjoined anisotropic materials // Eng Anal Bound Elem. – 2019. – № 106. – P. 68 – 74.
12. Eskandari-Ghadi M., Ardeshir-Behrestaghi A., Pak RYS. Bi-material transversely isotropic half-space containing penny-shaped crack under time-harmonic horizontal loads // Eng Fract Mech. – 2017. – № 72. – P. 152 – 180.
13. Fan C. Y., Lv S. Y., Dang H. Y., Yuan Y. P., Zhao M. H. Fundamental solutions and analysis of the interface crack for two-dimensional decagonal quasicrystal bimaterial via the displacement discontinuity method // Eng Anal Bound Elem. – 2019. – № 106. – P. 462 – 472.
14. Zhao M. H., Fan C. Y., Lu C., Dang H. Y. Analysis of interface cracks in one-dimensional hexagonal quasi-crystal coating under in-plane loads // Eng Fract Mech. – 2021. – № 243. – Article No. 107534. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107534.
15. Negi A., Singh A. K., Yadav R. P. Analysis on dynamic interfacial crack impacted by SH-wave in bi-material poroelastic strip // Compos Struct. – 2020. – № 233. – Article No. 111639. DOI: doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111639.
16. Menshykov V., Menshykov O., Guz I., Contact Problems for Interface Cracks Under Harmonic Shear Loading, in: WCCM-ECCOMAS2020. – Режим доступу : https://www.scipedia.com/public/Menshykov_et_al_2021a. – Дата звертання : 30 вересня 2021.
17. Guz A. N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review) // Int App Mech. – 2019. – № 55. – P. 129 – 174.
18. Chai H., Bao Y., Zhang Z. Numerical solutions of hypersingular integral equations for interface circular crack under axisymmetric loadings // Eng Anal Bound Elem. – 2021. – № 122. – P. 35 – 42.
19. Ostriuk V. I. Contact of faces of a rectilinear crack under complex loading and various contact conditions // Acta Mech. – 2019. – № 230. – P. 3741 – 3758.

References (transliterated)

1. Comninou M. An overview of interfacial cracks. *Eng Fract Mech.* 1990, no. 37(1), pp. 197–208.
2. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear. *J Elast.* 1980, no. 10, pp. 203–212.
3. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics with the introduction to Micromechanics.* Springer Heidelberg Dordrecht, 2001. 376 p.
4. Tafreshi A. Computation of the J_k – integrals for bimaterial interface cracks using boundary element crack shape sensitivities. *Theor App Fract Mech.* 2016, no. 82, pp. 77–87.
5. Menshykov O. V., Menshykova M. V., Wendland W. L. On use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading. *Int App Mech.* 2005, no. 41(11), pp. 1324–1329.
6. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Eng Anal Bound Elem.* 2011, no. 35(5), pp. 735–749.
7. Menshykov O. V., Menshykov V. A., Guz I. A. Elastodynamics of a crack on the bimaterial interface. *Eng Anal Bound Elem.* 2009, no. 33(3), pp. 294–301.
8. Men'shikov V. A., Men'shikov A. V., Guz I. A. Interfacial crack between elastic half-spaces under harmonic loading. *Int App Mech.* 2007, no. 43(8), pp. 865–873.
9. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave. *Comput Model Eng Sci.* 2009, no. 48(2), pp. 107–120.
10. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Penny-shaped crack at the interface between elastic half-spaces under the action of a shear wave. *Int App Mech.* 2009, no. 45(5), pp. 534–539.
11. Shiah Y. C., Hwu C., Yao J. J. Boundary element analysis of the stress intensity factors of plane interface cracks between dissimilarly adjoined anisotropic materials. *Eng Anal Bound Elem.* 2019, no. 106, pp. 68–74.
12. Eskandari-Ghadi M., Ardeshtir-Behrestaghi A., Pak RYS. Bi-material transversely isotropic half-space containing penny-shaped crack under time-harmonic horizontal loads. *Eng Fract Mech.* 2017, no. 72, pp. 152–180.
13. Fan C. Y., Lv S. Y., Dang H. Y., Yuan Y. P., Zhao M. H. Fundamental solutions and analysis of the interface crack for two-dimensional decagonal quasicrystal bimaterial via the displacement discontinuity method. *Eng Anal Bound Elem.* 2019, no. 106, pp. 462–472.
14. Zhao M. H., Fan C. Y., Lu C., Dang H. Y. Analysis of interface cracks in one-dimensional hexagonal quasi-crystal coating under in-plane loads. *Eng Fract Mech.* 2021, no. 243. Article No.107534. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107534.
15. Negi A., Singh A. K., Yadav R. P. Analysis on dynamic interfacial crack impacted by SH-wave in bi-material poroelastic strip. *Compos Struct.* 2020, no. 233. Article No. 111639. DOI: doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111639.
16. Menshykov V., Menshykov O., Guz I., Contact Problems for Interface Cracks Under Harmonic Shear Loading, in: WCCM-ECCOMAS2020. Available at : https://www.scipedia.com/public/Menshykov_et_al_2021a (accessed 30 September 2021).
17. Guz A. N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review). *Int App Mech.* 2019, no. 55, pp. 129–174.
18. Chai H., Bao Y., Zhang Z. Numerical solutions of hypersingular integral equations for interface circular crack under axisymmetric loadings. *Eng Anal Bound Elem.* 2021, no. 122, pp. 35–42.
19. Ostrik V. I. Contact of faces of a rectilinear crack under complex loading and various contact conditions. *Acta Mech.* 2019, no. 230, pp. 3741–3758.

Надійшла (received) 05.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Меньшиков Олександр Васильович – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Меньшиков Александр Васильевич – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Menshykov Oleksandr Vasyliovych – Centre for Micro- and Nanomechanics, School of Engineering, University of Aberdeen, AB24 3UE Aberdeen, Scotland, UK; tel.: +441224273326; e-mail: o.menshykov@abdn.ac.uk.

Меньшиков Василь Олександрович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Меньшиков Василий Александрович – доктор фізико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Menshykov Vasyli Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Fellow, Professor at the Department of Theoretical mechanics, machinery and robotic systems, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv; tel.: (057) 788-47-67; e-mail: v.menshykov@ukr.net.ua.

Кладова Ольга Юрївна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.

Кладова Ольга Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.

Kladova Olga Yuriyivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Theoretical mechanics, machinery and robotic systems, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkiv; tel.: (050) 598-16-68; e-mail: o.kladova@khai.edu.

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ДИНАМІЧНИЙ ЕФЕКТ НЕСИМЕТРІЇ СИЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСИПАТИВНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Розглянуто особливості руху нелінійного осцилятора після навантаження його миттєвим силовою імпульсом. Пружна характеристика має вигляд ламаної лінії, складеної з двох відрізків прямих. Основну увагу приділено впливу дисипативних сил на можливість прояву динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики, який вивчали раніше без урахування впливу цих сил. Розглянуто чотири варіанти сил опору. Це лінійний в'язкий опір, сухе тертя Кулона, позиційне тертя і квадратичний в'язкий опір. Для двох перших з них методом припасовування побудовано аналітичні розв'язки диференціального рівняння коливальних і виведено формули для обчислення розмахів. Встановлено нерівності, при виконанні яких проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Умови прояву ефекту при наявності позиційного тертя виведено із енергетичних співвідношень, без розв'язування диференціального рівняння руху. Його перший інтеграл в умовах квадратичного опору виражено через функцію Ламберта від'ємного або додатного аргументів, в залежності від значення заданої початкової швидкості руху. Показано, що при малих стартових швидкостях проявляється згаданий ефект, а при великих – він відсутній. Для обчислення значень функції Ламберта рекомендовано проводити лінійну інтерполяцію табличних даних або використовувати відомі асимптотичні формули, що виражають її через елементарні функції з похибкою меншою за один відсоток. Викладення теорії супроводжується прикладами конкретних розрахунків. Показано повну відповідність числових результатів, до яких приводять виведені розрахункові формули, та чисельне інтегрування на комп'ютері нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора.

Ключові слова: дисипативний осцилятор, кусково-лінійна характеристика пружності, миттєвий імпульс, різні варіанти дисипативної сили, функція Ламберта, динамічний ефект несиметрії силової характеристики.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ НЕСИММЕТРИИ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСИПАТИВНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрены особенности движения нелинейного осциллятора после нагружения его мгновенным силовым импульсом. Упругая характеристика осциллятора имеет вид ломаной линии, составленной из двух отрезков прямых. Основное внимание уделено исследованию влияния дисипативных сил на возможность проявления динамического эффекта несимметрии упругой характеристики, который изучали раньше без учёта влияния этих сил. Рассмотрены четыре варианта сил сопротивления. Это линейное вязкое сопротивление, сухое трение Кулона, позиционное трение и квадратичное вязкое сопротивление. Для двух первых из них методом припасовывания построены аналитические решения дифференциального уравнения колебаний и выведены формулы для вычисления размахов. Установлены неравенства, при соблюдении которых проявляется эффект несимметрии силовой характеристики. Условия проявления эффекта при наличии позиционного трения выведены из энергетических соотношений, без решения дифференциального уравнения движения. Его первый интеграл в условиях квадратичного сопротивления выражен через функцию Ламберта отрицательного или положительного аргументов, в зависимости от значения заданной начальной скорости движения. Показано, что при малых стартовых скоростях проявляется упомянутый эффект, а при больших – он отсутствует. Для вычисления значений функции Ламберта рекомендовано проводить линейную интерполяцию табличных данных или использовать известные асимптотические формулы, которые выражают её через элементарные функции с ошибкой меньше одного процента. Изложение теории сопровождается примерами конкретных расчётов. Показано полное соответствие числовых результатов, к которым приводят выведенные расчётные формулы, и численное интегрирование на компьютере нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора.

Ключевые слова: дисипативный осциллятор, кусочно-линейная характеристика упругости, мгновенный импульс, различные варианты дисипативной силы, функция Ламберта, динамический эффект несимметрии силовой характеристики.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

DISSIPATIVE OSCILLATORS' POWER CHARACTERISTIC NON-SYMMETRY DYNAMIC EFFECT

The features of motion of a non-linear oscillator under the instantaneous force pulse loading are studied. The elastic characteristic of the oscillator is given by a polygonal chain consisting of two linear segments. The focus of the paper is on the influence of the dissipative forces on the possibility of occurrence of the elastic characteristic non-symmetry dynamic effect, studied previously without taking into account the influence of these forces. Four types of drag forces are considered, namely linear viscous friction, Coulomb dry friction, position friction, and quadratic viscous resistance. For the cases of linear viscous friction and Coulomb dry friction the analytical solutions of the differential equation of oscillations are found by the fitting method and the formulae for computing the swings are derived. The conditions on the parameters of the problem are determined for which the elastic characteristic non-symmetry dynamic effect occurs in the system. The conditions for the effect to occur in the system with the position friction are derived from the energy relations without solving the differential equation of motion. In the case of quadratic viscous friction the first integral of the differential equation of motion is given by the Lambert function of either positive or negative argument depending on the value of the initial velocity. The elastic characteristic non-symmetry dynamic effect is shown to occur for small initial velocities, whereas it is absent from the system when the initial velocities are sufficiently large. The values of the Lambert function are proposed to be computed by either linear interpolation of the known data or approximation of the Lambert function by elementary functions using asymptotic formulae which approximation error is less than 1%. The theoretical study presented in the paper is followed up by computational examples. The results of the computations by the formulae proposed in the paper are shown to be in perfect agreement with the results of numerical integration of the differential equation of motion of the oscillator using a computer.

Key words: dissipative oscillator, piecewise-linear elasticity characteristic, instantaneous pulse, different types of dissipative force, Lambert function, power characteristic non-symmetry dynamical effect.

Вступ. Існує багато публікацій, присвячених дослідженню *нестационарного деформування механічних систем*. На окрему увагу із них заслуговують монографічні видання останніх років, в яких *аналітико-чисельними методами* розв'язували *прямі задачі* динаміки пластин і оболонок [1 – 4], а також *обернені математично некоректні задачі* ідентифікації динамічних навантажень за результатами експериментального виміру переміщень і деформацій тонкостінних елементів конструкцій [5 – 7]. У названих роботах, в основному, розглядали лінійні

задачі, де виконується *принцип суперпозиції*. Значно менше публікацій стосується *нелінійних динамічних систем* і зокрема тих, що мають несиметричну силову характеристику. Певна інформація про їх динамічну поведінку є в [8 – 10]. До найпростіших систем такого типу відносяться *осцилятори*, в яких силова характеристика складається з відрізків двох прямих [11, 12]. Цей варіант характеристики використовуємо і в даній роботі. Розглядаємо особливості поведінки осцилятора при навантаженні його *миттєвим силовим імпульсом*. При цьому досліджуємо вплив на процес руху різних варіантів *дисипативних сил*. *Методом припасовування* будемо аналітичні розв'язки нелінійних задач з використанням *елементарних і спеціальних функцій*, а результати розрахунків на їх основі порівнюємо з результатами *чисельного комп'ютерного інтегрування* рівнянь руху.

В роботі [13] показано, що в *ідеально пружних* (не дисипативних) осциляторів, підданих дії короткочасних силових імпульсів, може проявлятися *ефект несиметрії силової характеристики*. Він полягає в тому, що максимальне переміщення системи у напрямку дії прикладеного імпульсу (*прямий відгук*) менше, ніж протилежне за напрямком максимальне переміщення (*зворотний відгук*) розвантаженої системи, при її вільних коливаннях. Таке співвідношення екстремальних переміщень можливе і при *непружному ударі* по осцилятору важким тілом [14]. Оскільки названий ефект стосувався ідеально пружних коливальних систем з несиметричною кусково лінійною силовою характеристикою, постає питання: чи можливий він при наявності дисипативних сил, що існують на практиці? Щоб отримати відповідь на це питання, далі розглядаємо рух деяких дисипативних осциляторів при дії миттєвого імпульсу сили. Беремо чотири варіанти сил опору, а саме: лінійний в'язкий опір, сухе тертя Кулона, позиційне тертя і квадратичний в'язкий опір.

Отже, **метою** даної **статті** є дослідження можливості прояву динамічного ефекту несиметрії силової характеристики коливальної системи при наявності дисипативних сил.

Очевидно, що наявність таких сил буде згладжувати названий ефект або повністю усувати його, оскільки дисипативні сили зменшують розмахи коливань зі зростанням їх номерів. Саме цим і спричинена мета дослідження.

Коливання за наявності лінійного в'язкого опору. Коливання за наявності лінійного в'язкого опору опишемо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x)]x = 0, \quad (1)$$

у якому m – маса осцилятора; k – коефіцієнт лінійного в'язкого опору; $c, \Delta c > 0$ – характеристики пружності; $x(t)$ – переміщення системи у часі t ; крапка над x означає похідну по t .

Використовуємо розв'язок рівняння (1) за початкових умов:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = \mathcal{G}_0, \quad (2)$$

де \mathcal{G}_0 – швидкість, яку одержав осцилятор внаслідок дії миттєвого імпульсу $S = m\mathcal{G}_0$.

На етапі руху осцилятора вгору, у додатному напрямку осі Ox , маємо:

$$x(t) = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega_*} \exp(-\beta t) \sin(\omega_* t). \quad (3)$$

Тут $\beta = \frac{k}{2m}$; $\omega_* = \sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta^2}$; $c_1 = c + \Delta c$.

Рух проходить зі швидкістю:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{G}_0 \exp(-\beta t) \left[\cos(\omega_* t) - \frac{\beta}{\omega_*} \sin(\omega_* t) \right]. \quad (4)$$

Перша зупинка осцилятора відбувається при $t = t_1$, і згідно з (4):

$$t_1 = \frac{1}{\omega_*} \arctg\left(\frac{\omega_*}{\beta}\right). \quad (5)$$

При цьому максимум переміщення осцилятора вгору, згідно з (3), становить:

$$\max x(t) = x(t_1) = a_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega_*} \exp(-\beta t_1) \sin(\omega_* t_1). \quad (6)$$

Враховуючи, що:

$$\sin(\omega_* t_1) = \frac{\omega_*}{\sqrt{\omega_*^2 + \beta^2}},$$

із (6) одержимо формулу максимального переміщення в напрямку дії імпульсу:

$$a_1 = \frac{\mathcal{G}_0}{\sqrt{\omega_*^2 + \beta^2}} \exp(-\beta t_1). \quad (7)$$

Повертаючись у вихідне положення $x = 0$, згідно з (3), осцилятор досягне його при $t = t_{10} = \pi / \omega_*$. В цей момент часу він матиме швидкість:

$$\dot{x}(t_{10}) = \mathcal{G}_1 = -\mathcal{G}_0 \exp(-\beta t_{10}).$$

Подальший рух осцилятора вниз (зворотний хід) можна описати виведеними формулами, якщо замінити в них: \mathcal{G}_0 на \mathcal{G}_1 , а ω_* на ω_{**} , де $\omega_{**} = \sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta^2}$, $c_2 = c - \Delta c$. Тоді розмах коливань осцилятора вниз становитиме:

$$a_2 = \frac{|\mathcal{G}_1|}{\sqrt{\omega_{**}^2 + \beta^2}} \exp(-\beta t_2) = \frac{\mathcal{G}_0}{\sqrt{\omega_{**}^2 + \beta^2}} \exp[-\beta(t_{10} + t_2)], \quad (8)$$

причому:

$$t_2 = \frac{1}{\omega_{**}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{**}}{\beta}\right). \quad (9)$$

Враховуючи (7) і (8), маємо наступне відношення розмахів коливань:

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{c - \Delta c}}{\sqrt{c + \Delta c}} \exp[\beta(t_{10} + t_2 - t_1)]. \quad (10)$$

Отже, у випадку відсутності сили лінійного в'язкого опору ($\beta = 0$) відношення розмахів $\alpha < 1$, тобто буде проявлятися ефект несиметрії силової характеристики. При наявності дисипативної сили відношення α залежить від коефіцієнта β або k .

При малих значеннях β , коли $\beta < \beta_*$, відношення $\alpha < 1$, тобто проявляється ефект несиметрії силової характеристики, а при $\beta > \beta_*$ – він відсутній. Значення β_* є коренем трансцендентного рівняння:

$$\beta_* = \frac{\ln \frac{c + \Delta c}{c - \Delta c}}{2(t_{10} + t_2 - t_1)}, \quad (11)$$

у якому:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}}{\beta_*}; \quad t_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta_*^2}}; \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta_*^2}}{\beta_*}. \quad (12)$$

Рівняння (11) можна розв'язати методом ітерацій. Початкові наближення t_1 , t_{10} і t_2 досить просто одержати з (12), спрямувавши $\beta_* \rightarrow 0$. Тоді:

$$t_1 \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_1}}; \quad t_{10} \approx \pi \sqrt{\frac{m}{c_1}}; \quad t_2 \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_2}}.$$

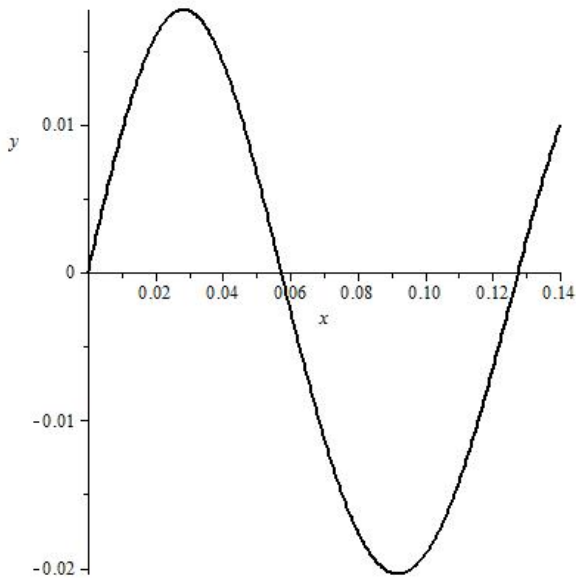
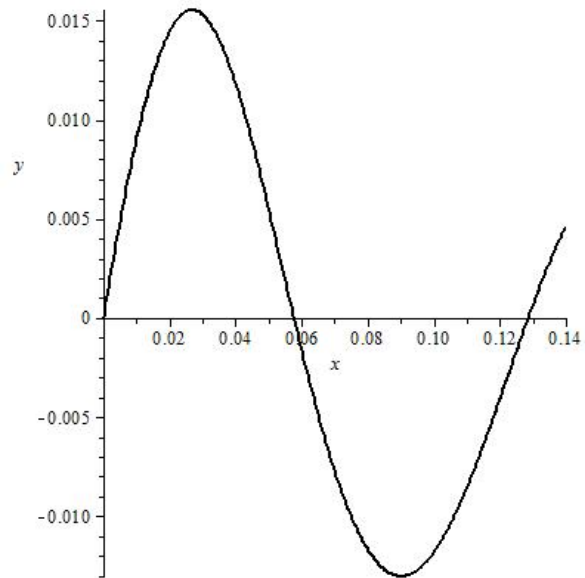
Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1 \text{ кг}$; $c = 2500 \text{ Н/м}$; $\Delta c = 500 \text{ Н/м}$; $\mathcal{G}_0 = 1 \text{ м/с}$ і різні значення β . Використовуючи формули (11) і (12), визначаємо β_* . У нульовому наближенні: $\beta_* \approx 3,178 \text{ с}^{-1}$. У першому наближенні $\beta_* \approx 3,197 \text{ с}^{-1}$. У другому наближенні $\beta_* \approx 3,197 \text{ с}^{-1}$. Як бачимо, процес ітерацій має швидку збіжність. Обчислені за формулами (5), (9), (10) відношення a_1 / a_2 для різних β записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення α при різних β

β , с^{-1}	$100a_1$, м	$100a_2$, м	α
1	1,7747	2,0395	0,870
2	1,7262	1,8619	0,927
3	1,6801	1,7011	0,988
4	1,6361	1,5553	1,052
5	1,5942	1,4228	1,120
6	1,5542	1,3022	1,194

За даними табл. 1 при $\beta < \beta_*$ проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, а при $\beta > \beta_*$ він відсутній.

Для порівняння на рис. 1 і рис. 2 наведено графіки переміщень осцилятора, відповідно, при $\beta = 1\text{с}^{-1}$ і $\beta = 6\text{с}^{-1}$. Вони одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.

Рис. 1 – Графік $x(t)$ при $\beta = 1\text{с}^{-1}$.Рис. 2 – Графік $x(t)$ при $\beta = 6\text{с}^{-1}$.

Результати, показані на рис. 1 і рис. 2, повністю узгоджуються з тими, що в табл. 1.

Коливання за наявності сухого тертя. Коливання за наявності сухого тертя описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x)]x = 0, \quad (13)$$

у якому F_T – сила сухого тертя.

Далі використовуємо розв'язок рівняння (13) за початкових умов (2).

При русі осцилятора вгору до першої зупинки:

$$x(t) = \frac{F_T}{c_1}(\cos(\omega_1 t) - 1) + \frac{g_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t); \quad \dot{x}(t) = g_0 \cdot \cos(\omega_1 t) - \frac{F_T}{c} \omega_1 \sin(\omega_1 t). \quad (14)$$

Тут $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$.

Перша зупинка настає, коли в (14):

$$t = t_1 = \frac{1}{\omega_1} \text{arctg} \frac{c g_0}{\omega_1 F_T}. \quad (15)$$

Підставивши (15) в (14), одержуємо перше максимальне переміщення осцилятора вгору:

$$x(t_1) = a_1 = \sqrt{\left(\frac{g_0}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{F_T}{c_1}\right)^2} - \frac{F_T}{c_1} = \frac{1}{c_1} \left(\sqrt{c_1 m g_0^2 + F_T^2} - F_T \right). \quad (16)$$

Після зупинки рух осцилятора вниз можливий за умови, що:

$$c_1 a_1 > F_T \quad \text{або} \quad g_0 > \sqrt{3} \frac{F_T}{\sqrt{m c_1}}.$$

При виконанні цієї нерівності рух описується виразом:

$$x(t) = \left(a_1 - \frac{F_T}{c_1} \right) \cos[\omega_1 (t - t_1)] + \frac{F_T}{c_1} \quad (17)$$

і проходить зі швидкістю:

$$\dot{x}(t) = - \left(a_1 - \frac{F_T}{c_1} \right) \omega_1 \sin[\omega_1 (t - t_1)].$$

Осцилятор перейде вихідне положення $x = 0$ і матиме від'ємні переміщення ($x < 0$), якщо:

$$\frac{1}{2}c_1a_1^2 > F_T a_1 \quad \text{або} \quad g_0 > 2\sqrt{2} \frac{F_T}{\sqrt{mc_1}}.$$

Згідно з (17) нульове положення, $x(t_{10}) = 0$, настає при:

$$t = t_{10} = t_1 + \arccos \frac{F_T}{F_T - c_1 a_1}.$$

В цей момент часу швидкість руху становить:

$$\dot{x}(t_{10}) = g_1 = -\sqrt{g_0^2 - \frac{4a_1 F_T}{m}}. \quad (18)$$

По аналогії з (16) розмах осцилятора вниз буде дорівнювати:

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{g_1}{\omega_1}\right)^2 + \frac{F_T}{c_2} - \frac{F_T}{c_2}} = \frac{1}{c_2} \left(\sqrt{c_2 m g_1^2 + F_T^2} - F_T \right), \quad (19)$$

де $\omega_2 = \sqrt{c_2 / m}$.

З'ясуємо, якою має бути швидкість g_0 , щоб $a_2 \geq a_1$, тобто проявився динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Для цього прийемо $a_1 = a_2 = a$ і використаємо співвідношення:

$$c_1 a^2 + 2a F_T = m g_0^2; \quad c_2 a^2 + 2a F_T = m g_1^2 \quad \text{і} \quad m g_1^2 = m g_0^2 - 4a F_T.$$

Тоді:

$$a = \frac{4F_T}{c_1 - c_2}; \quad g_0 = g_* = \frac{2\sqrt{2}F_T}{\sqrt{m(c_1 - c_2)}} \sqrt{3c_1 - c_2}. \quad (20)$$

Отже, при $g_0 > g_*$ буде проявлятися ефект несиметрії силової характеристики.

Розглянемо приклад. Для проведення розрахунків задаємо: $m = 1$ кг; $c = 2500$ Н/м; $\Delta c = 500$ Н/м; $F_T = 4$ Н і різні g_0 . За формулою (20) одержуємо: $g_* = 0,9466$ м/с. Результати обчислень a_1 , a_2 та їх відношення $\alpha = a_1 / a_2$ з використанням (16), (18), (19) записано в табл. 2.

Таблиця 2 – Значення α при $F_T = 4$ Н і різних g_0

g_0 , м/с	$100a_1$, м	$100a_2$, м	α
0,5	0,7892	0,6116	1,291
0,8	1,3333	1,2742	1,046
1,0	1,6973	1,7189	1,987
2,0	3,5206	3,9501	0,891
3,0	5,3455	6,1846	0,864
4,0	7,1709	8,4199	0,852

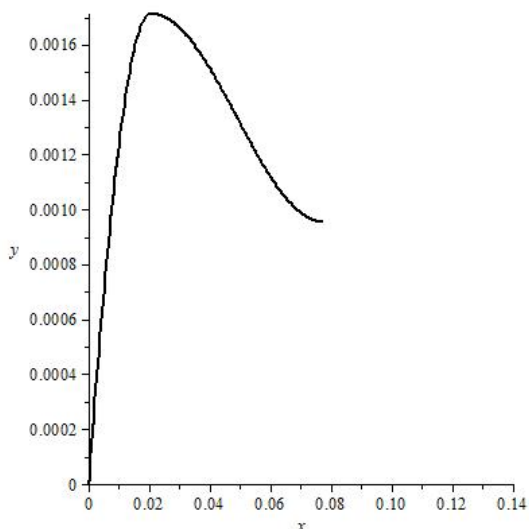


Рис. 3 – Графік $x(t)$ при $g_0 = 0,15$ м/с.

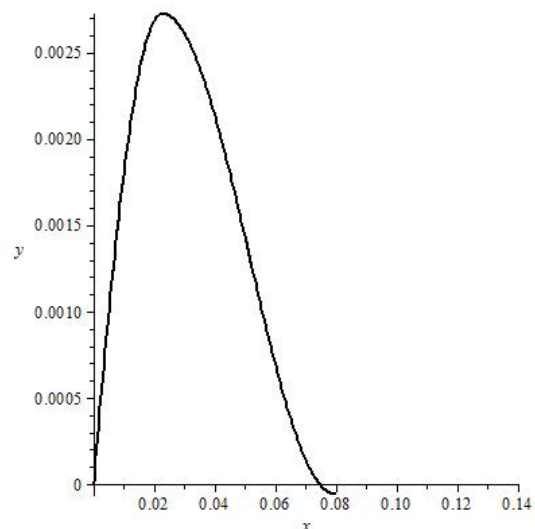
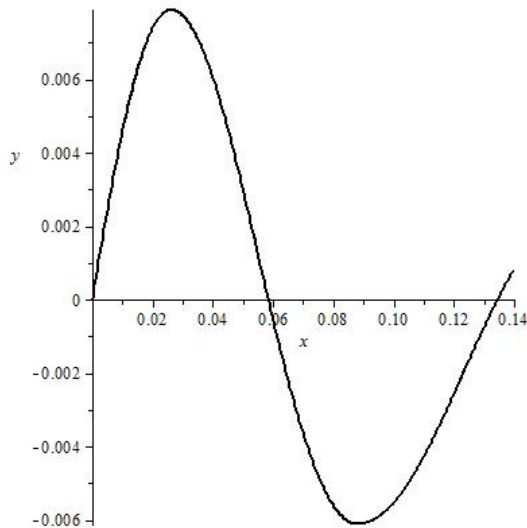
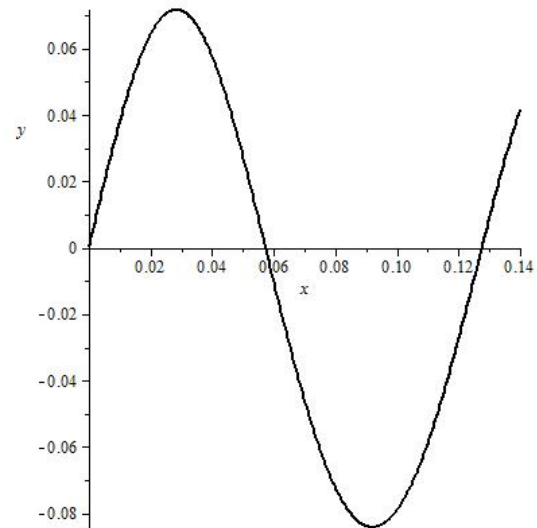


Рис. 4 – Графік $x(t)$ при $g_0 = 0,21$ м/с.

Одержані чисельним інтегруванням рівняння (13) графіки переміщень $x(t)$ подано на рис. 3 – рис. 6, відповідно, при $\mathcal{G}_0 = 0,15; 0,21; 0,5; 4$ м/с. Для швидкості $\mathcal{G}_0 = 0,15$ м/с на графіку немає від'ємних переміщень, а при $\mathcal{G}_0 = 0,21$ м/с вони малі, порівняно з додатними переміщеннями у напрямку дії імпульсу сили. Розмахи коливань на рис. 5 і рис. 6 такі, як в табл. 2, що підтверджує адекватність розрахункових формул.

Рис. 5 – Графік $x(t)$ при $\mathcal{G}_0 = 0,5$ м/с.Рис. 6 – Графік $x(t)$ при $\mathcal{G}_0 = 4$ м/с.

Колівання при наявності позиційного тертя. Позиційне тертя виникає в пружних елементах ресорного типу [15, 16]. Рух системи з одним ступенем вільності описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c + \Delta c \cdot \text{sign}(x) + \Delta c_* \cdot \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(\dot{x})]x = 0, \quad (21)$$

де c , Δc і Δc_* – константи жорсткості силової характеристики, причому третя (Δc_*) з них стосується позиційного тертя.

Якщо не цікавитись процесом руху в часі, то екстремальні переміщення можна визначити із енергетичних співвідношень, не розв'язуючи диференціального рівняння (21), за початкових умов (2).

Такими енергетичними співвідношеннями є:

$$m\mathcal{G}_0^2 = c_3 \cdot a_1^2; \quad m\mathcal{G}_0^2 = c_4 \cdot a_1^2; \quad c_4 \cdot a_1^2 = c_5 \cdot a_2^2. \quad (22)$$

Тут $c_3 = c + \Delta c + \Delta c_*$; $c_4 = c + \Delta c - \Delta c_*$; $c_5 = c - \Delta c + \Delta c_*$.

Співвідношення (22), відповідно, виражають баланс енергії при переході осцилятора з положення $x = 0$ в положення $x = a_1$, з положення $x = a_1$ в положення $x = 0$ і з положення $x = 0$ в положення $|x| = a_2$.

Із (22) випливає, що перший розмах коливань становить:

$$a_1 = \mathcal{G}_0 \sqrt{\frac{m}{c_3}},$$

а другий розмах коливань дорівнює:

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{c_4}{c_5}}.$$

Отже, ефект несиметрії силової характеристики проявляється коли:

$$c_4 > c_5 \quad \text{або} \quad \Delta c - \Delta c_* > \Delta c_* - \Delta c,$$

що зводиться до нерівності:

$$\Delta c > \Delta c_*. \quad (23)$$

Обчислимо екстремальні переміщення осцилятора, в якого: $m = 1$ кг; $c = 2500$ Н/м; $\Delta c = 500$ Н/м; $\Delta c_* = 100$ Н/м при $\mathcal{G}_0 = 2$ м/с. При таких вихідних даних: $c_4 = 2900$ Н/м; $c_5 = 2100$ Н/м. За наведеними вище формулами одержуємо: $a_1 \approx 0,03714$ м; $a_2 \approx 0,04364$ м. Тут $\Delta c > \Delta c_*$, $a_2 > a_1$, тобто має місце динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Для порівняння поміняємо значення Δc і Δc_* , задавши $\Delta c = 100$ Н/м, $\Delta c_* = 500$ Н/м. Тепер $c_4 = 2100$ Н/м, а $c_5 = 2900$ Н/м. Для них $a_2 \approx 0,085a_1$. Другий розмах менший першого.

Позиційне тертя усунуло динамічний ефект несиметрії силової характеристики, який проявляється за умови (23), незалежно від значення \mathcal{G}_0 .

Коливання за наявності квадратичного в'язкого опору. Коливання за наявності квадратичного в'язкого опору описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + (c + \Delta c \cdot \text{sign}(x))x = 0, \quad (24)$$

де μ – коефіцієнт квадратичного опору.

Рівняння (24) розв'язуємо при за початкових умов (2).

Переходом до нової змінної $y = \dot{x}^2$ рівнянню (24), на початку руху, коли $x \geq 0$, $\dot{x} \geq 0$, надаємо вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{m}y + \frac{2c_1}{m}x = 0.$$

Його розв'язок подається виразом:

$$y(x) = \left(\mathcal{G}_0^2 - \frac{mc_1}{2\mu^2} \right) \exp\left(-\frac{2\mu}{m}x \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc_1}{2\mu} - c_1x \right), \quad (25)$$

що задовольняє умовам (2).

В момент першої зупинки осцилятора, при $x = a_1$, маємо рівняння $y(a_1) = 0$, яке з урахуванням (25), набуває форму:

$$\left(\mathcal{G}_0^2 - \frac{mc_1}{2\mu} \right) \exp\left(-\frac{2\mu}{m}a_1 \right) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc_1}{2\mu} - c_1a_1 \right) = 0.$$

Після елементарних перетворень замість нього отримуємо:

$$\left(1 - \frac{2\mu a_1}{m} \right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} \right) \exp\left(1 - \frac{2\mu}{m}a_1 \right). \quad (26)$$

Далі будемо розрізняти три випадки співвідношення другого множника в правій частині та показника експоненти.

а) У випадку коли:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} > 0, \quad 1 - \frac{2\mu a_1}{m} > 0.$$

Тоді введенням позначень:

$$f = 1 - \frac{2\mu}{m}a_1; \quad \xi = 1 - \ln\left(1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} \right), \quad (27)$$

рівнянню (26) надаємо компактний вигляд:

$$f - \ln f = \xi.$$

Аналітичний розв'язок цього рівняння виражається через першу гілку двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу $W_1(-z)$ [18, 19]. Тому:

$$f = -W_1[-\exp(-\xi)],$$

що приводить до наступної формули першого розмаху коливань:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 + W_1[-\exp(-\xi)] \right\}. \quad (28)$$

б) У випадку коли:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} = 0; \quad 1 - \frac{2\mu a_1}{m} = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu}.$$

в) Третій випадок маємо за «великого» добутку $\mu \cdot \mathcal{G}_0$. Для нього:

$$1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} < 0; \quad 1 - \frac{2\mu}{m}a_1 < 0.$$

Уведенням позначень:

$$\varphi = \frac{2\mu}{m} a_1 - 1; \quad \eta = \ln \left(\frac{2\mu^2 \mathcal{G}_0^2}{mc_1} - 1 \right) - 1,$$

рівнянню (26) надаємо вигляд:

$$\varphi + \ln \varphi = \eta.$$

Розв'язок цього рівняння виражається через функцію Ламберта додатного аргументу $W(z)$ [17, 18]. Тому:

$$\varphi = W(\exp(\eta))$$

і в підсумку обчислення a_1 зводимо до формули:

$$a_1 = \frac{m}{2\mu} [1 + W(\exp(\eta))]. \quad (29)$$

Зазначимо, що таблиці функції Ламберта надруковано в [19, 20]. Крім того, в [21] виведено компактні асимптотичні формули, які з похибкою меншою 1 % виражають цю спеціальну функцію через елементарні функції. Графік та деякі властивості функції Ламберта наведено також в [22, 23, 24]. Отже, обчислення a_1 не викликає ускладнень.

Подальший рух осцилятора, після першої зупинки, коли $x \geq 0$, $\dot{x} \leq 0$, описуємо рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2\mu}{m} y + \frac{2c_1}{m} x = 0,$$

з початковою умовою $y(a_1) = 0$.

Розв'язок цієї задачі Коші має вигляд:

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc_1}{2\mu} + c_1 x \right) - \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc_1}{2\mu} + c_1 a_1 \right) \exp \left[\frac{2\mu}{m} (x - a_1) \right].$$

Задавши в ньому $x = 0$, одержуємо формулу швидкості \mathcal{G}_1 , з якою осцилятор повертається у вихідне положення:

$$\mathcal{G}_1 = -\sqrt{y(0)} = - \left[\frac{mc_1}{2\mu^2} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{mc_1}{2\mu} + c_1 a_1 \right) \exp \left(-\frac{2\mu}{m} a_1 \right) \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Для обчислення другого розмаху коливань a_2 далі можна заново використати формули, виведені для a_1 , помінявши в них a_1 на a_2 , \mathcal{G}_0 на \mathcal{G}_1 і c_1 на c_2 .

Будемо теж розрізняти три випадки:

а) якщо $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} > 0$, то обчислення a_2 можна проводити за формулою (28), але тепер у ній:

$$\xi = 1 - \ln \left(1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} \right); \quad (31)$$

б) у другому випадку: $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} = 0$ або $\mathcal{G}_1 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{mc_2}{2}}$. Тоді:

$$a_2 = \frac{m}{2\mu};$$

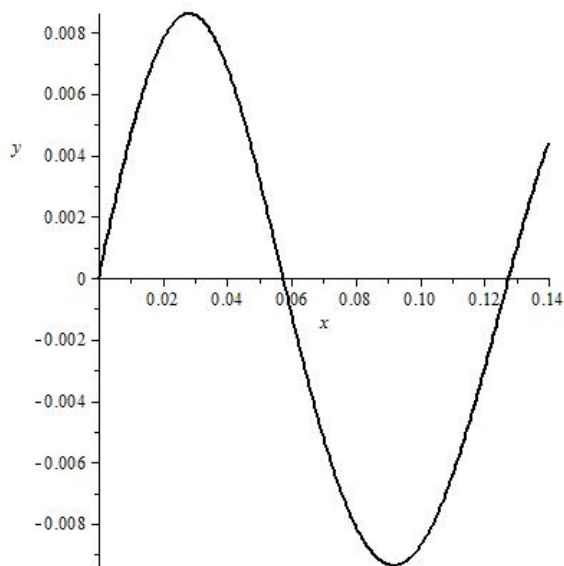
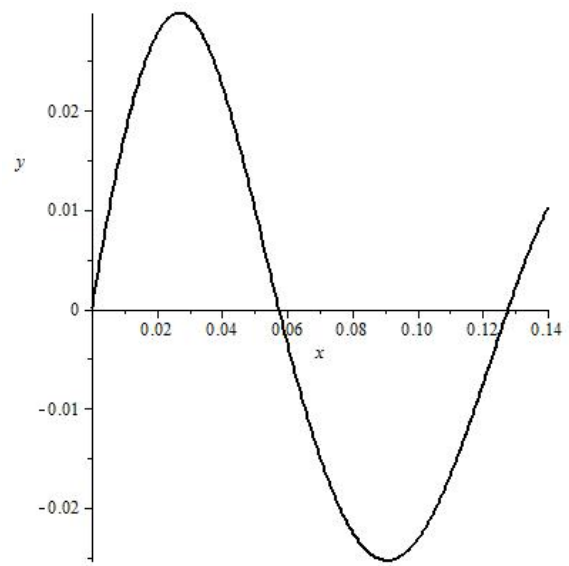
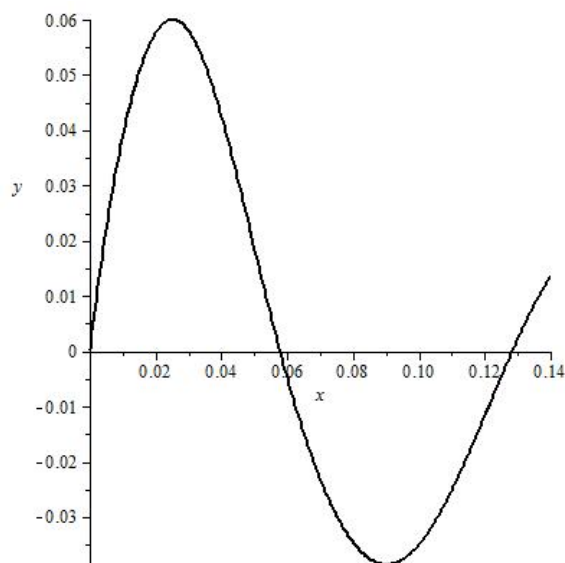
в) для третього випадку, коли $1 - \frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} < 0$, обчислення a_2 зводиться до формули (29), але тепер у ній:

$$\eta = \ln \left(\frac{2\mu^2 \mathcal{G}_1^2}{mc_2} - 1 \right) - 1.$$

Таким чином, є можливість порівняти розмахи a_1 і a_2 , щоб установити наявність або відсутність динамічного ефекту несиметрії силової характеристики.

Розглянемо приклад. Задавши $m = 1$ кг; $c_1 = 3000$ Н/м; $c_2 = 2000$ Н/м; $\mu = 10$ Нс²/м², при $\mathcal{G}_0 = 0,5$ м/с; за формулами (27), (28) знаходимо: $\xi \approx 1,016807$; $\exp(-\xi) \approx 0,36175$; $W_1(-0,36175) \approx -0,8277$; $a_1 \approx 0,008615$ м.

Згідно з (30) для такого значення a_1 квадрат швидкості становить $\mathcal{A}_1^2 \approx 0,19866 \text{ м}^2/\text{с}^2$ і підстановка його в (31) дає: $\xi \approx 1,020066$; $\exp(-\xi) \approx 0,36057$. Тоді $W_1(-0,36057) \approx -0,8128$ і за формулою (28) $a_2 \approx 0,00936 \text{ м}$. У ході обчислень наближені значення функції Ламберта одержували лінійною інтерполяцією табличних даних в [20]. При $\mathcal{G}_0 = 0,5 \text{ м/с}$ розрахунки підтвердили наявність динамічного ефекту несиметрії силової характеристики, бо $a_2 > a_1$. З'ясуємо, чи буде проявлятися цей ефект, коли $\mathcal{G}_0 = 2 \text{ м/с}$. При такій початковій швидкості за формулами (27), (28) одержуємо: $\xi \approx 1,310155$; $\exp(-\xi) \approx 0,26978$; $W_1(-0,26978) \approx -0,4042$; $a_1 \approx 0,02979 \text{ м}$. Для такого розмаху, згідно з (30), $\mathcal{A}_1^2 \approx 1,8078 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Підстановка цього значення \mathcal{A}_1^2 в (31) дає: $\xi \approx 1,19940$; $\exp(-\xi) \approx 0,30137$; $W_1(-0,30137) \approx -0,4938$ і за формулою (28) $a_2 \approx 0,02531 \text{ м}$. Як бачимо, при $\mathcal{G}_0 = 2 \text{ м/с}$ $a_2 < a_1$, тобто динамічний ефект несиметрії не проявляється. Він не проявляється і при більших \mathcal{G}_0 . Наприклад, при $\mathcal{G}_0 = 5 \text{ м/с}$, розрахунки, аналогічні викладеним, дають: $a_1 \approx 0,06003 \text{ м}$; $a_2 \approx 0,03859 \text{ м}$. Отже, при зростанні швидкості руху квадратичний в'язкий опір усуває ефект несиметрії силової характеристики. Правильність аналітичних формул і одержаних за ними числових результатів підтверджують графіки переміщень осцилятора на рис. 7, рис. 8 і рис. 9, одержані чисельним інтегруванням рівняння (24) на комп'ютері.

Рис. 7 – Графік $x(t)$ при $\mathcal{G}_0 = 0,5 \text{ м/с}$, при $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$.Рис. 8 – Графік $x(t)$ при $\mathcal{G}_0 = 2 \text{ м/с}$, при $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$.Рис. 9 – Графік $x(t)$ при $\mathcal{G}_0 = 5 \text{ м/с}$, при $\mu = 10 \text{ Нс}^2/\text{м}^2$.

Перспективи подальших досліджень. Вище розглядали вплив окремих сил опору на динаміку імпульсно навантаженого осцилятора з несиметричною характеристикою пружності. За аналогією можна розглядати і їх спільний вплив, як це робили в [25, 26] при дослідженні вільних коливань осциляторів з лінійною характеристикою пружності.

Висновки. Проведене математичне моделювання показало, що динамічний ефект несиметрії силової характеристики імпульсного навантаження осцилятора може проявлятися і за наявності дисипативних сил різної природи. В роботі встановлено умови прояву названого ефекту при дії сили лінійного або квадратичного в'язкого опору, а також при дії сили сухого або позиційного тертя. Показано, що збільшення цих сил усуває згаданий ефект. Адекватність аналітичних розв'язків підтверджена збіжністю результатів, до яких вони приводять, з результатами чисельного комп'ютерного інтегрування диференціального рівняння руху.

Список літератури

1. Головка К. Г., Луговой П. З., Мейш В. Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – Киев : Изд-во полиграфический центр Киевского университета, 2012. – 541 с.
2. Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. Ф. Нестационарная динамика оболочечных конструкций. – Киев : Изд-во полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
3. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Мис'кдрук, 2012. – 320 с.
4. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков : Мис'кдрук, 2011. – 376 с.
5. Воропай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков : Лидер, 2018. – 214 с.
6. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
7. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : в 2-х частях. Часть 2. – Харьков : ХНАДУ, 2010. – 212 с.
8. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления : в 2 т. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
9. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теория колебаний і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
10. Блехман И. И. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – Москва : Машиностроение, 1979. – 351 с.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
12. Лурье А. И., Чекмарев А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 1. – № 3.
13. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2018. – № 33 (1309). – С. 33 – 36.
14. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі // Вибрації в техніці та технологія : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – 2018. – № 2 (89). – С. 36 – 40.
15. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – Москва : Высшая школа, 1980. – 408 с.
16. Сурьянинов Н. Г., Дащенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин. – Одесса : ОГПУ, 2000. – 306 с.
17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function // Advances in Computational Math. – 1996. – V. 5. – P. 329 – 359.
18. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2007. – V. 72. – P. 785 – 800.
19. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук А. О., 2013. – 204 с.
20. Ольшанский В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2020. – 268 с.
21. Ольшанский В. П. Про апроксимацію функції Ламберта // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологія. – Харків : НТУ «ХП», 2020. – № 1 (1355). – С. 64 – 69.
22. Боровин Г. К., Дягель Р. В., Лапшин В. В. Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – Москва : ИПМ, 2008. – № 53. – 18 с.
23. Дягель Р. В., Лапшин В. В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 164 – 173.
24. Боровин Г. К., Лапшин В. В. Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кроссли // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки. – 2018. – № 6. – С. 18 – 30. – DOI : 10.18698/1812-3368.
25. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
26. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2016. – 264 с.

References (transliterated)

1. Golovko K. G., Lugovoy P. Z., Meysh V. F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh* [Dynamics of heterogeneous shells under non-stationary loading]. Kiev, Izd-vo poligraficheskiiy tsentr kievskogo universiteta Publ., 2012. 541 p.
2. Lugovoy P. Z., Meysh V. F., Shtantsel' E. F. *Nestatsionarnaya dinamika obolochechnykh konstruksiy* [Non-stationary dynamics of shell structures]. Kiev, Izd-vo poligraficheskiiy tsentr «Kievskiy universitet» Publ., 2005. 536 p.
3. Ol'shanskiy V. P., Tishhenko L. N., Ol'shanskiy S. V. *Kolebaniya stержney i plastin pri mekhnicheskom udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2012. 320 p.
4. Smetankina N. V. *Nestatsionarnoye deformirovaniye, termouprugost' i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek* [Unsteady deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2011. 376 p.
5. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.

6. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
7. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : v 2-kh chastyakh. Chast'2* [Load identification during pulse deformation of solids: in 2 parts. Part 2]. Kharkov, HNADU PUBL., 2010. 212 p.
8. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Modeli, metody, yavleniya : v 2 t* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods, phenomena: in 2 vol.]. Moscow – Izhevsk, Institute komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
9. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyssha shkola Publ., 2004. 525 p.
10. Blekhman I. I. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh. T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technics. Handbook in 6 vol. Vol. 2. Vibrations of non-linear mechanical systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. 351 p.
11. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
12. Lur'e A. I., Chekmaryev A. I. *Vynuzhdennye kolebaniya v nelineynoy sisteme s kharakteristikoy, sostavlennoy iz pryamolineynykh otrezkov* [Forced vibrations in a system with characteristic given by system of line segments]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1938, vol. 1, no. 3.
13. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro dynamichnyy efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry impul'snomu navantazhenii [About the dynamic effect of non-symmetry of power characteristic of an oscillating system under a pulse]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Dynamika i matsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 33 (1309), pp. 33–36.
14. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystyky kolyval'noyi systemy pry mekhanichnomu udari [On the effect of non-symmetry of power characteristic of vibration system under force impact]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibration in engineering and technology : all-Ukrainian scientific and technical journal]. 2018, no. 2 (89), pp. 36–40.
15. Biderman V. L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1980. 408 p.
16. Sur'yaninov N. G., Dashhenko A. F., Belous P. A. *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin* [Theoretical bases of machine dynamics]. Odessa, OGPU Publ., 2000. 306 p.
17. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Math.* 1996, vol. 5, pp. 329–359.
18. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics.* 2007, vol. 72, pp. 785–800.
19. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lambert v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [Lambert function in ballistics problems of a material point]. Kharkov, Izdatel' Savchuk A.O. Publ., 2013. 204 p.
20. Ol'shans'kyy V. P., Slipchenko M. V., Spol'nik O. I., Burlaka V. V. *Neliniyni kolyvannya dysypatyvnykh ostslyatoriv* [Non-linear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2020. 268 p.
21. Ol'shans'kyy V. P. Pro aproksymatsiyu funktsiyi Lambert [On the approximation of the Lambert function]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 1 (1355), pp. 64–69.
22. Borovin G. K., Dyagel' R. V., Lapshin V. V. *Nelineynaya vyazkoprugaya model' kollinearnogo udara* [Non-linear viscoelastic collinear impact model]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics]. Moscow, IPM Publ., 2008, no. 53, 18 p.
23. Dyagel' R. V., Lapshin V. V. *O nelineynoy vyazkoprugoy modeli kollinearnogo udara Khanta-Krossli* [On the nonlinear viscoelastic model of a Hunt-Crossley collinear impact]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tyerdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics]. 2011, no. 5, pp. 164–173.
24. Borovin G. K., Lapshin V. V. *Obobshchennaya model' udara Gerts-Khanta-Krossli* [Generalized model of the Hertz-Hunt-Crossley hit]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seriya : Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State University. Series : Natural Sciences]. 2018, no. 6, pp. 18–30. DOI: 10.18698/1812-3368.
25. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
26. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostslyatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.

Надійшло (received) 19.02.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasilij Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО АПРОКСИМАЦІЇ ПЕРІОДИЧНИХ АТЕВ-ФУНКЦІЙ

Запропоновано два варіанти апроксимаційних формул для періодичних Атеб-синуса і Атеб-косинуса в першій чверті їх періоду. Перший варіант – це наближення типу Паде, які одержано ітераційним способом при побудові аналітичного розв’язку відповідного інтегрального рівняння зі згортанням степеневому ряду в замкнену суму за формулою Шенкса. Розглянуто два ітераційних наближення. Перше більш компактне, але має гіршу точність, що понижується із збільшенням значення аргументу. Щоб усунути цей недолік, додатково запропоновано гібридну апроксимацію, де обчислення значень Атеб-функцій на початку (для косинуса) і в кінці (для синуса) чверті їх періоду має проводитись за окремою формулою, що була одержана раніше асимптотичним методом. Порівняльний аналіз наближених і точних значень спеціальних функцій показав, що похибка запропонованих апроксимацій є меншою за один відсоток. Другий варіант наближення – це заміна періодичних Атеб-функцій тригонометричними функціями окремих аргументів, вибраних так, щоб значення спеціальних функцій були точними в деяких точках чверті періоду. В роботі виділено п’ять таких точок колокації. Для реалізації цього варіанту апроксимації складено окрему таблицю значень періодичних Атеб-функцій в точках колокації. Наведено приклади розрахунків, де показано, що і другий варіант апроксимації дає гарну точність наближеного обчислення значень спеціальних функцій.

Ключові слова: Атеб-синус, Атеб-косинус, два способи апроксимації, наближення елементарними функціями, точки колокації.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

О АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АТЕВ-ФУНКЦИЙ

Предложены два варианта аппроксимационных формул для периодических Атеб-синуса и Атеб-косинуса в первой четверти их периода. Первый вариант – это приближение типа Паде, которые получены итерационным способом при построении аналитического решения соответствующего интегрального уравнения со свёртыванием степенного ряда в замкнутую сумму по формуле Шенкса. Рассмотрены два итерационных приближения. Первое более компактное, но имеет худшую точность, которая понижается с увеличением значения аргумента. Чтобы устранить этот недостаток, дополнительно предложена гибридная аппроксимация, где вычисление значений Атеб-функций в начале (для косинуса) и в конце (для синуса) четверти периода должно проводиться по отдельной формуле, которая была получена ранее асимптотическим методом. Сравнительный анализ приближённых и точных значений специальных функций показал, что погрешность предложенных аппроксимаций меньше одного процента. Второй вариант приближения – это замена периодических Атеб-функций тригонометрическими отдельными аргументов, выбранных так, чтобы значения специальных функций были точными в определённых точках четверти периода. В работе получены пять таких точек коллокации. Для реализации этого варианта аппроксимации составлена отдельная таблица значений периодических Атеб-функций в точках коллокации. Приведены примеры расчётов, в которых показано, что и второй вариант аппроксимации даёт хорошую точность приближённых значений специальных функций.

Ключевые слова: Атеб-синус, Атеб-косинус, два способа аппроксимации, приближение элементарными функциями, точки коллокации.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

ON APPROXIMATION OF PERIODIC ATEB-FUNCTIONS

Two versions of approximation formulae for periodic Ateb-sine and Ateb-cosine in the first quarter of their common period are proposed. The first version is a Pade type approximation derived when constructing analytical solution of corresponding integral equation by iteration method with transforming the power series into a closed sum by Shanks' formula. Two iteration approximations are considered. The first one is more concise but of worse approximation accuracy which deteriorates with increasing the argument value. To improve the approximation accuracy a hybrid approximation is proposed when the values of the Ateb-functions in the beginning (for the cosine) and in the end (for the sine) of the quarter period are computed by a separate formula obtained a priori by the asymptotic method. The comparison analysis of the approximate and exact values of the special functions indicates the error of the approximation proposed to be less than one per cent. The second variant of approximation is by replacing the periodic Ateb-functions by trigonometric functions of specific argument. The arguments are chosen so that the values of the special functions are exact at specific points of the quarter period. Five such collocation points are introduced in the paper. To implement this version of approximation a separate table of the values of the periodic Ateb-functions at the collocation points is compiled. The computational examples presented in the paper show the approximate values of the special functions obtained by the second version of approximation to have a good accuracy.

Key words: Ateb-sine, Ateb-cosine, computing values, two approximation versions, approximating by elementary functions, collocation points.

Вступ. *Періодичні Атеб-функції* систематично використовують при розв’язанні різних задач в теорії нелінійних механічних коливань, як вітчизняні [1 – 4], так і закордонні вчені [5, 6], а також вони стали зручним засобом при захисті інформації [7, 8]. Останнім часом їх задіяли і при розв’язанні задач *квазістатичного удару* твердих тіл [9, 10, 11]. Але на думку автора [12] широке розповсюдження Атеб-функцій в інженерних розрахунках стримує відсутність вивчення цих функцій у загальнотехнічних курсах вузів і відсутність зручних формул для їх обчислення, хоча питання наближених обчислень названих функцій неодноразово піднімали в науковій літературі. До цього в [7] запропоновано використовувати *ряд Фур’є*, а в [13] – *ряд Маклорена*. Зазначимо, що коефіцієнти тригонометричного ряду виражаються через інтеграли від цих функцій і їх визначення складає певні незручності. В роботах [5, 6] періодичний *Атеб-косинус* апроксимують натуральним логарифмом з *гіперболічного косинуса*, але точність такого компактного наближення не висока. Тому не можна вважати вичерпаним питання числової реалізації розв’язків в Атеб-функціях.

Метою статті є виведення компактних формул для наближеного обчислення значень періодичних Атеб-функцій.

Основні результати. Розглянемо два варіанти апроксимацій, про які не йшлося в вище згаданих публікаціях. Перший варіант – це *апроксимації типу Паде*, а другий – це наближення зведенням Атеб-функцій до *тригонометричних функцій спеціального аргументу*.

Значимо, що Атеб-косинус $x(t) = Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ і Атеб-синус $x(t) = Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ є розв'язками диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{1+\nu}{2}x^\nu = 0, \quad (1)$$

у якому $\nu \geq 0$, крапка над x означає похідну по t .

Перша з Атеб-функцій задовольняє початковим умовам: $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, а друга – $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Ці задачі Коші з високою точністю можна розв'язувати *чисельними методами* на комп'ютері. Тому встановлення похибок апроксимацій не викликає труднощів.

Між функціями виконуються співвідношення:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) = Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}(1-t)\right), \quad (2)$$

де

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)},$$

$\Gamma(x)$ – Гамма-функція, затабульована в [14].

Отже, для наближеного обчислення значень функцій в першій чверті їх періоду $t \in [0; 1]$ достатньо мати апроксимацію однієї з них.

Апроксимації типу Паде. Апроксимації типу Паде одержимо для $Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$. Для цього замінимо диференціальне рівняння (1) на інтегральне:

$$x(t) = t - \frac{1+\nu}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} x^\nu(t_2) dt_2 dt_1, \quad (3)$$

де враховано вказані вище початкові умови.

Далі замість (3) використаємо ітераційне співвідношення:

$$x_n(t) = t - \frac{1+\nu}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} x_{n-1}^\nu(t_2) dt_2 dt_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Покладемо в ньому $x_0(t) = 0$. Тоді $x_1(t) = t$ і наступна ітерація дає:

$$x_2(t) = t - \frac{1}{2} \frac{t^{\nu+2}}{\nu+2}.$$

Найбільше значення $I = 2$ чвертьперіод має при $\nu = 0$. Тому на проміжку апроксимації $t \in [0; 1]$ при $2^\nu < \nu + 2$, коли $\nu \in [0, 2)$, збігається *біноміальний ряд*:

$$x_2^\nu(t) = t^\nu \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^{\nu+1}}{\nu+2}\right)^\nu = t^\nu - \frac{\nu}{2} \frac{t^{2\nu+1}}{\nu+2} + \frac{\nu(\nu-1)}{8} \frac{t^{3\nu+2}}{(\nu+2)^2} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{48} \frac{t^{4\nu+3}}{(\nu+2)^3} + \dots \quad (5)$$

Значимо, що ряд (5) можна використовувати і при більших ν , бо збільшення ν супроводжується зменшенням I . Наприклад, при $\nu = 2$, $I \approx 1,40216$ і $I^2 = 1,96605 < 4$.

Підстановка ряду (5) в (4) приводить до третього наближення:

$$x_3(t) = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)(2\nu+3)} - \frac{\nu(\nu-1)}{48} \frac{t^{3\nu+4}}{(\nu+2)^2(3\nu+4)} + \dots \quad (6)$$

Щоб надати йому згорнуту форму, використаємо *формулу Шенкса*, що наближено виражає суму ряду і має вигляд [11, 15]:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \quad (7)$$

Тут S_n – сума n перших членів ряду; a_n і a_{n+1} – відповідно, його n -й і $(n+1)$ -й члени.

Прийmemo в (6):

$$S_n = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)}; \quad a_n = -\frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)}; \quad a_{n+1} = \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)(2\nu+3)}$$

і підставимо в (7). Тоді:

$$x_3(t) \approx S = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(\nu+2)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{8(\nu+2)\left(2\nu+3+\frac{\nu}{4}t^{\nu+1}\right)}.$$

Після подальших перетворень отримуємо формулу апроксимації Атеб-синусу:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx x_3(t) \approx t - \frac{2(2\nu+3)t^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu t^{\nu+1}\right]}. \quad (8)$$

Для апроксимації Атеб-косинусу аналогічне наближення має вигляд:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx 1-t - \frac{2(2\nu+3)(1-t)^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu(1-t)^{\nu+1}\right]}. \quad (9)$$

Зазначимо, що при $\nu = 5/3$ формула (8) переходить у виведену раніше в [16], при наближеному розв'язанні інтегрального рівняння пружного удару твердих тіл. При $\nu = 3/2$ формула (8) дає залежність, одержану раніше в [17].

У випадку $\nu = 0$ формули (8) і (9) є точними, бо:

$$Sa\left(0, 1; \frac{1}{2}t\right) = t - \frac{t^2}{4}; \quad Ca\left(0, 1; \frac{1}{2}t\right) = 1 - \frac{t^2}{4}. \quad (10)$$

Для інших ν точність наближень (8) і (9) можна дещо підвищити, якщо врахувати результати роботи [18] і перейти до гібридного варіанту апроксимації:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \begin{cases} t - \frac{2(2\nu+3)t^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu t^{\nu+1}\right]} & \text{при } 0 \leq t \leq 0,6 \cdot I; \\ 1 - \frac{2}{\nu} \sin^2 \left[\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}} (1-t) \right] & \text{при } 0,6 \cdot I \leq t \leq I, \end{cases} \quad (11)$$

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \begin{cases} 1 - \frac{2}{\nu} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}} t \right) & \text{при } 0 \leq t \leq 0,4 \cdot I; \\ 1-t - \frac{2(2\nu+3)(1-t)^{\nu+2}}{(\nu+2)\left[4(2\nu+3)+\nu(1-t)^{\nu+1}\right]} & \text{при } 0,4 \cdot I \leq t \leq I. \end{cases} \quad (12)$$

Тут, при $\nu = 1$, $I = \pi/2$, вирази з квадратом синуса є точними формулами, бо:

$$Sa(1, 1; t) = \sin t, \quad Ca(1, 1; t) = \cos t.$$

Вони також точні при $\nu = 0$, $I = 2$, бо:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{2}{\nu} \sin^2 \left[\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}} (2-t) \right] = \frac{(2-t)^2}{4}; \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{2}{\nu} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{2\sqrt{2}} t \right) = \frac{t^2}{4}.$$

Другий шлях уточнення формул (8) і (9) – це подальше проведення ітерацій. Скористаємося ним. Подамо (8) у вигляді:

$$x_3(t) = t \left(1 - \frac{at^{\nu+1}}{1+bt^{\nu+1}} \right),$$

$$\text{де } a = \frac{1}{2(\nu+2)}; \quad b = \frac{\nu}{4(2\nu+3)}.$$

Тоді можна знову скористатися біноміальним рядом і записати наближення:

$$x_3^\nu(t) = t^\nu - \nu a t^{2\nu+1} + \nu a \left(b + \frac{\nu-1}{2} a \right) t^{3\nu+2} - \dots$$

Підстановка його в (4) дає четверту ітерацію:

$$x_4(t) \approx t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)} - \frac{\nu a \left(b + \frac{\nu-1}{2} a\right) t^{3\nu+4}}{6(3\nu+4)} + \dots$$

Прийmemo далі:

$$S_n = t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)}; \quad a_n = \frac{\nu a t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3)}; \quad a_{n+1} = -\frac{\nu a \left(b + \frac{\nu-1}{2} a\right) t^{3\nu+4}}{6(3\nu+4)}$$

і підставимо в (7). Це дає наступну формулу апроксимації Атеб-синуса:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} t\right) \approx x_4(t) \approx t - \frac{t^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu t^{2\nu+3}}{4(2\nu+3) \left[2(\nu+2) + \frac{\nu^2 + \nu - 1}{3\nu+4} t^{\nu+1}\right]}. \quad (13)$$

Вона більш громіздка, ніж (8), але має вищу точність.

Аналогічне наближення Атеб-косинуса має вигляд:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} t\right) \approx 1 - t - \frac{(1-t)^{\nu+2}}{2(2+\nu)} + \frac{\nu(1-t)^{2\nu+3}}{4(2\nu+3) \left[2(\nu+2) + \frac{\nu^2 + \nu - 1}{3\nu+4} (1-t)^{\nu+1}\right]}. \quad (14)$$

Його точність така, як і формули (13).

При $\nu = 0$ формули (13), (14) є точними і переходять в (10).

Інформацію про похибки наближень (8), (11) і (13) при обчисленні Атеб-синуса з різними індексами ν подано в табл. 1, де умовно точні значення спеціальної функції отримані чисельним інтегруванням диференціального рівняння (1) на комп'ютері.

Таблиця 1 – Наближені та точні значення Атеб-синуса

t / I	Формула (8)	Формула (11)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} t\right)$			
	при $\nu = 0,5$			
0,25	4,069	4,069	4,070	4,070
0,50	7,276	7,276	7,277	7,277
0,75	9,296	9,307	9,307	9,307
1,00	9,951	10,000	9,999	10,000
	при $\nu = 1$			
0,25	3,827	3,827	3,827	3,827
0,50	7,071	7,071	7,071	7,071
0,75	9,233	9,239	9,239	9,239
1,00	9,958	10,000	10,001	10,000
	при $\nu = 1,5$			
0,25	3,636	3,636	3,636	3,636
0,50	6,884	6,884	6,884	6,884
0,75	9,169	9,172	9,172	9,172
1,00	9,972	10,000	10,001	10,000
	при $\nu = 2$			
0,25	3,487	3,487	3,487	3,487
0,50	6,716	6,716	6,716	6,716
0,75	9,105	9,106	9,106	9,106
1,00	9,985	10,000	10,001	10,000
	при $\nu = 3$			
0,25	3,274	3,274	3,274	3,274
0,50	6,436	6,436	6,436	6,436
0,75	8,980	8,982	8,980	8,980
1,00	10,002	10,000	10,000	10,000
	при $\nu = 4$			
0,25	3,134	3,134	3,134	3,134
0,50	6,218	6,218	6,218	6,218
0,75	8,863	8,869	8,863	8,863
1,00	10,012	10,000	9,999	10,000

Розрахунки показують, що всі три варіанти апроксимації дають задовільні результати, а кращу точність серед них мають формули (13), (14).

Апроксимація переходом до тригонометричних функцій спеціального аргументу. Такий вид апроксимації пропонують в [19] для обчислення значень еліптичних синуса і косинуса. Тут цю ідею переносимо на випадок періодичних Атеб-функцій. Для наближеного обчислення значень Атеб-синуса в першій чверті його періоду $t \in [0; 1]$ пропонуємо формулу:

$$Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \sin\left(\frac{\pi t}{2I} + A \sin \frac{\pi t}{I} + B \sin \frac{2\pi t}{I} + C \sin \frac{3\pi t}{I}\right), \quad (15)$$

в якій A, B, C – сталі множники. Для їх визначення перепишемо (15) у вигляді:

$$A \sin \frac{\pi t}{I} + B \sin \frac{2\pi t}{I} + C \sin \frac{3\pi t}{I} \approx \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \right] - \frac{\pi t}{2I}. \quad (16)$$

Спираючись на метод колокацій, поставимо умову, щоб рівність (16) виконувалась точно при $t = I/4; I/2; 3I/4$. Це приводить до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} A \sin \frac{\pi}{4} + B \sin \frac{\pi}{2} + C \sin \frac{3\pi}{4} &= \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{4}\right) \right] - \frac{\pi}{8}; \\ A \sin \frac{\pi}{2} + B \sin \pi + C \sin \frac{3\pi}{2} &= \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{2}\right) \right] - \frac{\pi}{4}; \\ A \sin \frac{3\pi}{4} + B \sin \frac{3\pi}{2} + C \sin \frac{9\pi}{4} &= \arcsin\left[Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{3I}{4}\right) \right] - \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Розв'язок системи виражається аналітично:

$$B = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{4}\right) \right) - \arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{3I}{4}\right) \right) \right]; \quad A = D + E; \quad C = D - E, \quad (17)$$

причому:

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{4}\right) \right) + \arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{3I}{4}\right) \right) - \frac{\pi}{2} \right]; \quad E = \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{2}\right) \right) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Щоб використати формули (17) для обчислення констант A, B, C , треба мати значення Атеб-синуса при $t = I/4; t = I/2$ і $t = 3I/4$.

Ці значення для окремих ν записано до табл. 2, що спрощує реалізацію апроксимації (15). Для значень ν , яких немає в табл. 2, треба проводити лінійну інтерполяцію табличних даних.

Таблиця 2 – Значення Атеб-синуса $Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right)$ при $t = 0,25I; 0,5I; 0,75I$

ν	I	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{4}\right)$	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{I}{2}\right)$	$10Sa\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2} \frac{3I}{4}\right)$
0,0	2,00000	4,375	7,500	9,375
0,1	1,92856	4,309	7,454	9,361
0,2	1,86709	4,245	7,409	9,348
0,3	1,81356	4,184	7,365	9,334
0,4	1,76649	4,126	7,321	9,321
0,5	1,72475	4,070	7,277	9,307
0,6	1,68745	4,017	7,235	9,293
0,7	1,65390	3,966	7,193	9,280
0,8	1,62357	3,917	7,151	9,266
0,9	1,59599	3,871	7,111	9,252
1,0	1,57079	3,827	7,071	9,239
1,1	1,54770	3,785	7,032	9,225
1,2	1,52641	3,745	6,994	9,212
1,3	1,50679	3,707	6,956	9,198
1,4	1,48857	3,671	6,920	9,185
1,5	1,47165	3,636	6,884	9,172
1,6	1,45586	3,603	6,849	9,158
1,7	1,44114	3,572	6,815	9,145
1,8	1,42734	3,542	6,781	9,132
1,9	1,41436	3,514	6,748	9,119

Продовження таблиці 2				
2,0	1,40216	3,487	6,716	9,106
2,1	1,39069	3,461	6,685	9,094
2,2	1,37987	3,436	6,654	9,080
2,3	1,36962	3,412	6,625	9,067
2,4	1,35994	3,390	6,596	9,055
2,5	1,35074	3,368	6,567	9,042
2,6	1,34201	3,348	6,540	9,029
2,7	1,33369	3,328	6,513	9,017
2,8	1,32575	3,309	6,486	9,004
2,9	1,31820	3,291	6,461	8,992
3,0	1,31102	3,274	6,436	8,980
3,1	1,30416	3,257	6,412	8,968
3,2	1,29759	3,241	6,388	8,956
3,3	1,29130	3,226	6,365	8,944
3,4	1,28525	3,211	6,342	8,932
3,5	1,27944	3,197	6,320	8,920
3,6	1,27391	3,183	6,299	8,909
3,7	1,26857	3,170	6,278	8,897
3,8	1,26343	3,157	6,258	8,886
3,9	1,25846	3,145	6,238	8,874
4,0	1,25372	3,134	6,218	8,863

Враховуючи (2), із (15) одержуємо формулу апроксимації Атеб-косинуса:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx \cos\left(\frac{\pi t}{2I} - A \sin \frac{\pi t}{I} + B \sin \frac{2\pi t}{I} - C \sin \frac{3\pi t}{I}\right). \quad (18)$$

Вона має таку ж точність, як і (15).

У випадку $\nu = 1$ формули (15) і (18) є точними, бо $A = B = C = 0$, $I = \pi/2$.

Щоб з'ясувати похибки наближень (15) і (18), розглянемо два приклади. Порівняння наближених і точних результатів проводимо посередині між вузлами інтерполяції, а саме при $t = 0,375I$, $t = 0,625I$ і $t = 0,875I$. Приймемо $\nu = 0,5$. Використовуючи значення Атеб-синуса, записані в табл. 1, за формулами (17) одержуємо $A = 0,030584$, $B = 0,004122$, $C = 0,001019$. Підставивши ці значення констант в (15), проводимо подальше обчислення Атеб-синуса в контрольних точках. Отримуємо результати і записуємо їх до табл. 3.

У другому прикладі покладемо $\nu = 2$ і підставимо відповідні значення Атеб-синуса з табл. 1 в формулу (17). Одержуємо:

$$A = -0,049222; B = -0,001576; C = -0,000190.$$

Задавши ці значення констант в формулу (15), проводимо обчислення спеціальної функції в контрольних точках. Одержані результати представимо в табл. 4.

Таблиця 3 – Значення $Sa(0,5; 1; 0,75t)$,
обчислені трьома способами

$\frac{t}{I}$	Формула (15)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	$10Sa(0,5; 1; 0,75t)$		
0,375	5,809	5,806	5,806
0,625	8,451	8,452	8,452
0,875	9,826	9,825	9,826

Таблиця 4 – Значення $Sa(2; 1; 1,5t)$,
обчислені трьома способами

$\frac{t}{I}$	Формула (15)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	$10Sa(2; 1; 1,5t)$		
0,375	5,163	5,166	5,164
0,625	8,061	8,060	8,060
0,875	9,771	9,772	9,771

Розрахунки показують, що похибки порівняних варіантів апроксимації майже однакові. Вони забезпечують точність в три значущі цифри після коми, але точність апроксимації типу Паде буде кращою при малих ν , бо при $\nu = 0$ її апроксимаційні формули становляться точними, що відзначалось раніше.

В роботах [5, 6] для обчислення Атеб-косинуса використовують формулу:

$$Ca\left(\nu, 1; \frac{1+\nu}{2}t\right) \approx 1 - \frac{2}{1+\nu} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{1+\nu}{2}t \right) \right]. \quad (19)$$

Для аналізу її точності проведено обчислення значень вказаної функції при $\nu = 0,5$ і різних t . Результати обчислень записано до табл. 5.

Таблиця 5 – Значення $Ca(0,5; 1; 0,75t)$, одержані чотирма способами

$\frac{t}{I}$	Формула (14)	Формула (18)	Формула (19)	Чисельне інтегрування
	$10Ca(0,5; 1; 0,75t)$			
0,375	8,452	8,451	8,489	8,452
0,625	5,806	5,809	6,048	5,806
0,875	2,113	2,103	2,832	2,113

Як бачимо, точність апроксимації (19) невисока, вона значно гірша, ніж точність запропонованих тут формул.

Перспективи подальших досліджень. Вище йшлося про наближене обчислення значень періодичних Ateb-функцій. Але на практиці, крім них, поширені також неперіодичні Ateb-функції [13]. Тому виведення формул для наближеного їх обчислення складає подальшу перспективу.

Висновки. Реалізовано два варіанти апроксимації періодичних Ateb-функцій в першій чверті їх періоду. Виведено та перевірено розрахунками апроксимаційні формули. Показано, що вони забезпечують точність в три значущі цифри після коми і можуть бути використані при числовій реалізації аналітичних розв'язків різних прикладних задач, пов'язаних з періодичними Ateb-функціями.

Список літератури

1. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 1. – С. 55 – 58.
2. Сокіл Б. І., Ліщинська Х. І. Асимптотичний метод і періодичні Ateb-функції у дослідженнях коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Серія : Динаміка, міцність і проектування машин і приладів. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2006. – № 556. – С. 57 – 64.
3. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation system // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2015. – Issue 3. P. 62 – 67.
4. Pukach P. Ya. Investigation of bending vibration in Voigt – Kelvin bars with regard for nonlinear resistance force // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215. – Issue 1. – P. 71 – 78.
5. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization in strongly nonlinear damped oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. – 2000. – Vol. 1. – No. 10. – P. 1535 – 1542.
6. Sveticanin L., Podany T. Oscillator with a Sum of Noninteger – Order Nonlinearities // Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Article ID 649050. – 20 p.
7. Дронюк І. М., Назаркевич М. А., Тхир В. І. Обчислення результатів моделювання Ateb-функціями захисту інформації // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2010. – № 686. – С. 121 – 126.
8. Грицик В. В., Назаркевич І. М. Документально захищені інформаційні технології засобами Ateb-функцій // Проблеми управління і автоматизації. – 2009. – № 2. – С. 139 – 152.
9. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Ateb-синус у розв'язку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
10. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface // Eastern – European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – Vol. 1/7 (97). – P. 25 – 32.
11. Ol'shanskii V., Burlaka V., Slipchenko M. Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine // Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science. – 2019. – Vol. 5. – No. 2. – P. 53 – 60.
12. Sveticanin L. A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computation Mechanics. – 2012. – Vol. 6. – No. 1. – P. 56 – 74.
13. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
14. Абрамовиц М., Стіган І. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
15. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
16. Ольшанський В. П. Найближчий розв'язок інтегрального рівняння удару тіл з сингулярною точкою на поверхні контакту // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – № 22 (1347). – С. 62 – 67.
17. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – № 8 (1333). – С. 244 – 249.
18. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34 – 40.
19. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Аналітичний розв'язок задачі пружного удару конуса по півпростору // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – № 1. – С. 40 – 45.

References (transliterated)

1. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkiv deyakyx rivnyan', yaki opysuyut' nelineyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyskh [On application of Ateb-functions for constructing solutions to some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 1997, no. 1, pp. 55–58.
2. Sokil B. I., Lishchyn's'ka Kh. I. Asymptotychnyy metod i periodychni Ateb-funktsiyi u doslidzhennyakh kolyvnykh protsesiv rukhomykh nelineyniyo pruzhnykh odnovymirnykh system [Asymptotic methods and periodic Ateb-functions in studying vibration processes of mobile nonlinearly elastic

- one dimensional systems]. *Visnyk natsional'nogo universytetu "Lviv's'ka politekhnika". Seriya : Dynamika, mitsnist' i proektuvannya mashyn i prykladiv* [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic». Series: Dynamics, strength and development of machines and devises]. Lviv, Vydavnytstvo L'viv's'koyi politekhniki Publ., 2006, no. 556, pp. 57–64.
3. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation system. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*. 2015, issue 3, pp. 62–67.
 4. Pukach P. Ya. Investigation of bending vibration in Voigt – Kelvin bars with regard for nonlinear resistance force. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 215, issue 1, pp. 71–78.
 5. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000, vol. 1, no. 10, pp. 1535–1542.
 6. Cveticanin L., Podany T. Oscillator with a Sum of Noninteger – Order Nonlinearities. *Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics*. 2012, Article ID 649050, 20 p.
 7. Dronyuk I. M., Nazarkevych M. A., Tkhir V. I. Obchyslennya rezul'tativ modelyuvannya Ateb-funktsiyamy zakhystu informatsiyi [Computing results of modeling information protection by Ateb-functions]. *Visnyk natsional'nogo universytetu "Lviv's'ka politekhnika". Komp'yuterni nauky ta informatsiyi tekhnologiyi* [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic». Series: Computer sciences and information technologies]. Lviv, Vydavnytstvo L'viv's'koyi politekhniki Publ., 2010, no. 686, pp. 121–126.
 8. Grytsyk V. V., Nazarkevych I. M. Dokumental'no zakhyshheni informatsiyi zasobamy Ateb-funktsiy [Secured information technologies by means of Ateb-functions]. *Problemy upravlinnya i avtomatyky* [Problems of control and automation]. 2009, no. 2, pp. 139–152.
 9. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Ateb-synus u rozv'yazku zadachi Gertsya pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
 10. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Eastern – European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, vol. 1/7 (97), pp. 25–32.
 11. Olshanskiy V., Burlaka V., Slipchenko M. Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*. 2019, vol. 5, no. 2, pp. 53–60.
 12. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. *Journal of the Serbian Society for Computation Mechanics*. 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.
 13. Grytsyk V. V., Nazarkevych M. A. Matematychni modeli alhorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 2007, no. 12, pp. 37–42.
 14. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematychnymi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
 15. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdyih tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976, 319 p.
 16. Ol'shans'kiy V. P. Nablyzheny rozv'yazok integral'nogo rivnyannya udaru til z syngulyarnoyu tochkou na poverkhni kontaktu [Approximate solution of the integral equation of body shock with a singular point on the surface of the contact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 62–67.
 17. Ol'shans'kiy V. P. Porivnyannya nablyzhenykh rozv'yazkiv integral'nogo rivnyannya syly udaru til v teorii Gertsya [Comparison of approximate solutions to impact strength integral equation in the framework of Hertz theory]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 8 (1333), pp. 244–249.
 18. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Pro rukh ostsyl'yatora zi stepenoyu kharakterystyky pruzhnosti [On the movement of an oscillator with power elasticity characteristic]. *Vibratsiyi v tekhnstsi ta tekhnologiyakh. Vseykrayins'kyi naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technic and technologies. Pan-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnitsa, 2017, no. 3 (86), pp. 34–40.
 19. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Analitichnyy rozv'yazok zadachi pruzhnogo udaru konusa po pivprostoru [Analytic solution of the elastic impact problem for a cone over a half-space]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 1, pp. 40–45.

Надійшло (received) 19.02.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор фізико-математических наук, професор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasilii Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ю. І. ПЕРШИНА

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ РІЗНИМИ ІНФОРМАЦІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Досліджуються методи побудови математичних моделей розривних функцій двох змінних з використанням різної інформації про них: односторонні значення в точках та односторонні сліди вздовж заданої системи ліній. Розглядається випадок, коли область визначення шуканої функції триангульована прямокутними трикутниками. Якщо застосовувати інтерполяційні або апроксимаційні методи наближення, то для їх побудови повинні бути задані значення функції в заданих точках; якщо ж застосовувати інтерлінаційні методи – сліди шуканої функції вздовж заданої системи ліній. В роботі будуються розривний інтерполяційний та апроксимаційний сплайни для наближення розривної функції двох змінних із заданими односторонніми значеннями в заданій системі точок (в нашому випадку, в вершинах прямокутних трикутників), доводяться теореми про оцінку похибки наближення побудованими розривними конструкціями. Також в роботі будується розривний інтерлінаційний сплайн, в якому використовується зовсім інша інформація про розривну функцію – односторонні сліди вздовж заданої системи ліній (в нашому випадку, вздовж сторін прямокутних трикутників). Інтерлінація функцій може знайти широке застосування в автоматизації проектування корпусів літаків, автомобілів; під час отримання і обробки результатів гідролокації та радіолокації, при вирішенні задачі комп'ютерної томографії, в цифровій обробці сигналів і в багатьох інших областях. В статті також доводяться теореми про інтегральний вигляд залишку та про оцінку похибки наближення побудованим розривним оператором інтерлінації. Наводяться обчислювальні експерименти, які порівнюють результати наближення розривної функції двох змінних різними інформаційними операторами з використанням трикутних елементів. Надалі планується застосувати побудовані оператори розривної апроксимації та інтерлінації для вирішення двовимірної задачі комп'ютерної томографії з суттєвим використанням неоднорідності внутрішньої структури тіла, яку необхідно відновити.

Ключові слова: розривна функція, інтерлінація, інтерполяція, апроксимація, трикутні елементи.

Ю. И. ПЕРШИНА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследуются методы построения математических моделей разрывных функций двух переменных с использованием различной информации о них: односторонние значения в точках и односторонние следы вдоль заданной системы линий. Рассматривается случай, когда область определения искомой функции триангулирована прямоугольными треугольниками. Если применять интерполяционные или аппроксимационные методы приближения, то для их построения должны быть заданы значения функции в заданных точках; если же применять интерлиначионные методы – следы искомой функции вдоль заданной системы линий. В работе строятся разрывный интерполяционный и аппроксимационный сплайны для приближения разрывной функции двух переменных с заданными односторонними значениями в заданной системе точек (в нашем случае, в вершинах прямоугольных треугольников), доказываются теоремы об оценке погрешности приближения построенными разрывными конструкциями. Также в работе строится разрывный интерлиначионный сплайн, в котором используется совсем другая информация о разрывной функции – односторонние следы вдоль заданной системы линий (в нашем случае, вдоль сторон прямоугольных треугольников). Интерлиначиация функций может найти широкое применение в автоматизации проектирования корпусов самолетов, автомобилей; при получении и обработки результатов гидролокации и радиолокации, при решении задач компьютерной томографии, в цифровой обработке сигналов и во многих других областях. В статье также доказываются теоремы об интегральном виде и оценке погрешности приближения построенным разрывным оператором интерлиначиации. Приводятся вычислительные эксперименты, которые сравнивают результаты приближения разрывной функции двух переменных различными информационными операторами с использованием треугольных элементов. В дальнейшем планируется применить построенные операторы разрывной апроксимации и интерлиначиации для решения двумерной задачи компьютерной томографии с существенным использованием неоднородности внутренней структуры тела, которую необходимо восстановить.

Ключевые слова: разрывная функция, интерлиначиация, интерполяция, аппроксимация, треугольные элементы.

I. I. PERSHYNA

RECONSTRUCTION OF THE TWO VARIABLES DISCONTINUOUS FUNCTION BY DIFFERENT INFORMATION OPERATORS USING TRIANGULAR ELEMENTS

The paper examines methods for constructing mathematical models of two variables discontinuous functions using various information about them: one-sided values at points and one-sided traces along a given system of lines. The case is considered when the domain of the required function is triangulated by right-angled triangles. If interpolation or approximation methods are used, then for their construction the values of the function at given points must be given; if we use interlination methods, then traces of the desired function along a given system of lines. In this work, we construct a discontinuous interpolation and approximation splines for approximating a discontinuous function of two variables with given one-sided values in a given system of points (in our case, at the vertices of right-angled triangles), and prove theorems on the estimation of the approximation error by constructed discontinuous structures. In the paper a discontinuous interlination spline, which uses completely different information about the discontinuous function, namely one-sided traces along a given system of lines (in our case, along the sides of right-angled triangles) is also built. Interlination of functions can find wide application in the aircraft and automobile body design automation; when receiving and processing the results of sonar and radar, when solving problems of computed tomography, in digital signal processing and in many other areas. In the paper theorems on the integral form and an estimate of the approximation error by the constructed discontinuous interlination operator are also proved. Computational experiments that compare the results of the approximation of a discontinuous function of two variables by different information operators using triangular elements are presented. In the future, it is planned to apply the constructed operators of discontinuous approximation and interlination to solve a two-dimensional problem of computed tomography with a significant use of the inhomogeneity of the internal structure of the body, which must be reconstructed.

Key words: discontinuous function, interlination, interpolation, approximation, triangular elements.

Вступ та аналіз останніх досліджень. На сьогодні основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділяється наближенню неперервних і диференційованих функцій неперервними і ди-

ференційовними сплайнами [1 – 3]. У той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується *розривними функціями* [4]. Наприклад, в *комп'ютерній топографії* при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінку і т.д. мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів бурових свердловин виникає задача відновлення внутрішньої структури кори Землі між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відокремлюють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт і т.д.). Тобто розробка методів наближення розривних функцій є актуальною задачею.

В роботі [5] розглядається задача рівномірного наближення неперервних і неперервно-диференційовних функцій розривним сплайнами однієї змінної. Відомі також роботи, в яких досліджуються методи наближення неперервних функцій однієї змінної *кусково-постійними функціями* ([6], [7]), в яких неперервні та неперервно-диференційовні функції наближаються сплайнами ступеня нуль.

Протягом багатьох років були розроблені методи, які апроксимують різні важливі функції. Ці методи включають *ряди Фур'є, ряд Чебишева, поліноми Фур'є – Якобі та Паде – Якобі, раціональні функції Паде – Якобі, Паде – Чебишева та Паде – Лежандра*, а також *дробові та квазіфракційні наближення* [8 – 11]. Але ці методи погано впливають на збіжність рядів при наближенні функцій з особливістю. Втрата збіжності відбувається в області, де є розриви, і називається *явищем Гіббса*. Це явище проявляється в районі стрибків розриву і є перешкодою для відновлення розривної функції. Існують методи зменшення явища Гіббса [12]. Однак вони не повністю усувають його.

Автори вважають, що наближувати розривні функції потрібно за допомогою також розривних функцій. Тому авторами були розроблені інтерполяційні методи наближення розривних функцій однієї змінної та методи знаходження точок розриву за допомогою *метода найменших квадратів* [13] та *метода мінімакса* [14]. Також були побудовані *розривні інтерполяційні сплайни* для наближення розривних функцій двох змінних з використанням *прямокутних елементів* [15]; *розривні інтерлінаційні сплайни* з використанням *трапецеподібних елементів* [16].

Для розв'язання різних типів задач в якості вихідних даних можуть бути задані різні типи інформації. Якщо наближати функцію *інтерполяційними або апроксимаційними методами*, то для їх побудови повинні бути задані значення функції в заданих точках; якщо ж наближувати інтерлінаційними методами – сліди шуканої функції вздовж заданої системи ліній. Інтерлінація функцій може знайти широке застосування в автоматизації проектування корпусів літаків, автомобілів; під час отримання і обробки результатів гідролокації і радіолокації, при вирішенні задач комп'ютерної топографії, в цифровій обробці сигналів і в багатьох інших областях.

Серія робіт авторів [16 – 19], присвячена розв'язанню *плоскої задачі радонівської комп'ютерної топографії* з використанням неоднорідності внутрішньої структури двовимірного тіла. Для цього доцільно використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють (можливо, наближено) функції за їх відомими слідами на заданій системі ліній. Вони дають можливість побудувати оператори, інтеграли яких по цих лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам з відновлюваної функції. Тобто інтерлінація – це математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів відповідно до їх відомих проєкцій. Ця стаття є продовженням цієї серії робіт.

В роботі досліджуються методи побудови математичних моделей розривних функцій з використанням різної інформації про них: односторонні значення в точках та односторонні сліди вздовж заданої системи ліній. Розглядається випадок, коли область визначення шуканої функції *триангульована прямокутними трикутниками*.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної інтерполяції. В цьому розділі побудуємо розривний інтерполяційний сплайн, коли про функцію відомі її односторонні значення в заданій системі точок.

Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0; 1] \times [0; 1]$. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою підрозділу є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямиий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутних елементів (рис. 1)

$$T_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1} + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{(2)} &= \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}} \right\}; \\ \Gamma_{ij}^{(3)} &= \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i-x_{i-1}} < y < y_j \right\}; \\ \Gamma_{ij}^{(4)} &= \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1}-x_i} < y < y_j \right\}.\end{aligned}$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває односторонніх значень

$$\begin{aligned}C_1^{(1)} &= C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= C_{i,j}^{(2)+} = f(x_i - 0, y_j + 0), \\ C_2^{(1)} &= C_{i,j+1}^{(1)+} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), & C_2^{(2)} &= C_{i,j+1}^{(2)-} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0), \\ C_3^{(1)} &= C_{i+1,j}^{(1)+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_3^{(2)} &= C_{i-1,j}^{(2)+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0), \\ C_1^{(3)} &= C_{i,j}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= C_{i,j}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_j - 0), \\ C_2^{(3)} &= C_{i-1,j}^{(3)-} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= C_{i+1,j}^{(4)-} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\ C_3^{(3)} &= C_{i,j-1}^{(3)-} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0), & C_3^{(4)} &= C_{i,j-1}^{(4)+} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0).\end{aligned}$$

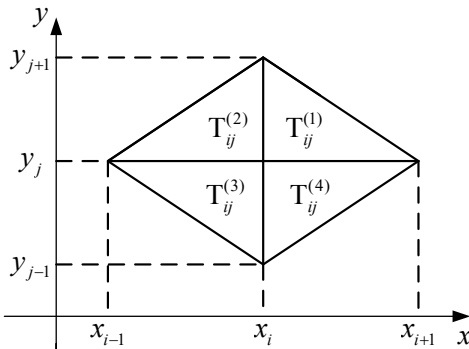


Рис. 1 – Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Означення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\Gamma_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) наступну функцію

$$\begin{aligned}S(x, y) &= s_{ij}^{(k)}(x, y) = C_1^{(k)} \frac{\omega_3^{(k)}(x, y)}{\omega_3^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(k)} \frac{\omega_2^{(k)}(x, y)}{\omega_2^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\ &+ C_3^{(k)} \frac{\omega_1^{(k)}(x, y)}{\omega_1^{(k)}(A_3^{(k)})}, \quad (x, y) \in \Gamma_{ij}^{(k)};\end{aligned}\quad (1)$$

$$\omega_1^{(k)}(x, y) = x - x_i, \quad \omega_2^{(k)}(x, y) = y - y_j;$$

$$\omega_3^{(k)}(x, y) = \begin{cases} -y + y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}, & k=1; \\ -y + y_j + \frac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i-1}}, & k=2; \\ -y + y_{j-1} + \frac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i-x_{i-1}}, & k=3; \\ -y + y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1}-x_i}, & k=4; \end{cases}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k=1; \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k=2; \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k=3; \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k=4; \end{cases} \quad A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k=1; \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k=2; \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k=3; \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k=4. \end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задовольняє наступним інтерполяційним властивостям:

$$\begin{aligned}s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) &= C_1^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) &= C_1^{(2)}; \\ s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(2)}; \\ s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(1)}; & s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(2)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) &= C_1^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) &= C_1^{(4)}; \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(4)}; \\ s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(3)}; & s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Нехай функція $f(x, y)$ наближується оператором $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) та $|f'_x(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq N$, тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}, \quad \Delta_x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_y = y_{j+1} - y_j.$$

Доведення. Проведемо доведення для трикутного елемента типу $T_{ij}^{(1)}$. Очевидно, що

$$\frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in T_{ij}^{(1)},$$

тому, можемо представити функцію $f(x, y)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} f(x, y) + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} f(x, y) + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} f(x, y) = \\ &= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \left[f(A_1^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_{A_1^{(1)}}) \right) (y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[f(A_2^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (x - x_{A_2^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (y - y_{A_2^{(1)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \left[f(A_3^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (x - x_{A_3^{(1)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (y - y_{A_3^{(1)}}) \right] = \\ &= S(x, y) + RS(x, y), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} RS(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_{A_1^{(k)}}) \right) (y - y_{A_1^{(k)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (x - x_{A_2^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (y - y_{A_2^{(k)}}) \right] + \\ &+ \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (x - x_{A_3^{(k)}}) + \right. \\ &\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (y - y_{A_3^{(k)}}) \right]. \end{aligned}$$

Тепер оцінимо похибку наближення $|RS(x, y)| = |f(x, y) - S(x, y)|$:

$$\begin{aligned} |RS(x, y)| &\leq \frac{\omega_{3ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{3ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \cdot [M(x - x_{A_1^{(1)}}) + N(y - y_{A_1^{(1)}})] + \frac{\omega_{2ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{2ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} [M(x - x_{A_2^{(1)}}) + \\ &+ N(y - y_{A_2^{(1)}})] + \frac{\omega_{1ij}^{(1)}(x, y)}{\omega_{1ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} [M(x_{A_3^{(1)}} - x) + N(y - y_{A_3^{(1)}})] = \\ &= M \left(\frac{-y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i-1} - x) \right) + \\ &+ N \left(\frac{-y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y_{j+1} - y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (y - y_j) \right) = \\ &= M \cdot u(x, y) + N \cdot v(x, y). \end{aligned}$$

Далі, після знаходження максимальних значень функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, отримаємо, що максимальне значення функція $u(x, y)$ досягає в точці $\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, 0\right)$ та дорівнює $\frac{x_{i+1} - x_i}{2} = \frac{\Delta_x}{2}$, а максимальне значення функція $v(x, y)$ досягає в точці $\left(0, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}\right)$ та дорівнює $\frac{y_{j+1} - y_j}{2} = \frac{\Delta_y}{2}$.

Тобто отримаємо наступну оцінку похибки:

$$|RS(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}.$$

Теорема 2 доведена.

Наведемо оцінку похибки наближення функції лінійним інтерполяційним сплайном, як наведена в роботі Суботіна [20].

Нехай $\xi = \{\xi_1, \xi_2\} \in R^2$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$, $D_\xi f(x, y) = \xi_1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ – похідна за напрямком ξ .

Теорема 3 [20]. Нехай $f(x, y) \in M_2$, $M_2 = \{f(x, y) : D_\xi f(x, y) \text{ – неперервні в } D \text{ та } |D_\xi f(u) - D_\xi f(v)| \leq M \|u - v\|, \forall u = (u_1, u_2) \in D, \forall v = (v_1, v_2) \in D, \forall \xi\}$ наближується оператором $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$), тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузи.

Теорема 4. Якщо $C_\mu^{(k)} = f(A_\mu^{(k)})$, $k = \overline{1, 4}$, $\mu = \overline{1, 3}$, то в кожному трикутнику $T_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення витікає з того, що через три точки можна провести тільки одну площину.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної апроксимації. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в одиничному квадраті $D = [0, 1]^2$. Ця область розбивається на прямокутні трикутні елементи таким же чином, як і в попередньому розділі (рис. 1). Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Побудуємо оператор розривної кусково-поліноміальної апроксимації такої, що в кожному трикутнику він є оператором поліноміальної апроксимації функції.

Означення 2. Будемо називати розривним апроксимаційним лінійним поліноміальним сплайном в області $T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) функцію, визначену формулою (1), а коефіцієнти $C_p^{(k)}$, $p = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 4}$ сплайна знаходяться методом найменших квадратів в інтегральній формі з умови

$$\sum_{T_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{T_{ij}^{(k)}} [f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C \quad (2)$$

Теорема 5. Нехай $f(x, y) \in M_2$, $M_2 = \{f(x, y) : D_\xi f(x, y) - \text{неперервні в } T_{ij}^{(k)}, k = \overline{1, 4} \text{ та } |D_\xi f(u) - D_\xi f(v)| \leq M \|u - v\|, \forall u = (u_1, u_2) \in T_{ij}^{(k)}, \forall v = (v_1, v_2) \in T_{ij}^{(k)}, \forall \xi\}$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)}$, визначеним формулою (1) з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|S(x, y)\|_\infty \leq \max \left\{ |f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, y_{j+1})| \right\} + \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузу трикутного елемента.

Доведення. Проведемо доведення на прикладі трикутника $T_{ij}^{(1)}$. Тоді формула (1) перетвориться на наступний вираз:

$$S(x, y) = C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

де

$$g(x) = y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Розв'яжемо мінімізаційну задачу: $P_{ij}(C) \rightarrow \min_C$, де

$$P_{ij}(C) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - f(x, y) \right)^2 dx dy.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_1^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_2^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C_3^{(1)}} = 0$$

відносно невідомих $C_m^{(1)}$, $m = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} dy dx = 0; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} dy dx = 0; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} 2 \left(C_1^{(1)} \frac{y - g(x)}{y_{j+1} - g(x)} + C_2^{(1)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_3^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} dy dx = 0. \end{cases} \quad (3)$$

У системі зробимо заміну

$$C_1^{(1)} = f(x_i + 0, y_j + 0) + \varepsilon_{i,j}, \quad C_2^{(1)} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0) + \varepsilon_{i,j+1}, \quad C_3^{(1)} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0) + \varepsilon_{i+1,j}$$

і замінимо $f(x, y)$ інтерполяційним сплайном, побудованим на трикутному елементі $T_{ij}^{(1)}$ із залишковим членом $R(x, y)$, який був виведений у доведенні теореми 2. В результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів отриманої системи, враховуючи, що $g(x) = y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}$:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} \right)^2 dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{12}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{24}; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g(x)}{y_j - g(x)} dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{24}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right)^2 dx dy &= \frac{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})}{12}; \end{aligned}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} dx dy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24}; \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 dx dy = \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12}.$$

Система (3) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{y-g(x)}{y_j-g(x)} dy dx; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} dy dx; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{24} \varepsilon_{i,j+1} + \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{12} \varepsilon_{i+1,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g(x)} R(x,y) \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} dy dx. \end{cases} \quad (4)$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося теоремою 3 для оцінки похибки наближення розривним інтерполяційним сплайном на трикутному елементі:

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leq \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – довжина гіпотенузи трикутного елемента $T_{ij}^{(1)}$.

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i+1,j}, \varepsilon_{i,j+1}\}$ та спростивши отримані вирази, систему (4) переписемо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}; \\ \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6} \|\varepsilon\| = \frac{1}{6} M h^2 \frac{(x_i-x_{i+1})(y_j-y_{j+1})}{6}. \end{cases}$$

Тобто $\|\varepsilon\| \leq \frac{1}{6} M h^2$.

Теорема 5 доведена.

Теорема 6. Нехай функція $f(x,y)$ наближується апроксимаційним розривним сплайном $S(x,y)$ у вигляді (1) $(x,y) \in T_{ij}^{(1)} \subset D$ з коефіцієнтами, що знаходяться з формули (2), та $|f'_x(x,y)| \leq M$, $|f'_y(x,y)| \leq N$. Тоді для оцінки розривного апроксимаційного сплайна в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\|S(x,y)\|_{\infty} \leq \max\{|f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, y_{j+1})|\} + \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2},$$

де $\Delta_x = x_{i+1} - x_i$, $\Delta_y = y_{j+1} - y_j$.

Доведення. Доведення проводиться по аналогії з теоремою 5, використовуючи похибку наближення розривної функції розривними лінійними інтерполяційними сплайнами з теореми 2, яка має вигляд:

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}.$$

Теорема 6 доведена.

Наслідок 1. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трикутному елементі розбиття з точками розриву (x_i, y_j) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x,y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}$, $m = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, 4}$, що знаходяться з умови (2), то отримуємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y) = f(x,y)$, де $f(x,y) = A(\text{const})$ або $f(x,y) = A_0 + A_1 x + A_2 y$.

Математичне моделювання розривної функції двох змінних з використанням розривної інтерлінації. В роботі [21] побудовано оператор розривної інтерлінації. Нагадаємо його вигляд.

Розглянемо трикутний елемент T_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (рис. 2), утворений прямими

$$\omega_{1i}(x, y) = 0, \quad \omega_{2j}(x, y) = 0, \quad \omega_{3ij}(x, y) = 0,$$

де

$$\omega_{1i} := x - x_i, \quad \omega_{2j} := y - y_j, \quad \omega_{3ij} := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

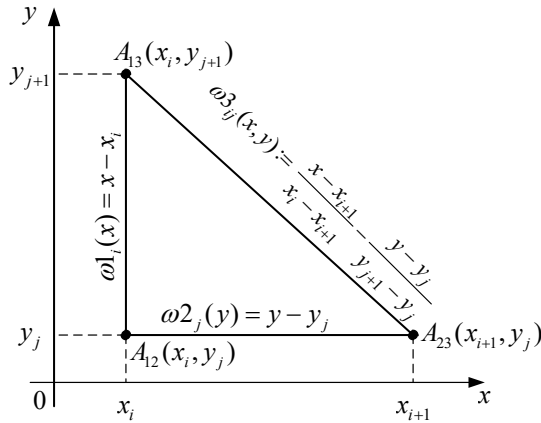


Рис. 2 – Зображення трикутного елемента T_{ij} .

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i+0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} f(x, y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi p p_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi m p_{ij} = \varphi m_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i-0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i - 0, y_j + 0).$$

2. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j+0} f(x, y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j-0} f(x, y) = f(x, y_j - 0);$$

$$\psi p p_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi m p_{ij} = \psi m_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j - 0).$$

3. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1}$ (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1} - 0\right), \quad \eta p_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1} + 0\right),$$

$$\eta p m_{ij} = \eta m_{ij}(x_i) = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), \quad \eta p p_{ij} = \eta p_{ij}(x_i) = f(x_i + 0, y_{j+1} + 0)$$

або

$$\eta m_{ij}(y) = f\left(\frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} + x_{i+1} + 0, y\right), \quad \eta p_{ij}(y) = f\left(\frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} + x_{i+1} - 0, y\right),$$

$$\eta p m_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f(x_{i+1} + 0, y_j - 0), \quad \eta m p_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

Теорема 7. Якщо сліди функції $f(x, y)$ задовольняють умовам:

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i(y_{j+1}), \quad \eta m_{ij}(x_{i+1}) = \psi p_j(x_{i+1}),$$

то оператор

$$\begin{aligned} Of(x, y) = & \frac{\omega_{3ij}(x, y)}{\omega_{3ij}(A_{12})} (\psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j)) + \\ & + \frac{\omega_{2j}(y)}{\omega_{2j}(A_{13})} \left(\eta m_{ij}(x) - \varphi p_i\left(y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{(x_i - x_{i+1})}\right) + \varphi p_i(y) \right) + \\ & + \frac{\omega_{1i}(x)}{\omega_{1i}(A_{23})} \left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)}\right) - \psi p_j\left(x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)}\right) + \psi p_j(x) \right) \end{aligned}$$

інтерлінує $f(x, y)$ на $\partial T_i : Of(x, y)|_{\partial T_i} = f(x, y)|_{\partial T_i}$.

Теорема 8. Якщо $f(x, y) \in C^2$ разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно

в середині трикутного елемента T_{ij} , то для залишку $Rf = (I - O)f$ справедлива рівність:

$$Rf(x, y) = \frac{\omega_{3_{ij}}(x, y)}{\omega_{3_{ij}}(A_{12})} \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv + \frac{\omega_{2_j}(y)}{\omega_{2_j}(A_{13})} \int_{x_i}^x \int_{y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv +$$

$$+ \frac{\omega_{1_i}(x)}{\omega_{1_i}(A_{23})} \int_{x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j}}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u, v) dudv, \quad (x, y) \in T_{ij}.$$

У випадку, коли область триангульована, залишок інтерлінації в кожному з трикутників не дорівнює добутовці залишків одновимірної інтерполяції на відміну від випадка розбиття області на прямокутні елементи. Тому для оцінки залишку корисною буде теорема.

Теорема 9. Нехай $f(x, y) \in L_{\infty}^{1,1}(T_{ij})$, $\forall (x, y) \in T_{ij}$. Тоді справедлива оцінка похибки:

$$|Rf(x, y)| \leq \|f^{(1,1)}(x, y)\|_{L_{\infty}(T_{ij})} \cdot \left| (x - x_i)(y - y_j) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \right|, \quad \forall (x, y) \in T_{ij},$$

де $L_{\infty}(T_{ij}) = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p(T_{ij}) = \sup \text{vrai} |f(x, y)|$ – істотна верхня грань функції $|f(x, y)|$ на T_{ij} , тобто найменше з чисел $K \geq 0$, для яких нерівність $|f(x, y)| > K$ виконується на множині міри нуль.

Теорема 10. Якщо виконуються умови теореми 8 та теореми 9, то функція

$$f(x, y) = (x - x_i)(y - y_j) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right)$$

перетворює нерівність з теореми 9 у рівність.

Обчислювальні експерименти та порівняння результатів. Нехай задані вузли трикутної сітки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$ та функція $f(x, y)$, визначена в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представленій на рис. 3.

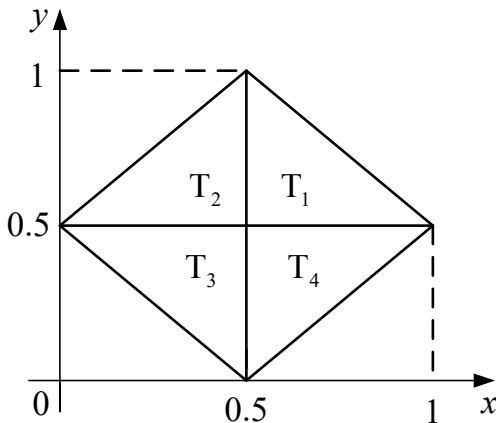


Рис. 3 – Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$.

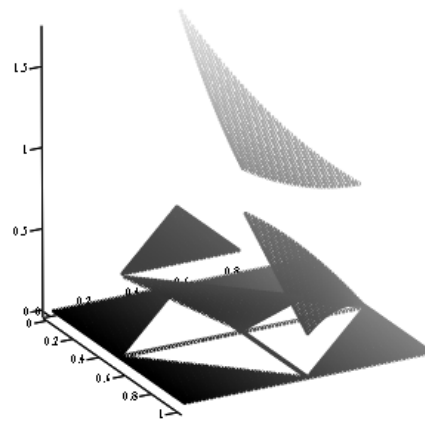


Рис. 4 – Зображення розривної функції $f(x, y)$.

$$T_1 = \{x - 0.5 > 0, y - 0.5 > 0, 1.5 - x - y > 0\};$$

$$T_2 = \{-(x - 0.5) > 0, y - 0.5 > 0, 0.5 + x - y > 0\};$$

$$T_3 = \{-(x - 0.5) > 0, -(y - 0.5) > 0, -0.5 + x + y > 0\};$$

$$T_4 = \{x - 0.5 > 0, -(y - 0.5) > 0, 0.5 - x + y > 0\}.$$

Задамо функцію (рис. 4):

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1; \\ (y - 1)^2 + (x - 1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x, y)$ у вигляді формули (1), в якості елементів матриці C беремо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки (у цьому випадку вважаємо їх заданими).

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0.75 & 1.75 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки значень матриці C в формулу (1), отримаємо наступний інтерполяційний сплайн (рис. 5, а):

$$S1(x, y) = \begin{cases} -x - 1.5y + 2, & (x, y) \in T_1; \\ -1.5x - 0.5y + 2, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайна $S1(x, y)$: $\max |f(x, y) - S1(x, y)| \approx 0.13$.

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Елементи матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто

$$C = \begin{pmatrix} 0.775 & 0.075 & 0.275 \\ 0.95 & 0.65 & 1.65 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо апроксимаційний сплайн вигляду (рис. 5, б)

$$S2(x, y) = \begin{cases} -x - 1.4y + 1.975, & (x, y) \in T_1; \\ -1.4x - 0.6y + 1.95, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайна $S2(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S2(x, y)| \approx 0.07.$$

Побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний, що відповідає теорії. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Тепер для відновлення функції $f(x, y)$ застосуємо побудований оператор інтерлінації. Для того, щоб ним скористатися, у якості вхідних даних повинні бути задані сліди функції вздовж ліній триангуляції. Нехай функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на лініях триангуляції, та вздовж цих ліній має наступні односторонні сліди:

$$\begin{aligned} T_1 : \varphi 1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 < y < 1.5-x}} f(x, y) = y^2; & T_2 : \psi 1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0.5-0 \\ 0.5 < y < 0.5+x}} f(x, y) = (y-1)^2 + 0,75; \\ \varphi 2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ 0.5 < x < 1.5-y}} f(x, y) = 1,25 - x; & \psi 2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0.5+0 \\ y-0.5 < x < 0.5}} f(x, y) = (x-1)^2 + 0,75; \\ \varphi 3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 1.5-x-0 \\ 0.5 < x < 1}} f(x, y) = 2x - x^2 - 0,75; & \psi 3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow x+0.5-0 \\ 0 < x < 0.5}} f(x, y) = (x-0,5)^2 + (x-1)^2 + 0,5; \\ & \text{або} & & \text{або} \\ \varphi 3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1.5-y-0 \\ 0.5 < y < 1}} f(x, y) = y - y^2. & \psi 3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow y-0.5+0 \\ 0.5 < y < 1}} f(x, y) = (y-1,5)^2 + (y-1)^2 + 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_3 : \chi_1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5-x < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & T_4 : \rho_1(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5+0 \\ x-0,5 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5 - y; \\
 \chi_2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5-y < x < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & \rho_2(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-0 \\ 0,5 < x < y+0,5}} f(x, y) = x - 0,5; \\
 \chi_3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow 0,5-x+0 \\ 0 < x < 0,5}} f(x, y) = 0,5; & \rho_3(x) &= \lim_{\substack{y \rightarrow x-0,5+0 \\ 0,5 < x < 1}} f(x, y) = 0,5; \\
 & \text{або} & & \text{або} \\
 \chi_3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5-y+0 \\ 0 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5. & \rho_3(y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0,5+y+0 \\ 0 < y < 0,5}} f(x, y) = 0,5.
 \end{aligned}$$

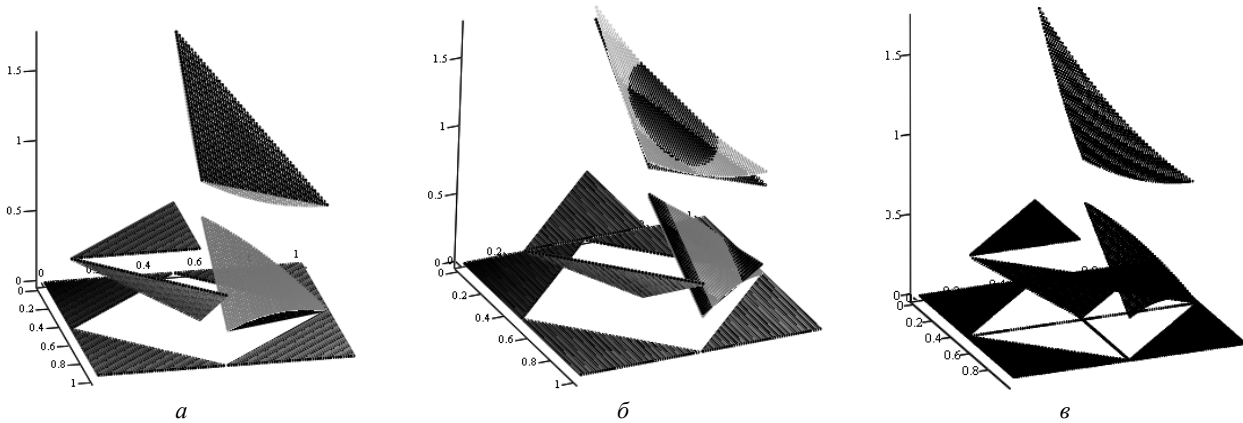


Рис. 5 – Графічний вигляд функції $f(x, y)$ (сірий колір) та: a – наближуючого інтерполяційного сплайну $S1(x, y)$ (чорний колір); b – наближуючого апроксимаційного сплайну $S2(x, y)$ (чорний колір); v – інтерлінаційного сплайну $S3(x, y)$ (чорний колір).

За цими даними побудуємо інтерлінаційний сплайн. Умови теореми 7 виконуються, тому інтерлінаційний сплайн в кожному трикутному елементі буде мати наступні вигляді:

$$S3(x, y) = \begin{cases} O_1 f(x, y), & (x, y) \in T_1; \\ O_2 f(x, y), & (x, y) \in T_2; \\ O_3 f(x, y), & (x, y) \in T_3; \\ O_4 f(x, y), & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 O_1 f(x, y) &= \frac{2x+2y-2}{2 \cdot 0,5+2 \cdot 0,5-2} (\varphi_1(y) + \varphi_2(x) - \varphi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{1-0,5} (\varphi_2(x) + \varphi_3(y) - \varphi_2(1,5-y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{1-0,5} (\varphi_1(x) + \varphi_3(x) - \varphi_1(1,5-x)) = 1,5 - x - y^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_2 f(x, y) &= \frac{2x-2y+1}{2 \cdot 0,5-2 \cdot 0,5+1} (\psi_1(y) + \psi_2(x) - \psi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{0-0,5} (\psi_2(x) + \psi_3(y) - \psi_2(y-0,5)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{1-0,5} (\psi_1(x) + \psi_3(x) - \psi_1(0,5-x)) = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2,5 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 0,5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_3 f(x, y) &= \frac{2x+2y-1}{2 \cdot 0,5+2 \cdot 0,5-1} (\chi_1(y) + \chi_2(x) - \chi_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{0-0,5} (\chi_2(x) + \chi_3(y) - \chi_2(0,5-y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{0-0,5} (\chi_1(x) + \chi_3(x) - \chi_1(0,5-x)) = 0,5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O_4 f(x, y) &= \frac{2x-2y-1}{2 \cdot 0,5-2 \cdot 0,5-1} (\rho_1(y) + \rho_2(x) - \rho_2(0,5)) + \frac{x-0,5}{1-0,5} (\rho_2(x) + \rho_3(y) - \rho_2(0,5+y)) + \\
 &+ \frac{y-0,5}{0-0,5} (\rho_1(x) + \rho_3(x) - \rho_1(x-0,5)) = x - y.
 \end{aligned}$$

В результаті отримаємо розривний інтерлінаційний сплайн:

$$S3(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1; \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2; \\ 0.5, & (x, y) \in T_3; \\ x + 2, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Як бачимо, він повністю збігається з функцією $f(x, y)$. Тобто максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерлінаційного сплайна $S3(x, y)$: $\max |f(x, y) - S3(x, y)| = 0$.

Перспективи подальших досліджень. В подальшому планується розробити методи відновлення розривних функцій з більш складною областю визначення різними інформаційними операторами. Також планується застосувати побудовані розривні апроксимаційні та інтерлінаційні сплайни для розв'язання задач комп'ютерної томографії з суттєвим використанням неоднорідності внутрішньої структури тіла, яке потрібно відновити.

Висновки. У статті представлені методи математичного моделювання розривних об'єктів з використанням різних інформаційних операторів. В якості інформаційних операторів виступають оператори інтерполяції та апроксимації, коли інформація про об'єкт подається у вигляді односторонніх значень у даній системі точок, та оператори інтерлінації, коли інформація подається у вигляді односторонніх слідів уздовж заданої системи ліній (у нашому випадку вздовж сторін прямокутних трикутників). У системі комп'ютерної математики проводились обчислювальні експерименти. Побудований розривний інтерлінаційний сплайн точно наближує розривну функцію, що підтверджується викладеною теорією. Тобто ці сплайни наближують розривну функцію краще, ніж інтерполяційні та апроксимаційні сплайни. Але побудовані конструкції належать різним інформаційним операторам.

Список літератури

1. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экспериментальные свойства сплайнов и задача сглаживания. – Новосибирск : Наука, 1988. – 104 с.
2. Larry L. Schumaker Spline Functions : Computational Methods. – Tennessee, Nashville : Vanderbilt University, 2015. – 409 p.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. И. Методы сплайн-функций. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
4. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Перишина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. – К. : Наукова думка, 2017. – 314 с.
5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев : Наукова думка, 1989. – 272с.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol. 41. – P. 29 – 45.
7. Литвин О. М. Интерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 544с.
8. Emmel L., Kaber S. M., Maday Y. Pade-Jacobi Filtering for spectral approximations of discontinuous solutions // Numer. Algo, 33. – 2003. – P. 251 – 264.
9. Chantramsi T., Doostan A., Iaccarino G. Padé-Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces // J. Comp. Phys. – 2009. – 228. – P. 7159 – 7180.
10. Hesthaven J. S., Kaber S. M., Lurati L. Pade-Legendre Interpolants for Gibbs Reconstruction // J. Sci. Comp. – 2006. – 28. – P. 337 – 359.
11. Costarelli D. Sigmoidal Functions Approximation and Applications : Ph. D. Thesis. – Universitat degli Study Roma Tres, Roma, Italy. – 2013.
12. Lombardini R., Acevedo R., Kuczala A., Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-order wavelet reconstruction/differentiation filters and Gibbs phenomena // Journal of Computational Physics. – 2016. – 15. – P. 244 – 262.
13. Литвин О. М., Перишина Ю. І., Пасічник В. О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 6 (1115) – С. 67 – 76
14. Перишина Ю. І., Пасічник В. О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3 (66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
15. Литвин О. Н., Перишина Ю. И., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.
16. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 2. – С. 59 – 70.
17. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет, 2008. – С.85 – 86.
18. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетатії функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 8. – С. 67 – 71.
19. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетатії функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 1. – С. 20 – 24.
20. Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды Математического института АН СССР. – 1989. – Т. 189. – С. 117 – 137.
21. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011. – № 5. – С. 34 – 47.

References (transliterated)

1. Vershinin V. V., Zavyalov Yu. S., Pavlov N. N. *Eksperimental'nye svoystva splaynov i zadacha sglazhivaniya* [Experimental properties of splines and the problem of smoothing]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 104 p.
2. Larry L. Schumaker. *Spline Functions : Computational Methods*. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 2015. 409p.
3. Zavyalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline functions]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.
4. Serhiienko I. V., Zadira V. K., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Teoriya rozryvnykh splayniv ta yiyi zastosuvannya v komp'yuterniy tomografiyi : monografiya* [Theory of discontinuous splines and its application in computed tomography]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2017. 314 p.
5. Popov B. A. *Ravnornoe priblizhenie splaynami* [Uniform approximation by splines]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989. 272 p.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods. *Computer method in appl. Mechanics and engineering*. 1983, Vol. 41, pp. 29–45.
7. Litvin O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osnova Publ., 2002. 544 p.
8. Emmel L., Kaber S. M., Maday Y. Pade-Jacobi filtering for spectral approximations of discontinuous solutions. *Numer. Algo*. 2003, no. 33, pp. 251–264.
9. Chantramsi T., Doostan A., Iaccarino G. Padé–Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces. *J. Comp. Phys*. 2009, no. 228, pp. 7159–7180.
10. Hesthaven J. S., Kaber S. M., Lurati L. Pade-Legendre Interpolants for Gibbs Reconstruction. *J. Sci. Comp*. 2006, 28, pp. 337–359.
11. Costarelli D. *Sigmoidal Functions Approximation and Applications : Ph. D. Thesis*. – Universitat degli Study Roma Tres, Roma, Italy. 2013.
12. Lombardini R., Acevedo R., Kuczala A., Keys K. P., Goodrich C. P. Higher-order wavelet reconstruction/differentiation filters and Gibbs phenomena. *Journal of Computational Physics*. 2016, no. 15, pp. 244–262.
13. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Doslidzhennya metodu znakhodzhennya tochok rozryvu pershogo rodu funktsiyi odniefyi zminnoyi [Studying a method for identifying the points of discontinuity of the first kind of functions of one variable]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KHPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv : NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6(1115), pp. 67–76.
14. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynami metodom minimaksa [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by the minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2018, no. 3(66), vol. 2, pp. 82–87.
15. Litvin O. N., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Reconstruction of discontinuous functions of two variables when the discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
16. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystanniam trapetsyvidnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline interlinant using trapezoidal elements]. *Tavrishnyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurian Bulletin of Informatics and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 2, pp. 59–70.
17. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychni modelyuvannya v kompyuterniy tomografiyi z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computed tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi «Teoriya ta metody obrobky signaliv»* [Theses of The Second International Conference “Theory and Methods of Signal Processing”]. Kyiv, Natsional'nyy aviaitsiyny universytet Publ., 2008. pp.85–86.
18. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennya tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi tryioikh grup pererizanykh ploshhyn z vykorystanniam interflatatsiyi funktsiyi [Mathematical model of reconstruction of three-dimensional objects by their tomograms on the system of three groups of intersected planes using interflatation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of NANU]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
19. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennya vnutrishnyoi struktury tryvymirnogo ob'ekta za vidomymy yogo tomogramamy z vykorystanniam interflatatsiyi funktsiyi [Mathematical model of restoration of internal structure of three-dimensional object on its known tomograms with use of interflatation of functions]. *Dopovidi NANU* [Reports of NANU]. 2005, no. 1, pp. 20–24.
20. Subbotin Yu. N. Zavisimost' otsenok mnogomernoy kushchno polinomial'noy approksimatsiyi ot geometricheskikh kharakteristik triangulyatsii [Dependence of estimates of multidimensional piecewise polynomial approximation on geometric characteristics of triangulation]. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSR* [Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Science of USSR]. 1989, vol. 189, pp.117–137.
21. Litvin O. M., Pershyna I. I. Priblizhenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh s razryvami pervogo roda na liniyakh triangulyatsii dvumernoy oblasti [Approximation of discontinuous functions of two variables with discontinuities of the first kind on the triangulation lines of a two-dimensional domain]. *Upravlyayusche sistemy i mashiny* [Control Systems and Machines]. Kyiv, 2011, no. 5, pp. 34–47.

Надійшла (received) 17.07.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математических наук, доцент, доцент кафедри высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

О. П. ПРИЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

РЕКОНСТРУКЦІЯ ГАУСОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ СПЕКТРУ

Відомо, що стаціонарний випадковий процес зображується у вигляді суперпозиції гармонічних коливань із дійсними частотами та некорельованими амплітудами. При дослідженні нестационарних процесів природною є наявність зростаючих або згасаючих коливань. При цьому виникає задача побудови алгоритмів, які дозволяють би конструювати з елементарних нестационарних випадкових процесів широкі класи нестационарних процесів. Природним узагальненням поняття спектру нестационарного випадкового процесу є перехід від дійсного спектру у випадку стаціонарності до комплекснозначного або нескінченнократного спектру в нестационарному випадку. Також виникає проблема опису в межах кореляційної теорії випадкових процесів, у яких спектр не має аналогів у випадку стаціонарних випадкових процесів, а саме, точка спектру дійсна, але у відповідного оператора в операторному зображенні ця точка нескінченної кратності, а також, коли сам спектр комплексний. Реконструкція за комплексним спектром нестационарної випадкової функції є досить актуальною проблемою як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. В статті розроблена процедура реконструкції випадкового процесу, послідовності, поля за спектром для гаусівських випадкових функцій. Порівняно до стаціонарного випадку, тут відкриваються більш широкі можливості, наприклад, побудова нестационарного випадкового процесу з дійсним спектром, який має нескінченну кратність та який може бути розподілений на всьому скінченному відрізку дійсної осі. Наявність такого спектру приводить, на відміну від випадку стаціонарного випадкового процесу, до появи нових складових у спектральному розкладі випадкових функцій, які відповідають внутрішнім станам «струн», тобто породжуються розв'язками систем рівнянь у часткових похідних гіперболічного типу. В статті розглянуто різні випадки спектру несамоспряженого оператора A , а саме, випадок дискретного спектру та випадок неперервного спектру, який розташований на скінченному відрізку дійсної осі, що є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Розглянуто випадки $a(x) = 0$, $a(x) = a_0$, $a(x) = x$ та $a(x)$ – кусково-постійна функція. Автори вважають перспективними відновлення нестационарних послідовностей для різних випадків спектра несамоспряженого оператора A тому, що спектральні розклади є суперпозицією дискретних або континуальних внутрішніх станів осциляторів із комплексними частотами та некорельованими амплітудами і тому матимуть глибокий фізичний зміст.

Ключові слова: кореляційна функція, трикутні моделі операторів, нестационарні випадкові послідовності і процеси, спектр оператора, ранг нестационарності, квазіранг.

О. П. ПРИЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ДАННЫМ СПЕКТРА

Известно, что стационарный случайный процесс представляется в виде суперпозиции гармонических колебаний с вещественными частотами и некоррелированными амплитудами. При исследовании нестационарных процессов естественным является наличие возрастающих или убывающих колебаний. При этом возникает задача построения алгоритмов, позволяющих конструировать из элементарных нестационарных случайных процессов широкие классы нестационарных процессов. Естественным обобщением понятия спектра нестационарного случайного процесса является переход от вещественного спектра в случае стационарности к комплекснозначному или бесконечнократному спектру в нестационарном случае. Также возникает проблема описания в рамках корреляционной теории случайных процессов, у которых спектр не имеет аналогов в случае стационарных случайных процессов, а именно, точка спектра вещественная, но у соответствующего оператора в операторном представлении эта точка бесконечной кратности, а также, когда сам спектр комплексный. Реконструкция по комплексному спектру нестационарной случайной функции является достаточно актуальной проблемой, как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. В статье разработана процедура реконструкции случайного процесса, последовательности, поля по спектру для гауссовских случайных функций. По сравнению со стационарным случаем, тут открываются более широкие возможности, например, построение нестационарного случайного процесса с вещественным спектром, который имеет бесконечную кратность и может быть распределен на всем конечном отрезке вещественной оси. Наличие такого спектра приводит, в отличие от случая стационарного случайного процесса, к появлению новых составляющих в спектральном разложении случайных функций, которые соответствуют внутренним состояниям «струн», то есть порождаются решениями систем уравнений в частных производных гиперболического типа. В статье рассмотрены разные случаи спектра несамоспряженного оператора A , а именно, случай дискретного спектра и случай непрерывного спектра, который размещен на конечном отрезке вещественной оси, который является областью значений вещественнозначной неубывающей функции $a(x)$. Рассмотрены случаи $a(x) = 0$, $a(x) = a_0$, $a(x) = x$ и $a(x)$ – кусочно-постоянная функция. Авторы считают перспективными восстановление нестационарных последовательностей для разных случаев спектра несамоспряженного оператора A потому, что спектральные разложения являются суперпозицией дискретных или континуальных внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами и некоррелированными амплитудами и потому имеют глубокий физический смысл.

Ключевые слова: корреляционная функция, треугольные модели операторов, нестационарные случайные последовательности и процессы, спектр оператора, ранг нестационарности, квазиранг.

O. P. PRISHCHENKO, N. V. CHEREMSKAYA

RECONSTRUCTION OF GAUSSIAN RANDOM FUNCTIONS FROM SPECTRUM DATA

It is known that a stationary random process is represented as a superposition of harmonic oscillations with real frequencies and uncorrelated amplitudes. In the study of nonstationary processes, it is natural to have increasing or declining oscillations. This raises the problem of constructing algorithms that would allow constructing broad classes of nonstationary processes from elementary nonstationary random processes. A natural generalization of the concept of the spectrum of a nonstationary random process is the transition from the real spectrum in the case of stationary to a complex or infinite multiple spectrum in the nonstationary case. There is also the problem of describing within the correlation theory of random processes in which the spectrum has no analogues in the case of stationary random processes, namely, the spectrum point is real, but it has infinite multiplicity for the operator image of the corresponding operator, and when the spectrum itself is complex. Reconstruction of the complex spectrum of a nonstationary random function is a very important problem in both theoretical and applied aspects. In the paper the procedure of reconstruction of random process, sequence, field from a spectrum for Gaussian random functions is developed. Compared to the stationary case, there are wider possibilities, for example, the construction of a nonstationary random process with a real spectrum, which has infinite multiplicity and which can be distributed over the entire finite segment of the real axis. The presence of such a spectrum leads, in contrast to the case of a stationary random process, to the appearance of new components in the spectral decomposition of random functions that correspond to the internal states of «strings», i.e. generated by solutions of systems

© О. П. Прищенко, Н. В. Черемська, 2021

of equations in partial derivatives of hyperbolic type. The paper deals with various cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator A , namely, the case of a discrete spectrum and the case of a continuous spectrum, which is located on a finite segment of the real axis, which is the range of values of the real non-decreasing function $a(x)$. The cases $a(x) = 0$, $a(x) = a_0$ ($a(x) = const$), $a(x) = x$ and $a(x)$ is a piecewise constant function are studied. The authors consider the recovery of nonstationary sequences for different cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator A promising since spectral decompositions are a superposition of discrete or continuous internal states of oscillators with complex frequencies and uncorrelated amplitudes and therefore have deep physical meaning.

Key words: correlation function, triangular models of operators, nonstationary random sequences and processes, spectrum of an operator, rank of nonstationarity, quasi-rank.

Вступ. Проблема реконструкції за комплексним спектром *нестационарної випадкової функції* є досить актуальною як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. Це пов'язано з тим, що природним узагальненням поняття спектру нестационарного випадкового процесу був би перехід від дійсного спектру у випадку стаціонарності до *комплекснозначного* або *нескінченнократноного спектру* в нестационарному випадку. Підставою для такого узагальнення є той факт, що стаціонарний випадковий процес зображується у вигляді *суперпозиції гармонічних коливань* із дійсною частотою та *некорельованими амплітудами*, тобто елементарний стаціонарний випадковий процес є гармонічними коливаннями вигляду $\xi(t, \omega) = \xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, де λ_0 – дійсна частота гармонічних коливань. При дослідженні нестационарних (*перехідних*) процесів природною є наявність зростаючих або згасаючих коливань, тому найпростішими нестационарними випадковими процесами є процеси вигляду $\xi(t, \omega) = \xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, де $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, $\beta_0 \neq 0$ (якщо $\beta_0 > 0$, то коливання зростають, а якщо $\beta_0 < 0$, то коливання згасають). При цьому виникає питання про побудову алгоритмів, які дозволяли би *складати* з елементарних нестационарних випадкових процесів достатньо широкі класи нестационарних процесів. Постає аналогічне питання з *нестационарними послідовностями* та *неоднорідними полями*. Окремо виникає проблема опису в межах *кореляційної теорії випадкових процесів*, у яких спектр не має аналогів у випадку стаціонарних випадкових процесів, наприклад, точка спектру дійсна, але у відповідного оператора в *операторному зображенні* ця точка нескінченної кратності, а також, коли сам спектр комплексний.

Для *гаусівських випадкових функцій* в статті розроблена процедура реконструкції випадкового процесу, послідовності, поля за спектром. Відзначимо, що порівняно до стаціонарного випадку, тут відкриваються більш широкі можливості, наприклад, побудова нестационарного випадкового процесу з дійсним спектром, який має нескінченну кратність та який може бути розподілений на всьому скінченному відрізку дійсної осі. Наявність такого спектру приводить, на відміну від випадку стаціонарного випадкового процесу, до появи нових складових у спектральному розкладі випадкових функцій, які відповідають внутрішнім станам *струн*, тобто породжуються розв'язками систем рівнянь у *часткових похідних гіперболічного типу*.

Із задачею відновлення випадкового процесу за спектром тісно пов'язана задача отримання фізичних інтерпретацій спектральних розкладів нестационарних функцій. У статті продовжено дослідження [7] та розв'язана задача отримання спектральних розкладів деяких нових класів випадкових послідовностей та полів. Відзначимо, що, використовуючи операцію зчеплення операторів (операторних комплексів), можна розглядати більш складні випадки спектрів.

Аналіз останніх досліджень. Спектральний аналіз унітарних операторів був з успіхом використаний *А. М. Колмогоровим* [1] для побудови кореляційної теорії стаціонарних випадкових послідовностей, а також для розв'язку ряду прикладних задач фільтрації та прогнозу стаціонарних випадкових послідовностей. Підхід Колмогорова засновано на тому, що кожний стаціонарний випадковий послідовності відповідає послідовності векторів у побудованому спеціальним чином *гільбертовому просторі*, що дозволяє вивчати нестационарні випадкові послідовності *методами математичного аналізу детермінованих функцій*, які приймають значення у відповідному гільбертовому просторі. Пізніше ідеї Колмогорова отримали свій подальший розвиток у працях [2, 3]. Особливо істотний внесок в побудову *загальної теорії стаціонарних послідовностей у гільбертовому просторі* зробили *А. М. Яглом* [4] та *Ю. А. Розанов* [5]. Спектральна теорія неунітарних операторів, початок якої був покладений в роботі *М. С. Лившиця* [6], а подальший розвиток отримано в [7 – 19, 21, 22], не могла не з'явитися поштовхом до різноманітних застосувань. Одним з таких прикладів ефективних застосувань є *реконструкція випадкових процесів та послідовностей за спектром*. Для стаціонарних випадкових процесів ця задача розв'язана в [1, 4]. Для нестационарних випадкових процесів та послідовностей ця задача в такій постановці не ставилась. Ці міркування з'явилися спонукальними мотивами до появи даної статті. В процесі дослідження даної теми виникли ряд задач, які мають самостійний інтерес.

Постановка задачі. Задача реконструкції випадкових процесів (послідовностей) за спектром є однією з важливих задач моделювання випадкових функцій. У випадку стаціонарного випадкового процесу ця задача розв'язується за допомогою спектральної теорії самоспряжених операторів та зводиться, наприклад, у випадку дискретного спектру до побудови спеціальної неспадаючої функції стрибків зі стрибками в точках спектру. Для нестационарних випадкових функцій ця задача в такій постановці не ставилась. Для розв'язку цієї задачі природно використати *спектральну теорію дисипативних несамоспряжених операторів* або *стиків*.

Математична модель. Розглянемо спочатку випадок дискретного спектру. Нехай задана скінченна або зліченна множина комплексних чисел $\{\lambda_k\}$, які розташовані у верхній півплощині та обмежені у сукупності:

$|\lambda_k| < C$. Побудуємо дисипативний оператор \hat{A} , у якого спектр складається з цих точок. Нехай $\lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}$ та

поставимо додаткову вимогу, щоб $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$. Для побудови дисипативного оператора розглянемо гільбертів простір l_2 та оператор $\hat{A} \in [l_2, l_2]$ наступного вигляду:

$$(\hat{A}f)_k = \lambda_k f_k + i \sum_{j=1}^{k-1} f_j \beta_j \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

З (1) видно, що цей оператор будується лише за спектром $\{\lambda_k\}$ та його матричне зображення нижнестрику-

тне. Легко перевірити, що $\frac{\hat{A} - \hat{A}^*}{i} = \langle \cdot, \hat{g} \rangle \hat{g}$, де $\hat{g} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, тобто \hat{A} має одновимірну уявну компоненту. Але тоді

крива $\hat{\xi}_t$ в l_2 вигляду $\hat{\xi}_t = e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0$, де $\hat{\xi}_0$ фіксований елемент з l_2 , є нестационарною кривою з рангом нестационарності, що дорівнює одиниці, причому спектр цієї кривої складається з $\{\lambda_k\}$. Аналогічно, послідовність $\hat{\xi}_n$ в

l_2 вигляду $\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \hat{\xi}_0$ є нестационарною послідовністю з квазірангом, що дорівнює одиниці та спектром $\{\lambda_k\}$.

Використовуючи зображення для функції від оператора \hat{A} через його резольвенту, маємо для k -ої компоненти $e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0$ (у випадку, коли $\hat{\xi}_0 = \hat{g}$) зображення:

$$\left(e^{it\hat{A}} \hat{g} \right)_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{it\lambda} \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\lambda - \lambda_j} d\lambda.$$

Якщо всі λ_j відмінні, то, обчислюючи за допомогою *теорії лишків*, цей інтеграл дорівнює сумі лишків в

особливих точках. Отримуємо $\left(e^{it\hat{A}} \hat{g} \right)_k = \sum_{j=1}^k e^{it\lambda_j} a_{jk}$. Для $\hat{A}^n \hat{g}$ відповідно отримуємо

$$\left(\hat{A}^n \hat{g} \right)_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\lambda - \lambda_j} d\lambda.$$

Та у випадку відмінних λ_j відповідно маємо $\left(\hat{A}^n \hat{g} \right)_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j^n b_{jk}$, де $e^{it\lambda_j} a_{jk}$, $\lambda_j^n b_{jk}$ лишки відповідних

підінтегральних функцій в особливих точках.

У випадку, коли $\xi_0 \neq \hat{g}$ обчислення більш громіздкі й тому буде наведений лише остаточний результат:

$$\left(e^{it\hat{A}} \xi_0 \right)_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{it\lambda} \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \cdot \left\{ \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right) \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_{\nu+1} - a_{\nu}}{\prod_{\mu=0}^{\nu} \left(1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right)} \right] + \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\bar{\lambda}_j - \lambda} \right\} d\lambda,$$

де $a_k = \frac{\hat{\xi}_k}{\beta_k}$. Для $\hat{A}^n \xi_0$ відповідно маємо:

$$\left(\hat{A}^n \xi_0 \right)_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \cdot \left\{ \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right) \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_{\nu+1} - a_{\nu}}{\prod_{\mu=0}^{\nu} \left(1 + \frac{i\beta_{\mu}^2}{\lambda_{\mu} - \lambda} \right)} \right] + \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\bar{\lambda}_j - \lambda} \right\} d\lambda,$$

де $a_k = \frac{\hat{\xi}_k}{\beta_k}$.

Розглянемо випадок, коли спектр несамоспряженого оператора A розташовано на скінченному відрізку дійсної осі, який є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Тоді модельним оператором \hat{A} є оператор, який діє в $L^2_{[0,1]}$ та набуває вигляду $(\hat{A}f)(x) = a(x)f(x) + i \int_0^x f(y) dy$. Використовуючи результати роботи [20] про зображення резольвенти, для кривої $\hat{\xi}_t = e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0$ маємо:

$$e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0 = e^{ia(x)} \hat{\xi}_0(x) + \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} e^{i\lambda} \left(\int_0^x \hat{\xi}_0(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} e^{-\int_{\tau}^x \frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\tau \right) d\lambda.$$

Відзначимо, що крива $e^{ia(x)} \hat{\xi}_0(x)$ є стаціонарною кривою у гільбертовому просторі $L^2_{[0,1]}$.

Аналогічно для $\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \hat{\xi}_0$ отримуємо:

$$\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \hat{\xi}_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left(\frac{\hat{\xi}_0(x)}{a(x)-\lambda} - i \int_0^x \hat{\xi}_0(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} e^{-\int_{\tau}^x \frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\tau \right) d\lambda,$$

або

$$\hat{\xi}_n = a^n(x) \hat{\xi}_0(x) - i \int_0^x \hat{\xi}_0(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n e^{-\int_{\tau}^x \frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\lambda \right) d\tau,$$

де перший доданок є ганкелевою послідовністю у $L^2_{[0,1]}$, через те, що її кореляційна функція дорівнює

$$\langle a^n(x) \hat{\xi}_0(x), a^m(x) \hat{\xi}_0(x) \rangle_{L^2_{[0,1]}} = \int_0^l a^{n+m}(x) |\hat{\xi}_0(x)|^2 dx, \text{ тобто залежить від суми } n+m.$$

Розглянемо випадки:

1. $a(x) = 0$,

$$u_n(x) = e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0 = \hat{\xi}_0(x) - \int_0^x \hat{\xi}_0(\tau) \sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1(2\sqrt{t(x-\tau)}) d\tau,$$

де $J_1(y) = \frac{y}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{2^{2k} k!(k+1)!}$ функція Бесселя 1-го роду 1-го порядку, $y = 2\sqrt{t(x-\tau)}$;

2. $a(x) = a_0$,

$$u_n(x) = e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0 = e^{ia_0 t} \hat{\xi}_0(x) - \int_0^x e^{ia_0 t} \hat{\xi}_0(\tau) \sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1(2\sqrt{t(x-\tau)}) d\tau;$$

3. $a(x) = x$,

$$u_n(x) = e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0 = e^{itx} \hat{\xi}_0(x) - \int_0^x e^{itx} \hat{\xi}_0(\tau) \sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1(2\sqrt{t(x-\tau)}) d\tau;$$

4. Нехай $a(x)$ – кусково-постійна функція вигляду $a(x) = \begin{cases} b_1, & 0 \leq x \leq a_1; \\ b_2, & a_1 \leq x \leq a_2; \\ b_3, & a_2 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Можливі шість випадків взаємного розташування точок $\tau < x$ з інтервалу $[0; 1]$ відносно точок a_1 та a_2 .

Розглянемо лише найскладніше розміщення, при якому інтервал $(\tau; x)$ містить розриви a_1 та a_2 .

Нехай $0 < \tau < a_1 < a_2 < x < 1$, тоді

$$\hat{\xi}_n = a^n(x) \hat{\xi}_0(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^y \hat{\xi}_0(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} \{ \theta(n, x, b_1, b_2, b_3) + \theta(n, x, b_3, b_1, b_2) + \theta(n, x, b_2, b_3, b_1) \} d\tau;$$

$$\begin{aligned} \theta(n, x, b_1, b_2, b_3) &= 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[i(a_1 - \tau)]^n}{n!(n-1)!} \left\{ e^{ix\lambda + i\frac{a_2 - a_1}{\lambda - b_2} + i\frac{y - a_2}{\lambda - b_3}} \right\}^{(n-1)} \Bigg|_{\lambda=b_1} = \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[i(a_1 - \tau)]^n}{n!(n-1)!} \left\{ e^{ixb_1} (ix)^{n-1} e^{i\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}} \cdot e^{i\frac{y - a_2}{b_1 - b_3}} + \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^j e^{ixb_1} (ix)^{n-1-j} \left\{ e^{i\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}} \times \right. \right. \\ &\quad \times e^{i\frac{y - a_2}{b_1 - b_3}} \cdot \frac{(-1)^j}{(b_1 - b_3)^j} \cdot \sum_{s=1}^j \frac{[i(y - a_2)]^s}{S!(b_1 - b_3)^S} \cdot \Phi(S; j) + \sum_{K=1}^j C_j^K e^{i\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}} \cdot \frac{(-1)^K}{(b_1 - b_2)^K} \times \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{S=1}^K \frac{[i(a_2 - a_1)]^S}{S!(b_1 - b_2)^S} \cdot \Phi(S, K) \cdot e^{i\frac{y - a_2}{b_1 - b_3}} \cdot \frac{(-1)^{j-K}}{(b_1 - b_3)^{j-K}} \sum_{S=1}^{j-K} \frac{[i(y - a_2)]^S}{S!(b_1 - b_3)^S} \Phi(S, j - K) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

де $\Phi(S, l) = \sum_{r=0}^{S-1} (-1)^r C_S^r \frac{(S - r + l - 1)!}{(S - r - 1)!}$.

Відзначимо, що, використовуючи операцію зчеплення операторів (*операторних комплексів*), можна розглянути більш складні випадки спектрів.

Використовуючи *перетворення Келі* можна відновити за спектром нестационарну випадкову послідовність, у якої $\dim(I - T^*T)H = 1$, де $H = l_2$ гільбертів простір, $T \in [l_2, l_2]$ оператор, який діє в цьому просторі, а дискретний спектр μ_j міститься всередині одиничного кола комплексної площини. Дійсно, із загального зображення $\xi_n = T^n \xi_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n (T - \lambda I)^{-1} \xi_0 d\lambda$, $T \in [l_2, l_2]$, вважаючи для простоти, що $\xi_0 = e$, де e каналовий елемент оператора T ($I - T^*T = \langle \cdot, e \rangle e$), та враховуючи, що *резольвенту* $(T - \lambda I)^{-1}$ можна зобразити у вигляді

$$(T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda} (\hat{A} - iI) \left(\hat{A} - i \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} I \right)^{-1}$$

та, відповідно, $e = \sqrt{2} (\hat{A}^* - iI)^{-1} g_{\hat{A}}$, $g_{\hat{A}} = (1, 1, \dots)$, де \hat{A} перетворення Келі оператора T . Це перетворення є несамопряженим оператором із $\dim 2 \operatorname{Im} \hat{A}_2 = 1$ та спектром $\lambda_j = i \frac{1 + \mu_j}{1 - \mu_j}$, $|\mu_j| < 1$, який розташовано у верхній півплощині. Використовуючи трикутну модель оператора \hat{A} для $(\xi_n)_k$ остаточно отримуємо:

$$(\xi_n)_k = (T^n e)_k = -\frac{\sqrt{1 - |\mu_k|^2}}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \mu_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \lambda \overline{\mu_j}}{1 - \mu_j} \frac{|\lambda_j|}{\lambda_j} d\lambda.$$

За допомогою аналогічних міркувань можна відновити нестационарну послідовність у тому випадку, коли її спектр розташовано на неперервній дузі одиничного кола:

$$\xi_n(x) = T^n \xi_0(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi i} \oint \lambda^n \left(\frac{\xi_0(x)}{(1 - \lambda)\alpha(t) - i(1 + \lambda)} e^{-i \int_0^x \frac{(1 - \lambda) dt}{(1 - \lambda)\alpha(t) - i(1 + \lambda)}} \right) d\lambda,$$

де $T \in [L^2_{[0,l]}, L^2_{[0,l]}]$, $\alpha(x)$ – неспадна дійснозначна функція.

Маючи модельні зображення для $e^{it\hat{A}} \hat{\xi}_0$ або $\hat{A}^n \hat{\xi}_0$ легко підрахувати відповідні кореляційні функції.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними відновлення нестационарних послідовностей для різних випадків спектра несамопряженого оператора A . При цьому необхідно мати на увазі, що спектральні розклади матимуть глибокий фізичний зміст, якщо ці розклади являтимуть собою суперпозицію

дискретних або континуальних внутрішніх станів осциляторів із комплексними частотами та некорельованими амплітудами. У випадку нескінченнократного спектра слід очікувати появу членів у спектральному розкладі, які відповідають істотно новим, у порівнянні зі стаціонарними випадковими процесами, станам. Ці стани, у свою чергу, відповідають системам, що розподіляються: узагальнені струни, які породжуються рівняннями з частинними похідними вигляду:

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \alpha u = 0.$$

Підкреслимо, що побудову кореляційної теорії випадкових полів можна зв'язати з теорією систем двічі переставних операторів. Це дозволить вивчати випадкові поля методами, аналогічними кореляційній теорії випадкових послідовностей та процесів.

Висновки. Таким чином, в даній роботі розв'язана задача реконструкції нестационарних випадкових процесів (послідовностей) за спектром. Розглянуто різні випадки спектру несамоспряженого оператора A , а саме випадок дискретного спектру та випадок неперервного спектру, який розташований на скінченному відрізку дійсної осі, що є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Розглянуто випадки $a(x) = 0$, $a(x) = a_0$, $a(x) = x$ та $a(x)$ – кусково-постійна функція.

Слід відзначити, що модельні зображення для нестационарних випадкових процесів та послідовностей ($e^{itA} \hat{\xi}_0$ або $\hat{A}^n \hat{\xi}_0$) можна використати для побудови конкретних моделей нестационарних випадкових процесів, які можна застосувати для інтерпретації статистичних даних.

Список літератури

1. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюл. МГУ. – 1941. – Т 2 : Математика, № 6. – С. 1 – 40.
2. Козуляев П. А. К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР. – 1947. – Том LVI. – №9. – С. 903 – 905.
3. Козуляев П. А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР, 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
4. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып. 5(51). – С. 3 – 168.
5. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. – М. : Физмат. гиз., 1963. – 284 с.
6. Лившиц М. С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сб. – 1946. – № 19(61):2. – С. 239 – 262.
7. Лившиц М. С., Яцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
8. Аров Д. З. Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сибирский матем. журнал. – 1979. – Т. 20. – №2. – С. 211 – 228.
9. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М. : Наука, 1969. – 287 с.
10. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамоспряженных операторов и промежуточные системы // Успехи матем. наук. – 1958. – Т.8. – Вып. 1(79). – С. 3 – 85.
11. Ваксман Л. Л. Гармонический анализ многопараметрических полугрупп сжатий. – Харьков : Харьковский госуниверситет, 1979. – 167с. (Рукопись депонирована в ВИНТИ № 3991 – 80 деп.)
12. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – Москва, 1977. – 654 с.
13. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамоспряженных операторов. – Москва, 1965. – 448 с.
14. Золотарев В. А. Об открытых системах и характеристических функциях коммутирующих систем операторов. – Харьков : Харьковский гос. ун-т, 1979 (рукопись депонирована в ВИНТИ № 858 – 79 деп.)
15. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм. ССР., XII. – 1976. – № 3. – 136 – 140.
16. Поляцкий В. Т. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов // ДАН СССР. – 1957. – № 113. – С. 756 – 759.
17. Сахнович Л. А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Труды Моск. матем. Общества. – 1968. – № 19. – С. 211 – 270.
18. Bunce J. The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators // Proc. Amer. math. soc. – 1971. – № 29. – P. 499 – 505.
19. Taylor J. L. A joint spectrum for several commuting operators // J. Funct. Anal. – 1970. – № 6. – P. 172 – 191.
20. Козут Е. А., Черемская Н. В., Яцевич А. А. О представлении резольвент вольтерровых операторов // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип.1 (17). – С. 99 – 101.
21. Назиров З. Ф., Черемська Н. В., Яцевич А. А. Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 13. – С. 146 – 153.
22. Назиров З. Ф., Черемська Н. В., Яцевич А. А. Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 42. – С. 144 – 154.

References (transliterated)

1. Kolmogorov A. N. Statsionarnyye posledovatel'nosti v gil'bertovom prostranstve [Stationary sequences in Hylbert]. *Byul. MGU* [Bulletin of the Moscow State University]. 1941, Vol. 2 : Matematika, no. 6, pp. 1–40.
2. Kozulyayev P. A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov [On the problem of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.
3. Kozulyayev P. A. K problemam interpolyatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [On the problems of interpolation and extrap-

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1-2 (2) 2021.

- lation of stationary sequences]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.
4. Yaglom A. M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of random stationary functions]. *UMN* [Achievements of Mathematical Sciences]. 1952, vol. 1, no. 5(51), pp. 3–168.
 5. Rozanov YU. A. *Statsionarnyye sluchaynyye protsessy* [Stationary random processes]. Moscow, Fizmat. giz. Publ., 1963. 284 p.
 6. Livshits M. S. Ob odnom klasse lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve [On a class of operators in Hylbert space]. *Matem. sb.* [Mathematical Collection]. 1946, no. 19(61):2, pp. 239–62.
 7. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Theory of operator nodes in Hylbert spaces]. Kharkov, Izd-vo KHGU Publ., 1971. 160 p.
 8. Arov D. 3. Passivnyye lineynyye statsionarnyye dinamicheskiye sistemy [Passive stationary linear dynamic systems]. *Sibirskiy matem. Zhurnal* [Siberian Mathematical Journal]. 1979, vol. 20, no. 2, pp. 211–228.
 9. Brodskiy M. S. *Treugol'nyye i zhordanovy predstavleniya lineynykh operatorov* [Triangular and Jordan representations of linear operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 287 p.
 10. Brodskiy M. S., Livshits M. S. Spektral'nyy analiz nesamosopryazhennykh operatorov i promezhutochnyye sistemy [Spectral analysis of non-self-adjoint operators and intermediate systems]. *Uspekhi matem. Nauk* [Achievements of Mathematical Sciences]. 1958, vol. 8, no. 1(79), pp. 3–85.
 11. Vaksman L. L. *Garmonicheskiy analiz mnogoparametricheskikh polugrupp szhatiy* [Harmonic analysis of multivariate contraction semigroups]. Kharkov, Khar'kovskiy gosuniversitet Publ., 1979. 167 p. (Rukopis' deponirovana v VINITI №3991 – 80 dep.).
 12. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, 1977. 654 p.
 13. Gokhberg I. TS., Kreyn M. G. *Vvedeniye v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the theory of non-self-adjoint linear operators]. Moscow, 1965. 448 p.
 14. Zolotarev V. A. *Ob otkrytykh sistemakh i kharakteristicheskikh funktsiyakh kommutiruyushchikh sistem operatorov* [On open systems and characteristic functions of commuting systems of operators]. Kharkov, Khar'kovskiy gos. un-t Publ., 1979 (rukopis' deponirovana v VINITI № 858 – 79 dep.).
 15. Zolotarev V. A. O treugol'nykh modelyakh sistem dvazhdy perestanovochnykh operatorov [On triangular models of systems of twice commutative operators]. *DAN Arm. SSR* [Reports of the Academy of Science of the Armenian SSR]. KHP, 1976, no. 3, pp. 136–140.
 16. Polyatskiy V. T. O privedenii k treugol'nomu vidu kvaziunitarnykh operatorov [On reducing quasiunitary operators to triangular form]. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1957, no. 113, pp. 756–759.
 17. Sakhnovich L. A. Dissipativnyye operatory s absolyutno nepreryvnym spektrum [Dissipative operators with absolutely continuous spectrum]. *Trudy Mosk. matem. Obshchestva* [Proceedings of the Moscow Mathematical Society]. 1968, no. 19, pp. 211–270.
 18. Bunce J. The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators. *Proc. Amer. math. soc.* 1971, no. 29, pp. 499–505
 19. Taylor J. L. A joint spectrum for several commuting operators. *J. Funct. Anal.* 1970, no. 6, pp. 172–191.
 20. Kogut E. A., Cheremskaya N. V., Yantsevych A. A. O predstavlenii rezol'vent vol'terovnykh operatorov [On representing resolvents of Volterra operators]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'* : *Zb. nauk. pr.* [Boundary problems for differential equations. Collection of scientific papers]. Kyiv, In-t matematyky NAN Ukrainy Publ., 1998, vol. 1 (17), pp. 99–101.
 21. Nazirov Z. F., Cherem'ska N. V., Yantsevych A. A. Pro odyin klas neodnorodnykh vypadkovykh poliv [On a class of heterogeneous random fields]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkivs'kyi politekhnichnyi instytut»*. *Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”. Series: Mathematical Modeling in engineering and Technologies]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 13, pp.146–153.
 22. Nazirov Z. F., Cherem'ska N. V., Yantsevych A. A. Liniyni peretvorenniya dyskretnykh vypadkovykh poliv [Linear transformations of discrete random fields]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkivs'kyi politekhnichnyi instytut»*. *Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”. Series: Mathematical Modeling in engineering and Technologies]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 42, pp. 144–154.

Надійшло (received) 03.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Приценко Ольга Петрівна – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Приценко Ольга Петровна – старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Prishchenko Olga Petrivna – Senior Lecturer, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Черемська Надія Валентинівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харьковский политехнический институт», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Черемская Надежда Валентиновна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Cheremskaya Nadezhda Valentinovna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

М. С. СОФРОНОВА

МЕТОД УСУНЕННЯ АНОМАЛЬНИХ ВИМІРЮВАНЬ ПРИ АНАЛІЗІ БАЗИ БАГАТОВИМІРНИХ ДАНИХ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У роботі запропоновано метод усунення аномальних вимірювань (викидів) для підвищення рівня якості багатовимірних даних при статистичних дослідженнях. Така проблема виникає, наприклад, в теорії прийняття управлінських рішень, оскільки при обчисленні оцінок параметрів імовірнісних розподілів наявність у вибірці аномальних (тобто таких, що значно збільшують довірчий інтервал) вимірювань здатна спотворити результати статистичного дослідження, а, отже, і основної задачі. Особливість запропонованого метода полягає в тому, що він є комбінацією статистичних та геометричних методів, а саме: методу оцінювання Гествірта, процедури Тьюкі та модифікації метода побудови опуклої оболонки скінченної множини точок багатовимірному простору. Множини багатовимірних даних ставиться у відповідність множини на точок багатовимірному простору. Для знаходження і виключення викидів будеться послідовність вкладених опуклих оболонок – n – політопів, кожен з яких описується перетином напівпросторів (опорних гіперграней). Наводиться детальний алгоритм знаходження аномальних вимірювань. Їх виключення відповідає послідовному виключенню граничних точок вкладених опуклих оболонок. Оцінка Гествірта дає умову зупинки роботи алгоритму. Запропонований метод не потребує великих обчислювальних витрат та може широко використовуватися при розв'язанні як теоретичних, так і практичних задач, пов'язаних з обробкою багатовимірних даних. Наведено чисельні результати роботи методу з кількістю компонент даних 4 та 5.

Ключові слова: статистичне дослідження, теорія прийняття рішень, аномальні вимірювання, викиди, опукла оболонка, n – вимірний політоп, багатовимірний простір.

М. С. СОФРОНОВА

МЕТОД УСТРАНЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ БАЗЫ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В работе предложен метод устранения аномальных измерений (выбросов) для повышения уровня качества многомерных данных при статистических исследованиях. Такая проблема возникает, например, в теории принятия управленческих решений, поскольку при вычислении оценок параметров вероятностных распределений наличие в выборке аномальных (то есть таких, которые значительно увеличивают доверительный интервал) измерений способно исказить результаты статистического исследования, а, следовательно, и основной задачи. Особенность предложенного метода состоит в том, что он является комбинацией статистических и геометрических методов, а именно: метода оценки Гествирта, процедуры Тьюки и модифицированного метода построения выпуклой оболочки конечного множества точек многомерного пространства. Множеству многомерных данных ставится в соответствие множество точек многомерного пространства. Для нахождения и исключения выбросов строится последовательность вложенных выпуклых оболочек – n – политопов, каждый из которых описывается пересечением полупространств (опорных гиперграней). Приводится подробный алгоритм нахождения аномальных измерений. Их исключение соответствует последовательному исключению граничных точек вложенных выпуклых оболочек. Оценка Гествирта дает условие останова работы алгоритма. Предложенный метод не требует больших вычислительных затрат и может широко использоваться при решении как теоретических, так и практических задач, связанных с обработкой многомерных данных. Приведены численные результаты работы метода с количеством компонент данных 4 и 5.

Ключевые слова: статистическое исследование, теория принятия решений, аномальные измерения, выбросы, выпуклая оболочка, n – мерный политоп, многомерное пространство.

M. S. SOFRONOVA

METHOD FOR ELIMINATING ANOMALOUS MEASUREMENTS IN ANALYSIS OF THE MULTIDIMENSIONAL DATABASE IN SOLVING THE DECISION-MAKING PROBLEM

The paper proposes a method for eliminating abnormal measurements (outliers) to improve the quality of multivariate data in statistical studies. Such a problem arises, for example, in the theory of managerial decision-making, since when calculating estimates of the parameters of probability distributions, the presence of anomalous (that is, those that significantly increase the confidence interval) measurements in the sample can distort the results of a statistical study, and, consequently, the main problem. The peculiarity of the proposed method is a combination of statistical and geometric methods, namely: the Gestwirt estimation method, the Tukey procedure, and a modification of the method for constructing the convex hull of a finite set of points in a multidimensional space. A set of multidimensional data is associated with a set of points of a multidimensional space. To find and eliminate outliers, a sequence of nested convex hulls, n – polytopes, is constructed, each of which is described by the intersection of half-spaces (support facets). A detailed algorithm for finding anomalous measurements is given. Their elimination corresponds to the successive elimination of the boundary points of nested convex hulls. The Gestwirt estimate gives the condition for stopping the operation of the algorithm. The proposed method does not require large computational costs and can be widely used in solving both theoretical and practical problems related to the processing of multidimensional data. The numerical results of the method with the number of data components 4 and 5 are presented.

Key words: statistical research, decision theory, anomalous measurements, outliers, convex hull, n – dimensional polytope, multidimensional space.

Вступ. Навколишнє середовище сучасного бізнесу пред'являє управлінцям все більше вимог і змушує приймати рішення все швидше. Тому важливою частиною процесу прийняття обґрунтованих управлінських рішень поряд з інтуїцією і досвідом менеджера сьогодні стають *статистичні методи обробки даних*, як традиційні (*аналіз динаміки, варіації, кореляційно-регресійні методи*), так і сучасні, що вимагають серйозної підготовки і застосування спеціальних програмних продуктів (*інтелектуальний аналіз даних, поглиблення даних і експериментальний дизайн*). Одним з моментів, що призводить до спотворення результатів статистичного дослідження і, відповідно, до помилкового рішення, є присутність в сукупності спостережень аномальних вимірю-

© М. С. Софронова, 2021

вань – викидів.

Виявлення викидів на різних етапах обробки даних дозволяє виявити помилки спостереження і, навіть, фіктивні дані. Поява аномальних вимірювань може бути наслідком помилок в даних (неточності вимірювання, округлення, невірної запису тощо), наявності шумових об'єктів (невірно класифікованих об'єктів), присутності об'єктів «інших» вибірок (наприклад, показаннями датчика, що зламався).

Зауважимо, що окрім теорії прийняття рішень, знаходження аномальних вимірювань є актуальним при виявленні підозрілих банківських операцій, нестандартних гравців на біржі, неполадок у механізмах за показаннями датчиків, в медичній діагностиці, сейсмології тощо. Тому для підвищення рівня якості аналітичних даних необхідно знизити вплив аномальних вимірювань (мінімізувати похибку результату) або зовсім виключити їх.

Аналіз останніх досліджень. Як показують статистичні дослідження [1], найрізноманітніші наукові, промислові, економічні та інші дані містять, як правило, 5 – 10 %, а іноді і більше, аномальних вимірювань, що істотно знижують ефективність застосування багатьох класичних процедур.

На теперішній час розроблено багато методів, що дозволяють мінімізувати похибку результату: це *робастні методи обробки, бутстреп методи* тощо [2 – 4]. У роботі [5] проведено аналіз існуючих методів робастного аналізу та бутстреп методів, наведено умови вибору найбільш ефективного для процедури аналізу даних, в залежності від прикладної задачі, що розв'язується.

Серед робастних важливий клас складають методи оцінювання, відомі як *методи Гествірта* [6]. Ці методи ґрунтуються на ідеї, згідно з якою найбільша довіра виявляється даним, ближчим до «центру» вибірки. Для реалізації цих методів можна використовувати геометричні поняття і методи, оскільки між геометрією і статистикою є тісний зв'язок, обумовлений тим, що багатовимірні статистичні дані можна розглядати як точки в евклидовому просторі.

У [6] запропоновано процедуру виключення припустимих аномальних вимірювань в одновимірному просторі, яка здійснюється наступним чином.

Нехай є N точок на прямій. Простий метод усунення припустимих викидів (тобто аномальних вимірювань) полягає у видаленні частини точок з лівого і правого боків – по $[\alpha N]$ точок з кожного боку (рис. 1). Середнє значення обчислюється за $(N - 2[\alpha N])$ точками, що залишилися (рис. 1).

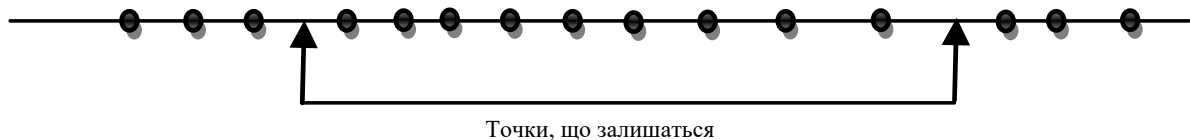


Рис. 1 – Виключення аномальних вимірювань в одновимірному просторі ($\alpha = 0,2$).

Зауважимо, що значення α задається, виходячи з певних теоретичних чи практичних міркувань, та задовольняє умові:

$$\begin{cases} N - 2\alpha N \geq n, \\ \alpha > 0. \end{cases} \Rightarrow 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{n}{2N}, \quad (1)$$

де n – вимірність простору.

Виникає питання: що представляє собою аналогічна процедура у випадку більш високої вимірності? Тьюкі [7] запропонував процедуру, відому під назвою *луцення*, що полягає у видаленні границі опуклої оболонки множини з подальшим видаленням границі опуклої оболонки множини, що залишилася, і так доти, доки не залишиться лише $(N - 2[\alpha N])$ точок [8].

При побудові опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n ($n \geq 3$) основна частина методів, що існують, наприклад, методи *загортання подарунка, під-над* [9] породжують повний опис межі (*граф граней*) опуклої оболонки. Як наслідок, процедура опису (пошуку) усіх *підграней* ускладнює й істотно впливає на часову складність методу. Проте побудова опуклої оболонки для задачі виключення аномальних вимірювань не потребує повного опису усіх підграней. Метод, запропонований у [10], дозволяє спростити процедуру побудови опуклої оболонки, завдяки пошуку лише її вершин та опорних *гіперграней*.

Враховуючи сказане вище, актуальною є **задача розробки методу усунення аномальних вимірювань** (даних), що базується на понятті опуклої оболонки скінченної множини точок багатовимірному простору, при аналізі багатовимірних даних (з кількістю компонент більше трьох).

Постановка задачі. Нехай на певному етапі розв'язання основної задачі одержано набір даних $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Кожне a_j складається з n компонент a_{ji} : $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, $j \in J_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Необхідно проаналізувати наявні дані, виключивши ті, що призведуть до хибного результату, для одержання подальшого ефективного розв'язання основної (економічної, промислової тощо) задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження. Для аналізу даних зручно використати статистичні методи. А саме, представити A як вибірку з варіантами a_j , $j \in J_m$, за якою і шукати оцінки параметрів ймовірнісних розподілів.

Для виявлення аномальних варіант запропонуємо комбінований метод, що базується на методі оцінювання Гествірта, процедурі Тьюкі та модифікації метода побудови опуклої оболонки скінченної множини точок багатовимірного простору, описаного в [10].

Поставимо у відповідність кожній варіанті a_j точку $A_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ n -вимірного евклідового простору, де $x_{ji} = a_{ji}$, $j \in J_m$, $i \in J_n$. Одержимо точкову множину $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subset R^n$ потужності m : $|A| = m$, де $m \geq n + 1$.

Послідовність подальших дій:

1. Побудова опуклої оболонки $C_0 = \text{conv}(A)$ точкової множини A з подальшим видаленням її граничних точок з множини A .

2. Формування множини A_l – відкоригованої множини A , $l = 1, 2, \dots$. Побудова $C_l = \text{conv}(A_l)$ та видалення її граничних точок з множини A_l .

3. Пункт 2 повторюється, доки у поточній множині A_l залишиться менше $(m - 2[\alpha m])$ точок, а у попередній, A_{l-1} – не менше.

У результаті одержуємо послідовність $C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_{\bar{s}}$ (рис. 2), у якій $C_{\bar{s}} = \text{conv}(A_{\bar{s}})$, а потужність результуючої множини $A_{\bar{s}}$:

$$(|A_{\bar{s}}| \geq m - 2[\alpha m]) \wedge (|A_{\bar{s}+1}| < m - 2[\alpha m]).$$

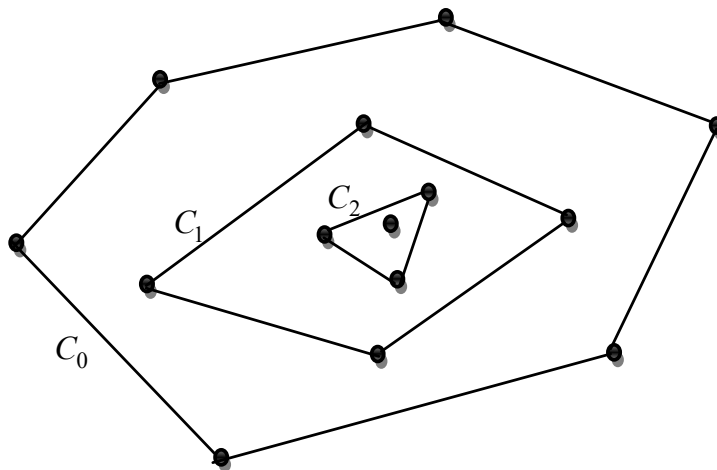


Рис. 2 – Приклад знаходження множини $A_{\bar{s}}$ у двовимірному випадку ($\alpha = 0,4$).
Елементи опуклої оболонки C_2 – це елементи шуканої множини $A_{\bar{s}}$ ($\bar{s} = 2$).

Згідно з *теоремою McMullen, Shephard* [11], опукла оболонка скінченної множини точок у R^n є опуклим n -вимірним політопом, де під опуклим n -вимірним політопом (n -політопом) мається на увазі непорожня континуальна обмежена n -вимірна полідральна множина, за умови, що ця множина не є підмножиною ніякого простору меншої вимірності [10]:

$$\text{conv}(A) \subset R^n, \text{conv}(A) \not\subset R^k, k \leq n - 1.$$

Тому задача побудови опуклої оболонки множини точок можна звести до задачі побудови n -політопа на точках цієї множини, описаного набором орієнтованих гіперплощин.

Опишемо детальніше основні процедури побудови результуючої множини $A_{\tilde{s}}$. Припускаємо, що початкові дані задані коректно, тобто не всі точки A_j належать одній гіперплощині f (і можна побудувати початкову опуклу оболонку):

$$\exists f: A_j \in f, j \in J_m. \quad (2)$$

Зауважимо, що, в основній задачі це означає незалежність компонент a_{ji} багатовимірних даних a_j , $j \in J_m$, $i \in J_n$, в наступному сенсі.

Назвемо компоненти $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}$ незалежними [12], якщо виконується умова:

$$\exists \varphi(x): a_{ji_1} = \varphi(a_{ji_2}), \quad i_1 \neq i_2, \quad i_1, i_2 \in J_n; \quad j \in J_m,$$

де $\varphi(x)$ – деяка функція.

Якщо залежність спостерігається для деякої пари компонент з номерами, наприклад, q та z , по всіх даних a_j , $j = 1, 2, \dots, m$, то можна виключити компоненту a_{jq} (або a_{jz}) з розгляду в усіх даних a_j . Це відповідає розгляду геометричної задачі у $(n-1)$ -вимірному просторі.

Процедура 1. Побудова опуклої оболонки C_0 .

1.1. *Побудова початкового n -симплекса S^1 .* Формуємо множину крайніх точок $K \subseteq A$. Зауважимо, що для точки $A'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in K \subseteq A$ виконується умова:

$$\left(x'_k = \max_{j \in J_m} x_{jk} \right) \vee \left(x'_k = \min_{j \in J_m} x_{jk} \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3)$$

Якщо існує декілька точок, для яких виконується умова (3), тобто

$$\exists m_1, m_2 \in J_m : x'_k = x_{m_1 k} = x_{m_2 k}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \begin{cases} x'_k = x_{m_1 k}, & k_1 \geq k_2; \\ x'_k = x_{m_2 k}, & k_1 < k_2, \end{cases}$$

де $k_1(k_2)$ – кількість осей k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, на яких для $x_{m_1 k}$ ($x_{m_2 k}$) виконується умова (3).

Нехай $|K| = \tilde{k}$.

При $\tilde{k} \geq n$ будемо на n точках A'_1, A'_2, \dots, A'_n множини K гіперплощину $f^0: \sum_{k=1}^n a_k x_k + a_0 = 0$ – одну з $C_{\tilde{k}}^n$

гіперплощин, де $C_{\tilde{k}}^n = \frac{\tilde{k}!}{n!(\tilde{k}-n)!}$ – число комбінацій з \tilde{k} елементів по n .

При $\tilde{k} < n$ будемо на n точках множини A гіперплощину $f^0: \sum_{k=1}^n a_k x_k + a_0 = 0$ – одну з C_m^n гіперпло-

щин.

Шукаємо точку $A_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in A$, для якої:

$$\left(\left| \delta_{A_0}(f^0) \right| = \left| f^0(A_0) \right| = \max_{\substack{A_i \in A \\ i \in J_m}} \left\{ \left| f^0(A_i) \right| \right\} \right) \wedge \left(\left| \delta_{A_0}(f^0) \right| \neq 0 \right).$$

Зауважимо, що в силу припущення (2) така точка існує.

Формуємо точкову множину $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_{n+1}\} = \{A'_1, A'_2, \dots, A'_n, A_0\}$ і будемо $\text{conv}(\tilde{A})$ – n -симплекс S^1 .

Для цього:

– з точок множини $\tilde{A} = \{\tilde{A}_j\}_{j=1}^{n+1}$ генеруємо $(n+1)$ наборів по n точок $\tilde{A}'_1, \tilde{A}'_2, \dots, \tilde{A}'_n \in \tilde{A}$, $t \in J_t = \{1, 2, \dots, n+1\}$;

– будемо гіперплощини $f_t^1: \sum_{k=1}^n a'_k x_k + a'_0 = 0$, $t \in J_t$. Зауважимо, що

$$\exists t \in \{1, 2, \dots, n+1\}: f_t^1 = f^0.$$

– орієнтуємо недодатньо відносно множини \tilde{A} гіперплощини f_t^1 , $t \in J_t$:

– обираємо точку $A''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'') \in \tilde{A} : f_t^1(A'') \neq 0$;

– обчислюємо величину $\delta_{A''}(f_t^1) = \sum_{k=1}^n a_k^t x_k'' + a_0^t$;

– якщо $\delta_{A''}(f_t^1) > 0$, то у рівнянні гіперплощини f_t^1 змінюються знаки всіх коефіцієнтів і вільного члена на протилежні, тобто $a_k^t = -a_k^t$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Таким чином, одержимо $\text{conv}(\tilde{A})$ – n -симплекс S^1 , межа якої описується системою нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k^1 x_k + a_0^1 \leq 0; \\ \sum_{k=1}^n a_k^2 x_k + a_0^2 \leq 0; \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_k^{n+1} x_k + a_0^{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

1.2. Коригування множини A (виключення з A внутрішніх точок та тих, що є граничними, але не є вершинами n -політопа S^h , $h = 1, 2, \dots$).

Позначимо через $B^h \subset A$ – множину точок після коригування множини A на h -му кроці; A^h – множина вершин n -політопа S^h , $h = 1, 2, \dots$, причому $A^1 = \tilde{A}$; $H_{S^h} = \{f_t^h\}_{t=1}^{t_h}$ – множина гіперплощин f_t^h , $t \in J_{t_h} = \{1, 2, \dots, t_h\}$, що визначає границю n -політопа S^h (причому $t_1 = n + 1$).

Формуємо B^h , для цього виключаємо з розгляду точку $A'''(x_1''', x_2''', \dots, x_n''') \in A$, якщо

$$(A''' \in B^{h-1}) \wedge (A''' \in S^h \setminus A^h) \quad (\text{при } B^0 = A).$$

Тобто, якщо:

– $\delta_{A'''}(f_t^h) < 0$, $t \in J_{t_h}$ (A''' – внутрішня точка n -політопа) або

– $(\exists \tilde{f}_1^h, \tilde{f}_2^h, \dots, \tilde{f}_{l_0}^h \in H_{S^h} : \delta_{A'''}(\tilde{f}_l^h) = 0, l \in \{1, 2, \dots, l_0\}) \wedge$

$$\wedge \left(\forall \tilde{f}_p^h \in H_{S^h} \setminus \{\tilde{f}_l^h\}_{l=1}^{l_0} : \delta_{A'''}(\tilde{f}_p^h) < 0, p = 1, 2, \dots, t_h - l_0 \right)$$

(A''' – гранична, але не є вершиною n -політопа).

Тоді множина $B^h = B^{h-1} \setminus \{A_r'''\}_{r \in N}$, $h = 1, 2, \dots$, де r – число точок виду A''' .

1.3. Побудова n -політопа (опуклої оболонки) S^{h+1} , $h = 1, 2, \dots$.

Для кожної гіперплощини $f_t^h \in H_{S^h}$, $t \in J_{t_h}$, обираємо точку $A_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in B^h$ з максимальним відхиленням від площини f_t^h , тобто

$$\delta_{A_0}(f_t^h) = a_1^t x_{01} + a_2^t x_{02} + \dots + a_n^t x_{0n} + a_0^t = \max_{\substack{A_i \in B^h, \\ i \in \{1, 2, \dots, m\}}} \{a_1^t x_{i1} + a_2^t x_{i2} + \dots + a_n^t x_{in} + a_0^t\}.$$

Можливі такі випадки:

– $\delta_{A_0}(f_t^h) < 0 \Rightarrow f_t^h \in H_{\text{conv}(A)}$, де $H_{\text{conv}(A)}$ – множина опорних гіперплощин (всі точки множини A лежать по один бік від гіперплощини). Позначимо через $P_{\text{conv}(A)}$ – множину точок, на яких побудовано опорні гіперплощини;

– $(\delta_{A_0}(f_t^h) = 0) \wedge$

$$\wedge \left((\exists f_t^* \in H_{S^h}, t = 1, 2, \dots, t^* (t^* < n) : \delta_{A_0}(f_t^*) = 0) \wedge (\forall f_t^{**} \in H_{S^h}, t = 1, 2, \dots, t_h - t^* : \delta_{A_0}(f_t^{**}) < 0) \right)$$

(A_0 належить гіперграні, через яку проходить f_t^h). В цьому випадку необхідно перейти до розгляду наступної гіперплощини та повторити спочатку крок 1.3 з обрання точки A_0 ;

$$\begin{aligned}
 & - \left((\delta_{A_0}(f_t^h) > 0) \vee (\delta_{A_0}(f_t^h) = 0) \right) \wedge \left(\exists f_t^* \in H_{S^h}, t \in \{1, 2, \dots, t_h\} : \delta_{A_0}(f_t^*) > 0 \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \exists \left\{ f_s^* \right\}_1^{g-1} \in H_{S^h}, g-1 < t_h : \delta_{A_0}(f_s^*) > 0, s = 1, 2, \dots, g-1, f_s^* \neq f_t^h \text{ (} A_0 \text{ лежить поза } S^h \text{)}.
 \end{aligned}$$

Введемо у розгляд множини $H_{A_0} = \{f_1^*, \dots, f_{g-1}^*, f_g^*\}$, де $f_g^* = f_t^h$, та $P_{A_0} = \bigcup_{s=1}^g P_{A_0}^s$, де $P_{A_0}^s$ – множина точок з A^h (вершин n -політопа S^h), через які проходить f_s^* , $s = 1, 2, \dots, g$. Нехай $|P_{A_0}^s| = g'_s$, $|P_{A_0}| = g'$, тоді $\sum_{s=1}^g g'_s \geq g'$.

Побудуємо допоміжні n -симплекси \hat{S}_d , $d \in J_\mu = 1, 2, \dots, \mu$, де $\mu = \sum_{s=1}^g C_{g_s}^n$. Кожен n -симплекс \hat{S}_d будемо, використовуючи процедуру 1.1, на $(n+1)$ -й точці множини $\hat{A}_d = \{\hat{A}_{d1}, \hat{A}_{d2}, \dots, \hat{A}_{d(n+1)}\}$, елементи якої обираються за правилом: $\hat{A}_{d1}, \hat{A}_{d2}, \dots, \hat{A}_{dn} \in P_{A_0}^s$, $s \in \{1, 2, \dots, g\}$, $\hat{A}_{d(n+1)} = A_0$, $d \in J_\mu$. Нехай $\hat{S} = \bigcup_{d=1}^\mu \hat{S}_d$, $\{\hat{f}_t^d\}_{t=1}^{n+1}$ – опорні гіперплощини n -симплекса \hat{S}_d , $d \in J_\mu$; $H_0 = \{\hat{f}_1^1, \dots, \hat{f}_{n+1}^1, \hat{f}_1^2, \dots, \hat{f}_{n+1}^2, \dots, \hat{f}_1^\mu, \hat{f}_{n+1}^\mu\}$, де H_0 – множина гіперплощин, з якої вилучені ті, які не є опорними для множини точок $\{A_0\} \cup A^h$. Зауважимо, що $|H_0| < (n+1)\mu$.

Формуємо множину гіперплощин $H_{S^{h+1}} = H_{S^h} \cup H_0$, $|H_{S^{h+1}}| = t_{h+1}$, які будуть опорними для n -політопа S^{h+1} . Зауважимо, що потрібно врахувати випадок співпадіння декількох площин.

Використовуючи процедуру 1.2, сформуємо множину точок A^{h+1} , елементами якої є вершини n -політопа S^{h+1} .

За скінченне число ітерацій за умови, що $A^{\tilde{h}} = B^{\tilde{h}}, \tilde{h} \in \mathbb{N}$, (не існує жодної зовнішньої по відношенню до $S^{\tilde{h}}$ точки множини A) одержимо шукану опуклу оболонку (n -політоп) C_0 , що задається набором опорних гіперплощин (елементи $H_{conv(A)}$) та вершин (елементи $P_{conv(A)}$).

Зауважимо, що верхньою оцінкою $f(n, m)$ числа опорних гіперплощин буде [9]:

$$f(n, m) = \begin{cases} \frac{2m}{n} C_{m-\frac{n}{2}}^{n-1} & \text{для парних } n; \\ 2C_{m-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & \text{для непарних } n. \end{cases}$$

Процедура 2. Видалення граничних точок опуклої оболонки C_0 (множини $\gamma_0 = fr C_0$) з множини A . Формування множини A_1 – відкоригованої множини A .

У результаті використання процедури 1 одержимо:

– множину $D_0 = \{V_1^0, V_2^0, \dots, V_{d_0}^0\} \subset \gamma_0$ ($D_0 = P_{conv(A)}$) граничних точок $V_t^0(x_{t1}^0, x_{t2}^0, \dots, x_t^0)$, $t = 1, 2, \dots, d_0$, опуклої оболонки C_0 , $D_0 \subseteq A$, $|D_0| = d_0$, $d_0 \leq m$;

– набір з h_0 орієнтованих (неодатньо) опорних гіперплощин $H_{C_0} = \{f_1^0, f_2^0, \dots, f_{h_0}^0\}$, ($H_{C_0} = H_{conv(A)}$).

Для значення d_0 потужності множини D_0 перевіряємо виконання умови:

$$m - d_0 < m - 2[\alpha m],$$

тобто

$$d_0 > 2[\alpha m]. \tag{4}$$

Якщо умова (4) виконується, то це означає, що A і є шуканою множиною $A_{\tilde{s}}$.

В іншому випадку, видаляємо з множини A ті точки, що є елементами множини D_0 та формуємо точкову множину $A_1 = A \setminus D_0$ потужності $d_1 = m - d_0$.

Покладемо $l = 1$.

Процедура 3. Побудова опуклої оболонки C_l та видалення її граничних точок з множини A_l .

Для побудови $C_l = \text{conv}(A_l)$ використаємо процедуру 1 (в якості множини A будемо розглядати множину A_l). В результаті одержимо:

– множину $D_l = \{V_1^l, V_2^l, \dots, V_{d_l}^l\} \subset \gamma_l$ (де $\gamma_l = \text{fr} C_l$) граничних точок $V_t^l(x_{t1}^l, x_{t2}^l, \dots, x_{tm}^l)$, $t = 1, 2, \dots, d_l$, опуклої оболонки C_l , $D_l \subseteq A_l$, $|D_l| = d_l$, $d_l < d_{l-1}$;

– набір з h_l орієнтованих (недодатньо) опорних гіперплощин $H_{C_l} = \{f_1^l, f_2^l, \dots, f_{h_l}^l\}$.

Для значення потужності d_l множини D_l перевіряємо виконання умови:

$$m - \sum_{k=0}^l d_k < m - 2[\alpha m],$$

тобто

$$\sum_{k=0}^l d_k > 2[\alpha m]. \quad (5)$$

Якщо умова (5) виконується, то це означає, що $A_{\bar{s}} = A_{l-1}$.

В іншому випадку, видаляємо з множини A_l ті точки, що є елементами множини D_l .

Покладемо $l = l + 1$.

Формуємо точкову множину $A_l = A_{l-1} \setminus D_{l-1}$ потужності $|A_l| = m - \sum_{k=0}^{l-1} d_k$.

Повторюємо процедуру 3 до виконання для поточного l умови (5).

В результаті одержимо $C_{\bar{s}}$ – опуклу оболонку множини $A_{\bar{s}}$, що містить $d_{\bar{s}}$ точок $V_t^{\bar{s}}$, $t = 1, 2, \dots, d_{\bar{s}}$, множини A .

Кожній точці $V_t^{\bar{s}}(x_{t1}^{\bar{s}}, x_{t2}^{\bar{s}}, \dots, x_{tm}^{\bar{s}})$, $t = 1, 2, \dots, d_{\bar{s}}$, відповідає варіанта $a'_t = (a'_{t1}, a'_{t2}, \dots, a'_{tm})$ початкового набору даних A . За одержаним набором варіант $a'_1, a'_2, \dots, a'_{d_{\bar{s}}}$ тепер можна шукати оцінки параметрів ймовірнісного розподілу. Причому, варіанти, що могли призвести до хибного результату, завдяки запропонованому методу були виключені з розгляду.

Результати роботи методу. Результати проведення чисельних експериментів надано в табл. 1, де m – кількість даних (початкова кількість варіант); n – кількість компонент; $d_{\bar{s}}$ – кількість варіант, що залишилися після виключення аномальних; $\alpha \in \{0,1; 0,15; 0,2\}$. Зауважимо, що значення компонент $(a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{in})$, $t = 1, 2, \dots, d_{\bar{s}}$, обираються випадковим чином за умови, що $a'_{ii} \in N$, $a'_{ii} \in [1, 100]$, $i \in J_n$.

Таблиця 1 – Результати використання розробленого методу

n	m	$d_{\bar{s}}$	α	n	m	$d_{\bar{s}}$	α
4	30	24	0,1	5	30	22	0,1
	40	32	0,2		40	27	0,2
	50	37	0,15		50	41	0,15

Як бачимо з табл. 1, після корегування початкових даних, тобто усунення аномальних вимірювань за допомогою розробленого методу, кількість варіант зменшилась в середньому на 24% в залежності від кількості компонент даних. Подальше обчислення базових характеристик (зокрема, середнє, розмах та коефіцієнт варіації, дисперсія тощо) здійснюється на відкоригованій вибірці.

Перспективи подальших досліджень. Перспективним є дослідження корекції впливу викидів. Методи корекції впливу викидів можуть знижувати вплив викидів на результат аналізу даних без видалення значень, які розпізнані як викиди. Альтернативний спосіб полягає в проведенні аналізу двічі: при наявності викидів і без викидів.

Висновки. У статті запропоновано комбінований метод усунення аномальних вимірювань при аналізі багатовимірних даних під час розв'язання задачі прийняття рішень, що базується на використанні методу оцінювання Гествірта, процедури Тьюкі та модифікації методу побудови опуклої оболонки скінченної множини точок ба-

готовимірного простору. Головні особливості розробленого методу полягають у наступному: початкова задача зводиться до статистичної, яка в свою чергу – до геометричної (дані – варіанти – точки); знаходження та виключення аномальних варіантів відбувається через побудову послідовності вкладених опуклих оболонки – n – політопів; кожен n – політоп описується набором граничних точок та гіперплощин, що зменшує часову складність знаходження n – політопа (а значить, і опуклої оболонки); обчислення оцінок параметрів ймовірного розподілу (тобто проведення аналізу даних) здійснюється на варіантах, що відсортували.

Таким чином, для підготовки обґрунтованого управлінського рішення можна при коригуванні даних на основі статистичного процесу використати описаний алгоритм виявлення викидів, а потім вже обирати найбільш раціональне рішення. Звичайно, можна обрати варіант рішення і без аналізу викидів. Однак наявність у сукупності аномальних спостережень може привести до використання неправдивих передумов при прийнятті рішення. Ціна помилки в результаті некомпетентного або недостатньо підготовленого рішення буває часом достатньо висока.

Список літератури

1. Hampel F. R. Robust estimation: a condensed partial survey // *Z. Wahrscheinlichkeits – Theorie and Verw. Geb.* – 1973. – 27. – pp. 87 – 104.
2. Поляк Б. Т., Шербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
3. Шуленин В. П. Математическая статистика. Ч. 3: Робастная статистика. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – 520 с.
4. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 261 с..
5. Гожий А. П., Коваленко И. И. Системное использование робастных и бутстреп методов в задачах анализа данных. – *АСАУ* – 9(29). – 2006. – С. 38 – 49.
6. Gastwirth J. On robust procedures // *J. Amer. Stat. Assn.* – 1966. – pp. 929 – 948.
7. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions // *Contributions to probability and statistics.* – 1960. – Vol. 2. – pp. 448 – 485.
8. Huber P. J. Robust statistics : A review. // *Ann. Math. Stat.* – 1972. – 43(3). – pp. 1041 – 1067.
9. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. – М. : Мир, 1989. – 478 с.
10. Гиль Н. И., Софронова М. С. Об одном подходе к построению выпуклой оболочки конечного множества точек в R^n // *Штучний інтелект.* – 2009. – № 4 – С. 30 – 36.
11. McMullen P., Shephard G. *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture.* – Cambridge: University Press, 1971.
12. Погожих М. І., Софронова М. С. Математичне моделювання задач оптимізації в економіці // *Економічна стратегія і перспективи розвитку сфери торгівлі та послуг: зб. наук. пр. ХДУХТ.* – X. : ХДУХТ, 2017. – Вип.1 (25). – С. 121 – 131.

References (transliterated)

1. Hampel F. R. Robust estimation: a condensed partial survey. *Z. Wahrscheinlichkeits – Theorie and Verw. Geb.* 1973, no. 27, pp. 87–104.
2. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow, 2002. 303 p.
3. Shulenin V. P. *Matematicheskaya statistika. CH. 3: Robastnaya statistika* [Mathematical statistics. Part 3: Robust statistics]. Tomsk, 2012. 520 p.
4. Efron B. *Netraditsionnye metody mnogomernogo statisticheskogo analiza* [Non-traditional methods of multivariate statistical analysis]. Moscow, Finance and statistics Publ., 1988. 261 p.
5. Gozhiy A. P., Kovalenko I. I. *Sistemnoe ispol'zovanie robastnykh i butstrep metodov v zadachakh analiza dannykh* [Systematic use of robust and bootstrap methods in data analysis problems]. ASAU, 2006, no. 9 (29), pp. 38–49.
6. Gastwirth J. On robust procedures. *J. Amer. Stat. Assn.* 1966, pp. 929–948.
7. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions. *Contributions to probability and statistics.* 1960, vol. 2, pp. 448–485.
8. Huber P. J. Robust statistics : A review. *Ann. Math. Stat.* 1972, no. 43(3), pp. 1041–1067.
9. Preparata F., Sheimos M. *Vychislitel'naya geometriya. Vvedenie* [Computational geometry. Introduction]. Moscow, 1989. 478 p.
10. Gil N. I., Sofronova M. S. Ob odnom podkhode k postroeniyu vypukloy obolochki konechnogo mnozhestva toчек в R^n [On an approach to the construction of the convex hull of a finite set of points in R^n]. *Shtuchniy intelekt* [Artificial intelligence]. 2009, no. 4, pp. 30–36.
11. McMullen P., Shephard G. *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture.* Cambridge, University Press, 1971.
12. Pogozhikh M. I., Sofronova M. S. Matematychnye modelyuvannya zadach optimizatsiyi v ekonomitsi [Mathematical modeling of optimization problems in economics]. *Ekonomichna strategiya i perspektivy rozvytku sfery torgovli ta poslug* [Economic strategy and prospects for the development of the sphere of trade and services]. Kharkiv, 2017, vol. 1 (25), pp. 121–131.

Надійшла (received) 01.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Софронова Марина Сергіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: m_myravuyova@ukr.net.

Софронова Марина Сергеевна – кандидат фізико-математических наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: m_myravuyova@ukr.net.

Sofronova Maryna Sergeevna – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057)707-60-87; e-mail: m_myravuyova@ukr.net.



Журнальна рубрика
«ПАМ'ЯТІ ВИДАТНИХ ВЧЕНИХ»



Григорьев Александр Львович (1956 – 2021)

УШЁЛ ИЗ ЖИЗНИ ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЁНЫЙ

7 апреля 2021 года скоропостижно скончался Григорьев Александр Львович, известный учёный, выдающийся педагог, человек твёрдых принципов и широкого кругозора, интересный собеседник и надёжный товарищ, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики НТУ «ХПИ», основатель и главная движущая сила нашего журнала.

Родился Александр Львович 2 апреля 1956 года в г. Львов Курской области РСФСР в семье офицера вооруженных сил СССР.

В 1978 году Александр Львович закончил Харьковский государственный университет (ХГУ) по специальности «Математика», имел квалификацию – математик.

Григорьев Александр Львович всю свою жизнь (вплоть до скоропостижной смерти) и энергию отдал нашему Университету НТУ «ХПИ». Трудовую и научную деятельность он начал под руководством выдающегося учёного и педагога проф. А. А. Грунауэра, который был сторонником математических методов решения инженерных задач. Под его влиянием Александр Львович быстро превратился в высококлассного инженера: уже в конце 1980-х гг. Григорьев А. Л. считался признанным специалистом в отрасли производства топливной аппаратуры для дизелей и по этой тематике защитил кандидатскую («Разработка методов интенсификации процесса топливоподачи в топливной аппаратуре высокооборотных дизелей», 1989 г., Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта), а потом и докторскую («Разработка универсальных методов гидравлического расчёта, динамического анализа и оптимизационного синтеза основных элементов топливной аппаратуры дизелей», 2004 г., НТУ «ХПИ») диссертацию.

Основные этапы научно-педагогической деятельности Григорьева Александра Львовича: 1978 – 1981 гг. – инженер; 1981 – 1989 гг. – младший научный сотрудник; 1989 – 1990 гг. – научный сотрудник кафедры подъемно-транспортных машин и теории механизмов и машин; 1990 – 1991 гг. – ассистент, 1991 – 1998 гг. – старший

преподаватель, 1998 – 1999 гг. – доцент кафедры высшей математики; 1999 – 2002 гг. – докторант; 2002 – 2005 гг. – доцент; с 2005 года был профессором кафедры высшей математики НТУ «ХПИ». Общий стаж работы – 48 лет, на кафедре высшей математики – 31 год.

Профессор Григорьев Александр Львович был человеком широких научных интересов. Среди направлений, которыми занимался в области математики, числились линейная алгебра, линейные дифференциальные операторы, интегральные преобразования, теория поля, математическая физика, многокритериальная оптимизация, теория устойчивости; физики: термодинамика, гидродинамика, газовая динамика, электродинамика, вибро-механика, механика сплошной среды; технических наук: теория механизмов машин, динамика и прочность машин, тепловые двигатели, ракетные двигатели, гидродневоавтоматика, теория регулирования, теория оптимального управления, электромагнитные клапаны. Также Александр Львович интересовался общими вопросами синергетики и философия науки.

Александр Львович был выдающимся учёным, который плодотворно развивал традиции научных школ харьковских политехников в отраслях прикладной математики, механики (и, особенно, в области фундаментальных исследований механики сплошной среды, которые находили применение в задачах вибромеханики и имели цель получения новых источников и методов передачи энергии) и двигателестроения. Был исполнителем и ответственным исполнителем 5 всесоюзных научно-исследовательских тем, связанных с разработкой новых образцов топливной аппаратуры дизелей, особенно: «Повышение долговечности и надёжности кулачковых механизмов топливных насосов завода «Коммунист»» (ВО «Волгадизельмаш», г. Маркс, Саратовской обл., Россия, план НДР Минтяжмаш СССР), «Разработка новых методов идентификации впрыскивания топлива в автомобильных дизелях семейства КамАЗ» (Ярославский завод дизельной аппаратуры, г. Ярославль, Россия), «Динамический анализ и проектирование пружин топливной аппаратуры дизелей» (Ярославский завод топливной аппаратуры, г. Ярославль, Россия). С 1991 года был исполнителем 6 научно-исследовательских тем кафедры теплотехники и тепловых двигателей Харьковской государственной академии железнодорожного транспорта, в том числе «Розробка систем живлення газодизельного електроагрегату» (НВО «Русский дизель», г. Санкт-Петербург, Россия), «Модернизация форсунок с двухступенчатым впрыском топлива» (Укрзалізниця). Принял участие в работе более 30 международных и региональных научных конференций по проблемам проектирования топливной аппаратуры дизелей и моделирования ПЭВМ сложных механических систем. Научные результаты, полученные при выполнении этих работ, составили основу разработки универсальных методов гидродинамического расчёта, динамического анализа и оптимизационного синтеза элементов топливной аппаратуры дизелей.

Научно-исследовательские работы по изобретениям профессора Григорьева (13 патентов на изобретения) получили министерскую поддержку. В 2015 году Александр Львович был награждён поощрительной наградой Министерства образования и науки Украины – нагрудный знак «Відмінник освіти».

Полученный научный опыт способствовал быстрому профессиональному росту Александра Львовича и в качестве преподавателя высшей математики, и как автора новых учебников:

– 3 учебника в соавторстве («Основы линейной алгебры и её приложений в технике», 2002 г. с грифом МОН Украины, которым положил начало серии научно-технической литературы «Фундаментальное образование для высоких технологий»; «Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования», Т. 1. – 2010 г., Т. 3. – 2012 г.);

– 8 научно-методических пособий с разных разделов общего курса высшей математики и её специальным главам, в том числе пособия «Функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння», «Ряды» с грифом МОН Украины, «Краткий курс высшей математики. Часть 1.», 2009 г., «Краткий курс высшей математики. Часть 2.», 2010 г., «Элементы векторного анализа», 2016 г. с грифом МОН Украины.

В активе Александра Львовича более 180 научных публикаций. Он подготовил 3-х кандидатов наук, неоднократно выступал в роли оппонента. Не единожды был научным консультантом, сотрудничал с ведущими государственными предприятиями Украины – ДП «ХКБД» (завод им. В. Малышева) и ДП «КБ «Южное»» (Днепропетровск), а также с Институтом проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. Профессор Александр Львович был членом специализированного учёного совета ВАК в НТУ «ХПИ»; членом редколлегии научного журнала «Двигатели внутреннего сгорания» (НТУ «ХПИ», г. Харьков).

Александр Львович был отцом-основателем научного журнала «Вісник НТУ «ХПИ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях», который начал выпускаться кафедрой высшей математики НТУ «ХПИ» в 2010 г. Сейчас это «Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях». Все 11 лет существования журнала профессор Александр Львович принимал активное участие в каждом его номере как автор и рецензент, творческий руководитель, администратор и спонсор статей.

Коллектив кафедры высшей математики, на которой Александр Львович проработал 43 года, и все его ученики скорбят о непоправимой утрате, выражают сочувствие и поддержку семье профессора Александра Львовича Григорьева. Нам будет очень не хватать его советов и критики, жизненного опыта, научной экспертизы, энергии и вдохновения.

Коллектив кафедры высшей математики

Памяти моего отца, Григорьева Александра Львовича.

7-го апреля 2021-го года от коронавируса умер мой отец. За пять дней до смерти ему исполнилось 65 лет. Я до сих пор до конца не верю, что отца больше нет. Несмотря на то, что мы в последние годы редко виделись, он всегда был готов выслушать или поделиться со мной чем-то новым. А делиться было чем: отец был человеком потрясающего кругозора, крупным специалистом сразу в двух областях: математике и технике, автором книг, педагогом, научным руководителем и интереснейшим собеседником. Я не буду говорить, каким он был ученым и преподавателем, об этом судить не сыну. Я расскажу, каким он был человеком.

Наша семья распалась, когда мне было около 12 лет. Обычно, дети остаются с мамой, но у нас вышло иначе: я вырос с отцом. Он не был из тех родителей, которые контролируют каждый шаг своих детей или навязывают им свои ценности. Совсем наоборот, он научил меня быть самостоятельным и всегда поддерживал мой выбор, даже если был с ним не согласен. А это очень редкая черта характера в людях и еще более редкая в родителях. Важно понимать, что речь тут идет не о родительском безразличии. Отец всегда давал мне понять, что придет время, когда решения и ответственность за их последствия лягут на меня, и готовил меня к этому заранее.

Еще мой отец был человеком потрясающего чувства юмора. Наши дискуссии (а какой сын не спорит со своим отцом?) чаще всего заканчивались смехом, потому что отец умел привести в качестве аргументов такие метафоры, что сделали бы честь любому артисту комедийного жанра. Он вообще не любил говорить о себе слишком серьезно. Помню, когда мне было лет 15, отец работал над учебником по линейной алгебре. Я нарисовал несколько иллюстраций к этой книге в очень шуточной форме. Удивительно, но именно эти детские рисунки вошли в финальную редакцию. Отец сказал мне тогда, что в книге всегда должно быть место юмору, даже если это скучный учебник по математике.

Наверное, именно чувство юмора помогало ему справляться с многочисленными жизненными трудностями. Чувство юмора и бесконечная любознательность. Нельзя быть хорошим учителем, если не уметь хорошо учиться. И он умел: отец постоянно интересовался новым и приобретал практические навыки. В возрасте 60-ти лет, когда здоровье и концентрация уже дают сбои, он занялся сложнейшими задачами в области ракетостроения и добился значительных успехов. Последний его аспирант получил научное звание за несколько месяцев до его смерти. До самых последних дней отец строил планы дальнейших научных исследований, рассуждал о методиках преподавания, следил за общественной жизнью.

Вы, наверное, обратили внимание, что я всегда употребляю слово «отец» и никогда «папа»? Это не случайность. Такой была одна из наших семейных особенностей. Мы в шутку начали называть друг друга на «вы» и по имени отчеству после того, как отец получил профессорское звание. И эта игра затянулась на 20 лет. Даже в последнем нашем разговоре, я сказал ему: «Поправляйтесь, отец! Все будет хорошо». Тогда никто еще не знал, что другого разговора больше не будет, и я уже не смогу сказать ему «папа». Все то, что осталось тогда несказанным останется таким навсегда.

Светлая память, тебе, папа. Пока живем мы: твои родные, твои ученики, твои друзья и коллеги – остаешься жить и ты.

Алексей Григорьев

Спогади про Олександра Григор'єва

У 1978 році на кафедрі теорії механізмів і машин Харківського політехнічного інституту прийшов на посаду інженера випускник механіко-математичного факультету Харківського університету ім. А. М. Горького Олександр Григор'єв. На той час завідувачем кафедри був проф. О. А. Грунауер, під керівництвом якого кафедра виконувала наукові дослідження за декількома договорами із підприємствами Радянського Союзу.

Професор О. А. Грунауер мав науковий інтерес у галузі двигунів внутрішнього згоряння. Тому наукове співробітництво кафедра вела із такими підприємствами як завод «Сардизель» (м. Саратов), Алтайський моторний завод (м. Барнаул), Ярославський моторний завод, завод паливної апаратури (м. Маркс, Саратовська область), завод паливної апаратури (м. Чугуєв, Харківська область). Олександр Григор'єв одразу зацікавився та активно підключився до наукових розробок кафедри у напрямку вдосконалення вузлів паливної апаратури. Він започаткував на кафедрі розробку математичних моделей процесів упорскування палива та вплив цього процесу на якість та надійність. З цих робіт і почався багаторічний та дуже успішний шлях Олександра Григор'єва в галузі оптимального проектування вузлів паливної апаратури.

Невдовзі Олександр перейшов на посаду молодшого наукового співробітника, а незабаром поступив у аспірантуру та під керівництвом проф. Грунауера захистив дисертацію на здобуття ступеня кандидата технічних наук. Олександр був улюбленим учнем проф. Грунауера та підтримував із ним стосунки до останніх днів професора, який останніми роками жив у Німеччині та пішов з життя у 2013 році.

Олександр Григор'єв мав надзвичайний науковий хист, вмів не тільки глибоко вникнути у проблему, але й перегорнути її на такий бік, що рішення виявлялось несподіваним та оригінальним. Усі працівники кафедри звертались до Олександра за науковими порадами, коли мали математичні питання. Він був дуже щирою людиною та щедрим душею, нікому ніколи не відмовляв у пораді та допомозі. Колеги його глибоко поважали і любили.

*Зарубіна Алла Олександрівна, канд. техн. наук, проф.,
заступник завідувача кафедри ТММ і САПР, НТУ «ХПІ»*

...У него была фантастическая вера в свою правоту и свои возможности. Он был полон идей, и с невероятным оптимизмом воплощал их в жизнь.

Как человека творческого, его интересовало все. Не жизнь испытывала его на прочность, а он ее. За это он расплачивался своим здоровьем. И при этом я не помню, чтобы он был на больничном. Он говорил, что «надо ходить на работу», что «работа вылечит от всех болезней».

Научный журнал «Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях», появившийся благодаря усилиям Александра Львовича, стал вехой в истории кафедры. Его команда редакторов работала и работает слажено и безупречно. Со временем это дало возможность нашим преподавателям проявить себя в научных публикациях, поверить в свои силы. За последние годы количество публикаций сотрудников кафедры в научных изданиях выросло более чем в два раза.

Через всю жизнь Саша пронес любовь к своей единственной женщине, с которой воспитал двух сыновей. Дав ей возможность реализоваться в своей профессии, он вынужденно остался в одиночестве, но был рад ее успехам и счастлив, когда она приезжала в Харьков. Он гордился и с удовольствием возился с внуками.

Он не был идеальным, но он был лучшим из нас. Такие люди имеют право жить по своим законам. Александр Львович был самым узнаваемым, самым уважаемым в институте сотрудником кафедры высшей математики, и заслуженно станет ее *легендой*. Верю.

**Чикина Наталья Александровна,
проф., и.о. заведующего кафедры высшей математики, НТУ «ХПИ»**

Совместная учеба на механико-математическом факультете Харьковского государственного университета им. А. М. Горького (так тогда назывался нынешний Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина) сблизила меня с Александром нашим увлечением математикой и ее многогранными применениями. Мы принимали участие в разнообразных семинарах, проводимых многими выдающимися профессорами работающих в университете. Саша отличался настойчивостью при изучении плановых дисциплин и живым интересом к тому, что была «за программой». Читальные залы, где мы проводили свое вечернее время, были прекрасным полигоном для наших дискуссий.

Но не одной учебой жил тогдашний студент. Замечательное летнее время мы проводили в студенческих отрядах вблизи полярного круга. Непередаваемая красота короткого лета на севере, где мы за короткое время переживали весеннее таяние снега, буйный рост зелени, красоту ранней осени и первый снег в начале сентября!

Закончив учебу, Александр связал свою жизнь с Харьковским политехническим институтом им. В. И. Ленина (ныне это Национальный технический университет «Харьковский политехнический университет»). Но мы снова в своей научной работе встречались на вычислительном центре Института проблем машиностроения АН Украины (сейчас это Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины), имевший в то время уникальную БЭСМ-6.

Александр увлеченно проводил научные исследования по важнейшей теме двигателестроения – конструкция и исследование элементов топливной аппаратуры. Посещение ведущих предприятий, производителей топливной аппаратуры, вооружал его новыми идеями. В последние годы приобретенный опыт Александр использовал для исследований похожих проблем в топливных насосах ракетных двигателей.

Несвоевременный уход Александра не позволил ему реализовать полностью полученные результаты в реальных конструкциях. Богатое научное наследство предстоит реализовать его ученикам.

Светлая память ЧЕЛОВЕКУ и УЧЕНОМУ!

**Ванин Виктор Антонович, доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики, НТУ «ХПИ»**

Мне посчастливилось быть знакомым с этим замечательным, светлым человеком. Хотя в этом отношении мне всегда везло и я знаком с рядом выдающихся учёных современности в области механики и прикладной математики, с которыми я встречался по научной работе, а также на конференциях и симпозиумах. Это были как настоящие академики и члены-корреспонденты Академии Наук, так и обычные профессора, доценты или простые инженеры – не всем важны регалии, некоторые не хотят тратить на бюрократию своё драгоценное время, и всецело погружены в свои задачи. Можно смело утверждать, что это был один из умнейших людей, с которыми меня сталкивала жизнь. Так случилось, что на протяжении примерно трёх лет (во время моего обучения в докторантуре) наши рабочие столы стояли на расстоянии около 1 метра и мы с ним много общались по различным вопросам математики и просто общенаучного характера...

Очень удивляла и восторгала его трудоспособность как учёного. Он постоянно решал различные сложные задачи как прикладного, так и фундаментального характера. Даже за время моего, к сожалению, не долгого знакомства я видел, как он помог советами многим учёным и инженерам, причём не только из НТУ «ХПИ», но и других ВУЗов и предприятий Харькова, Днепропетровска (как тогда он назывался) с его огромным «живым» Южмашем и КБ Южным, а также других городов. По его рассказам с научными работами в старые времена ему удалось объездить множество городов всего большого Советского Союза.

Он был полон идей и всегда имел очень оптимистичный и положительный настрой. Причём в серьёз он за-

нимался не только наукой, но и от души отдавался преподаванию студентам очень важной дисциплины – высшая математика. При всё ухудшающемся положении (уменьшении часов и среднего уровня знаний современных студентов) серьезных дисциплин он всё оптимизировал, придумывал и вводил различные локальные улучшения, писал предложения и статьи, а также «ходил к начальству» по поводу реформ преподавания математики в лучшую сторону (а не как обычно)!

Скорость, с которой он "въезжал" в новую задачу, поражала. Так, например, метод регуляризации, разработанный академиком А. Н. Тихоновым, я постигал в течение 1 – 2 лет (правда, будучи еще студентом, а потом аспирантом), так вот при рецензировании моей научной статьи Александр Львович благодаря своей широчайшей математической эрудиции и просто таланту в тончайших деталях разобрался в ней буквально за неделю. Это для меня было своего рода маркером...

За время знакомства с ним я получил множество ценнейших консультаций и советов. Я рад и горжусь тем, что за время нашего знакомства я успел написать в соавторстве с Александром Львовичем Григорьевым две научные статьи. Мы намечали ещё некоторые научные работы, однако его занятость (он ни секунды не сидел без дела, и как мы прикидывали, иногда работал одновременно в трёх–пяти разных научных направлениях сразу) и неумолимое время уже не позволят нам это сделать никогда. Светлая память этому замечательному человеку.

Воропай Алексей Валериевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой деталей машин и ТММ, ХНАДУ

Мое знакомство с Александром Львовичем произошло на кафедре двигателей внутреннего сгорания НТУ «ХПИ» во время защит диссертационных работ в специализированном ученом совете Д 64.050.13. Александр Львович, в свойственной только ему манере, всегда первым задавал вопросы и этим задавал тон любой защите. Во время своих выступлений он подчеркивал – при возникновении у соискателя трудностей в теоретических или экспериментальных исследованиях необходимо консультироваться у «старших товарищей», что является хорошей практикой. Услышав эти слова, соискатели, в основном, воспринимали их как стандартный совет и не уделяли им внимания, подумав, что у «старших товарищей» не найдется свободного времени.

Во время написания своей докторской диссертации я столкнулся с трудностями математического моделирования и прислушался к советам Александра Львовича – пришел к нему и рассказал суть проблемы. Как истинный Учитель, он помог мне и в дальнейшем проявил интерес к моей теме на высоком научном уровне, что подтвердилось успешной досрочной защитой моей докторской диссертации.

Благодарен, что мне посчастливилось, хоть и немного, но плодотворно поработать с таким великим Ученым как Григорьев А. Л. Именно он заложил фундамент исследования колебательных процессов в транспортном средстве при перевозке жидких грузов. Знания, которые передал мне Александр Львович, – бесценны и я с гордостью буду их развивать уже со своими учениками!

Кожушко Андрей Павлович, доктор технических наук, доцент кафедры автомобиле- и тракторостроения НТУ «ХПИ»

Мое знакомство с Александром Львовичем состоялась осенью 2013 года в Харьковском авиационном институте, где проходила защита диссертации моего коллеги. Тогда в очень краткой форме нам удалось обсудить некоторые вопросы моих научных исследований в области ракетно-космической техники. Его привлекало в ней не только разнообразие задач, относящихся к самым различным разделам технических наук, но и, прежде всего, их практическая важность. Наше общение продолжалось почти 7 лет до его неожиданной и нелепой смерти. Нелепой потому, что в это время и по возрасту, и по достигнутым результатам он находился на вершине своей творческой деятельности.

Александр Львович обладал глубокими знаниями в различных областях науки и техники – теоретической механике, сопротивлении материалов, теории колебаний, теории автоматического регулирования, гидрогазодинамики, термодинамики, теории теплообмена, квантовой физики, был крупным специалистом в разных разделах математики. Виртуозное владение компьютером, глубокие знания вычислительной техники и незаурядные навыки программирования позволяли ему заниматься математическим моделированием на высоком научном уровне и создавать изящные алгоритмы и оптимальные программы расчета. Все перечисленное было мощным инструментом в его научных и технических исследованиях. Используя его, он с энтузиазмом брался за каждую новую задачу, к какой бы области техники она не относилась.

Александр Львович принадлежал к той категории ученых, которые используют свои знания, главным образом, для разработки новых подходов и новых методов исследования. При этом он проявлял поразительную работоспособность, научную интуицию и завидное упорство для достижения результатов. Он всегда утверждал, что только экспериментальное подтверждение теоретических результатов является основой для уверенного продвижения в область новых знаний. Этим принципом он всегда руководствовался сам и требовал того же от своих учеников.

Все наши совместные исследования требовали проведения большого объема расчетов и экспериментов. Александр Львович считал, что в каждом исследовании и в каждой статье обязательно должен присутствовать

новый научный результат, иначе они не имеют смысла. При этом сопоставление и хорошая сходимость результатов расчета и эксперимента были обязательным требованием и неотъемлемой частью каждой работы.

Одним из примеров творческого подхода и незаурядных идей Александра Львовича являются работы, связанные с расчетом термодинамических параметров реальных газов, в результате которых было получено простое и удобное в использовании универсальное уравнение состояния реального газа. Решение этой задачи потребовало нескольких месяцев совместной кропотливой работы. Как всякий настоящий ученый, он старался, где только это было возможным, получать результаты в удобном для практического применения виде, что иногда требовало титанических усилий и немалых затрат времени.

За время совместной творческой работы и частого общения мне довелось узнать Александра Львовича с разных сторон. В наших разговорах он никогда не давал негативной оценки кому-либо. В людях особенно ценил профессионализм, эрудицию и трудолюбие. С уважением отзывался о друзьях, коллегах и учениках, с особой теплотой рассказывал о своем учителе профессоре А. А. Грунауэре.

Александр Львович всегда был очень гостеприимным человеком. Невозможно забыть те теплые встречи с ним в дни моих редких визитов в Харьков. Наши прогулки по улицам Харькова, по сути, превращались в познавательные экскурсии, сопровождаемые его увлекательными рассказами об истории родного ему города.

Я благодарен судьбе, что мне представилась возможность познакомиться и несколько лет работать в тесном творческом сотрудничестве с этим замечательным человеком, учиться у него, совместно накапливать новые знания и добывать новые научные результаты.

*Шевченко Сергей Андреевич,
кандидат технических наук, коллега по науке, г. Днепро*

Меня удивляло разнообразие научных вопросов из различных дисциплин (гидродинамика и газодинамика, механика сплошных сред и механика деформируемого твёрдого тела и даже электротехника), которыми занимался этот, безусловно, очень талантливый человек. Особый интерес у него вызывало современное математическое моделирование, а также задачи оптимизации и управления (аудиторию 315 ГАК ХПИ, в которой долгие годы проработал Александр Львович он в шутку и называл «ДОМ МОДЕЛЕЙ»). Широчайший круг его научных интересов включал автомобилестроение и двигателестроение, общие вопросы машиностроения и даже сельскохозяйственная техника, и конечно отдельно выделялась ракетная техника. Благодаря его великолепному образованию все задачи, за которые он брался, решались на высочайшем уровне.

Считаю, что он был одним из самых добросовестных и интеллектуальных оппонентов, а также рецензентом статей и монографий. Его влияние качественно улучшило содержание многих рецензируемых им работ. Его рецензия – это своеобразный «знак качества» научной работы.

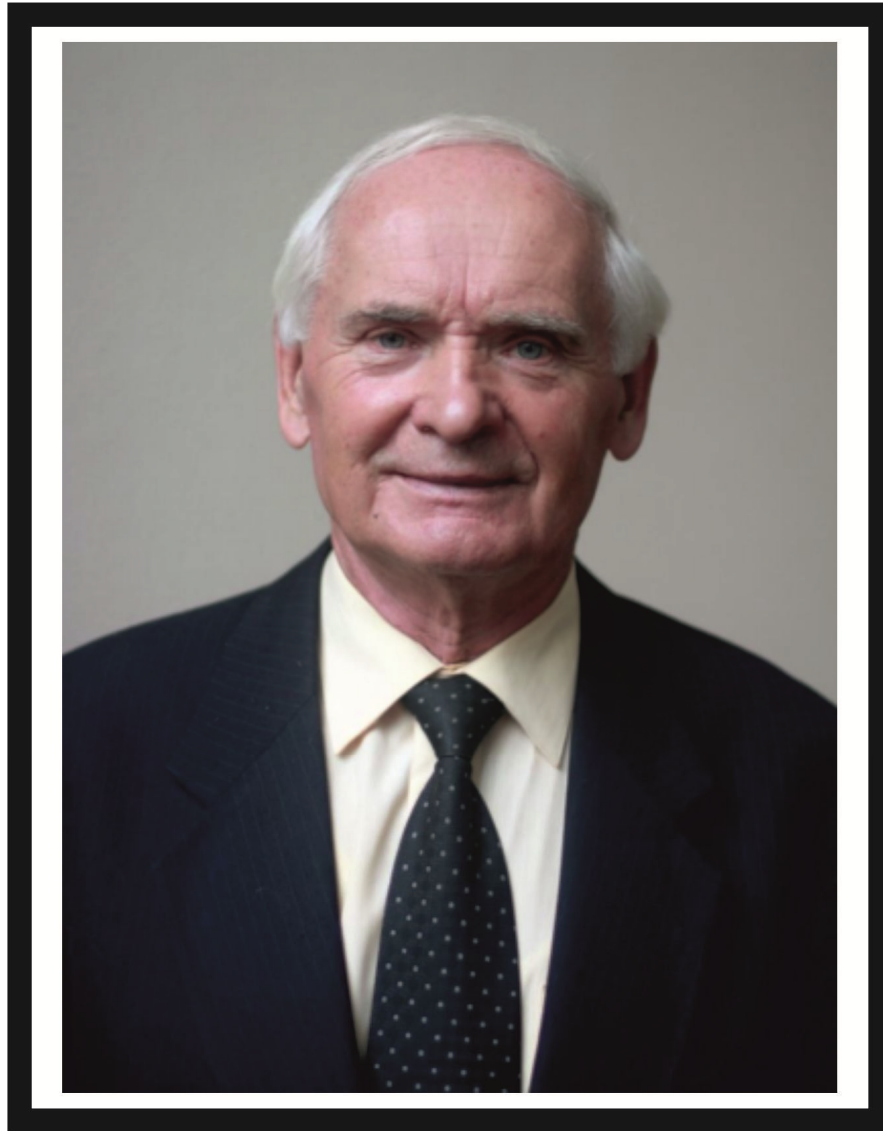
Как профессор кафедры высшей математики, не могу не отметить замечательные педагогические способности Александра Львовича. Его очень любили и уважали студенты, которым он открывал мир высшей математики. Он был автором ряда превосходных учебников по высшей математике для «классического инженерного образования», как он написал на одном из них.

Горечь утраты сочетается с гордостью за такого человека, о котором можно сказать, что к его голове дотронулась «длань Божья» и сделала её такой умной и талантливой.

Мы преисполнены гордостью, что такие крупные учёные были «рождены» и сформированы в Харьковской научной школе, а именно, в Харьковском государственном университете и Харьковском политехническом институте!

*Янютин Евгений Григорьевич, доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики, НТУ «ХПИ»*





Ольшанський Василь Павлович (1944 – 2021)

Пам'яті Василя Павловича Ольшанського

9 листопада 2021 року пішов з життя видатний науковець, доктор фізико-математичних наук, професор Ольшанський Василь Павлович.

Упродовж своєї трудової діяльності Василь Павлович працював в декількох вищих навчальних закладах. Це знайшло відбиток в різних наукових напрямках з якими він мав справу.

Василь Павлович народився 3 липня 1944 року в с. Голінка Роменського району Сумської області в сім'ї колгоспника. Дитинство та юнацькі роки пройшли на Полтавщині у Лохвицькому районі, де він у 1961 році із золотою медаллю закінчив середню школу. Вищу освіту здобув у Харківському політехнічному інституті, де у 1967 р. з відзнакою закінчив інженерно-фізичний факультет і отримав диплом інженера-механіка за спеціальністю динаміка і міцність машин. Подальше навчання продовжував у аспірантурі під керівництвом відомого вченого у галузі механіки академіка АН УРСР Філіпова А. П. Підсумком навчання став захист кандидатської дисертації у 1971 р.

Основна творча наукова діяльність Василя Павловича припала на роки роботи у Харківському політехнічному інституті, де він пройшов трудовий шлях від старшого викладача до професора. За результатами захисту дисертації у Казанському університеті у 1990 р. він здобув ступінь доктора фізико-математичних наук. Атестат професора по кафедрі вищої математики отримав у 1992 р. Понад 9 років очолював створену власноруч кафедру фундаментальних дисциплін та прикладної механіки в Академії цивільного захисту України. З 2005 р. Василь Павлович працював на посаді професора кафедри теоретичної механіки та деталей машин Харківського націо-

нального технічного університету сільського господарства ім. П. Василенка.

За роки плідної науково-педагогічної діяльності Василь Павлович самостійно та у співавторстві опублікував понад 700 наукових статей (з них понад 50 опубліковано за кордоном). Серед них 10 підручників з грифами відповідних міністерств та 23 монографії.

Характерною рисою діяльності Василя Павловича було надзвичайно широке коло наукових інтересів, серед яких можна відзначити: математичне моделювання коливань механічних систем, що почалось ще в аспірантські роки, механіка композитних матеріалів, моделювання температурних полів при самонагріванні рослинної сировини у силосах з ідентифікацією осередків самозігрівання, динаміка вібро-сепарованих зернових сумішей з використанням гідродинамічних моделей руху, дослідження особливостей напружено-деформованого стану локально навантажених оболонок (його докторська дисертація), балістика матеріальної точки у середовищі з опором, динаміка розпилених вогнегасних рідин, динаміка пожежних гідравлічних струментів та ін.

Василь Павлович опікувався входженням в науку талановитої молоді: під його керівництвом було підготовлено 2 докторських та 7 кандидатських дисертацій. Постійно надавав консультації молодим вченим та аспірантам з питань дослідження та математичного моделювання технічних процесів.

Зі спогадів колег з ХНТУСГ ім. П. Василенка (нині ДБТУ):

«Професор Ольшанський Василь Павлович працював в Харківському національному технічному університеті ім. Петра Василенка з вересня 2004 року на посаді професора кафедри фізики і теоретичної механіки.

З приходом Василя Павловича на кафедру значно посилилась її наукова діяльність. Він активно продовжив займатись науковою тематикою, яка стосується прогнозування самонагрівання рослинної сировини, а також захисних дій з попередження цього процесу. Ця тематика широко перекликається з науковими тематиками інституту «Переробних і харчових виробництв» і успішно втілюється в навчальний процес.

Одразу після його приходу на кафедру вийшла монографія «Приближенные методы расчета гидравлических пожарных струй», а через декілька років – «Балістика крапель, які випаровуються при польоті». Ці роботи стали квінтесенцією теоретичних робіт про рух точки та суцільного середовища в просторі, з урахуванням опору середовища, ефекту «закручування» гідравлічних струменів, зміни маси частинки при її русі та інше.

Василь Павлович не втрачав науковий інтерес і до питань, якими він займався раніше – розрахунку оболонок, що є продовженням роботи, початої ще при підготовці до написання докторської дисертації «Розробка методів розрахунку оболонок на дію локалізованих навантажень», а також дослідження осциляторів. Ці питання ніколи не зникали з його наукового об'єкту та мали сталий інтерес. Про це, крім чисельних статей, свідчать монографії, що виходили протягом його роботи на кафедрі: «Колебания стержней и пластин при механическом ударе», «Динаміка дисипативних осциляторів» та інші.

Зацікавленість новими науковими ідеями, наполегливість у пошуках розв'язків задач привели Василя Павловича до дослідження питань сепарації зерна, що на той час була провідною тематикою як на кафедрі так і в університеті. Наслідком цього стала безліч наукових праць, що призвело до появи низки монографій у співавторстві з вченими ХНТУСГ: «Гидродинамика сепарирования зерна», «Виброрешетная сепарация зерновых смесей», «Колебания зерновых потоков на виброрешетах», «Динамика виброцентробежной зерноочистки», «Континуальні моделі зернопотоків по виброрешетах», «Теорія сепарування зерна» та інших. Отримавши такий величезний досвід у питаннях сепарації зерна, він увійшов до складу вчених університету, що вибороли право на виконання науково-дослідної роботи за державним замовленням «Продовольчо-зернова безпека зі створенням екологічно безпечних, ресурсозберігаючих, енергоощадних механізованих технологій збереження і обробки врожаю і одержання високоякісних насіннєвих матеріалів», а потім і став її керівником. Мав досвід міжнародної праці, був співвиконавцем Гранду Сороса в 1990 – 1991 рр. «Розрахунок оболонок» у співпраці з Московським авіаційним інститутом.

Володіючи розвиненим математичним апаратом, професор Ольшанський В. П. присвятив багато робіт виведенню наближених формул обчислення, та застосування спеціальних функцій для спрощення розрахунків. Велика кількість його робіт присвячена отриманню спрощених аналітичних розв'язків задач, що раніше, як правило, розв'язувались чисельно. Треба зазначити застосовані ним з цією метою функції Ламберта, ВБК-метод, Atetb функції.

Користуючись великим науковим авторитетом не тільки у межах університету, а також і в Україні, професор Ольшанський В. П. багато разів виконував обов'язки наукового опонента, голови Державної екзаменаційної комісії, був членом редколегій наукових журналів як нашого університету, так і наукових журналів інших організацій, входив до спецради з захисту докторських та кандидатських дисертацій.

Постійний науковий пошук був притаманний Василю Павловичу. В останні роки життя він одночасно досліджував питання нелінійних коливань, сепарації зерна та нестационарних термополів. Мав великий наробок з цих питань і прагнення його узагальнення. З останніх його робіт це монографії: «Нелінійні коливання дисипативних осциляторів», «Динаміка імпульсно навантажених нелінійних осциляторів». З колективом кафедри обговорювались плани з дослідження автоколивань, а також створення підручника за профілем університету «Землеробська механіка в прикладах та задачах», що дало б можливість наглядного застосування механіки в конкретних прикладах.

Праця Ольшанського В. П. відмічена чисельними грамотами та подяками, серед яких є й урядові. В 2013 році його було обрано академіком Академії наук Вищої освіти України.

Василь Павлович був відкритою, широкою та дуже порядною людиною, яка завжди підказувала вірний напрям, тому колеги часто звертались до нього за допомогою. Смерть Василя Павловича – непоправна втрата. Ніякі слова не можуть передати ту глибину нашого смутку. Світла пам'ять про Василя Павловича назавжди збережеться у наших серцях.”

Загалом треба відзначити, Василь Павлович був на сто відсотків відданий роботі, займався улюбленою та важливою справою. Він поважав традиції землі на якій народився та любив Україну.

Окремої уваги заслуговують відношення Василя Павловича зі студентами. Вони його щиро любили. Василь Павлович завжди будував рівні відносини, які ґрунтувались на взаємній повазі та розумінні. Він намагався викликати інтерес та зацікавленість до дисциплін, які викладав.

Підсумовуючи, важко передати біль від втрати. Сумуємо у зв'язку з кончиною Василя Павловича. Вічна та світла пам'ять.

Колеги та рідні



ЗМІСТ

<i>Bosin M. Y., Gomozov Y. P., Drygach T. G.</i> Mathematical model of the development of a single twin layer in metal crystals	3
<i>Александров Е. Е., Ванин В. А., Александрова Т. Е., Ванин Б. В.</i> Параметрический синтез стабилизатора подвижного объекта.....	10
<i>Воропай А. В., Егоров П. А.</i> Выделение упругой, вязкой и инерционной составляющих из полной реакции дополнительной опоры присоединенной к прямоугольной пластине	20
<i>Галуза О. А., Костюк О. В., Савченко А. О., Бойко А. А.</i> Кількісне порівняння ефективності критеріїв колірної близькості об'єктів з відомими спектрами	29
<i>Голоскубова Н. С., Міхлін Ю. В.</i> Дослідження стійкості нормальних форм коливань в деяких суттєво нелінійних системах	36
<i>Курносенко Д. В., Савчук В. П., Тулученко Г. Я.</i> Умови монотонної апроксимації кривих Рамсея та їх модифікацій.....	45
<i>Меньшиков О. В., Меньшиков В. О., Кладова О. Ю.</i> Нелінійна задача механіки руйнування для біматеріала з міжфазною тріщиною під дією хвилі зсуву	55
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Динамічний ефект несиметрії силової характеристики дисипативних осциляторів.....	65
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Про апроксимації періодичних Атев-функцій.....	76
<i>Першина Ю. І.</i> Відновлення розривної функції двох змінних різними інформаційними операторами з використанням трикутних елементів	84
<i>Пріщенко О. П., Черемська Н. В.</i> Реконструкція гаусовських випадкових функцій за даними спектру.....	97
<i>Софронова М. С.</i> Метод усунення аномальних вимірювань при аналізі бази багатовимірних даних під час розв'язання задачі прийняття рішень.....	104
<i>Пам'яті видатних вчених</i>	
<i>Памяти Григорьева А. Л.</i>	113
<i>Пам'яті Ольшанського В. П.</i>	119

CONTENTS

Bosin M. Y., Gomozov Y. P., Drygach T. G. Mathematical model of the development of a single twin layer in metal crystals s	3
Aleksandrov YE. YE., Vanin V. A., Aleksandrova T. YE., Vanin B. V. Parametric synthesis of a moving object stabilizer	10
Voropay A. V., Yegorov P. A. Extraction of elastic, viscous and inertial components from the total reaction of an additional support attached to a rectangular plate	20
Galuz A. A., Kostiuk O. V., Savchenko A. A., Boiko A. A. Quantitative comparison of the efficiency of the color proximity criteria of objects with known spectra	29
Goloskubova N. S., Mikhlin YU. V. Investigation of the normal vibration modes stability in some essentially nonlinear systems	36
Kurnosenko D. V., Savchuk V. P., Tuluchenko H. YA. Conditions of monotone approximation of Ramsey curves and their modifications	45
Menshykov O. V., Menshykov V. O., Kladova O. YU. Nonlinear problem of fracture mechanics of an interface crack subjected to shear wave	55
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Dissipative oscillators' power characteristic non-symmetry dynamic effect	65
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. On approximation of periodic Ateb-functions	76
Pershyna I. I. Reconstruction of the two variables discontinuous function by different information operators using triangular elements	84
Prishchenko O. P., Cheremskaya N. V. Reconstruction of Gaussian random functions from spectrum data	97
Sofronova M. S. Method for eliminating anomalous measurements in analysis of the multi-dimensional database in solving the decision-making problem	104
<i>In memory of outstanding scientists</i>	
<i>In memory of Grigoriev A. L.</i>	113
<i>In memory of Olshanskiy V. P.</i>	119

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 1-2 (2) 2021

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 30.11.2021 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 40551. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.