



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХПІ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 1'2020

**Харків
2020**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 1 ' 2020

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 1 ' 2020

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

**Харків
НТУ «ХПІ», 2020**

**Kharkiv
NTU "KhPI", 2020**

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: 36. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2020. — № 1. — 116 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ № 24552-14462Р від 15 липня 2020 року.

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров Є. С., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропай О. В., д-р техн. наук, доц., ХНАДУ, Україна;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Григор'єв О. Л., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Литвин О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Меньшиков О. В., д-р фіз.-мат. наук, Абердинський університет, Великобританія;

Ніколаєв О. Г., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

НАУ ім. Жуковського «ХАІ», Україна;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Ольшанський В. П., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНТУСГ ім. Василенка, Україна;

Пацегон М. Ф., д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ ім. Каразіна, Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірнін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна;

Северин В. П., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук., НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 7 від 29 грудня 2020 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropay A., Dr. Tech. Sci., Docent, KhNAHU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Grigoriev O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Lytvyn O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., UEPA, Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Menshykov O., Dr. Phys.-Math. Sci., University of Aberdeen, UK;

Nikolaev O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NAU «KhAI»;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Ped. Sci., PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Ol'shanskii V., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., KhNTUA, Ukraine;

Patsegon N., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Karazin KhNU;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Docent, NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine;

Severin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

В. А. ВАНІН, М. М. КРУГОЛ, О. П. ЛАЗУРЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОГРУПОВОГО ГАЗОГІДРАВЛІЧНОГО ТРАКТУ ДОПОМІЖНИХ МЕХАНІЗМІВ ПАРОВОГО КОТЛА ТЕПЛОВОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СТАНЦІЇ

В роботі запропоновано алгебраїчні математичні моделі відцентрових механізмів, що працюють в газогідравлічному тракті парового енергетичного котла. Такі моделі будуються на основі апроксимації залежності напору від продуктивності, величини обертів лопаток механізмів, кута установки направляючого апарату по експериментальним або чисельним даним методом найменших квадратів. Розглянуто різні схеми сумісної роботи відцентрових механізмів в газогідравлічних трактах теплових електричних станцій, для яких пропонуються показники ефективності при різних способах їх регулювання. Рівняння стану розгалуженого газогідравлічного тракту в задачі аналізу його ефективності, при роботі на мережу, отримано із використанням аналогів законів Кірхгофа. Приведено алгоритми для реалізації чисельних методів в задачі знаходження оптимальних параметрів керування групою відцентрових механізмів. Досліджено особливості математичних моделей груп із паралельним, послідовним та змішаним включенням допоміжних механізмів з різними напірними характеристиками в систему забезпечення роботи енергетичного котла. Поставлено та вирішено задачу знаходження оптимальних параметрів керування механізмами при різних паропроductивностях котла. Показано, що для живильного насоса найбільш ефективним способом регулювання є індивідуальний частотний привід, а для тяго-дутьових механізмів – групове частотне регулювання. Для типового літнього місяця, з відомим графіком споживання електричної енергії на власні потреби, показано, що впровадження енергоефективних способів регулювання продуктивності відцентрових механізмів станції дає економію електричної енергії в системі на рівні 10,69 %.

Ключові слова: теплова електрична станція, групове керування, гідравлічні системи, відцентрові механізми, частотно-регульований привід, енергоефективність.

В. А. ВАНІН, Н. М. КРУГОЛ, А. П. ЛАЗУРЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГРУППОВОГО ГАЗОГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРАКТА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРОВОГО КОТЛА ТЕПЛОВОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ

В работе предложены алгебраические математические модели центробежных механизмов, которые работают в газогидравлическом тракте парового энергетического котла. Такие модели строятся на основании аппроксимации зависимости напора от производительности, скорости вращения лопаток механизма и угла направляющего аппарата по экспериментальным или численным данным методом наименьших квадратов. Рассмотрены разные схемы совместной работы центробежных механизмов в газогидравлических трактах тепловых электрических станций, для которых предлагаются показатели эффективности при разных способах их регулирования. Уравнения состояния разветвленного газогидравлического тракта в задаче анализа его эффективности при работе на сеть получено с использованием законов Кирхгофа. Приведены алгоритмы для реализации численных методов в задаче нахождения оптимальных параметров управления группой центробежных механизмов. Исследованы особенности математических моделей групп с параллельным, последовательным и смешанным включением вспомогательных механизмов с разными напорными характеристиками в системе обеспечения работы энергетического котла. Поставлена и решена задача нахождения оптимальных параметров управления механизмами группы при разных паропроизводительностях котла. Показано, что для питательного насоса наиболее эффективным способом регулирования есть индивидуальный частотный привод, а для тяго-дутьевых механизмов – групповое частотное регулирование. Для типового летнего месяца с известным графиком потребления электрической энергии на собственные нужды теплоэлектроцентрали показано, что внедрение энергоэффективных способов регулирования производительности центробежных механизмов электростанции дает экономию электрической энергии в системе на уровне 10,69 %.

Ключевые слова: тепловая электрическая станция, групповое управление, гидравлические системы, центробежные механизмы, частотно-регулируемый привод, энергоэффективность.

V. A. VANIN, M. M. KRUGOL, A. P. LASURENKO

MATHEMATICAL MODELLING OF ONE-GROUP GAS-HYDRAULIC CIRCUIT OF THERMAL POWER PLANT STEAM BOILER AUXILIARIES

The paper presents algebraic mathematical models of centrifugal mechanisms that operate in the power boiler gas-hydraulic circuit. The models have been built by means of head-flow curve approximation. The head-flow curve depends on the centrifugal mechanism blade rotating speed and guide vane angle. The least squares method has been applied for centrifugal mechanism head-curve approximation on the basis of experimental or numerical data. Different configurations for the connections of centrifugal mechanisms in the power boiler gas-hydraulic circuit have been considered, relationships for their performance assessment obtained, and efficiency factors for various methods of their capacity control introduced. The state equation for a complex gas-hydraulic network in the problem of its efficiency analysis has been obtained with application of Kirchhoff laws. Numerical algorithms have been developed to solve group control parameter optimization problems for the considered connections of centrifugal mechanisms. Features of mathematical models for groups of series-, parallel- and complex-connected centrifugal mechanisms with different head curves in the power boiler maintenance system have been specified. An optimal group control problem for a group of centrifugal mechanisms has been formulated and solved under various power boiler modes. For the feed pumps, individual frequency control proves to be the most effective method, while for the boiler draft mechanisms group frequency regulation turns out to be the most efficient. In a typical summer month, implementation of energy-efficient centrifugal mechanism capacity regulation method in a Thermal Power Plant is shown to result in auxiliary electricity consumption reduction by 10.96 % as compared with available actual data.

Key words: thermal power plant, group control, hydraulic systems, centrifugal mechanisms, variable frequency drive, energy efficiency.

Вступ. В світі до 60 % генерації електричної енергії припадає на теплові електричні станції. Для України цей показник становить близько 40 %, а тому досить важливим є підвищення ефективності роботи основного та допоміжного устаткування *теплоелектростанцій (ТЕС)*.

В технологічному процесі вироблення електричної енергії задіяні *відцентрові механізми (ВМ)*, що забезпечують роботу основних агрегатів станції – котла та турбогенератора. Основними допоміжними механізмами га-

зогідравлічного тракту котла є живильний насос, дуттьові вентилятори та димососи. Живильні насоси використовуються для подачі води до барабану котла. Дуттьові вентилятори подають повітря в топку котла з метою стійкого горіння факелу газу. Димососи використовуються для видалення продуктів горіння з топки котла. Дані механізми утворюють групу відцентрових механізмів газогідравлічного тракту котла з близькими характеристиками та режимами роботи, а їх режим роботи залежить від режиму роботи парового енергетичного котла.

Режими роботи ТЕС призводять до роботи парового енергетичного котла в неномінальних режимах, а часто при мінімально-допустимих навантаженнях. Це зумовлює необхідність глибокого регулювання продуктивності групи допоміжних відцентрових механізмів ТЕС. Для такої групи можливе використання групового керування продуктивності її механізмів за допомогою зміни групової частоти живильної напруги. Дорегулювання відбувається класичними способами – дроселюванням, байпасуванням та зміною кута відкриття направляючого апарату механізму [1]. Основною перевагою впровадження такого способу регулювання є значно менші капіталоукладання в порівнянні зі впровадженням індивідуального частотного приводу.

Дослідження *особливостей групового регулювання*, що забезпечує ефективну роботу парового енергетичного котла, є актуальною задачею. Виникає потреба в побудові відповідних математичних моделей, які дозволять отримати якісні та кількісні показники такого способу регулювання на українських ТЕС.

Аналіз останніх досліджень. Технологічна схема ТЕС має свої особливості, що полягають у великій кількості складних гідравлічних мереж та допоміжних відцентрових механізмів – насосів, компресорів та вентиляторів. Підтримка необхідних параметрів в мережі досягається різними схемами з'єднання відцентрових механізмів [2].

Для оцінки ефективності роботи механізмів власних потреб необхідно побудувати якісні математичні моделі роботи відцентрових механізмів на мережу. Авторами досліджується можливість впровадження групового регулювання механізмами власних потреб ТЕС [3]. Аналіз літературних джерел свідчить, що групове регулювання часто використовується у різних галузях промисловості [4 – 6]. В енергетичній галузі такий спосіб регулювання не є досить поширеним, а тому дослідження можливості його впровадження є актуальною задачею.

Для оцінки ефективності різних способів регулювання продуктивності необхідно розробити *математичну модель* ВМ. Вихідними даними для такої моделі можуть слугувати паспортні дані устаткування та режими його роботи. На сьогодні, запропонована велика кількість математичних моделей відцентрових механізмів, які ґрунтуються на різних принципах. Так, часто пропонується використовувати закони подібності відцентрових машин, для перерахунку їх характеристик на різних навантаженнях [7].

Найпростіші математичні моделі відцентрових механізмів, які можна використовувати для аналізу ефективності їх роботи, базуються на *апроксимації паспортних характеристик* [8 – 10]. Лінійна апроксимація [9] має досить малу зону високої точності математичної моделі. Більш поширені моделі отримані із використанням методу найменших квадратів для побудови характеристик відцентрових механізмів [1]. Математичні моделі більш високої якості базуються на *законах термодинаміки* [11]. Задача знаходження управління часто включає і *метод розбиття механізмів на групи* по апріорі відомим прикметам, або визначенням його в складі параметрів управління.

Побудова математичних моделей роботи складних гідравлічних мереж проводиться на основі *законів Кірхгофа* відносно контурних напорів та вузлових продуктивностей (витрат) у відповідності до електро-гідравлічної аналогії [12]. Тоді робота гідравлічної мережі забезпечення на мережу навантаження описується *системами нелінійних рівнянь* відносно продуктивностей в контурах. Більш прості гідравлічні мережі, що складаються з одного відцентрового механізму та мережі навантаження, можна описати *рівнянням стану* [3].

Постановка задачі. Нехай стан кожного з механізмів тракту котла описується рівнянням напірної характеристики, показником ефективності (ККД)

$$\begin{cases} H = H_i(Q_i, \bar{U}_i); \\ \eta = \eta_i(Q_i, \bar{U}_i), \end{cases} \quad (1)$$

де $i = 1 \dots N$; N – кількість механізмів; Q_i – продуктивність механізму; $\bar{U}_i$ – вектор параметрів керування (наприклад, складається з кута відкриття направляючого апарату та частоти живильної напруги).

Важливим показником роботи механізму є величина потужності, яку він споживає:

$$P = P_i(Q_i, H_i, \eta_i).$$

При аналізі роботи мережі із багатьма відцентровими механізмами доцільно їх об'єднати в групи (чи групу). Після чого будується еквівалентна напірна характеристика та функція ефективності, що залежить від графу з'єднання механізмів у тракті, яка матиме вигляд:

$$\begin{cases} H = H_{\text{екв}}(\bar{Q}, \bar{U}); \\ \eta = \eta_{\text{екв}}(\bar{Q}, \bar{U}), \end{cases} \quad (2)$$

де $\bar{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ – вектор продуктивностей механізмів; $\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_N)$ – вектор параметрів керу-

вання механізмами.

Напишемо характеристику мережі навантаження у вигляді:

$$H = H_c(Q, \xi),$$

де ξ – коефіцієнт опору трубопроводу.

Багатогрупове з'єднання в тракці передбачає попереднє розбиття множини механізмів на групи, для кожної з яких визначається свій набір характеристик (2).

Тоді роботу механізмів на мережу можна описати рівнянням:

$$H_{екв}(\vec{Q}, \vec{U}) = H_c(Q, \xi). \quad (3)$$

Сукупність параметрів керування повинна задовольняти технічним обмеженням, якими можуть бути діапазони регулювання частоти живильної напруги, кута відкриття направляючого апарату

$$F(\vec{U}) \leq 0. \quad (4)$$

Додаткові умови за продуктивностями або напорами залежать від способів з'єднання механізмів і визначаються при побудові рівняння стану системи.

Складність технологічної схеми ТЕС призводить до використання складних, розгалужених гідравлічних мереж (трактів) з різними схемами вмикання відцентрових механізмів (рис. 1). Так, прикладом послідовного з'єднання відцентрових механізмів можуть слугувати насосні станції першого та другого підйому (рис. 1, а). Паралельне з'єднання відцентрових механізмів використовують з метою збільшення результуючої продуктивності, або в схемах з резервуванням устаткування (рис. 1, б). Прикладом такої конфігурації можуть бути джутові вентилятори, димососи, циркуляційні або насоси конденсаторів. Більш складні – змішані схеми з'єднання відцентрових механізмів – використовують у гідравлічних мережах цеху водопідготовки або паливоприготування (рис. 1, в, г).

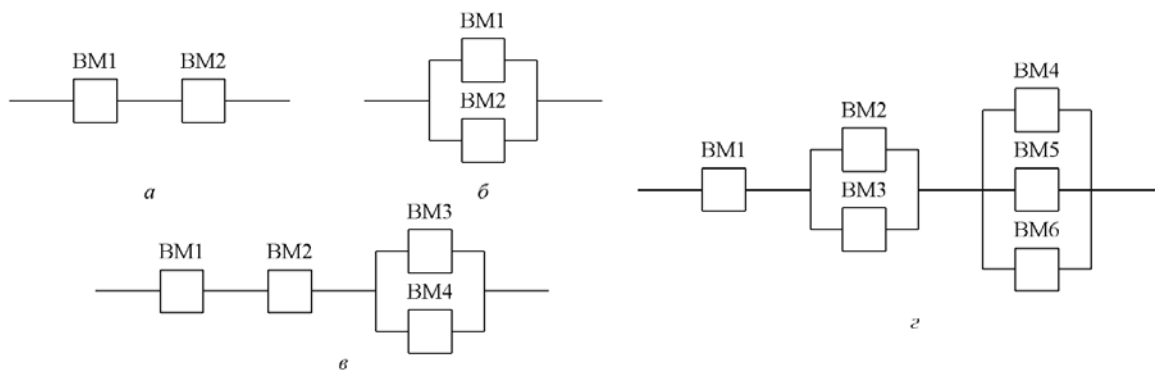


Рис. 1 – Схеми з'єднання відцентрових механізмів в групі:
а – послідовне; б – паралельне; в – змішане; г – складна схема.

Розглянемо різні способи з'єднання механізмів гідравлічних мережах ТЕС, й наведемо рівняння еквівалентного стану таких схем. При *послідовному* з'єднанні (рис. 1, а) двох відцентрових механізмів маємо наступні співвідношення:

$$H = H_{екв}(Q_1, Q_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2) = H_1(Q_1, \vec{U}_1) + H_2(Q_2, \vec{U}_2);$$

$$Q_1 = Q_2 = Q;$$

$$\eta = \eta_1(Q_1, \vec{U}_1); \quad \eta = \eta_2(Q_2, \vec{U}_2).$$

Із задачі роботи на мережу

$$H_{екв}(Q_1, Q_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2) = H_c(Q, \xi),$$

знайдемо

$$Q = Q(\vec{U}_1, \vec{U}_2). \quad (5)$$

Виразимо функцію якості у вигляді середньозваженого коефіцієнта корисної дії (ККД):

$$\eta_{екв1}(Q_1, Q_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2) = \frac{\eta_1(Q_1, \vec{U}_1)P_1(Q_1, \vec{U}_1) + \eta_2(Q_2, \vec{U}_2)P_2(Q_2, \vec{U}_2)}{P_1(Q_1, \vec{U}_1) + P_2(Q_2, \vec{U}_2)}.$$

Після підстановки (5) отримаємо функцію якості в залежності від керування:

$$\eta_{екв1} = \eta_{екв1}(\vec{U}_1, \vec{U}_2), \quad (6)$$

для якої формується задача пошуку ефективного керування $\vec{U} = (\vec{U}_1, \vec{U}_2)$, що задовольняє обмеженням (4), мак-

симізуючи функцію (6)

$$\max_{\bar{U} \in F(\bar{U}) \leq 0} \eta_{екв1}(\bar{U}). \quad (7)$$

При паралельному з'єднанні (рис. 1, б) маємо еквівалентну функцію стану:

$$H_{екв} = \begin{cases} H_1(Q_1, \bar{U}_1); \\ H_2(Q_2, \bar{U}_2), \end{cases}$$

а рівняння роботи механізмів на мережу має вигляд:

$$\begin{cases} H_1(Q_1, \bar{U}_1) = H_c(Q, \xi); \\ H_2(Q_2, \bar{U}_2) = H_c(Q, \xi); \\ Q_1 + Q_2 = Q. \end{cases} \quad (8)$$

Із (8) знайдемо

$$Q = Q_1(\bar{U}_1, \bar{U}_2); \quad Q = Q_2(\bar{U}_1, \bar{U}_2).$$

Скориставшись розв'язком, отримаємо функцію якості у вигляді:

$$\eta_{екв2}(Q_1, Q_2, \bar{U}_1, \bar{U}_2) = \frac{\eta_1(Q_1, \bar{U}_1)P_1(Q_1, \bar{U}_1) + \eta_2(Q_2, \bar{U}_2)P_2(Q_2, \bar{U}_2)}{P_1(Q_1, \bar{U}_1) + P_2(Q_2, \bar{U}_2)},$$

і задачу

$$\max_{\bar{U} \in F(\bar{U}) \leq 0} \eta_{екв2}(\bar{U}). \quad (9)$$

У випадку змішаного з'єднання (рис. 1, в) чотирьох механізмів з заданими напірними характеристиками та функціями якості для $N = 4$ маємо рівняння роботи на мережу:

$$\begin{cases} H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_2(Q_2, \bar{U}_2) + H_4(Q_4, \bar{U}_4) = H_c(Q, \xi); \\ H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_2(Q_2, \bar{U}_2) + H_3(Q_3, \bar{U}_3) = H_c(Q, \xi); \\ Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 + Q_4. \end{cases} \quad (10)$$

Розв'язавши рівняння (10), отримаємо:

$$Q = Q_i(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Для змішаного з'єднання чотирьох відцентрових механізмів функція якості матиме вигляд:

$$\eta_{екв3}(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4) = \frac{\sum_{i=1}^4 \eta_i(Q_i, \bar{U}_i)P_i(Q_i, \bar{U}_i)}{\sum_{i=1}^4 P_i(Q_i, \bar{U}_i)}.$$

Задача пошуку керування відцентровими механізмами при змішаному їх з'єднанні матиме вигляд:

$$\max_{\bar{U} \in F(\bar{U}) \leq 0} \eta_{екв3}(\bar{U}). \quad (11)$$

Для побудови рівняння стану групи відцентрових механізмів на мережу з більш складною розгалуженою схемою використовують закони Кірхгофа. Невідомими є витрати через гілки, по яким можна буде розрахувати витрати напорів. Число невідомих приймається за числом гілок схеми, що розглядається.

Число рівнянь по першому закону Кірхгофа:

$$m_I = m_g - 1,$$

де m_g – кількість вузлів складної гідравлічної схеми.

Число рівнянь по другому закону Кірхгофа:

$$m_{II} = m_g - m_e + 1,$$

де m_e – кількість гілок складної гідравлічної схеми.

Розглянемо складну гідравлічну мережу, представлену на рис. 1, г. Така схема підключень має 3 вузли та 6 гілок, а тому необхідно скласти систему з 6 рівнянь, два з яких на основі I закону Кірхгофа, та 4 на основі II закону Кірхгофа.

Система рівнянь, що описують роботу складної гідравлічної системи, матиме вигляд:

$$\begin{cases} H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_2(Q_2, \bar{U}_2) + H_4(Q_4, \bar{U}_4) = H_c(Q_1, \xi); \\ H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_2(Q_2, \bar{U}_2) + H_5(Q_5, \bar{U}_5) = H_c(Q_1, \xi); \\ H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_2(Q_2, \bar{U}_2) + H_6(Q_6, \bar{U}_6) = H_c(Q_1, \xi); \\ H_1(Q_1, \bar{U}_1) + H_3(Q_3, \bar{U}_3) + H_4(Q_4, \bar{U}_4) = H_c(Q_1, \xi); \\ Q_1 = Q_2 + Q_3; \\ Q_2 + Q_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6, \end{cases}$$

розв'язком якої буде

$$Q = Q_i(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4, \bar{U}_5, \bar{U}_6), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

а функція якості набуде вигляду:

$$\eta_{екв4}(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, \bar{U}_4, \bar{U}_5, \bar{U}_6) = \frac{\sum_{i=1}^6 \eta_i(Q_i, \bar{U}_i) P_i(Q_i, \bar{U}_i)}{\sum_{i=1}^6 P_i(Q_i, \bar{U}_i)}.$$

Задача пошуку керування відцентровими механізмами для складної гідравлічної мережі матиме вигляд:

$$\max_{\bar{U} \in F(\bar{U}) \leq 0} \eta_{екв4}(\bar{U}). \quad (12)$$

Визначення оптимальних параметрів керування. Група механізмів може складатися як з одного, так і з декількох відцентрових механізмів, а тому необхідно мати чіткий алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування даним механізмом. Для побудови такого алгоритму необхідно визначити співвідношення, які описують роботу відцентрових механізмів в мережі.

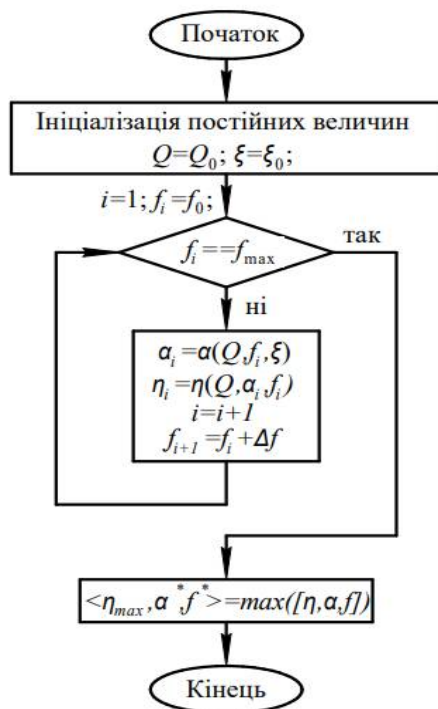


Рис. 2 – Алгоритм визначення оптимальних параметрів керування відцентровим механізмом.

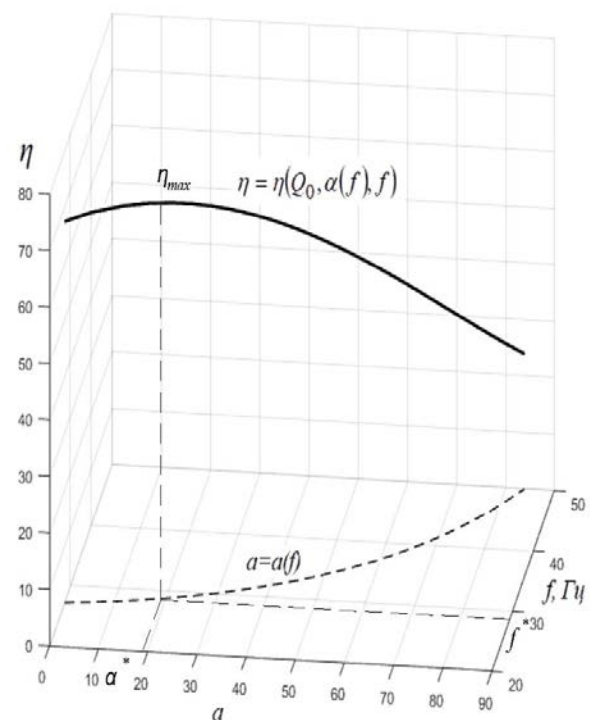


Рис. 3 – Приклад знаходження оптимальних параметрів керування дугтьовим вентилятором ВДН-17-3.

Дослідження задач оптимізації (7), (9), (11), (12) ґрунтується на переборі параметрів керування відцентровим механізмом, та визначенні такого набору α, f, ξ , при якому ККД механізму прийме максимальне значення. Алгоритм визначення оптимального ККД показано на рис. 2. Перебір відбувається за частотою живильної напруги f . Початковим значенням є мінімально допустима частота живильної напруги f , що допускає частотний перетворювач.

Будемо змінювати частоту живильної напруги в циклі з кроком Δf , поки значення частоти не досягне мак-

симально можливого. На кожному кроці в наслідок розв'язання рівняння (3) визначається кут відкриття направляючого апарату.

Після закінчення циклу розрахунків визначається трійка значень $\langle \eta_{\max}, \alpha^*, f^* \rangle$ – що визначає максимальне значення ККД та оптимальні параметри керування. На рис. 3 представлені графіки функції ККД механізму при заданій його продуктивності, та графік кута відкриття при різних значеннях частоти.

З рис. 3 видно, що для одного значення продуктивності, з якою працює відцентровий механізм, є чітка залежність між частотою живильної напруги та кутом відкриття направляючого апарату, а тому однозначно можна знайти одне значення максимального ККД.

На рис. 4 показаний алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування групою з двох паралельно працюючих відцентрових механізмів. Даний алгоритм побудований на основі перебору параметрів керування відцентровими механізмами з урахуванням умов паралельної їх роботи. Умовою паралельної роботи відцентрових механізмів є рівність їх напорів, при цьому загальна продуктивність механізмів є сумою їх продуктивностей [2].

На рис. 5 показаний алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування групою з двох послідовно працюючих відцентрових механізмів. Даний алгоритм побудований на основі перебору параметрів керування відцентровими механізмами з урахуванням умов послідовної їх роботи. Умовою послідовної роботи відцентрових механізмів є рівність їх продуктивностей, при цьому загальний напір, створений такою схемою з'єднання, є сумою напорів механізмів [2].

Математична модель функціонування групи відцентрових механізмів, що забезпечують роботу парового енергетичного котла. Характерним прикладом складної гідравлічної системи є водяний та газоповітряний тракти парового енергетичного котла, еквівалентна схема якого показана на рис. 6 [1, 13].

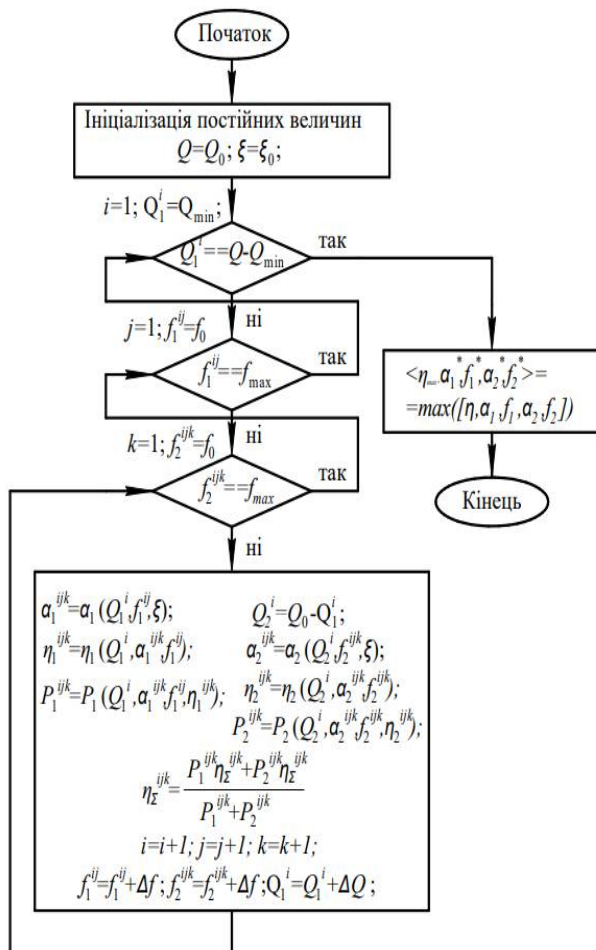


Рис. 4 – Алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування групою паралельно працюючих відцентрових механізмів.

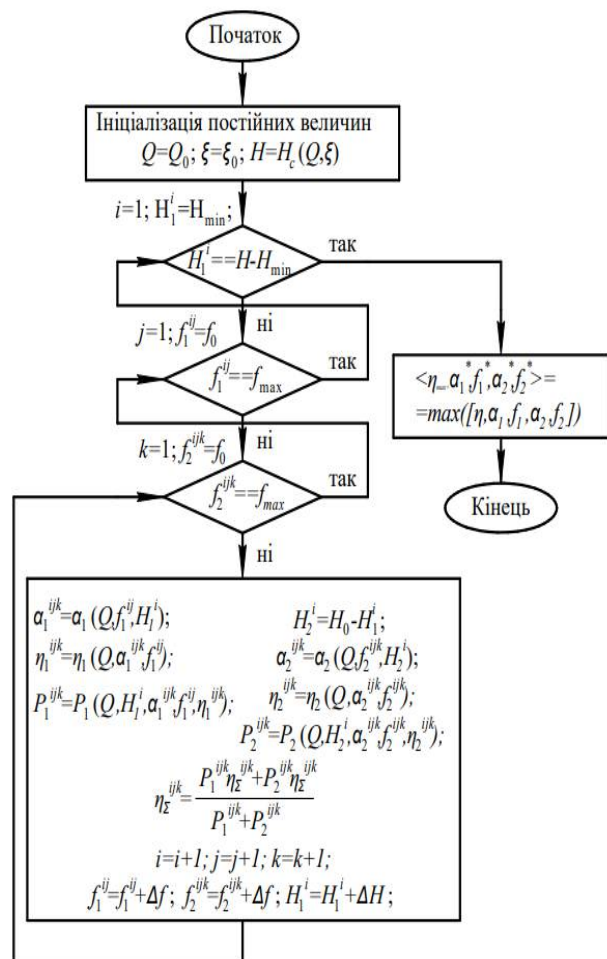


Рис. 5 – Алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування групою послідовно працюючих відцентрових механізмів.

Математична модель функціонування парового енергетичного котла описана у [1, 13] і має вигляд:

$$\begin{cases}
 Q_{\Gamma} = c_1 Q_K - c_2; \\
 Q_{ЖВ} = Q_K + Q_{ПР}; \\
 Q_5 = Q_{ЖВ}; \\
 Q_B = Q_{\Gamma} V_B^0 (\alpha_T - \Delta\alpha_T + \Delta\alpha_{ВП}) \frac{t_{хв} + 273}{273}; \\
 Q_B = Q_1 + Q_2; \\
 H_5(Q_5, f_5) = H_{сЖТ}(Q_5); \\
 H_{12}(Q_B, \vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{сВТ}(Q_B) - H_T; \\
 Q_{УГ} = Q_{\Gamma} (V_{УГ} + \Delta\alpha V_B^0) \frac{\vartheta_d + 273}{273}; \\
 H_{34}(Q_{УГ}, \vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{сГТ}(Q_{УГ}) + H_T; \\
 Q_{УГ} = Q_3 + Q_4,
 \end{cases} \quad (13)$$

де V_B^0 – теоретично необхідна для горіння кількість повітря, $\text{м}^3/\text{м}^3$; α_T – коефіцієнт надлишку повітря в топці котла; $\Delta\alpha_T$ – присоси повітря в топці котла та газоходах; $\Delta\alpha_{ВП}$ – відносні втрати повітря в пристрої його підігрівання; $t_{хв}$ – температура холодного повітря перед дуттьовим вентилятором, $^{\circ}\text{C}$; $V_{УГ}$ – об'єм продуктів згоряння 1 м^3 палива, $\text{м}^3/\text{м}^3$; $\Delta\alpha$ – присоси повітря в газоході та топці котла; ϑ_d – температура продуктів згоряння (газів) перед димососом, $^{\circ}\text{C}$; $H_{сВТ}(Q_B) = \xi_{ВТ} Q_B^2$ – напірна характеристика повітряного тракту; $H_{сГТ}(Q_{УГ}) = \xi_{ГТ} Q_{УГ}^2$ – напірна характеристика газового тракту; $H_{сЖТ}(Q_5) = \xi_{ЖТ} Q_5^2$ – напірна характеристика живильного тракту; H_T – розрідження в топці парового котла, Па; $\xi_{ВТ}$ – еквівалентний гідравлічний опір повітряного тракту; $\xi_{ГТ}$ – еквівалентний гідравлічний опір газового тракту; $\xi_{ЖТ}$ – еквівалентний гідравлічний опір живильного тракту.

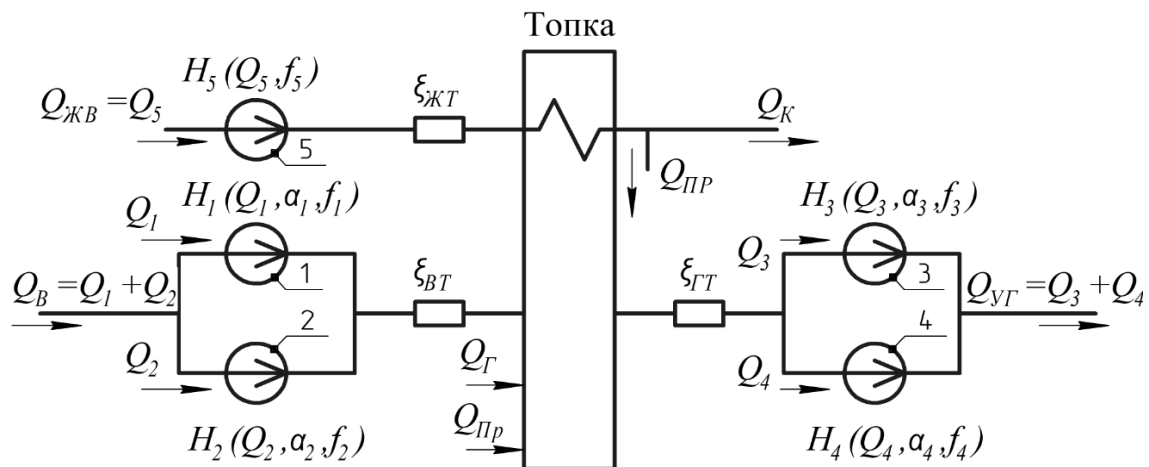


Рис. 6 – Структурна схема парового енергетичного котла MANN-120: 1, 2 – дуттьові вентилятори; 3, 4 – димососи; 5 – живильний насос; Q_B – необхідні витрати повітря для ефективного спалювання об'єму газу Q_{Γ} ;

$Q_{УГ}$ – витрати продуктів згоряння, які утворюються в наслідок процесу горіння палива та присосів повітря через нещільності в корпусі котла $Q_{ПР}$; $\xi_{ВТ}$, $\xi_{ГТ}$ – еквівалентні гідравлічні опори повітряної та газової частини тракту; Q_K – паропроductивність котла; $Q_{ПР}$ – витрати живильної води на продуквку; $Q_{ЖВ}$ – необхідні витрати живильної води; $\xi_{ЖТ}$ – еквівалентний гідравлічний опір живильного тракту; Q_i , де $i = 1 \dots 5$ – продуктивності ВМ.

Для розв'язання даної системи необхідно задати паропроductивність парового енергетичного котла – Q_K . Коефіцієнти $V_{ОВ}$, α_T , $\Delta\alpha_T$, $\Delta\alpha_{ВП}$, $t_{хв}$, $V_{УГ}$, $Q_{ПР}$, $\Delta\alpha$, ϑ_d , H_T , $\xi_{ВТ}$, $\xi_{ГТ}$, $\xi_{ЖТ}$ є сталими, й визначаються з паспортних, проектних або довідникових матеріалів. Невідомими є продуктивності відцентрових механізмів – Q_i , та параметри керування ними – α_i , f_j , де $i = 1 \dots 4$, $j = 1 \dots 5$.

Перетворимо систему рівнянь (13) до вигляду:

$$\begin{cases} Q_5 - Q_K - Q_{PP} = 0; \\ H_5(Q_5, f_5) - H_{сжТ}(Q_5) = 0; \\ Q_1 + Q_2 - (c_1 Q_K - c_2) V_B^0 (\alpha_T - \Delta \alpha_T + \Delta \alpha_{БП}) \frac{t_{х6} + 273}{273} = 0; \\ H_{12} \left(Q_1 + Q_2, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right) - H_{сВТ}(Q_1 + Q_2) + H_T = 0; \\ Q_3 + Q_4 - (c_1 Q_K - c_2) (V_{VT} + \Delta \alpha V_B^0) \frac{\vartheta_D + 273}{273} = 0; \\ H_{34} \left(Q_3 + Q_4, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \right) - H_{сГТ}(Q_3 + Q_4) - H_T = 0. \end{cases} \quad (14)$$

У векторному вигляді система рівнянь (14) матиме вигляд:

$$\vec{\Omega}(\vec{Q}, \vec{\alpha}, \vec{f}) = 0,$$

де $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$; $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Задачу знаходження оптимальних параметрів керування групою відцентрових механізмів запишемо у вигляді:

$$\max_{\substack{\alpha \in A, f \in F \\ \vec{\Omega}(\vec{Q}, \vec{\alpha}, \vec{f}) = 0}} \frac{\sum_{i=1}^5 \eta_i(Q_i, \alpha_i, f_i) P_i(Q_i, \alpha_i, f_i)}{\sum_{i=1}^5 P_i(Q_i, \alpha_i, f_i)}, \quad (15)$$

де $A = (\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2, \alpha_3 \in A_3, \alpha_4 \in A_4, \alpha_5 \in A_5)$ – обмеження по куту відкриття направляючого апарату;

$F = (f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, f_3 \in F_3, f_4 \in F_4, f_5 \in F_5)$ – обмеження по частоті живильної напруги.

Для побудови алгоритму знаходження ефективних параметрів керування відцентровими механізмами парового енергетичного котла побудуємо розрахункову схему, що показана на рис. 7. На основі експертної оцінки відцентрові механізми, що забезпечують роботу парового котла, були поділені на 3 групи. До групи 1 віднесено живильний насос, до групи 2 віднесено дуттьові вентилятори, а до 3 групи – димососи.

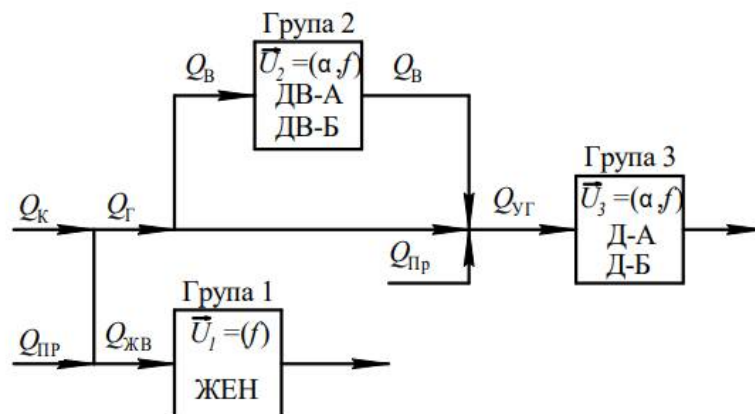


Рис. 7 – Схема підключень відцентрових механізмів.

На основі співвідношень (13) для схеми (рис. 7) побудуємо алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування відцентровими механізмами котла – рис. 8.

Використання різних способів регулювання в розглянутих алгоритмах дають можливість врахування додаткових обмежень. Так, при аналізі класичних способів регулювання фіксується частота живильної напруги на рівні 50 Гц. При індивідуальному частотному приводі застосовуються алгоритми без змін. При аналізі групового керування фіксується частота живильної напруги групи механізмів.

Приклад розв'язання задачі знаходження оптимальних параметрів керування групою механізмів власних потреб котла ТЕС. Розглянемо роботу котла MANN-120. Для забезпечення нормальної роботи котла використовуються живильний насос Voice-Zonne, два дуттьових вентилятора ВДН-17-3 та два димососи ДН-23.

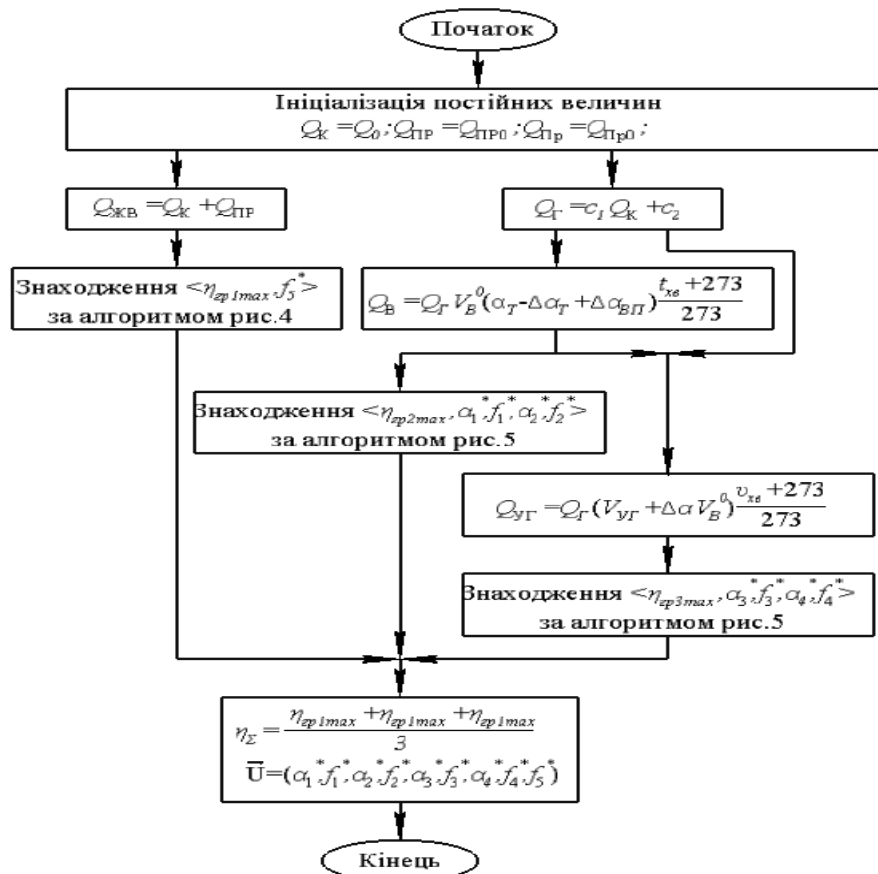


Рис.8 – Алгоритм знаходження оптимальних параметрів керування відцентровими механізмами котла.

Скориставшись методом найменших квадратів, запишемо для даних механізмів вирази (1) у вигляді:

- дуттьовий вентилятор ВДН-17-3:

$$H_{ДВ}(Q, \alpha, f) = 0,108f^2 + 0,00134\alpha f^2 + 0,049 \cdot 10^{-3} Qf - 0,0013 \cdot 10^{-3} \alpha Qf - 0,00002\alpha^2 f^2 - 0,0432 \cdot 10^{-6} Q^2;$$

$$\eta_{ДВ}(Q, \alpha, f) = 11,084 + 1,283\alpha + 136,203 \cdot 10^{-3} Qf^{-1} - 1,189 \cdot 10^{-3} \alpha Qf^{-1} - 0,0112\alpha^2 - 60,485 \cdot 10^{-6} Q^2 f^{-2};$$

- димосос ДН-23:

$$H_{Д}(Q, \alpha, f) = 0,0676f^2 + 0,00341\alpha f^2 + 0,0371 \cdot 10^{-3} Qf - 0,0014 \cdot 10^{-3} \alpha Qf - 0,000034\alpha^2 f^2 - 0,00353 \cdot 10^{-6} Q^2;$$

$$\eta_{Д}(Q, \alpha, f) = 13,027 + 1,647\alpha + 47,895 \cdot 10^{-3} Qf^{-1} - 0,536 \cdot 10^{-3} \alpha Qf^{-1} - 0,0175\alpha^2 - 10,064 \cdot 10^{-6} Q^2 f^{-2};$$

- живильний насос:

$$H_5(Q, f) = 0,0619f^2 - 0,0034Qf - 0,0011Q^2;$$

$$\eta_5(Q, f) = 2,1 + 59,645Qf^{-1} - 15,5Q^2 f^{-2}.$$

Задачу (15) було розв'язано для різних продуктивностей парового енергетичного котла, в діапазоні 60 – 120 т/год. Згідно з експлуатаційною документацією котла, для забезпечення нормальної його роботи в діапазоні продуктивностей 60 – 85 т/год – по два. Оцінювалися різні способи регулювання продуктивності відцентрових механізмів, а саме індивідуальний частотний привід, групове регулювання продуктивності та класичні способи регулювання – дроселювання та зміна кута відкриття направляючого апарату. Ефективність різних способів регулювання показана на рис. 9.

Як видно з рис. 9, найбільш ефективним способом регулювання продуктивності відцентрових механізмів є використання індивідуального частотного привиду, оскільки при ньому досягається максимальна ефективність роботи устаткування. Проте, групове регулювання також має свої переваги та значну ефективність. Використання класичних способів регулювання не є доцільним, оскільки має низьку ефективність.

Розглянуті математичні моделі було застосовано для аналізу можливості впровадження групового регулювання продуктивності на Харківській ТЕЦ-3. Для цього був проведений аналіз роботи парового енергетичного котла в типовий літній місяць. Результати математичного моделювання режимів роботи котла показали, що доцільно використовувати наступні способи регулювання продуктивності відцентрових механізмів, що забезпечують роботу парового енергетичного котла № 5:

- використання індивідуального частотного привиду для живильного насоса № 8;

- використання групового способу регулювання продуктивності механізмів газо-повітряного тракту котла високого тиску К-5.

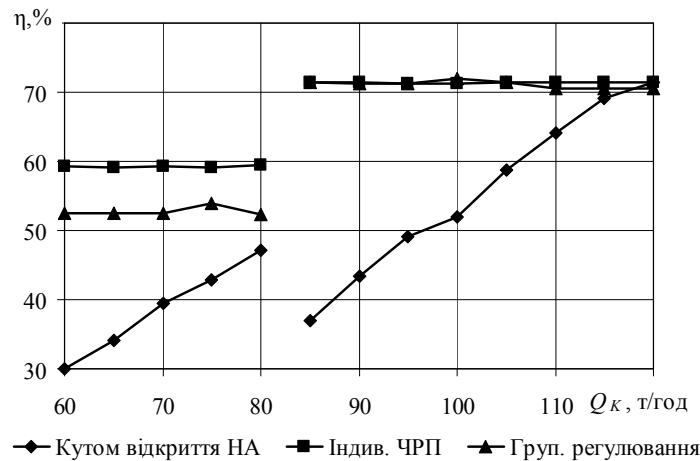


Рис. 9 – Ефективність різних способів регулювання продуктивності відцентрових механізмів, що забезпечують роботу парового енергетичного котла.

На рис. 10 показані порівняльні графіки по споживанню електричної енергії на власні потреби при впровадженні енергоефективних способів регулювання продуктивності механізмів власних потреб котла К-5. Верхня крива показує споживання електричної енергії на власні потреби при використанні класичних способів регулювання продуктивності відцентрових механізмів, а нижня крива показує змодельоване споживання електричної енергії при використанні енергоефективних способів регулювання. Очікуваний ефект зменшення споживання електричної енергії від впровадження таких заходів в типовий літній місяць складає 269336,9 кВт·год, що відповідає зниженню загального споживання електричної енергії на власні потреби станції у розмірі 10,69 %.

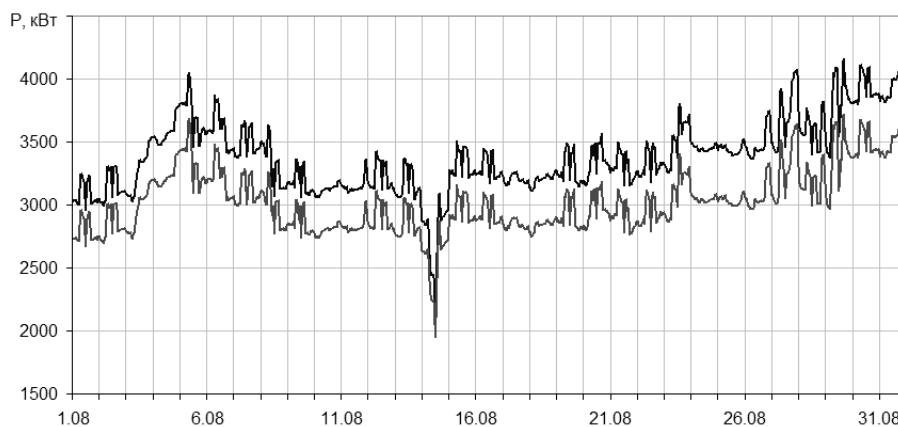


Рис. 10 – Споживання електричної енергії на власні потреби при різних енергоефективних заходах для ТЕЦ.

Значний ефект енергозбереження дає використання індивідуального частотного приводу для живильних насосів ТЕЦ. Перевагою є те, що при впровадженні такого способу регулювання продуктивності живильний насос працює в зоні максимального ККД, а, оскільки живильні насоси є найбільш потужними споживачами електричної енергії в системах власних потреб теплових електричних станцій, використання даного способу регулювання продуктивності значно зменшує споживання електричної енергії на власні потреби.

На рис. 11 показані порівняльні графіки по споживанню електричної енергії живильним насосом ЖЕН-8 парового енергетичного котла К-5. Верхня крива – споживання електричної енергії при дроселюванні, нижня – при використанні індивідуального частотного приводу. Очікуваний ефект зменшення споживання електричної енергії від впровадження індивідуального частотного приводу для живильного котла ЖЕН-8 в типовий літній місяць складає 58204,1 кВт·год, що відповідає зниженню споживання електричної енергії живильним насосом на 15,23 %.

Як показано вище, близькість характеристик та режимів роботи дуттьових вентиляторів та димососів дає змогу впровадження групового регулювання їх продуктивності. На рис. 12 показані порівняльні графіки по споживанню електричної енергії механізмами газоповітряного тракту парового енергетичного котла К-5. Верхня крива – при використанні регулювання за допомогою зміни кута відкриття направляючого механізму, нижня – при використанні групового регулювання продуктивності. Очікуваний ефект зменшення споживання електричної енергії від впровадження групового регулювання продуктивності механізмів газо-повітряного тракту котла К-5 в типовий літній місяць складає 211132,8 кВт·год, що відповідає зниженню споживання електричної енергії тяго-дутьовими механізмами на 72,68 %.

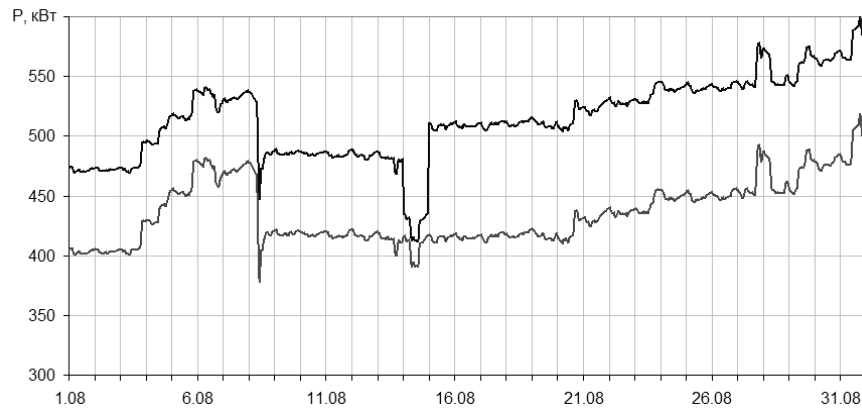


Рис. 11 – Споживання електричної енергії живильним насосом ЖЕН-8 при дроселюванні та індивідуальному частотному приводі.

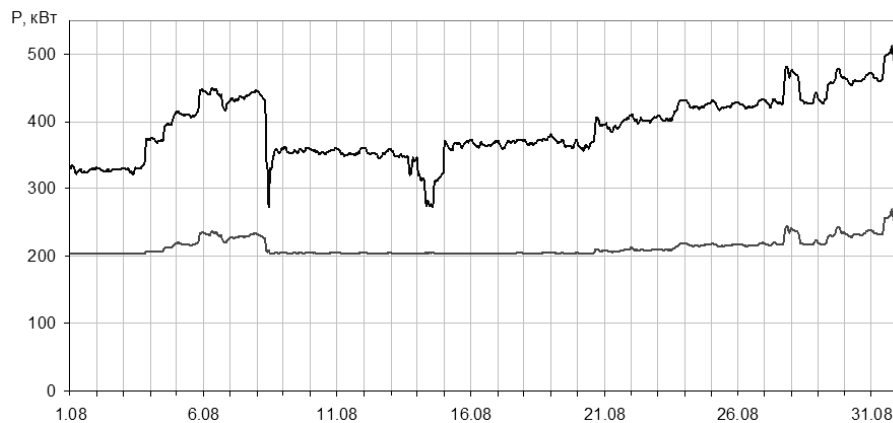


Рис. 12 – Споживання електричної енергії механізмами газо-повітряного тракту котла К-5 при груповому та змінію кута направляючого апарату регулюванні їх продуктивності.

Висновки. В роботі був проведений аналіз застосування математичних моделей відцентрових механізмів при оцінці ефективності різних способів регулювання відцентрових механізмів, що забезпечують роботу парового енергетичного котла ТЕС. Приведені алгоритми чисельних методів розв'язання задачі знаходження оптимальних параметрів керування відцентровими механізмами, які з'єднані в газогідравлічному тракті різними способами.

Результати математичного моделювання свідчать, що використання групового регулювання для приводу дуттьових механізмів парового енергетичного котла є ефективним і може дати значний ефект економії електричної енергії, що споживається ними. Для живильних насосів доцільніше використовувати індивідуальний частотний привід.

Список літератури

1. Vanin V., Lasurenko O., Kruhol M. Assessment of group regulation feasibility in thermal power plant auxiliaries capacity control // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2020. – № 6 (8 (108)). – P. 45 – 53. doi DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.218586>.
2. Kruhol M., Lasurenko O., Vanin V., Tomashevskiy R. An Algebraic Model of Gas-Hydraulic Network of Mechanisms with Electric Drive in the Problem of Thermal Power Plant Auxiliaries Optimization // *IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. – 2020. doi: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250085.
3. Ванін В. А., Кругол Н. М., Лазуренко А. П. Математические модели систем обеспечения работы котлоагрегата ТЭС в задаче повышения его энергоэффективности // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 41 – 48.
4. Iyer J., Tabarraee K., Chiniforoosh S., Jatskevich J. An improved V/F control scheme for symmetric load sharing of multi-machine induction motor drives // *2011 24th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*. – 2011. doi:10.1109/ccece.2011.6030711.
5. Jeftenic B., Bebic M., Statik S. Controlled multi-motor drives. *International Symposium on Power Electronics // Electrical Drives, Automation and Motion*. – 2006. SPEEDAM 2006. doi:10.1109/speedam.2006.1649985.
6. Mitrovic N., Kostic V., Petronijevic M., Jeftenic B. Multi-Motor Drives for Crane Application // *Advances in Electrical and Computer Engineering*. – 2009. – vol. 9. – no. 3. – P. 57 – 62. doi: 10.4316/AECE.2009.03011.
7. Rajashekar P. Mandi, Yaragatti Udaykumar R. Enhancing energy efficiency of Induced Draft Fans in Thermal Power Plants // *Proceedings of the Eighth IASTED International Conference Power and Energy Systems (EuroPES 2008)*. – Corfu, Greece, June 23 – 25 2008. – pp. 176 – 182. – paper No.608-069.
8. Каниук Г. И., Мезеря А. Ю., Лаптинев И. П. Модель энергосберегающего управления нагнетательными установками тепловых электростанций // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія : Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 12 (1055). – С. 90 – 97.
9. Carlson R. The correct method of calculating energy savings to justify adjustable-frequency drives on pumps // *IEEE Transactions on Industry Applications*. – 2000. – № 36(6). – P. 1725 – 1733. doi:10.1109/28.887227.
10. Mrzljak V., Blecich P., Anđelić N., Lorencin I. Energy and Exergy Analyses of Forced Draft Fan for Marine Steam Propulsion System during

- Load Change // Journal of Marine Science and Engineering. – 2019. – № 7(11). – 381. doi:10.3390/jmse7110381.
11. Wang Shuping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinian. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fans and pumps in power plants. – Paris, France, 2012. – Режим доступу : https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Pairis%202012/A1/A1_203_2012.pdf. – Дата звертання : 05 жовтня 2020.
 12. Kitayceva E. Methods and algorithms for increasing the speed of computing processes for calculating hydraulic networks // Construction and Architecture. – 2019. – № 7(3). – P. 55 – 61. doi:10.29039/2308-0191-2019-7-3-55-61.
 13. Ванін В. А., Ванін Б. В., Кругол Н. М. Математическое моделирование режимов регулирования газозводного тракта котла ТЭС // Вестник НТУ «ХПИ». Серия : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2020. – №1(1355). – С. 8 – 15.

References (transliterated)

1. Vanin V., Lasurenko O., Kruhol M. Assessment of group regulation feasibility in thermal power plant auxiliaries capacity control. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020, no. 6 (8 (108)), pp. 45–53. doi DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.218586>.
2. Kruhol M., Lasurenko O., Vanin V., Tomashevskiy R. An Algebraic Model of Gas-Hydraulic Network of Mechanisms with Electric Drive in the Problem of Thermal Power Plant Auxiliaries Optimization. *IEEE KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. 2020. doi: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250085.
3. Vanin V. A., Krugol N. M., Lazurenko A. P. Matematicheskie modeli sistem obespecheniya raboty kotloagregata TES v zadache povysheniya ego energoeffektivnosti [Mathematical models of thermal power plant boiler operation systems in the problem of the boiler energy efficiency improvement]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2019, no. 8 (1333), pp. 41–48.
4. Iyer J., Tabarraee K., Chiniforoosh S., Jatskevich J. An improved V/F control scheme for symmetric load sharing of multi-machine induction motor drives. *2011 24th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*. 2011. doi:10.1109/ccece.2011.6030711.
5. Jeftenic B., Bebic M., Statkic S. Controlled multi-motor drives. International Symposium on Power Electronics. *Electrical Drives, Automation and Motion*. 2006, SPEEDAM 2006. doi:10.1109/speedam.2006.1649985.
6. Mitrovic N., Kostic V., Petronijevic M., Jeftenic B. Multi-Motor Drives for Crane Application. *Advances in Electrical and Computer Engineering*. 2009, vol. 9, no. 3, pp. 57–62. doi: 10.4316/AECE.2009.03011.
7. Rajashekar P. Mandi, Yarangatti Udaykumar R. Enhancing energy efficiency of Induced Draft Fans in Thermal Power Plants. *Proceedings of the Eighth IASTED International Conference Power and Energy Systems (EuroPES 2008)*. Corfu, Greece, June 23 – 25 2008, pp. 176–182. paper No.608-069.
8. Kanjuk G., Mezerya A., Laptinov I. Model' energosberegayushhego upravleniya nagnetatel'nymi ustanovkami teplovykh elektrostansiy [A model of energy saving control using the discharge units of thermal power stations]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : Energetychni ta teplotekhnichni protsesy y ustatkuvannya [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Power and heat engineering processes and equipment]. 2014, no. 12 (1055), pp. 90–97.
9. Carlson R. The correct method of calculating energy savings to justify adjustable-frequency drives on pumps. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2000, no. 36(6), pp. 1725–1733. doi:10.1109/28.887227.
10. Mrzljak V., Blecich P., Anđelić N., Lorencin I. Energy and Exergy Analyses of Forced Draft Fan for Marine Steam Propulsion System during Load Change. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2019, no. 7(11), 381. doi:10.3390/jmse7110381.
11. Wang Shuping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinian. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fans and pumps in power plants. Paris, France, 2012. Available at https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Pairis%202012/A1/A1_203_2012.pdf. (accessed 05 October 2020).
12. Kitayceva E. Methods and algorithms for increasing the speed of computing processes for calculating hydraulic networks. *Construction and Architecture*. 2019, no. 7(3), pp. 55–61. doi:10.29039/2308-0191-2019-7-3-55-61.
13. Vanin V. A., Krugol N. M., Lazurenko A. P. Matematicheskoe modelirovanie rezhimov regulirovaniya gazovozdushnogo trakta kotla [Mathematical modeling of thermal power plant's boiler air gas-flow path regulation modes]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2020, no. 1 (1355), pp. 8–15.

Надійшла (received) 09.09.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Ванін Віктор Антонович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Кругол Микола Михайлович – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: kruhgol@gmail.com.

Кругол Николай Михайлович – аспирант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: kruhgol@gmail.com.

Kruhol Mykola Mykhaylovych – postgraduate student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-66-00; e-mail: kruhgol@gmail.com.

Лазуренко Олександр Павлович – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: Lasurenko@kpi.kharkov.ua.

Лазуренко Александр Павлович – кандидат технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: Lasurenko@kpi.kharkov.ua.

Lasurenko Oleksandr Pavlovych – Candidate of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-66-00; e-mail: Lasurenko@kpi.kharkov.ua.

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

УЧЁТ ВЛИЯНИЯ МАССОВО-ИНЕРЦИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется нестационарное нагружение механической системы, состоящей из прямоугольной упругой изотропной пластины и дополнительной вязкоупругой опоры. Основное внимание посвящено учету массово-инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при моделировании. В качестве основного объекта, к которому присоединена дополнительная опора, в работе рассматривается пластина средней толщины в рамках гипотез Тимошенко. Так как исследуется влияние дополнительной опоры, сама пластина для простоты ее модели имеет шарнирное опирание. Укажем, что изложенный материал применим и для других объектов, имеющих дополнительные опоры (балки, пластины и оболочки, которые могут иметь различное опирание по контуру и разные формы в плане). Нестационарное деформирование вызвано приложением к пластине внешней поперечной возмущающей нагрузки. Влияние дополнительной опоры на деформирование пластины заменяется приложением неизвестной дополнительной переменной сосредоточенной силы, которая, по сути, является реакцией взаимодействия между пластиной и дополнительной опорой. Определение этой неизвестной реакции сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода. В работе получены основные аналитические соотношения для получения интегральных уравнений или их систем, а также приведен алгоритм их решения. Описаны результаты вычислений для конкретных численных значений. Причем рассмотрено действие на пластину дополнительной вязкоупругой опоры, как без учета, так и с учетом массово-инерционных характеристик опоры. Показано, что для малых масс влияние практически отсутствует, что может служить косвенным доказательством правильности полученной модели. В качестве главного вывода можно отметить, что массово-инерционные характеристики дополнительной вязкоупругой опоры оказывают заметное влияние на колебательный процесс, причем как на амплитудные, так и на фазовые характеристики.

Ключевые слова: нестационарные колебания, дополнительная вязкоупругая опора, массово-инерционные характеристики, прямоугольная пластина, интегральное уравнение Вольтерра.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ МАСОВО-ІНЕРЦІЙНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОДАТКОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ОПОРИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Досліджується нестационарне навантаження механічної системи, що складається з прямокутної пружної ізотропної пластини і додаткової в'язкопружної опори. Основну увагу присвячено урахуванню масово-інерційної характеристики додаткової в'язкопружної опори при моделюванні. В якості основного об'єкта, до якого приєднана додаткова опора, в роботі розглядається пластина середньої товщини в рамках гіпотез Тимошенко. Оскільки досліджується вплив додаткової опори, сама пластина для простоти її моделі має шарнірне обпирання. Зазначимо, що викладений матеріал може бути застосований і для інших об'єктів, що мають додаткові опори (балки, пластини і оболонки, які можуть мати різне обпирання по контуру і різні форми в плані). Нестационарне деформування викликано прикладанням до пластини зовнішньої поперечної збурює навантаження. Вплив додаткової опори на деформування пластини замінюється прикладанням невідомої додаткової змінної зосередженої сили, яка, по суті, є реакцією взаємодії між пластиною і додатковою опорою. Визначення цієї невідомої реакції зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра I роду. В роботі отримані основні аналітичні співвідношення для отримання інтегральних рівнянь або їх систем, а також наведено алгоритм розв'язання. Описано результати обчислень для конкретних числових значень. Причому розглянуто дію на пластину додаткової в'язкопружної опори як без урахування, так і з урахуванням масово-інерційних характеристик опори. Показано, що для малих мас вплив практично відсутній, що може бути непрямим доказом правильності отриманої моделі. В якості головного висновку можна відзначити, що масово-інерційні характеристики додаткової в'язкопружної опори утворюють помітний вплив на коливальний процес, причому як на амплітудні так і на фазові характеристики.

Ключові слова: нестационарні коливання, додаткова в'язкопружна опора, масово-інерційні характеристики, прямокутна пластина, інтегральне рівняння Вольтерра.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV

THE INFLUENCE OF MASS AND INERTIAL CHARACTERISTICS OF AN ADDITIONAL VISCOELASTIC SUPPORT IN THE NONSTATIONARY DEFORMING OF A RECTANGULAR PLATE

The nonstationary loading of a mechanical system consisting of a rectangular elastic isotropic plate and an additional viscoelastic support is investigated. The main attention is devoted to taking into account the mass and inertial characteristics of the additional viscoelastic support during modeling. As the main object, to which an additional support is attached, a plate of medium thickness within the framework of Timoshenko's hypotheses is considered. Since the focus of the paper is on the influence of the additional support, the plate itself is assumed to be hinged for simplicity of its model. We point out that the results presented are applicable to other objects that have additional supports (beams, plates and shells, which can have different supports along the contour and different shapes in plan). Nonstationary deformation is caused by the application of an external transverse disturbing load to the plate. The influence of the additional support on the deformation of the plate is replaced by the application of an unknown additional variable concentrated force, which, in fact, is the reaction of interaction between the plate and the additional support. The determination of this unknown reaction is reduced to solving the first kind Volterra integral equation. In this work, the main analytical relations for obtaining integral equations or their systems are derived, and an algorithm for their solving is presented. The results of calculations for specific numerical values are described. Moreover, the effect of an additional viscoelastic support on the plate is considered, both with and without taking into account the mass and inertial characteristics of the support. It is shown that for small masses the effect is practically absent, which can serve as an indirect proof of the correctness of the model obtained. As the main conclusion, it can be pointed out that the mass and inertial characteristics of the additional viscoelastic support have a noticeable effect on the vibration process, on both the amplitude and phase characteristics.

Key words: nonstationary vibrations, additional viscoelastic support, mass and inertial characteristics, rectangular plate, Volterra integral equation.

Введение и анализ литературы. В ряде случаев для повышения жесткости, прочности или несущей способности изделия в виде балок и пластин дополняют *промежуточными опорами*. В дисциплине «Сопротивле-

ние материалов» даже используется специальный термин – *неразрезная балка*. Однако моделирование дополнительных опор, влияющих на деформирование исследуемого объекта, сопряжено с рядом идеализаций и допущений. Например, рассматривается влияние абсолютных жестких дополнительных опор или ребер жесткости.

В реальности дополнительные опоры обладают вязкоупругими свойствами (имеют вязкую и упругую составляющие), а также инерционные свойства (имеется влияние дополнительной сосредоточенной массы). Следует отметить, что при нестационарных колебаниях в динамических системах значительное влияние могут оказывать жесткости и демпфирующие свойства дополнительных опор, а также силы инерции, вызванные даже малыми массами, у которых могут быть значительные ускорения.

В области прямых задач имеются научные работы, исследования в которых касаются указанной тематики. Например, в монографии [1] рассматривается воздействие подвижной массы на балки и тонкую прямоугольную пластину, лежащую на упругом основании. Обратные задачи такого направления мало изучены.

Отметим, что к настоящему времени хорошо исследованы колебания многопролетных балок с одной или несколькими дополнительными упругими опорами. Упомянем некоторые работы такого типа, связанные с учетом дополнительных упругих опор (дополнительных сосредоточенных жесткостей) для упруго деформируемых элементов конструкций в виде балок. Например, в работе [2] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием метода Ньютона и итерационных схем для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор.

В работе [3] представлены решения прямой и обратной задач для балок с дополнительными опорами, причем влияние опор моделируется при помощи неизвестных сосредоточенных сил. Однако в указанной работе рассматривается чисто упругие дополнительные опоры.

Работ, рассматривающих элементы конструкций, контактирующих с гасителями колебаний, в рамках механики деформируемого твердого тела сравнительно мало. Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [4] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [5] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с *дискретным динамическим гасителем* с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе излагается подход, позволяющий учитывать влияние дополнительных опор на нестационарное деформирование элементов конструкции путем введения в исходные модели деформирования балок (пластин) дополнительных нестационарных сил (реакций). Эти неизвестные нестационарные нагрузки могут быть определены из соответствующих интегральных соотношений, путем сведения их к линейным интегральным уравнениям Вольтерра или их системам, что позволяет получать аналитико-численные решения без использования итерационных схем.

Укажем, что настоящая работа является логическим продолжением работ [6 – 7], но в настоящей работе рассматривается влияние дополнительной опоры, в которой кроме вязкой и упругой характеристик учитывается ещё и инерционная составляющая.

Постановка задачи и математическая модель. Нестационарное деформирование балок или пластин описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных. Опыт показывает, что для указанных объектов хорошие результаты дают модели на базе *гипотез С. П. Тимошенко*, учитывающие инерцию вращения и сдвиг [8 – 9]. Такие системы уравнений могут быть решены при помощи разложения искомым функций (перемещений и углов поворота) в соответствующие ряды (*Фурье, Бесселя* и т.п.) [10]. Тогда для коэффициентов разложения, как функций времени, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с использованием, например, *интегрального преобразования Лапласа* [11]. В этом случае, при выполнении обратных преобразований, решения могут быть представлены в виде интегралов типа свёртки, что позволяет выделить аналитические выражения для ядер интегральных уравнений.

Таким образом, для искомым функций перемещений и углов поворота нормали, а также деформаций могут быть получены выражения вида:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau; \quad (1)$$

где $w_j(t)$ – изменение во времени компоненты перемещения некоторой точки (например, прогиба пластины); $P_i(t)$ – i -я нагрузка ($P_{0i}(t)$ – внешняя сила, или $R_i(t)$ – реакция на моделируемую особенность, например, дополнительную опору); $K_{ij}(t)$ – ядро соответствующего *свёрточного интеграла* для i -ой нагрузки в j -й точке.

При нестационарном деформировании балок или пластин с особенностями для каждой моделируемой особенности (объекта, контактирующего с балкой или пластиной) можно записать выражение вида (1). То есть для N -объектов можно записать систему из N интегральных уравнений, которая будет иметь $2 \cdot N$ неизвестных (неизвестны как функции перемещения $w_j(t)$, так и $R_i(t)$ – реакции). Для решения такой системы интегральных уравнений необходимо записать дополнительные (замыкающие) соотношения для каждой из точек, в которой

имеется особенность.

В общем случае можно представить моделируемый объект в виде комбинации наличия влияния массы, жесткости и демпфирования (рис. 1).

Выражение для учета реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой с учетом инерционных эффектов:

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} + c_i w_i(t). \quad (2)$$

Приведём для рассматриваемого случая (как наиболее общего) подробную методику получения выражения для функции прогибов в соответствующей точке.

Выполним для выражения (2) интегральное преобразование Лапласа, при нулевых начальных условиях получим формулу:

$$R_i(s) = m_i \cdot s^2 \cdot w_i(s) + \kappa_i \cdot s \cdot w_i(s) + c_i \cdot w_i(s). \quad (3)$$

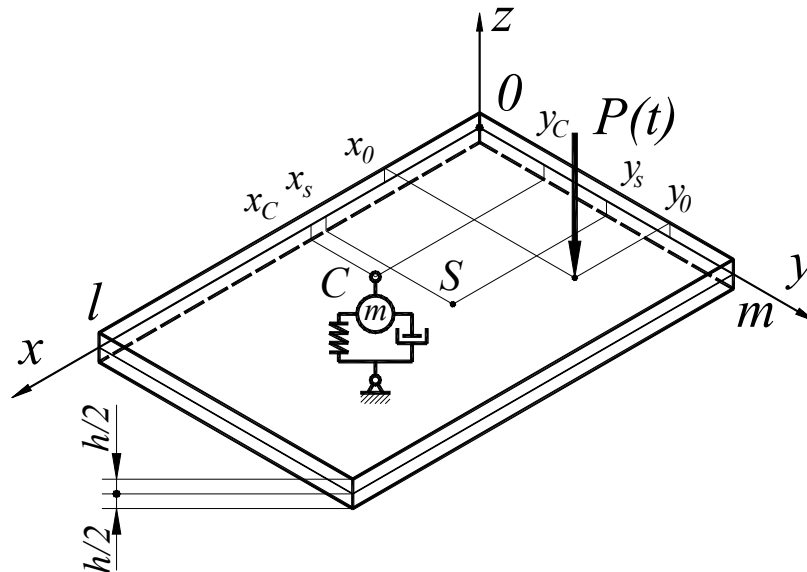


Рис. 1 – Пластина и дополнительная вязкоупругая опора, с учетом ее массово-инерционных характеристик.

Из (3) получим выражение для прогиба в пространстве изображений:

$$w_i(s) = \frac{R_i(s)}{m_i \cdot s^2 + \kappa_i \cdot s + c_i}. \quad (4)$$

После выполнения обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свёртке получим следующее выражение для прогиба в точке приложения реакции на вязкоупругую опору с учетом её массы:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K_{fi}(t) = \frac{1}{m_i} \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i}{2m_i} \cdot t} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t)$ – конечно-разностное ядро интеграла типа свёртки, учитывающее вязкие, упругие и массово-инерционные характеристики дополнительной опоры в i -й точке, а $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – собственная частота, соответствующая i -й дополнительной вязкоупругой опоре с учетом её массы.

Описание решения задачи. Система интегральных соотношений вида (1), дополненная выражениями (5) для каждой дополнительной опоры, решается согласно следующему алгоритму.

1) Выполняется исключение неизвестных функций перемещений $w_i(t)$, путем приравнивания соответствующих выражений вида (1) и (5), например, для одной вязкоупругой опоры с учетом ее инерционных характеристик (массы):

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau) R(\tau) d\tau = \int_0^t K_f(t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Выражение (6) после переноса известных слагаемых в правую часть уравнения, а неизвестных в левую примет вид:

$$\int_0^t \left[K_R^W(t-\tau) + K_f(t-\tau) \right] R(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

В итоге в общем случае исходная система, состоящая из $2 \cdot N$ интегро-дифференциальных соотношений, сводится к системе N интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных реакций $R_i(t)$. В приведенном примере для модели одной реальной опоры задача сведется к одному интегральному уравнению Вольтерра 1-рода (7).

2) Выполняется дискретизация системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации каждое интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В результате чего, для рассматриваемого примера (7) его дискретный аналог можно записать в виде:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{w}_P, \quad (8)$$

где вектор $\mathbf{R}$ соответствует изменению во времени реакции $R(t)$, $\mathbf{w}_P$ – изменение перемещения во времени в точке присоединения дополнительной опоры, вызванное только внешней силой $P_0(t)$, определяемое как

$$w_{Pi} = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau.$$

3) Решается СЛАУ вида (8). В прямой задаче, при условии, что внешняя сила $P_0(t)$ известна, СЛАУ (8) решается любым удобным методом (матрица $\mathbf{A}_R^*$ «хорошо» обращается).

В случае, если решается обратная задача (внешняя сила $P_0(t)$ неизвестна) или к пластине присоединено несколько дополнительных опор, задача сводится к блочной СЛАУ и решается при помощи *обобщенного алгоритма Крамера* или *Гаусса* [12] с использованием регуляризирующего алгоритма *А. Н. Тихонова* [13].

Если к пластине присоединено несколько дополнительных опор, в результате решения блочной СЛАУ определяются неизвестные зависимости во времени реакций $R_j(t)$, каждая из которых описывает влияние присоединённой в соответствующей точке дополнительной опоры на нестационарные колебания (деформирование) основного рассматриваемого объекта (балки или пластины). Зная внешнее нагружение и зависимости $R_j(t)$, можно определить все компоненты перемещения в любой требуемой точке исследуемого объекта на базе зависимостей вида (1).

Вычислительный эксперимент. В работе рассматривается конкретный пример моделирования нестационарных поперечных колебаний прямоугольной пластины средней толщины. Для простоты прямоугольная пластина имеет шарнирное опирание по контуру и только одну дополнительную опору (приложенную к нижней лицевой поверхности пластины в произвольной точке, не принадлежащей контуру опирания). В качестве дополнительной опоры исследуется наиболее реалистичная модель, учитывающая упругие, вязкие, а также различные массово-инерционные характеристики, которые варьируются в ходе вычислительного эксперимента. Для удобства сравнения и анализа влияния массы параметры для расчетов были приняты как в работе [7].

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Вычисления производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $T = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значения механических констант для пластины соответствуют легированной стали); $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$; $m = 0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$; $y_0 = 0.2 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_C = 0.2 \text{ м}$; $y_C = 0.2 \text{ м}$. Координаты точки, в которой исследовалось изменение прогиба пластины во времени (центр пластины): $x_S = 0.3 \text{ м}$; $y_S = 0.2 \text{ м}$. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c_1 = 10^8 \text{ Н/м}$, а коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

Общий вид рассмотренной при расчетах геометрии показан на рис. 2. На рис. 3 показана внешняя возмущающая сила, которая вызывает деформирование (нестационарные колебания) прямоугольной пластины с дополнительной опорой.

При вычислениях рассматривалось 3 случая.

1) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры минимально допустимая, так как в случае, если масса будет меньше $m_{\min} = \kappa_1 / 4 \cdot c_1$, собственная частота, соответствующая дополнительной вязкоупругой опоре, с учетом её массы $\omega_{CDi} = \sqrt{c_i / m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2 / m_i^2}$ станет комплексной. Для принятых значений параметров (c_1 , κ_1) $m_{\min} = 0.25 \text{ кг}$. При расчётах было принято значение $m_1 = 0.251 \text{ кг}$. Этот случай использовался для сопоставления результатов вычисления реакции вязкоупругой опоры и опоры с учётом всех трёх параметров (m_1 , c_1 , κ_1).

2) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры $m_1 = 5$ кг. Относительно реалистичный вариант, с учётом принятых расчётных параметров.

3) Величина массово-инерционной характеристики дополнительной опоры $m_1 = 20$ кг. Относительно большее значение массы для более яркой выраженности изменения реакции дополнительной опоры.

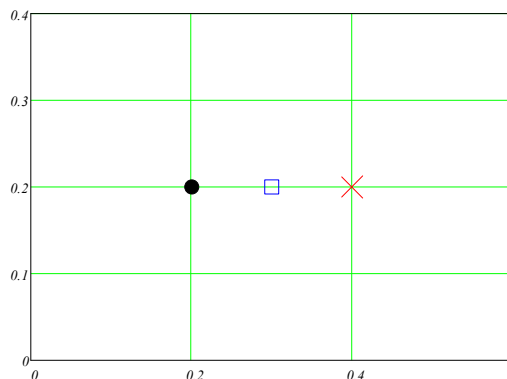


Рис. 2 – Схема нагружения пластины в плане:
 $\times$ – точка приложения возмущающей нагрузки;
 $\bullet$ – точка присоединения дополнительной опоры;
 $\square$ – точка установки датчика прогиба.

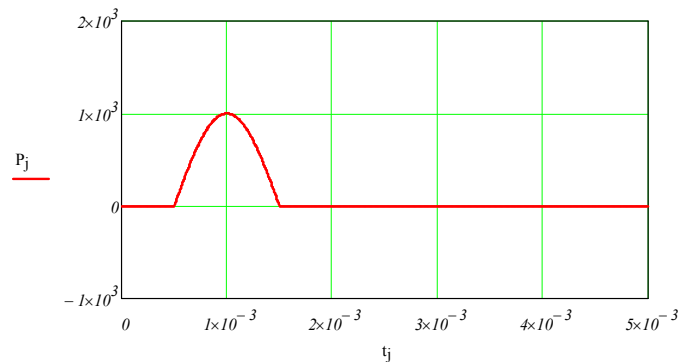


Рис. 3 – Изменение возмущающей нагрузки во времени:
 по оси абсцисс – время в секундах;
 по оси ординат – сила в Ньютонах.

На рис. 4 – 6 показаны результаты вычислений для 1-го случая с учётом массы $m_1 = 0.251$ кг и для вязкоупругой опоры без учета её массы, согласно методики описанной в работах [6 – 7].

Укажем, что на рис. 4 и рис. 5 приведены идентичные графики определенных в результате решения СЛАУ вида (8) реакций вязкоупругой опоры $R_e(t)$ (без учёта массы) и $R_f(t)$ (с учётом влияния массово-инерционной характеристики). Только на рис. 4 для оценки величины также показана внешняя возмущающая сила $P_0(t)$, а на рис. 5 – исключительно реакции $R_e(t)$ и $R_f(t)$, что позволяет заметить небольшое отличие между ними, вызванное учётом небольшой массы. Можно отметить небольшое уменьшение реакции между пластиной и дополнительной опорой, вызванное наличием небольшой массы (инерционными характеристиками дополнительной опоры).

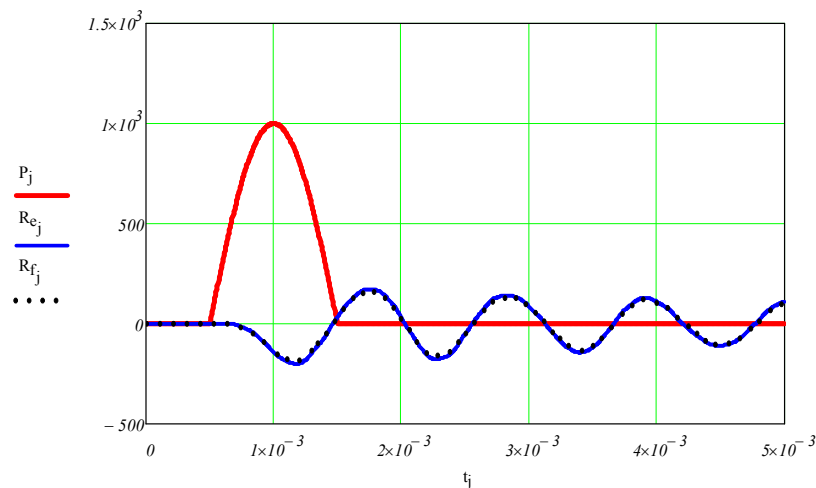


Рис. 4 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

На рис. 6 показано изменение прогиба в точке (x_s, y_s) (в данном расчёте, соответствующей геометрическому центру пластины). Показано 3 кривых: $w_{PS}(t)$ – изменение прогиба пластины, вызванное только возмущающей силой; $w_{\Sigma Se}(t)$ – изменение прогиба, вызванное совместным действием возмущающей силы $P_0(t)$ и реакций вязкоупругой опоры $R_e(t)$ (без учёта массы); $w_{\Sigma Sf}(t)$ – изменение прогиба, вызванное действием силы $P_0(t)$ и реакций $R_f(t)$ (учитывающей массу). Из анализа рис. 6 видно, что, несмотря на небольшое отличие реакций $R_e(t)$ и $R_f(t)$, прогибы в исследуемой точке практически не отличаются. Это обусловлено малой величиной массы, а также тем, что исследуемая точка не находится в непосредственной близости от дополнительной опоры (она находится на некотором расстоянии, в описанном расчёте расстояние равно 0,1 м).

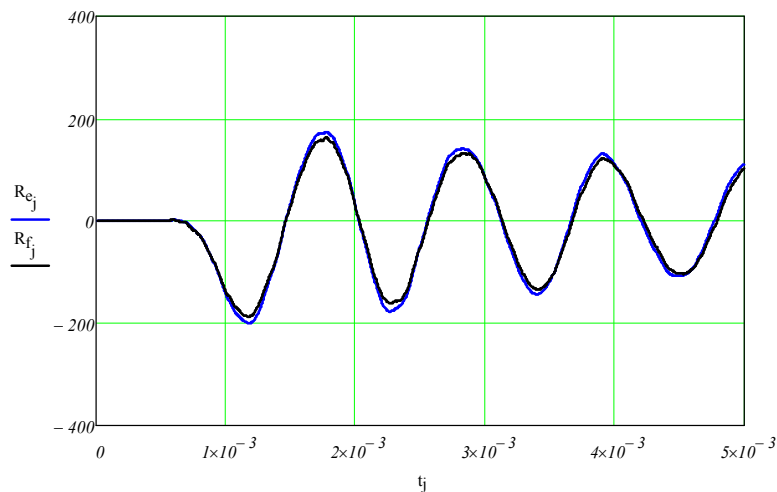


Рис. 5 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_f(t)$ и без её учёта – $R_e(t)$.

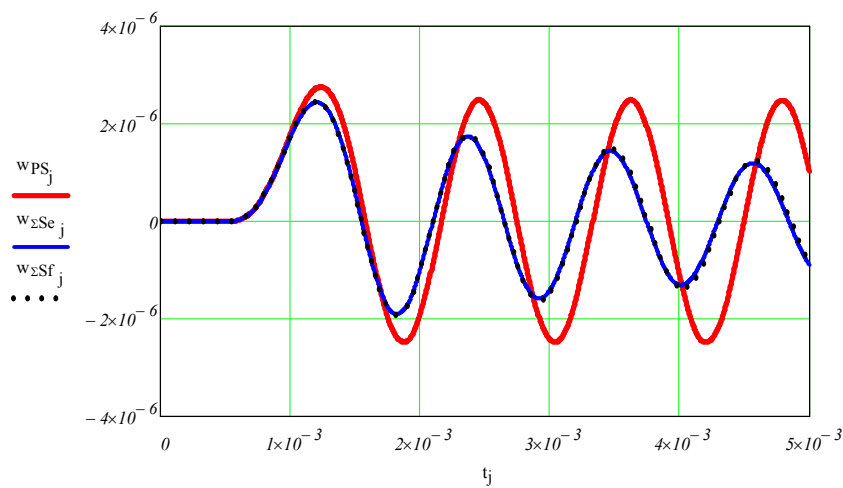


Рис. 6 – Изменение прогибов в центре пластины:
по оси абсцисс – время в секундах; по оси ординат – величина прогиба пластины в метрах.

На рис. 7 – 9 показаны результаты вычислений для 2-го случая с учётом массы $m_1 = 5$ кг. Описание этих рисунков полностью аналогично описанию рис. 4 – 6, отличается только масса.

На рис. 10 – 12 показаны результаты вычислений для 3-го случая с учётом массы $m_1 = 20$ кг (относительно большого значение массы). Описание рис. 10 – 12 аналогично описанию рис. 4 – 6 и 7 – 9.

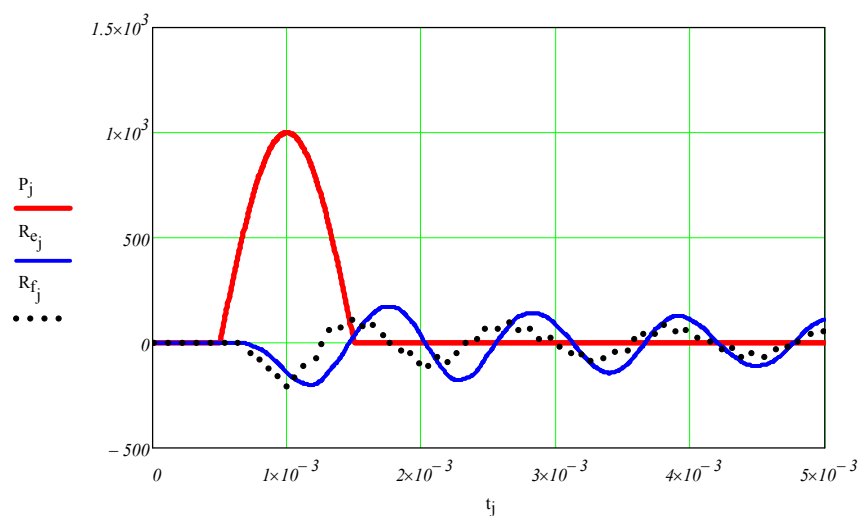


Рис. 7 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

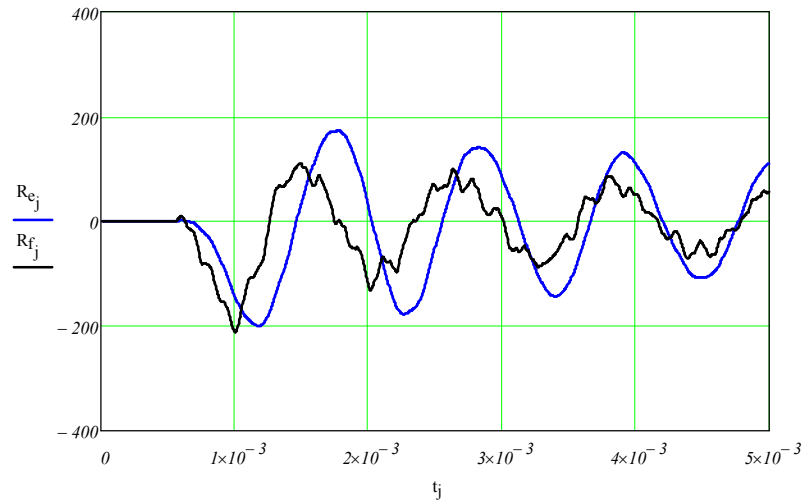


Рис. 8 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_e(t)$ и без её учёта – $R_f(t)$.

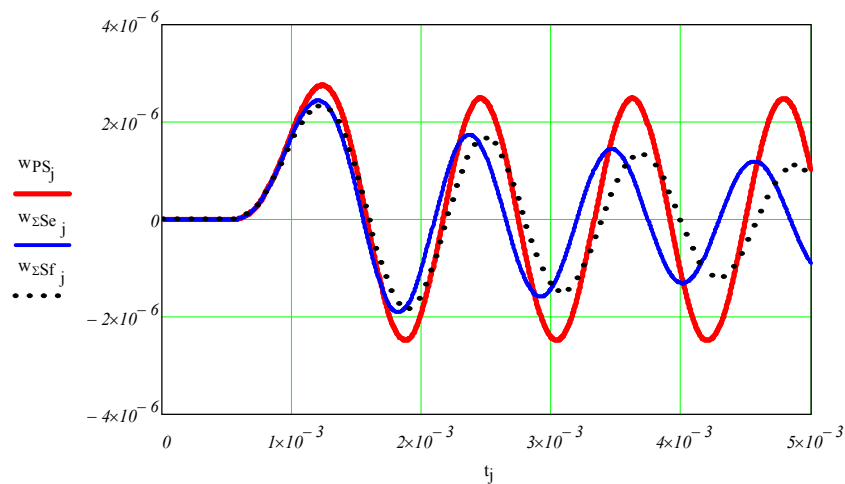


Рис. 9 – Изменение прогибов в центре пластины.

Проанализировав результаты, показанные на рис. 7 – 9 для 2-го случая с учётом реалистичных значений массово инерционных характеристик дополнительной опоры ($m_1 = 5$ кг), можно отметить некоторые изменения амплитудных характеристик, обусловленных величиной массы, и что самое главное – фазовый сдвиг (смещение экстремумов по временной оси).

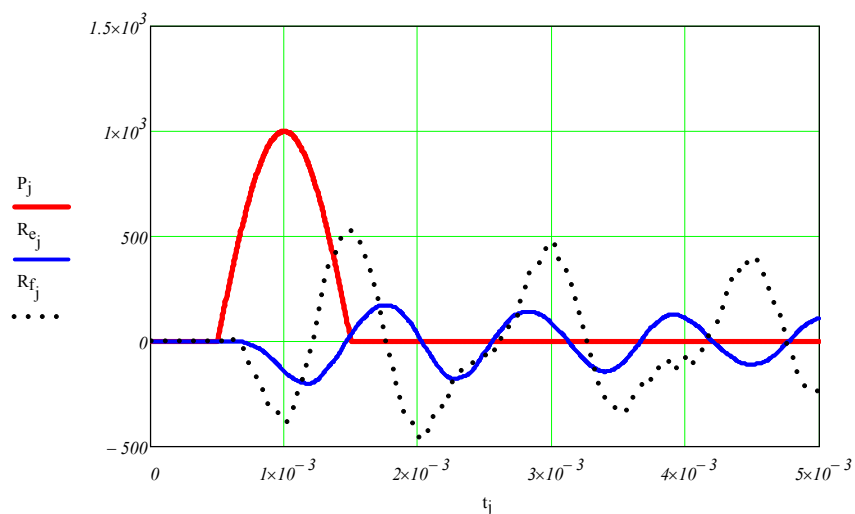


Рис. 10 – Изменение во времени возмущающей нагрузки и реакций между пластиной и дополнительной опорой.

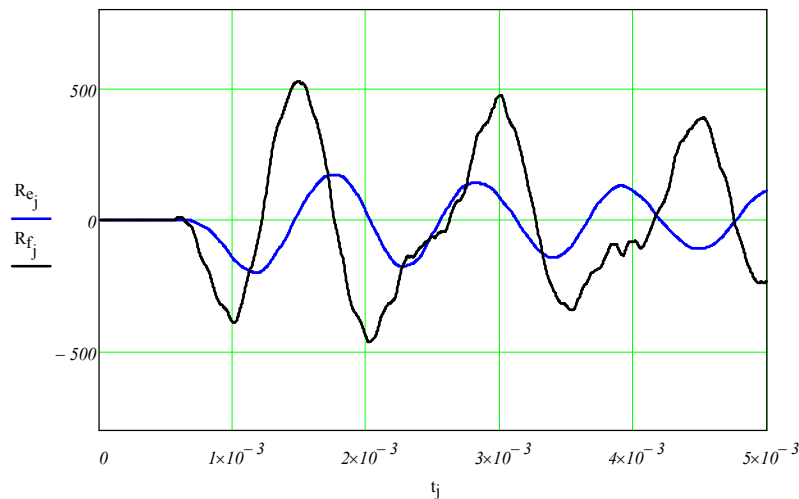


Рис. 10 – Отличия реакций дополнительной вязкоупругой опоры с учётом массы – $R_f(t)$ и без её учёта – $R_e(t)$.

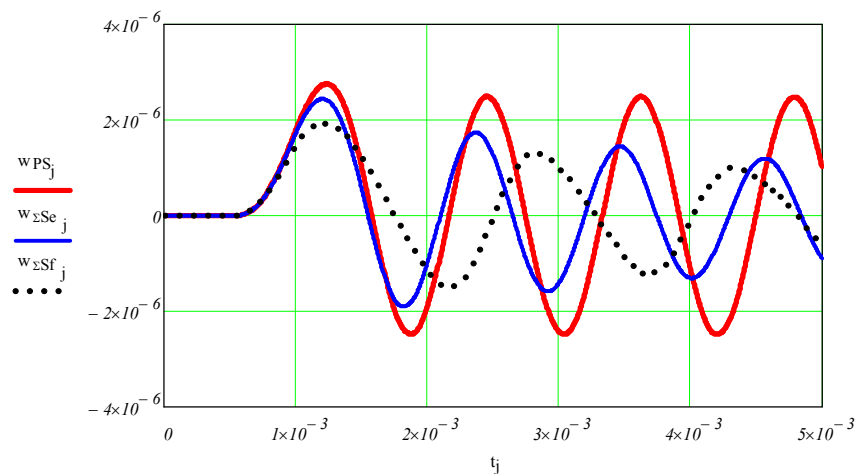


Рис. 11 – Изменение прогибов в центре пластины.

После анализа рис. 8 – 9 с учётом относительно больших значений массово инерционных характеристик дополнительной опоры (для 3-го случая, $m_1 = 20$ кг) можно отметить заметные отличия амплитудных и фазовых характеристик, обусловленных величиной массы.

Выводы. В данной работе описана методика, позволяющая учитывать влияние массово–инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой опоры при нестационарном деформировании прямоугольной пластины. Определение неизвестной реакции сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода. В работе получены основные аналитические соотношения для получения интегральных уравнений или их систем, а также приведен алгоритм их решения.

Описаны результаты вычислений для конкретных численных значений. Проведен анализ влияния массово–инерционной характеристики дополнительной вязкоупругой на нестационарные колебания пластин. Показано, что для малых масс отличие реакции дополнительной вязкоупругой опоры с учетом её массы и без учёта массово–инерционной характеристики практически отсутствует, что может служить косвенным доказательством правильности полученной модели.

В качестве главного вывода можно отметить, что массово–инерционные характеристики дополнительной вязкоупругой опоры оказывают заметное влияние на колебательный процесс, причем как на амплитудные, так и на фазовые характеристики. Соответственно для получения более достоверных результатов расчётов при исследовании нестационарных колебаний реальных конструкций, имеющих дополнительные вязкоупругие опоры, следует учитывать их массы.

Список литературы

1. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
2. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.

3. Янютин С. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
4. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*. – 2007. – № 300(1–2). – P. 250–264. doi: 10.1016/j.jsv.2006.08.015.
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*. – 2005. – Vol. 43. – P. 1513–1533. doi: 10.1016/j.tws.2005.07.001.
6. Воронай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // *Вестник НТУ «ХПИ»*. Серия : Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
7. Воронай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – №16 (1188). – С. 16 – 22.
8. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
9. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва : Машиностроение, 1970. – 736 с.
10. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – Москва : Высшая школа, 1966. – 405 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.
13. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

References (transliterated)

1. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh i podvizhnykh zagruzkakh* [Vibration of deformable systems under pulse and travelling loading]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
2. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. *Kolebaniya mnogopol'yetynykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke* [Vibrations of multispan beams on elastic support under travelling loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
3. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrnennykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyrannyam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
4. Wu S. T., Chen J. Y., Yeh Y. C., Chiu Y. Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor. *Journal of Sound & Vibration*. 2007, no. 300(1–2), pp. 250–264. doi: 10.1016/j.jsv.2006.08.015
5. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2005, vol. 43, pp. 1513–1533. doi: 10.1016/j.tws.2005.07.001
6. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovani pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyazkoupругoy oporoy [Inverse problem in nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik NTU "KhPI". Seriya : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
7. Voropay A. V. Raspredelenie vyazkoy i uprugoy sostavlyayushchikh v reaksii dopolnitel'noy vyazkoupругoy opory, kontaktiruyushhey s plastinoi [Distribution of viscous and elastic components of the reaction of additional viscoelastic support in contact with plate]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 16–22.
8. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy stержney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
9. Filippov A. P., Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G. *Deformirovaniye ehlementov konstruksiy pod deystviem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under the action of impact and pulse loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 184 p.
10. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruksiy. Monografiya* [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Kharkov KhNADU Publ., 2004. 392 p.
11. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 405 p.
12. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.-ry Publ., 1967. 576 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 03.12.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воронай Алексей Валериевич – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Егоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Sciences Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

А. П. КОЖУШКО**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ТА РОЗРАХУНКОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАСАННЯ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЄМНОСТІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ**

Розкриття питань, пов'язаних з вирішенням задач дослідження руху рідини в конструкціях різноманітної форми, які частково заповнені рідиною, завжди було актуальним. Це пов'язано, зокрема, з необхідністю забезпечення поздовжньої та поперечної стійкості руху об'єктів, в яких відбувається транспортування рідини. Сучасні методи та засоби дослідження, які дозволяють описати рух рідини в ємності, доволі складні та вимагають від науковця поглиблених знань. Тому створення математичного алгоритму, який би був простим та забезпечував достатню точність визначення коливального руху в ємності, є доцільним. Кожна розробка нового математичного алгоритму вимагає проведення експериментальних досліджень з її перевірки на адекватність. Метою даної роботи є підтвердження спроможності використання створеного математичного апарату для визначення основних параметрів вільних коливань залежно від рівня наповнення рідиною в прямокутній ємності призматичної форми. Методика проведення експериментального дослідження передбачала перевірку адекватності використання математичних алгоритмів при визначенні частот вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливань, а також визначення декременту загасання для рідини різної в'язкості. Як результат доведено адекватність використання формул, які визначають частоти вільних коливань рідини, максимальна похибка не перевищує 4,35 %. Експериментальним шляхом, а також з застосуванням теоретичних моделей руху в'язкої рідини у так званих парціальних поверхневих прошарках, визначено декремент затухання коливань для трьох рідин різної в'язкості: для води, для 20 % розчину цукру у воді, для рослинної олії. На основі експериментальних досліджень визначено амплітуди та частоти вимушених коливань для різних типів рідин шляхом побудови амплітудно-частотної характеристики. Розрахунковим шляхом показано, як впливає декремент загасання рідини на величину горизонтального зсуву поверхневого шару рідини в цистерні при її транспортуванні колісним трактором.

Ключові слова: ємність, коливання, частота, декремент, амплітуда, вільна поверхня рідини.

А. П. КОЖУШКО**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЕМКОСТЯХ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Раскрытие вопросов, связанных с решением задач исследования движения жидкости в частично заполненных конструкциях различной формы, всегда было актуальным. Это связано, в частности, с необходимостью обеспечения продольной и поперечной устойчивости движения объектов, в которых происходит транспортировка жидкости. Современные методы и средства исследования, которые позволяют описать движение жидкости в емкости, чрезмерно сложны и требуют от ученого углубленных знаний. Поэтому создание математического алгоритма, который бы был простым и при этом обеспечивал достаточную точность определения колебательного движения в емкости, целесообразно. Каждая разработка нового математического алгоритма требует проведения экспериментальных исследований для проверки ее адекватности. Целью данной работы является подтверждение возможности использования созданного математического аппарата для определения основных параметров свободных колебаний в зависимости от уровня наполнения жидкостью в прямоугольной емкости призматической формы. Методика проведения экспериментального исследования предусматривала проверку адекватности использования математических алгоритмов при определении частот свободных колебаний жидкости в емкости путем сравнения теоретических и экспериментальных значений периодов колебаний, а также определение декремента затухания колебаний для жидкости различной вязкости. В результате доказана адекватность формул для определения частот свободных колебаний жидкости в емкости; максимальная погрешность не превышает 4,35%. Экспериментальным путем, а также при использовании теоретических моделей движения вязкой жидкости в так называемых парциальных поверхностных слоях, определены декременты затухания колебаний для трех жидкостей различной вязкости: для воды, для 20% раствора сахара в воде и для растительного масла. На основе экспериментальных исследований определены амплитуды и частоты вынужденных колебаний различных типов жидкостей путем построения амплитудно-частотной характеристики. Расчетным путем показано, как влияет декремент затухания жидкости на величину горизонтального смещения поверхностного слоя жидкости в цистерне при ее транспортировке колесным трактором.

Ключевые слова: емкость, колебания, частота, декремент, амплитуда, свободная поверхность жидкости.

А. Р. КОЖУШКО**EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL STUDY OF LIQUID OSCILLATION DAMPING IN A FREE SURFACE VESSEL**

Studying the issues related to solving the problems of the movement of fluid in partially filled structures of various shapes has always been relevant. This is due, in particular, to the need to ensure the longitudinal and lateral stability of the movement of objects in which the liquid is transported. Contemporary methods and research tools that allow describing the movement of liquid in a container are overly complex and require in-depth knowledge from a scientist. Therefore, development of a mathematical algorithm that would be simple and at the same time ensure sufficient accuracy in determining the oscillatory motion in a container is advisable. Each development of a new mathematical algorithm requires experimental research to verify its adequacy. The purpose of this work is to confirm the feasibility of using the created mathematical apparatus for determining the main parameters of free vibrations depending on the level of liquid in a rectangular prismatic container. The experimental research methodology provides for checking the adequacy of the mathematical algorithms in determining the frequencies of free oscillations of liquid in a container by comparing the theoretical and experimental values of the oscillation periods, as well as determining the damping decrement of oscillations for liquids of different viscosity. As a result, the adequacy of the formulas for determining the frequencies of free oscillations of liquid in a container is proved; the maximum error does not exceed 4.35%. The decrements of vibration damping are determined experimentally, as well as using theoretical models of the motion of viscous liquid in the so-called partial surface layers, for three liquids of different viscosity, namely, for water, for 20% sugar and water solution, and for vegetable oil. On the basis of experimental studies, the amplitudes and frequencies of forced vibrations of various types of liquids are determined by constructing an amplitude-frequency characteristic. It is shown by calculation how the damping decrement of the liquid affects the value of the horizontal displacement of the surface layer of the liquid in the tank during its transportation by a wheeled tractor.

Key words: vessel, oscillations, frequency, decrement, amplitude, free liquid surface.

Вступ. В наш час великої популярності набуло дослідження руху рідини в конструкціях різноманітної фо-

© А. П. Кожушко, 2020

рми, які, зазвичай, частково заповнені рідиною. Такі дослідження ведуться в кораблебудуванні, транспортному машинобудуванні, авіаційній та ракетно-космічній техніці. Однією з важливих науково-технічних проблем є забезпечення позовжньої та поперечної стійкості руху об'єктів з рідиною. Поздовжні та поперечні коливання конструкції об'єктів, частково заповнених рідиною, при інтенсивному русі можуть призвести до збільшення динамічного навантаження, аварійної ситуації тощо; зважаючи на це, виникає необхідність ще на етапі створення нової техніки моделювати складний рух рідини в ємностях та досліджувати її вплив на збереження стійкості.

Аналіз останніх досліджень. Вирішення проблеми дослідження руху об'єкту з рідиною загалом зводиться до визначення властивостей рідини, яка рухається з плином часу в замкнутій ємності. При дослідженні руху часток суцільного середовища зазвичай використовують два методи – *Ейлера* та *Лагранжа* [1, 2]:

Метод Ейлера базується на прив'язуванні всіх змінних величин до координат нерухомого середовища. Тобто в кожній точці простору (x, y, z) вивчаються параметри руху у будь-який момент часу t . Таким чином, швидкість рідини в будь-якій точці простору повинна бути функцією чотирьох змінних – x, y, z, t . Таке формулювання свідчить про те, що траєкторія руху часток не відслідковується. Стан рідини оцінюється лише векторним полем швидкостей. *Метод Лагранжа* ґрунтується на виборі початкових змінних, тобто початкових координат частки рідини в певний момент часу. З плином часу ця частка зміщується в просторі, і координати нерухомого простору представляють собою функції початкових координат частки. Тобто рух рідини за певний час відслідковується за траєкторіями її часток.

На сьогоднішній день існує декілька засобів для вирішення задач з дослідження руху рідини [3]: *модель ідеальної нестискуваної рідини* (рівняння Ейлера); *квазігідродинамічні моделі*; *модель в'язкої нестискуваної рідини* (рівняння Нав'є – Стокса) та інші. Окрім того, існують моделі, які базуються на обчисленні стохастичних диференціальних рівнянь. Їх зазвичай застосовують при дослідженні руху рідини в турбулентному режимі.

Опис та застосування перелічених вище моделей відбувається за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При обчисленні необхідно також вводити крайові умови. Це обумовлено наявністю твердих стінок та вільної поверхні рідини. Окрім того, суттєві труднощі перед науковцями виникають на етапі перетворення континуальної моделі в модель зі звичайними диференціальними рівняннями. Тому при виборі моделі для дослідження руху рідини необхідно виходити з поставлених задач.

При огляді робіт [4, 5], пов'язаних з моделлю ідеальної нестискуваної рідини, відмітимо, що вона найбільш популярна серед науковців, що і не дивно, адже під терміном *ідеальна* розуміється рідина, яка позбавлена в'язкості та теплопровідності. Оскільки рідина може мати різну в'язкість, що певним чином впливає на рух, тому обирати цю модель як базову при розгляді динаміки складного руху об'єкту не є доречним.

Розглядаючи *систему квазігідродинамічних рівнянь*, звернемо увагу на те, що вони є модифікацією рівнянь Нав'є – Стокса. Відмінність стосується лише врахування складових дисипативної дії. З аналізу робіт [6, 7] встановлено, що відносно мала величина дисипативної дії дає змогу проводити аналіз течії, яка описується класичними моделями гідродинаміки. Але оскільки тертя в замкнутій ємності, яка не є проточною, відсутнє (окрім тертя рідини об стінки ємності при коливаннях), то використовувати таку модель недоцільно.

Отже, при описі руху в'язкої нестискуваної рідини в замкнутій ємності доцільно використовувати математичну модель, яка базується на рівнянні Нав'є – Стокса. Зазначене рівняння має складну математичну природу, оскільки при його розв'язанні необхідно враховувати в'язкість рідини, що накладає певні труднощі при формуванні крайових умов. Тому аналітичний розв'язок до сьогоднішнього дня не знайдено, і більшість науковців застосовують чисельні методи розв'язання [1 – 3, 8]. Як вказано в роботі [8], більшість ефективних чисельних методів розв'язання рівняння Нав'є – Стокса ґрунтується на розв'язках нестационарної задачі для сталого стану течії.

Відомі роботи [1, 9], які ґрунтувалися на відомих припущеннях щодо малих коливань в'язкої рідини в замкнутій ємності. Це дозволило науковцям використовувати лінеаризовані рівняння Нав'є – Стокса, або застосовувати *малі числа Рейнольдса* [10] (тобто досліджувати рідину з великою в'язкістю); при цьому рівняння Нав'є – Стокса зводиться до моделі ідеальної нестискуваної рідини. Виділимо також метод *штучної стисненості* [11], який зводиться до додавання штучного доданка, що дорівнює нулю при розв'язанні у сталому часі. Це один з перших чисельних методів розв'язання в природних фізичних змінних.

Також одним з перших та, як виявилось, найбільш популярних став *метод часток в осередку*. Цей метод ґрунтується на перевагах Ейлерова та Лагранжевого підходів. Тобто розв'язок базується на дослідженні сукупності часток фіксованої маси (підхід Лагранжа), які рухаються скрізь нерухому сітку (підхід Ейлера) [12]. Таким чином, частки визначають природні параметри рідини (швидкість, масу), а сітка встановлює параметри поля (тиск, щільність). Даний метод дозволяє відстежувати динаміку багатокomпонентних середовищ, але недоліком цього методу є те, що він потребує великої обсяги обчислювальних операцій.

На практиці широкого загалу набув *метод розщеплення* [13], який використовує розщеплення фізичних процесів в часовому континуумі, після чого вирішуються стаціонарні задачі. На думку автора [14] цей метод має велику перспективу при моделюванні в'язких потоків, дослідженні течії розрідженого газу та турбулентності.

Як видно з аналізу, обчислення рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини в ємності носить велику практичну значимість, тому створення або модернізація вже існуючих чисельних методів продовжується і сьогодні. Подальший розвиток алгоритмів розв'язання шляхом удосконалення розрахункових моделей з використання апроксимованих функцій більшого порядку призведе на кінцевому етапі до труднощів їх реалізації. Таке спосте-

реження вказує на обмежену здатність їх впровадження в інженерно-конструкторську діяльність при формуванні досліджень руху об'єкту з рідиною.

З вигідної сторони відрізняється робота [15], в якій автори запропонували при розгляді динаміки руху об'єкту з рідким вантажем використовувати комбіновану модель, яка об'єднує рівняння Нав'є – Стокса з рівняннями *поверхневих хвиль Релея*. Такий підхід ґрунтується на так званій *потенціальній постановці задачі*, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважався безвихровим, та використанні *методу парціальних осциляторів*, який дозволив для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю. Саме такий підхід, на переконання авторів зазначеної роботи, необхідно використовувати в усіх інших технічних застосуваннях, але число осциляторів повинно обиратися з урахуванням основної постановки задач. Крім того, на відміну від розглянутих вище моделей, де важливо врахувати реальну форму ємності, доцільно проводити еквівалентну заміну реальної форми (циліндричної, овальної, *валізної* і т.п.) на форму прямокутного паралелепіпеда. Принципом приведення є збереження розмірів вільної поверхні рідини та маси рідини в цистерні.

Постановка задачі. Окреслений в роботі [15] підхід має великі перспективи щодо вирішення актуальних інженерно-конструкторських задач, тому необхідним є підтвердження доцільності його використання шляхом проведення експериментального дослідження.

В ході експериментальних досліджень вирішувались наступні задачі:

- перевірити адекватність використання математичних алгоритмів при визначенні частот вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливань;
- визначити декремент загасання коливань для рідини різної в'язкості.

Об'єктом експериментальних досліджень є ємність прямокутної форми (рис. 1, *а*) з габаритними значеннями $0,3 \text{ (} D = 2L \text{)} \times 0,2 \text{ (} Ш = 2l \text{)} \times 0,2 \text{ (} B = H \text{)} \text{ м}$, а також три види рідини (рис. 1, *б – з*): 20 % розчин цукру у воді, вода, рослинна (соняшникова) олія.



а



б



в



з



а



б

Рис. 1 – Об'єкти експериментальних досліджень:

а – ємність; *б* – ємність з 20 % водним розчином цукру (щільність $\rho = 1095 \text{ кг/м}^3$);
в – ємність з водою ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$); *з* – ємність з рослинною олією ($\rho = 920 \text{ кг/м}^3$).

Рис. 2 – Ареометри, які використовуються:
а – ТУ 25-11.1209-75;
б – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009.

Проведення експериментальних досліджень відбувалось при температурах навколишнього середовища

та рідини $+20...25^{\circ}\text{C}$. Дослідження проводилось на рівній твердій поверхні з нахилом, меншим за 1° град, як в поздовжній, так і в поперечній площинах.

Порядок проведення експериментальних досліджень був наступний:

1. Прямокутна ємність встановлюється на дві дерев'яні підставки (висотою $0,025\text{ м}$), що розміщені на рівній поверхні паралельно одна до одної. При дослідженні поздовжніх коливань підставки встановлювались на грані довжиною $0,2\text{ м}$, а при дослідженні поперечних коливань – на грані довжиною $0,3\text{ м}$.

2. Ємність заповнюється конкретною рідиною на висоту $h = 0,15\text{ м}$, $0,1\text{ м}$ та $0,05\text{ м}$.

3. Одна з підставок прибирається, створюючи кінематичне збурення рідини в ємності, та реєструються коливання рідини в трьох серіях дослідів.

Весь процес експериментальних досліджень фіксується на відеокамеру, яка встановлюється на штатив. Кожен з дослідів проводився 5 разів.

В ході випробувань використовується два ареометри:

- для води та 20% розчину води і цукру – ТУ 25-11.1209-75 (рис. 2, а);
- для рослинної олії – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009 (рис. 2, б).

Теоретичні результати досліджень з визначення частоти вільних коливань рідини беруться з роботи [15], де згідно з результатами перетворень та введенням певних допущень (крайових умов) отримано наступні формули для частот вільних коливань у поперечній та поздовжній площинах:

$$v_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+m}{\pi l} \cdot \text{th} \left[\pi \cdot (0,5+m) \cdot \frac{h}{l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+m)}{l} \right]^2 \right)}, m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+k}{\pi L} \cdot \text{th} \left[\pi \cdot (0,5+k) \cdot \frac{h}{L} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+k)}{L} \right]^2 \right)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

В наведених рівняннях m та k відповідають певному шару рідини, що коливається; g – прискорення вільного падіння; σ – коефіцієнт поверхневого натягу. Для перевірки адекватності математичної моделі достатнім буде визначення частоти першого шару рідини ($m = 0$ та $k = 0$), який має суттєво більшу масу в порівнянні з іншими шарами рідини. Тоді теоретична частота вільних коливань рідини для першого шару рідини розраховується так:

$$v_{m=0}^T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi l} \cdot \text{th} \left[\frac{\pi h}{2l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2l} \right]^2 \right)}; \quad (1)$$

$$v_{k=0}^T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi L} \cdot \text{th} \left[\frac{\pi h}{2L} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2L} \right]^2 \right)}. \quad (2)$$

Зважаючи на значення габаритних розмірів ємності ($l = 0.15$ – напівдовжина та $L = 0.1$ – напівширина), обчислюємо частоту вільних коливань; результати зведемо до табл. 1.

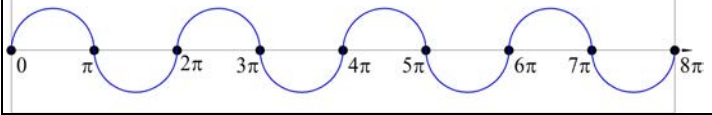
Таблиця 1 – Результати теоретичного розрахунку основних частот вільних коливань рідини

Ріди-на	Висота наповнення, м	Теоретичне значення частоти вільних коливань рідини ν^T , Гц	Коефіцієнт пове-рхневого натягу рідини σ , Н/м	Щільність рідини ρ , кг/м ³	Кінематична в'язкість, сСт
20% роз-чин води та цукру	Поперечні коливання		0.0504 [17]	1095	1.79 [18]
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.959 / 1.893 / 1.6			
	Поздовжні коливання				
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.545 / 1.426 / 1.118			
Вода	Поперечні коливання		0.07422	1000	1.00
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.959 / 1.893 / 1.601			
	Поздовжні коливання				
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.545 / 1.426 / 1.119			
Рослинна олія	Поперечні коливання		0.03634 [19]	920	60.30 [20]
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.959 / 1.893 / 1.6			
	Поздовжні коливання				
	0.15 / 0.1 / 0.05	1.545 / 1.426 / 1.118			

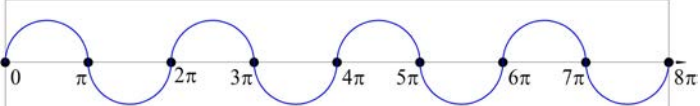
Аналізуючи дані з табл. 1, стає відомо, що на основні частоти вільних коливань коефіцієнт поверхневого натягу та щільності рідини (для 3-ох рідин, що досліджуються) не впливають. Причина – мале значення коефіцієнта поверхневого натягу рідини нівелює у наведених формулах свій вплив, а також вплив щільності на частоту відповідних коливань.

Результати експериментальних досліджень з визначення основної частоти вільних коливань рідин. Відлік періодів коливань рідини відбувався у моменти часу, коли вільна поверхня рідини перетинала біля торцевої стінки лінію середнього рівня та рухалася у вертикальному напрямі з максимальною швидкістю, що унеможливило суттєву похибку. Отримані результати експериментального дослідження зведені до табл. 2 – 4.

Таблиця 2 – Поперечні коливання рідини у ємності, рідина – 20 % водний розчин цукру

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с	Відхилення, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	13	25	37	47	11.75	0.489	0.510	+3.92
2	0	12	25	38	49	12.25	0.510		0.00
3	0	13	23	36	47	11.75	0.489		+3.92
4	0	12	24	36	48	12.00	0.500		+1.96
5	0	12	25	38	50	12.50	0.521		-2.16
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	13	25	38	51	12.75	0.531	0.528	-0.57
2	0	13	25	37	50	12.50	0.521		-1.33
3	0	13	26	38	51	12.75	0.531		-0.57
4	0	12	25	36	49	12.25	0.510		+3.41
5	0	13	26	38	50	12.50	0.521		+1.33
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	14	29	44	59	14.75	0.615	0.625	+1.60
2	0	16	30	46	61	15.25	0.635		-1.60
3	0	15	30	45	60	15.00	0.625		0.00
4	0	16	31	46	62	15.50	0.645		-3.20
5	0	15	30	45	61	15.25	0.635		-1.60

Таблиця 3 – Поздовжні коливання рідини у ємності, рідина – 20 % водний розчин цукру

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	15	29	45	60	15.00	0.625	0.647	+3.40
2	0	15	30	46	62	15.50	0.646		+0.15
3	0	16	31	46	61	15.25	0.635		-1.85
4	0	16	31	46	62	15.50	0.646		+0.15
5	0	16	32	47	63	15.75	0.656		-1.39
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	17	34	49	66	16.50	0.688	0.701	+1.85
2	0	16	33	50	67	16.75	0.698		+0.43
3	0	16	32	49	65	16.25	0.677		+3.42
4	0	17	34	50	67	16.75	0.698		+0.43
5	0	17	34	51	68	17.00	0.708		-0.99
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	22	46	67	87	21.75	0.906	0.894	-1.34
2	0	22	45	66	86	21.50	0.896		-0.22
3	0	23	45	68	88	22.00	0.917		-2.57
4	0	22	46	66	87	21.75	0.906		-1.34
5	0	22	45	67	87	21.75	0.906		-1.34

Зауважимо, що під час дослідів відбувалася реєстрація загасаючих коливань, а логарифмічний декремент

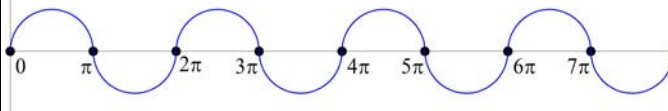
загасання d , як відомо, знижує частоту вільних коливань у

$$\sqrt{1 - d^2 / (2\pi)^2}$$

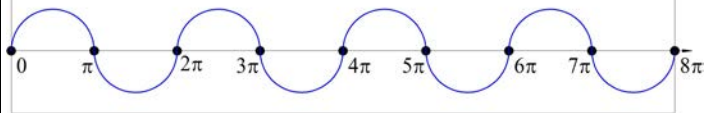
раз. Проте, з огляду на невеликі значення декременту, які будуть представлені у подальших пунктах статті, значеним впливом можна знехтувати.

Також відмітимо, що після кінематичного збурення нахил прямокутної ємності склав близько 4° , проте ця обставина помітним чином не вплинула на площу вільної поверхні і, як наслідок, на значення періоду коливань, де спостерігаються відхилення різного знаку.

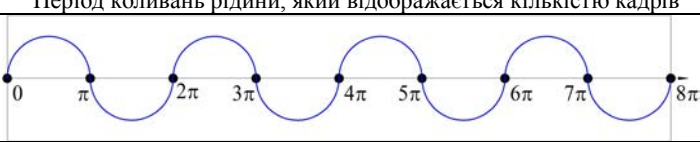
Таблиця 4 – Поперечні коливання у ємності, рідина – вода

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с	Відхилення, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	13	25	37	48	12.00	0.500	0.511	+2.15
2	0	12	25	37	49	12.25	0.510		+0.20
3	0	12	23	36	48	12.00	0.500		+2.15
4	0	13	25	36	49	12.25	0.510		+0.20
5	0	12	24	36	47	11.75	0.489		-4.11
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	13	26	38	50	12.50	0.521	0.529	+1.51
2	0	13	25	37	49	12.25	0.510		+3.59
3	0	13	26	38	50	12.50	0.521		+1.51
4	0	12	25	37	50	12.50	0.521		+1.51
5	0	13	27	38	51	12.75	0.531		-0.38
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	15	29	44	60	15.00	0.625	0.625	0.00
2	0	15	30	44	59	14.75	0.615		+1.60
3	0	15	30	45	61	15.25	0.635		-1.60
4	0	14	30	44	60	15.00	0.625		0.00
5	0	15	29	45	60	15.00	0.625		0.00

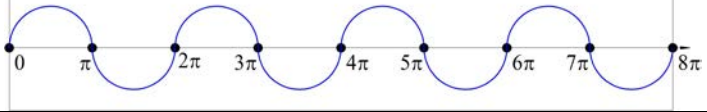
Таблиця 5 – Поздовжні коливання у ємності, рідина – вода

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с	Відхилення, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	14	30	44	59	14.80	0.617	0.647	+4.35
2	0	16	30	46	61	15.25	0.635		+1.89
3	0	16	32	47	63	15.75	0.656		-1.01
4	0	16	31	47	62	15.50	0.646		+0.15
5	0	15	30	45	61	15.25	0.635		+1.89
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	17	33	49	66	16.50	0.688	0.702	+2.04
2	0	19	35	50	68	17.00	0.708		-0.85
3	0	18	33	50	67	16.75	0.698		+0.57
4	0	18	34	51	67	16.75	0.698		+0.57
5	0	16	33	49	66	16.50	0.688		+2.04
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	22	43	65	85	21.25	0.885	0.894	+1.02
2	0	22	44	66	86	21.50	0.896		-0.22
3	0	21	43	65	84	21.00	0.875		+2.40
4	0	22	44	65	86	21.50	0.896		-0.22
5	0	21	44	65	87	21.75	0.906		1.01

Таблиця 6 – Поперечні коливання у ємності, рідина – рослинна олія

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_m^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_m^T , с	Відхилення, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	12	25	37	49	12.25	0.510	0.511	+0.20
2	0	12	24	36	48	12.00	0.500		+2.15
3	0	13	23	36	47	11.75	0.489		+4.11
4	0	13	25	37	49	12.25	0.510		+0.20
5	0	12	24	36	48	12.00	0.500		+2.15
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	13	25	37	51	12.75	0.531	0.528	-0.38
2	0	12	25	37	50	12.50	0.521		+1.51
3	0	13	26	38	50	12.50	0.521		+1.51
4	0	12	25	38	50	12.50	0.521		+1.51
5	0	13	26	37	49	12.25	0.510		+3.59
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	15	29	45	59	14.75	0.615	0.625	+1.60
2	0	14	29	44	60	15.00	0.625		0.00
3	0	15	30	45	61	15.25	0.635		-1.60
4	0	14	30	45	62	15.50	0.646		-3.36
5	0	15	30	44	60	15.00	0.625		0.00

Таблиця 7 – Поздовжні коливання у ємності, рідина рослинна олія

№ досліду	Період коливань рідини, який відображається кількістю кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди експер. коливань рідини T_k^E , с	Періоди теор. коливань рідини T_k^T , с	Відхилення, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0.15$ м									
1	0	16	30	47	62	15.50	0.646	0.647	-0.18
2	0	15	29	45	60	15.00	0.625		+3.40
3	0	16	31	46	62	15.5	0.646		+0.18
4	0	15	30	45	60	15.00	0.625		+3.40
5	0	16	31	46	61	15.25	0.635		+1.79
Висота наповнення $h = 0.1$ м									
1	0	17	33	50	67	16.75	0.698	0.701	+0.44
2	0	18	34	50	67	16.75	0.698		+0.44
3	0	19	35	51	68	17.00	0.708		-1.05
4	0	17	34	49	66	16.50	0.688		+1.93
5	0	17	34	50	68	17.00	0.708		-1.05
Висота наповнення $h = 0.05$ м									
1	0	21	44	66	88	22.00	0.917	0.894	-2.57
2	0	21	45	65	87	21.75	0.906		-1.34
3	0	22	44	65	87	21.75	0.906		-1.34
4	0	21	44	64	86	21.50	0.896		-0.22
5	0	22	45	65	85	21.25	0.885		+1.01

Аналізуючи результати досліджень з табл. 2 – 7, встановлено, що максимальна похибка при поперечних і при поздовжніх коливаннях не перевищує 4,35 %. Така величина похибки дає право стверджувати, що математичні алгоритми, які використовуються при теоретичному визначенні частот вільних коливань рідини, є адекватними.

Теоретичне дослідження з визначення декременту загасання вільних коливань рідини в прямокутній ємності призматичної форми. Позначимо довжину, ширину та висоту прямокутного паралелепіпеду, об'єм якого займає рідина, як a , b та h . Рідина має щільність ρ та кінематичну в'язкість ν . Позначимо також власну (кругову) частоту n – того парціального осцилятора символом ω_n , а символом Φ_n – відповідну власну форму потенціалу для поздовжніх коливань, що визначається за формулою:

$$\Phi_n = \Delta u \cdot \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{\operatorname{ch}(k\pi y/a)}{\operatorname{ch}(k\pi h/a)} \cdot \sin(\omega_n t), \quad k = 1, 3, 5;$$

де Δu – амплітуда коливань; числа $k = 1, 3, 5$ відповідають першому, другому та третьому парціальному шару рідини, $k = 2n - 1$.

Обчислимо значення безрозмірної характеристики коливань:

$$R_n = \omega_n \cdot a^2 / \nu,$$

яке в теорії потенціальних коливань рідини, що має вільну поверхню, називають, хоча і не зовсім слушно, числом Рейнольдса, та припустимо, що це число задовольняє умові:

$$R_n > 5 \cdot 10^4. \quad (3)$$

Тоді, як показано в [4], використовуючи для поставленої задачі так званий *енергетичний підхід*, шуканий логарифмічний декремент загасання можна знайти за формулою:

$$\delta_n = \Delta E_n / 2E_n, \quad (4)$$

де ΔE_n – це робота сил тертя за один період коливань,

$$\Delta E_n = \pi \rho \sqrt{\nu / \omega_n} \iint_{\Omega} v_n^2 dS; \quad (5)$$

Ω – тверда поверхня стінок ємності, що змочується рідиною; v_n – амплітуда швидкості руху рідини у стінки; E_n – повна механічна енергія парціального осцилятора,

$$E_n = \frac{\rho}{2} \cdot \iiint_V v_n^2 dV; \quad (6)$$

V – об'єм ємності, що зайнятий рідиною.

В роботі [4] формули (4) – (6) було застосовано для ємності циліндричної форми, де й потенціали Φ_n використовували *циліндричні функції Бесселя*, а поле швидкостей було просторовим.

Зараз це поле є плоским, і тому інтеграл (6) можна спростити до такого вигляду:

$$\iiint_V v_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_{\bar{\sigma}}} v_n^2 dS, \quad (7)$$

де $\Omega_{\bar{\sigma}}$ – це дві бічні стінки ємності, що має довжину a і висоту h .

Крім двох бічних стінок ємність має дві торцеві стінки, з загальною поверхнею Ω_m , та днище $\Omega_{\partial n}$, причому має місце рівність:

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \iint_{\Omega_{\bar{\sigma}}} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_m} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_{\partial n}} v_n^2 dS. \quad (8)$$

Обчислимо кожний із інтегралів правої частини (8) окремо.

На дні ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\cos^2(k\pi x/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)};$$

звідки

$$\iint_{\Omega_{\partial n}} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{(k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \frac{ab}{2}.$$

На торцях ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\operatorname{ch}^2(k\pi y/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)},$$

звідки

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{тор}}} v_n^2 dS_{\text{тор}} &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \left[h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{2k\pi/a} \right] = \\ &= \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot b \cdot h \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} + \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} \right]. \end{aligned}$$

На бокових стінках ємності швидкість рідини має дві складові – $v_{n,x}$ та $v_{n,y}$, причому:

$$v_{n,x}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \cos^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{ch}^2(k\pi y/a);$$

$$v_{n,y}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \sin^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{sh}^2(k\pi y/a).$$

Тому:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_6} v_{n,x}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= a \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{2k\pi/a} \right] = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]; \\ \iint_{\Omega_6} v_{n,y}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{sh}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]. \end{aligned}$$

Загальний результат для бічних стінок ємності має вигляд:

$$\iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a},$$

звідки

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{ab}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} + a h \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + b h \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right] \right]$$

і

$$\iiint_V v_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}.$$

Підставляємо отримані результати в (4) – (6) і отримуємо шуканий результат:

$$\delta_n = \frac{\Delta E_n}{2E_n} = \left[\frac{\frac{ab}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi/a)} + (a+b)h \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{bh}{\operatorname{ch}^2(k\pi/a)}}{\frac{\rho abh}{2} \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}} \right] \cdot \pi \rho \sqrt{\frac{v}{\omega_n}},$$

звідки

$$\delta_n = \pi \sqrt{\frac{v}{\omega_n (a/2)^2}} \cdot \left[1 + \frac{a}{b} + \frac{(1 + (2h/a))k\pi}{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)} \right]. \quad (9)$$

Проаналізуємо отриманий результат.

По-перше, він подібний до того, що був знайдений в роботі [4], але присутні й суттєві відмінності; особливо щодо старших тонів коливань.

По-друге, якщо рівень рідини не малий, а також для старшого тону коливань, формула (9) спрощується і приймає наступний вигляд:

$$\delta_n = 2\pi \sqrt{v / (\omega_n \cdot r_*^2)}, \quad (10)$$

де $r_* = \frac{a \cdot b}{a + b}$ – це так званий *еквівалентний радіус призматичної ємності*.

Відмітимо, що в визначення цього розміру довжина та ширина ємності входять симетрично, а частота ω_n залежить від $\sqrt{a}$, звідки декремент δ_n є пропорційним $\sqrt[4]{a}$. Як наслідок, *поздовжні та поперечні коливання*

мають майже однаковий декремент загасання. Проте, в справедливості цього твердження нас остаточно переконують результати експериментального дослідження декременту, що наведено в наступному пункті.

По-третє, формули (9) і (10) можна застосовувати лише для рідин малої в'язкості, а для таких в'язких, як рослинна олія, лише при використанні великих ємностей (цистерн). Що стосується дослідної ємності малого розміру, то для неї умова (3) щодо числа Рейнольдса виконується лише для води і цукрового розчину.

А для рослинної олії отримаємо іншу умову: $R_l < 10^4$, тому розвинути тут теорію розрахунку декременту використовувати не вдається, про що буде сказано далі. Проте, якщо перейти до розміру тракторних цистерн, то ситуація з виконанням умови (3) змінюється на кращу.

До того ж, для цистерн нівелюється суттєвий вплив на величину декременту загасання з боку сили поверхневого натягу рідини (рис. 3).

Якщо число Рейнольдса для призматичної ємності визначити такою ж формулою, як для циліндра, тобто

$$R_n = \omega_n \cdot r_*^2 / \nu,$$

то формула (10) для декременту стане такою:

$$\delta_n = 2\pi / \sqrt{R_n}. \quad (11)$$

Звідки, зважаючи на умову $R_n > 5 \cdot 10^4$ (3), отримуємо нерівність $\delta_n < 0.03$. Зрозуміло, що коли рівень рідини зменшується, то треба використовувати формулу (9), і там декремент зростає (рис. 3).

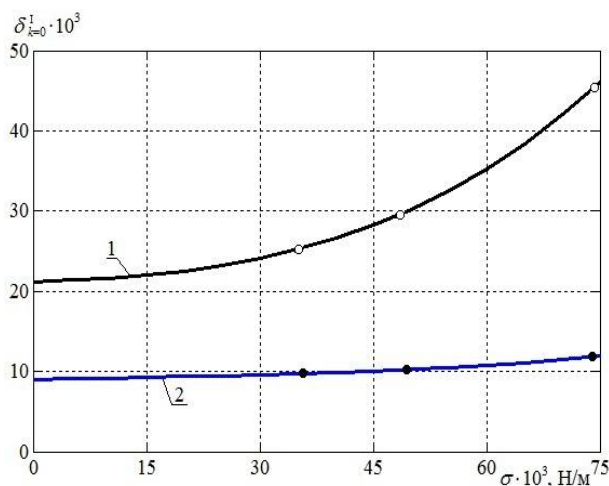


Рис. 3 – Експериментальна залежність логарифмічного декременту загасання від поверхневого натягу рідини [4]: 1 – ємність діаметром 200 мм; 2 – діаметром 518 мм.

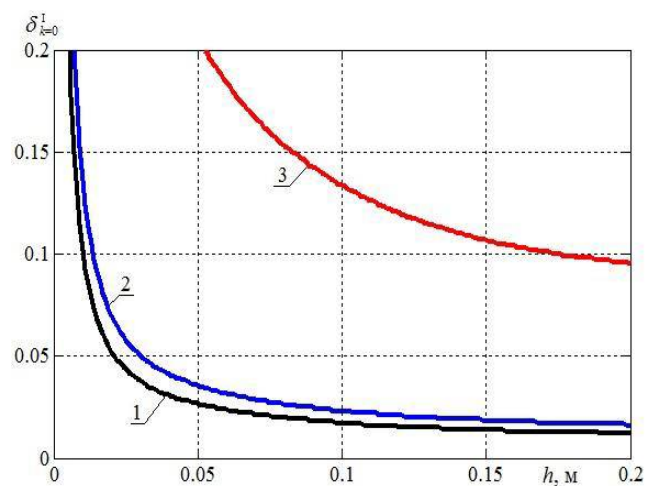


Рис. 4 – Залежність логарифмічного декременту загасання від рівня наповнення h в дослідній ємності розміром $0,3 \times 0,2$ м: 1 – вода; 2 – 20 % розчин цукру; 3 – рослинна олія.

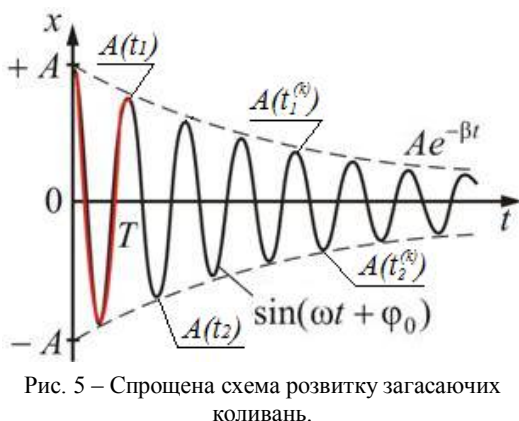


Рис. 5 – Спрощена схема розвитку загасаючих коливань.

де n – кількість хвиль.

При розв'язанні задач динаміки науковці при визначенні дисипативних характеристик, зазвичай, використовують логарифмічний декремент загасання (ЛДЗ), причому

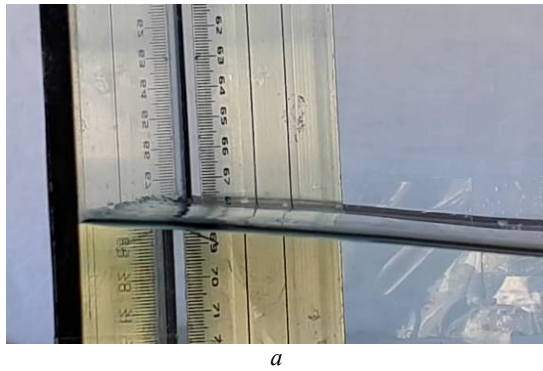
$$D = e^{-\delta} \Rightarrow -\delta = \ln D \Rightarrow \delta = -\ln D. \quad (13)$$

Експериментальне дослідження з визначення декременту загасання для рідин різної в'язкості. Відомо, що величиною декременту характеризується інтенсивність загасання коливань шляхом визначення відношення двох суміжних граничних відхилень системи (рис. 5) від рівноважного стану за умови руху системи в одному напрямку:

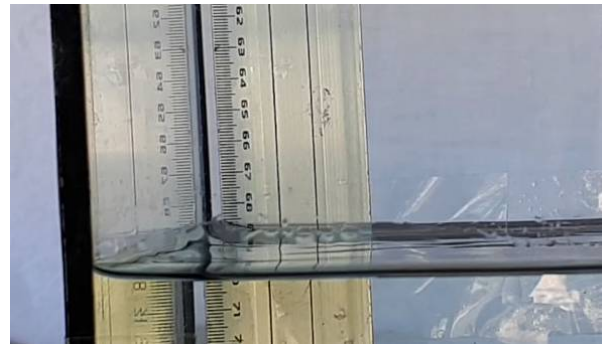
$$D = A(t) / A(t+T).$$

Для декількох періодів T коефіцієнт затухання D знаходять за формулою:

$$D = \sqrt[n]{\left| \frac{A(t_1^{(k)}) - A(t_2^{(k)})}{A(t_1) - A(t_2)} \right|}, \quad (12)$$



а



б

Рис. 6 – Граничні ординати вільної поверхні при наповненні ємності з водою на рівень $h = 0.1$ м:
 a – величина $A(t_1)$; b – величина $A(t_2)$.

Таблиця 8 – Визначення коефіцієнту загасання для 20 % водного розчину цукру

Ріди-на	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. загасан-ня D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. За-гасання D		
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$			
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	63,0	64,0	0,932	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,6	68,6	0,935		
		2	63,0	63,9				2	67,7	68,5			
		3	63,0	63,9				3	67,7	68,5			
		4	63,0	63,9				4	67,7	68,5			
		5	63,1	63,9				5	67,7	68,5			
		6	63,1	63,8				6	67,8	68,5			
		7	63,1	63,8				7	67,8	68,5			
		8	63,1	63,8				8	67,8	68,4			
		9	63,1	63,8				9	67,8	68,4			
		10	63,2	63,7				10	67,8	68,4			
		11	63,2	63,7				11	67,9	68,4			
		12	63,2	63,7				12	67,9	68,4			
		13	63,3	63,7				13	67,9	68,3			
	2	1	62,9	63,9	0,935			5	14	67,9		68,3	0,929
		2	63,0	63,9					15	67,9		68,3	
		3	63,0	63,9					16	67,9		68,3	
		4	63,0	63,9					17	67,9		68,3	
		5	63,0	63,9					18	68,0		68,3	
		6	63,0	63,9			1		67,6	68,6			
		7	63,1	63,9			2		67,6	68,5			
		8	63,1	63,8			3		67,6	68,5			
		9	63,1	63,8			4		67,7	68,5			
		10	63,1	63,8			5		67,7	68,5			
		11	63,1	63,8			6		67,7	68,4			
		12	63,2	63,8			7		67,8	68,5			
		13	63,2	63,7			8		67,7	68,5			
		14	63,2	63,7			9		67,8	68,5			
		15	63,2	63,7			10		67,8	68,4			
		16	63,2	63,7			11		67,8	68,4			
		17	63,3	63,7			12		67,8	68,4			
		18	63,3	63,6			13		67,9	68,3			
	3	1	63,0	64,0	0,939		Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	5	14	67,9	68,4	0,929	
		2	63,0	63,9					15	67,9	68,3		
		3	63,0	63,9					16	67,9	68,3		
		4	63,0	63,9					17	67,9	68,3		
		5	63,0	63,9					18	67,9	68,3		
		6	63,1	63,9					19	67,9	68,3		
		7	63,1	63,8					20	67,9	68,3		
		8	63,1	63,8					21	68,0	68,3		
		9	63,1	63,8					22	68,0	68,2		
		10	63,1	63,8									
		11	63,2	63,7									

Таблиця 9 – Визначення коефіцієнту загасання для води

Ріди-на	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. загасан-ня D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. За-гасання D
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$	
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	63,2	64,2	0,896	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,7	68,7	0,905
		2	63,3	64,1				2	67,8	68,7	
		3	63,3	64,1				3	67,8	68,6	
		4	63,3	64,0				4	67,8	68,6	
		5	63,3	64,0				5	67,8	68,6	
		6	63,4	63,8				6	67,9	68,6	
		7	63,4	63,7				7	67,9	68,5	
		8	63,4	63,7				8	67,9	68,5	
		9	63,4	63,7				9	68,0	68,5	
		10	63,4	63,7				10	68,0	68,5	
		11	63,4	63,7				11	68,0	68,4	
	2	1	63,1	64,1	0,903			5	12	68,1	
		2	63,1	64,1			1		67,7	68,7	
		3	63,2	64,0			2		67,8	68,6	
		4	63,2	64,0			3		67,8	68,6	
		5	63,3	64,0			4		67,8	68,6	
		6	63,3	63,9			5		67,9	68,5	
		7	63,3	63,9			6		67,9	68,5	
		8	63,3	63,9			7		67,9	68,5	
	9	63,4	63,8	8	68,0		68,5				
	3	1	63,1	64,1	0,898		6	9	68,0	68,4	0,891
		2	63,1	64,0				1	67,7	68,7	
		3	63,1	64,0				2	67,8	68,7	
		4	63,2	64,0				3	67,8	68,7	
		5	63,2	63,9				4	67,9	68,7	
		6	63,2	63,9				5	67,9	68,6	
		7	63,2	63,9				6	67,9	68,6	
		8	63,3	63,8				7	68,0	68,6	
		9	63,3	63,8				8	68,0	68,6	
		10	63,3	63,8				9	68,0	68,5	
		11	63,3	63,7				10	68,0	68,5	
		12	63,4	63,7				11	68,1	68,5	
		13	63,4	63,7				12	68,1	68,5	
		14	63,4	63,7				13	68,1	68,4	
		15	63,4	63,6			14	68,2	68,4		

Таблиця 10 – Визначення коефіцієнту загасання для рослинної олії

Ріди на	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. За-гасання D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Ординати		Коеф. За-гасання D
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$	
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	64,7	63,7	0,765	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,5	68,5	0,725
		2	64,3	63,7				2	67,8	68,5	
		3	64,1	63,7				3	68	68,5	
		4	63,8	63,7				4	68,1	68,5	
		5	63,2	63,6				5	68,2	68,4	
		6	63,4	63,6							
	2	1	64,7	63,7	0,725		5	1	67,5	68,5	0,720
		2	64,3	63,7				2	67,7	68,5	
		3	64,0	63,7				3	67,9	68,5	
		4	63,7	63,7				4	68,1	68,5	
		5	63,4	63,6				5	68,2	68,5	
		6						6	68,3	68,5	
	3	1	64,7	63,7	0,681		6	1	67,5	68,5	0,681
		2	64,4	63,7				2	67,7	68,5	
		3	64,1	63,7				3	67,9	68,5	
		4	63,8	63,7				4	68,2	68,5	
		5	63,6	63,7				5	68,3	68,5	
		6	63,5	63,6				6	68,4	68,5	

З табл. 8 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для 20 % водного розчину цукру складає

$$\delta_E^{\text{вода+цук}} = \sum_{i=1}^5 \delta_i^{\text{вода+цук}} / 5 = 0,068 \pm 0,005.$$

З табл. 9 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для води складає

$$\delta_E^{\text{вода}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{вода}} / 6 = 0,106 \pm 0,007.$$

З табл. 10 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для рослинної олії складає

$$\delta_E^{\text{р-масло}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{р-масло}} / 6 = 0,335 \pm 0,030.$$

Ширину коридору для значень декременту, що знайдено в експериментах, було визначено з врахуванням точності визначення граничних ординат.

Співставлення теоретичних та експериментальних значень декременту загасання коливань для рідини в призматичній ємності проведено далі, де для цього була використана розроблена теорія врахування залежності декременту від амплітуди коливань.

Визначення формули для опису залежності декременту від амплітуди коливань рідини. Рівняння для зміни потенціалу зміщення парціального слою рідини у поздовжній площині цистерни на її вільній поверхні має вигляд [15]:

$$\rho \ddot{\Phi} + \rho f \dot{\Phi} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \sigma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = -\rho [a_{cm.x}(t) + g \cdot \theta_{cm.z}(t)] \cdot x, \quad (14)$$

та по своїй формі нагадує рівняння руху, причому другий доданок $\rho f \dot{\Phi}$ нагадує силу тертя. І ця аналогія вірна не тільки за формою.

Приберемо в (14) праву частину та застосуємо до лівої частини лінійний диференціальний оператор $grad[.]$. Врахуємо, що $grad[\Phi] = u$, де $u(x, y, t)$ – це зміщення точки рідини з положення рівноваги. Отже, для вільних коливань парціального шару отримаємо:

$$\rho \ddot{u} + \rho f \dot{u} + \rho g \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (15)$$

Якщо тепер всю масу шару привести до вільної поверхні Γ , то з співвідношення (15) з'являється рівняння вільних коливань шару:

$$m \ddot{u} + m f \dot{u} + L[u] = 0, \quad (16)$$

де $L[u]$ – диференціальний оператор, який визначає силу пружності для зв'язку конкретного осцилятора, що має власну частоту ω_n , зі стінками цистерни,

$$L[u] = m_n^p \omega_n^2 u,$$

де m_n^p – маса парціального шару рідини, і рівняння (16) приймає вигляд:

$$m_n^p \ddot{u}_n + m_n^p f_n \dot{u}_n + m_n^p \omega_n^2 u_n = 0. \quad (17)$$

Таким чином, доданок $m_n^p f_n \dot{u}_n$ – це сила тертя, і $\delta_n = \pi f_n / \omega_n$ є логарифмічним декрементом загасання коливань n – того парціального шару рідини.

Дослідимо виникнення сили тертя. Традиційно вважають [4], що оскільки задача вирішується в потенціальній постановці, то це тертя виникає у тонкому пристінному шарі. І це, безумовно, вірно, якщо амплітуда коливань мала, і у відомій формулі для повного тиску:

$$p + 0.5 \rho \dot{u}^2,$$

другим доданком можливо знехтувати.

Відомо, що з цими доданками пов'язують загальні втрати тиску Δp , які виникають по довжині тракту та в місцевих опорах течії:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u}; \quad \xi = \xi_{\text{расп}} + \xi_{\text{міс}}.$$

У пристінному шарі течія ламінарна, і якщо ширина Δl цього шару не залежить від швидкості, тоді

$$\xi_{\text{расп}} = \Psi / \text{Re},$$

де Re – це число Рейнольдса; Ψ – деяка константа, яку можна знайти у довідниках з гідравліки,

$$\text{Re} = |\dot{u}| \cdot \Delta l / \nu.$$

В результаті в доданку $\xi_{\text{расп}} \cdot \dot{u}$ швидкості скорочуються, і тертя стає лінійним:

$$\Delta p_{\text{расп}} = 0.5 \Psi \cdot \rho \cdot \dot{u}.$$

В роботі [4] виведено залежність коефіцієнта Ψ від частоти парціального осцилятора для випадку коливань вільної поверхні круглої форми. Після співставлення з експериментом вона була дещо скорегована і, в результаті, формула для логарифмічного декременту загасання коливань прийняла такий вигляд:

$$\delta_k^I = \frac{\pi}{\sqrt{R_n}} \left[\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 - 1} + \frac{2\xi_n}{\text{sh}(2\xi_n \bar{h})} \right], \quad (18)$$

де число R_n для n -того парціального слою рідини знаходиться за формулою:

$$R_n = \omega_n \cdot r_*^2 / \nu,$$

ν – в'язкість рідини; $\bar{h}$ – відносний рівень наповнення; r_* – радіус циліндра; ξ_k – корінь циліндричної функції Бесселя.

Вище було отримано формулу (9), аналогічну (18), але для ємності призматичної форми.

Що стосується місцевого опору, то для першого парціального шару він виникає при повороті потоку (рис. 7), що набігає на стінку, та характеризується значенням $\xi_{\text{міс}} = 1 \dots 1,2$ [21].

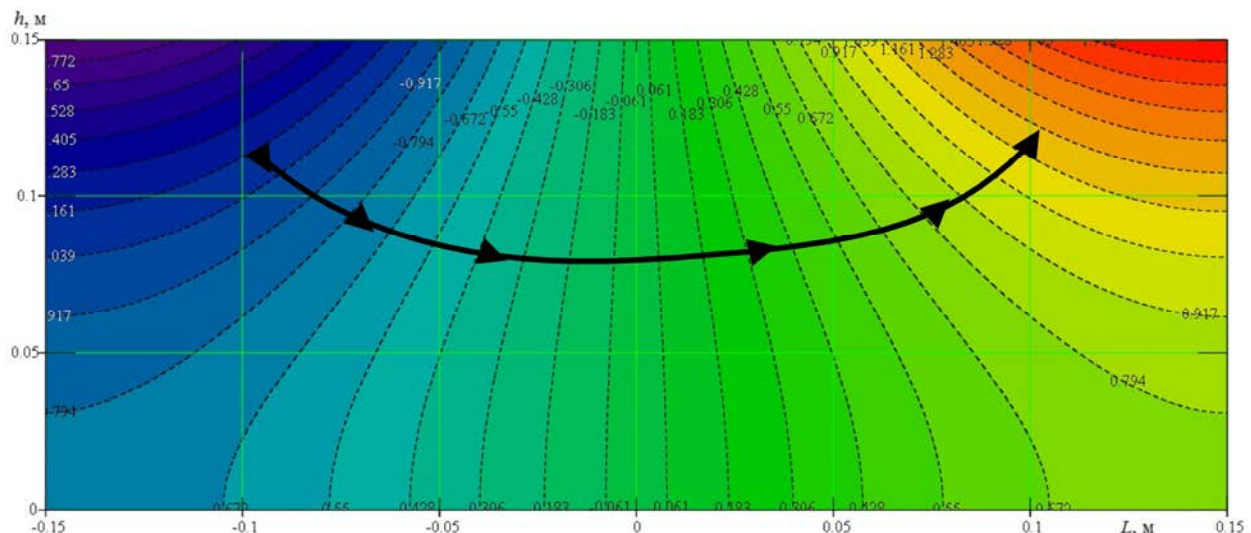


Рис. 7 – Потенціал для візуалізації руху першого парціального шару рідини у дослідній ємності розміром $a \times b = 0.2 \times 0.3$ м.

Знайдемо значення декременту, що відповідає цьому опору для першого парціального шару. Для цього розрахуємо силу тертя, яка діє на шар:

$$F_{\text{тр}} = \xi_{\text{міс}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} \cdot S = (\rho S a) \cdot \frac{\xi_{\text{міс}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{міс}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u},$$

де a, S – довжина ємності і площа поперечного перерізу для потоку рідини; m_n – маса рідини у парціальному шарі.

Врахуємо, що $u = \Delta u_n \cdot \sin(\omega_n t)$, тому $\dot{u} = \Delta u_n \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n t)$ і

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n}{2a} \cdot |\cos(\omega_n t)| \cdot \dot{u}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\cos(\omega_n t)| dt = 2/\pi, \quad T = 2\pi/\omega_n,$$

отримуємо

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n \cdot \dot{u} / \pi a;$$

звідки отримаємо формулу визначення декременту загасання з урахуванням сили місцевого опору:

$$\delta_n^{II} = \left(F_{\text{тр}} \cdot \pi / m_n \cdot \pi \right) \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot m_n \cdot \Delta u_n / a = \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n / a. \quad (19)$$

Таким чином, встановлено, що величина декременту загасання має перемінне значення і значним чином залежить від амплітуди коливань рідини.

На основі формул (18, 19), а також враховуючи коефіцієнт ζ нарощування декременту, пов'язаний з дією сил поверхневого натягу, стає можливо теоретичним шляхом встановити величину логарифмічного декременту загасання для будь-якої рідини, що коливається в ємності різного розміру:

$$\delta_n = \delta_n^I \zeta + \delta_n^{II} . \quad (20)$$

Що стосується декременту δ_n^{II} при $n > 0$, тобто для другого і третього парціального шару рідини, то скористаємося підказкою, яку надає рис. 8.

Як бачимо, вертикальні пунктирні лінії на рис. 8 потік рідини не пересікає. Тому формула для декременту, що залежить від амплітуди Δu_n коливань, набуває такого остаточного вигляду:

$$\delta_n^{II} = k \cdot \xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n / a , \quad (21)$$

де для першого, другого і третього парціального шару рідини число $k = 1, 3, 5$, відповідно.

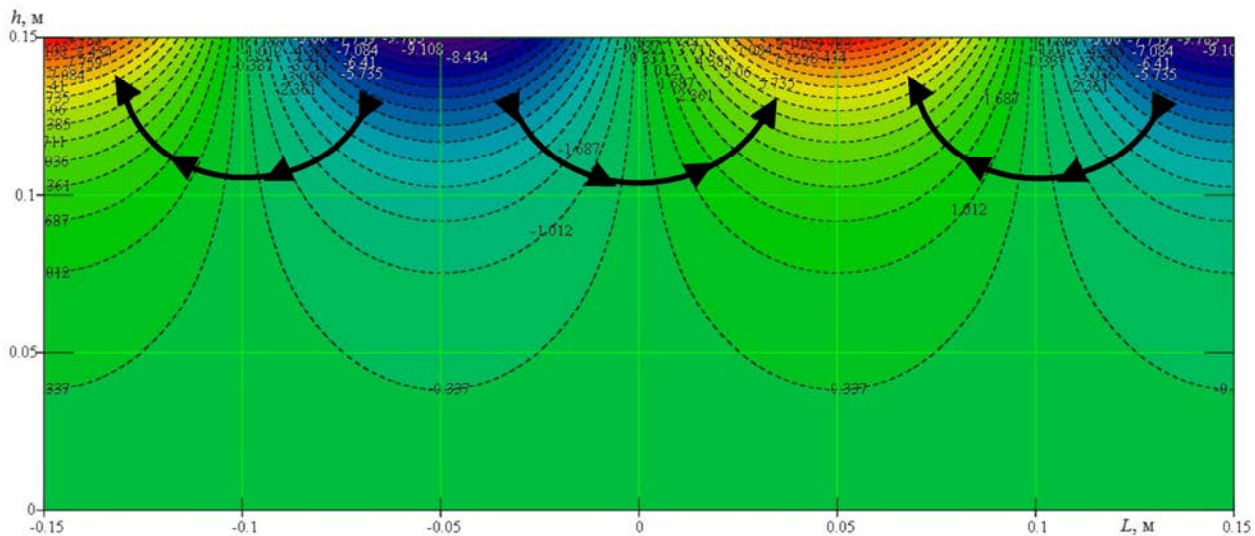


Рис. 8 – Потенціал для візуалізації руху другого парціального шару рідини у дослідній ємності розміром $a \times b = 0.2 \times 0.3$ м.

Співставлення теоретичних та експериментальних значень декременту. Перевіримо результати, що отримані в ході експериментального та теоретичного визначення величини декременту загасання рідини для першого парціального шару, значення наведемо в табл. 11.

Як видно з табл. 11, порівняння результатів теоретичного та експериментального визначення ЛДЗ має хорошу збіжність для рідин з малою в'язкістю, що дозволяє стверджувати про доцільність використання формули (20) для малих та великих ємностей (цистерн).

Таблиця 11 – Порівняння величин логарифмічного декременту загасання

Рідина	Величина ЛДЗ $\delta_{n=0}^I$ (рис. 4)	Величина ЛДЗ $\delta_{k=0}^{II}$	Коефіцієнт нарощування ЛДЗ ζ	Теоретичний ЛДЗ δ_T	Експериментальний ЛДЗ δ_E	Похибка, %
Вода	0,024	0,04	2,00	0,088	0,106 $\pm$ 0,007	-11
20% розчин цукру	0,027		1,23	0,073	0,068 $\pm$ 0,005	0
Рослинна олія	0,160		1,33	0,253	0,335 $\pm$ 0,03	-17

Що стосується рослинної олії, яка має завелику в'язкість, то формулу (20) доцільно використовувати лише для ємностей, які мають великі розміри (наприклад, як у тракторних цистерн). Причому причина появи відносно високої похибки лежить на сталому декременті δ_n^I , а змінний декремент δ_n^{II} , як вважається, і в цьому випадку за формулою (19) було визначено вірно.

Вплив декременту на коливання рідини. Амплітудно-частотна характеристика парціального осцилятора. Для розгляду вільних коливань рідини необхідно сформулювати відповідне рівняння, що описує коливальний рух рідини без врахування зовнішніх факторів:

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0; \quad (22)$$

$$f = \delta/\pi,$$

де $f \cdot \omega_0$ – коефіцієнт дисипації; ω_0 – власна кругова частота коливань, $\omega_0 = 2\pi/T$.

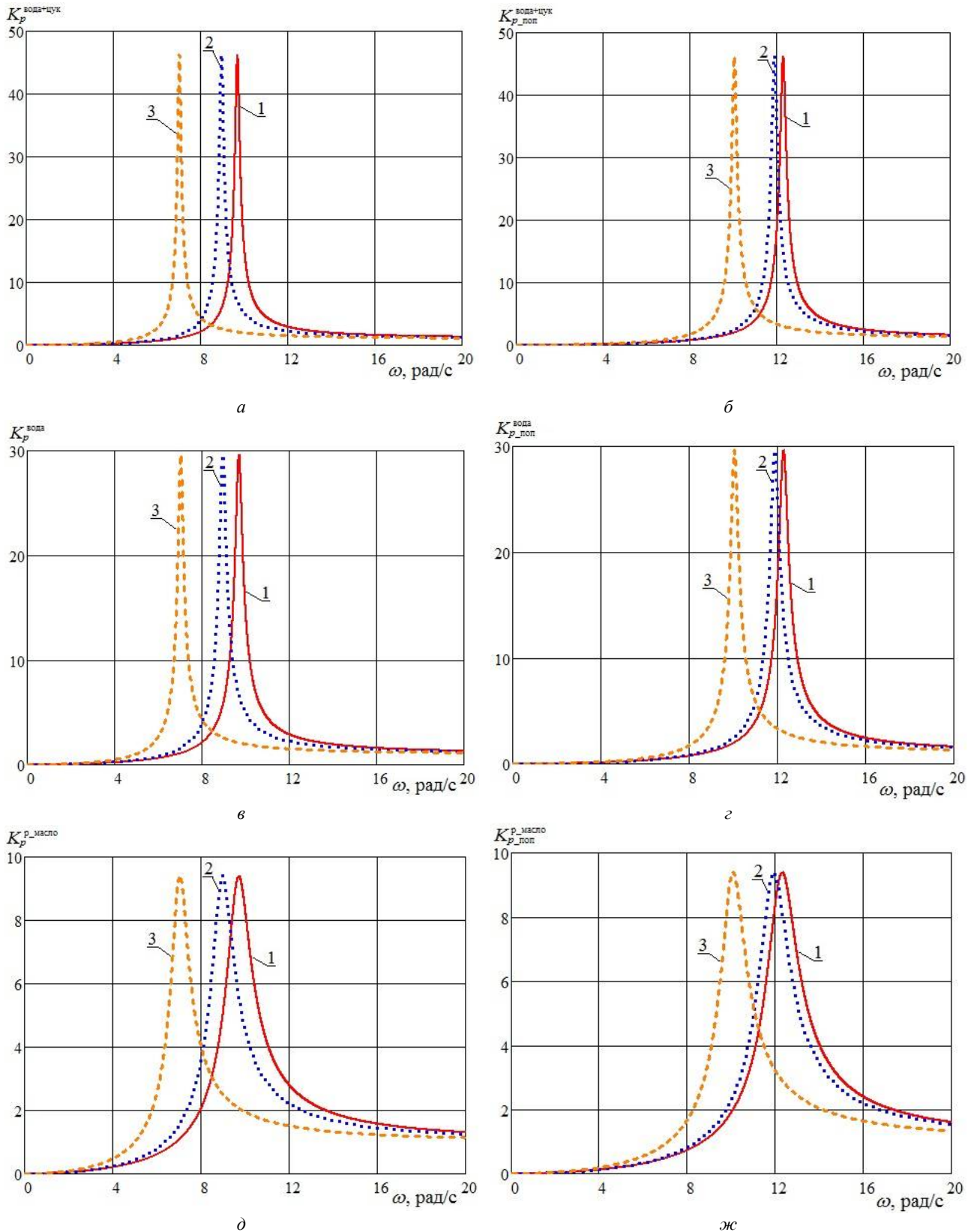


Рис. 9 – Амплітудно-частотні характеристики основного парціального шару рідини:
 а, б – 20 % розчину цукру; в, г – води; д, ж – рослинної олії; а, в, д – поздовжні; б, г, ж – поперечні;
 1 – $h = 0,15$ м; 2 – $h = 0,1$ м; 3 – $h = 0,05$ м.

Розв'яжемо рівняння (22) за допомогою експоненти з комплексним показником. Якщо

$$y = e^{i\omega t}, i = \sqrt{-1},$$

тоді

$$-\omega^2 + i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega^2 - i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega - \omega_0^2 = 0. \quad (23)$$

Розв'язками характеристичного рівняння (23) є два комплексних числа:

$$\omega = i(\delta/2\pi) \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/2\pi)^2}.$$

Зважаючи на отриману формулу та умову $\delta < 0.1$, зробимо висновок про те, що вплив декременту загасання на частоти вільних коливань дуже малий, про що йшлося й вище.

Для розгляду вимушених коливань рідини складемо рівняння, що описує рух основного шару рідини з врахування зовнішніх факторів. Та використаємо для багатогармонійного збурення $F(t)$ комплексний запис:

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = F(t); \quad (24)$$

$$F(t) = A_0 \omega_0^2 e^{i\omega t},$$

де A_0 – це амплітудний множник.

Представимо розв'язок (24) у вигляді $y = A \cdot e^{i\omega t}$, тоді

$$-A \cdot \omega^2 + i \cdot A \cdot f \cdot \omega_0 \cdot \omega + A \cdot \omega_0^2 = A_0 \cdot \omega_0^2. \quad (25)$$

Для якісної оцінки результатів амплітудно-частотного аналізу введемо коефіцієнт K_p , який відобразить відношення амплітуди вимушених коливань з амплітудним множником:

$$K_p = |A|/A_0.$$

На рис. 9 наведено амплітудно-частотні характеристики для різних рідин (20 % водного розчину цукру; води; рослинної олії) при дії вимушених коливань в поздовжній та поперечній площинах.

Як видно з рис. 9, максимальні амплітуди вимушених коливань в поперечній та в поздовжній площинах (які визначаються відповідним декрементом загасання) для кожної рідини при однаковій висоті наповнення у практичному сенсі співпадають; в деяких випадках різниця не перевищує 1 %. Наявність різниці пояснено вище.

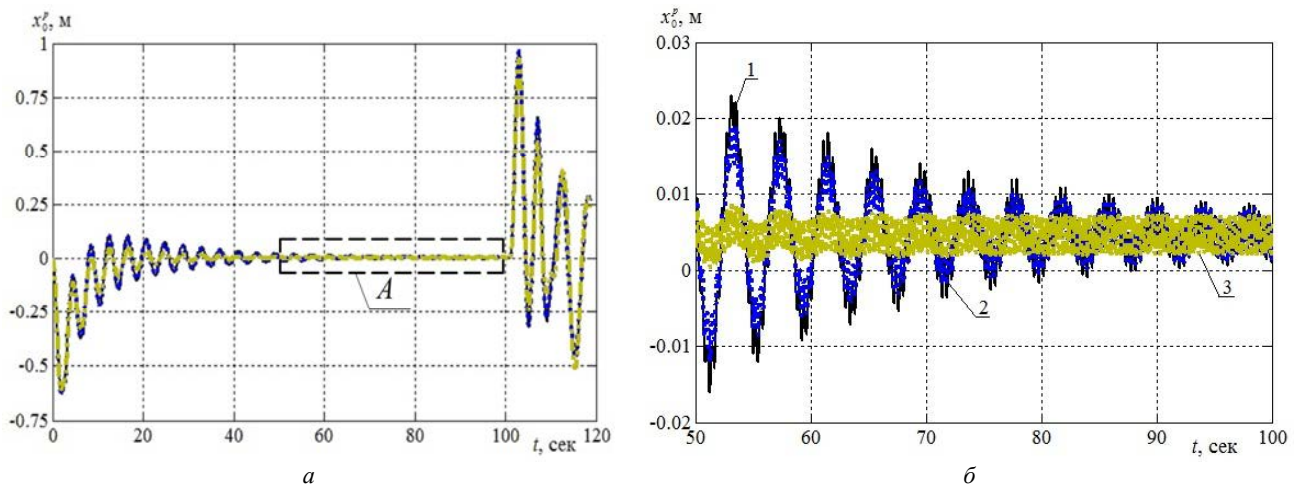


Рис. 10 – Результати моделювання горизонтального зсуву основного парціального шару ($k = 0$) рідини в цистерні:

a – загальний вигляд; b – ділянка A ; 1 – для 20 % розчину цукру ($\delta_1 \approx 0,05$); 2 – для води ($\delta_1 \approx 0,04$);

3 – для рослинної олії ($\delta_1 \approx 0,15$).

Вплив величини декременту загасання на рух рідини в цистерні. Значення декременту загасання рідини різної в'язкості використаємо при обчисленні горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини в причіпній цистерні типу BSA KTW 20, яка транспортується колісним трактором ХТЗ-240К. При моделюванні використаємо математичну модель пов'язаних коливань з роботи [15]. На рис. 10 показано результати моделювання при рівні рідини в цистерні 1,5 м; передавальне число трансмісії – 25,8. Зміни крутного моменту двигуна та коефіцієнтів тертя на етапах розгону та гальмування у цьому розрахунку задано наближеними аналітичними залежностями:

ми. Амплітуда мікроколивань нерівностей шляху становила $A_\lambda = 0.02$ м; а довжина хвилі мікроколивань $L_\lambda = 2$ м.

Як видно з графіків на рис. 10, транспортування рослинної олії відбувається значно стабільніше, ніж води, адже величина горизонтального зсуву поверхневого шару олії мінімальна.

Вплив величини змінного декременту загасання на рух рідини при параметричному резонансі. У статті [22], де вивчаються умови для виникнення параметричного резонансу у тракторній цистерні із рідиною, яка має вільну поверхню, зазначалося, що система має можливість відстроюватися від резонансу за рахунок залежності власної частоти парціального осцилятора від його амплітуди коливань. Вище було з'ясовано, що висока амплітуда збільшує декремент загасання, і це, апіорі, обмежує та стримує розвиток параметричного резонансу. Як ця апіорна можливість реалізує себе на практиці показано на рис. 11, де моделюється рух трактора із врахуванням змінного декременту загасання коливань.

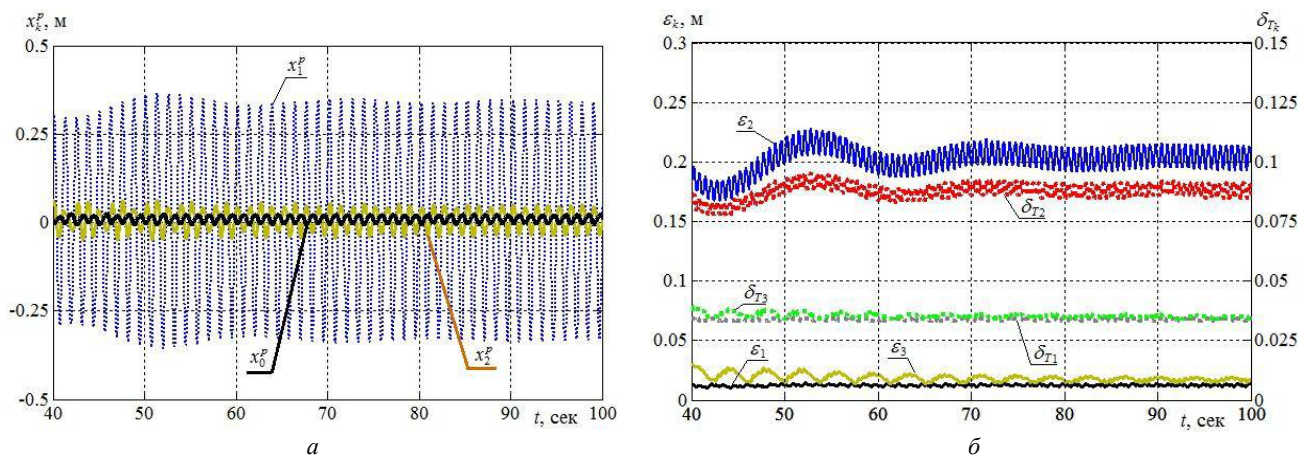


Рис. 11 – Результати математичного моделювання розвитку параметричних коливань у цистерні з рідиною після врахування місцевих опорів руху: а – зміщення парціальних шарів рідини; б – зміни амплітуди ε_k та декременту δ_{Tk} загасання коливань для k – того парціального осцилятора.

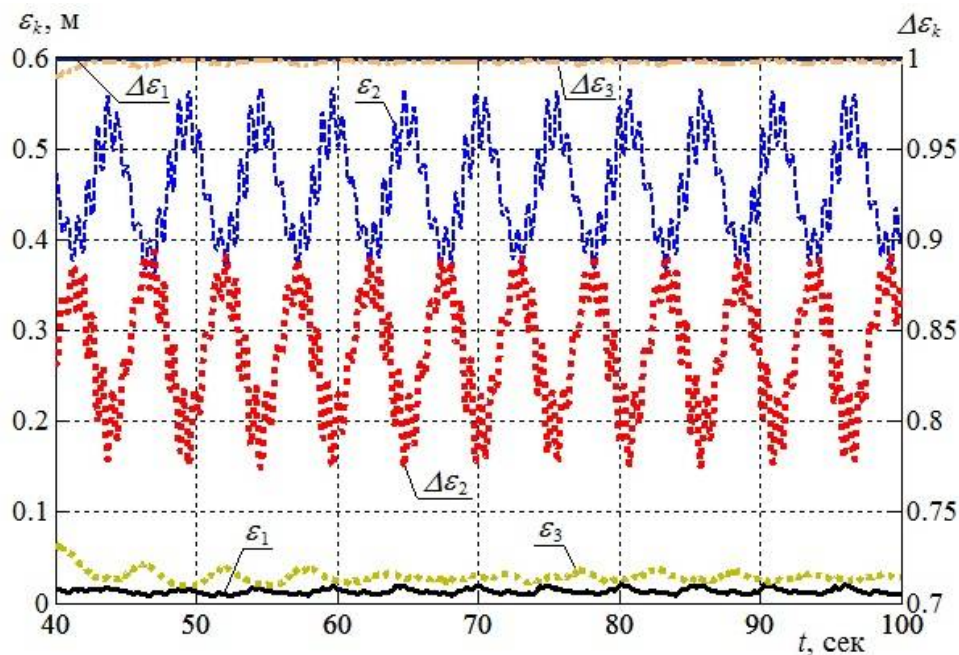


Рис. 12 – Зміни амплітуд коливань ε_k і коефіцієнтів $\Delta\varepsilon_k$ коректування частоти для k – того парціального осцилятора без урахування місцевих опорів руху.

Зауважимо, що графіки рис. 11 доцільно порівняти з графіками рис. 12 (статті [22]), де моделюється та ж сама ситуація, проте без врахування змінного декременту загасання. Як бачимо, врахування місцевих опорів ру-

ху рідини привело до значного вигладжування розрахункових характеристик та ефективно обмежило амплітуду резонансних коливань рідини у тракторній цистерні.

Висновки. Доведено адекватність використання математичних алгоритмів [15], які визначають частоти вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливання рідини; максимальна похибка не перевищує 4,35 %.

Підтверджено, що при значних рівнях наповнення ємності логарифмічний декремент загасання рідини не залежить від цього рівня. Проте великий вплив має величина амплітуди коливань рідини, що дозволяє стверджувати про перемінне значення декременту загасання під час руху трактора з цистерною.

На основі теоретичного дослідження отримано формули (17), (20) і (21), за якими можливо встановити величину логарифмічного декременту загасання для рідин різноманітної в'язкості, які коливаються в ємностях різного розміру. Порівнюючи результати теоретичного та експериментального дослідження встановлено, що для мало в'язких рідин похибка застосування цих формул не перевищує 11 %, а для рослинної олії – 17 %.

Список літератури

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – Москва : Гос. изд-во физ.-техн. лит., 1955. – 521 с.
2. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред : учеб. пособие. – Санкт-Петербург : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 584 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 736 с.
4. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – Москва : Машиностроение, 1968. – 540 с.
5. Мерзляков А. В., Матыева З. О. Аналитическое решение задачи о малых вынужденных колебаниях идеальной жидкости // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. – 2017. – № 48. – С. 70 – 81.
6. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 400 с.
7. Балашов В. А., Савенков Е. Б. Численное исследование двумерной квазигидродинамической модели течения двухфазной изотермической жидкости с учетом поверхностных эффектов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – № 13. – 20 с. doi: 10.20948/prepr-2016-13.
8. Бруцкий Е. В., Костин А. Г., Никифорович Е. И., Розумнюк Н. В. Метод численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных скорость-давление // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 13 – 23.
9. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 1127 – 1132.
10. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 232 с.
11. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal Comp. Phys. – 1997. – Vol 135. – Issue 2. – P. 118 – 125. doi: 10.1006/jcph.1997.5716.
12. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Physics Fluids. – 1965. – Vol. 8. – № 12. – P. 2182 – 2189. doi: 10.1063/1.1761178.
13. Ковеня В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.
14. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Физматлит, 1994. – 448 с.
15. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
16. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
17. Касымжанова А. Б., Бектасова Г. С., Шевчук Е. П. Исследование динамического коэффициента поверхностного натяжения водных растворов с различной концентрацией // Актуальные научные исследования в современном мире. – 2018. – № 2-1 (34). – С. 84 – 91.
18. Кузнецов А. Л., Будаева В. А., Суворов О. А., Пугачёв И. О., Никифорова А. Л. Изучение физико-химических свойств активированных растворов // Хранение и переработка сельхозсырья, 2015. – № 8. – С. 25 – 27.
19. Игнатова Ю. И., Паю И. В. Исследование качества подсолнечного масла на основе определения коэффициента поверхностного натяжения. – Режим доступа: <https://bit.ly/3mgdTJj>. – Дата обращения : 27 ноября 2020.
20. Нагорнов С. А., Дворецкий Д. С., Романцова С. В., Таров В. П. Техника и технологии производства и переработки растительных масел : учебное пособие. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 96 с.
21. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям // Под ред. М. О. Штейнберга. — 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1992. — 672 с.
22. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Аналіз впливу параметричного резонансу на рух тракторної цистерни при транспортуванні рідкого вантажу // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2020. – № 2. – С. 57 – 66.

References (transliterated)

1. Slezkin N. A. *Dinamika вязкой несжимаемой жидкости* [Dynamics of viscous incompressible fluid]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-tekhn. lit. Publ., 1955. 521 p.
2. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred : ucheb. posobie* [Rational continuum mechanics: a study guide]. St. Petersburg, Izd-vo politekh. un-ta Publ., 2012. 584 p.
3. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izd. 5-e, pererabotannoe* [Mechanics of fluid and gas. Ed. 5th, revised]. Moscow, 1978. 736 p.

4. Mikishev G. N., Rabinovich B. I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu* [Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 532 p.
5. Merzlyakov A. V., Matyeva Z. O. Analiticheskoe reshenie zadachi o mal'kikh vynuzhdennykh kolebaniyakh ideal'noy zhidkosti [Analytical solution of the problem of small forced vibrations of ideal fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and Mechanics]. 2017, no. 48, pp. 70–81.
6. Sheretov Yu. V. *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno-vremennom osrednenii* [Dynamics of continuous media with space-time averaging]. Moscow-Izhevsk, NITS "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" Publ., 2009. 400 p.
7. Balashov V. A., Savenkov E. B. Chislennoe issledovanie dvumernoy kvazigidrodinamicheskoy modeli techeniya dvukhfaznoy izotermicheskoy zhidkosti s uchetoм poverkhnostnykh effektiv [Numerical study of a two-dimensional quasi-hydrodynamic model of the flow of a two-phase isothermal fluid taking into account surface effects]. *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [KIAM Preprints]. 2016, no. 13, 20 p. doi: 10.20948/prepr-2016-13
8. Bruyatskiy E. V., Kostin A. G., Nikiforovich E. I., Rozumnyuk N. V. Metod chislennogo resheniya uravneniy Nav'e – Stoksa v peremennnykh skorost'-davlenii [Method for numerical solution of Navier-Stokes equations in velocity-pressure variables]. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied hydromechanics]. 2008, Iss. 10, no. 2, pp. 13–23.
9. Rumyantsev B. N. O dvizhenii tverdogo tela, soderzhashhego polosti, zapolnennye вязкой жидкостью [On the motion of a rigid body containing cavities filled with viscous fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1964, Iss. 28, vol. 6, pp. 1127–1132.
10. Chernousko F. L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi вязкую жидкость* [The motion of a solid with cavities containing viscous fluid]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR Publ., 1968. 232 p.
11. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal Comp. Phys.* 1997, vol. 135, issue 2, pp. 118–125. doi: 10.1006/jcph.1997.5716.
12. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics Fluids*. 1965, vol. 8, no. 12, pp. 2182–2189. doi: 10.1063/1.1761178.
13. Kovenya V. M. *Algoritmy rasshepleniya pri reshenii mnogomernykh zadach aerogidrodinamiki* [Splitting algorithms for solving multidimensional problems of aerohydrodynamics]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 2014. 280 p.
14. Belotserkovskiy O. M. *Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred. : 2-e izd., pererab. i dop* [Numerical modeling in continuum mechanics: 2nd ed., rev. and enl.]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994. 448 p.
15. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Matematichne modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v goryzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu* [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
16. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Modelyuvannya pov'yzanykh kolyvan' kolisnogo traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhu zi skladnym rel'yefom* [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
17. Kasymzhanova A. B., Bektasova G. S., Shevchuk E. P. Issledovanie dinamicheskogo koeffitsienta poverkhnostnogo natyazheniya vodnykh rastvorov s razlichnoy kontsentratsiey [Study of the dynamic coefficient of surface tension of aqueous solutions with different concentrations], *Aktual'nye nauchnye issledovaniya v sovremennom mire* [Actual scientific research in the modern world]. 2018, no. 2-1 (34), pp. 84–91.
18. Kuznetsov A. L., Budaeva V. A., Suvorov O. A., Pugachyov I. O., Nikiforova A. L. *Izuchenie fiziko-khimicheskikh svoystv aktivirovannykh rastvorov* [Study of physicochemical properties of activated solutions], *Khranenie i pererabotka sel'khozsyrya* [Storage and processing of agricultural raw materials]. 2015, no. 8, pp. 25–27.
19. Ignatova Yu. I., Payu I. V. *Issledovanie kachestva podsolnechnogo masla na osnove opredeleniya koeffitsienta poverkhnostnogo natyazheniya* [Research of the quality of sunflower oil based on the determination of the surface tension coefficient]. Available at <https://bit.ly/3mgdTJj> (accessed 27 November 2020).
20. Nagornov S. A., Dvoretzkiy D. S., Romantsova S. V., Tarov V. P. *Tekhnika i tekhnologii proizvodstva i pererabotki rastitel'nykh masel : uchebnoe posobie* [Technique and technology of production and processing of vegetable oils: a tutorial]. Tambov, Izd-vo GOU VPO TGTU Publ., 2010. 96 p.
21. Idel'chik I. E. *Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam. pod red. M. O. Shteynberga. 3-e izd., pererab. i dop* [Handbook on hydraulic resistance. Ed. M.O.Steinberg. 3rd ed., rev. and enl.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 672 p.
22. Kozhushko A. P., Grygor'ev A. L. *Analiz vplyvu parametrychnogo rezonansu na rukh traktornoj tsysterny pry transportuvanni ridkogo vantazhu* [Analysis of the influence of parametric resonance on the motion of a tractor tank when transporting liquid cargoes]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2020, no. 2, pp. 57–66.

Надійшло (received) 30.11.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhusko7@gmail.com.

Кожушко Андрей Павлович – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhusko7-@gmail.com.

Kozhushko Andriy Pavlovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Lecturer at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute, Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhusko7@gmail.com.

Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, Т. Є. АЛЕКСАНДРОВА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ, Я. Ю. МОРГУН

СТІЙКІСТЬ ТА АВТОКОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОННОЇ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ КУРСУ АВТОМОБІЛЯ З ЦИСТЕРНОЮ

Для опису збуреного руху автомобіля з цистерною складено математичну модель, яка дозволяє врахувати коливання вільної поверхні рідини та визначити їх вплив на курсову стійкість автомобіля при сталому русі та під час термінового гальмування. Виконано лінеаризацію моделі і отримано рівняння для власних частот коливань електрогідромеханічної системи, що об'єднує динамічні зміни параметрів руху автомобіля з цистерною, парціальних прошарків рідини у цистерні та роботу електромагнітного приводу керуючого клапана і електронного ПІД-регулятора для двоконтурної системи курсової стійкості. На основі лінеаризованої моделі збуреного руху автомобіля, оснащеного системою курсової стійкості, досліджується вплив вимушених коливань рідини на область стійкості, побудовану в площині варіюваних параметрів регулятора. Показано, що низькочастотні коливання вільної поверхні рідини призводять до суттєвого скорочення області стійкості замкненої системи курсової стабільності автомобіля, що свідчить про необхідність врахування коливань при вирішенні задач аналізу і синтезу системи. Встановлено, що для автомобіля з цистерною, де відбуваються низькочастотні поперечні коливання рідини, які супроводжуються перерозподілом маси і збурюють рух, збільшення курсової швидкості однозначно призводить до погіршення курсової стійкості. Ця обставина дозволила виключити цю швидкість із числа варіюваних параметрів і суттєво спростити задачу. З'ясовано, що рівень рідини в цистерні, з урахуванням його зв'язку з максимальною швидкістю руху, оказує неоднозначний вплив на курсову стійкість автомобіля, і обмежувати дослідження лише розрахунками для випадку 50 % навантаження неприпустимо. Замість цього традиційного спрощення треба знаходити лінію, яка огинає зверху ті межі, що відповідають багатьом рівням рідини із діапазону їх зміни. Показано, що динаміка термінового гальмування слабо залежить від в'язкості рідини у цистерні, але при довгостроковій безперервній роботі системи керування гальмами виникають автоколивання. Запропоновано метод настроювання параметрів електронного регулятора на забезпечення автоколивань малої амплітуди.

Ключові слова: коливання рідини в цистерні, асимптотична стійкість, автоколивання, система курсової стійкості, область стійкості, варіювані параметри регулятора.

Е. Е. АЛЕКСАНДРОВ, Т. Е. АЛЕКСАНДРОВА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ, Я. Ю. МОРГУН УСТОЙЧИВОСТЬ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ КУРСА АВТОМОБИЛЯ С ЦИСТЕРНОЮ

Для описания возмущенного движения автомобиля с цистерной составлена дискретная математическая модель, которая позволяет учесть колебания свободной поверхности жидкости и определить их влияние на курсовую устойчивость автомобиля при равномерном движении и во время экстренного торможения. Выполнена линеаризация и получено уравнение для собственных частот колебаний электрогидромеханической системы, объединяющей динамические изменения параметров движения автомобиля с цистерной, парциальных слоев жидкости в цистерне и работу электромагнитного привода управляющего клапана и электронного ПИД-регулятора для двухконтурной схемы обеспечения курсовой устойчивости. На основе линеаризованной модели исследуется влияние вынужденных колебаний жидкости на область устойчивости системы, построенной в плоскости варьируемых параметров регулятора. Показано, что низкочастотные колебания свободной поверхности жидкости приводят к существенному сокращению области устойчивости, что свидетельствует о необходимости учета таких колебаний при решении задач анализа и синтеза этой системы. Установлено, что для автомобиля с цистерной, где происходят низкочастотные поперечные колебания жидкости, которые сопровождаются перераспределением массы и возмущают движение, увеличение курсовой скорости однозначно приводит к ухудшению курсовой устойчивости. Это обстоятельство позволило исключить скорость из переменных параметров и существенно упростить задачу. Установлено, что уровень жидкости в цистерне, с учетом его связи с максимальной скоростью движения, оказывает неоднозначное влияние на курсовую устойчивость автомобиля, и ограничивать исследования расчетами для 50 % нагрузки недопустимо. Вместо этого традиционного упрощения надо находить линию, которая огибает сверху те границы устойчивости, которые соответствуют многим уровням жидкости из всего диапазона их изменения. Показано, что динамика экстренного торможения слабо зависит от вязкости жидкости в цистерне, но при длительной непрерывной работе системы управления тормозами в ней возникают автоколебания. Предложен метод настраивания параметров электронного регулятора на автоколебания малой амплитуды.

Ключевые слова: колебания жидкости в цистерне, асимптотическая устойчивость, автоколебания, система курсовой устойчивости, область устойчивости, варьируемые параметры регулятора.

YE. YE. ALEKSANDROV, T. YE. ALEKSANDROVA, A. L. GRIGORIEV, YA. YU. MORHUN STABILITY AND VIBRATIONS OF THE ELECTRONIC CLOSED SYSTEM STABILIZING THE COURSE OF A CAR WITH A TANK

To describe the disturbed movement of a car with a tank, a discrete mathematical model has been compiled, which allows one to take into account the oscillations of the free surface of the liquid and determine their effect on the directional stability of the car during uniform movement and during emergency braking. Linearization is carried out and an equation is obtained for the natural frequencies of oscillations of the electrohydraulic system, which combines dynamic changes in the parameters of the movement of a car with a tank, partial layers of liquid in a tank and the operation of an electromagnetic drive of the control valve and an electronic PID controller for a two-circuit scheme to ensure directional stability. It is shown that low-frequency oscillations of the free surface of liquid lead to a significant reduction in the stability region, which indicates the need to take such oscillations into account when solving problems of analysis and synthesis of this system. It has been established that for a car with a tank, where low-frequency transverse oscillations of the liquid occur, which are accompanied by redistribution of mass and disturb the movement, an increase in the speed unambiguously leads to a deterioration in road-holding ability. This made it possible to exclude the speed from the variable parameters and significantly simplify the task. It was found that the liquid level in the tank, taking into account its connection with the maximum speed, has an ambiguous effect on the road-holding ability of the vehicle, and it is unacceptable to limit the research to calculations for 50 % of the load. Instead of this traditional simplification, it is necessary to find a line that bends from above those stability boundaries that correspond to many liquid levels from the entire range of their variation. It is shown that the dynamics of emergency braking weakly depends on the viscosity of the liquid in the tank, but with long-term continuous operation of the brake control system, self-oscillations appear in it. A method for tuning the parameters of an electronic regulator for low-amplitude self-oscillations is proposed.

Key words: fluid vibrations in a tank, asymptotic stability, self-oscillations, vehicle stability system, area of stability, varying controller parameters.

Вступ та кінцева мета дослідження. На сучасних легкових та вантажних автомобілях все частіше встановлюють електронні системи керування паливоподачею, гальмами, тиском повітря у шинах, та іншими робочими параметрами і процесами [1 – 3]. Щодо автомобілів військового або так званого *подвійного* призначення [4] (зокрема, для автомобілів з цистернами для перевезення палива і мастильних матеріалів, що виступають як об'єкт дослідження, рис. 1), то для них існують зрозумілі обмеження в використанні електроніки в паливній системі та регуляторі двигуна. Проте ці обмеження не поширюються на системи, які у процесі керування автомобілем грають допоміжну роль, і їх руйнування від інтенсивного електромагнітного імпульсу не є критичним для цього процесу.



Рис. 1 – Паливозаправник КраЗ-63221 з цистерною АПЦ-20 валізної форми.

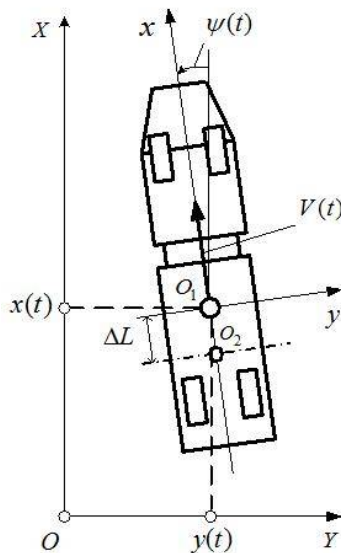


Рис. 2 – Системи координат: OXY – інерціальна; $O_1x_1y_1$ – пов'язана із центром мас автомобіля; O_2 – центр цистерни.

Дотримання високих показників безпеки руху є однією з основних проблем сучасного автомобілебудування. Стан автомобільних шляхів України сприяє підвищеній аварійності автотранспорту у порівнянні з країнами Євросоюзу та США. Режим термінового гальмування при появі на шляху непередбачених перешкод може призвести до втрати зчеплення коліс з дорогою і відхиленню автомобіля від заданого напрямку руху.

Тому на сучасних автомобілях широко поширені системи автоматичного керування гальмами, які містять дві або три паралельно працюючі системи:

- автоблокувальну систему ABS, що запобігає блокуванню коліс при різкому натисканні на педаль гальмів;
- протибуксувальну систему TRC, що запобігає буксуванню ведучих коліс при різкому натисканні на педаль керування подачею палива;
- систему курсової стійкості VSC, яка здійснює стабілізацію заданого напрямку руху автомобіля під час термінового гальмування.

Крім того, на багатьох легкових і деяких вантажних автомобілях можна зустріти й систему курсової стійкості EBD [5 – 12], яка за рахунок рівномірного розподілу гальмівних зусиль здійснює стабілізацію курсових параметрів сталого руху на прямих або радіусних ділянках шляху і, тим самим, суттєво допомагає водію під час складних та довгострокових рейсів. На відміну від VSC, яка вмикається на період гальмування, система EBD працює тривалий час (постійно).

Досвід керування автомобілями, які оснащено горизонтальними ємностями для транспортування рідини (цистернами), свідчить, що вони найбільш вразливі до втрати стійкості в процесі термінового гальмування, яка призводить до тяжких аварій з виливом в навколишнє середовище рідких паливних матеріалів і агресивних речовин. Низькочастотні коливання вільної поверхні транспортуємої рідини можуть впливати й на процеси стабілізації курсових параметрів в автомобілях, які оснащено системами курсової стійкості EBD. Тому кінцевою метою розпочатого авторами циклу досліджень є вивчення впливу цих коливань на курсову стійкість автомобіля та їх врахування при оптимальному виборі параметрів відповідної електронної системи керування типу VSC або EBD.

Огляд наявних результатів та актуальні задачі дослідження. Системи курсової стійкості можуть бути одноконтурними та двоконтурними. В одноконтурних системах здійснюється стабілізація напрямку руху, а в двоконтурній системі, окрім того, здійснюється також мінімізація бічного зсуву центра мас автомобіля. В роботах [13, 14] описано математичну модель збуреного руху автомобіля в процесі термінового гальмування з урахуванням роботи замкненої двоконтурної системи курсової стійкості типу VSC:

$$\begin{cases} M\dot{V} = -2\kappa_F p_0(t) - f_c M g; & J_z \ddot{\psi} = -0.5 B \kappa_F \Delta p + m_c(t); & \dot{y} = -V \cdot \psi; \\ J_\kappa \Delta \ddot{p} + f_\kappa \Delta \dot{p} + c_\kappa \Delta p = \kappa_u R_{об} I; & U = K_\psi \psi + K_\omega \dot{\psi} - K_y y, \end{cases} \quad (1)$$

де t – це час; $V(t)$ – курсова швидкість руху центру мас (рис. 2); $\psi(t)$ – кутове відхилення власної поздовжньої

вісі автомобіля відносно заданого напрямку руху; $\Delta p(t)$ – різниця тисків гальмівної рідини в магістралях правого і лівого бортів автомобіля; $y(t)$ – бічне відхилення центру мас від заданої траєкторії руху в режимі гальмування; $p_0(t)$ – тиск гальмівної рідини на виході головного гальмівного циліндру; f_c – приведені значення коефіцієнту спротиву кочення усіх коліс автомобіля; g – прискорення вільного падіння; $m_c(t)$ – момент сил спротиву повороту; M – повна маса автомобіля; J_z – момент інерції автомобіля відносно його власної вертикальної вісі; B – ширина колії; J_k – момент інерції коромисла електромагніта у електромагнітному підсилювачі (ЕМП); f_k – коефіцієнт в'язкого тертя у вісі коромисла; c_k – коефіцієнт жорсткості пружини, що фіксує коромисло у нейтральному стані; κ_r , κ_u – коефіцієнти пропорційності; K_ψ , K_ω , K_y – коефіцієнти підсилення регулятора, які за своїм фізичним сенсом приймають деякі позитивні значення (а при відсутності регулювання дорівнюють нулю); $U(t)$, $I(t)$ – напруга і електричний струм у ланцюгу керування, що виробляються системою курсової стійкості автомобіля; $\Lambda_{об}$, $R_{об}$ – індуктивність котушки та електричний опір ланцюга.

Як зазначено, коливання вільної поверхні транспортуємої рідини можуть впливати на процеси стабілізації напрямку руху автомобіля при його терміновому гальмуванні. Метою роботи [15] було дослідження впливу цих коливань на курсову стійкість автомобіля. Використовувати для цього розрахунок рідини за методом кінцевих елементів, як це зроблено в роботі [16], було визнано недоцільним, тому для дослідження зазначеного впливу було створено дискретну математичну модель збуреного руху автомобіля з урахуванням поздовжніх та поперечних коливань парціальних шарів рідини [17], яка має наступний вигляд:

$$\begin{cases} M\dot{V} = -2\kappa_r p_0(t) - \sum_{k=1}^n m_k^x \ddot{x}_k - f_c M g; J_z \ddot{\psi} = -\frac{B}{2} \kappa_r \Delta p + \sum_{l=1}^m m_l^y [(\Delta L - f_c(H_n + h_l)) \ddot{y}_l - f_c g y_l] + M_c(t); \dot{y} = -V \cdot \psi; \\ \ddot{x}_k + \varepsilon_k^x \dot{x}_k + (\omega_k^x)^2 x_k = -\dot{V} \quad (k \in \overline{1, n}); \ddot{y}_l + \varepsilon_l^y \dot{y}_l + (\omega_l^y)^2 y_l = -V \cdot \dot{\psi} - \Delta L \psi \quad (l \in \overline{1, m}); J_k \ddot{\Delta p} + f_k \dot{\Delta p} + c_k \Delta p = U(t), \end{cases} \quad (2)$$

де $x_k(t)$, $y_l(t)$ – це поздовжнє та поперечне зміщення центрів мас парціальних осциляторів від вертикальної вісі цистерни; m_k^x , m_l^y – маси цих (парціальних) шарів рідини,

$$m_k^x = M_{pid} \frac{2 \operatorname{th}(\lambda_k^x h)}{\pi^2 \lambda_k^x h (k-0.5)^2} \quad (k \in \overline{1, n}), \quad m_l^y = M_{pid} \frac{2 \operatorname{th}(\lambda_l^y h)}{\pi^2 \lambda_l^y h (l-0.5)^2} \quad (l \in \overline{1, m});$$

$M_c(t)$ – момент сил, що збуджує коливання; M_{pid} – загальна маса рідини в цистерні, $M_{pid} = \rho a b h$; ρ – щільність рідини; a , b – довжина та ширина цистерни; h – рівень рідини в цистерні; λ_k^x , λ_l^y , ω_k^x , ω_l^y , v_k^x , v_l^y – хвильові числа, кругові і власні частоти парціальних осциляторів для поздовжніх та поперечних коливань рідини,

$$\lambda_k^x = \pi(2k-1)/a, \quad \lambda_l^y = \pi(2l-1)/b; \quad \omega_k^x = \sqrt{g \lambda_k^x \operatorname{th}(\lambda_k^x h)}, \quad \omega_l^y = \sqrt{g \lambda_l^y \operatorname{th}(\lambda_l^y h)}; \quad v_k^x = \omega_k^x / (2\pi), \quad v_l^y = \omega_l^y / (2\pi);$$

ε_k^x , ε_l^y – коефіцієнти дисипації парціальних осциляторів,

$$\varepsilon_k^x = 2v_k^x \Delta f, \quad \varepsilon_l^y = 2v_l^y \Delta f;$$

Δf – логарифмічний декремент затухання коливань рідини; ΔL – відстань $O_1 O_2$ між центром мас автомобіля та вертикальною віссю цистерни; H_n – відстань від колісної вісі до днища цистерни; h_l – відстань від днища цистерни до центру мас l – того парціального прошарку для поперечних коливань,

$$h_l = h - \frac{\operatorname{th}(\lambda_l^y h / 2)}{\lambda_l^y}.$$

У рівняннях системи (2) складові суми описують моменти сили інерції та тяжіння, які діють з боку l – того парціального шару рідини на стінки цистерни та передаються до площадок контакту шин із ґрунтом, де й впливають на зміну параметрів розвороту автомобіля. Відповідно до рекомендацій роботи [17], при розрахунку кожної групи коливань використовувалося перші три парціальні осцилятори, тобто числа $n, m = 3$.

Система (2) моделює розімкнену систему, коли, діючи через момент $M_c(t)$, керуюча напруга $U(t)$ спочатку збуджує поперечні коливання, а потім намагається нівелювати їх негативний вплив. На рис.3 наведено типовий графік зміни сигналу керування, який було використано при порівняльному розрахунковому дослідженні процесу гальмування у двох випадках:

- з урахуванням коливань рідини за допомогою диференціальних рівнянь системи (2);
- без урахування коливань рідини (для так званого *затверділого вантажу* тієї ж ваги).

На рис. 4 наведено графіки процесів стабілізації корпусу паливозаправника КрАЗ-63221 з цистерною місткістю 20 м^3 , яка була заповнена дизельним паливом до рівня $h = 0.7 \text{ м}$ (тобто приблизно наполовину). Іншу інформацію про цей заправник надано у табл. 1. Автомобіль знаходився в режимі гальмування з середнім прискоренням $W_c = -1.8 \text{ м}^2/\text{с}$ та рухався по прямому шляху з початковою швидкістю $V_{x_0} = 18 \text{ м/с}$.

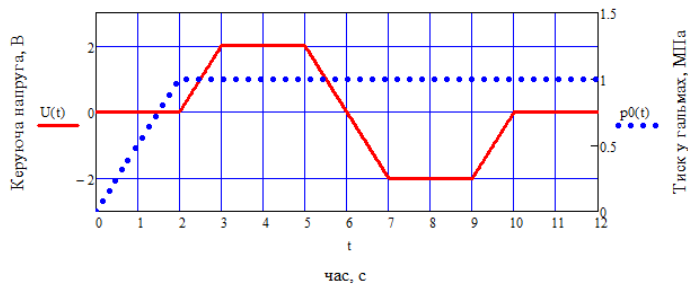


Рис. 3 – Сигнал $U(t)$ керування електромагнітної системи стабілізації руху автомобіля та тиск у гальмах $p_0(t)$.

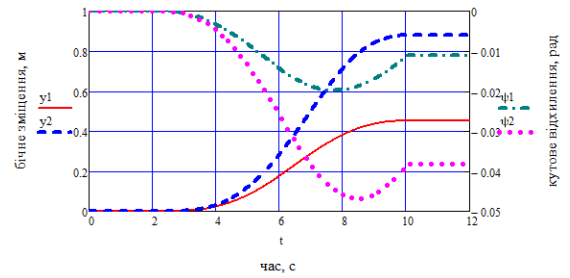


Рис. 4 – Порівняння характеристик $y(t)$, $\psi(t)$ курсової стійкості для двох моделей інтенсивного гальмування.

Таблиця 1 – Основні технічні та деякі динамічні параметри паливозаправника КрАЗ-63221

Параметр	Величина
Суха маса, кг	10700
Максимальна вага вантажу, кг	18000
Розміри цистерни $a \times b \times H$, м	$6 \times 2.4 \times 1.4$
Ширина колії, м	2
Максимальна швидкість при перевезенні 10 м^3 пального, м/с	18
Моменти інерції при завантаженні на 50% : J_z , кг м^2 J_x , кг м^2	Рис.10 $14.8 \cdot 10^4$ $3 \cdot 10^4$
Радіальна жорсткість шини, Н/м	$10 \cdot 10^5$
Бічна жорсткість шини, Н/м	$2.5 \cdot 10^5$
Коефіцієнт спротиву коченню коліс f_c	0.09
Власна частота коливань нахилу, Гц	2...5
Коефіцієнт дисипації для коливань нахилу f_r , Нмс	$1 \cdot 10^5$
Власна частота коливань зсуву, Гц	1.5...2.2
Коефіцієнт дисипації для коливань зсуву f_δ , Нс	$5 \cdot 10^3$
Власні частоти парціальних осциляторів для по- довжніх і поперечних коливань, Гц	рис.5 а, б
Відносні маси парціальних осциляторів для поз- довжніх і поперечних коливань	рис.6 а, б
Логарифмічний декремент затухання коливань парціальних осциляторів Δf	0.05

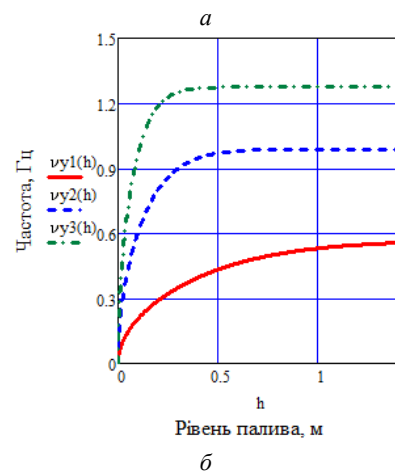
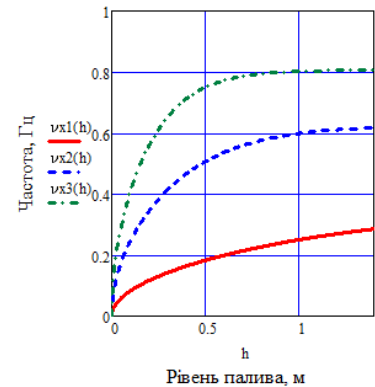


Рис. 5 – Залежність власних частот перших трьох осциляторів від рівня палива у цистерні.

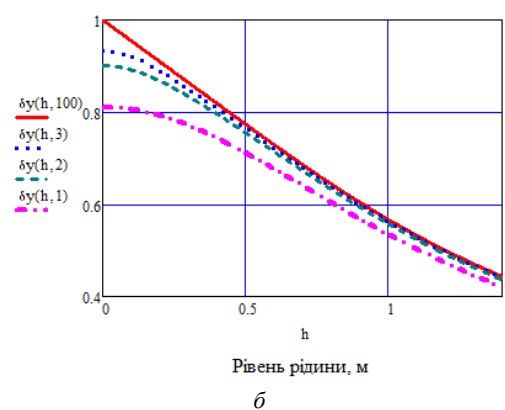
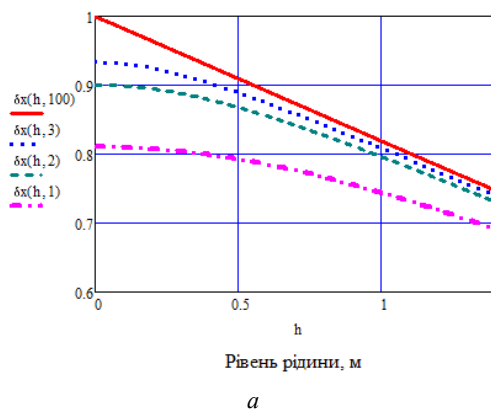


Рис. 6 – Залежність відносної маси рідини, яка рухається у одному, двох та трьох перших парціальних прошарках, від рівня рідини в цистерні.

Відхилення від прямолінійної траєкторії відбувалося завдяки різниці тисків в гальмах правого та лівого бо-

рту, яка під дією сигналу керування виникла після моменту часу $t_0 = 2\text{ с}$ (рис. 3) та спостерігалася до кінця гальмування. Графіки y_1, ψ_1 враховують вплив коливань рідини; графіки y_2, ψ_2 цей вплив не враховують.

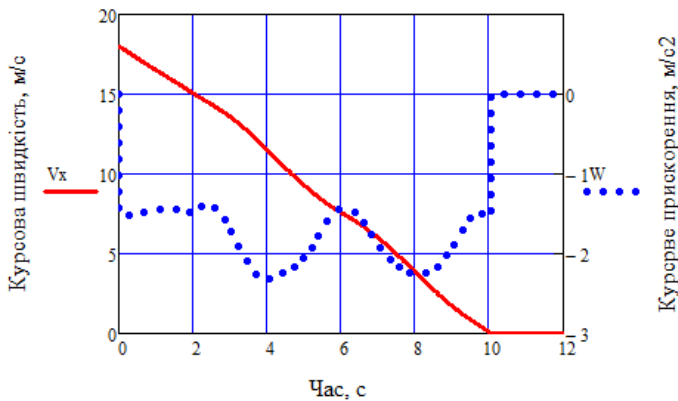


Рис. 7 – Параметри гальмування паливозаправника КрАЗ-63221 з цистерною АПЦ-20 (при транспортуванні 8.5 т дизельного пального).

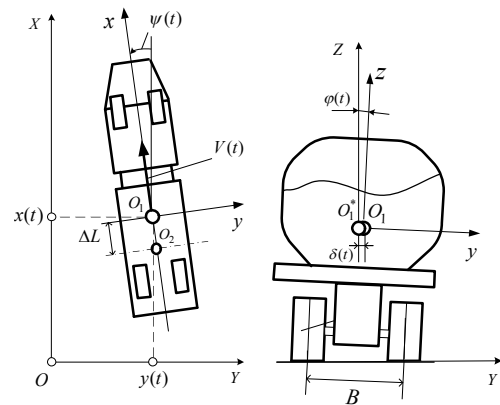


Рис. 8 – Динамічні параметри уточненої моделі (O_1^* – положення центру мас за умови відсутності бічного зсуву шин).

Порівняльний аналіз кривих на рис. 4, а також графіку прискорення на рис. 7, приводить до наступних висновків:

- спостерігається суттєвий негативний вплив коливань вільної поверхні транспортуємої рідини на стабілізуємий поперечний рух автомобіля – паливозаправника та на плавність процесу гальмування;
- необхідно врахувати ці коливання в математичній моделі збуреного руху автомобіля при розгляданні задач аналізу і синтезу системи курсової стійкості.

У цьому зв'язку, головною задачею роботи являється дослідження впливу вимушених коливань транспортуємої рідини на область стійкості замкненої системи курсової стійкості автомобіля і рекомендації щодо вибору припустимих значень варійованих параметрів регулятора замкненої системи VSC або EBD, які треба враховувати на етапі оптимізації зазначених параметрів [18]. Проте, рух до цієї мети розпочнемо з деяких уточнень математичної моделі (2), у якій треба врахувати наступні добре відомі [17, 19] і нові [20] фактори:

- обертальний рух цистерни у горизонтальній площині призводить до кутових коливань рідини навколо вісі O_2Z (рис. 8);
- декремент загасання коливань рідини не є постійною величиною і суттєво залежить від її в'язкості та амплітуди коливань;
- поперечні перетікання рідини супроводжуються бічним нахилом цистерни та її поперечним зсувом (рис. 8), що створює нові збурюючі чинники.

Після врахування цих факторів будемо визначати їх вплив на динамічні параметри термінового гальмування (що важливе для розробки системи VSC) та на асимптотичну стійкість системи EBD.

Математичні моделі та формули для врахування уточнень. Кутові коливання рідини у площині її вільної поверхні формуються *потенціалом Жуковського* [19], який для прямокутної ємності описується формулою

$$\Psi(x, y) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta_k)^3} \cdot \left[\frac{a^2 \operatorname{sh}(\beta_k y / a) \sin(\beta_k x / a)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k b / a)} - \frac{b^2 \operatorname{sh}(\beta_k x / b) \sin(\beta_k y / b)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k a / b)} \right],$$

де $\beta_k = \pi \cdot (1 + 2k)$, а початок системи координат xO_2y розташований в центрі цистерни.

В роботі [17] цей складний потенціал замінюється апроксимацією $\Psi(x, y) \approx x \cdot y$, проте існує кращий шлях.

На рис. 9 показано, як виглядає потенціал Жуковського для цистерни валізного типу, що має вільну поверхню $6\text{ м} \times 2.4\text{ м}$. Аналіз цього рисунку спонукає до наступного спрощення. Умовно поділимо цистерну на три секції – центральну (з розмірами $2.4\text{ м} \times 2.4\text{ м}$) та дві крайні (з розмірами $1.8\text{ м} \times 2.4\text{ м}$). Складним обертальним рухом рідини в центральній секції допустимо знехтувати, а у крайніх секціях (де лінії рівня витягуються поздовжньо та мають приблизно однаковий зазор) будемо вважати, що рідина рухається поступально у поперечних напрямках, що створює обертальний момент навколо вертикальної осі інерції цистерни. Одним із наслідків такого спрощення стає ідентичність частот поперечних та крутильних вільних коливань рідини.

В рамках такої концепції відстань c між вертикальною віссю цистерни та центром її обертальної маси, а також моменти інерції J_l обертальних мас для парціальних осциляторів знаходимо за формулами:

$$c^2 = \frac{a^2 + ab + 2b^2}{12}; \quad J_l = m_l^y c_*^2, \quad (l \in \overline{1,3}), \quad \text{де} \quad m_l^y = M_{pid} \frac{2 \operatorname{th}(\lambda_l^y h)}{\pi^2 \lambda_l^y h (l-0.5)^2}; \quad c_*^2 = \frac{a-b}{b} c^2.$$

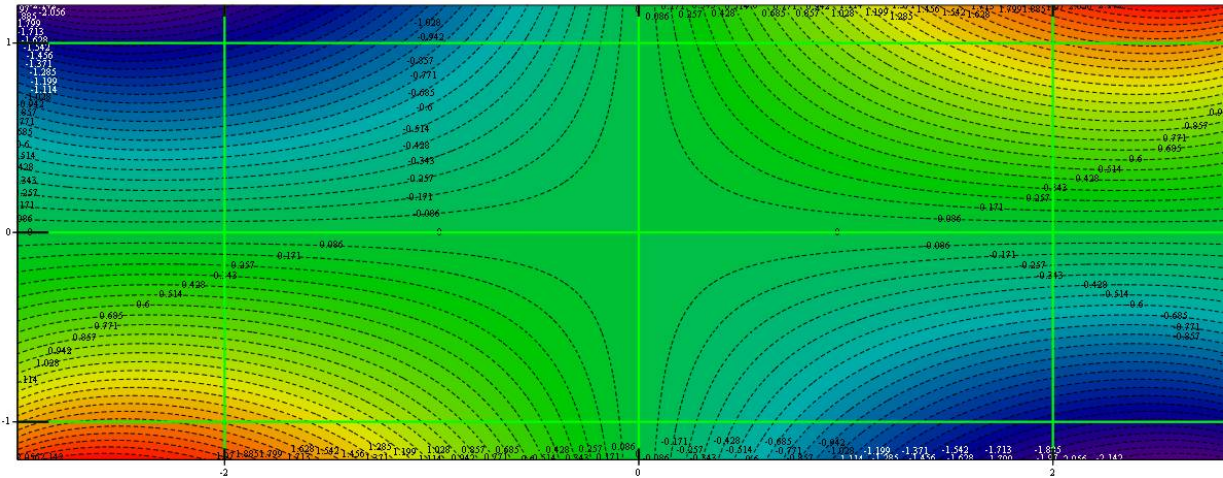


Рис. 9 – Лінії рівня потенціалу Жуковського для задачі щодо повільного обертання прямокутної цистерни.

Як зазначено у табл. 1, графіки, що показані на рис. 4, 7, було отримано при розрахунках коливань рідини з постійним значенням логарифмічного декременту загасання $\Delta f = 0.05$. В статті [20] надано формулу для розрахунку цього декременту для n -того парціального прошарку рідини у прямокутній області. Якщо знехтувати дисипативним впливом сил поверхневого натягу (що, зважаючи на великі розміри автомобільної цистерни, є припустимим), то ця формула для декременту поздовжніх коливань матиме наступний вигляд:

$$\Delta f_n(X_n) = \delta_n^I(v_{pid}, h/a) + \delta_n^{II}(X_n/a),$$

де

$$\delta_n^I = \pi \sqrt{\frac{v_{pid}}{\omega_n^x (a/2)^2}} \cdot \left[1 + \frac{a}{b} + \frac{(1 + (2h/a))k\pi}{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)} \right]; \quad \delta_n^{II} = 1.1k \frac{X_n}{a}; \quad \omega_n^x = \sqrt{g \lambda_n^x \operatorname{th}(\lambda_n^x h)}; \quad \lambda_n^x = \frac{\pi k}{a}; \quad k = 2n-1;$$

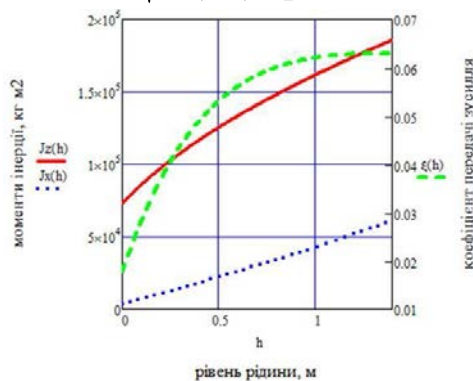


Рис. 10 – Залежність змінних коефіцієнтів моделі від наповнення цистерни.

може втрачати стійкість, і це потребує уважного аналізу. Проте на вимушені коливання під час термінового гальмування, в чому ми будемо переконуватися у подальшому дослідженні, сила тертя між мало в'язкою рідиною та цистерною майже не впливатиме.

При перевезенні моторного палива та олив їх в'язкість необхідно враховувати в обох випадках.

Окрім розрахунку бічного нахилу цистерни та її поперечного зсуву, що включається до моделі цілком зрозумілим способом і пояснень не потребує, існує й інший чинник курсової нестійкості автомобіля, про який часто забувають; так, його нема і у системі рівнянь (2). Крутний момент з боку центробіжної сили та коливального тиску рідини, в значній мірі, гаситься моментом спротиву поперечному зсуву у шинах, проте це відбувається не повністю. В результаті на шини лівого та правого борту прикладаються різні за напрямом поздовжні зусилля, які ведуть до додаткового розвороту автомобіля. Тому при розрахунках треба використати *ефективний коефіцієнт передачі зусилля* ξ , який визначається за формулою:

$$\xi = 1 / \left[1 + 4 \sum_{j=1}^3 (A_j^2 / B^2) \cdot n_j / \sum_{j=1}^3 n_j \right] - f_c,$$

де $A_j, n_j, j \in \overline{1,3}$ – це відстані від центру мас O_1 до мостів автомобіля та відповідні кількості шин (рис. 10).

Уточнена математична модель збуреного руху автомобіля з цистерною. У відповідності до робіт [15, 16, 21] математична модель збуреного руху замкненої двоконтурної системи курсової стійкості автомобіля в процесі гальмування на прямому шляху з урахуванням поперечних та крутильних коливань рідини в цистерні, а також бічного зсуву шин та повороту корпусу в поперечній площині, може бути записана у наступному вигляді:

$$\{ M\dot{V} = -2\kappa_{\Gamma} p_0 - F_{pid}^x - f_c Mg ; \ddot{x}_k + \varepsilon_k^x \dot{x}_k + (\omega_k^x)^2 x_k = -\dot{V} ; \frac{dX_k^2}{v_k^x dt} + X_k^2 = x_k^2 \quad (k \in \overline{1,3}) ; F_{pid}^x = \sum_{l=1}^3 m_k \ddot{x}_k ; \quad (3)$$

$$J_z \ddot{\psi} = -0.5B \kappa_{\Gamma} \Delta p - f_c (Z_r B \varphi + f_r \dot{\varphi}) - \xi M_{pid}^{(1)} - \xi M_{pid}^{(2)} + M_c(t) ; \quad (4)$$

$$\ddot{\psi}_l + \varepsilon_l^y \dot{\psi}_l + (\omega_l^y)^2 \psi_l = -\ddot{\psi} , \quad \frac{d\Psi_l^2}{v_l^y dt} + \Psi_l^2 = \psi_l^2 \quad (l \in \overline{1,3}) ; \quad (5)$$

$$\dot{y} = -V \psi ; \quad (6)$$

$$\ddot{y}_l + \varepsilon_l^y \dot{y}_l + (\omega_l^y)^2 y_l = V \dot{\psi} - \Delta L \ddot{\psi} - \ddot{\delta} - h_l^* \varphi , \quad \frac{dY_l^2}{v_l^y dt} + Y_l^2 = y_l^2 \quad (l \in \overline{1,3}) ; \quad (7)$$

$$M \ddot{\delta} + f_{\delta} \dot{\delta} + Z_{\delta} \delta = Mg \varphi + MV \dot{\psi} + F_{pid} ; \quad (8)$$

$$J_x^* \ddot{\varphi} + f_r \dot{\varphi} + Z_r B \varphi = Mg h_{u,m} \varphi + h_{u,m} M V \dot{\psi} - M_{pid}^{(3)} + M_{pid}^{(4)} ; \quad (9)$$

$$J_{\kappa} \Delta \ddot{p} + f_{\kappa} \Delta \dot{p} + c_{\kappa} \Delta p = \kappa_u R_{об} I ; \quad \Lambda_{об} \dot{I} + R_{об} I = U ; \quad U = K_{\psi} \psi + K_{\omega} \dot{\psi} - K_y y , \quad (10)$$

де

$$F_{pid} = \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l ; \quad M_{pid}^{(1)} = \Delta L \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l ; \quad M_{pid}^{(2)} = \sum_{l=1}^3 J_l \ddot{\psi}_l ; \quad M_{pid}^{(3)} = \sum_{l=1}^3 m_l \ddot{y}_l (H_n + h_l) ; \quad M_{pid}^{(4)} = \sum_{l=1}^3 g m_l y_l ; \quad (11)$$

$$J_x^* = J_x + h_{u,m}^2 M ; \quad h_l^* = h_l - h_{u,m} ; \quad \varepsilon_k^x = 2v_k^x \Delta f_k(X_k) ; \quad \varepsilon_l^y = 2v_l^y \Delta f_l(Y_l) ; \quad \varepsilon_l^y = 2v_l^y \Delta f_l(c\Psi_l) .$$

Таблиця 2 – Основні параметри електромагнітного приводу

Параметр	Величина
Індуктивність котушки $\Lambda_{об}$, Ом · с	0.15
Електричний супротив ланцюга $R_{об}$, Ом	30
Постійна часу для електромагніту $\tau_{об}$, с, м	0.005
Момент інерції коромисла J_{κ} , кг м ²	$0.98 \cdot 10^{-2}$
Коефіцієнт жорсткості пружини коромисла, c_{κ} , Нм	$1.01 \cdot 10^2$
Коефіцієнт в'язкого тертя в опорі коромисла f_{κ} , Нмс	0.55
Власна частота коливань коромисла, Гц	16
Логарифмічний декремент загасання коливань в ЕМП	1.7
Коефіцієнт підсилення κ_u , Нм Па В ⁻¹	$1.0 \cdot 10^6$

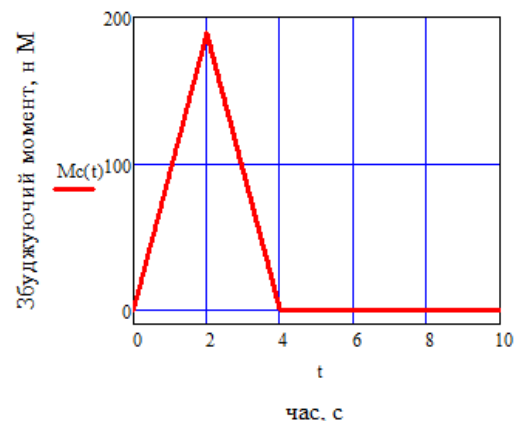


Рис. 11 – Чинник збудження поперечних коливань.

Окрім позначень, що були пояснені вище, J_x – це момент інерції автомобіля відносно його власної горизонтальної вісі (рис. 10); $h_{u,m}$ – підйом центру мас O_1 відносно колісної вісі; $\varphi(t)$, $\delta(t)$ – кут нахилу та бічний зсув автомобіля внаслідок пружності шин; Z_r – сумарний коефіцієнт радіальної жорсткості шин одного борта; Z_{δ} – сумарний коефіцієнт бічної жорсткості усіх шин автомобіля; f_r , f_{δ} – коефіцієнти дисипації енергії при радіальних та бічних деформаціях шин; $\psi_l(t)$ – кутове зміщення центрів мас парціальних осциляторів (відносно вертикальної вісі цистерни). Зауважимо, що ми виокремили рівняння (3) у самостійну систему, бо при русі по прямому шляху поперечні та крутильні коливання автомобіля не впливають на його курсову швидкість, і систему (3) можна інтегрувати незалежно від іншого.

Розрахункова оцінка впливу в'язкості та рівня рідини у цистерні на динаміку термінового гальмування автомобіля. При моделюванні термінового гальмування за допомогою системи (3) – (11) всі початкові умови, окрім курсової швидкості, дорівнюють нулю. На відміну від статті [15], при моделюванні враховувалася робота регулятора, тому збурення руху відбувалося шляхом внесення у рівняння (4) моменту сил спротиву $M_c(t)$, що показаний на рис. 11. Конкретні значення констант ЕМП дано в табл. 2. Коефіцієнти регулятора приймали такі значення: $K_{\psi} = 1000$ В, $K_{\omega} = 2000$ В с, $K_y = 50$ В м⁻¹; початкова швидкість $V_{x0} = 25$ м/с (рух згори).

Априорі, зважаючи на суттєву залежність в'язкості рідких нафтопродуктів від температури, намагання врахувати змінний декремент загасання коливань при терміновому гальмуванні автомобіля виглядало як досить складна задача. Проте результати моделювання спростували ці міркування. На рис. 12 показано результат інтегрування рівнянь (3) – (11) при різних значеннях декременту загасання. Виявилося, що декремент загасання у практичному сенсі зовсім не впливає на поперечні коливання і слабо впливає на поздовжні коливання.

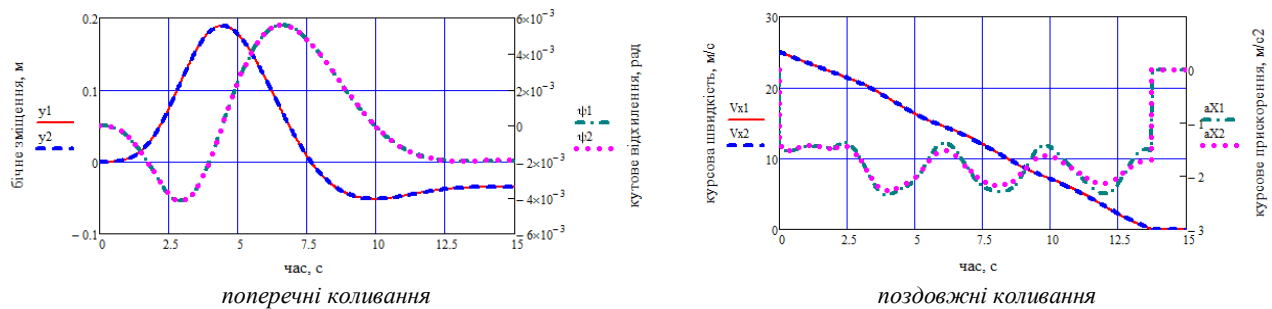


Рис. 12 – Вплив декременту Δf загасання коливань рідини на курсові параметри термінового гальмування: графіки із цифрою 1 відповідають $\Delta f = 0.05$, із цифрою 2 – $\Delta f = 0.20$; рівень рідини у цистерні $h = 0.7$ м.

Такий несподіваний результат є наслідком короткостроковості процесу гальмування. Якщо, наприклад, термінове гальмування на швидкості $Vx_0 = 25$ м/с буде відразу ж припинено, а система VSC з указаними вище параметрами не виключиться, то згодом почнеться поступове розгойдування поперечних коливань рідини (рис. 13). Коливання зростатимуть і далі до амплітуди $Y_1 \approx 0.05$ м, що збільшить декремент загасання до рівня $\Delta f_1 \approx 0.04$, після чого наступить динамічна рівновага, і система керування гальмами (разом з корпусом автомобіля та рідиною в цистерні) буде працювати в режимі автоколивань низької амплітуди.

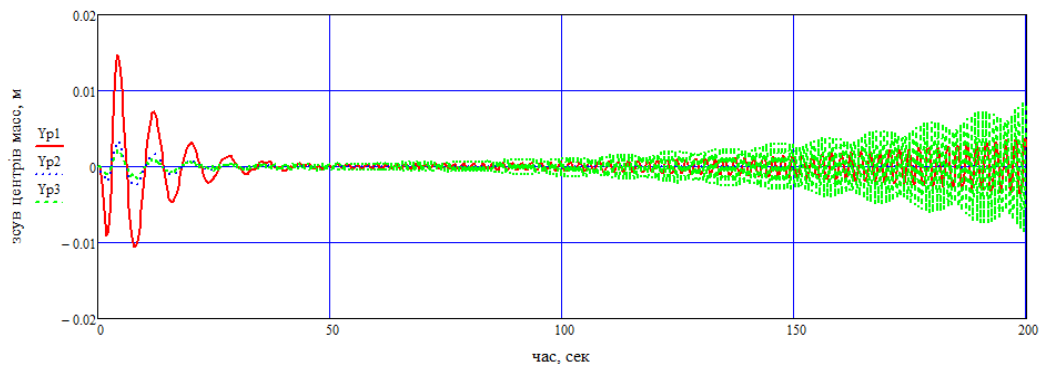


Рис. 13 – Розгойдування парціальних прошарків рідини у цистерні при початковому значенні декременту $\Delta f = 0.01$.

Зауважимо, що для транспортування нафтопродуктів низької в'язкості значення декременту $\Delta f_1 = 0.10$ відповідає амплітуді поперечних автоколивань першого парціального шару рідини $Y_1 \approx 0.2$ м, яку треба вважати як гранично допустимі (з урахуванням необхідного запасу). Тому для системи VSC область стійкості регулятора (про що буде далі) пропонується вибирати з огляду саме на це значення декременту загасання.

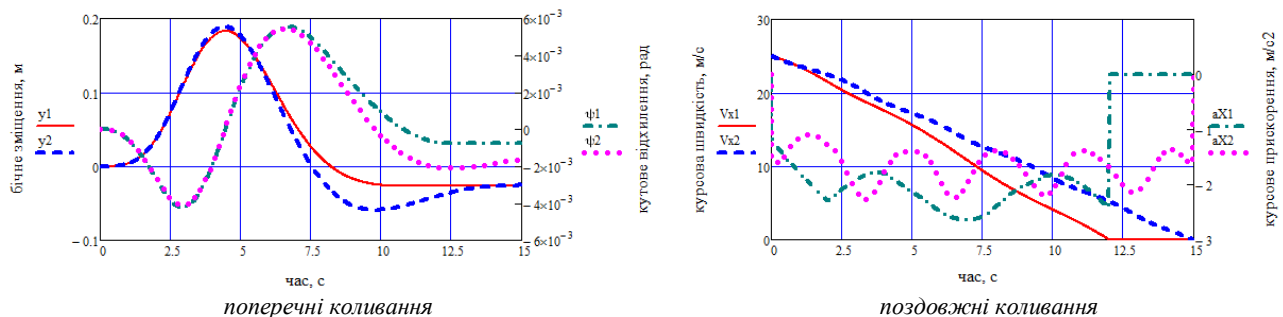


Рис. 14 – Вплив рівня наповненості цистерни на курсові параметри термінового гальмування: графіки із цифрою 1 відповідають рівню $h = 0.3$ м, із цифрою 2 – $h = 1.0$ м; декремент загасання коливань $\Delta f = 0.05$.

Що стосується рівня рідини у цистерні, то цей параметр суттєво впливає на динаміку термінового гальмування автомобіля (рис. 14), який треба врахувати при оптимальному виборі коефіцієнтів K_ψ , K_ω , K_y регулятора.

Лінеаризація системи рівнянь уточненої моделі. В разі використання рівнянь (3) модель збуреного руху стає нелінійною (в наслідок зв'язку (6)), і це суттєво ускладнює її дослідження на асимптотичну стійкість. Тому змінну швидкість $V(t)$ надалі вважатиме як сталий параметр V , який в конкретному розрахунку «заморожується», але його значення варіюється в заданих межах [21]. Причому, дещо спрощуючи реальні залежності, верхню межу швидкості автомобіля будемо визначати за умови наявного навантаження цистерни за формулою:

$$V_0(h) = V_0^* M(h_*) / M(h),$$

де V_0^* – максимальна швидкість автомобіля при деякому рівні рідини h_* , для якого вона відома (табл. 1).

Зауважимо, що від рівня рідини h залежать координати центра мас і деякі інші величини (рис. 5, 6, 10), які різним чином впливають на коливання та виконання умови курсової стійкості. Тому дослідження на асимптотичну стійкість руху ми вимушені проводити при різних рівнях завантаженості цистерни.

Теж саме стосується і декременту загасання коливань. Поздовжні і поперечні коливання мали значну різницю у амплітудах, проте для поперечних та крутильних коливань ці амплітуди близькі, а частоти співпадають. Тому в лінеаризованій моделі усі коефіцієнти дисипації є однаковими.

Лінеаризована модель складається з наступних диференціальних рівнянь:

$$J_z \ddot{\psi} = -0.5B\kappa_f \Delta p - f_c(Z_r B \dot{\varphi} + f_r \dot{\varphi}) - \xi M_{pid}^{(1)} - \xi M_{pid}^{(2)}; \quad (12)$$

$$\ddot{\psi}_l + \varepsilon_l \dot{\psi}_l + \omega_l^2 \psi_l = -\ddot{\psi}, \quad (l \in \overline{1,3}); \quad (13)$$

$$\dot{y} = -V \psi; \quad (14)$$

$$\ddot{y}_l + \varepsilon_l \dot{y}_l + \omega_l^2 y_l = V \dot{\psi} - \Delta L \ddot{\psi} - \ddot{\delta} - h_l^* \dot{\varphi}, \quad (l \in \overline{1,3}); \quad (15)$$

$$M \ddot{\delta} + f_\delta \dot{\delta} + Z_\delta \delta = Mg \varphi + MV \dot{\psi} + F_{pid}; \quad (16)$$

$$J_x^* \ddot{\varphi} + f_r \dot{\varphi} + Z_r B \varphi = Mg h_{ц.м} \varphi + h_{ц.м} M V \dot{\psi} - M_{pid}^{(3)} + M_{pid}^{(4)}; \quad (17)$$

$$J_\kappa \Delta \ddot{p} + f_\kappa \Delta \dot{p} + c_\kappa \Delta p = \kappa_u R_{об} I; \quad \Lambda_{об} \dot{I} + R_{об} I = U; \quad U = K_\psi \psi + K_\omega \dot{\psi} - K_y y, \quad (18)$$

а також формул (11), які під час лінеаризації не змінилися, і нових позначень $\varepsilon_l = 2\nu_l^y \Delta f$; $\omega_l = 2\nu_l^y$.

Побудова характеристичного рівняння математичної моделі. Зважаючи на лінійність та однорідність математичної моделі, застосуємо до її рівнянь відомий метод комплексних амплітуд [22], коли кожна змінна величина $f(t)$ подається у вигляді:

$$f(t) = f_* \exp(pt),$$

де p – це комплексне число, $p = d\omega + i\omega$; ω – дійсна частота коливань; d – дійсний декремент загасання (чи зростання) амплітуди коливань; $i = \sqrt{-1}$; f_* – початкова амплітуда коливань, причому «зірочками» у позначені амплітуд надалі будемо нехтувати.

Зрозуміло, що p є характеристичним числом системи (12) – (18), і, зважаючи на загальний порядок системи, таких чисел, при кожному наборі параметрів $h, V, \Delta f$ нараховується більше ніж 20.

Почнемо з рівняння (14), яке набуває вигляду

$$y = -V \psi / p. \quad (19)$$

В результаті чого, рівняння (18) з урахуванням (19) приводять до наступної рівності:

$$(J_\kappa p^2 + f_\kappa p + c_\kappa) \Delta p = \kappa_u (1 + \tau_{об} p) (K_\psi + K_\omega p + K_y V / p) \psi, \quad (20)$$

де $\tau_{об}$ – це постійна часу електромагніту, $\tau_{об} = \Lambda_{об} / R_{об}$.

Як бачимо, на відміну від класичного ПІД - закону інтегральна ланка при різних курсових швидкостях V має різний коефіцієнт, і ця обставина, безумовно, вплине на результати керування режимом термінового гальмування. Виконаємо аналогічні перетворення для диференціальних рівнянь (13) і (15),

$$\varphi_l = \frac{-p^2 \psi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}, \quad (l \in \overline{1,3}); \quad y_l = \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}, \quad (l \in \overline{1,3}), \quad (21)$$

та, з урахуванням формул (21), для рівнянь (16), (17):

$$(Mp^2 + f_\delta p + Z_\delta) \delta = Mg \varphi + MV \psi p + \sum_{l=1}^3 m_l p^2 \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}; \quad (22)$$

$$(J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B) \varphi = Mg h_{ц.м} \varphi + h_{ц.м} M V \psi p + \sum_{l=1}^3 m_l [g - (H_n + h_l) p^2] \frac{(Vp - \Delta L p^2) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}. \quad (23)$$

Цим громіздким залежностям надамо вигляд системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{1,1}(p) \delta + a_{1,2}(p) \varphi = b_1(p) \psi; \\ a_{2,1}(p) \delta + a_{2,2}(p) \varphi = b_2(p) \psi, \end{cases} \quad (24)$$

де $a_{1,1} = Mp^2 + f_\delta p + Z_\delta + F_\varphi p^4$; $a_{1,2} = -Mg + p^2 M_\varphi$; $a_{2,1} = F_\psi p^2$; $a_{2,2} = J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B - Mg h_{u,m} + M_\psi$;

$$b_1 = MV + (V - \Delta L p) p^3 F_\varphi; b_2 = h_{u,m} M V p + p(V - \Delta L p) F_\psi;$$

$$F_\psi(p) = \sum_{l=1}^3 m_l \frac{g - (H_n + h_l) p^2}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}; F_\varphi(p) = \sum_{l=1}^3 \frac{m_l}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}; M_\psi = \sum_{l=1}^3 m_l h_l^* \frac{g - (H_n + h_l) p^2}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}; M_\varphi = \sum_{l=1}^3 \frac{m_l h_l^*}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2}.$$

Систему (24) розв'яжемо за методом визначників, та отримаємо наступні залежності:

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \Delta(p) \psi; \varphi = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}} = \Phi(p) \psi. \quad (25)$$

Тепер прийшов час виконати аналогічне перетворення для рівняння (12),

$$J_z p^2 \psi = -0.5 B \kappa_\Gamma \Delta p - f_c (Z_r B + f_r p) \varphi + \xi \sum_{l=1}^3 \frac{J_l p^2 \psi - m_l p^2 \Delta L [p(V - \Delta L p) \psi - p^2 \delta - h_l^* \varphi]}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2},$$

і використати в ньому формули (25):

$$J_z p^2 \psi = -0.5 B \kappa_\Gamma \Delta p - f_c (Z_r B + f_r p) \Phi \psi + \xi p^2 \sum_{l=1}^3 m_l \frac{c_*^2 p^2 - \Delta L (V p - \Delta L p^2 - p^2 \Delta - h_l^* \Phi)}{p^2 + \varepsilon_l p + \omega_l^2} \psi,$$

звідки отримаємо

$$C(p) \psi = -0.5 B \kappa_\Gamma \Delta p, \quad (26)$$

де

$$C(p) = J_z p^2 + (f_c (Z_r B + f_r p) + \xi p^2 M_\varphi(p)) \Phi(p) - \xi p^3 \left[c_*^2 p - \Delta L (V - \Delta L p - p \Delta(p)) \right] F_\varphi(p). \quad (27)$$

Зауважимо, що за умови високої жорсткості шини (як це буває на високонавантажених паливозаправниках, табл.1) функція $C(p)$ спрощується до вигляду

$$C(p) = J_z p^2 + \frac{f_c (M_0 + M_{43}) + \xi M_{12}}{(1 - k_\varphi)(1 + k_\delta)}, \quad (28)$$

де

$$M_0 = h_{u,m} M V p; M_{43} = p(V - \Delta L p)(g F_\varphi - p^2 M_\varphi); M_{12} = p^3 \left[(V - \Delta L p) \Delta L - c_*^2 p \right] F_\varphi;$$

$$k_\delta = \frac{F_\varphi p^4}{M p^2 + f_\delta p + Z_\delta}, k_\varphi = \frac{Mg h_{u,m} - M_\psi}{J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B}.$$

Якщо рідкий вантаж загубив можливість рухатися (напр., фактично або умовно замерз у цистерні), то ця формула стає зовсім простою:

$$C(p) = J_z p^2 + \frac{f_c Mg h_{u,m} V p}{1 - k_\varphi}, \quad \text{де} \quad k_\varphi = \frac{Mg h_{u,m}}{J_x^* p^2 + f_x p + Z_r B}. \quad (29)$$

Зрозуміло, що у цьому випадку дослідження на стійкість руху можливо проводити аналітичними методами, які для цистерни з рідиною й за умови припустимого спрощення математичної моделі (напр., зменшення кількості парціальних осциляторів або нехтування пружністю шин) є недоступними. Тому, вважаючи на «піонерський» характер дослідження, ми й не займалися спрощеннями моделі, бо апіорі невідомо, яким чином вони вплинуть на межу області стійкості.

На завершення цього питання, розглянемо систему рівнянь (19), (26) і побачимо, що для її сумісності потрібно виконання наступної умови:

$$K_\psi + K_\omega p + \frac{K_y V}{p} = \Psi(p), \quad \text{де} \quad \Psi(p) = -\frac{2C(p)}{\kappa_u B \kappa_\Gamma} (J_\kappa p^2 + f_\kappa p + c_\kappa)(1 + \tau_{об} p), \quad (30)$$

а $C(p)$ є дрібно-раціональною функцією, що задана формулою (27) або (28) чи (29).

Рівність (30) і є шуканим характеристичним рівнянням збуреного руху автомобіля з цистерною, який оснащено двоконтурною системою забезпечення курсової стійкості.

Алгоритм та результати дослідження системи на стійкість: одноконтурне регулювання. Розмірковуючи про цю проблему в принципі, зауважимо, що у рівнянні (30) можна позбутися знаменників, і, не зважаючи на високий ступінь полінома, знайти всі його корені $p_j, j \in \overline{1, 22}$, використовуючи для цього стандартні комп'ютерні

програми. По розташуванню цих коренів у комплексній площині можна зробити висновок про асимптотичну стійкість або нестійкість системи, та одержати цінну та вичерпну інформацію про поведінку її окремих ланок. Проте цей шлях для розв'язку нашої задачі є вкрай неефективним, і ми поступимо інакше.

На *першому етапі* розрахункового дослідження, виберемо для інтегрального коефіцієнту регулятора значення $K_y = 0$ і підставимо у отримане таким чином рівняння

$$K_\psi + K_\omega p = \Psi(p)$$

уявне характеристичне число $p = \omega i$:

$$K_\psi + K_\omega \omega i = \Psi(\omega i). \quad (31)$$

Рівність (31) еквівалентна системі двох рівностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\psi = \operatorname{Re}[\Psi(\omega i)], \\ K_\omega = \operatorname{Re}\left[\frac{\Psi(\omega i)}{\omega i}\right], \end{array} \right. \quad (32)$$

де $\operatorname{Re}[p]$ – це дійсна частина комплексного числа p .

В роботі [22] для подібної задачі дійсна частина функції відокремлювалася аналітичними методами, але тепер функція стала суттєво складнішою, тому цю роботу (як і попередню) доручаємо комп'ютеру.

За допомогою комп'ютерної програми змінюємо значення кругової частоти $\omega: 0 \rightarrow \infty$ і на дисплеї комп'ютера в координатах $K_\psi - K_\omega$ зображаємо траєкторію руху точки; тобто формули (32) надають опис цієї траєкторії у параметричній формі. Загальний вигляд цієї траєкторії для паливозаправника КрАЗ-63221 показано на рис. 15, а його нижньої межі – на рис. 16, 17. Для порівняння на рис. 18 надано графіки, що відповідають так званому «замороженому вантажу», який загубив можливість рухатися у цистерні.

Як бачимо (рис. 15), розташування верхньої межі залежить від завантаженості автомобіля, і при високих частотах чим більше вага, тим легше забезпечити його курсову стійкість за рахунок регулюючого впливу на гальмівну систему.

Нижня межа області стійкості відповідає діапазону частот 0 – 10 Гц, а верхня межа – діапазону 10 – 15 Гц. При ще більших частотах межа уходить в зону від'ємних значень коефіцієнту K_ψ , де це обмеження втрачає актуальність. Якщо вантаж закріплено, то і на низьких частотах діє аналогічне правило (рис. 18).

Але, якщо транспортується рідина у цистерні, то на низьких частотах (рис. 16) більш важливу роль починає відігравати швидкість автомобіля, яка при граничному зменшенні навантаження (або русі з гори) зростає до 25 м/с, а при повному навантаженні цистерни рідиною знижується до 12 м/с. До того ж, свій вклад вносять парціальні осцилятори, які мають низький декремент загасання і резонують при частотах, що зображено на рис. 5, а також коливання зсуву (їх власна частота дана в табл. 1, а логарифмічний декремент загасання при відсутності амортизаторів дорівнює 0.08, тобто він також малий).

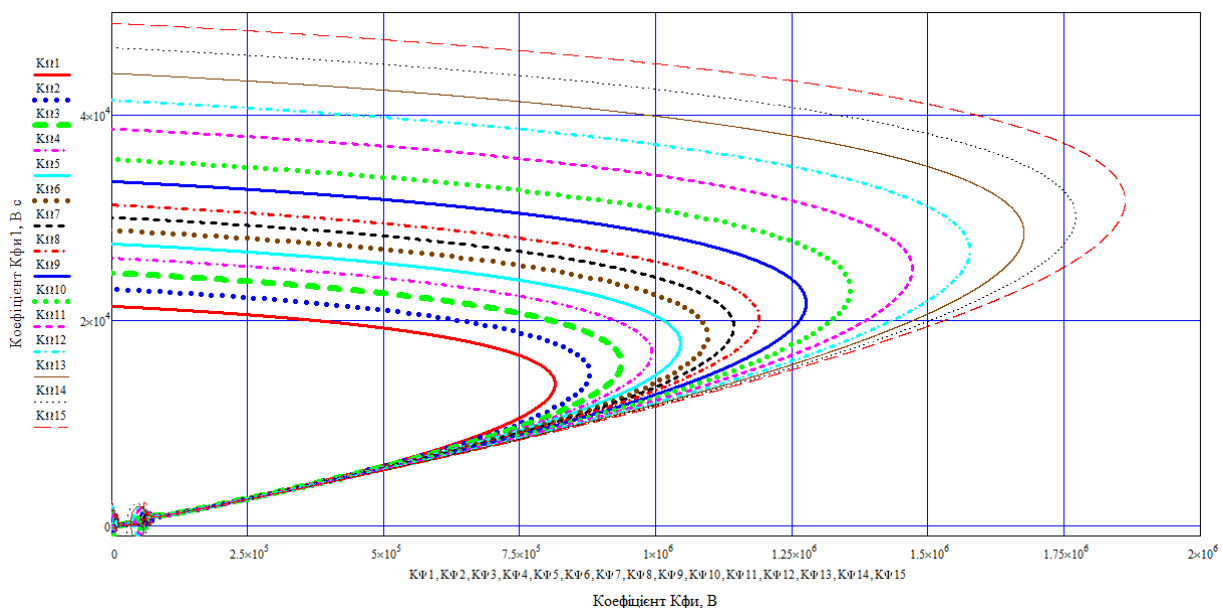


Рис. 15 – Загальний вигляд області курсової стійкості.

Позначення K_{fi} на рисунках статті відповідає коефіцієнту K_ψ , а позначення K_{fi1} – коефіцієнту K_ω .

Номер межі тут і надалі відповідає наступним рівням рідини:

1 – 0.05; 2 – 0.10; 3 – 0.15; 4 – 0.20; 5 – 0.25; 6 – 0.30; 7 – 0.35; 8 – 0.40;
9 – 0.50; 10 – 0.60; 11 – 0.75; 12 – 0.90; 13 – 1.05; 14 – 1.20; 15 – 1.35 м.

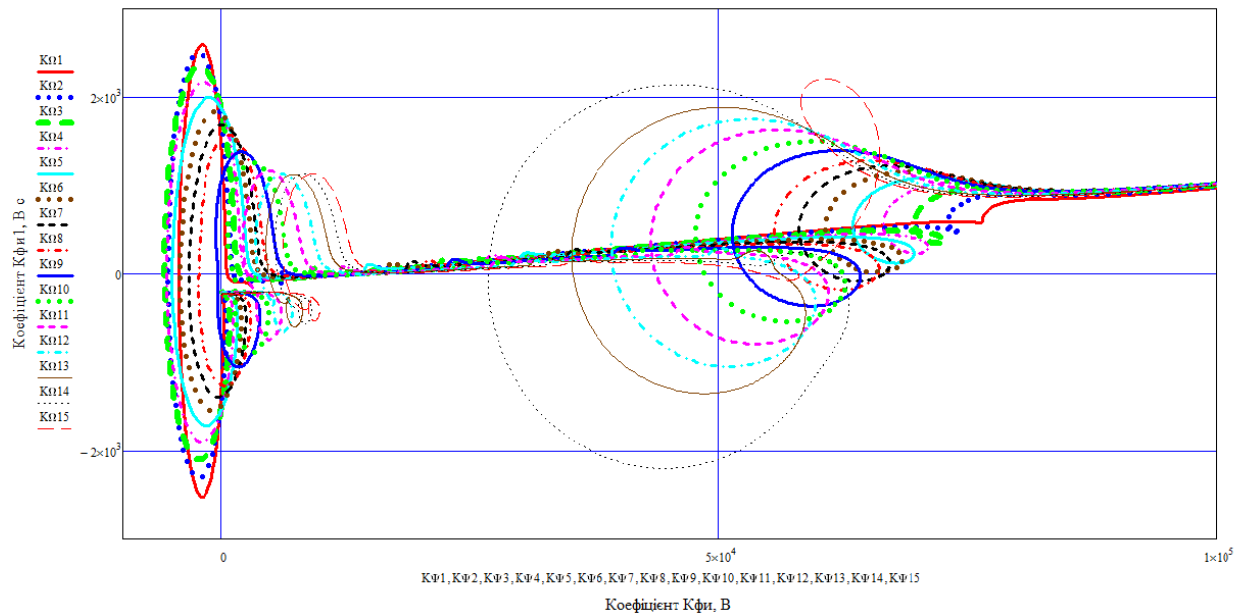


Рис. 16 – Загальний вигляд нижньої межі області курсової стійкості при частотах 0 – 2 Гц і декременті $\Delta f = 0.05$.

В результаті на рис. 16 можна побачити два вузли коливань, причому причиною утворення першого вузла (якщо їх рахувати зліва направо) та ледь помітної коливальної доріжки після нього виступають парціальні осцилятори, а другий, більш масштабний, вузол пов'язаний із розвитком коливань зсуву.

Зауважимо, що пучок наближено прямих ліній, зображений на рис. 18, визначає загальний тренд для напрямку межі кожної області стійкості, зображеної на рис. 16, і цей же тренд можна побачити на рис. 17.

З'ясувалося, що кожна траєкторія, яка відповідає прийнятому рівню навантаження, при деякій частоті коливань виходить із загального пучка, та згодом, при більшій частоті, повертається до цього пучка. В результаті, відхиляючись від загального тренда, вона утворює в площині параметрів $K_\psi - K_\omega$ декілька послідовних петель.

Детальне дослідження першої петлі, яка проходить близько нульової точки та при малих навантаження охоплює її (рис. 17) показало, що асимптотична стійкість спостерігається за умови, коли параметр K_ω розташований вище цієї петлі. Це, в принципі, відповідає *правилу штрихування області стійкості*, застосованому в роботі [21], проте, по причині наявного ускладнення загальної картини, зображеної на рис. 16, 17, в порівнянні із класичними параболою рис. 15, потребувало конкретної перевірки.

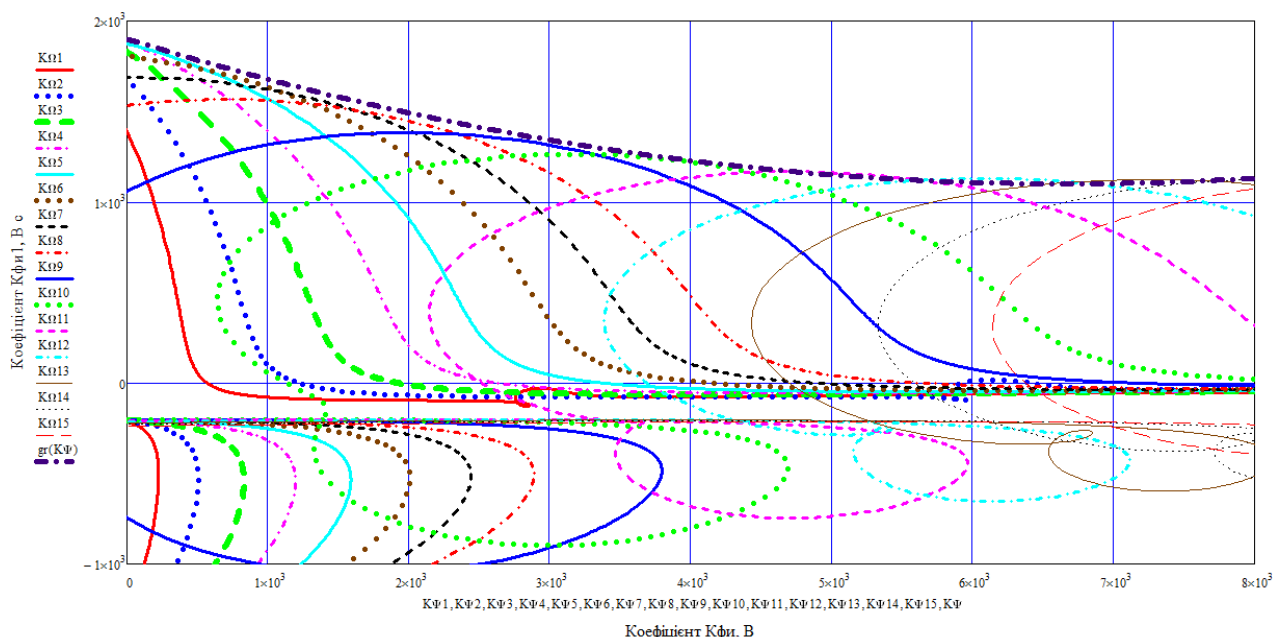


Рис. 17 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості при частотах 0 – 0.4 Гц та коефіцієнті $K_y = 0$.

Штрих-пунктирна лінія огинає усі траєкторії зверху і стає межею цієї області.

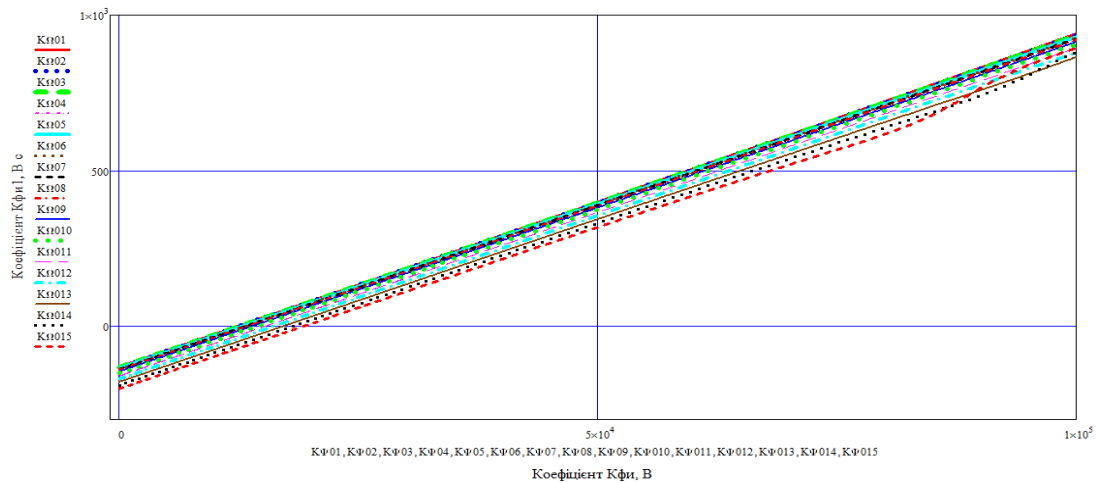


Рис. 18 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості при частотах 0 – 0.4 Гц та коефіцієнті $K_y = 0$ для автомобіля із «затверділим» вантажем.

Якщо параметр K_ω є нижчим за лінію тренда, то усі ланки системи демонструють невинне зростання амплітуд коливань. Проте найбільш цікавою виявилася зона, що розташована між лінією тренда та верхньою межею коливальної петлі. З'ясувалося, що в цій зоні коливання курсових параметрів автомобіля загасають, а у цистерні та ЕМП відбуваються сталі коливання малої амплітуди, що є ознакою автоколивань. Графіки, які ілюструють таку поведінку системи, будуть наведені у наступному пункті статті.

Як бачимо, між рідким і «затверділим» вантажем виявляється якісна різниця: якщо відключити ПД – регулятор, то у автомобіля з закріпленим вантажем після дії кінематичного або силового збудника курсовий кут вирівнюється самостійно, без втручання водія (рис. 18), а у автомобіля з цистерною (при навантаженні менш 40 % від повного, рис. 17) такої властивості немає. Проте, це не стосується курсового зсуву, для ліквідації якого, у обох випадках, необхідний двоконтурний регулятор із раціональним налаштуванням коефіцієнтів підсилення.

Алгоритм і результати дослідження на етапі 2: двоконтурне регулювання. Зафіксуємо коефіцієнт K_y на деякому позитивному рівні, та замість формул (32) отримаємо нові параметричні рівняння

$$\left\{ K_\psi = \operatorname{Re}[\Psi(\omega i)], K_\omega = \operatorname{Re}\left[\frac{\Psi(\omega i)}{\omega i}\right] + \frac{K_y V}{\omega^2} \right. \quad (33)$$

Із змісту параметричних рівнянь (33) можна зрозуміти, що корекція області стійкості буде відбуватися лише для діапазону малих частот, що й підтверджується графіками, наведеними на рис. 19.

На рис. 20, а графіки функції $K_\omega = Gr(K_\psi, K_y)$ описують нижні межі області стійкості при різних значеннях коефіцієнта K_y із діапазону $0-100 \text{ Вм}^{-1}$, який відповідає можливостям використаного ЕМП, а також фіксованому значенню декременту затухання $\Delta f = 0.05$.

Форма межі для «затверділого» вантажу задає нову лінію тренда, нижче якої зміни амплітуди коливань курсових параметрів автомобіля носять зростаючий характер (рис. 21).

В зазорі між відповідними лініями, взятими з графіків на рис. 20, а і рис. 20, б при однакових значеннях K_y , рух рідини у цистерні представляє собою автоколивання малої амплітуди (рис. 22), а вище межі стійкості всі коливання затухають (рис. 23).

Таким чином, графіки функції $K_\omega = Gr_0(K_\psi, K_y)$ на рис. 20, б

описують нижні межі області автоколивань для автомобіля з рідким вантажем у цистерні.

Розрахунки, результати яких наведено на рис. 21 – 23, було виконано із застосуванням нелінійної математичної моделі (4) – (11); для збудження коливань використовувався однаковий чинник $M_c(t)$ в системі керування гальмами (рис. 11); декремент загасання коливань у рідині становив $\Delta f \approx 0.05$. Рівень рідини в цистерні був обраний 0.5 м, для якого максимальна швидкість паливозаправника КрАЗ - 63221 дорівнює 20 м/с. Цьому рівню навантаження та швидкості на рис. 19 відповідає петля синього кольору, яка має порядковий номер 9.

Для інтегрування використовувався модифікований метод Ейлера, який добре зарекомендував себе при розрахунках складних механічних систем ракетної техніки [23]; з огляду на невелике значення коефіцієнтів тертя він для цієї задачі має другий порядок точності. Крок інтегрування, в залежності від часу експозиції, обирався із діапазону $10^{-4} \dots 10^{-3} \text{ с}$ і був на три порядки меншим, ніж періоди досліджуваних коливань.

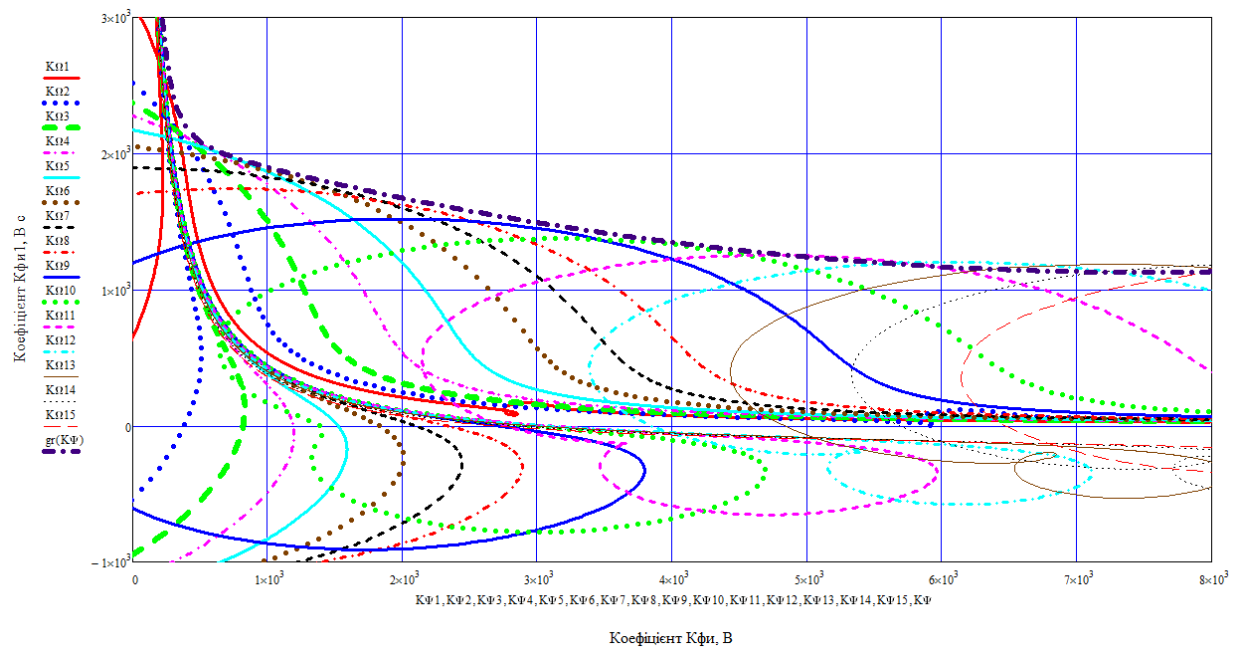


Рис. 19 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості при частотах 0 – 0.4 Гц та значенні $K_y = 50 \text{ Вм}^{-1}$.

Штрих-пунктирна лінія огинає усі траєкторії зверху та утворює вказану межу.

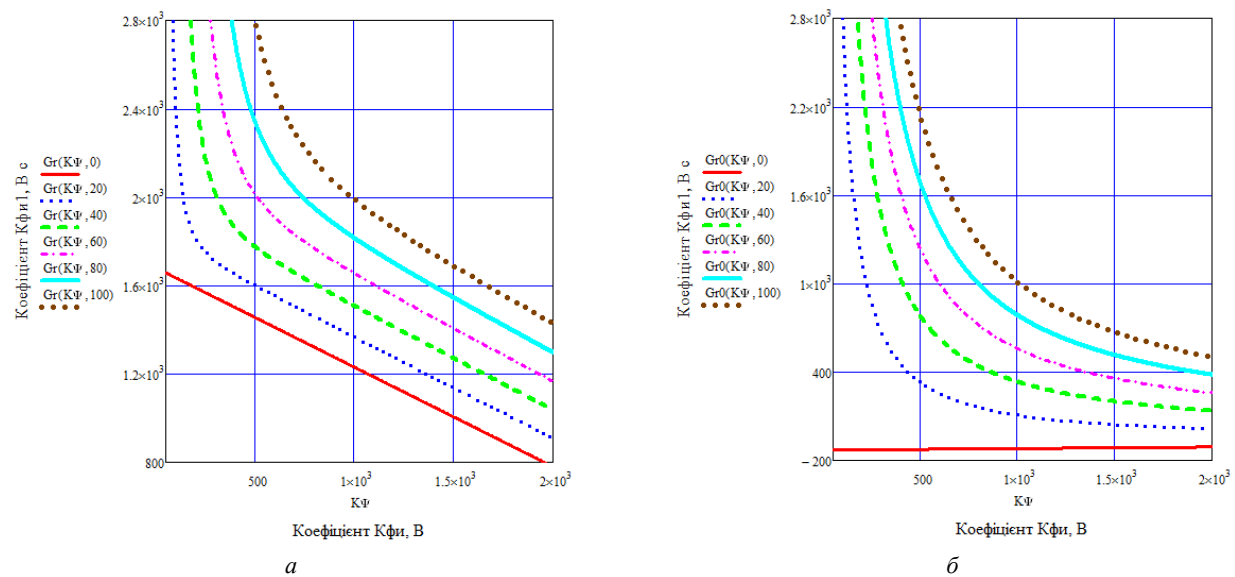


Рис. 20 – Зміни нижньої межі області стійкості в залежності від вибору інтегрального коефіцієнту K_y :

a – для рідкого вантажу межа має опис $K_\omega = Gr(K_\psi, K_y)$; b – для «затверділого» вантажу межа має опис $K_\omega = Gr0(K_\psi, K_y)$.

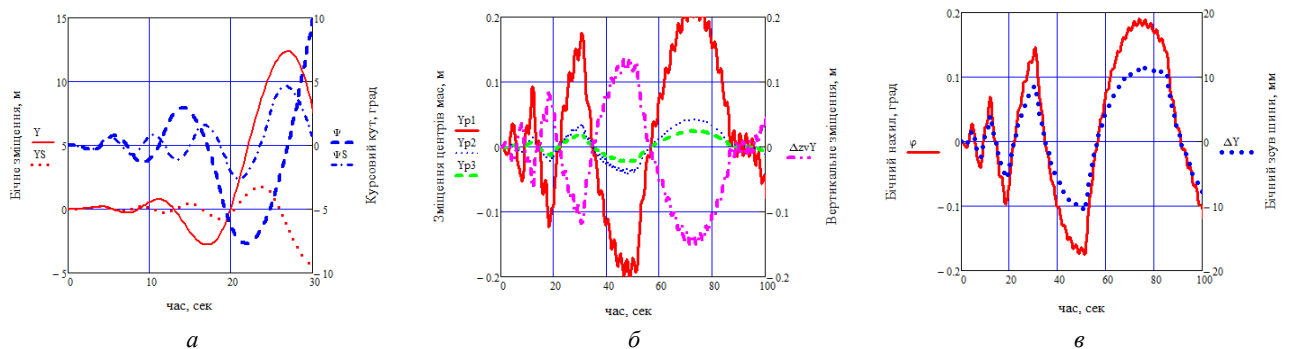


Рис. 21 – Нестійкий процес руху при значеннях $K_\psi = 1000 \text{ В}$, $K_\omega = 300 \text{ В с}$, $K_y = 50 \text{ Вм}^{-1}$:

a – зміна курсових параметрів (літера S відповідає «затверділому» вантажу); b – коливання парціальних осциляторів; c – бічні коливання корпусу автомобіля.

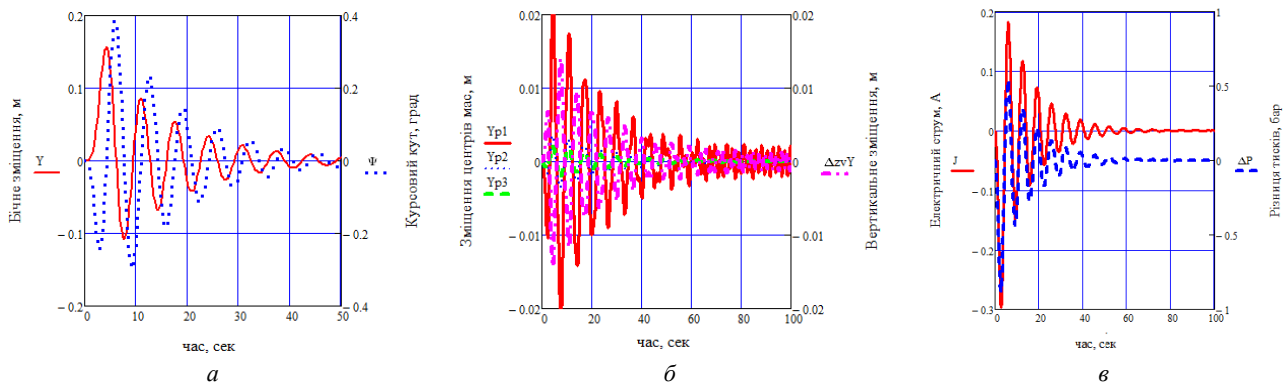


Рис. 22 – Повільні перехідні процеси при значеннях коефіцієнтів $K_{\psi} = 1000 \text{В}$, $K_{\omega} = 1000 \text{Вс}$, $K_y = 50 \text{Вм}^{-1}$:
 a – зміна курсових параметрів; b – коливання парціальних осциляторів; v – коливання параметрів регулятора.

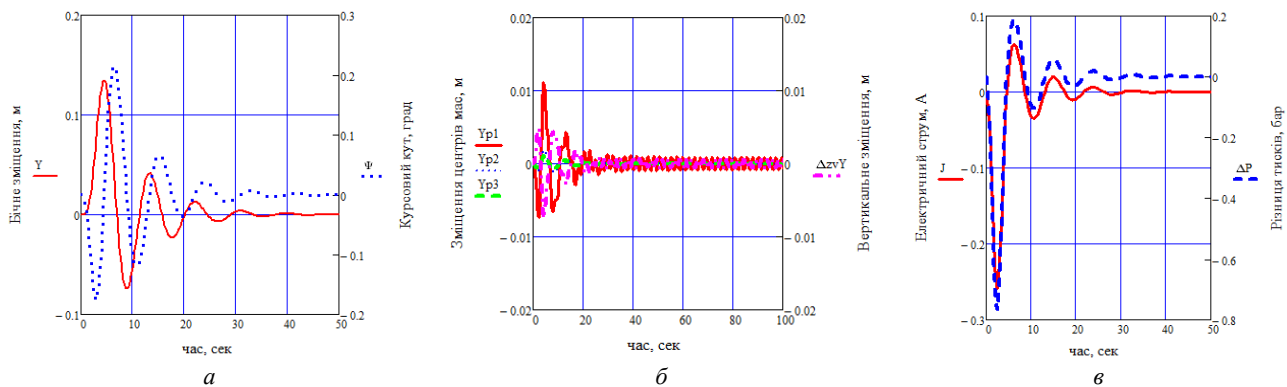


Рис. 23 – Швидке відновлення курсу при значеннях коефіцієнтів $K_{\psi} = 1000 \text{В}$, $K_{\omega} = 2000 \text{Вс}$, $K_y = 50 \text{Вм}^{-1}$:
 a – зміна курсових параметрів; b – коливання парціальних осциляторів; v – коливання параметрів регулятора.

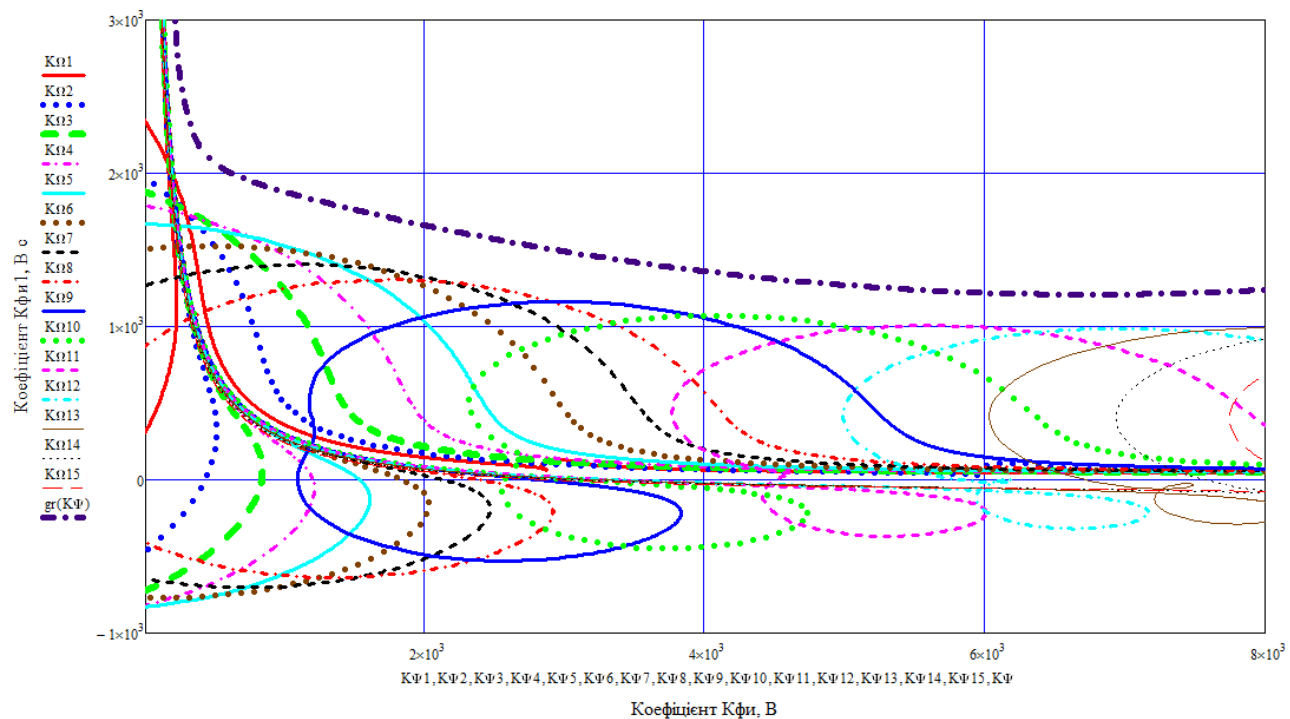


Рис. 24 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості при частотах $0 - 0.4 \text{ Гц}$ та значенні $K_y = 50 \text{Вм}^{-1}$.

При середньому рівні рідини $h_* = 0.7 \text{ м}$ швидкість автомобіля знижено до 12 м/с , а штрих-пунктирна лінія є межею області стійкості для $V_* = 18 \text{ м/с}$.

Як бачимо, зменшення курсової швидкості розширює область стійкості.

Вплив «заморожених» коефіцієнтів моделі на межу області стійкості. На основі аналізу результатів розрахункового дослідження (рис. 24, 25) встановлено, що зниження курсової швидкості однозначно приводить до опускання нижньої межі стійкості руху, причому на другому етапі цей ефект підсилюється за рахунок сенсу формул (33). Зокрема, після повної зупинки автомобіля отримаємо тривіальну область стійкості $K_{\psi} \geq 0, K_{\omega} \geq 0$.

З'ясована властивість дозволяє при розв'язуванні поставленої задачі

виключити курсову швидкість V із числа варійованих параметрів,

а її розрахункове значення встановлювати максимально можливим для прийнятого рівня завантаженості цистерни автомобіля.

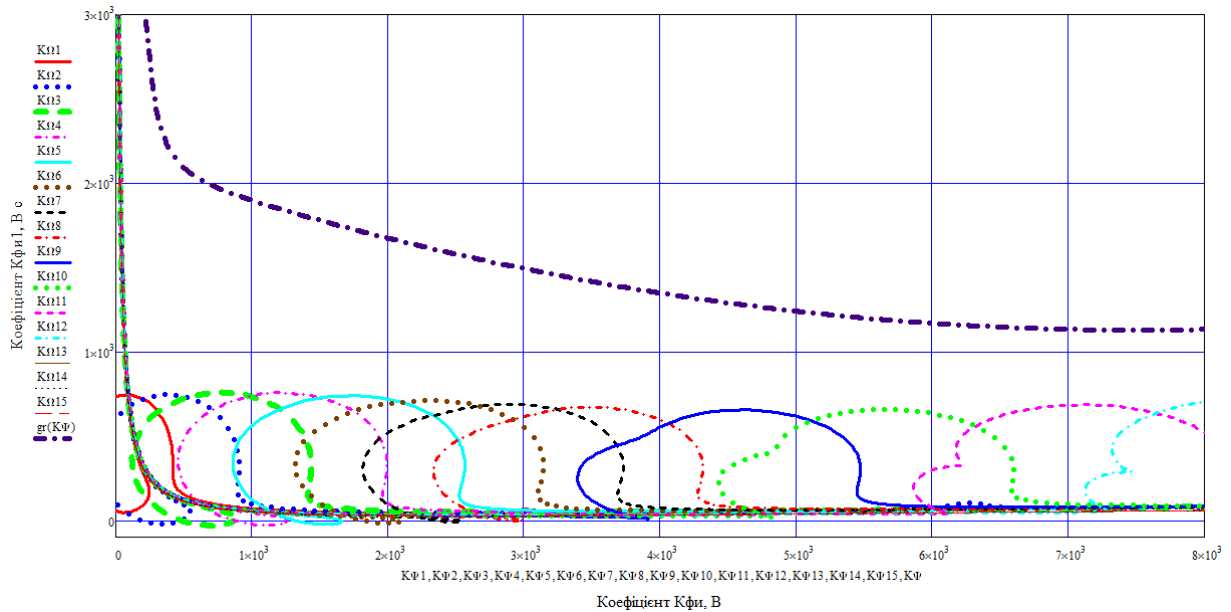


Рис. 25 – Зниження межі області стійкості перед зупинкою автомобіля з цистерною.

При середньому рівні рідини $h_* = 0.7\text{ м}$ розрахункову швидкість автомобіля знижено до 2 м/с .

Проте, оскільки різні точки межі курсової стійкості відповідають різним рівням рідини h , необхідність розглядати рівні, вибрані із всього діапазону $0 \dots H$, залишається незмінною і для другого етапу розв'язку задачі. Бо інакше, обмежуючись, як це прийнято, середнім рівнем рідини, можна припуститися серйозної помилки.

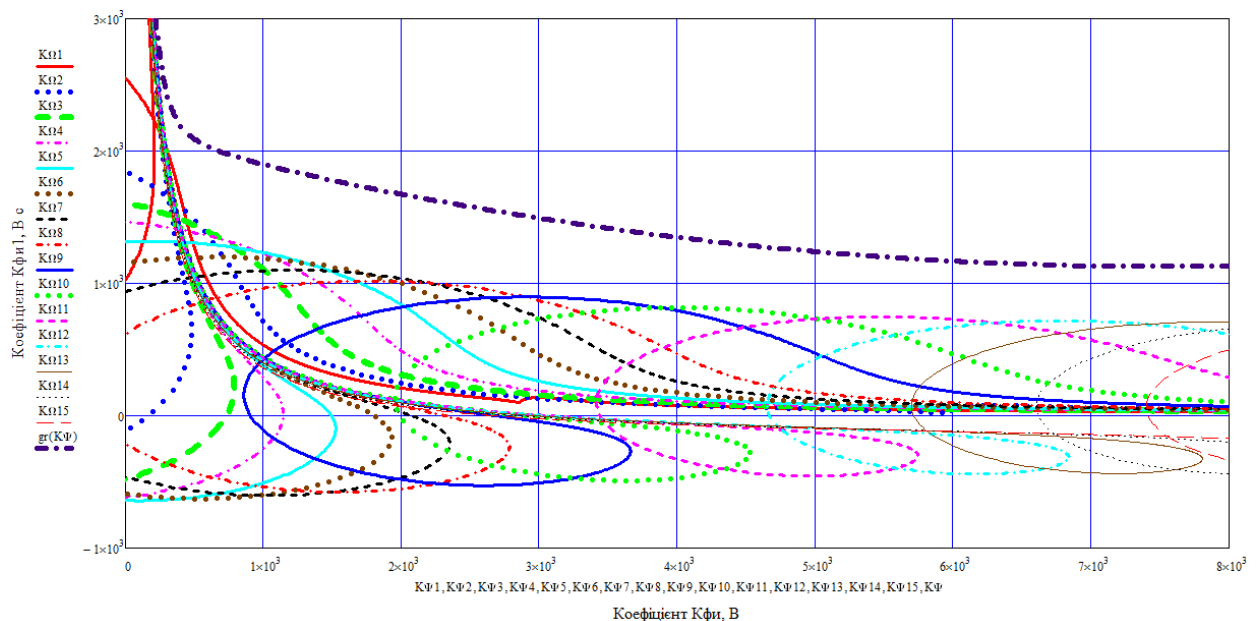


Рис. 26 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості для системи VSC при значенні $K_y = 50\text{ Вм}^{-1}$.

Логарифмічний декремент загасання коливань збільшено до рівня $\Delta f = 0.1$.

В ще одному розрахунковому дослідженні моделювали вплив декременту загасання поперечних коливань рідини у цистерні на область курсової стійкості автомобіля. Встановлено, що при зменшенні декременту до рівня $\Delta f = 0.01$, що при перевезенні нафтопродуктів малої в'язкості (бензину, дизельного пального, керосину) відповідає коливанням гранично малої амплітуди $Y_1 \approx 0$, межева лінія, яку показано на рис. 24, 25 штрих-пунктиром, підіймається вверх у два-три рази, до рівня $K_{\omega} \approx 6 \cdot \text{кВс}$, після чого для обраного ЕМП значення цього коефіцієнту підсилення стають занадто великими. Тобто,

забезпечити абсолютну асимптотичну стійкість для цієї системи керування у практичному сенсі не можливо і не потрібно.

Проте, якщо вважати припустимими автоколивання з амплітудою $Y_1 < 0.2 \text{ м}$, яким відповідає значення декременту $\Delta f = 0.1$, то межа області стійкості опуститься на рис. 26 вниз і займе місце лінії, що огинає усі траєкторії зверху. Цю нову межу й пропонується враховувати при оптимальному виборі параметрів регулятора.

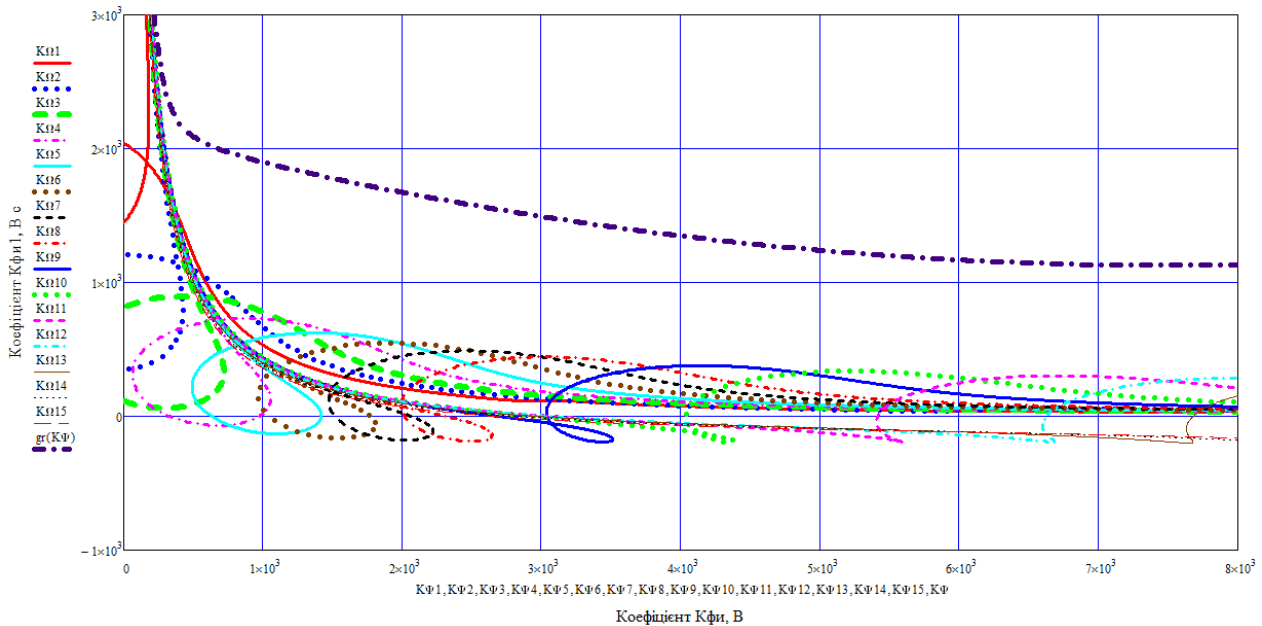


Рис. 27 – Актуальна ділянка нижньої межі області курсової стійкості при декременті $\Delta f = 0.25$.

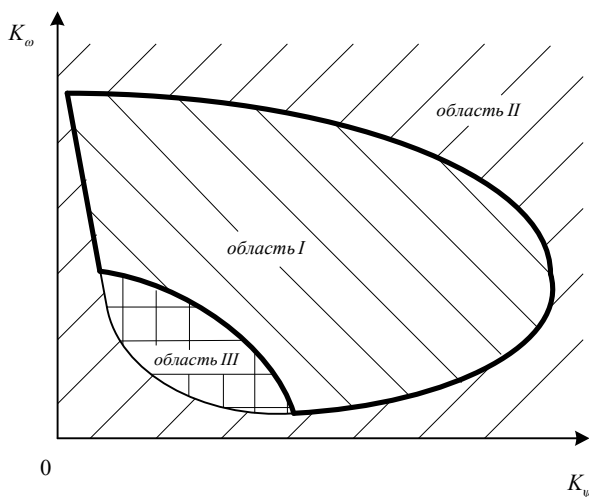


Рис. 28 – Схематичне зображення областей асимптотичної стійкості (I), нестійкості (II) та автоколивань (III) при деякому постійному значенні коефіцієнта $K_y > 0$.

меншій амплітуді коливань, проте, якщо не змінювати настроювання регулятора K_{ψ} , K_{ω} , K_y , то й декремент загасання залишиться незмінним.

Тобто, для автомобіля з цистерною в області автоколивань

система керування гальмами пристосовується до властивостей рідини і є адаптивною.

На завершення цього дослідження, зауважимо: якщо додатково збільшити декремент загасання коливань до рівня $\Delta f = 0.25$, то межа області курсової стійкості впритул наблизиться до лінії тренда (рис. 27), нижче якої система й при «затверділому» вантажі втрачає стійкість, причому зростання амплітуди поперечних коливань корпусу автомобіля там відбувається дуже швидко. При цьому амплітуда поперечних коливань рідини малої в'язкості також зростає до рівня $Y_1 = 0.5 \text{ м}$, що для розмірів автомобільної цистерни є завеликим і призведе до помітного крену автомобіля при коливаннях. Зрозуміло, що з цих причин, а також з міркування забезпечення необхідного запасу міцності системи керування щодо її стійкості, при виборі параметрів регулятора спускати нижче межі, що сформовано на рис. 26, недоречно.

Додамо, що коли при експлуатації паливозаправника суттєво збільшиться в'язкість рідини у цистерні (наприклад, при транспортуванні моторного палива або оливи), то система сама знайде відповідну позицію для стійкої динамічної рівноваги. Це відбуватиметься при

Як показує досвід вирішення аналогічних задач для ракетно-космічної техніки, де використовуються різноманітні системи автоматичного керування з регуляторами тиску газу чи рідини, режим автоколювань малої амплітуди є вкрай корисним, бо він страхує систему від негативного впливу сухого тертя і підвищує оперативність керування [23]. Високі технології у наш час, зазвичай, передаються в техніці у напрямку «з неба – до землі», і при розробці систем типу EBD для автомобілів-паливозаправників рекомендується скористатися цим досвідом. Тобто коефіцієнти регулятора системи автоматичного керування гальмами в подальших дослідженнях доречно обирати з області III, а не з області I (рис. 28).

Висновки. 1. Складено математичну модель для опису збуреного руху автомобіля з цистерною, яка дозволяє врахувати коливання вільної поверхні рідини та визначити їх вплив на курсову стійкість автомобіля при сталому русі та під час термінового гальмування. Модель відрізняється від відомих моделей того ж спрямування тим, що для розрахунку поздовжніх, поперечних та крутильних коливань рідини використовує метод парціальних осциляторів, і це дозволило проводити динамічний аналіз за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь.

2. Розроблено алгоритм побудови характеристичного рівняння та аналізу його розв'язків для складної системи диференціальних рівнянь, що описує динамічні зміни параметрів руху автомобіля з цистерною, коливання парціальних прошарків рідини у цистерні та роботу електромагнітного приводу керуючого клапана і електронного ПІД-регулятора для двоконтурної системи забезпечення курсової стійкості. Алгоритм відрізняється від відомих методів того ж призначення тим, що він не розраховує коефіцієнти алгебраїчної функції і не аналізує їх, а оперує з числовими значеннями дрібно-раціональних функцій за допомогою комп'ютерних розрахунків і візуалізації межі стійкості.

3. Вперше на основі розробленої теорії, а також аналізу достатньої кількості прикладів і розрахунків з використанням якісної математичної моделі, науково обгрунтоване відоме апріорне твердження про те, що низькочастотні коливання вільної поверхні рідини призводять до суттєвого скорочення області стійкості замкненої системи курсової стабільності автомобіля. Доведене твердження свідчить про обов'язковість врахування зазначених коливань рідини при вирішенні задач аналізу і синтезу системи автоматичного керування гальмами.

4. Вперше встановлено, що для автомобіля з цистерною, де відбуваються низькочастотні поперечні коливання рідини, які супроводжуються перерозподілом маси і збурюють рух, збільшення курсової швидкості однозначно призводить до погіршення курсової стійкості. Це дозволило виключити курсову швидкість із числа варіюваних параметрів і суттєво спростити задачу аналізу чи синтезу.

5. Вперше з'ясовано, що на відміну від автомобілів із закріпленим вантажем, рівень рідини в цистерні, з урахуванням його зв'язку з максимальною швидкістю руху, оказує неоднозначний вплив на курсову стійкість автомобіля, і обмежувати дослідження лише розрахунками для випадку 50% навантаження неприпустимо. Замість цього традиційного спрощення запропонований новий метод побудови межі стійкості, при якому треба знаходити лінію, яка огинає зверху ті межі, що відповідають багатьом рівням рідини із діапазону їх зміни. Вказаний метод корисний тим, що дозволяє на етапі проектування системи автоматичного керування гальмами адекватно проаналізувати існуючі обмеження і не припуститися помилок.

6. Вперше проаналізовано вплив логарифмічного декременту загасання коливань рідини на нижню межу області стійкості в площині варіюваних параметрів регулятора. Показано, що при транспортуванні рідини малої в'язкості (з декрементом 0.01) забезпечити виконання умови асимптотичної стійкості в практичному сенсі важко і недоречно. Запропоновано розраховувати цю межу у відповідності до умови, що декремент збільшений до 0.1. При дотриманні цієї умови довгострокова робота електронної системи автоматичного керування гальмами типу EBD буде супроводжуватися автоколюваннями малої амплітуди, що підвищить оперативність керування.

Список літератури

1. Врублевский А. Н. Научные основы создания аккумуляторной топливной системы для быстроходных дизелей : монография. – Харьков: ХНАДУ, 2010. – 216 с.
2. Буханович А. Г. Электронное управление топливopодачей дизельного двигателя на основе программного ПИД – регулирования // Наука и техника. – 2017. – Т.16. – № 1. – С. 28 – 37.
3. Alksxandrov Ye., Alekssandrova T., Morhun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – N 6/9 (102). – P. 39 – 45. doi: 10.15587/1729-4061.2019.188185.
4. Абрамчук Ф. І., Альохін С. О., Белов О. М. Техніко-економічне обгрунтування необхідності державної підтримки у виконанні інноваційно-інвестиційного проекту «Розроблення та впровадження у виробництво малолітражного автомобільного дизеля потужністю 100-175 к.с. подвійного призначення (Слобожанський дизель)». – Харків : ХНАДУ, 2012. – 162 с
5. Tavernini D., Velenis E., Longo S. (2017) Feedback brake distribution control for minimum pitch // Vehicle System Dynamics. – 2017. – Vol 55. – N.6. – P. 902 – 923. doi: 10.1080/00423114.2017.1293275.
6. Fujimoto H., Narada S. (2015) Model – Based Range Extension Control System for Electric Vehicles with Front and Rear Driving – Braking Force Distribution // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2015. – Vol. 62. – N.5. – P. 3245 – 3254. doi: 10.1109/TIE.2015.2402634.
7. Gong X., Qian L., Ge W., Yan J. (2020) Research on Electronic Brake Force Distribution and Anti - Lock Brake of Vehicle Based on Direct Drive Electro Hydraulic Actuator // International Journal of automotive Engineering. – 2020. – Vol. 11. – N. 2. – P. 22 – 29. doi: 10.20485/jsaeijae.11.2_22.
8. Tavernini D., Velenis E., Longo S. (2015) Model – Based Active Brake Force Distribution for Pitch Angle Minimization // 54th IEEE Conference

- on Decision and Control. December 15 – 18. – Osaka, Japan, 2015. – P. 197 – 202. doi: 10.1109/CDC.2015.7402108.
9. Nakamura E., Soga M., Sacai A., Otomo A., Kobayashi T. (2002) Development of Electronically Controlled Brake System for Hybrid Vehicle // SAE 2002 World Congress. – Detroit, Michigan, March 4 – 7, 2002. – Printed in USA. – 6 p.
 10. Park G., Choi S. B. (2016) Optimal Brake Distribution for Electronic Stability Control Using Weighted Least Square Allocation Method // 16 International Conference on Control «Automation and Systems» (ICCAS 2016). Oct. 16 – 19, 2016 in HICO. – Gyeongju, Korea, 2016. – P. 1420 – 1425. doi: 10.1109/ICCAS.2016.7832492.
 11. Wu Xinyu. (2015) Control Strategy and Algorithm Study on Light Vehicle Electronic Mechanical Braking System // 5th International Conference on Education, Management, Information and Medicine (EMJM 2015). – 2015. – P. 1453 – 1458. doi: 10.2991/emim-15.2015.282.
 12. Her H., Cho W., Yi K. (2011) Vehicle Stability Control Using Individual Break Force Based on Tire Force Information // 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems. October 5 – 7, 2011. – Washington, USA. – P. 22 – 29. doi: 10.1109/ITSC.2011.6082997.
 13. Александров Е. Е., Волонцевич Д. О., Подригало М. А. Повышение устойчивости и управляемости колесных машин в тормозных режимах. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2007. – 320 с.
 14. Александров Е. Е., Александрова Т. Е., Овчаренко Ю. С. Підвищення технічних та ергономічних характеристик рухомих об'єктів військового призначення : монографія. – Харків : ХНАДУ, 2019. – 176 с.
 15. Александров Е. Е., Григор'єв О. Л., Моргунов Я. Ю. Про вплив коливань верхньої поверхні транспортуємої рідини на курсову стійкість автомобіля, що оснащений цистерною з рідким наповнювачем // Тези доповідей VII Міжнародної науково-технічної Інтернет-конференції «Автомобіль і електроніка. Сучасні технології», 23-24 листопада 2020 р. – 2020. – С. 88 – 90.
 16. Зинько Р. В., Крайник Л. В., Горбай О. З. Основи конструктивного синтезу та динаміка спеціальних автомобілів і технологічних машин: монографія. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2019. – 256 с.
 17. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – № 3 (1271). – С. 41 – 51.
 18. Александров Е. Е., Александрова Т. Е., Костяник И. В., Моргунов Я. Ю. Параметрический синтез цифровой системы курсовой устойчивости автомобиля // Автомобиль и электроника. Сучасні технології (електронний журнал). – 2020. – № 17. – С. 69 – 76.
 19. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости // Математические методы динамики космических аппаратов. Вып. 3. – Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1966. – 269 с.
 20. Кожушко А. П. Експериментальне та розрахункове дослідження загасання коливань рідини в ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2020. – № 1. – С. 24 – 43.
 21. Александров Е. Е. Основи автомобільної автоматики: навчально – методичний посібник. – Харків : ХНАДУ, 2010. – 172 с.
 22. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М. : Наука, 1975 – 768 с.
 23. Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С. Исследование динамической устойчивости регулятора давления с пневматическим управлением при учете колебаний столбов газа в трубопроводах // Вісник НТУ «ХПИ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПИ». – № 26(1198). – 2016. – С. 89 – 108.

References (transliterated)

1. Vrublevskiy A. N. *Nauchnyye osnovy sozdaniya akkumulyatornoy toplivnoy sistemy dlya bystrokhodnykh dizeley : monografiya*. [Scientific foundations for creating a storage fuel system for high-speed diesel engines: monograph]. Kharkov, KHNADU Publ., 2010. 216 p.
2. Bukhanovich A. G. Elektronnoye upravleniye toplivopodachey dizel'nogo dvigatelya na osnove programmnoy PID – regulirovaniya [Electronic control of diesel engine fuel supply based on programmed PID control]. *Nauka i tekhnika* [Science and technology]. 2017, vol. 16, no. 1, pp. 28–37.
3. Aleksandrov Ye., Alekssandrova T., Morhun Y. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, no. 6/9 (102), pp. 39–45.
4. Abramchuk F. I., Al'okhin S. O., Belov O. M. *Tekhniko-ekonomichne obgruntuvannya neobkhidnosti derzhavnoyi pidtrymky u vykonanni innovatsiynno-investytsiynogo proektu «Rozroblennya ta vprovadzhennya u vyrobnytstvo malolitrazhnogo avtomobil'nogo dyzelya potuzhnistyu 100-175 k.s. podviynoho pryznachennya (Slobozhans'ky dyzel)»* [Feasibility study of the need for state support in the implementation of innovation and investment project "Development and implementation in the production of small car diesel with a capacity of 100-175 hp dual-use (Slobozhansky diesel)"]. Kharkiv, KHNADU Publ., 2012. 162 p.
5. Tavernini D., Velenis E., Longo S. (2017) Feedback brake distribution control for minimum pitch. *Vehicle System Dynamics*. 2017, vol 55, no.6, pp. 902–923. doi: 10.1080/00423114.2017.1293275.
6. Fujimoto H., Narada S. (2015) Model – Based Range Extension Control System for Electric Vehicles with Front and Rear Driving – Braking Force Distribution. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2015, vol. 62, no. 5, pp. 3245–3254.
7. Gong X., Qian L., Ge W., Yan J. (2020) Research on Electronic Brake Force Distribution and Anti - Lock Brake of Vehicle Based on Direct Drive Electro Hydraulic Actuator. *International Journal of automotive Engineering*. 2020, vol. 11, no. 2, pp. 22–29. doi: 10.20485/jsaeiae.11.2_22.
8. Tavernini D., Velenis E., Longo S. (2015) Model – Based Active Brake Force Distribution for Pitch Angle Minimization. *54th IEEE Conference on Decision and Control*. December 15 – 18. Osaka, Japan, 2015, pp. 197–202. doi: 10.1109/CDC.2015.7402108. doi: 10.4271/2002-01-0300.
9. Nakamura E., Soga M., Sacai A., Otomo A., Kobayashi T. (2002) Development of Electronically Controlled Brake System for Hybrid Vehicle. *SAE 2002 World Congress*. Detroit, Michigan, March 4 – 7, 2002, Printed in USA. 6 p.
10. Park G., Choi S. B. (2016) Optimal Brake Distribution for Electronic Stability Control Using Weighted Least Square Allocation Method. *16 International Conference on Control «Automation and Systems» (ICCAS 2016)*. Oct. 16 – 19, 2016 in HICO. Gyeongju, Korea, 2016, pp. 1420–1425. doi: 10.1109/ICCAS.2016.7832492.
11. Wu Xinyu. (2015) Control Strategy and Algorithm Study on Light Vehicle Electronic Mechanical Braking System. *5th International Conference on Education, Management, Information and Medicine (EMJM 2015)*. 2015, pp. 1453–1458. doi: 10.2991/emim-15.2015.282.
12. Her H., Cho W., Yi K. (2011) Vehicle Stability Control Using Individual Break Force Based on Tire Force Information. *14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*. October 5 – 7, 2011. Washington, USA, pp. 22–29. doi: 10.1109/ITSC.2011.6082997.
13. Aleksandrov Ye. Ye., Volontsevich D. O., Podrigalo M. A. *Povyshenie ustoychivosti i upravlyaemosti kolesnykh mashin v tormoznykh rezhimakh* [Increasing the stability and controllability of wheeled vehicles in braking modes]. Kharkov, NTU «KHPI» Publ., 2007. 320 p.
14. Aleksandrov Ye. Ye., Aleksandrov T. Ye., Ovcharenko YU. YE. *Pidvyshchennya tekhnichnykh ta ergonomichnykh kharakterystyk rukhomykh ob'ektiv viys'kovogo pryznachennya : monografiya* [Enhancement of technical and ergonomic characteristics of movable objects of military purpose: monograph]. Kharkiv, KHNADU Publ., 2019. – 176 p.
15. Aleksandrov YE. YE., Grygor'yev O. L., Morgun YA. YU. Pro vplyv kolyvan' verkhnoyi poverkhni transportuyemoy ridyny na kursovu styikist' avtomobilya, shho osnashheny tsysternoyu z ridkym napovnyuvachem [On the influence of oscillations of the upper surface of the transported liquid on the roadholding ability of a car with a liquid filled tank]. *Tezy dopovidey VII Mizhnarodnoyi naukovy-tekhnichnoyi Internet - konferentsiyi «Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnoloniyi»* [Abstracts of the VII International scientific and technical internet conference Automobile and electronics. Contemporary technologies]. November 23 – 24, 2020, pp. 88–90.
16. Zyn'ko R. V., Kraynyk L. V., Gorbay O. Z. *Osnovy konstruktivnogo syntezu ta dynamika spetsial'nykh avtomobiliv i tekhnologichnykh mashyn* :

- monografiya* [Fundamentals of constructive synthesis and dynamics of special cars and technological machines: monograph]. Lviv, Vyd-vo L'vivskoyi politekhniki Publ., 2019. 256 p.
17. Kozhushko A. P., Grygor'yev O. L. Matematychnye modelyuvannya nyz'kochastotnykh kolyvan' v'yazkoyi ridyny v goryzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modeling of low-frequency oscillations of viscous fluid in a horizontal container with free surface]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1271), pp. 41–51.
 18. Aleksandrov YE. YE., Aleksandrov T. YE., Kostyanyk I. V., Morgun YA. YU. Parametricheskiy sintez tsyfrovoy systemy kursovoy ustoychivosti avtomobilya [Parametric synthesis of the digital system of course stability of the car]. *Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnologiyi (elektronnyy zhurnal)* [Automobile and electronics. Contemporary technologies (electronic journal)]. 2020, no. 17, pp. 69–76.
 19. Moiseev N. N., Petrov A. A. Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichenogo ob'yema zhidkosti [Numerical methods for computing vibration frequencies of bounded volume of liquid]. *Matematicheskie metody dinamiki kosmicheskikh apparatov* [Mathematical methods in spacecraft dynamics]. Vol. 3, Moscow, VTs AN SSSR Publ., 1966. 267 p.
 20. Kozhushko A. P. Eksperimental'ne ta rozrakhunkove doslidzhennya zagasannya kolyvan' ridyny v yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Experimental and computational study of liquid oscillation damping in a free surface vessel]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 1, pp. 24–43.
 21. Aleksandrov YE. YE. *Osnovy avtomobil'noyi avtomatyky : navchal'no-metodychnyy posibnyk* [Fundamentals of automotive automation: a textbook]. Kharkiv, KHNADU Publ., 2010. 172 p.
 22. Besekerskiy V. A., Popov Ye. P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of automatic control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 768 p.
 23. Shevchenko S. A., Grigor'yev A. L., Stepanov M. S. Issledovanie dinamicheskoy ustoychivosti regulatora davleniya s pnevmaticheskim upravleniem pri uchete kolebaniy stolbov gaza v truboprovodakh [Investigation of the dynamic stability of a pneumatically controlled pressure regulator taking into account the oscillations of gas columns in pipelines]. *Visnyk NTU «KHPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU«KHPI» Publ., 2016, no. 26(1198), pp. 89–108.

Надійшла (received) 06.12.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Александров Євген Євгенович – доктор технічних наук, професор, лауреат Державної премії, заслужений діяч науки і техніки України, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 625-68-40; e-mail: alexsandrov.ye.ye@gmail.com.

Александров Евгений Евгеньевич – доктор технических наук, профессор, лауреат Государственной премии, заслуженный деятель науки и техники Украины, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 625-68-40; e-mail: alexsandrov.ye.ye@gmail.com.

Aleksandrov Yevgen Yevgenovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Laureate of State Prize, Honoured Scientist and Engineer of Ukraine, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 625-68-40; e-mail: alexsandrov.ye.ye@gmail.com.

Александрова Тетяна Євгенівна – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 079-50-00; e-mail: alexsandrov.t.ye@gmail.com.

Александрова Татьяна Евгеньевна – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (097) 079-50-00; e-mail: alexsandrov.t.ye@gmail.com.

Aleksandrova Tetyana Yevgenivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (097) 079-50-00; e-mail: alexsandrov.t.ye@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Моргун Ярослав Юрієвич – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 960-66-36; e-mail: yarki95@gmail.com.

Моргун Ярослав Юрьевич – аспирант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 960-66-36; e-mail: yarki95@gmail.com.

Morhun Yaroslav Yuriyevych – PhD student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (066) 960-66-36; e-mail: yarki95@gmail.com.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОГРАМОВАНИХ ОДНОЕЛЕКТРОННИХ НАНОСХЕМ**

Швидкодія та спеціалізація великих інтегральних схем завжди вступають в протиріччя з їх універсальністю, що розширює їх номенклатуру і викликає подорожчання електронних пристроїв. Усунути протиріччя між універсальністю і спеціалізацією можна шляхом розробки програмованих наноелектронних пристроїв, алгоритми роботи яких змінюються на вимогу розробника конкретної обчислювальної апаратури, тобто шляхом створення арифметико-логічних схем з програмованими характеристиками. При виготовленні таких схем використовується єдиний нанотехнологічний комплекс, а тому з точки зору технолога це – універсальні вироби. Налаштування самих мікро- чи наносхем на заданий алгоритм роботи виконує розробник апаратури, з точки зору якого ці схеми реалізують вузько спеціалізовані завдання. В результаті програмування вносяться зміни структури схем, які призводять до набуття заданих характеристик. Розробка питань теорії і практики використання мажоритарного принципу являється в теперішній час актуальною проблемою, оскільки при наноелектронному виконанні обчислювальних систем з програмованими структурами відбувається значне зниження їх вартості і суттєво спрощується етап автоматизованого системотехнічного проектування. Одна програмована наносхема замінює від 100 до 1000 інтегральних схем середнього ступеню інтеграції. Реалізоване комп'ютерне моделювання та проектування надійних програмованих наноелектронних пристроїв на базі технології квантових автоматів. При побудові одноелектронних схем комбінаційного та послідовностного типів використовується теорія мажоритарної логіки. Проаналізовано порядок побудови та програмування різних типів арифметико-логічних пристроїв.

Ключові слова: квантові автомати, моделювання мажоритарних елементів, програмовані наносхеми.

А. С. МЕЛЬНИК, В. А. КОЗАРЕВИЧ**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГРАММИРОВАННЫХ ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ НАНОСХЕМ**

Реализовано компьютерное моделирование и проектирование надежных программируемых нанoeлектронных устройств на базе технологии квантовых автоматов. При построении одноелектронных наносхем комбинационного и последовательностного типов используется теория мажоритарной логики. Проанализирован порядок построения и программирования различных типов арифметико-логических устройств.

Ключевые слова: квантовые автоматы, моделирование мажоритарных элементов, программируемые наносхеми.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH**SIMULATION OF PROGRAMMABLE SINGLE-ELECTRON NANOCIRCUITS**

The speed and specializations of large-scale integrated circuits always contradict their versatility, which expands their range and causes the rise in price of electronic devices. It is possible to eliminate the contradictions between universality and specialization by developing programmable nanoelectronic devices, the algorithms of which are changed at the request of computer hardware developers, i.e. by creating arithmetic circuits with programmable characteristics. The development of issues of theory and practice of the majority principle is now an urgent problem, since the nanoelectronic execution of computer systems with programmable structures will significantly reduce their cost and significantly simplify the design stage of automated systems. Today there is an important problem of developing principles for building reliable computer equipment. The use of mathematical and circuit modeling along with computer-aided design systems (CAD) can significantly increase the reliability of the designed devices. The authors prove the advantages of creating programmable nanodevices to overcome the physical limitations of micro-rominization. This continuity contributes to the accelerated introduction of mathematical modeling based on programmable nanoelectronics devices. The simulation and computer-aided design of reliable programmable nanoelectronic devices based on the technology of quantum automata is described. While constructing single-electron nanocircuits of combinational and sequential types the theory of majority logic is used. The order of construction and programming of various types of arithmetic-logic units is analyzed.

Key words: quantum automata, simulation of majority gates, programmable nanoelectronic circuits.

Вступ. Розвиток *наноелектроніки* іде в бік зменшення розмірів, підвищення швидкодії і надійності. *Одноелектронні* наносхеми з'явилися за принципових обмежень, що виникли на шляху розвитку мікросхем. Гнучка програмованість функцій і характеристик наносхем суттєво переважає можливості *програмованих логістичних інтегральних схем (ПЛІС)* за рахунок структурних переваг і меншого надлишка. Тому насути є впровадження нових методів моделювання програмованих наноелектронних пристроїв (ПНЕП).

Аналіз попередніх досліджень. *Квантові автомати (КА)* є новою нанотехнологією, в якій використовуються *кулонівська блокада* для фіксації електронів. Попередні роботи [1, 2] по ПНЕП на КА були зосереджені на програмованих з'єднаннях, що викликало проблеми нетрадиційної синхронізації наносхем. На відміну від цього, у цій роботі подолано таку проблему і запропоноване нове логічне програмування в одному напрямку (зліва-праворуч). Це дозволяє створювати адекватні і прості моделі ПНЕП і їх синхронізації.

Постановка завдання. На сьогодні є важливою проблема розробки принципів побудови надійних засобів обчислювальної техніки. Застосування *математичного і схемотехнічного моделювання* поряд з *автоматизованими системами проектування (САПР)* дозволяє в значній мірі підвищити надійність пристроїв, які проектуються. Враховуючи вищевикладене, актуальною стає *задача синтезу математичних моделей* ПНЕП для інформаційного забезпечення САПР.

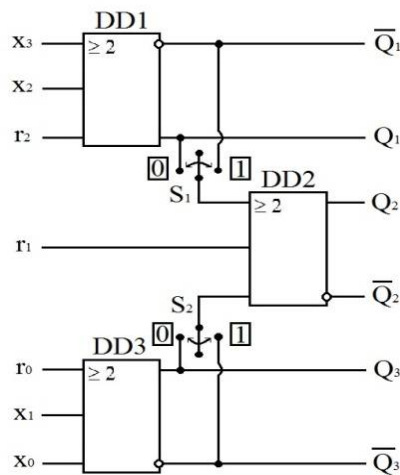


Рис. 1 – Структурна схема ПНЕП.

В якості такої комірки для побудови *мажоритарних адаптивних систем (МАС)* можна використовувати універсальний програмований наноелектронний пристрій (ПНЕП), який складається з трьох *універсальних мажоритарних елементів (УМЕ)*, відповідним чином з'єднаних між собою (рис. 1). На входи ПНЕП подаються інформаційні (x_3, x_2, x_1, x_0) і програмуючі (r_2, r_1, r_0) сигнали [3].

За допомогою ПНЕП такого типу можна реалізувати всі 16 або 256 функцій двох чи трьох аргументів, в тому числі функції суми, різниці, добутку, переносу і займу, функції одного, двох і трьох елементів пам'яті, а також більшість функцій чотирьох і п'яти аргументів. Особливістю ПНЕП являється те, що можна змінити по програмі його логічні можливості і зв'язки, які дозволяють використовувати його для побудови МАС. В табл. 1 наведені найбільш важливі функції в мажоритарному базисі, які реалізуються на базі ПНЕП.

Таблиця 1 – Приклади найбільш важливих функцій, які можна реалізувати на ПНЕП

№	r_2	r_1	r_0	Q_1	Q_2	Q_3	Число вих. функцій
1	0	0	0	$maj(x_3, x_2, 0)$	$maj(x_3x_2, x_1x_2, 0)$	$maj(x_1, x_0, 0)$	24
2	0	0	1	$maj(x_3, x_2, 0)$	$maj(x_3x_2, x_1 \vee x_0, 0)$	$maj(x_1, x_1, 1)$	24
3	0	1	0	$maj(x_3, x_2, 0)$	$maj(x_3x_2, x_1x_0, 1)$	$maj(x_1, x_0, 0)$	24
4	0	1	1	$maj(x_3, x_2, 0)$	$maj(x_3x_2, x_1 \vee x_0, 1)$	$maj(x_1, x_1, 1)$	24
5	1	0	0	$maj(x_3, x_2, 1)$	$maj(x_3 \vee x_2, x_1x_0, 0)$	$maj(x_1, x_0, 0)$	24
6	1	0	1	$maj(x_3, x_2, 1)$	$maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 0)$	$maj(x_1, x_1, 1)$	24
7	1	1	0	$maj(x_3, x_2, 1)$	$maj(x_3 \vee x_2, x_1x_0, 1)$	$maj(x_1, x_0, 0)$	24
8	1	1	1	$maj(x_3, x_2, 1)$	$maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 1)$	$maj(x_1, x_1, 1)$	24
9	0	0	x_4	$maj(x_3, x_2, 0)$	$maj(x_3x_2, maj(x_1, x_0, x_4), 0)$	$maj(x_1, x_0, x_4)$	44
10	Q_1	0	Q_3	$maj(x_3, x_2, Q_1)$	$maj(maj(x_3, x_2, Q_1), maj(x_1, x_0, Q_3), 0)$	$maj(x_1, x_0, Q_3)$	Два тригери

В табл. 1 x_4, x_3, x_2, x_1, x_0 – вхідні інформаційні сигнали, представлені або в прямому, або в інверсному кодах; r_2, r_1, r_0 – сигнали програмування; Q_3, Q_2, Q_1 – вихідні сигнали.

ПНЕП являється функціонально повним пристроєм, оскільки в його склад входять функціонально повні УМЕ.

Моделювання мажоритарних систем на базі ПНЕП проводиться в наступному порядку:

1. Задані чи отримані булеві функції представляються в мажоритарному базисі.
2. Проводиться мінімізація отриманої мажоритарної функції.
3. В табл. 1 відшукується рядок, еквівалентний мінімальній формі мажоритарної функції.
4. Складається структурна наносхема з урахування можливостей ПНЕП і заданої кількості входів.

Функціонування систем на квантових *коміркових автоматах (КА)* ґрунтується на взаємодії кулонівських сил квантових точок для здійснення логічних функцій. Вони розроблені для зменшення застосування транзис-

торів і вирішення проблем щільності та з'єднання одноелектронних пристроїв. Комірковий автомат – це згруповані квантові точки, поєднані тунельними переходами та конденсаторами. Квантові точки являють собою регіони низького потенціалу, які оточені кільцем високого потенціалу. Є декілька способів їх формування, але найзагальніший з них – металізація. У коміркових автоматах чотири квантові точки з 50 атомів чистого кремнію розміщуються в кутках діелектричного квадрату розміром (20×20) нм. Кожен автомат містить у собі два електрони, які внаслідок дії кулонівських сил відштовхування розміщуються діагонально, у протилежних кутках (рис. 2). Два можливі розміщення цих електронів позначено як поляризації комірок $P = -1$ та $P = +1$ [1].



Рис. 2 – Квантові комірки в станах: *a* – логічного нуля; *б* – логічної одиниці.

Моделюємо за допомогою САПР QCADesigner [4] функцію логічного додавання чотирьох аргументів:

$$Q_2 = x_3 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0, \quad (1)$$

якій відповідає мажоритарний еквівалент у восьмому рядку табл. 1.

На двох додаткових виходах ПНЕП формуються функції логічного додавання попарно двох з чотирьох аргументів:

$$Q_1 = x_3 \vee x_2 = \text{maj}(x_3, x_2, 1); \quad (2)$$

$$Q_3 = x_1 \vee x_0 = \text{maj}(x_1, x_0, 1). \quad (3)$$

Результати проектування. Для програмування функцій (1), (2) та (3) слід в структурній схемі ПНЕП (рис. 1) ключі S_1 та S_2 перекомутувати в стан 0, а на програмуючих входах встановити поляризації $P = +1$, тобто $r_2 = r_1 = r_0 = 1$.

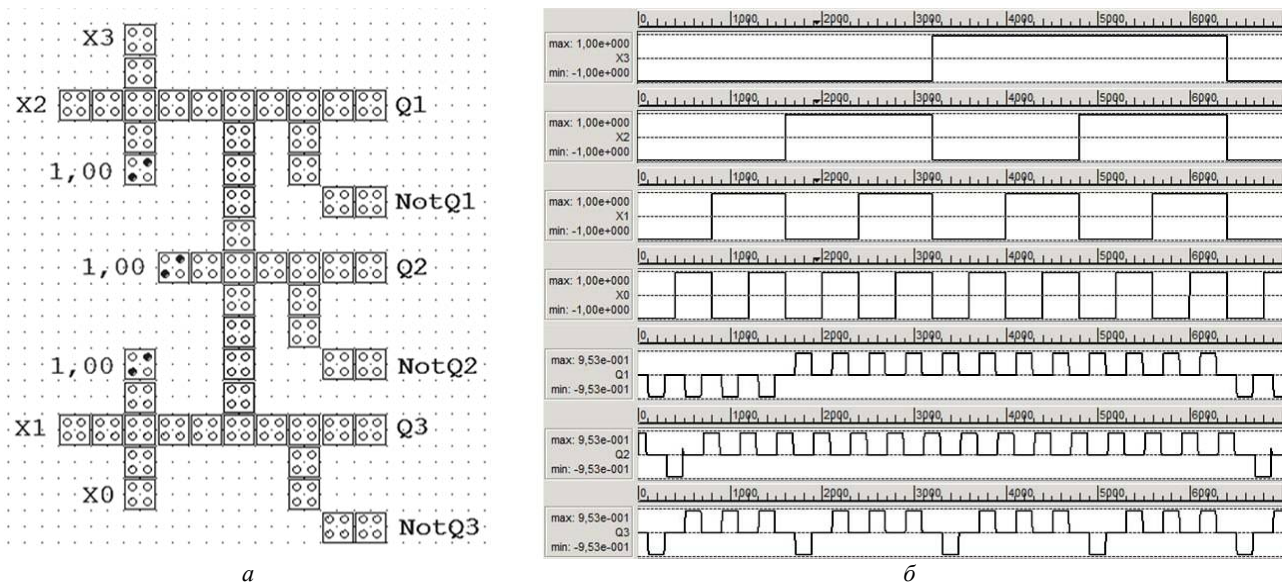


Рис. 3 – Автоматизоване проектування ПНЕП комбінаційного типу на КА: *a* – схема ПНЕП; *б* – результати часових характеристик ПНЕП.

На рис. 3, *a* наведена схема ПНЕП, яка побудована на робочому полі САПР QCA Designer [4]. Вона складається з 55 квантових комірок розміром (18×18) нм з 4 квантовими точками діаметром 5 нм і відстанню між центрами 20 нм. Загальний розмір ПНЕП (198×318) нм². Пристрій має чотири інформаційні входи x_3, x_2, x_1 та x_0 , три програмуючих входи з поляризаціями $P = +1$ і три пари комплементарних виходів Q_1, Q_2 та Q_3 .

Результати автоматизованого моделювання часових характеристик ПНЕП показані на рис. 3, б. Позитивним імпульсам відповідають позитивні поляризації $P = +1$, а негативним – від’ємні поляризації $P = -1$. Відповідну таблицю істинності ПНЕП для цього режиму програмування наведено в табл. 2.

За допомогою змін поляризації на входах r_2, r_1, r_0 та перекомутації ключів S_1 та S_2 семивходовий ПНЕП (рис. 1) можна запрограмувати для отримання 192 логічних функцій дво- та чотиривходових комбінаційних схем. Наприклад, для першого варіанту програмування $r_2 = r_1 = r_0 = 0$ моделюємо елементи логічного перемноження: $Q_1 = x_3x_2$, $Q_2 = x_3x_2x_1x_0$, $Q_3 = x_1x_0$.

Сума попарних добутоків чотирьох аргументів $Q_2 = x_3x_2 \vee x_1x_0$ реалізована в третьому варіанті табл. 1, а добуток попарних сум $Q_2 = (x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_0)$ – у шостому.

Таблиця 2 – Таблиця істинності функцій $maj(x_3, x_2, 1)$, $maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 1)$ та $maj(x_1, x_0, 1)$

x_3	x_2	x_1	x_0	Q_1	Q_2	Q_3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Далі моделюємо послідовностну схему 10-го варіанту з табл. 1 у складі двох RS-тригерів з роздільними входами x_3, x_2 і x_1, x_0 , охопленими зворотними зв'язками $r_2 = Q_1$ і $r_0 = Q_3$. Прямі виходи Q_1 і Q_3 цих тригерів об'єднані по третьому мажоритарному елементу (рис. 1), який в цьому випадку реалізує операцію логічного множення $maj(Q_1, Q_3, 0)$. На рис. 4, а побудована ця послідовностна одноелектронна наносхема у форматі системи QCA Designer, а результати її часового моделювання наведені на рис. 4, б. Вона має розмір $(258 \times 338) \text{ нм}^2$ і складається з 81 КА.

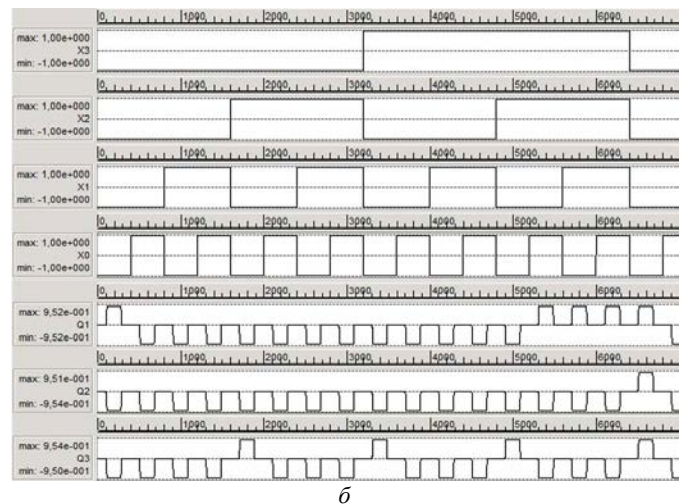
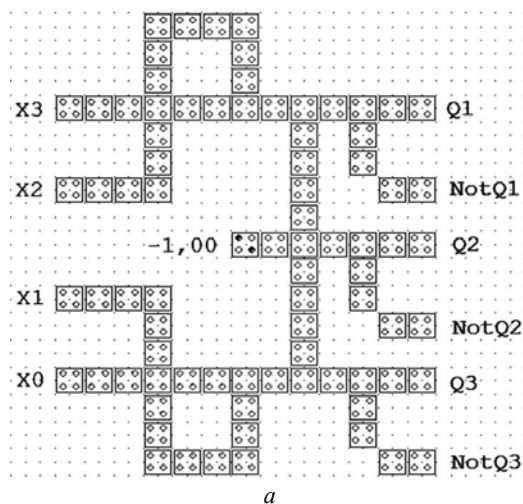


Рис. 4 – Автоматизоване проектування послідовностного ПНЕП на КА: а – одноелектронна наносхема; б – результати часового моделювання.

Перспективи подальших досліджень. Наноелектроніка – це один з найбільш перспективних напрямів, що продовжує розвиток мікроелектроніки. Автори довели переваги створення програмованих нанопристроїв на шляху подолання фізичних обмежень *мікромініютизації*. Ця наступність сприяє прискореному запровадженню математичного моделювання на базі ПНЕП. Однак, деякі дослідники переконані, що інструментальною базою штучного інтелекту може стати молекулярна електроніка.

Висновки. Отже, в роботі успішно створені математичні моделі програмованих нанопристроїв для інформаційного забезпечення САПР. Такі нанопристрої, реалізовані на базі одноелектронних наносхем з використанням технології квантових автоматів, є надшвидкодійними та щонайекономічними.

Не виключена також можливість, що майбутнє наноелектроніки може ґрунтуватися на вуглецевих нанотрубках, а не на кремнієвих компонентах. Тому синтез математичних моделей і надалі залишатиметься актуальним.

Список літератури

1. Мельник О. С., Івахнюк В. В. Автоматизоване моделювання наносхем на квантових коміркових автоматах // Електроніка та системи управління. – 2011. – № 2 (28). – С. 7 – 15.
2. Lantz T. D. A QCA implementation of a look-up table for an FPGA // Graduate Paper, Electrical Engineering Department. – Rochester Institute of Technology, May 2006. – 110 p.
3. Пакулов Н. Н. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. – М. : Сов. радио, 1974. – 184 с.
4. Walus K. QCA Designer: A Rapid Design and Simulation Tool for QCA // Internet journal of Nanotech. and Appl. – 2005. – Vol. 2 – №1 – P.1 – 7.

References (transliterated)

1. Mel'nyk O. S., Ivakhnyuk V. V. Avtomatyzovane modelyuvannya nanoskhem na kvantovykh komirkovykh avtomatakh [Computer-aided design of quantum cellular automata based nanocircuits]. *Electronika ta systemy upravlinnya* [Electronics and control systems]. 2011, № 2 (28), pp. 7–15.
2. Lantz T. D. A QCA implementation of a look-up table for an FPGA. Graduate Paper, Electrical Engineering Department, Rochester Institute of Technology, May 2006. 110 p.
3. Pakulov N. N. Mazhoritarnyy printsyp postroeniya nadezhnykh uzlov i ustroystv TsVM [Majority principle for constructing reliable nodes and units of electronic digital computer]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974. 184 p.
4. Walus K. QCA Designer: A Rapid Design and Simulation Tool for QCA. *Internet journal of Nanotech. and Appl.* 2005, Vol. 2, no. 1, pp. 1–7.

Надійшла (received) 18.09.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: +38(044)4067130; e-mail: melnyk.olexa@nau.edu.ua.

Мельник Александр Степанович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электроники, робототехники и технологий мониторинга и интернет вещей, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: +38(044)4067130; e-mail: melnyk.olexa@nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: +38(044)4067130; e-mail: melnyk.olexa@nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; e-mail: kozarevichviktoria@gmail.com.

Козаревич Виктория Александровна – старший преподаватель кафедры электроники, робототехники и технологий мониторинга и интернета вещей, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (063) 310-30-41; e-mail: kozarevichviktoria@gmail.com.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; e-mail: kozarevichviktoria@gmail.com.

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ПРИПИНЕННЯ В'ЯЗКИМ ОПОРОМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Розглянуто вільні коливання осцилятора зі степеневу нелінійною пружністю при наявності степеневу в'язкого опору. Встановлено співвідношення між показниками нелінійностей, коли сила в'язкого опору може повністю припинити коливальний рух. В такому випадку вільні коливання обмежені в часі, тобто складаються із скінченного числа циклів, як в системі з сухим тертям Кулона. Для проведення дослідження задіяно метод енергетичного балансу. З використанням періодичних Атеб-функцій виведено наближену формулу роботи дисипативної сили за один напівцикл коливань. Із умов рівності роботи зміні потенціальної енергії системи, одержано рекурентне співвідношення між розмахами коливань у вигляді степеневу рівняння. За підсумками аналізу зміні коефіцієнта в рівнянні, яка пов'язана зі зміною номера напівциклу і розмахів коливань, встановлено умову, коли це рівняння не має додатних коренів, що означає припинення коливального руху. Показано, що ця умова, в вигляді нерівності, узагальнює відомі результати. Для перевірки теоретичних висновків проведено чисельне інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху на комп'ютері. Підтверджено, що при виконанні встановлених умов, вільні коливання осцилятора складаються з обмеженого числа циклів і за відсутності в системі сухого тертя. Виділено окремі випадки, коли наближений метод енергетичного балансу призводить до точних розрахункових формул. На відміну від пружно лінійного осцилятора тривалості циклів зростають у ході руху, бо залежать від розмахів затухаючих коливань у розглянутій суттєво нелінійній системі з жорсткою силовою характеристикою.

Ключові слова: вільні коливання осцилятора, степеневу нелінійна пружність, степеневу в'язкий опір, умова припинення коливань, метод енергетичного балансу, періодичні Атеб-функції.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

О ПРЕКРАЩЕНИИ ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрены свободные колебания осциллятора с нелинейной упругостью, которая описывается степенной зависимостью, при наличии вязкого сопротивления такого же типа. Установлено соотношение между показателями нелинейностей, когда сила вязкого сопротивления может полностью прекратить колебательное движение. В этом случае свободные колебания ограничены во времени, то есть состоят из конечного числа циклов, как в системе с сухим трением Кулона. Для проведения исследований задействован метод энергетического баланса. С применением периодических Атеб-функций выведена приближённая формула работы диссипативной силы за один полупериод колебаний. Из условия равенства работы изменению потенциальной энергии системы получено рекуррентное соотношение между размахами колебаний в виде степенного уравнения. По итогам анализа изменения коэффициента в уравнении, которое связано с изменением номера полупериода и размахов колебаний, установлено условие, когда это уравнение не имеет положительного корня, что означает прекращение колебательного движения. Показано, что это условие, в виде неравенства, обобщает известные результаты. Для проверки теоретических выводов проведено численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения движения на компьютере. Подтверждено, что при соблюдении установленных условий, свободные колебания осциллятора имеют ограниченное число циклов и при отсутствии в системе сухого трения. Выделены отдельные случаи, когда приближённый метод энергетического баланса приводит к точным расчётным формулам. Продолжительности циклов увеличиваются в ходе движения, поскольку зависят от размахов затухающих колебаний в рассмотренной существенно нелинейной системе с жёсткой силовой характеристикой.

Ключевые слова: свободные колебания осциллятора, нелинейная упругость, которая описывается степенной зависимостью, степенное вязкое сопротивление, условие прекращения колебаний, метод энергетического баланса, периодические Атеб-функции.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

CESSATION OF FREE VIBRATIONS OF A NONLINEAR ELASTIC SYSTEM DUE TO VISCOUS RESISTANCE

The paper deals with free vibrations of a system with power-law nonlinear elasticity subjected to power-law viscous resistance. The relation between the nonlinearity indices is determined when the impact of the viscous resistance force causes the vibrations to die away. In this case the vibrations are limited in time i.e. consist of a finite number of cycles analogous to a system with Coulomb dry friction. The research exploits the energy balance method. The periodic Ateb-functions are used to obtain an approximate formula for the work of dissipative force over a semi-cycle of vibrations. A recursive power-law equation for the vibration swings is derived from the condition of equality of the work to the potential energy change. By analyzing the change of the coefficient in the equation, which is related to the change of the semi-cycle number as well as the vibration swings, the condition for the equation to have no positive root is determined, which means that the vibrations die away. The condition is formulated in the form of an inequality. It is shown to generalize the results previously known. The theoretical inferences are verified by numerical integration of the nonlinear differential equation of motion. It is shown that under the conditions proposed in the paper the free vibrations consist of a finite number of cycles even if dry friction is absent from the system. Special cases are highlighted, when the approximate energy balance method results into exact computational formulae. The length of the cycles increases during the motion since it depends on the swing of damped vibrations in the essentially nonlinear system with rigid force characteristics considered.

Key words: free vibrations, power-law nonlinear elasticity, power-law viscous resistance, condition of vibration dying-away, energy balance method, periodic Ateb-functions.

Вступ. Із практики видно, що *вільні коливання механічних систем* завжди обмежені в часі, тобто мають скінченну кількість циклів. Цю властивість зазвичай пов'язують із дією *сили сухого тертя Кулона*. Але виявляється, що за певних умов вільні коливання може припинити і дія *сили в'язкого опору*, без участі сили сухого тертя. З'ясування цих умов дає можливість глибше зрозуміти сутність механічного явища і створити більш адекватні

Огляд публікацій і мета роботи. Дослідженні нелінійних коливань відноситься до актуальних задач механіки. На сьогодні накопичилось багато публікацій, що стосуються цієї проблеми, із яких виділимо лише узагальнюючі видання останніх років [1], [2]. Питання руху дисипативних осциляторів висвітлено також в [3], де розглянуто сильну дію дисипативних сил різної природи, що описується окремими аналітичними виразами. В роботі [4] встановлено, що вільні коливання лінійного осцилятора може повністю зупинити степеневий в'язкий опір, якщо показник нелінійності є меншим за одиницю. Цей результат узагальнено в [5] на випадок, коли у виразі сили опору, крім степеневі, є лінійна складова. В статті [6] встановлено, що повне припинення вільних коливань нелінійного осцилятора можливе дією сили лінійного в'язкого опору, коли показник степеня у виразі сили пружності є більшим за одиницю, тобто при жорсткій силовій характеристиці. Цілком природно узагальнити ці результати, щоб відповісти на питання, коли відбувається повне припинення вільних коливань подвійно нелінійного осцилятора, в якого степеневі нелінійними є як в'язкий опір, так і пружна характеристика. З цим питанням пов'язана мета даної роботи.

Метою статті є аналіз особливостей вільних коливань осцилятора з подвійною степеневою нелінійністю, одна з яких присутня у виразі дисипативної сили, а друга – у виразі сили пружності.

Ставиться задача виявлення умов, за яких вільні коливання будуть обмежені в часі, як в системі з сухим тертям. Її розв'язуємо наближено *методом енергетичного балансу*, який набув поширення в теорії нелінійних коливань [6–8].

Основні результати. Вільні коливання описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^\mu \operatorname{sign} \dot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign} x = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2): m – маса осцилятора; $k > 0$ – коефіцієнт в'язкого опору; $c > 0$ – коефіцієнт пружності; $\mu \geq 0$, $\nu > 0$ – показники степеня; $x = x(t)$ – переміщення системи у часі t ; a_0 – стартове відхилення осцилятора від положення рівноваги $x = 0$; крапка над x означає похідну по t .

Орієнтуючись на використання методу енергетичного балансу, обчислимо зміну потенціальної енергії $\Delta\Pi$ і роботу дисипативної сили A на i -ому напівциклі коливань, що починається з відхилення $x = -a_{i-1}$ і закінчується відхиленням $x = a_i$. Зміна потенціальної енергії на цьому етапі руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{\nu+1} (a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1}). \quad (3)$$

Роботу A знайдемо наближено. Для цього рух осцилятора описуємо виразом [6]:

$$x(t) = -a \cdot Ca(\nu, 1, \omega t), \quad (4)$$

у якому $a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$; $\omega = a^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{(1+\nu)c}{2m}}$; $Ca(\nu, 1, \omega t)$ – Атеб-косинус.

Роботу дисипативної сили подаємо інтегралом:

$$A = -2k \int_0^b [\dot{x}(t)]^{\mu+1} dt, \quad (5)$$

де $b = \frac{1+\nu}{2\omega} I$; $I = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)}$; $\Gamma(z)$ – гамма-функція, таблиці якої є в [9, 10].

Підстановкою похідної з (4) по t :

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+\nu} a\omega Sa(1, \nu, \omega t)$$

в (5), отримуємо:

$$A = -\frac{2k}{\omega} \left(\frac{2a\omega}{1+\nu} \right)^{\mu+1} \int_0^{\frac{1+\nu}{2} I} Sa^{\mu+1}(1, \nu, z) dz.$$

Із теореми, яка доведена в [11], випливає, що:

$$\int_0^{\frac{1+\nu}{2}} Sa^{\mu+1}(1, \nu, z) dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{\nu+1}\right)}$$

Тому робота подається виразом:

$$A = -\lambda \frac{c}{1+\nu} (a_i + a_{i-1})^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}}, \quad (6)$$

у якому:

$$\lambda = \frac{k}{c} \left(\frac{c}{2^\nu (1+\nu) m} \right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{\nu+1}\right)}. \quad (7)$$

При $\mu = 1$ залежності (6), (7) переходять у ті, що надруковано в [6].

Згідно з методом енергетичного балансу $\Delta\Pi = A$, що з урахуванням (3) і (6), (7) набуває форму алгебраїчного рівняння:

$$a_i^{\nu+1} = a_{i-1}^{\nu+1} - \lambda (a_i + a_{i-1})^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Введемо позначення $\xi = a_i / a_{i-1}$. Верхньому співвідношенню надаємо вигляд:

$$\xi^{\nu+1} + \gamma_i (1 + \xi)^{1+\frac{\mu(1+\nu)}{2}} = 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

де

$$\gamma_i = \frac{\lambda}{a_{i-1}^{\nu - \frac{\mu(1+\nu)}{2}}}. \quad (9)$$

Отже, значення γ_i пов'язане з номером напівциклу i , а (8) не завжди має додатні корені.

Рішення (8), при $\mu = 1$, було раніше виведено в [6]. Не складно переконатись, що при $\gamma_i \geq 1$ воно не має додатних коренів $\xi = \xi_i$, тобто не описує коливальний процес.

Якщо в (9):

$$2\nu - \mu - \nu\mu > 0 \quad (10)$$

або

$$\mu < \mu_* = \frac{2\nu}{1+\nu}, \quad (11)$$

то у міру згасання коливань a_{i-1} прямує до нуля. Внаслідок цього зростають значення γ_i і настає припинення коливань. Достатньою умовою припинення коливань є виконання нерівностей (10) або (11), коли:

$$a_{i-1} < \lambda^{\frac{2}{2\nu - \mu - \nu\mu}}. \quad (12)$$

Ця нерівність є своєрідною умовою попадання осцилятора в умовну область застою, бо останній розмах коливань дорівнює a_{i-1} .

Рівняння (8) має замкнені аналітичні розв'язки лише для окремих значень μ і ν . Такі розв'язки при $\mu = 1$ було побудовано в [6] для $\nu = 1$ і $\nu = 3$. Тут їх доповнимо іншими.

Випадок $\mu = 0$, $\nu = 1$. Рівняння (8) стає квадратичним:

$$\xi^2 + \gamma_i (1 + \xi) - 1 = 0, \quad (13)$$

в якому:

$$\gamma_i = \frac{\lambda}{a_{i-1}}; \quad \lambda = 2 \frac{k}{c}.$$

Рівняння (13) має розв'язок $\xi = 1 - \gamma_i$, з якого випливає загальновідома залежність [8], [12]:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2k}{c}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Це спадання розмахів коливань в лінійному осциляторі з сухим тертям, коли сила тертя $F_T = k$.

Випадок $\mu = 0$, $\nu = 2$. Рівняння (8) стає кубічним:

$$\xi^3 + \gamma_i(1 + \xi) - 1 = 0. \quad (14)$$

У ньому $\gamma_i = \frac{3k}{ca_{i-1}^2}$.

Для обчислення розмахів затухаючих коливань із (14) одержуємо рекурентне співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} \left(\sqrt[3]{s-0,5q} - \sqrt[3]{s+0,5q} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Тут $s = \sqrt{\left(\frac{\gamma_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$, $q = \gamma_i - 1$.

Згідно з (12) коливання припиняться, коли $a_{i-1} \leq \sqrt{3k/c}$.

Користуючись формулою (15), проведемо розрахунок a_i при $m = 1$ кг, $c = 20000$ Нм⁻², $k = 4$ Н, $a_0 = 0,05$ м. Для таких числових даних умовою припинення коливань є $a_i \leq 0,02449$ м. Обчислені розмахи коливань a_i записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення a_i при $\nu = 2$

i	0	1	2	3
$100a_i$, м	5,0000	4,1261	3,0147	1,2366

Разом з a_0 тут маємо лише чотири розмахи коливань.

Випадок $\mu = 0$, $\nu = 3$. Рівняння (8), після скорочення на $1 + \xi$, стає кубічним і набуває вигляду:

$$\xi^3 - \xi^2 + \xi + (\gamma_i - 1) = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок:

$$\xi = \sqrt[3]{Q - \frac{\gamma_i}{2} + \frac{10}{27}} - \sqrt[3]{Q + \frac{\gamma_i}{2} - \frac{10}{27}} + \frac{1}{3}, \quad (16)$$

де

$$Q = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\gamma_i - \frac{20}{27}\right)^2}; \quad \gamma_i = \frac{4k}{ca_{i-1}^3}.$$

Обчисливши ξ , потім легко знайти a_i , бо $a_i = \xi a_{i-1}$.

Достатньою умовою припинення коливань є виконання нерівності:

$$a_{i-1} \leq \sqrt[3]{4k/c}.$$

В якості прикладу, обчислимо a_i при $m = 1$ кг; $c = 4,5 \cdot 10^5$ Н·м⁻³; $k = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Для таких числових даних коливання припиняються, коли $a_{i-1} \leq 0,03288$ м. Одержані за формулою (16) значення a_i запишемо до табл. 2.

Таблиця 2 – Значення a_i при $\nu = 3$

i	0	1	2
$100a_i$, м	5,0000	4,1595	2,7199

Тут розмахів коливань ще менше, ніж у попередньому прикладі.

При довільних μ і ν рівняння (8) доводиться розв'язувати чисельними методами. Із них виділено *схему Ньютона*, за якою:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{\xi_j^{\nu+1} + \gamma_i(1 + \xi_j)^{1 + \frac{\mu(1+\nu)}{2}} + 1}{(1 + \nu)\xi_j^\nu + \frac{2 + \mu + \mu\nu}{2}\gamma_i(1 + \xi_j)^{\frac{\mu(1+\nu)}{2}}}; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Починати ітерації за j можна зі значення $\xi_0 = 1$.

Ітераційна процедура (17) має швидку збіжність, що спрощує наближене обчислення коренів рівняння (8).

Користуючись формулою (17), обчислимо розмахи коливань при: $m = 1 \text{ кг}$; $c = 20000 \text{ Н/м}^v$; $k = 4 \text{ Н(с/м)}^\mu$; $v = 2,4$; $\mu = 1,2$ і $\mu = 1,6$.

Результати розрахунку при $\mu = 1,2$, коли вільні коливання обмежені в часі, записано до табл. 3. В цьому випадку:

$$\mu < \mu_* = 4/3; \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \approx 0,893515; \Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right) \approx 3,054502; \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{v+1}\right) \approx 0,959766; \gamma_i = 0,038296 / (a_{i-1})^{0,36}.$$

В розрахунках за формулою (17) провели по 5 ітерацій.

Таблиця 3 – Значення a_i при $v = 2,4$, $\mu = 1,2$

i	$10^3 a_i, \text{ м}$	i	$10^3 a_i, \text{ м}$	i	$10^3 a_i, \text{ м}$
0	50,000	4	12,785	8	0,889
1	37,623	5	7,955	9	0,238
2	27,422	6	4,510	10	0,021
3	19,207	7	2,231	11	–

Як бачимо, тут вільні коливання складаються з обмеженої кількості розмахів.

У випадку, коли $\mu = 1,6 > \mu_*$, кількість розмахів не обмежена. Для такого показника: $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \approx 0,931384$; $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2} + \frac{1}{v+1}\right) \approx 1,043517$; $\gamma_i = 0,149370 \cdot a_{i-1}^{0,32}$ і рівняння (8) має завжди додатні корені. Обчислені значення розмахів на початку руху записано в табл. 4.

Таблиця 4 – Значення a_i при $v = 2,4$, $\mu = 1,6$

i	$10^3 a_i, \text{ м}$	i	$10^3 a_i, \text{ м}$	i	$10^3 a_i, \text{ м}$
0	50,000	3	27,347	6	16,495
1	40,354	4	22,893	7	14,171
2	33,020	5	19,349	8	12,260

Для порівняння, на рис. 1 і рис. 2 наведено графіки руху осцилятора, отримані чисельним інтегруванням рівняння (1) при $\mu = 1,2$.

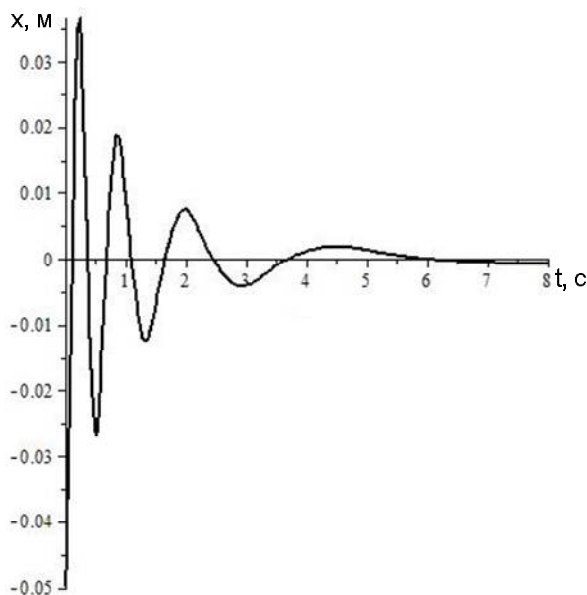


Рис. 1 – Затухаючі коливання при $\mu = 1,2$, $v = 2,4$.

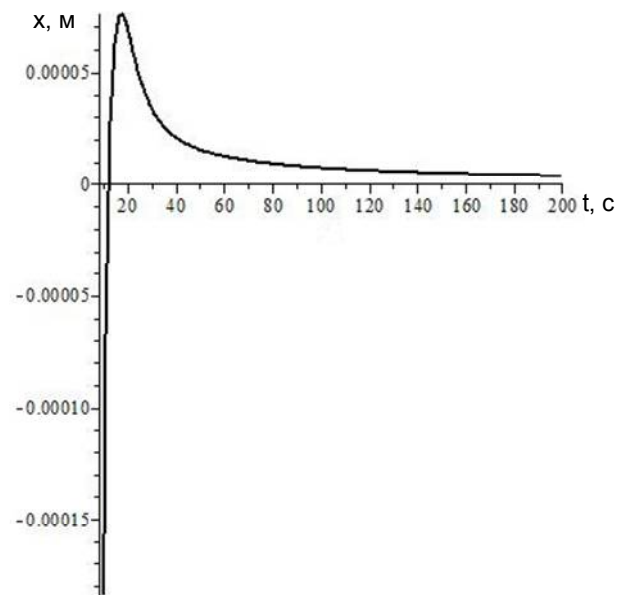


Рис. 2 – Монотонний рух осцилятора.

На рис. 3 зображено результати чисельного інтегрування рівняння (1) при $\mu = 1,6$. Тут кількість циклів не-

скінченна і вільні затухаючі коливання не обмежені в часі.

Перспективи подальших досліджень. Викладений спосіб аналізу стосувався руху степеневно нелінійних осциляторів без лінійної складової у виразі сили пружності. В теорії нелінійних коливань часто домінуючою є лінійна складова, а нелінійна – помножена на малий параметр. Встановлення умов припинення в'язким опором вільних коливань таких квазілінійних систем становить подальшу перспективу.

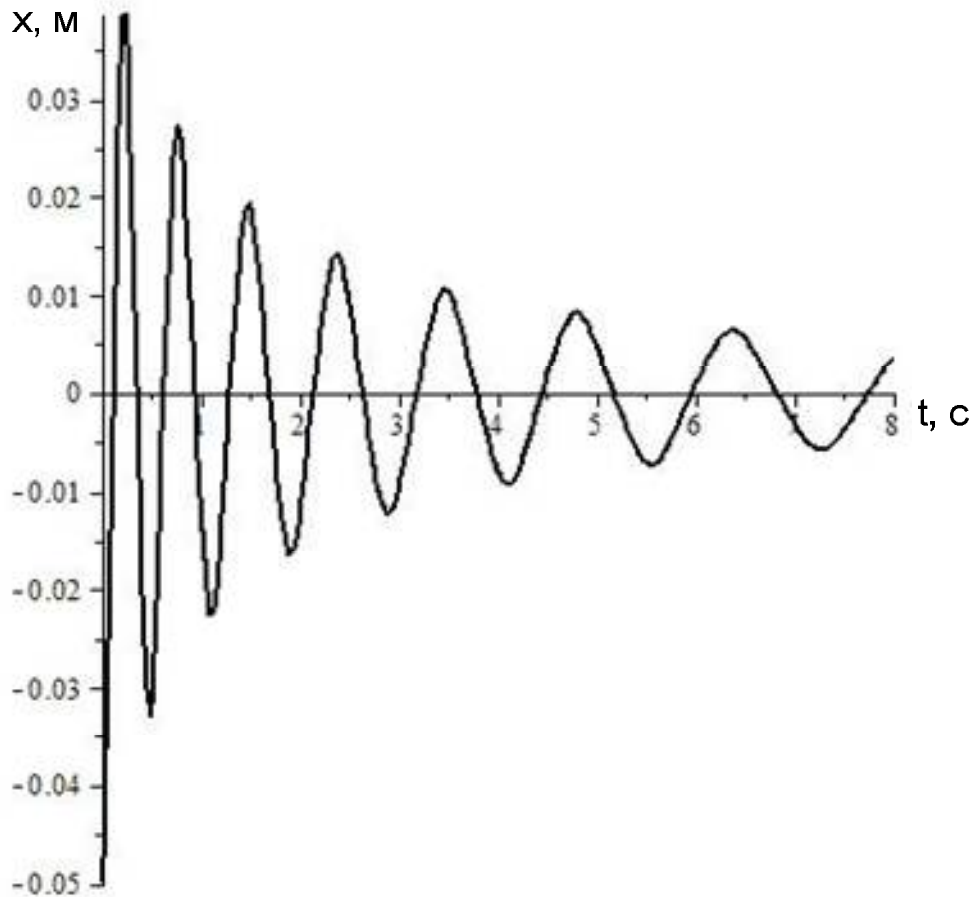


Рис. 3 – Затухаючі коливання при $\mu = 1,6$, $\nu = 2,4$.

Висновки. Проведене дослідження показало, що, подібно до дії сили сухого тертя, степеневно нелінійний в'язкий опір теж може повністю зупинити коливальний рух осцилятора зі степеневно нелінійною характеристикою пружності. Але це відбувається лише за певних співвідношень показників нелінійностей у виразах сил опору і пружності. При виконанні вище встановлених умов вільні затухаючі коливання осцилятора мають скінченну кількість циклів і обмежені в часі.

Список літератури

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
2. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 208 с.
3. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про обмежену тривалість вільних коливань осцилятора з нелінійно в'язким опором // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 22 (1347). – С. 68 – 75.
5. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Вплив нелінійної складової в'язкого опору на тривалість вільних коливань осцилятора // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 2. – С. 41 – 47.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про можливість застою вільних коливань нелінійно пружного осцилятора з лінійним в'язким опором // Віб्राції в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – 2019. – № 4 (95). – С. 36 – 44.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – М. : Наука, 1980. – 270 с.
8. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.

11. Драгомирецька Х. Т. Про інтегрування спеціальних Атеб-функцій // Вісник Львівського університету. Серія : Механіко – математична. – 1997. – Вип. 46. – С. 108 – 110.
12. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.

References (transliterated)

1. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods phenomena]. Moscow-Izhevsk, Institute komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
2. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzheniya nelineynykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods for studying nonlinear oscillation systems]. Lviv, Lvivs'ka politehnika, 2014. 288 p.
3. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
4. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro obmezheni tryvalist' vil'nykh kolyvan' ostsyl'yatora z nelineyno v'yazkym oporom [On limited duration of oscillations of free oscillator with nonlinear viscous resistance]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 68–75.
5. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Vplyv nelineynoyi skladovoyi v'yazkogo oporu na tryvalist' vil'nykh kolyvan' ostsyl'yatora [The influence of the nonlinear component of viscous resistance on the duration of free oscillations of the oscillator]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Dynamika i matsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 2, pp. 41–47.
6. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro mozhlyvist' zastoyu vil'nykh kolyvan' nelineyno pruzhnogo ostsyl'yatora z liniynym v'yazkym oporom [On the possibility of stagnation of free oscillations of a nonlinearly elastic oscillator with a linear viscous resistance]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibration in engineering and technology : all-Ukrainian scientific and technical journal]. 2019, no. 4 (95), pp. 36–44.
7. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 270 p.
8. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of vibrations and stability of motion]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
9. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nykh funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
10. Yanke E., Emde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
11. Dragomyrets'ka Kh. T. Pro integruvannya spetsial'nykh Ateb-funktsiy [On integration of special Ateb-functions]. *Visnyk L'viv's'kogo universytetu. Seriya : Vtkhaniko-matematychna* [Bulletin of the Lviv University. Series : Mechanics and mathematics]. 1997, vol. 46, pp. 108–110.
12. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.

Надійшло (received) 09.09.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77 @gmail.com.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**КОЛИВАННЯ, ОПИСАНІ АНАЛОГАМИ РІВНЯНЬ ВАН ДЕР ПОЛЯ І РЕЛЕЯ**

Розглянуто режими усталених квазілінійних автоколивань, які описані аналогами диференціальних рівнянь Ван дер Поля і Релея. Для дослідження руху задіяно метод енергетичного балансу в диференціальній формі. Отримано умови, у вигляді нерівностей, стосовно констант диференціальних рівнянь, при виконанні яких рівняння будуть описувати квазілінійні автоколивання з амплітудою, що не залежить від початкових умов. Виведено формули для обчислення цієї амплітуди з використанням таблиці гама-функції. Доведено стійкість руху в усталеному режимі автоколивань та нестійкість нульового положення статичної рівноваги системи. Встановлено також нерівності, при виконанні яких розглянуті типи рівнянь будуть описувати вільні затухаючі коливання відносно нульового положення рівноваги або їх розгойдування з подальшою втратою стійкості системи. Ці варіанти руху залежать від початкових умов. При «малих» початкових відхиленнях, менших порогового значення, коливання осцилятора затухають, а при «великих» відбуваються їх розгойдування. Динамічна система стійка в «малому» та є нестійкою в «великому». Розглянуто також вплив сталої складової у виразі сили опору на процес коливань. Показано, що вона призводить до зміщення положення відносно якого проходять усталені автоколивання, але не впливає на їх амплітуду і частоту, що є наслідком лінійної пружності системи. Виділено випадки, коли виведені розрахункові формули переходять у відомі результати. Аналітичні дослідження супроводжуються чисельним комп'ютерним розв'язанням задачі Коші та порівнянням результатів, одержаних двома способами, що підтверджує адекватність виведених розрахункових формул.

Ключові слова: квазілінійні автоколивання, граничний цикл, аналоги рівнянь Ван дер Поля і Релея, метод енергетичного балансу, вільні коливання, чисельні розв'язки задачі Коші.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**КОЛЕБАНИЯ, ОПИСАННЫЕ АНАЛОГАМИ УРАВНЕНИЙ ВАН ДЕР ПОЛЯ И РЭЛЕЯ**

Рассмотрены режимы установившихся квазилинейных автоколебаний, описанные аналогами дифференциальных уравнений Ван дер Поля и Рэлея. Для исследования движения задействован метод энергетического баланса в дифференциальной форме. Получены условия в виде неравенств между константами в дифференциальных уравнениях, при выполнении которых уравнения будут описывать квазилинейные автоколебания с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Выведены формулы для вычисления этой амплитуды с использованием таблицы гамма-функции. Доказана устойчивость движения в установившемся режиме автоколебаний и неустойчивость положения статического равновесия системы. Выведены также неравенства, при выполнении которых рассмотренные типы уравнений будут описывать свободные затухающие колебания относительно нулевого положения равновесия или их раскачивание с последующей потерей устойчивости системы. Эти варианты движения зависят от начальных условий. При «малых» начальных отклонениях, меньших порогового значения, колебания осцилятора затухают, а при «больших» происходит их раскачивание. Динамическая система, устойчивая в «малом», является неустойчивой в «большом». Рассмотрено также влияние постоянной составляющей в выражении силы сопротивления на процесс колебаний. Показано, что она приводит к смещению положения, относительно которого происходят установившиеся автоколебания, но не влияет на их амплитуду и частоту, что является следствием линейной упругости системы. Выделены случаи, когда выведенные расчётные формулы переходят в известные результаты. Аналитические исследования сопровождаются численным компьютерным решением задачи Коши и сравнением результатов, полученных двумя способами, что подтверждает адекватность выведенных расчётных формул.

Ключевые слова: квазилинейные колебания, предельный цикл, аналоги уравнений Ван дер Поля и Рэлея, метод энергетического баланса, свободные колебания, численные решения задачи Коши.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY**OSCILLATIONS DESCRIBED BY ANALOGUES OF VAN DER POL AND RAYLEIGH EQUATIONS**

The paper deals with the modes of steady-state quasilinear self-oscillations described by the analogues of Van der Pol and Rayleigh differential equations. The differential formulation of the energy balance method is applied for studying the motion. The conditions for the equations to describe quasilinear self-oscillations with the amplitude independent of the initial conditions are derived in the form of inequalities. The formulae for computing this amplitude using the table of gamma functions are proposed. The steady-state mode of the self-oscillations is proved to be stable in contrast to the static equilibrium which appears unstable. The inequalities are also obtained which guarantee the equations of the type considered to describe the damped free oscillations about the zero equilibrium or the oscillations which build up resulting in the loss of system stability. These forms of motion depend on the initial conditions. For small initial deflections, which are less than the threshold value, the oscillations decay whereas for large once they build up. The dynamical system, which is stable in small, is unstable in large. The impact of the constant component of the resistance force on the oscillatory process is also studied. It is shown to cause the shift of the position about which the steady-state self-oscillations occur but not to influence their amplitude or frequency, which is the result of the linear elasticity of the system. The special cases are separated, when the computational formulae proposed become the results previously known. The analytical studies are followed by numerical solution of the respective Cauchy problem. By comparing the results obtained by the two methods we substantiate the adequacy of the computational formulae obtained.

Key words: quasilinear oscillations, limit cycle, analogues of Van der Pol and Rayleigh equations, energy balance method, free oscillations, numerical solution of Cauchy problem.

Вступ. Автоколивання є досить поширеним видом руху. З ними доводиться мати справу в фрикційних муфтах, гальмах транспортних засобів, при обробці матеріалів різанням і шліфуванням та ін. Щоб регулювати вплив автоколивань на різні механічні процеси треба вміти належним чином моделювати їх. Тому моделювання автоколивань відноситься до актуальних задач, при постановці та розв'язанні яких важливу роль мали відомі

класичні диференціальні рівняння Ван дер Поля і Релея. Тут вивчаємо рух, який описують узагальнені аналоги вказаних рівнянь. Оскільки побудова їх точних аналітичних розв'язків є дуже складною математичною задачею, проводимо наближене дослідження руху методом енергетичного балансу, що поширений в теорії автоколивань. Для встановлення фактичних похибок цього наближеного методу проводимо порівняння результатів, до яких він призводить, з результатами чисельного розв'язання задачі Коші на комп'ютері.

Огляд літературних джерел і постановка мети дослідження. Рівняння Ван дер Поля і Релея мають давню історію. Так Ван дер Поль у 1926 році не тільки вивів рівняння, що носить його ім'я, а й запропонував наближений його розв'язок, який потім набув поширення в теорії нелінійних коливань [1]. Різні наближені аналітичні розв'язки цього рівняння також викладено в [2, 3], причому в [3] одержано друге наближення асимптотичним методом, що дає можливість оцінити точність першого наближення. Релей пов'язував своє рівняння з задачами акустики. Його асимптотичний розв'язок надруковано в [4]. Різні варіанти наближеного розв'язку рівняння Релея є також в [5]. Тут розглядаємо узагальнені аналоги цих класичних рівнянь, одержані заміною в них виразу активно дисипативної сили. Конкретні степені переміщення і швидкості заміняємо загальними степенями з невід'ємними показниками.

Метою статті є дослідження руху, який будуть описувати узагальнені диференціальні рівняння Ван дер Поля і Релея, та встановлення умов, за яких можливий стійкий стаціонарний автоколивальний режим.

Основні результати. 1. Рух, який описує аналог рівняння Ван дер Поля. Розглянемо рівняння:

$$m\ddot{x} - \left(k_1 |x|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu \right) |\dot{x}|^\beta \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

де m – маса осцилятора; k_1, k_2 – невід'ємні коефіцієнти опору; $\mu \geq 0, \nu \geq 0, \beta \geq 0$ ($\mu \neq \nu$) – показники степеня; c – коефіцієнт пружності; $x = x(t)$ – переміщення системи як функція часу t ; крапка над x означає похідну по t .

При $\mu = 0, \nu = 2, \beta = 1$ рівняння (1) співпадає з класичним варіантом рівняння Ван дер Поля.

Вважаємо, що в рівнянні (1) модуль другого доданку (активно дисипативної сили) значно менший, ніж модуль третього доданку (сили пружності).

За цього припущення квазілінійні коливання описуємо добутком:

$$x(t) = -a \cos(\omega t), \quad (2)$$

в якому $\omega = \sqrt{c/m}$; a – амплітуда коливань [6].

Враховуючи (1), (2), роботу активно дисипативної сили A за один напівцикл коливань подаємо інтеграли:

$$A = 2a^{\beta+1}\omega^\beta \left[k_1 a^\mu \int_0^{\pi/2} \cos^\mu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi - k_2 a^\nu \int_0^{\pi/2} \cos^\nu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi \right]. \quad (3)$$

Далі беремо до уваги, що інтеграли в (3) виражаються через *гама-функцію*, затабульовану в [7]. Дійсно, в довіднику [8]:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\mu \varphi \sin^{\beta+1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right)}.$$

Отже:

$$A = a^{\beta+1} (\lambda_1 a^\mu - \lambda_2 a^\nu), \quad (4)$$

де

$$\lambda_1 = k_1 \omega^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right)}; \quad \lambda_2 = k_2 \omega^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right)}.$$

В усталеному режимі коливань робота активно дисипативної сили за один напівцикл коливань дорівнює нулю. Рівність $A = 0$ в (4) можлива, коли:

$$a = 0 \text{ і } a = a_* = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \quad (5)$$

Якщо задати в (5) $\mu = 0$, $\nu = 2$, $\beta = 1$, $k_1 = k_2$ та врахувати, що:

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right) = 2,$$

то, одержимо:

$$a_* = \sqrt{4} = 2 \text{ м}.$$

Саме таке значення амплітуди у першому наближенні одержано в [3, 4] при розв'язанні класичного рівняння Ван дер Поля.

Дослідимо стійкість усталеного режиму автоколивань з амплітудою $a = a_*$. Для цього, за аналогією з [2], використаємо допоміжну функцію:

$$F(a) = a^{-1}A = \lambda_1 a^{\beta+\mu} - \lambda_2 a^{\beta+\nu}.$$

Візьмемо з неї похідну по a :

$$F'(a) = \lambda_1(\beta + \mu)a^{\beta+\mu-1} - \lambda_2(\beta + \nu)a^{\beta+\nu-1}$$

та обчислимо границі:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{\beta+\mu-1} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} [\lambda_1(\beta + \mu) - \lambda_2(\beta + \nu)a^{\nu-\mu}];$$

$$\lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) = a_*^{\beta+\nu-1} \lambda_2(\mu - \nu).$$

Далі будемо розрізняти два варіанти співвідношення між ν і μ . У першому, коли $\nu > \mu$, маємо:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) > 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) < 0.$$

Це значить, що згідно з [2] режим автоколивань, де $a = a_*$, є стійким, а положення $x = a = 0$ нестійке. Отже, при $\nu > \mu$ вираз (2) може описувати усталені автоколивання з амплітудою $a = a_*$, що визначається формулою (5). Як це властиво автоколиванням, амплітуда a_* не залежить від початкових умов.

У другому випадку, коли $\nu < \mu$, знаки границь наступні:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) < 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) > 0.$$

Згідно з [2] положення $x = 0$ є стійким положенням статичної рівноваги, а режим коливань $a = a_*$ – нестійкий. Якщо при цьому початкове відхилення a_0 системи від положення $x = 0$ менше за a_* , то вільні коливання відносно цього положення затухають, а при $a_0 > a_*$ проходить їх розгойдування з подальшою втратою стійкості системи. Тепер a_* називають *пороговим відхиленням*. Розглянемо приклад.

Приклад. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1 \text{ кг}$; $c = 400 \text{ Н/м}$; $\mu = 0,4$; $\nu = 1,6$; $\beta = 1,2$; $k_1 = 16 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-1,6}$; $k_2 = 4000 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-2,8}$. При таких вхідних даних:

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 1,298056; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) = 0,897471; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\nu+3}{2}\right) = 1,827355; \quad \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+3}{2}\right) = 1,166712;$$

$$\omega = 20 \text{ с}^{-1}; \quad a_* = 0,019845 \text{ м}.$$

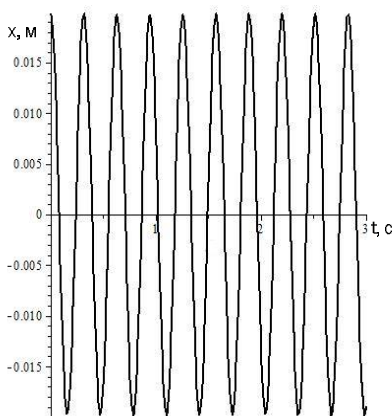


Рис. 1 – Графік коливань при $a_0 = a_*$, $\nu > \mu$.

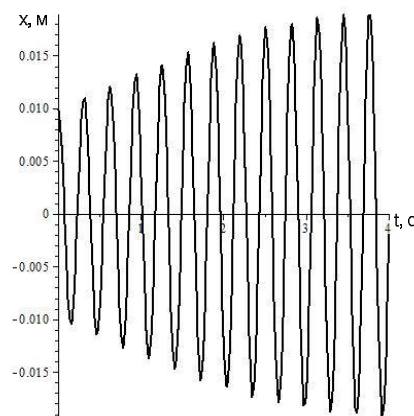


Рис. 2 – Графік коливань при $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$, $\nu > \mu$.

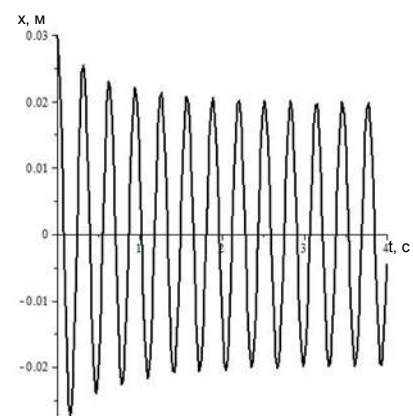
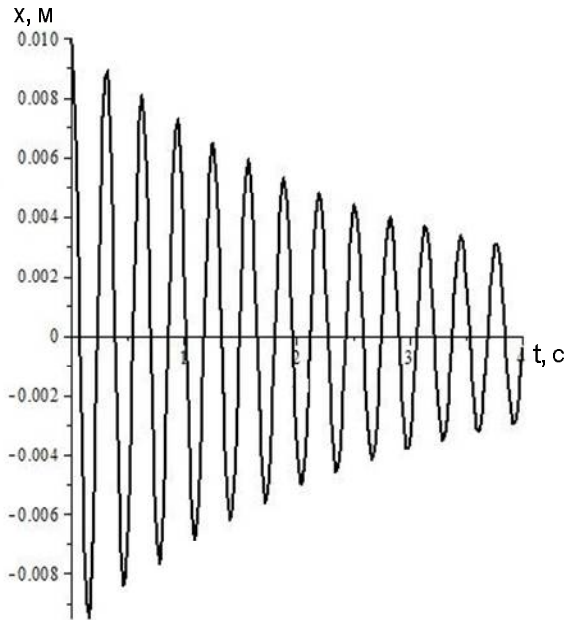
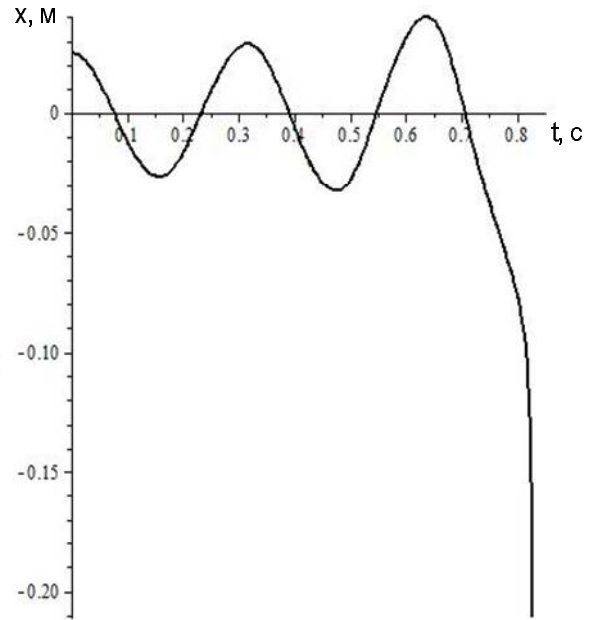


Рис. 3 – Графік коливань при $a_0 = 0,03 \text{ м} > a_*$, $\nu > \mu$.

Розраховані чисельним інтегруванням графіки коливань зображено на рис. 1 – 3. Вони одержані при різних початкових відхиленнях a_0 . Графік на рис. 1 одержано при $a_0 = a_* = 0,019845$ м. Тут маємо усталений режим автоколивань з амплітудою $a_0 = a_*$. Перехідні режими автоколивань, подані на рис. 2 і рис. 3, розраховані, відповідно, при $a_0 = 0,01$ м і $a_0 = 0,03$ м. У першому випадку амплітуди коливань зростають, а в другому спадають. В обох випадках вони асимптотично прямують до значення a_* , що відповідає стійкому режиму автоколивань.

Рис. 4 – Графік коливань при $a_0 = 0,01$ м, $\nu < \mu$.Рис. 5 – Графік руху $a_0 = 0,025$ м, $\nu < \mu$.

Про те, як зміниться характер руху, коли $\mu > \nu$, надана графічна інформація на рис. 4 і рис. 5. При їх одержанні зберегли попередні значення m, c, β , а в виразі активно дисипативної сили прийняли: $k_1 = 4000 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-2,8}$; $k_2 = 16 \text{ Нс}^{1,2} \text{ м}^{-1,6}$; $\mu = 1,6$; $\nu = 0,4$. Осцилограму затухаючих вільних коливань отримали чисельним інтегруванням рівняння (1) при $a_0 = 0,01 < a_*$, а розгойдування коливань з подальшою втратою стійкості системи – при $a_0 = 0,025 \text{ м} > a_*$. Отже, графічні результати, одержані чисельним методом, підтверджують висновки, до яких призводить аналітичне дослідження.

2. Рух, який описується аналогом рівняння Релея. Розглянемо рух, змодельований рівнянням:

$$m\ddot{x} - \left(k_1 |\dot{x}|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu \right) |\dot{x}|^\beta \text{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (6)$$

в припущенні, що модуль другого доданку (активно дисипативної сили) значно менший за модуль третього доданку (сили пружності). Як і раніше, константи в (6) такі, що $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\mu \neq \nu$. У відповідності з (2), (6), робота активно дисипативної сили за один напівцикл коливань становить:

$$A = 2a \left[k_1 a^\mu \omega^\mu \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+1} \varphi d\varphi - k_2 a^\nu \omega^\nu \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu+1} \varphi d\varphi \right].$$

Оскільки

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)},$$

то

$$A = a^{\mu+1} (\gamma_1 - \gamma_2 a^{\nu-\mu}). \quad (7)$$

$$\text{Тут } \gamma_1 = k_1 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) \omega^\mu}{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right)}, \quad \gamma_2 = k_2 \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \omega^\nu}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}.$$

За умовою стаціонарності коливань $A = 0$ і з (7) випливає, що:

$$a = 0 \text{ і } a = a_* = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\nu-\mu}}. \quad (8)$$

Покладемо в (8) $\mu = 1$, $\nu = 3$. Тоді $\Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right) = 1$, $\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) = 2$;

$$a_* = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}},$$

що узгоджується з наближеним розв'язком в [5] класичного рівняння Релея. Отже, для окремих значень μ, ν формула (8) дає відомі результати.

З'ясуємо стійкість режимів, виділених в (8), використавши допоміжну функцію $F(a) = \gamma_1 a^\mu - \gamma_2 a^\nu$, що має похідну:

$$F'(a) = a^{\mu-1} (\mu\gamma_1 - \nu\gamma_2 a^{\nu-\mu}).$$

Розрізняємо два випадки: $\nu > \mu$ і $\nu < \mu$.

У першому з них маємо:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) > 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) = \gamma_2 a_*^{\nu-1} (\nu-1) < 0.$$

Це значить, що режим автоколивань з амплітудою $a = a_*$ при $\nu > \mu$ є стійким, а положення $x = a = 0$ не є положенням стійкої рівноваги.

У другому випадку, коли $\nu < \mu$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} F'(a) < 0; \quad \lim_{a \rightarrow a_*} F'(a) > 0.$$

При такому співвідношенні показників режим коливань з амплітудою $a = a_*$ нестійкий, а положення $x = a = 0$ є положенням стійкої рівноваги. Рух, який тепер описує рівняння (6), залежить від початкових умов. Якщо початкове відхилення $x = a_0 < a_*$, то маємо вільні затухаючі коливання. При $a_0 > a_*$ відбувається розгойдування коливань з подальшою втратою стійкості системи. Щоб переконатись у дотриманні цих висновків, розглянемо приклад.

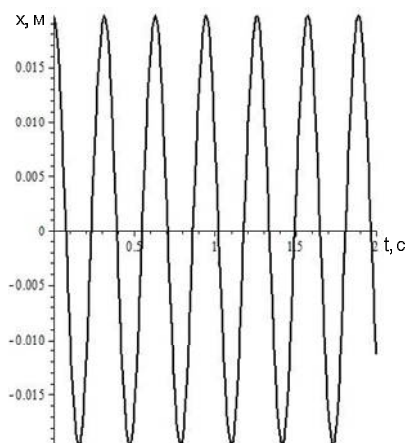


Рис. 6 – Усталені автоколивання при $a_0 = a_*$, $\mu = 0,6$, $\nu = 2,6$.

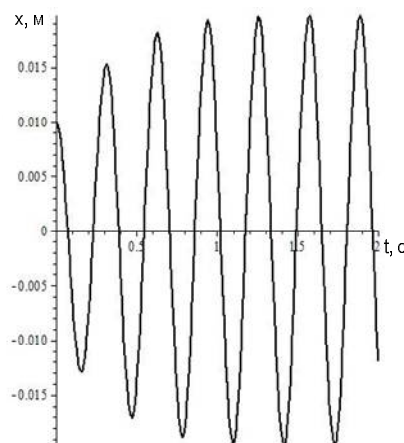


Рис. 7 – Перехідний режим коливань при $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$.

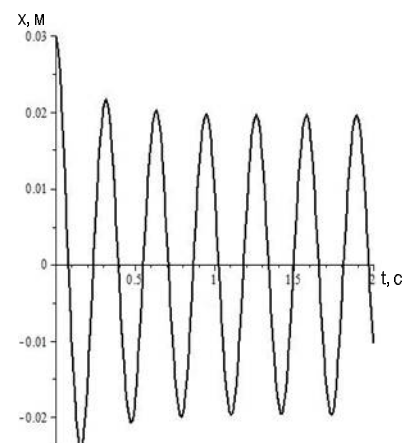


Рис. 8 – Перехідний режим коливань при $a_0 = 0,03 \text{ м} > a_*$.

Приклад. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 2 \text{ кг}$; $c = 800 \text{ Н/м}$; $\mu = 0,6$; $\nu = 2,6$; $k_1 = 5 \text{ Н(с/м)}^{0,6}$; $k_2 = 45 \text{ Н(с/м)}^{2,6}$. При таких вихідних даних:

$$\omega = 20 \text{ c}^{-1}; \quad \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}\right) = 0,897471; \quad \Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right) = 0,931384; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) = 1,166712; \quad \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) = 1,676491;$$

$$a_* = 0,019612 \text{ м}.$$

Осцилограма усталених автоколивань, одержана чисельним інтегруванням рівняння (6) на комп'ютері, подана на рис. 6. Перехідні режими автоколивань при $a_0 = 0,01 \text{ м}$ і $a_0 = 0,03 \text{ м}$ подано, відповідно, на рис. 7 і рис. 8.

На рис. 7 розмахи коливань зростають, а на рис. 8 вони спадають, асимптотично прямуючи до значення $a = a_*$, що відповідає стійкому режиму руху.

Траєкторії руху, описані рівнянням (6) при $\mu = 2,6$, $\nu = 0,6$, $k_1 = 45 \text{ Н(с/м)}^{2,6}$, $k_2 = 5 \text{ Н(с/м)}^{0,6}$ та попередніх m і c , показано на рис. 9 і рис. 10. Перша траєкторія одержана чисельним інтегруванням (6) при $a_0 = 0,01 \text{ м} < a_*$, а друга – при $a_0 = 0,025 \text{ м} > a_*$. Тут вид руху залежить від початкових умов. При $a_0 < a_*$ маємо затухання вільних коливань відносно положення $x = 0$, причому тривалість руху обмежена у часі. При $a_0 > a_*$ – система втрачає стійкість. Отже, чисельний комп'ютерний аналіз підтвердив аналітичне дослідження.

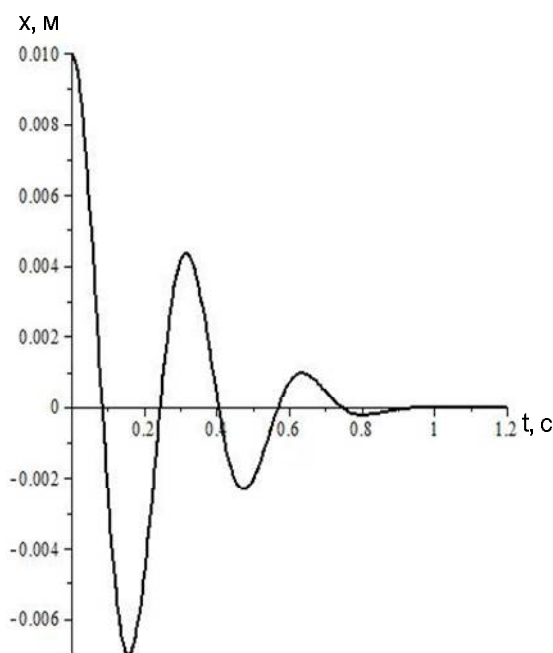


Рис. 9 – Графік затухаючих коливань при $\mu = 2,6$, $\nu = 0,6$, $a_0 < a_*$.

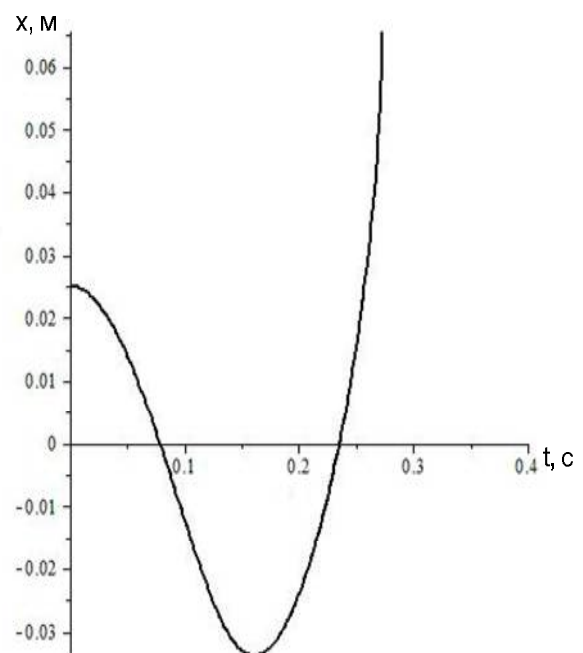


Рис. 10 – Графік втрати стійкості системи при $\mu = 2,6$, $\nu = 0,6$, $a_0 > a_*$.

3. Вплив на рух константи у виразі дисипативної сили. Позначимо константу символом k_0 і розглянемо переміщення $y(t)$, які описує диференціальне рівняння:

$$m\ddot{y} - k_0 - \left(k_1 |\dot{y}|^\mu - k_2 |\dot{y}|^\nu\right) \text{sign}(\dot{y}) + cy = 0. \quad (9)$$

Подамо його розв'язок сумою $y(t) = x_0 + x(t)$, після підстановки якої в (9), отримуємо:

$$x_0 = \frac{k_0}{c}; \quad m\ddot{x} - \left(k_1 |\dot{x}|^\mu - k_2 |\dot{x}|^\nu\right) \text{sign}(\dot{x}) + cx = 0.$$

Останнє рівняння співпадає з (6), що розглянули раніше.

Отже, наявність константи у виразі сили опору не змінює умови стійкості автоколивань, а лише змінює положення, відносно якого вони проходять. Це є наслідком лінійної пружності системи.

Перспективи подальших досліджень. Приведений аналіз руху стосувався осциляторів з лінійною характеристикою пружності. На практиці поширені також нелінійно пружні осцилятори. Тому вважаємо перспективним узагальнення викладеного способу моделювання на нелінійно пружні коливальні системи.

Висновки. Дослідження показало, що за певних обмежень узагальнені рівняння Ван дер Поля і Релея можуть описувати квазілінійні автоколивання в перехідному та усталеному режимах. При порушенні вказаних обмежень узагальнені рівняння, в залежності від початкових умов, будуть описувати або вільні затухаючі коливання, або процес динамічної втрати стійкості системи, що виникає внаслідок розгойдування коливань.

Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва : Наука, 1981. – 800 с.

References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebaniy* [Essays on the history of the development of the theory of mechanical vibrations]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
3. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
4. Zaytsev V. F., Polyaniin A. D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p.
5. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
6. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V., Tishhenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
7. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

Надійшло (received) 09.09.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasily Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенка, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Kharkiv; tel.: (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77 @gmail.com.

Ю. І. ПЕРШИНА**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ТА МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ**

Розглядається задача відновлення внутрішньої структури (щільності, коефіцієнта поглинання або послаблення) тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, що задані на деякій системі площин, які перетинають об'єкт дослідження. Ця задача виникає на практиці в тих випадках, коли серед площин, які входять в експериментальні дані, немає площини, що складається з того чи іншого набору точок, які цікавлять дослідника. Наприклад, така задача може виникнути після того, як пацієнт пройшов дослідження на медичному томографі. І після аналізу отриманих томограм виникає необхідність знайти за їх допомогою ще одну чи декілька томограм в площинах, які перетинають тіло та не співпадають з жодною із заданих площин. Зазначається, що оператори інтерфлетації функцій є природним узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, тригонометричних поліномів, вейвлетів тощо. Будеться оператор мішаної апроксимації функцій трьох змінних за допомогою поліномів Бернштейна; наводиться загальний вигляд похибки наближення побудованим оператором та оцінка цієї похибки. Також в роботі будується та досліджується чотиривимірна математична модель тривимірного тіла, що змінюється з часом. Наводиться обчислювальний експеримент з відновлення внутрішньої структури серця людини за томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографа. В статті представлені деякі можливості роботи з томограмами при відновленні внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими проекціями цього тіла (томограмами).

Ключові слова: томографія, мішана апроксимація, інтерфлетація, поліноми Бернштейна, динамічне моделювання, тривимірне моделювання.

Ю. И. ПЕРШИНА**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРФЛЕТАЦИИ И СМЕШАННОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

Рассматривается задача восстановления внутренней структуры (плотности, коэффициента поглощения или ослабления) трехмерного тела с помощью информации о ней в виде томограмм, заданных на некоторой системе плоскостей, пересекающих объект исследования. Эта задача возникает на практике в тех случаях, когда среди плоскостей, которые входят в экспериментальные данные, нет плоскости, которая состоит из того или иного набора точек, которые интересуют исследователя. Например, такая задача может возникнуть после того, как пациент прошел исследования на медицинском томографе. И после анализа полученных томограмм возникает необходимость найти с их помощью еще одну или несколько томограмм в плоскостях, пересекающих тело, но не совпадающих ни с одной из заданных плоскостей. Отмечается, что операторы интерфлетиции функций являются естественным обобщением операторов интерполляции функций трех переменных. Поэтому, как и в случае интерполляции, погрешности в экспериментальных данных (в данном случае, в томограммах) привносятся также и в операторы интерфлетиции. В математике существует альтернатива операторам интерполляции – операторы аппроксимации. Это операторы, построенные путем сглаживания экспериментальных данных с помощью полиномов, рациональных функций, тригонометрических полиномов, вейвлетов и тому подобное. Строится оператор смешанной аппроксимации функции трех переменных с помощью полиномов Бернштейна; приводится общий вид погрешности приближения построенным оператором и оценка этой погрешности. Также в работе строится и исследуется четырехмерная математическая модель трехмерного тела, меняющегося со временем. Приводится вычислительный эксперимент по восстановлению внутренней структуры сердца человека по томограммам, лежащим на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, которые поступают из реально действующего компьютерного томографа. В статье представлены некоторые возможности работы с томограммами при восстановлении внутренней структуры трехмерного тела по известным проекциям этого тела (томограммам).

Ключевые слова: томография, смешанная аппроксимация, интерфлетиция, полиномы Бернштейна, динамическое моделирование, трехмерное моделирование.

I. I. PERSHYNA**MODELING A DYNAMIC THREE-DIMENSIONAL BODY USING INTERFLATATION AND BLENDING APPROXIMATION**

The paper deals with the problem of reconstruction of the internal structure (density, absorption or attenuation coefficient) of a three-dimensional body by the information about it in the form of tomograms, given on a certain system of planes intersecting the object of study. This problem arises in practice in cases where there is no plane among the planes that are included in the experimental data, which consists of one or another set of points that are of interest to the researcher. For example, such a problem may arise after a patient has undergone examinations on a medical tomograph. After analyzing the obtained tomograms, it becomes necessary to find with their help one or more tomograms in the planes intersecting the body, but not coinciding with any of the given planes. It is noted that the operators of interflatation of functions is a natural generalization of the interpolation operators for the functions of three variables. Therefore, as in the case of interpolation, errors in the experimental data (in this case, in tomograms) are also introduced into the interflatation operators. In mathematics, there is an alternative to interpolation operators, namely approximation operators. These are operators constructed by smoothing experimental data using polynomials, rational functions, trigonometric polynomials, wavelets, and the like. An operator of mixed approximation of a function of three variables is constructed using Bernstein polynomials; the general form of the approximation error by the constructed operator and the estimate of this error are given. In the paper a four-dimensional mathematical model of a three-dimensional body that changes over time is also built and studied. A computational experiment is presented to restore the internal structure of the human heart from tomograms lying on a system of mutually perpendicular planes, which come from an actually operating computer tomograph. The article presents some possibilities of working with tomograms when restoring the internal structure of a three-dimensional body from the known projections of this body (tomograms).

Key words: tomography, blending approximation, interflatation, Bernstein polynomials, dynamic modeling, three-dimensional modeling.

Вступ. Комп'ютерна томографія виникла на стику декількох наукових дисциплін: математики, фізики та

медицини. Але своє практичне втілення вона змогла отримати лише завдяки появі та розвитку комп'ютерної техніки. Серед всіх існуючих томографічних методів особливою успіху досягла *радіаційна (рентгенівська) комп'ютерна томографія (КТ)*. Передумовою її появи послужили недоліки звичайної рентгенографії, що породили ідею отримання не одного, а ряду знімків, виконаних під різними ракурсами, і визначення по ним шляхом математичної обробки щільності досліджуваної речовини в ряді перетинів. Перевагами КТ у порівнянні з традиційною рентгенографією стали:

- відсутність тінювих накладень на зображенні;
- більш висока точність вимірювання геометричних співвідношень;
- чутливість на порядок вище, ніж при звичайній рентгенографії.

Двадцяте століття ознаменувалось інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень людства – комп'ютерної томографії. Великий теоретичний вклад в розвиток радонівської комп'ютерної томографії зробив німецький вчений *Й. Радон* [1], який розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (*перетворення Радона*). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин. За останні десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації.

Але практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності, оскільки є недостатньо обґрунтованою доза опромінення томографа та наявність невластивих об'єкту артефактів на екранах дисплеїв при відновленні об'єкта у заданому перетині.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. У попередніх роботах *О. М. Литвина* та *Ю. І. Перишиної* [2] розв'язувалася задача комп'ютерної томографії *методами інтерфлєтації функцій*.

Задача побудови математичних моделей динамічної внутрішньої структури тривимірних тіл належить до однієї з найбільш актуальних задач сучасності. Така задача виникає в різних областях науки та техніки, зокрема, в медичній практиці у випадку проведення декількох повторних досліджень пацієнта в різні моменти часу та необхідності аналізу на їх основі ефективності лікування. Таким чином, актуальною є розробка та дослідження методу розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії з використанням *операторів мішаної апроксимації* та *методу відновлення* динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла, що змінюється з часом, за відомими її томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа.

Особливо важливим є побудова чотиривимірних моделей на основі томографічних даних в різні моменти часу. Ця задача сама по собі є дуже складною у зв'язку з великими масивами інформації, яка використовується на кожному етапі часу, а також у зв'язку з обмеженнями на візуалізацію результатів відновлення в моменти часу, що не співпадають з моментами, для яких представлені експериментальні дані. Відмітимо, що функція чотирьох змінних може бути візуалізована тільки лише за своїми значеннями в окремих точках або графіком своїх слідів на окремих лініях чи поверхнях (зокрема, площинах).

В ряді випадків (наприклад, при дослідженні тривимірної моделі серця) необхідно враховувати, що повна зміна внутрішньої структури об'єкта здійснюється приблизно за одну секунду. Тому, якщо ми бажаємо отримати послідовність математичних моделей тривимірного тіла в різні моменти часу, то для кожного з цих моментів часу необхідно виконати великий об'єм роботи. Для ефективного дослідження змін за часом та, зокрема, для прогнозу, очевидно, необхідно аналітичне за t, x, y, z представлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Враховуючи викладене, актуальною являється задача побудови аналітичної чотиривимірної моделі внутрішньої структури тіла, яка змінюється з часом, на основі томограм в різні моменти часу.

Аналіз останніх досліджень. Загальний розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп перетинних площин, в кожній з яких площини паралельні, був розроблений в роботах [3], [4]. Ця задача була розв'язана з використанням операторів інтерфлєтації функцій трьох змінних. Треба відмітити, що оператори інтерфлєтації функцій є природним узагальненням *операторів інтерполяції* функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлєтації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – *оператори апроксимації*. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою *поліномів*, раціональних функцій, сплайнів, тригонометричних поліномів, вейвлетів.

В даній статті пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. В методі проводиться згладжування експериментальних даних у вигляді томограм, заданих на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою операторів мішаної апроксимації [5], [6].

В роботах [7], [8] викладені алгебраїчні та аналітичні методи відновлення динамічного тривимірного тіла при конусно-променевій томографії. В статті [9] автори представляють новий алгоритм відновлення в 4D комп'ютерній томографії, який використовує повторення анатомічних структур в різних місцях між сусідніми фазами дихання при віяльній схемі сканування. В даній роботі представляється метод відновлення динамічного ті-

ла при паралельній (найпростішій) схемі сканування.

Математичне моделювання стаціонарної внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Мішана апроксимація функцій $n (n \geq 2)$ змінних будується за допомогою операторів, кожен з яких діє на одну змінну, але не є оператором інтерполяції за цією змінною. Отримувані в результаті оператори апроксимації є значно точнішими порівняно з класичними операторами апроксимації.

Нехай $f(x, y, z) \in C^{r_1, r_2, r_3}[D]$, $D = [0, 1]^3$, $r_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$. Зафіксуємо три розбиття

$$\Delta n: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1; \quad \Delta m: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1; \quad \Delta s: 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_s = 1$$

відрезка $[0, 1]$, якими задається розбиття Δ_{nms} куба D на комірки

$$I_{k,l,p} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [z_{p-1}, z_p], \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, s}.$$

Оператори апроксимації будемо будувати у вигляді операторів класичної апроксимації

$$L_{nms}f(x, y, z) = L1_n L2_m L3_s f(x, y, z)$$

або у вигляді операторів мішаної апроксимації

$$Of(x, y, z) = (L1_n + L2_m + L3_s - L1_n L2_m - L1_n L3_s - L2_m L3_s + L1_n L2_m L3_s)f(x, y, z), \quad (1)$$

де $L1_n, L2_m, L3_s$ – оператори Фур'є, Фейєра, Валле-Пуссена, Бернштейна тощо, що діють на функцію $f(x, y, z)$ як на функцію однієї змінної.

Оператори $L1_n f(x, y, z)$, $L2_m f(x, y, z)$, $L3_s f(x, y, z)$ діють на функцію $f(x, y, z)$ за змінними x, y, z відповідно.

Лема. Для похибки наближення $R_{nms}f(x, y, z) = (I - L_{nms})f(x, y, z)$ оператором класичної апроксимації справедлива рівність

$$R_{nms}f(x, y, z) = (r1_n + r2_m + r3_s - r1_n r2_m - r1_n r3_s - r2_m r3_s + r1_n r2_m r3_s)f(x, y, z).$$

де $r1_n = I - L1_n$, $r2_m = I - L2_m$, $r3_s = I - L3_s$, I – тотожний оператор.

Доведення витікає з операторної тотожності

$$R_{nms}f(x, y, z) = ((I - L1_n) + (I - L2_m) + (I - L3_s) - (I - L1_n)(I - L2_m) - (I - L1_n)(I - L3_s) - (I - L2_m)(I - L3_s) + (I - L1_n)(I - L2_m)(I - L3_s))f(x, y, z).$$

Лема доведена.

Теорема 1. Для похибки наближення $Rf(x, y, z) = (I - O)f(x, y, z)$ оператором мішаної апроксимації справедлива операторна рівність

$$Rf(x, y, z) = r1_n r2_m r3_s f(x, y, z),$$

де $r1_n = I - L1_n$, $r2_m = I - L2_m$, $r3_s = I - L3_s$, I – тотожний оператор.

Доведення. Проведемо операторні перетворення

$$\begin{aligned} Rf(x, y, z) &= (I - O)f(x, y, z) = \\ &= (I - L1_n - L2_m - L3_s + L1_n L2_m + L1_n L3_s + L2_m L3_s - L1_n L2_m L3_s)f(x, y, z) = \\ &= ((I - L1_n) + (I - L2_m) + (I - L3_s) - (I - L1_n L2_m) - (I - L1_n L3_s) - (I - L2_m L3_s) + \\ &+ (I - L1_n L2_m L3_s))f(x, y, z) = ((I - L1_n) + (I - L2_m) + (I - L3_s) - (I - L1_n) - (I - L2_m) + (I - L1_n)(I - L2_m) - \\ &- (I - L1_n) - (I - L3_s) + (I - L1_n)(I - L3_s) - (I - L2_m) - (I - L3_s) + (I - L2_m)(I - L3_s) + \\ &+ (I - L1_n) + (I - L2_m) + (I - L3_s) - (I - L1_n)(I - L2_m) - (I - L1_n)(I - L3_s) + \\ &- (I - L2_m)(I - L3_s) + (I - L1_n)(I - L2_m)(I - L3_s))f(x, y, z) = \\ &= (I - L1_n)(I - L2_m)(I - L3_s)f(x, y, z) = r1_n r2_m r3_s f(x, y, z). \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Введемо до розгляду клас функцій

$$\begin{aligned} M^{r,r,r} &= \{f(x, y, z) \in C^{r,r,r}([0, 1]^3) : \max_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(r,0,0)}(x, y, z)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(0,r,0)}(x, y, z)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \\ \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \left\{ \int_0^1 |f^{(0,0,r)}(x, y, z)|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,0)}(x, y, z)|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \max_{\substack{0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,0,r)}(x, y, z)|^p dx dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \end{aligned}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f^{(0,r,r)}(x, y, z)|^p dy dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(x, y, z)|^p dx dy dz \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$M^{0,0} = \{g(x, y) \in C[0;1]^2 \mid \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |g(x, y)| < \infty\}.$$

В роботі *Н. П. Корнейчука* [10] були наведені похибки наближення двовимірними сплайнами. Розповсюдимо їх на тривимірний випадок.

Теорема 2. Нехай для залишків наближення лінійними операторами $L1_n, L2_m, L3_s$ можна написати інтегральні зображення

$$\begin{aligned} r1_n f(x, y, z) &= \int_0^1 G_1(x, u) f^{(p,0,0)}(u, y, z) du; \\ r2_m f(x, y, z) &= \int_0^1 G_2(y, v) f^{(0,q,0)}(x, v, z) dv; \\ r3_s f(x, y, z) &= \int_0^1 G_3(z, w) f^{(0,0,t)}(x, y, w) dw, \end{aligned} \quad (2)$$

де $G_1(x, u), G_2(y, v), G_3(z, w) \in M^{0,0}$. Тоді

$$\begin{aligned} R_{nms} f(x, y, z) &= f(x, y, z) - L1_n L2_m L3_s f(x, y, z) = \int_0^1 G_1(x, u) f^{(p,0,0)}(u, y, z) du + \\ &+ \int_0^1 G_2(y, v) f^{(0,q,0)}(x, v, z) dv + \int_0^1 G_3(z, w) f^{(0,0,t)}(x, y, w) dw - \\ &- \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_2(y, v) f^{(p,q,0)}(u, v, z) dudv - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_3(z, w) f^{(p,0,t)}(u, y, w) dudw - \\ &- \int_0^1 \int_0^1 G_2(y, v) G_3(z, w) f^{(0,q,t)}(x, v, w) dv dw + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u) G_2(y, v) G_3(z, w) f^{(p,q,t)}(u, v, w) dudv dw. \end{aligned}$$

Доведення випливає з леми.

Теорема 3. Нехай $1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, тоді для оцінювання похибки наближення функції

$f(x, y, z) \in M^{r,r,r}$ оператором $Of(x, y, z)$ виконується нерівність:

$$\begin{aligned} \|(I - O)f(x, y, z)\|_{L_\mu[0,1]^3} &= \|r1_n r2_m r3_s f\|_{L_\mu[0,1]^3} \leq \\ &\leq \|f^{(r,r,r)}\|_{L_p[0,1]^3} \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq \mu < \infty. \end{aligned}$$

Доведення. Користуючись (2), маємо:

$$\begin{aligned} |(I - O)f(x, y, z)| &= |r1_n r2_m r3_s f(x, y, z)| \leq \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \times \\ &\times \left[\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(u, v, w)|^p dudv dw \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (x, y, z) \in [0,1]^3; \\ \sup_{f \in M^{r,r,r}} |(I - O)f(x, y, z)| &= \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\|(I - O)f(x, y, z)\|_{L_\mu[0,1]^3} \leq \left[\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r,r)}(u, v, w)|^p dudv dw \right]^{\frac{1}{p}} \|G_1(x, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y, *)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z, *)\|_{L_{p'}[0,1]} =$$

$$\leq \|f^{(r,r,r)}\|_{L_p[0,1]^3} \|G_1(x,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z,*)\|_{L_{p'}[0,1]},$$

де

$$\|f\|_{L_p[0,1]^3} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x,y,z)|^p dx dy dz \right\}^{\frac{1}{p}};$$

$$\|G_1(x,*)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[\int_0^1 |G_1(x,u)|^{p'} du \right]^{\frac{1}{p'}}; \quad \|G_2(y,*)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[\int_0^1 |G_2(y,v)|^{p'} dv \right]^{\frac{1}{p'}}; \quad \|G_3(z,*)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[\int_0^1 |G_3(z,w)|^{p'} dw \right]^{\frac{1}{p'}};$$

$$\|G_1(x,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_2(y,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z,*)\|_{L_{p'}[0,1]} = \left[\int_0^1 \left(\|G_1(x,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \right)^\mu \right]^{\frac{1}{\mu}}.$$

$$\text{Аналогічно визначаються } \|G_2(y,*)\|_{L_{p'}[0,1]} \|G_3(z,*)\|_{L_{p'}[0,1]}.$$

Теорема 3 доведена.

Наслідок. Якщо в попередній теоремі взяти

$$m = n = s, \quad \|r_1 f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \|r_2 f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \|r_3 f\|_{L_p} = O(n^{-\alpha}), \quad \alpha > 0,$$

то $\|(I - O)f(x, y, z)\|_\infty = O(n^{-3\alpha})$.

Зауваження. Оператори $L_1 f$, $L_2 f$, $L_3 f$ діють на функцію $f(x, y, z)$ по одній змінній. При цьому використовуються деякі функціонали (інтеграли) від $f(x, y, z)$, що діють на вказану змінну, а інші змінні вважаються параметрами. Тобто оператор мішаної апроксимації $Of(x, y, z)$ не є класичним оператором апроксимації функцій трьох змінних типу Фур'є, для побудови яких застосовано функціонали від наближаючої функції, що діють на $f(x, y, z)$ як на функцію трьох змінних (наприклад, коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних).

Мішана апроксимація поліномами Бернштейна. Розглянемо вище викладену теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою поліномів Бернштейна та застосуємо її до розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії.

Означення. Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна) степеня n для функції $g(t) \in C[0, 1]$ однієї змінної називають поліноми

$$B_n g(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

Лема [11]. Для кожної неперервної на $[0, 1]$ функції $g(t) \in C[0, 1]$ і довільного числа $\delta > 0$ знайдеться таке натуральне n , що

$$|g(t) - B_n g(t)| \leq \delta, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Зауважимо, що формулювання цього твердження для довільного відрізка $u \in [a, b]$ проводиться з використанням заміни $u = a + t(b-a)$, тобто замість функції $g(u)$, $u \in [a, b]$, достатньо розглянути функцію $f(t) = g(a + t(b-a))$, $t \in [0, 1]$.

Отже, поліноми Бернштейна рівномірно збігаються до кожної неперервної функції на $[a, b]$. Якщо функція $g(t)$ обмежена в точці c , $a < c < b$, і має розрив першого роду в цій точці, то

$$\lim_{t \rightarrow c} B_n g(t) = \frac{g(c-0) + g(c+0)}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Якщо функція $g(t)$ двічі диференційована в точці $c \in [a, b]$, то

$$B_n g(c) - g(c) = \frac{g''(c)(c-a)(b-c)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадку функцій $f(x, y, z)$, $(x, y) \in [0, 1]^3$, трьох змінних має вигляд:

$$B_{nms} f(x, y, z) = B_1 B_2 B_3 f(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^s C_n^k C_m^l C_s^p x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{m-l} z^p (1-z)^{s-p} f(x_k, y_l, z_p),$$

де

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k, y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} f(x, y_l, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} f(x, y, z_p).$$

Тобто оператор $B1_n$ діє на змінну x , оператор $B2_m$ – на змінну y , а оператор $B3_s$ – на змінну z .

Зауваження. Оператори $B_{nms}f$ використовують $(n+1)(m+1)(s+1)$ значень $f(x_k, y_l, z_p)$, але

$$B_{nms}f(x_k, y_l, z_p) \neq f(x_k, y_l, z_p), \quad k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, m}, \quad p = \overline{0, s}.$$

Теорема 4. Для залишку наближення функції $f(x, y, z)$ операторами $B_{nms}f(x, y, z)$ виконується рівність:

$$f(x, y, z) - B_{nms}f(x, y, z) = ((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) -$$

$$- (I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z).$$

Доведення. Розпишемо вираз в правій частині рівності, що треба довести:

$$((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) -$$

$$- (I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z) =$$

$$= (I - B1_n + I - B2_m + I - B3_s - I + B1_n + B2_m - B1_n B2_m - I + B1_n + B3_s - B1_n B3_s -$$

$$- I + B2_m + B3_s - B2_m B3_s + (I - B1_n - B2_m + B1_n B2_m)(I - B3_s))f(x, y, z) =$$

$$= (B1_n + B2_m - B1_n B2_m - B1_n B3_s + B3_s - B2_m B3_s +$$

$$+ I - B3_s - B1_n + B1_n B3_s - B2_m + B2_m B3_s + B1_n B2_m - B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z) =$$

$$= (I - B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z) = (I - B_{nms})f(x, y, z).$$

Теорема 4 доведена.

Це означає, що для функції $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}[0,1]^3$, яка має в точці $(c, d, h) \in [0,1]^3$ неперервні похідні $f^{(2,0,0)}(x, y, z)$, $f^{(0,2,0)}(x, y, z)$, $f^{(0,0,2)}(x, y, z)$, виконуватиметься співвідношення:

$$B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h) = \frac{f^{(2,0,0)}(c, d, h)c(1-c)}{2n} + \frac{f^{(0,2,0)}(c, d, h)d(1-d)}{2m} +$$

$$+ \frac{f^{(0,0,2)}(c, d, h)h(1-h)}{2s} - \frac{f^{(2,2,0)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)}{4nm} - \frac{f^{(2,0,2)}(c, d, h)c(1-c)h(1-h)}{4ns} -$$

$$- \frac{f^{(0,2,2)}(c, d, h)d(1-d)h(1-h)}{4ms} + \frac{f^{(2,2,2)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)h(1-h)}{8nms} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{nm}\right) + o\left(\frac{1}{ns}\right) + o\left(\frac{1}{ms}\right) + o\left(\frac{1}{nms}\right), \quad n, m, s \rightarrow \infty.$$

Тобто $|B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O((\min\{n, m, s\})^{-1})$, $m, n, s \rightarrow \infty$.

Припустимо, що $m = n = s$. Тоді отримаємо: $|B_{nnn}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$.

Сформулюємо означення мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Для цього введемо деякі необхідні поняття.

Нехай внутрішня структура тривимірного об'єкта описується функцією $f(x, y, z)$, яка повністю розміщена в одиничному кубі $[0,1]^3$. Та нехай задані три системи паралельних томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографа. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ці групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми:

1. $T1_k(y, z) = f(x_k, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Ox ;
2. $T2_l(x, z) = f(x, y_l, z)$, $l = \overline{1, m}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oy ;
3. $T3_p(x, y) = f(x, y, z_p)$, $p = \overline{1, s}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oz .

Означення. Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори вигляду:

$$Of(x, y, z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B1_n B3_s - B2_m B3_s + B1_n B2_m B3_s)f(x, y, z), \quad (4)$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x, z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^p C_p^s z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x, y).$$

n, m, s – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні вісям Ox, Oy, Oz відповідно.

Теорема 5. Нехай $f \in C^{2,2,2}[0,1]^3$. Тоді для оператора Of виконується асимптотичне співвідношення:

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = \frac{f^{(2,2,2)}(x, y, z)x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{8nms} + o\left(\frac{1}{nms}\right). \quad (5)$$

Доведення. Скористаємося рівністю

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s)f(x, y, z)$$

і виразами для залишку наближення поліномами Бернштейна двічі диференційовної по x , по y та по z функції ($a < x < b, c < y < d, h < z < t$):

$$B1_n f(\xi, y, z) - f(\xi, y, z) = \frac{f^{(2,0,0)}(\xi, y, z)(\xi - a)(b - \xi)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a < \xi < b;$$

$$B2_m f(x, \eta, z) - f(x, \eta, z) = \frac{f^{(0,2,0)}(x, \eta, z)(\eta - c)(d - \eta)}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right), \quad c < \eta < d;$$

$$B3_s f(x, y, \zeta) - f(x, y, \zeta) = \frac{f^{(0,0,2)}(x, y, \zeta)(\zeta - h)(t - \zeta)}{2s} + o\left(\frac{1}{s}\right), \quad h < \zeta < t.$$

Це дає змогу записати вираз для похибки (5).

Теорема 5 доведена.

Зауваження. Якщо в (5) покласти $n = m = s$, то $f(x, y, z) - Of(x, y, z) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), n \rightarrow \infty$.

Тобто оператор Of , у випадку $n = m = s$, мають порядок точності відносно змінної n у три рази більший, ніж при наближенні оператором $B_{nms} f$. Звертаємо увагу на те, що оператор $Of(x, y, z)$ потребують для своєї побудови томограми $T1_k, T2_l, T3_p$, тобто сліди наближуваної функції $f(x, y, z)$ на заданих площинах, паралельних координатним площинам.

Тобто, для оцінки похибки наближення функції $f(x, y, z)$ оператором $Of(x, y, z)$ виконується нерівність:

$$\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\text{де } \varepsilon_1 = \|(I - L1_n)f\|_{C[0,1]^3}, \quad \varepsilon_2 = \|(I - L2_m)f\|_{C[0,1]^3}, \quad \varepsilon_3 = \|(I - L3_s)f\|_{C[0,1]^3}.$$

Побудова чотиривимірної математичної моделі динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла. Нехай функція $f(x, y, z, t)$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x, y, z, t)$, тобто про динамічну внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин

$$\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = \alpha_{p1}x + \alpha_{p2}y + \alpha_{p3}z - \gamma_p = 0, \quad p = \overline{1, s},$$

а також набір томограм, які лежать на цих площинах, у конкретні моменти часу. Для подальшого викладення нам необхідно сформулювати деякі твердження.

Означення. Слідом функції $f(x, y, z, t_k)$ у момент часу $t_k, k = \overline{1, n}$ на площині $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$ будемо називати функцію двох змінних $\varphi_{k,p}(u, v)$, яка в кожній точці цієї площини Π_p приймає такі самі значення, що і функція $f(x, y, z, t_k)$:

$$f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = \varphi_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}. \quad (6)$$

Означення. Інтерфлотацією функції $f(x, y, z, t_k), k = \overline{1, n}$ називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y, z, t_k), k = \overline{1, n}$ в точках між площинами $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = 0$ за допомогою її слідів (6) на цих площинах.

Означення. Томограмою $T_{k,p}(\bar{x})$ (слідом функції $f(x, y, z, t_k)$) на площині $\omega_p(x, y, z) = 0$ в момент часу $t_k, k = \overline{1, n}$ будемо називати одну з трьох функцій:

$$T_{k,p}(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_p(y, z), y, z, t_k); \\ f(x, y_p(x, z), z, t_k); \\ f(x, y, z_p(x, y), t_k), \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{cases} (x, y); \\ (x, z); \\ (y, z). \end{cases}$$

Томограму в момент часу t_k , яка лежить, наприклад, на площині $\omega_p(x, y, z): z - c = 0$ можна представити у вигляді функції двох змінних $T_{kp}(x, y)$, тобто у вигляді сліду функції $f(x, y, z, t_k)$ на площині $\omega_p(x, y, z) = 0$.

Як експериментальні дані будемо використовувати:

1) послідовність n моментів часу: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$;

2) серію s площин, заданих рівняннями $\Pi_p: \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$, $p = \overline{1, s}$;

3) томографи тривимірного об'єкта $T_{kp}, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, s}$, які лежать на заданих площинах Π_p , в задані моменти часу $t = t_k, k = \overline{1, n}$.

Томографи отримуємо за допомогою комп'ютерного томографа. Тобто маємо n груп томограм (у кожній групі по s томограм). У кожній групі томографи представлені в один момент часу. Але вони лежать на різних площинах. Зазначимо, що кількість томограм у різні моменти часу може бути різною. Це також відноситься і до кількості рівнянь площин, на яких лежать томографи. Більш того, в різні моменти часу площини, на яких лежать томографи, можуть бути задані різними рівняннями.

Спочатку побудуємо n тривимірних математичних моделей $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t = t_k, k = \overline{1, n}$.

Отже, є функція $f_k(x, y, z)$, яка в точках площини Π_p в k -й момент часу збігається із зображенням p -ї томографи. Для побудови таких функцій можуть бути використані: 1) оператори сплайн-інтерфлетації; 2) оператори мішаної апроксимації, які були побудовані раніше. У випадку 1) побудовані тривимірні математичні моделі $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t = t_k, k = \overline{1, n}$ мають задовольняти властивості:

$$f(x, y, z, t_k)|_{\Pi_p} = f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = T_{k,p}(\bar{x}), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}.$$

При цьому, якщо експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площин, на яких лежать томографи, а також зображення на томограмах) задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації функцій. Якщо ж експериментальні дані задано з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач тривимірного комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації.

Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла вірізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей $f_k(x, y, z), k = \overline{1, n}$ будемо чотиривимірну модель $F(x, y, z, t)$, використовуючи метод інтерполяції за змінною t у вигляді формули:

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z), \quad (7)$$

де $h_p(t)$ – допоміжні функції від однієї змінної t з властивостями:

$$h_k(t_q) = \delta_{kq}, \quad k, q = \overline{1, n}, \quad \delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases} \quad - \text{символ Кронекера.}$$

Ці функції можуть бути поліномами (алгебраїчними або тригонометричними), сплайнами (поліноміальними або періодичними) степеня $r, r = 1, 2, 3, \dots$, і т.д.

Теорема 6. Якщо експериментальні дані (томографи $T_{k,p}, k = \overline{1, n}, p = \overline{1, s}$ що лежать на площинах Π_p) відповідають функції, яку наближуємо $f(x, y, z, t) \in C^r(D), D = G \times [0, T], r \geq 0, G \subset R^3, t \in [0, T]$, то можна побудувати 4D модель $F(x, y, z, t)$ внутрішньої структури об'єкта, який змінюється, з властивостями:

$$F(x, y, z, t) \in C^r(D);$$

$$F(x, y, z, t_k)|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k|_{\omega_p(x, y, z)=0} = T_{k,p}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}, \quad (u, v) = \begin{cases} (x, y); \\ (x, z); \\ (y, z). \end{cases}$$

Зазначимо, що задача в такій постановці немає єдиного розв'язку. Але при певних обмеженнях на клас функцій, яку наближуємо, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближуваних функцій $f(x, y, z, t)$ можна оцінити похибку наближення.

Теорема 7. Нехай

- похибка задання томограм $T_{kp}(\bar{x})$ в моменти часу $t = t_k$: $\varepsilon_{kp} = \max_{(u,v) \in G} |f|_{\Pi_p} - T_{k,p}(\bar{x})|$;
- похибка наближення операторами інтерфлетації або мішаної апроксимації функції $f(x, y, z, t)$:

$$\varepsilon 1_k = |f_k(x, y, z) - f(x, y, z, t_k)|_{C(D)};$$

похибка наближення оператором інтерполяції за змінною t : $\varepsilon 2 = |F(x, y, z, t) - f(x, y, z, t)|_{C[0,T]}$.

Тоді похибка наближення функції $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$ оператором $F(x, y, z, t)$, побудованим в теоремі 6, буде мати вигляд:

$$E = \max_{\substack{1 \leq p \leq s \\ 1 \leq k \leq n}} O(\varepsilon_{kp}) + \max_{1 \leq k \leq n} O(\varepsilon 1_k) + O(\varepsilon 2).$$

Представлення томограм у середовищі Matlab. Кожний малюнок Matlab має площину (Figures) для рисунка, яка, по суті, являється двовимірним масивом пікселів. Кожному елементу цього масива, в свою чергу, ставиться у відповідність атрибут, тобто колір. Відмітимо, що при програмуванні в Matlab використовується RGB модель кольору, у відповідності до якої будь-який колір можна представити як суперпозицію трьох основних кольорів – червоного (Red), зеленого (Green) та синього (Blue). Кожна з компонент Red, Green, Blue задається одним байтом і відповідає $2^8 = 256$ відтінків кольорів (значення інтенсивності змінюється від 0 до 255, число 255 відповідає кольору найбільшої інтенсивності). Повна кількість кольорів, яку можна задати трьома байтами, складає $256^3 = 16777216$, що є близьким до кольорової здатності ока людини (ця модель має назву TrueColor).

Комп'ютерний томограф видає томограми у спеціальному форматі, який є доступним лише для томографів. Існує спеціальна програма, яка переводить цей формат у формат .bmp, який розпізнає і комп'ютер.

Нехай задані п'ять томограм (рис. 1), які представляються у вигляді файлів у форматі .bmp – x1.bmp, x2.bmp, x3.bmp, x4.bmp, x5.bmp (розмір томограм повинен бути однаковим, в цьому випадку – 450×450 пікселів).

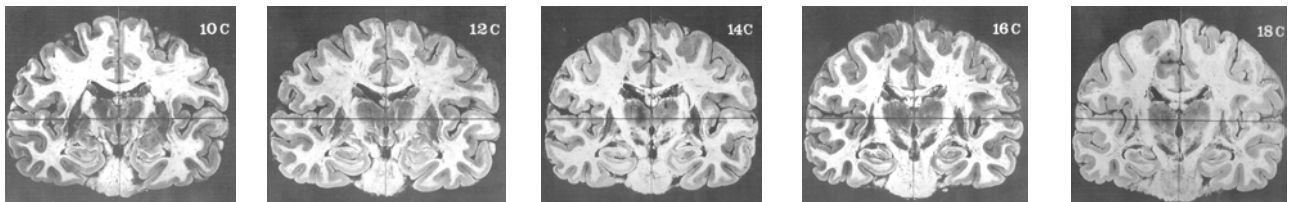


Рис. 1 – Томограми, що лежать на системі площин, які паралельні осі Oz .

Ці томограми представимо як одномірний масив у вигляді наступної функції:

1. *function* $A = A(i)$.

Тут i – номер малюнку.

2. *if* $i = 1$;

3. $c = \text{imread}('x1.bmp')$.

Функція $\text{imread}('x1.bmp')$ – читає графічний файл x1.bmp, тобто виводить матрицю чисел. Кожний елемент матриці інтерпретується як значення RGB, тобто відповідає інтенсивності кольору у відповідному пікселі.

4. *elseif* $i = 2$;

5. $c = \text{imread}('x2.bmp')$;

6. *elseif* $i = 3$;

7. $c = \text{imread}('x3.bmp')$;

8. *elseif* $i = 4$;

9. $c = \text{imread}('x4.bmp')$;

10. *elseif* $i = 5$;

11. $c = \text{imread}('x5.bmp')$;

12. *end* ;

13. $A = \text{image}(c)$.

Функція $\text{image}(c)$ перетворює матрицю чисел в малюнок (рис. 2).

Тобто ми представили набір томограм у вигляді функції $A(i)$.

Якщо треба працювати не з цілими малюнками, а з окремими пікселями, то в наведеній вище функції треба зробити зміни в рядках 1 та 13:

1. $\text{function } A = A(i, y, z)$.

Тут i – номер малюнка, (y, z) – координати пікселя, з яким треба працювати.

13. $A = c(y, z)$.

Наприклад, функція $A(5, 100, 100)$ видає в результаті число 41. Тобто інтенсивність кольору в пікселі з координатами (100, 100) п'ятого малюнку дорівнює 41.

Matlab-програми відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла між паралельними томограмами. Нехай треба відновити внутрішню структуру головного мозку людини між томограмами, які лежать на паралельних площинах. Тобто треба знайти значення тривимірної функції між паралельними площинами.

Нехай задані тривимірні функція $f(x, y, z)$ і рівняння площин: $x = x_1$ та $x = x_2$. Відновлювати значення функції $f(x, y, z)$ між заданими площинами будемо за допомогою оператора лінійної інтерполяції:

$$P(f(x, y, z)) = f(x_1, y, z) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} .$$

Продемонструємо роботу цього оператора на прикладі головного мозку людини. Вхідними даними є набір томограм, які лежать на системі паралельних площин (рис. 1). Набір томограм представляється у вигляді функції $A(i)$, як це показано у додатку В.

Функція, яка відновлює внутрішню структуру головного мозку між паралельними площинами, має вигляд:

1. $\text{function brainz} = \text{brainz}(z)$.

Тут z – число від 0 до 1. Тобто задається рівняння площини, в якій треба відновити внутрішню структуру (без обмеження загальності вважаємо, що тривимірне тіло лежить всередині одиничного куба).

2. $M = 5$ (M – кількість заданих томограм);

3. $k = \text{floor}(M * z)$.

Функція $\text{floor}(M * z)$ округляє число A до найближчого цілого в меншу сторону, тобто $\text{floor}(0,2) = 0$ і $\text{floor}(0,8) = 0$. Ця функція необхідна для того, щоб зробити перемасштабування, тобто помістити заданий тривимірний об'єкт в одиничний куб.

4. $r1 = A(k)$;

5. $r2 = A(k+1)$.

На кроці 4 та 5 визначається, між якими томограмами лежить введена площина.

6. $R1 = \text{immultiply}(r1, (k+1 - z * M))$;

7. $R2 = \text{immultiply}(r2, (k - z * M))$;

8. $R = \text{imsubtract}(R1, R2)$;

Кроки 6 – 8 відповідають формулі (Г.1).

Оператор $\text{immultiply}(X, a)$ визначає добуток зображення X , тобто масиву значень від 0 до 255, на число a . Якщо значення добутку перевищує заданий діапазон, то воно усікається, а дробові значення округляються.

Оператор $\text{imsubtract}(X, Y)$ визначає різницю двох зображень X та Y , тобто двох масивів значень від 0 до 255. Розмірність матриць X та Y повинна бути однаковою.

9. $\text{brainz} = \text{image}(R)$.

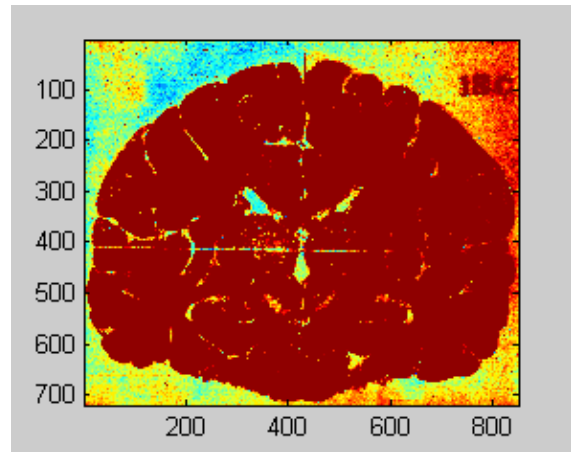


Рис. 2 – Результат роботи функції $A(5)$.

Функція $image(R)$ перетворює отриману матрицю значень в малюнок.

Результати роботи функції $brainz(z)$ представлені на рис. 3.

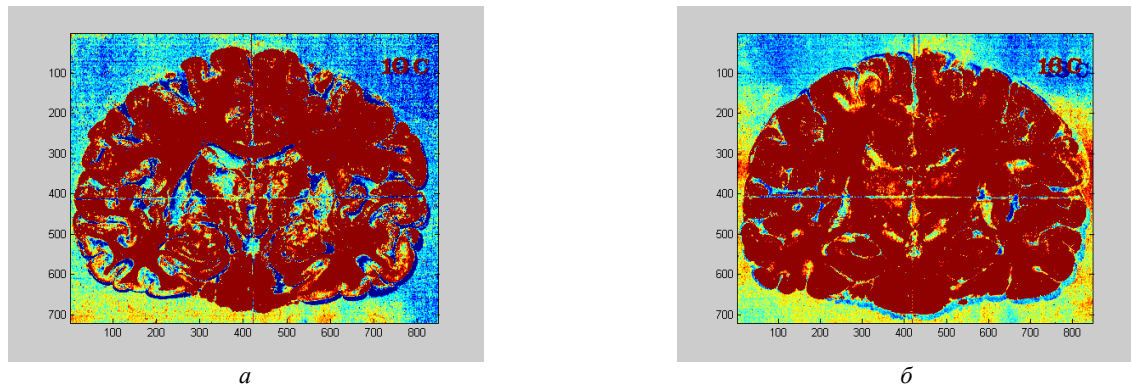


Рис. 3 – Результати роботи програми $brainz(z)$: $a - brainz(0,3)$ – переріз головного мозку площиною $z = 0.3$, тобто відновлено зображення тривимірного тіла між першою та другою томограмою; $b - brainz(0,9)$ – переріз головного мозку площиною $z = 0.9$, тобто відновлено зображення тривимірного тіла між четвертою та п'ятою томограмою.

Було виконано обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури серця людини, яка змінюється з часом.

Як експериментальні дані були використані:

1. $n = 25$ моментів часу;
2. $s = 9$ паралельних зрізів серця площинами, перпендикулярними осі Ox (метод дає змогу використовувати крім даних томограм також томограми, що лежать в інших перетинах, які не перпендикулярні осі Ox);
3. томограми серця, які лежать на $s = 9$ заданих площинах, у кожні з 25 моментів часу.

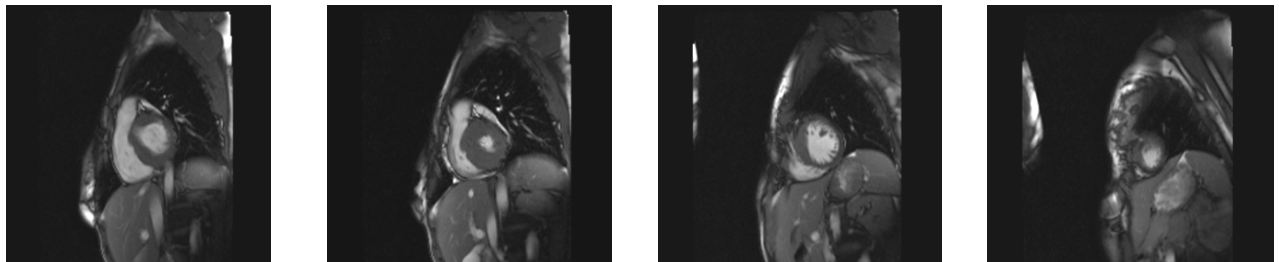


Рис. 4 – Приклади томограм, зроблених у момент часу t_1 , у перетинах: $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.5$, $x = 0.8$.

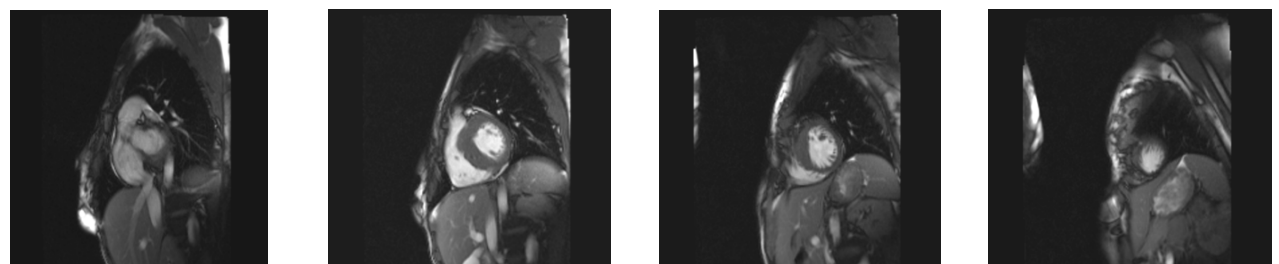


Рис. 5 – Приклади томограм, зроблених у момент часу t_9 , у перетинах: $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.5$, $x = 0.8$.

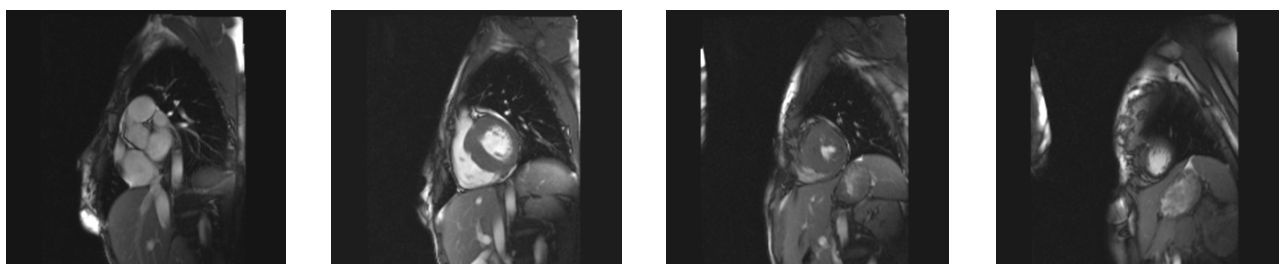


Рис. 6 – Приклади томограм, зроблених у момент часу t_{22} , у перетинах: $x = 0.1$, $x = 0.3$, $x = 0.5$, $x = 0.8$.

Отже, маємо 25 груп томограм. У кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 4 – 6 показано приклади томограм у різ-

ні моменти часу в одних і тих самих перетинах.

Для побудови тривимірних моделей використовувалися оператори інтерфлотації функцій трьох змінних [11]. Було побудовано 25 математичних моделей внутрішньої структури серця у вигляді функцій $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, 25}$, за допомогою операторів інтерфлотації функцій трьох змінних. Потім ці математичні моделі було використано при побудові 4D математичної моделі серця за допомогою операторів інтерполяції за змінною часу t .

За допомогою побудованої 4D математичної моделі знайдемо зображення серця людини в площині, яка задається рівнянням $x = a$, в конкретний момент часу $t = t_{\text{прогнозе}}$.

Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики MatLab. На рис. 7 – 9 наведено результати обчислювального експерименту.

Особливістю комп'ютерної реалізації запропонованого методу є необхідність дії на кожному з RGB компонент кольору окремо. Таким чином, у запропонованому методі здійснюється виділення окремих компонент кольору в заданій точці.

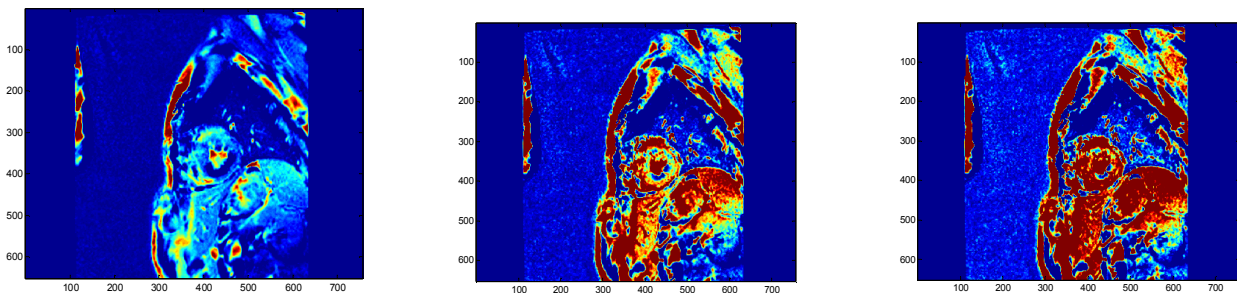


Рис. 7 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.6$ у моменти часу t_5, t_{12}, t_{20} відповідно.

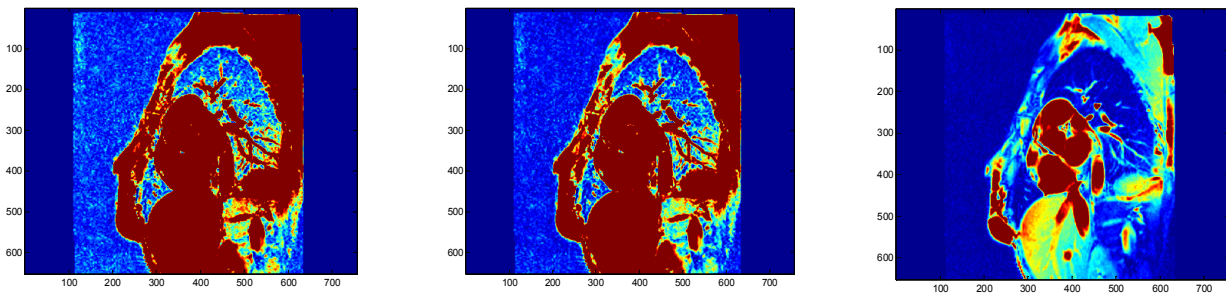


Рис. 8 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.1$ у моменти часу t_5, t_{12}, t_{20} відповідно.

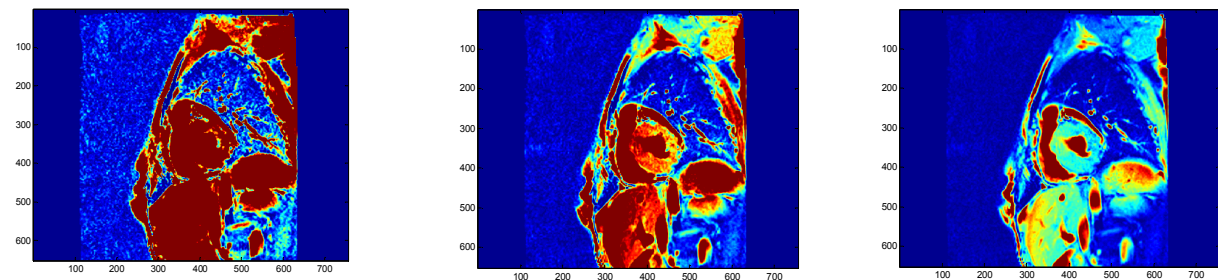


Рис. 9 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.3$ у моменти часу t_5, t_{12}, t_{20} відповідно.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними шляхи, пов'язані з побудовою математичних моделей динамічних тривимірних тіл. В подальшому планується розробити методи відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла з суттєвим використанням її неоднорідності.

Висновки. В роботі запропонований новий метод побудови чотиривимірної математичної моделі тривимірного тіла, що змінюється з часом, з використанням операторів інтерполяції або апроксимації за змінною часу t . Чотиривимірна модель будується на основі тривимірної моделі об'єкта, яка використовує оператори інтерфлотації або мішаної апроксимації функцій трьох змінних x, y, z . За допомогою побудованої чотиривимірної моделі знайдена математична модель об'єкта в конкретний момент часу $t = t_{\text{прогнозе}}$. В якості прикладу проведена

візуалізація об'єкту (серця людини) в площинах, заданих дослідником з використанням томограм, отриманих за допомогою магнітно-резонансного комп'ютерного томографу Siemens. Продемонстровані результати обчислювального експерименту.

Отримана 4D модель може бути використана не тільки для знаходження зображення об'єкту в заданому перерізі у фіксований момент часу, який не співпадає з експериментально заданими значеннями часу, але і для аналізу течії хвороби шляхом дослідження поведінки функції чотирьох змінних в залежності від часу та від просторових координат.

Список літератури

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften*. – Leipzig, Mathem. – Phys., 1917. – K1. – 69. – P. 262 – 267.
2. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетатії функцій. Монографія. – Харків : ХНУРЕ, 2008. – 160 с.
3. Першина Ю. І., Шилін О. В. Решение 3D-задачи компьютерной томографии по известным томограммам на системе произвольных плоскостей // *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук*. – Минск, 2017. – № 4. – С. 112 – 121.
4. Першина Ю. І., Шилін О. В. Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмми на системі довільних площин з використанням інтерфлетатії функцій // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6(1228). – С. 105 – 111.
5. Малозёмов В. Н., Сергеев А. Н., Григорьев М. И. Полиномы Бернштейна и Составные кривые Безье. – Санкт-Петербург, 2004. – 11 с.
6. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. Элементарные методы в экстремальных задачах. – СПб. : Изд-во ВВМ, 2020. – 160 с.
7. Jaffray D. A., Siewerdsen J. H., Wong J. W., Martinez A. A. Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy // *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* – 2002. – Vol. 53. – № 5. – P. 1337 – 1349. doi: 10.1016/s0360-3016(02)02884-5.
8. Orth R. C., Wallace M. J., Kuo M. D. C-arm cone-beam CT : general principles and technical considerations for use in interventional radiology // *J. Vasc Interv Radiol.* – 2008. – Vol. 19. – № 6. – P. 814 – 820. doi: 10.1016/j.jvir.2009.04.026.
9. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference, Part I*. – 2010. – P. 143 – 150. doi: 10.1007/978-3-642-15705-9_18.
10. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
11. Литвин О. М. Интерлинация функций та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

References (transliterated)

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften*. Leipzig, Mathem. – Phys., 1917, K1, 69, pp. 262–267.
2. Serhiiienko I. V., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Matematychnye modelyuvannya v komp'yuterniy tomografiyi z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy. Monografiya* [Mathematical modeling in computed tomography by interflattation function. Monograph]. Kharkiv, KhNURE Publ., 2008. 160p.
3. Pershyna Yu. I., Shilin O. V. Reshenie 3D-zadachi komp'yuternoy tomografii po izvestnym tomogrammam na sisteme proizvol'nykh ploskostey [Solution of a 3D computed tomography problem using known tomograms on a system of arbitrary planes]. *Izvestiya Natsional'noy akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk* [Bulletin of the National Academy of Science of Belarus. Series Physical and Technical Sciences]. Minsk, 2017, no. 4, pp. 112–121.
4. Pershyna Yu. Y., Shilin O. V. Chysel'na realizatsiya metodu vidnovlenniya vnutrishn'oyi struktury 3D tila za vidomymy yiyi tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy [Numerical implementation of the method of restoring the internal structure of a 3D body according to its known tomograms on a system of arbitrary planes using interflattation of functions]. *Visnyk Natsional'noho tekhnich-noho universytetu «KPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 6(1228), pp. 105–111.
5. Malozyemov V. N., Sergeev A. N., Grigor'ev M. I. *Polinomy Bernshteyna i Sostavnye krivye Bez'e* [Bernstein polynomials and Bézier composite curves]. Sankt-Peterburg, 2004. 11 p.
6. Malozyemov V. N., Masharskiy S. M. *Elementarnye metody v ekstremal'nykh zadachakh* [Elementary methods in extreme problems]. Sankt-Peterburg, Izd-vo VVM Publ., 2020. 160 p.
7. Jaffray D. A., Siewerdsen J. H., Wong J. W., Martinez A. A. Flat-panel cone-beam computed tomography for image-guided radiation therapy. *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* 2002, vol. 53, no. 5, pp. 1337–1349. doi: 10.1016/s0360-3016(02)02884-5.
8. Orth R. C., Wallace M. J., Kuo M. D. C-arm cone-beam CT : general principles and technical considerations for use in interventional radiology. *J. Vasc Interv Radiol.* 2008, vol. 19, no. 6, pp. 814–820. doi: 10.1016/j.jvir.2009.04.026.
9. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention : proceedings of the conference, Part I*. 2010, pp. 143–150.
10. Korneychuk N. P. *Splajny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
11. Litvin O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osnova Publ., 2002. 544 p.

Надійшла (received) 03.12.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.



Андренко Павло Миколайович (1947 – 2021)

ПІШОВ З ЖИТТЯ ВИДАТНИЙ ВЧЕНИЙ

26 січня 2021 року пішов з життя видатний вчений, доктор технічних наук, професор Андренко Павло Миколайович.

Він належав до плеяди педагогів і науковців, вся трудова діяльність яких була тісно пов'язана з «Харківським політехнічним інститутом». З 1965 року студент, згодом – асистент, доцент, професор кафедри «Гідропнеумоавтоматика і гідропривод» та кафедри «Деталі машин та мехатронних систем». 1977 року захистив кандидатську дисертацію в Варшавській Політехніці, 2009-го – докторську в НТУУ «КПІ».

Ним був зроблений істотний внесок в забезпечення солідного багажу знань не одного покоління випускників нашого вузу, підготовлено 5 кандидатів технічних наук. Багато часу Павло Миколайович приділяв індивідуальній роботі зі студентами, з якими отримував призові місця на Всеукраїнських конкурсах, опублікував 39 спільних праць.

Павлом Миколайовичем видано 8 навчальних посібників, в тому числі 2 з грифом МОН України, 43 методичні вказівки.

На базі проведених досліджень вчений опублікував понад 240 друкованих робіт, в тому числі 3 монографії, 18 робіт – у міжнародних періодичних виданнях, 33 авторські свідоцтва та патенти України. Завдяки своїй активній діяльності успішно керував виконанням важливих проектів. У результаті цих розробок було створено цілий ряд пристроїв та систем керування технологічним обладнанням.

Павло Миколайович був членом двох спеціалізованих вчених рад із захисту докторських дисертацій, членом правління Міжнародної асоціації спеціалістів промислової гідравліки і пневматики та членом редколегії Всеукраїнського науково-технічного журналу «Промислова гідравліка і пневматика».

Незважаючи на свою зайнятість, він завжди залишався уважною і чуйною людиною по відношенню до своїх численних колег і учнів. Сьогодні з нами немає цього талановитого вченого. Біль втрати і усвідомлення справжньої глибини втрати для науки і суспільства ще не раз повернеться до нас. Сумуємо у зв'язку з кончиною Андренко П.М., висловлюємо глибокі співчуття рідним і близьким.

Вічна і світла пам'ять нашому колезі і другу.

Колектив ННІ МІТ.

Памяти профессора Павла Николаевича Андренко

Я печатаю эти строки, когда с момента гибели Павла Николаевича от коронавирусной чумы прошло менее двух недель. И прошу те силы, которые забрали его светлую душу на небо, направить ее в рай.

Согласно христианской традиции в эти дни мы должны часто вспоминать усопшего. Я поделюсь своими воспоминаниями с теми, кто знал Павла Николаевича меньше меня, а его близкие люди вспомнят свое.

Мы познакомились в памятную моему поколению Чернобыльскую весну 1986 года на крыше студенческого общежития, которое на Алексеевке достраивал машфак; я смолит крышу, а он пришел руководить стройкой по поручению партбюро. Так получилось, что вскоре на этой стройке я здорово помог Павлу Николаевичу (сказался опыт стройотрядов), и после этого случая мы стали добрыми друзьями на всю оставшуюся жизнь.

Позже мы много раз выручали друг друга, помогая своим ученикам-подмастерьям, которых у нас всегда было больше, чем в официальной статистике. Мы неоднократно по несколько лет разрабатывали общие научные темы, которые открывал Павел Николаевич, а я был ведомым; в результате у нас появилось более десятка совместных статей. Я видел: ему нужен математик, чтобы объяснить свой результат для других. Но для него ответ открывался сразу; такое качество у современных ученых встречается редко, тут нужен врожденный талант, который, не надеясь на помощь компьютерных технологий, далее развивается годами упорного труда.

Я понимал, что мне приходится общаться с профессионалом, и получал от этого общения удовольствие. Павел Николаевич получил прекрасное образование на энергомаше ХПИ, но продолжал учиться новому всю свою жизнь и не стеснялся этого. Он штудировал научную периодику. Он был знаком со многими корифеями своей науки, приглашал их на защиты и конференции в Харьков, где с достоинством представлял наш город и институт. Он был счастливым человеком, потому что всю жизнь занимался своим, важным и интересным, делом.

Я благодарен Павлу Николаевичу за то, что он приобщил меня к задачам технической гидравлики. Мы перешли с ним множество задач, в которых рассматривались насущные земные проблемы по добыче нефти с больших глубин, по подаче строительных смесей по шлангам бетононасосов, по уменьшению пульсаций давления жидкости в городских сетях, и так далее. Если бы не этот опыт и уверенность, что всегда смогу воспользоваться его консультацией или библиотекой, я бы не решился заниматься расчетами гидропневмоавтоматики для ракетно-космической техники. Теперь приобретен новый опыт, но дальше придется плыть самому.

Кроме глубочайшего профессионализма меня всегда привлекала в нем мягкая деликатность суждений и воспитанность чувств, свойственная отечественной интеллигенции. Он был истинным патриотом Украины, у которого никогда не было и не могло быть другой родной земли. Но Павел Николаевич был мудрым человеком и прекрасно понимал, что в том вавилонском столпотворении больших и малых народов, которым является наш Город, любая национальная революция приведет к одной общей беде. «Главное, чтобы мы с тобой сейчас не разругались» – не раз повторял он мне. Мы не разругались, и строили общие научные планы на будущее. Но тут пришла настоящая беда, откуда не ждали. Это не справедливо, и мне очень жаль...

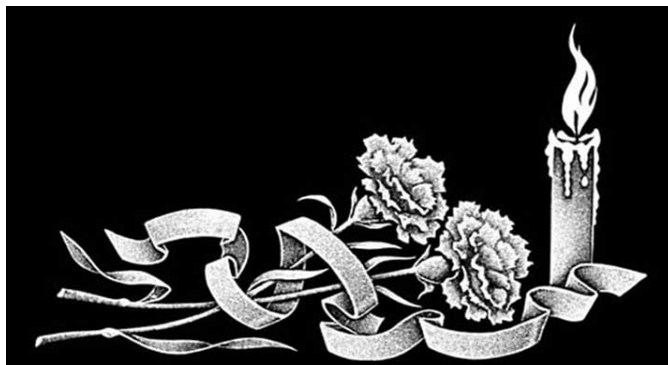
Последняя встреча с Павлом Николаевичем произошла накануне нового 2021 года. Он буквально «летел» по территории института, физически выглядел полностью восстановившимся от последствий пережитого инсульта, и в пору было увеличивать нагрузку. Но его настроения не понравились. «Нет, новых аспирантов я брать не буду... И вообще, я от всего устал и планирую уходить из института... В этот раз уйду навсегда». Вот и накликал беду. Некоторые вещи не нужно подсаживать Богу, да и думать о них грешно...

Эта мудрость, скорбь и осознание непоправимой утраты нужны не мертвым, они нужны для живых. Профессор продолжает жить в своих детях, внуках и учениках, которым он передал частицу своей души.

Павел Николаевич был постоянным автором нашего журнала; в редколлегии его любили и сейчас скорбят об утрате вместе со мной. Мы задержали очередной выпуск журнала, чтобы напечатать этот некролог. К глубокому сожалению, это единственная форма траурных почестей, которую мы сможем выказать своему любимому автору. Но на такую привилегию у нас не вправе рассчитывать ни один король.

Выражаем глубокие соболезнования жене, родным и близким покойного.

Александр Григорьев



Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1 ' 2020.

А. Л. ГРИГОРЬЕВ**АКТУАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МОДЕРНИЗАЦИИ И КОМПЬЮТЕРИЗАЦИИ КУРСА
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВЕДУЩИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ УКРАИНЫ**

С позиции профессиональной критики, заинтересованной в получении лучшего результата, проанализировано современное состояние учебного курса высшей математики в технических университетах Украины. Отмечено несоответствие между излагаемыми в нем классическими (аналитическими) методами решения задач и компьютерными (численными либо численно-аналитическими) методами, которые используются в актуальной практике инженерных расчетов. Для устранения указанной проблемы предлагается ввести в учебный курс наряду с лекциями и практическими занятиями третью компоненту обучения – циклы лабораторных работ по высшей математике при использовании персональных компьютерах. Лабораторные работы призваны продемонстрировать студентам младших курсов, изучающих высшую математику, способность решать при помощи ее методов реальные задачи из приложений к технике и физике. Кроме того, в форме лабораторной работы изучаются отдельные разделы инженерного курса высшей математики, которые в силу недостатка времени и других, часто субъективных, причин в последнее время выносятся на факультативное обучение (дифференциальная геометрия плоской и пространственной кривой, поверхности второго и высших порядков, практический гармонический анализ, многокритериальная оптимизация, и ряд др.). Для обеспечения указанной модернизации предлагается разделить общий курс высшей математики на два потока (векторный анализ и скалярный анализ) и увеличить число аудиторных занятий до 32 – 36 часов в неделю, то есть до уровня ведущих технических университетов мира. Кроме того, курс математики согласовывается с курсом информатики, где в приоритетном порядке студентов первого курса учат работать в диалоговой компьютерной среде MathCAD. А, чтобы реформа прошла без привлечения дополнительных средств на зарплаты, предлагается увеличить учебную нагрузку преподавателей высшей математики и информатики на 30 % (что компенсируется уменьшением нагрузки по научной работе и другим видам деятельности).

Ключевые слова: учебный курс высшей математики, компьютеризация курса, лабораторные работы на компьютерах, распределение учебной нагрузки, векторный и скалярный анализ, диалоговая компьютерная среда.

О. Л. ГРИГОР'ЄВ**АКТУАЛЬНІ НАПРЯМКИ МОДЕРНІЗАЦІЇ ТА КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЇ КУРСУ ВИЩОЇ
МАТЕМАТИКИ В ПРОВІДНИХ ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ УКРАЇНИ**

З позиції професійної критики, зацікавленої в отриманні кращого результату, проаналізовано сучасний стан навчального курсу вищої математики в технічних університетах України. Відзначено невідповідність між класичними (аналітичними) методами вирішення завдань, що викладаються в ньому, і тими комп'ютерними (чисельними або чисельно-аналітичними) методами, які використовуються в актуальній практиці інженерних розрахунків. Для усунення зазначеної проблеми пропонується ввести в навчальний курс поряд з лекціями і практичними заняттями третю компоненту навчання, а саме цикли лабораторних робіт з вищої математики при використанні персональних комп'ютерів. Лабораторні роботи покликані продемонструвати студентам молодших курсів, які вивчають вищу математику, здатність вирішувати за допомогою її методів реальні завдання з додатків до техніки і фізики. Крім того, в формі лабораторної роботи вивчаються окремі розділи інженерного курсу вищої математики, які в силу браку часу і інших, часто суб'єктивних, причин останнім часом виносяться на факультативне навчання (диференціальна геометрія плоскої і просторової кривої, поверхні другого і вищих порядків, практичний гармонійний аналіз, багатокритеріальна оптимізація, і ряд ін.). Для забезпечення зазначеної модернізації пропонується розділити загальний курс вищої математики на два паралельні потоки (векторний аналіз і скалярний аналіз) і збільшити число аудиторних занять до 32 – 36 годин на тиждень, тобто до рівня провідних технічних університетів світу. Крім того, курс математики узгоджується з курсом інформатики, де в пріоритетному порядку студентів першого курсу вчать працювати в діалоговому комп'ютерному середовищі MathCAD. А, щоб реформа пройшла без залучення додаткових коштів на зарплати, пропонується збільшити навчальне навантаження викладачів вищої математики та інформатики на 30 % (що компенсується зменшенням навантаження з наукової роботи та інших видів діяльності).

Ключові слова: навчальний курс вищої математики, комп'ютеризація курсу, лабораторні роботи на комп'ютерах, розподіл навчального навантаження, векторний і скалярний аналіз, діалогове комп'ютерне середовище.

A. L. GRIGORIEV**CURRENT DIRECTIONS OF MODERNIZATION AND COMPUTERIZATION OF THE COURSE
OF HIGHER MATHEMATICS IN THE LEADING TECHNICAL UNIVERSITIES OF UKRAINE**

From the standpoint of professional criticism, interested in obtaining the best result, the current state of the educational course in higher mathematics at the technical universities of Ukraine is analyzed. A discrepancy between the classical (analytical) methods presented in it and the computer (numerical or numerical-analytical) methods that are used in the current practice of engineering calculations is noted. To eliminate this problem, it is proposed to introduce into the training course, along with lectures and practical classes, the third component of training - the cycles of laboratory practicums in higher mathematics using personal computers. Laboratory practicums are designed to demonstrate to junior students studying higher mathematics the ability to solve real problems from applications to technology and physics using its methods. In addition, in the form of laboratory practicums, individual sections of the engineering course of higher mathematics are studied, which, due to lack of time and other, often subjective, reasons, have recently been taken out for optional learning (differential geometry of a plane and spatial curve, surfaces of the second and higher orders, practical harmonic analysis, multi criteria optimization, and a number of others). To ensure this modernization, it is proposed to divide the general course of higher mathematics into two streams (vector analysis and scalar analysis) and to increase the number of classroom lessons to 32 – 36 hours per week, that is, to the level of the world's leading technical universities. In addition, the mathematics course is coordinated with the computer science course, where, in a priority order, first-year students are taught to work in the MathCAD interactive computer environment. And in order for the reform to take place without attracting additional funds for salaries, it is proposed to increase the teaching load of teachers of higher mathematics and computer science by 30 % (which is compensated by a decrease in the load on scientific work and other activities).

Key words: educational course of higher mathematics, course computerization, laboratory practicums on computers, distribution of teaching load, vector and scalar analysis, interactive computer environment.

Введение и общая характеристика рассматриваемой проблемы. Работа над этой статьей проходила на фоне развивающейся пандемии коронавирусной инфекции, когда в системе управления обществу на первые

©А. Л. Григорьев, 2020

роли, отгеснив чиновников, вышли санитарные врачи. Поэтому ее автор, который никогда не был чиновником и больше доверял врачам, вовремя вспомнил о главном принципе медицины (*non nocere – не навреди больному*, лат.) и решил, что данный принцип носит универсальный характер. В результате, после чистового редактирования текста статьи, самые острые углы были сглажены, а оценочные суждения сокращены до минимума (полностью отказаться от них было нельзя, потому что предмет данной статьи – это не отчет о проделанной работе, а обоснование планов на будущее). В то же время я понимал, что сам факт признания болезни в той особенно чувствительной области, которая упомянута в заголовке статьи, и утверждения автора о необходимости ее оперативного лечения (потому что сама не пройдет!), у многих моих коллег по «преподавательскому цеху» вызовет болезненные реакции. У одних – нервное раздражение, а у некоторых – рефлекторное сопротивление и отталкивание. Потому что в нашей среде уже давно сложились и господствуют определенные стереотипы относительно целей учебного курса высшей математики и методов, которыми должны достигаться эти цели. И, надо признать, что очередной пролонгации этих догм, в том числе, способствовали учебники [1 – 5], составленные ранее при моем участии. Но, в свое оправдание скажу, что в те времена проблема не была столь острой, а до понимания эффективных методов ее лечения тогда я еще не дорос.

Основная цель упомянутых учебников, как и тех, по которым в свое время учился и я на научно - производственном отделении харьковского мехмата, – обучение студентов аналитическим методам расчета для решения прикладных задач. Я хорошо помню, как выполнялись эти расчеты на инженерных кафедрах ХПИ в конце семидесятых и начале восьмидесятых годов прошлого столетия. Когда преподавателями, научными сотрудниками и аспирантами повсеместно использовалось

- разложение в ряды,
- линеаризация и аналитическое решение систем дифференциальных уравнений,
- нахождение экстремумов при помощи производных

и другие классические методы скалярного и векторного анализа, которым мы учим студентов и сейчас.

Но уже во второй половине восьмидесятых, а далее все чаще и чаще, эти задачи стали решать численно-аналитическими либо численными методами, использующими растущие возможности компьютерной техники. Причем после освоения новых методов возвращение к прежним расчетным схемам (которые в прикладной механике использовались и шлифовались десятилетиями!) выглядело очевидным анахронизмом. Более того, инженеры пошли дальше и стали, например, с успехом применять в своей практике численные методы для решения сложных и актуальных задач многомерной газовой и гидродинамики, с учетом турбулентного трения и ударных волн, где адекватных аналитических методов не существовало ранее и не могло быть создано в принципе.

Сопоставляя аналитический и численный метод решения некоторой задачи, обычно не забывают попрекнуть второй метод в том, что он приближенный, а первый метод хвалят за *исчерпывающую точность*. Я согласен, что именно такая точность нужна для задач небесной или квантовой механики, когда контролируют значения фундаментальных констант физики, но во всех остальных случаях 15-ти значащих цифр ответа достаточно. И такую малую погрешность гарантирует сейчас рядовой пакет компьютерных программ, например, диалоговая среда MathCAD, поэтому упомянутый выше упрек устарел. Использование современных компьютеров (даже персональных) обеспечивает решение инженерных задач не только за кратчайшее время, но и с высочайшей точностью, что не менее важно. Однако, и в этих условиях эффективность численного метода зависит от качества алгоритма, то есть от уровня использованных в нем традиционных навыков и новых идей.

Что касается аналитических методов, то они эффективнее численных лишь в том случае, если приводят к формуле для ответа (либо к так называемой *квадратуре*, которую не удастся выразить через *элементарные или специальные функции*). К сожалению, для реальных инженерных задач аналитический метод применим только лишь после их упрощения, например, после линеаризации, которая вносит свою погрешность. Там, где не работает *принцип линейной суперпозиции решений*, аналитические методы, как правило, не используют.

Чтобы не быть голословным, я приведу показательный пример из области расчета так называемых *многозвенных рычажных механизмов* (рис. 1). Положения $x_1, x_2, \dots, x_n$ рычагов и шарниров в этом механизме зависели от угла φ поворота кривошипа и определялись из системы нелинейных уравнений

$$\{F_j(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

как зависимости вида

$$x_j = f_j(\varphi), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Причем часть функций $f_j(\varphi)$ имела чрезвычайно громоздкие формулы, а другая часть вообще не имела формульного описания, а вычислялась по итерационному алгоритму, который реализовывался для каждого угла φ из конечного набора равноотстоящих углов

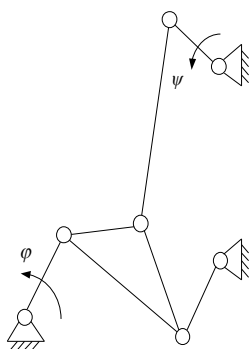


Рис. 1 – Четырехзвеновик Чебышева.

$$\varphi_k = k \cdot \Delta\varphi, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad \Delta\varphi = 2\pi / m; \quad m \in \{36, 72, 120\}.$$

Следовательно, продифференцировать аналитическим методом полученные таким способом зависимости (2) было невозможно, а приближенные формулы Лагранжа

$$\frac{dx_j}{d\varphi} \approx \frac{f_j(\varphi + \Delta\varphi) - f_j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}, \quad \frac{d^2x_j}{d\varphi^2} \approx \frac{f_j(\varphi + \Delta\varphi) + f_j(\varphi - \Delta\varphi) - 2f_j(\varphi)}{\Delta\varphi^2} \quad (3)$$

имели (из-за крупного шага $\Delta\varphi$ и погрешностей итерационного алгоритма) недопустимо низкую точность, особенно – для второй производной.

Поэтому для нахождения скоростей $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ и ускорений $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n$ был разработан графо-аналитический метод решения, при котором строились так называемые *векторные планы скоростей и ускорений* в специально выбранных точках. Этот метод использовался в инженерной практике и в учебном курсе теории механизмов и машин на протяжении ста лет (!). И можно понять, насколько трудно было преподавателям избавиться от этого стереотипа и соответствующих навыков, полезность которых буквально обнулилась после того, как проф. А. А. Грунауэр [6], столетний юбилей которого его ученики отметят осенью этого года, в конце 1980-х годов предложил другое решение.

Чтобы пояснить суть предложения, замечу, что алгоритм решения системы (1), и после использования компьютеров, для сложных механизмов оставался трудоемким, но существенно (на много порядков) уменьшилась погрешность результата вычисления функций $f_j(\varphi)$.

Поэтому в *методе Грунауэра* система (1) решается не только для очередного узла φ_k , где выполняется визуализация всех интересующих характеристик движения механизма, но и для двух близких углов

$$\varphi_k \pm \delta\varphi, \quad \text{где } \delta\varphi = 0.001 \cdot \Delta\varphi,$$

а скорости и ускорения звеньев определяются по формулам Лагранжа

$$\frac{dx_j}{d\varphi} \approx \frac{f_j(\varphi + \delta\varphi) - f_j(\varphi - \delta\varphi)}{2\delta\varphi}, \quad \frac{d^2x_j}{d\varphi^2} \approx \frac{f_j(\varphi + \delta\varphi) + f_j(\varphi - \delta\varphi) - 2f_j(\varphi)}{\delta\varphi^2},$$

но шаг $\delta\varphi$ изменения аргумента теперь малый, и погрешности вычисления числителей малы, что обеспечивает необходимую точность результата.

Указанный метод стал отправной точкой для компьютеризации других разделов курса теории механизмов и машин, который сейчас выглядит современно и больше не вызывает у студентов недоуменных вопросов –

«Скажите, а где это используется?».

Свой путь в том же направлении прошли и многие другие инженерные кафедры ХПИ, но преподаватели кафедры высшей математики, которые начали это движение раньше других, в силу ряда объективных и субъективных причин так и остались стоять на старте.



Александр Адольфович
Грунауэр
(1921 – 2013)

«А казачок-то засланный!». В 1980-ые годы я работал у проф. А. А. Грунауэра, где занимался разработкой методов динамического анализа сложных механических и гидромеханических систем, для чего использовал численные и численно-аналитические методы расчета. Напомню, что численно-аналитический метод применим только лишь для линейных либо линеаризованных математических моделей; в первом случае коэффициенты уравнений – это постоянные числа, а после линеаризации они могут быть известными функциями времени t . Причем для дискретных моделей он приводит к ответу, использующему блочные матрицы и матричную экспоненту $\exp(A \cdot t)$ либо мультипликативный интеграл

$$\int_0^t \exp(A(\tau)) \cdot d\tau = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau = t/n}} \prod_{j=1}^n \exp(A(j \cdot \Delta\tau) \cdot \Delta\tau).$$

А в случае дискретно-континуальных моделей ответ содержит также и линейные интегральные операторы с известными ядрами типа Коши или Фредгольма,

$$\int_0^t K(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad \text{и} \quad \int_0^T K_T(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad K_T(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} K(t-\tau+j \cdot T), & \tau \leq t; \\ \sum_{j=1}^{\infty} K(t-\tau+j \cdot T), & \tau > t, \end{cases}$$

где первый интеграл описывал переходный процесс (неустановившиеся колебания), а второй – установившиеся

колебания, возникающие при кинематическом возбуждении $x(t)$ с периодом повторения T .

Для практической реализации таких ответов (то есть доведения их до конкретного числа, таблицы или графика) требовался компьютер. Заниматься такими вещами было интересно, и это приносило реальную пользу, но в начале 90-ых годов, после защиты диссертации, я решил вернуться к своей первой профессии и стать преподавателем высшей математики.

У профессора были свои планы, и он долго противился моему уходу, потому что успел в середине восьмидесятых годов приобрести негативный опыт общения с руководством кафедры высшей математики, которое не желало прислушиваться к советам по корректировке методики преподавания и учебных планов. Но потом согласился, поставив условие – «Ладно, иди и разберись, что там к чему, но обещай: если что-то пойдет не так, то вмешаешься и исправишь». Я пообещал, и, через много лет уже и не думал, что придет время исполнять обещанное, но судьба распорядилась иначе. Поэтому, опубликовав эту статью и объяснив свою позицию, я выполняю первую часть обещания. Но дальше все зависит от позиции коллег. Если они это начинание не поддержат, то исправить ситуацию не удастся, реформы останутся на бумаге, а учебный курс высшей математики продолжит деградировать, теряя очередные разделы, и, вместе с коллективом кафедры, сжимаясь в точку.

Попытаюсь проиллюстрировать эту же мысль, моделируя гипотетическое, но конкретное развитие негативных событий. Например, отдадут на закание теорию поля и скажут примерно следующее:

«да кому она сейчас нужна ... она последняя в списке разделов нашего курса ... а многие и раньше обходились без нее ... учебному курсу нужна унификация, а не развивающие реформы умствующих».

Я так считаю, что если нечто подобное произойдет, то в следующий раз обойдутся и без всех нас. Поэтому нам, коллеги, отступать больше некуда, да и незачем, потому что правда воюет на нашей стороне.

Замечу, что в этом тексте я буду и дальше в основном ссылаться на опыт (и проблемы) преподавания высшей математики для инженерных специальностей (то есть для будущих электриков, механиков, технологов) НТУ «ХПИ», потому что за тридцать лет преподавательской работы изучил его досконально. Кроме того, среди технических университетов Украины наш вуз является признанным флагманом, занимая лидерскую или призовую позицию в любом рейтинге, и если что-то удастся изменить в лучшую сторону здесь, то это станет примером подражания для многих.

Цель и основная задача реформы. Отрадно видеть, что и в мировых рейтингах НТУ «ХПИ» уверенно занимает лидирующие позиции среди технических университетов Украины. Роль лидера обязывает не останавливаться на достигнутом результате, а вести поиск новых путей, по которым потом пойдут другие. При этом мы имеем право, в рамках компетенции, принимать самостоятельные решения и не связывать себе руки межвузовскими соглашениями, которые были подписаны давно и носили рекомендательный характер.

Признаю, что достижение лидерства в большей мере заслуга выпускающих кафедр. Однако, фундамент для нашего будущего успеха (или неудачи) закладывается на младших курсах бакалаврата, где со студентами в основном работают преподаватели общих кафедр. Я уже тридцать лет работаю преподавателем кафедры высшей математики, и около пятнадцати лет в специализированных советах по защита диссертаций в технических науках. Участвуя в заседаниях совета, являюсь очевидцем того,

насколько сильно за эти годы вырос математический уровень кандидатских и докторских диссертаций;

практически каждая современная работа содержит оригинальную математическую модель, раскрывающую свойства анализируемого устройства или процесса. Сейчас уже никто не оспаривает тот факт, что углубленное математическое моделирование, опирающееся на традиционно прочный фундамент точных наук – это огромный козырь харьковской технической науки и единственный шанс пережить лихолетье, чтобы с новыми силами возродиться к новой жизни, за что мы стояли и стоять будем.

Чтобы наши студенты смогли воспользоваться этим шансом, их нужно целенаправленно учить искусству математического моделирования в технике и технологиях, начиная с решения простейших задач на младших курсах бакалаврата и постепенно наращивая их сложность и реалистичность. Но в прежние времена выпускники харьковского мехмата этому искусству не обучались, а для части из них эта сторона преподавательского ремесла осталась не освоенной и во взрослой жизни. Поэтому объективные требования времени преломляются в наших планах, как в кривом зеркале, а руководство кафедры (если судить по темпам деградации учебного плана) живет по известному принципу – «Того, что еще осталось, на наш век хватит, а после нас хоть потоп». Знаю, что такое происходит не только в НТУ «ХПИ», и никого не осуждаю за это. Сложись жизнь иначе, и сам мог оказаться в аналогичном положении. Надеюсь, что ума и благоразумия у этих наших коллег хватит, чтобы уступить лыжню другим.

За время моей работы преподавателем, и об этом приходится говорить с горечью и недоумением, уровень учебного курса высшей математики изменился в прямо противоположную сторону; число аудиторных занятий сократилось в полтора и более раз, что привело к вынужденному упрощению и выхолащиванию содержания практически всех его разделов. Но главная проблема состоит в другом:

этот курс, как и 30 лет назад, учит аналитическим методам решения задачи (чернилами на бумаге), а современные инженеры, как правило, используют численные методы с применением компьютера.

Поэтому новый заведующий кафедрой высшей математики, прежде всего, должен будет ликвидировать

возникшие «ножницы», и ввести в учебный курс компьютерную компоненту (например, лабораторные работы на компьютерах, демонстрирующие эффективность применения математических методов для решения реальных задач). Если он с этим не справится, то сокращение курса продолжится, и сожалеть об этих потерях не стоит.

Но для решения этой проблемы ему, скорее всего, понадобится дополнительное число аудиторных занятий. И тут мы приблизились к основной и наиболее трудной теме реформы. В соответствии с КЗОТ и законом о высшем образовании учебная неделя студента дневного обучения составляет 54 академических часа, или 40,5 астрономических часов в неделю. Из них часть приходится на аудиторные занятия, а остальное – на СРС (самостоятельную работу студента). В разные времена эти части были разными. Когда я учился в ХГУ, аудиторные занятия составляли 42 акад. часа в неделю, а на первом курсе к ним добавляли еще 8 часов обязательной самоподготовки под присмотром старшекурсников. Очень высокой эта часть нагрузки была в те же годы и в ХПИ. Но, с течением времени, эта пропорция изменялась в сторону увеличения доли СРС, и после присоединения к Болонской хартии европейских университетов аудиторная нагрузка упала в ХПИ до 26 часов.

Для сравнения я «заглянул» через Интернет в учебное расписание БГТУ (г. Минск) и МГТУ им. Баумана (г. Москва), которые занимают первые места в рейтингах технических университетов РБ и РФ, соответственно. И с удивлением обнаружил, что *учебная неделя на первом и втором курсе там составляет 36 и 32 акад. часа*. Я спросил своего сына, который получил второе высшее образование в престижном немецком университете, а сколько часов в неделю учился он? Ответ был тот же – *36 акад. часов*. Причем

упомянутые университеты подписали Болонскую хартию, и это, тем не менее, не заставило их резать учебные планы там, где этого делать не нужно.

Объясню, почему этого не нужно было делать на младших курсах НТУ «ХПИ», и еще не поздно переиграть.

- Наши первокурсники имели школьную нагрузку по 7 – 8 уроков в день, и к самостоятельной работе в таких же объемах, без участия преподавателей, не привыкли. Но и к своим преподавателям на 10 – 14 дополнительных пар консультаций в неделю они ходить не будут, что очевидно.
- К тому же они, как правило, на 2 – 3 года моложе европейских (немецких) студентов, и это еще дети.
- Кроме того, практически все первокурсники и большинство студентов 2-го курса продолжают жить за средства родителей (+ стипендия), и у них нет необходимости использовать время СРС для заработка.
- В нашем институте в последние годы пустует (во вторую смену) большое количество аудиторий.

Болонскую хартию в Европе многие считают ошибкой, потому что унификация высшего образования уничтожила самобытность знаменитых университетов, которые имели многовековую историю. Дошло до того, что, как утверждают, уже и сам Болонский университет отозвал свою подпись под этим документом. Но я не предлагаю заниматься казуистикой, поскольку отозвать подпись сложно, это займет много времени и вызовет никому не нужный скандал в МОН. Тем более, как показывает опыт соседей,

к этой беде можно приспособиться и спокойно работать со студентами, по крайней мере, на младших курсах, столько, сколько это нужно для дела.

Дополнительные (но не второстепенные!) задачи реформы. Вместе с уменьшением аудиторной нагрузки у студентов за эти же годы существенно снизилась учебная нагрузка преподавателей кафедры высшей математики и других общих кафедр; сейчас она такая же, как и на выпускающих кафедрах. Но резко возросли требования к показателям научной работы, и рядовому преподавателю общей кафедры в возрасте 45+, даже имеющему степень кандидата наук, выполнить эти нормативы практически не возможно. Пока что выручают переводы на английский язык своих прежних работ, но такую деятельность трудно назвать научной. Если человек не связан с реальным производством и занимается исследованиями в области фундаментальных наук, то для него опубликование 1 или 2 оригинальных статей в год – это предел, выше которого не прыгнешь. Ранее, когда учебная нагрузка доцента составляла около 900 часов в год, таких публикаций было достаточно, но когда она снизилась до 600 часов, а «расценки» за статьи урезали в три и более раз, то вместо продуктивной научной работы ему приходится использовать так называемую пятую форму деформации – *выкручивание*.

К сожалению, те комиссии, которые составляют нормативные документы по разным видам нагрузки преподавателя, не делают различия между выпускающей и общей кафедрой. Реформа, которая предлагается в этой статье, снимет остроту проблемы; но, чтобы такие рецидивы не возникали вновь, желательно, чтобы общие кафедры имели в ректорате в лице одного из проректоров представителя и защитника своих интересов. Которые, по объективным причинам, отличаются от интересов выпускающих кафедр.

Из многолетнего общения со студентами-электриками первого и второго курса я выяснил, что работе на персональном компьютере в современной диалоговой среде (типа MathCAD) их ни в школе, ни в институте не учат, и такими навыками владеют единицы. В магистратуре преподаватели выпускающих кафедр, которые читают основы математического моделирования, вынужденно учат их, по своему усмотрению, Маткаду или Матлабу. То есть, они, во-первых, повторяют печальный опыт строителей Вавилонской башни и, во-вторых, по современным представлениям, делают это слишком поздно. В американском университете первокурснику вместе с учебной литературой в библиотеке скачивают на ноутбук определенную версию Маткада, которой пользуется весь институт. Студента с первых дней учат работать в этой компьютерной среде, и далее он использует ее на

всех предметах, где приходится вычислять или строить графики. Многие продолжают использовать Маткад и после окончания университета. Если в ходе выполнения своей реформы нам удастся перенять этот опыт, то такое дорогое стоит.

Завершая агитационную часть статьи, я хочу подчеркнуть то, что, на мой взгляд, является самым важным аргументом в пользу этой реформы. Если она будет реализована, то в багаже знаний наших будущих выпускников значительно усилится фундаментальная компонента, и достигнутый результат, как и ранее, можно будет называть

классическим инженерным образованием.

Именно такое образование много лет назад получали в ХПИ и теперешние его руководители, что потом здорово помогло в их дальнейшей жизни. К сожалению, на том суррогате знаний по фундаментальным дисциплинам, которым мы вынужденно пичкаем сейчас своих студентов на большинстве инженерных специальностей, далеко не уедешь и высоко не взлетишь. И лучшим из них, если жизнь заставит, придется добирать недополученные знания в режиме самообразования, что трудно и малоэффективно.

Направления модернизации курса. Учебный курс высшей математики в техническом университете традиционно решал две основные задачи:

- знакомил студентов с новой для них терминологией и общими научными принципами, используемыми во всех курсах точных и прикладных наук (такими, как *матрица, определитель, комплексное число, дифференциал, дифференциальное уравнение, ряд, частная производная, кратный интеграл, градиент, векторное поле, потенциал, линеаризация, суперпозиция, линейный оператор, оптимизация*, и т.д.);
- учил студентов математическим методам решения практических задач, с которыми они встретятся на старших курсах обучения и на производстве (напр., в конструкторских бюро).

Как видим, *первую задачу* и в наше время никто не отменял, а с ее решением лучше всех могут справиться преподаватели, получившие профессиональную подготовку по математике.

Для примера: я всегда стремлюсь научить арифметике комплексных чисел раньше, чем за это же дело возьмутся мои коллеги с других кафедр, потому что знаю – придется переучивать и долго бороться с тяжелым «акцентом». К сожалению, это не удастся проделать с кратными интегралами, где физики опережают нас на два семестра. В свое оправдание замечу, что проблема отставания по кратным интегралам остается актуальной для большинства технических университетов мира, потому что математиков ограничивает

принцип логического единства курса,

и никто из них не хочет прославиться как нарушитель этой догмы. Именно догмы, потому что, например, в средней школе начальные понятия дифференциального и интегрального исчисления уже были проговорены, и по этим разделам мы занимаемся повторением пройденного, пусть и на более высоком уровне.

Повторение – это мать учения,

и если мы в каких-то вопросах вынуждены забегать вперед, нарушая линейный порядок, то всегда можно найти выход, и объяснить необходимое понятие другими (но правильными!) словами.

Так, в силу причуд учебного плана, я уже много лет вынужден преподавать комплексный анализ раньше, чем криволинейные интегралы по координатам, поэтому теорию интеграла от функции $f(z)$ по спрямляемому пути γ в комплексной плоскости рассматриваю как тривиальное продолжение теории *определенного интеграла Римана*,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0, \\ \bigcup_k \gamma_k = \gamma, \gamma_k = [z_k, z_{k+1}]}} \sum_k f(\xi_k \in \gamma_k) \cdot (z_{k+1} - z_k),$$

и не трачу золотое лекционное время на повторное обоснование его свойств.

Эту и подобные ей проблемы можно решить более эффективно (с меньшими издержками), если разбить общий курс высшей математики на *скалярный анализ* и *векторный анализ* [2], которые будут читаться параллельно (табл. 1), причем разными преподавателями с противоположными типами мышления – так называемыми *аналитиками* и *геометрами*. В конце данной статьи я вернусь к анализу этой идеи, и, в качестве примера для подражания, покажу, как она была реализована в одном из самых известных университетов Европы – МГТУ им. Н. Э. Баумана. Еще недавно я считал, что в нашей стране время для таких экспериментов не наступило, поэтому выдвигать (либо поддерживать) данное предложение я пока что не буду, просто напоминаю коллегам об его существовании. Но, изучив удачный опыт зарубежных (американских и европейских) коллег, свое мнение изменил: априори сомневаться в успехе не стоит, нужно пробовать. Тем более, что для первого семестра такая система в недалеком прошлом применялась длительное время на многих инженерных факультетах ХПИ, а на инженерно-физическом факультете она сохранилась до наших дней, и применяется на протяжении всего многоместрового курса высшей математики.

Перейдем к анализу *второй задачи*. Прежде всего, надо заметить, что аналитические методы решения практических задач, которые уже давно ушли из инженерной практики КБ, продолжают использоваться в учебных курсах других точных наук (физике и химии) и в некоторых фундаментальных инженерных дисциплинах (та-

ких, как ТОЭ, ТММ, ДПМ), поэтому и эта цель, пусть и частично, остается актуальной.

Следовательно, ликвидацию кафедры высшей математики (как частично потерявшей свои задачи) или ее слияние с другими кафедрами надо признать не целесообразной, и далее не рассматривать.

Таблица 1 – Оптимальная структура учебного курса высшей математики для ведущего технического университета [2]

Скалярный анализ	Векторный анализ
Теория пределов и непрерывность функции	Линейная алгебра
Дифференциальное исчисление	Аналитическая геометрия
Неопределённый интеграл	Функции нескольких переменных
Определённые и несобственные интегралы	Кратные и криволинейные интегралы по мере
Обыкновенные дифференциальные уравнения	Теория поля
Числовые и функциональные ряды	Теория функций комплексной переменной
Интегральные преобразования	Уравнения с частными производными

Но продолжать и дальше закрывать глаза на возникшую еще 10 – 15 лет назад и обостряющуюся с каждым годом проблему *неполного служебного соответствия* принятого учебного курса требованиям времени не допустимо. Мы не проговаривали эту проблему вслух, но переживали ее последствия, когда теряли учебные часы и ликвидировали отдельные дисциплины (речь идет о курсах линейной алгебры и математического анализа, которые для студентов-электриков традиционно читались параллельно). К сожалению, здесь не все можно объяснить объективными причинами, такими как «болонизация» учебных планов либо сворачивание программы создания *научных университетов*. Приходится признать справедливым, что тем, кто стоит на месте, когда другие движутся вперед, учебные часы срезают, а ставки сокращают, и передают тем, кто движется.

Многие мои коллеги считают, что

*наши учебные планы должны диктовать выпускающие кафедры,
не оставляя нам никаких степеней свободы, но такое мнение ошибочно,*

даже если к нему пришли после многих горьких, вынужденных уступок, и я это берусь доказать.

Во-первых, перечитайте еще раз первую задачу курса и убедитесь в том, что с потребностями конкретной специальной кафедры она пересекается процентов на 10, не более.

Во-вторых, в условиях современной рыночной экономики узкая специализация, которой занимается выпускающая кафедра, редко соответствует будущей профессии выпускника, что привело к укрупнению учебных специальностей. Правильно, когда студенты - электрики, - механики или - химики учатся по разным планам, но дальнейшая детализация учебной программы не имеет смысла, и ее могут формировать математики, координируясь с другими точными науками, которые изучаются параллельно, и преследуя при этом общегосударственный, а не узковедомственный интерес. Выпускник престижного технического университета (а ХПИ, в масштабах Украины, имеет такой статус) должен получить фундаментальное инженерное образование, которое невозможно без точных наук, и с этой платформы он может стартовать во взрослую жизнь в любом направлении, где сможет приносить пользу обществу. А выпускающая кафедра должна и дальше успешно заниматься наукой и, тем самым, умножать престиж университета, привлекая на учебу хорошо подготовленных абитуриентов.

В-третьих, я не знаю, какие на самом деле ограничения учебной нагрузки действуют сейчас в университете Болонье, но престижные учебные заведения Германии их устанавливают самостоятельно, и на младших курсах нагрузка не редко превышает 36 аудиторных часов в неделю. У наших теперешних студентов стационара этот показатель после подписания болонской конвенции был снижен до 26 часов, что дало возможность им не только учиться, но и работать. Во времена моей учебы в Харьковском университете (который занимал третью рейтинговую позицию среди вузов СССР) аудиторная нагрузка достигала 42 часов. Причем помимо аудиторных занятий на первом курсе у нас было 8 часов обязательной самоподготовки в неделю, где, под присмотром старшекурсников, выполнялись домашние задания по математике. Многие знают (и выше я уже писал об этом), что студенты первого курса и в наше время, как правило, еще не нуждаются в дополнительном заработке и продолжают жить на иждивении родителей. А их учебная нагрузка в старших классах школы достигала 36 часов и более, и они психологически готовы к тому, чтобы и в вузе учиться интенсивно. Поэтому для этих студентов, которые еще не вовлечены в программы межвузовского обмена, ограничения болонской системы выглядят особенно абсурдными. Тем более, когда в аудиторном фонде университета можно найти массу пустых аудиторий. Следовательно, объективные условия позволяют не только вернуть прежние учебные программы по математике, физике, химии, но даже расширить их в соответствии с требованиями времени. Для реализации такой цели нужно отказаться от унификации и (если не удастся использовать решение, о котором речь пойдет далее) найти средства для увеличения общего фонда зарплаты преподавателей, работающих со студентами первого курса. Очевидно, что такие вопросы не лежат в юрисдикции выпускающих кафедр, но если указанные средства не будут забирать из их фондов, то они такую инициативу поддержат.

Считаю, что сформулированное утверждение доказано. Но, раз тут довелось апеллировать к опыту прошлой жизни, хочу проиллюстрировать его конкретными примерами. Когда в 1983 году в Минвузе СССР принимали новую Программу курса высшей математики для вузов страны, то в соответствующем отделе ЦК на Старой площади Москвы составителям Программы задали только один вопрос: «Вы гарантируете, что после её реализации винты советских подводных лодок будут шуметь меньше, чем у американцев?». Гарантии были даны, и

Программа, о которой теперь в Украине приходится, к сожалению, говорить в прошедшем времени, начала превращаться в жизнь. Россияне сохранили её для ведущих технических университетов и, тем самым, сберегли свой ВПК от окончательного разорения. А что касается Украины, то на том суррогате знаний, которым приходится сейчас пичкать студентов, ничего дельного не построишь. И Бог с ними, с подводными лодками, возможно, нашей стране они и не нужны. Но термины «ВПК» и «наукоёмкое производство», хорошо знакомые по 80-м годам, являются синонимами термина *высокие технологии*, к которым мы все так стремимся.

Аналогичная история двумя десятилетиями раньше происходила и в США, где американцы, напуганные успехами советской космонавтики, срочно переработали программы изучения математики для средней и высшей школы в сторону их углубления. Результат не заставил себя долго ждать, и уже через 10 лет *Нейл Армстронг* ступил на поверхность Луны. Можно констатировать, что ответственная власть всегда видела тесную взаимосвязь между уровнем математической подготовки студентов технических вузов и реальными потребностями научно – технического прогресса.

Определим главное направление модернизации курса, актуальное для нашего времени и сложившихся условий. Мы привыкли делить наш курс на две равные (или почти равные) по числу учебных часов «половинки» – на *лекции* и *практики*. При этом часто не понимали того, что это

две половинки курса теоретической математики,

потому что на практиках рассматривали те же учебные примеры, что и на лекциях, только их решали не лекторы, а студенты.

При этом к будущей реальной практике студентов данные примеры отношения не имели.

Я и сейчас считаю, что эти «половинки» важны, а их форма и содержание, в основном, соответствуют поставленным задачам; больше того, учебные часы, которые на них отводятся, нужно увеличить.

Чем больше студент будет общаться с умным, думающим, добросовестным и требовательным преподавателем (а математики все такие) – тем быстрее он будет развиваться во время учебы, и больших вершин достигнет во взрослой жизни. Но если рассматривать лекции и практики как две опоры современного образования, то для устойчивости эту конструкцию нужно опереть еще на один элемент. И тут не придется изобретать велосипед – достаточно реализовать решение, которое давно используется на кафедрах, где преподают другие фундаментальные дисциплины, а в последнее время – и на некоторых родственных нам кафедрах высшей и прикладной математики. Там третьей опорой являются лабораторные работы, причем, даже для инженерных дисциплин, при их проведении вместо специального оборудования все чаще используют персональные компьютеры.

Такой «онлайн» нам не нужен. Поскольку дальше в этой статье речь пойдет о применении компьютеров, которые сейчас многими чиновниками от образования рассматриваются в качестве инструмента для перехода к всеобщему обучению в режиме *онлайн*, я поясню свое отношение к этому вопросу. Оно может быть интересным для многих, потому что базируется на длительном (пятилетнем) опыте такого общения при использовании компьютерной почты и мобильного телефона для решения образовательных и научных задач (по самым скромным оценкам я наговорил более двух тысяч часов эфирного времени). Мой опыт подтверждает известный факт, что даже в том случае, если ваш собеседник предельно мотивирован на достижение положительного результата, то эта деятельность имеет низкую эффективность, то есть результат дается ему (и вам) дорогой ценой. Я задумался над причинами, и готов пояснить то, что понял по указанной проблеме. При этом я буду использовать некоторые знания по механизмам работы информационного поля, описанные ранее в работах [7, 8].

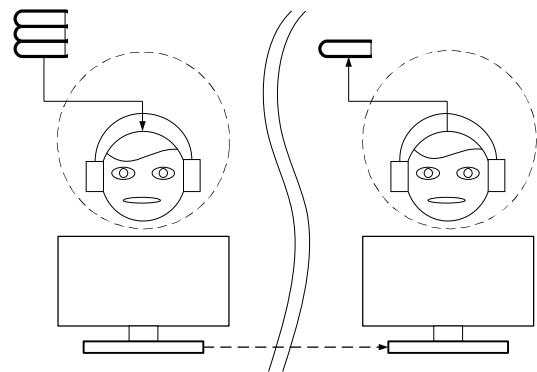
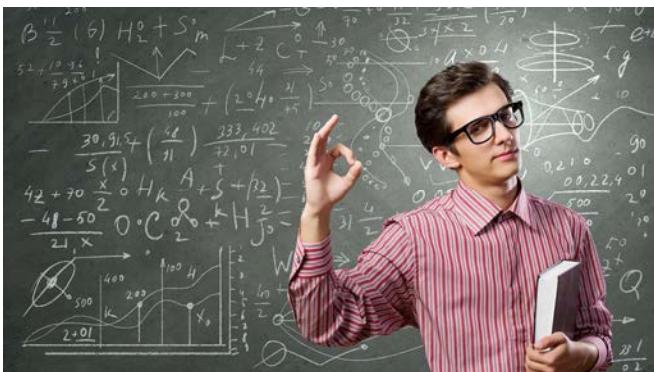


Рис. 2 – Схема передачи информации при обучении в режиме удаленного доступа (онлайн).

При дистанционном общении учителя с учеником любая информация передается по узкому каналу, и даже если этот канал визуальный (что, несомненно, лучше, чем связь по телефону), проходит длинный путь преобразований, показанный на рис. 2. То есть,

- из общих библиотек, размещенных в *ноосфере* и уже освоенных учителем (его постоянной памяти), информация попадает в подсознание учителя;
- затем транслируется на язык слов и символов, который использует его сознание;
- далее происходит ее передача через электромагнитное поле мобильного телефона и/или Интернета;

- затем она считывается в сознание ученика;
- далее транслируется в его подсознание;
- и, наконец, отправляется в постоянную память ученика, формируемую в ноосфере.

Причем, последний этап, как правило, происходит ночью, во время сна ученика, когда вся полученная за день информация систематизируется и уплотняется (при этом ее часть теряется), после чего приобретенные знания отправляются на «жесткий диск» (в *ноосферу*).

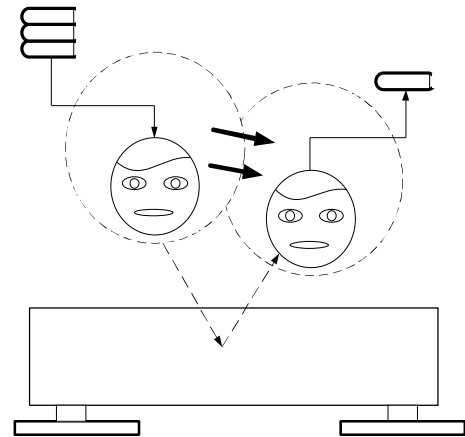


Рис. 3 – Схема передачи информации при очном обучении группы.

Если учитель и ученик находятся рядом, то области подсознания перекрываются, и путь передачи информации (точнее – для части информации) значительно сокращается (рис. 3). Но для этого ученик должен старательно учиться (говорят – *быть в материале*), а

учитель во время занятия должен периодически сокращать дистанцию с учениками

(то есть покидать место у доски и ходить между рядами, не прекращая диктовку по содержанию теорем и анализу доказательств). Согласен, что такое поведение противоречит некоторым постулатам педагогики, но мои лучшие университетские учителя поступали именно так, и я рекомендую использовать их опыт.

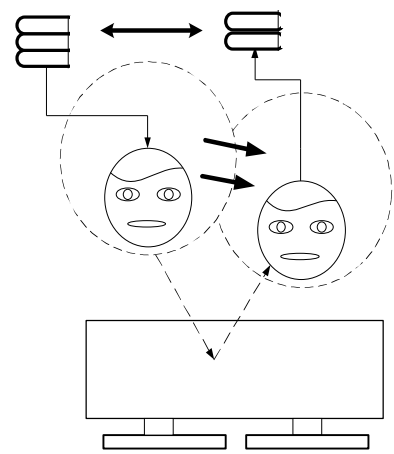
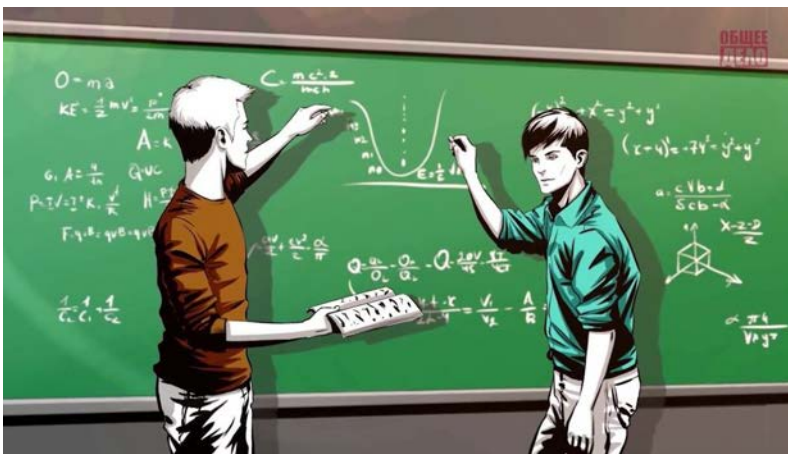


Рис. 4 – Схема передачи информации при индивидуальном обучении в режиме офлайн.

И, наконец, если группа учеников немногочисленная (а еще лучше – когда ученик один, и между учителем и учеником нет антагонистических противоречий, а установлен доверительный духовный контакт), то

передача информации от учителя к ученику заменяется передачей адреса,

по которому в ноосфере записана эта информация (рис. 4). Чтобы открыть такой виртуальный канал, учителю достаточно произнести несколько слов по изучаемой теме или записать несколько символов, и к соответствующему сегменту «жесткого диска» ноосферы получает доступ еще один пользователь.

Согласен, что такое взаимопонимание наблюдается редко, но это тот идеал, к которому нужно стремиться. А обучение высшей математике в режиме онлайн – это его полный антипод, который уже не вызывает массового энтузиазма среди моих коллег, но с ним мы вынуждены мириться из-за пандемии.

Сказанное выше не исчерпывает тему. Так совпало, что *ограниченная компьютеризация* для модернизации учебного курса высшей математики предлагается в то же время, когда другие люди и организации рассматривают *глобальную компьютеризацию* как орудие для тотальной перестройки общества. С этим связывают реальные и вымышленные угрозы, которые бросают тень на любые формы компьютеризации и часто ведут к спекуляциям и шаманству. У меня сложился оригинальный взгляд на перспективы глобальной компьютеризации, которую я трактую не иначе, как начавшийся *перехват системы управления* в преддверии важнейшего цивилизаци-

онного скачка [8]; но эти вопросы не касаются данной статьи и станут предметом отдельной публикации.

Цель и содержание лабораторных работ по высшей математике. Мне приходилось знакомиться с пособиями и методическими разработками по высшей математике, используемыми для проведения практических занятий со студентами 1920-тых и 30-тых годов, и я смог воочию оценить тот прогресс, который был достигнут по этому направлению к началу 1990-ых годов. Знаю, что это произошло благодаря труду нескольких поколений преподавателей математики, которые обладали необходимыми знаниями и методическим мастерством. Я убежден, что такая же судьба ждет лабораторные работы по курсу высшей математики. И сейчас, как первопроходцы и открыватели новых земель, мы находимся в самом начале долгого пути.

Первопроходцам прощают ошибки, но при условии, что они начали движение в правильном направлении. По моему разумению, лабораторные работы по курсу высшей математики должны подразделяться на два типа.

Лабораторные работы первого типа призваны продемонстрировать студентам младших курсов, изучающим высшую математику, способность решать при помощи ее методов реальные задачи из приложений к технике и физике. Компьютерные программы для проведения лабораторных работ готовятся преподавателями, а участие студентов сводится к подстановке исходных данных и анализе полученных результатов. Кроме того, *студент составляет пояснительную записку с описанием использованных методов*. Для проведения и приема работ служит компьютерный класс, который приобретает для кафедры высшей математики (или закрепляется за ней). Используя один класс из 8-ми компьютеров, можно обеспечить проведение 6-ти лабораторных работ в семестр для 500 студентов, что, по моему разумению, для старта этой программы будет достаточно.

Понятно, что без доброй воли и соответствующей мотивации со стороны заведующего кафедрой такой старт не возможен. Даже для проф. А. А. Грунауэра, который имел к тому времени 20-летний стаж заведывания кафедрой ТММ и высокую должность в Методической комиссии Минвуза СССР, внедрение в учебный процесс своей кафедры простого и прозрачного метода (3) численного дифференцирования (вместо сложного и путанного графо – аналитического метода построения планов скоростей и ускорений, о чем уже написано выше) далось нелегко. И, в некоторых учебных курсах, оно растянулось на годы.

В форме *лабораторной работы второго типа* студентами изучаются отдельные разделы классического инженерного курса высшей математики, которые в силу недостатка времени и других, часто субъективных, причин в последнее время выносятся на факультатив. Чтобы студент, работая в диалоге с компьютером, получил общие представления на уровне основных понятий и свойств. Перечислим некоторые из них:

- дифференциальная геометрия плоской и пространственной кривой,
- поверхности второго и высших порядков,
- спектр и диагонализация квадратной матрицы,
- замечательные кривые высшей математики,
- интерполяция функции многочленами и сплайнами,
- интегрирование рациональных дробей методом Остроградского,
- огибающие линии и поверхности,
- дифференциальные уравнения Клеро, Лагранжа и Матье,
- уравнение Бесселя и цилиндрические функции,
- обобщенные ряды Фурье,
- преобразование Фурье,
- практический гармонический анализ,
- конформные отображения,
- вычисление несобственных интегралов при помощи вычетов,
- условный экстремум,
- сетки для эффективного сканирования многомерных объемов,
- методы оптимизация по нескольким критериям, и ряд др.

для відомого методу
Михайла Остроградського
у нашому учбовому плані
місця не знайшлося,
що є прикрою помилкою

Если посмотреть на внушительный список вопросов, которые вынужденно выносятся на факультатив, то становится ясно, что пропасть между курсом высшей математики и потребностями практики за последние годы существенно углубилась и расширилась. Но я уверен, что эту ситуацию можно исправить, если опереться на имеющийся опыт ведущих технических университетов мира и внести правильные коррективы.

В поисках примера для подражания. Сегодня общепризнанным мировым лидером среди технических университетов по праву является Массачусетский технологический институт (г. Бостон, США), но использовать его как пример для подражания было бы неправильно. Потому что, во-первых, финансовые возможности этого вуза превосходят суммарное финансирование всех государственных университетов Украины вместе взятых.

Но дело не только в этом. В США и в некоторых западноевропейских странах принята совершенно другая система организации учебы в университете: профессора вывешивают объявления об учебных курсах, которые намерены читать в следующем семестре (или триместре), а студенты (поначалу свободно, но число мест на каждом курсе лимитировано) записываются на эти курсы. И определить недельную аудиторную нагрузку студента сложно, потому что понятия *студенческая группа* не существует, и такую статистику никто не ведет.

Очевидно, чтобы такая система заработала в Украине, многое должно измениться. Например, все доценты должны стать профессорами; либо, чтобы не создавали конкуренции, всех профессоров нужно отправить на пенсию, и тогда будут записываться на учебу к доцентам. Поскольку доцент – это явление массовое, а профессор – товар «штучный», к организованному сопротивлению не способный и к властным полномочиям, как правило, не стремящийся, то я склонен считать, что доценты победят. Задавят своей массой. И пусть это произойдет не завтра, но для наших доцентов университет МТИ уже сейчас не пример. Поэтому такой пример мне пришлось искать в другой стороне, где организация работы и менталитет мало отличаются от нашего.

Я провел соответствующее исследование и выполнил аналитический обзор учебных программ на первом и втором курсах бакалаврата факультетов «Машиностроительные технологии», «Энергомашиностроение» и «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н. Э. Баумана. При составлении обзора использовались сведения, которые содержатся в обнародованных в Интернете расписаниях занятий по разным специальностям указанных факультетов за 2018 – 2020 годы. Анализ показал, что для первого и второго семестра они идентичны для всех специальностей, а для третьего и четвертого семестров имеют незначительные различия, связанные со спецификой будущих профессий.

Поэтому далее проанализируем конкретную программу специальности Э2 «Поршневые двигатели», которая для указанной группы факультетов может считаться *типовой*. Кроме того, по такой же специальности учат бакалавров и магистров в НГУ «ХПИ», и можно будет выполнить сравнительный анализ.

Типовая учебная программа для инженерной специальности МГТУ, семестры 1 – 4.

Первый семестр. Недельная аудиторная нагрузка студентов **37 акад. часов**. Из них:

- **математика – 9 ч.** («Математический анализ» 5 ч. и «Аналитическая геометрия» 4 ч.);
- **информатика – 5 ч.**;

а также начертательная геометрия – 4 часа, инженерная и компьютерная графика – 2 часа, химия – 4 часа, экология – 2 часа, и т.д.

Как видим, информатике начинают учить с первого дня, а физики в расписании пока что нет, потому что нет соответствующего *математического задела*. Занятий по математике в 1,8 раза больше, чем в ХПИ, причем два предмета читают параллельно, а не последовательно.

Второй семестр. Недельная аудиторная нагрузка студентов **37 акад. часов + 4 акад. часа для проведения КСР** (то есть, контроля за самостоятельной работой студентов, напр., приема РГЗ). Из них:

- **математика – 14 ч.** («Интегралы и дифференциальные уравнения» – 6 ч. + 1 ч. КСР; «Линейная алгебра и функции нескольких переменных» – 4 ч. + 1 ч. КСР; «Теория вероятностей» – 1 ч. + 1 ч. КСР);
- **информатика – 2 ч.**;

а также начертательная геометрия – 4 часа, инженерная и компьютерная графика – 2 часа, физика – 4 часа, теоретическая механика – 4 часа + 1 час КСР, и т.д.

Здесь занятий по математике в 2,3 раза больше, чем в ХПИ, причем в параллель и разными преподавателями читаются сразу три предмета; проводятся лабораторные работы на персональных компьютерах. Физики (включая теоретическую механику) тоже много. И уже второй семестр подряд достаточно много часов выделено на начертательную геометрию и инженерную графику.

Третий семестр. Недельная аудиторная нагрузка студентов **39 акад. часов**. Из них:

- **математика – 5 ч. + 1 ч. КСР** («Кратные интегралы и ряды» – 4 ч.; «Теория вероятностей и математическая статистика» – 2 ч.),

а также инженерная и компьютерная графика – 2 ч., физика – 4 ч., механика жидкости и газов – 4 ч., теоретическая механика – 4 ч., сопротивление материалов – 5 ч., и т.д.

В третьем семестре главенствует физика и ее прикладные разделы (вместе – 17 часов). Математику читают двумя параллельными предметами, и ее объем в 1,2 раза больше, чем в ХПИ. Информатика, ориентированная на использование пакетов типа Маткад, уже пройдена, и ее используют при проведении лабораторных работ (в том числе, по математике, механике жидкости и газов, теоретической механике).

Четвертый семестр. Недельная аудиторная нагрузка студентов **33 акад. часа + 3 акад. часа КСР**. Из них:

- **математика – 4 ч. + 1 ч. КСР** («Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление»),

а также физика – 5 ч. + 1 ч. КСР, механика жидкости и газов – 4 ч., сопротивление материалов – 5 ч. + 1 ч. КСР, теория механизмов и машин – 4 ч., и т.д.

В этом семестре физика и ее прикладные разделы имеют, вместе, 19 часов. Математике здесь уже учат значительно меньше, но даже здесь ее объем в 1,7 раза больше, чем в ХПИ.

Аналитика и выводы. Проанализированные (на уровне расписания занятий) учебные планы МГТУ уже прошли этап реформирования и соответствуют современным требованиям, предъявляемым к работе престижно-

го технического университета. Они обеспечивают оптимальное сочетание классических форм обучения и новых форм, использующих возможности персональных компьютеров. В них реализованы тесные и органичные связи между отдельными предметами. Поэтому, при подготовке реформы учебных планов, их можно использовать в качестве образца, то есть **принять за основу**.

Поскольку продолжительности семестров одинаковы, для сравнительного анализа удобно суммировать часы, отданные для аудиторных занятий по конкретному предмету (или группе предметов) за четыре семестра обучения. Сейчас в ХПИ полученная цифра соответствует числу так называемых кредитов, но

после предлагаемой реформы число кредитов не изменится, а сумма часов для аудиторных занятий возрастет.

Если выполнить эту процедуру для математики (без КСР, которую у нас организуется иначе), то в МГТУ получим 30 часов, что в 1,7 раза выше, чем в ХПИ (где в ЭЭЭ институте на математику выделяют 18 часов).

Часы, выделяемые на физику (13 ч.), химию (4 ч.) и экологию (3 ч.) в сравниваемых институтах оказались одинаковыми, но изучение физики в МГТУ начинают и заканчивают позже, со второго семестра по четвертый.

На теоретическую механику и сопромат в МГТУ выделено 18 часов, а в ХПИ всего лишь 10 часов.

На изучение механики жидкости и газов в МГТУ выделено 8 часов, а в ХПИ 4 часа.

Информатику, ориентированную на работу с пакетом Маткад, здесь, как и в бостонском МТИ, учат на первом курсе в суммарном объеме 7 акад. часов, а в ЭЭЭ институте ХПИ ее, кроме специальности *электроника*, не преподают.

Таким образом, в МГТУ на общие кафедры суммарно приходится на 30 часов больше аудиторных занятий, чем в ХПИ, что означает увеличение аудиторной нагрузки за 1 – 4 семестры со 104 до 134 часов, или на 30 %.

Предположим, что мы проведем реформу учебного курса по образцу, принятому выше за основу. Тогда **дополнительные** потребности в аудиторных занятиях по математике, информатике, физике (вместе с механикой жидкости и газа), химии (вместе с экологией) и теоретической механике (вместе с сопроматом) составят:

мат. инф. физ. хим. мех. Σ (1 час таблицы равен 17-ти часам аудиторных занятий студента)

- 1-ый семестр – $4 + 5 + 0 + 0 + 0 = 9$ акад. ч. в неделю;
- 2-ой семестр – $3 + 2 + 0 + 0 + 4 = 9$ акад. ч. в неделю;
- 3-ий семестр – $2 + 0 + 2 + 0 + 2 = 6$ акад. ч. в неделю;
- 4-ый семестр – $3 + 0 + 2 + 0 + 1 = 6$ акад. ч. в неделю.

подлежит уточнению

Следовательно, для реализации такой реформы придется увеличить аудиторную нагрузку на первом курсе до 36 акад. часов в неделю и на втором курсе до 32 акад. часов в неделю. В МГТУ, по уточненным данным, она составляет сейчас, без военной подготовки студентов, 39 и 33 акад. часов, соответственно.

При проведении анализа и формулировании предложения по скорейшей реализации реформы я исходил из своего убеждения, что преподаватели общих кафедр ХПИ, которые работают там сейчас или придут им на смену в ближайшем будущем, в своем абсолютном большинстве смогут использовать дополнительные аудиторные занятия для существенного повышения качества знаний у студентов.

Что касается меньшинства, то они не станут безработными, потому что реформа не будет реализовываться одномоментно и повсеместно. Пусть работают по старинке, лишь бы не мешали другим двигаться вперед. Впрочем, надо заранее признать, что психологические травмы у отдельных личностей станут неизбежными.

Заметим, что в МГТУ аудиторная нагрузка остается высокой и для пятого семестра; для специальности ЭЭ это 34 акад. часа + 8 часов военной подготовки. В 5-том семестре математики МГТУ читают курс «Уравнений математической физики», чего в ХПИ на аналогичных специальностях уже не делают более 20-ти лет. Притом, что здесь работают специалисты по математической физике, и для них восстановление утраченного курса представляет интерес. Однако, учитывая реалии нашей жизни, продлевать реформу на 5-тый семестр сейчас не рационально, потому что проводить дополнительные занятия при практически пустой аудитории бессмысленно.

Проанализируем влияние реформы на учебную нагрузку преподавателей. Известно, что на общей кафедре (например, высшей математики) аудиторная нагрузка доцента или профессора составляет, в среднем, 40 %, а ассистента – 50 % от общей учебной нагрузки (куда кроме нее входит время на проведение экзаменов, коллоквиумов, контрольных работ, а также на проверку РГЗ). Поэтому,

если число аудиторных занятий увеличить в 1,6 раза, то учебная нагрузка преподавателей увеличится на 25-30 % – до 700 часов для доцента и 780 часов для ассистента.

С учетом соответствующего увеличения учебной нагрузки по второй половине дня, это изменение позволит уменьшить обязательства по разделу «Научная работа» на 200 и 250 часов, соответственно. Если же учесть фактор создания и освоения нового курса, то коэффициенты увеличения будут другими, и указанное уменьшение составит 250 и 300 часов, соответственно, что снимет остроту возникшей проблемы.

В предыдущей части статьи содержится предложение, чтобы в рамках проводимой реформы преподавание информатики проходило на кафедре высшей математики. Это правильно с многих точек зрения и позволит, со временем, изменить название кафедры и расширить базу для ее пополнения новыми преподавательскими кадрами. Например, выпускниками инженерно-физического факультета ХПИ, которые по действующим сейчас

правилам считаются несоответствующими профилю кафедры и, поэтому, идут сюда не охотно. Мехмат Харьковского университета им. В. Н. Каразина быстро теряет прежние кондиции, и уже скоро кадровая проблема с молодыми преподавателями вузовской математики станет в Харькове чрезвычайно острой.

Для реализации такого предложения аудиторная нагрузка преподавателей кафедры высшей математики должна будет возрасти еще на 25 %, после чего она станет чрезмерной и может вызвать недовольство проводимой реформой. Тут надо понимать, что преподаватели нашей кафедры отрабатывают аудиторную нагрузку, как говорится, «от звонка до звонка», и эта работа требует постоянного умственного напряжения. И если в молодом «ассистентском» или «доцентском» возрасте мы легко выдерживали 20 аудиторных часов в неделю, то для немолодого профессора 10 аудиторных часов – это предел, выше которого подниматься опасно. Но этих гипотетических проблем можно легко избежать, если объединить студенческие группы и укрупнить лекционные потоки. Не секрет, что в силу известных причин многие занятия в ХПИ сейчас организуются и проводятся для небольшого числа студентов, и от укрупнения малокомплектных потоков выиграют все.

Завершая этот пункт статьи, заметим, что в проанализированных учебных планах МГТУ математика присутствует под девятью разными названиями, отвечающими ее отдельным разделам. Если учесть другие факультеты и курсы, то таких названий насчитывается 20-ть, что отвечает их базовому учебнику по математике, изданному в форме 20-ти отдельных (не толстых) томов и получившему, в свое время, Государственную премию РФ. При составлении своего базового учебника мы действовали по образцу американских коллег и (пока что мысленно) делили курс высшей математики на две части – «Скалярный анализ» и «Векторный анализ», которые целесообразно читать параллельно на протяжении всех четырех семестров. Что, в том числе, позволит избежать увеличения числа экзаменов по математике (и, как следствие, не допустить неизбежного увеличения числа двоек у студентов и проблем у деканов). Замечу, что предлагаемая реформа улучшит успеваемость по математике, а число упомянутых проблем сократит.

Для математики оптимальное распределение аудиторных часов между семестрами выглядит так:

$9+9+6+6$, вместо $5+6+4+3$, которое принято сейчас,

причем одним из разделов векторного анализа, изучаемых на втором курсе, должны стать «Уравнения математической физики». Ясно, что это предложение не является догмой и подлежит всестороннему обсуждению с участием всех заинтересованных лиц.

Повторение – мать учения, поэтому сформулирую основные выводы из выполненного аналитического обзора, которые сводятся к следующему.

1. Типовую учебную программу МГТУ уже реформировали в соответствии с требованиями времени и ее целесообразно использовать как образец для проведения аналогичной реформы в НТУ «ХПИ».
2. Типовая учебная программа НТУ «ХПИ» отличается от образца в 4-х главных моментах:
 - число аудиторных занятий по математике ниже в 1,7 раза, по теоретической механике и сопромату – в 1,8 раза, по начертательной геометрии и графике – ниже в 2 раза по сравнению с образцом;
 - информатике на основе математического пакета типа Маткад бакалавров ЭЭЭ института ХПИ (кроме специальности *электроника*) не учат и на других предметах возможностями пакета не пользуются;
 - начало обучения физике в ХПИ начинается на семестр раньше, чем в МГТУ, без необходимого в этом случае математического опережения;
 - разделы математики в ХПИ изучают последовательно, а в МГТУ – 2-мя параллельными курсами.
3. Для реформирования учебной программы в соответствии с образцом необходимо увеличить (без изменения кредитов) на 1-ом курсе число аудиторных занятий на 40 %, а на 2-ом курсе – на 20 %.

Заключение: краткое содержание предлагаемой реформы. Если бы ведущие технические университеты Украины были частными учреждениями (подобно бостонскому МТИ), то такую или подобную ей реформу придумали и провели бы уже давно; там форма всегда соответствует содержанию. Но они являются государственными и содержатся на средства украинских налогоплательщиков, которые учат в них своих детей и свою трудовую смену. И здесь, как нигде еще, подтверждается тезис о неэффективности коллективного хозяйствования и управления. Можно годами или десятилетиями гнать брак (или не кондицию) и не нести за это никакой ответственности. Но действующие здесь правила придуманы не нами (у нас на это важное дело вечно не хватает времени), а очень хитрыми и пронырливыми людьми, которые приспособились к этим условиям и научились из всего извлекать личную выгоду. Я вынужден признать эти правила, потому что в будущем надеюсь изменить их к лучшему. И вместо подобающего этому случаю восклицания – «Эврика! Я знаю, что нужно делать!» говорю, смиренно потупив очи – «Давайте проведем эксперимент и проверим одну гипотезу. А я, пока что, могу гарантировать одно: хуже не будет, и все участники эксперимента останутся живы».

Для оптимального комплексного решения указанных проблем предлагается следующее.

1. Указанная реформа **в экспериментальном порядке** проводится в одном или нескольких учебных потоках ЭЭЭ института начиная с сентября первого года новейшей (то есть, пост пандемической) эры, а подготовка новых учебных планов стартует за полгода до этого. Для чего создается специальная комиссия во главе с одним из проректоров. Этот же проректор по поручению ректора курирует все вопросы, связанные с работой общих кафедр и их подключением к реформе. Насколько я это понимаю, новый учебный план потребует утверждения в Киеве только лишь после успешного окончания эксперимента (через два года), но разрешением на проведение

експеримента желательно обзавестись заранее.

2. В студенческих группах, где проводится реформа, число аудиторных занятий увеличивается на первом курсе до 36 акад. часов в неделю, или на 40 %, а на втором курсе – до 32 акад. часов, или на 20 %; на остальных курсах нагрузка остается прежней (если другие кафедры не захотят распространить реформу на третий курс).

3. Дополнительные часы распределяются между кафедрами высшей математики (которой поручается также чтение курса информатики), физики и теоретической механики. Эти часы используют для модернизации учебных курсов и доведения обучения фундаментальным дисциплинам до уровня лучших мировых образцов. Поэтому, увеличивая число аудиторных занятий, мы не возвращаемся в прошлое, а открываем дверь в будущее. В частности, курс высшей математики разбивается на две учебные дисциплины – *скалярный анализ* и *векторный анализ*, которые читаются параллельно и увязываются с курсом информатики. Так поступают ведущие технические университеты мира. Информатика преподается на базе пакета MathCAD; эту диалоговую компьютерную среду в университетах США относят к «золотому стандарту» для высшего образования.

4. У преподавателей общих кафедр, участвующих в эксперименте по апробированию реформы, учебная нагрузка в среднем увеличивается на 30 %, что компенсируется снижением отчетных показателей по научной работе. Поэтому **проведение реформы не потребует изменения числа преподавательских ставок.**

Список литературы

1. Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Линейная алгебра и ее приложения в технике. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2002. – 534 с.
2. Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2011. – Т. 1. – 650 с.
3. Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л., Чикина Н. А. Краткий курс высшей математики. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. – Т. 2 – 476 с.
4. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2012. – Т. 3 – 464 с.
5. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григор'єв О. Л. Элементы векторного анализа. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 460 с.
6. Марченко А. П., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Григорьев А. Л. Профессору Грунауэру 90 лет! // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 42. – С. 3 – 14.
7. Григорьев А. Л., Геворкян Ю. Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 13. – С. 55 – 68.
8. Григорьев А. Л. Гносеологический анализ основных целей и принципов управляемой эволюции белковых тел // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 283 – 293.

References (transliterated)

1. Gevorkyan YU. L., Grigor'yev A. L. *Lineynaya algebra i yeye prilozheniya v tekhnike* [Linear algebra and its applications in technology]. Kharkov, NTU "KHPI" Publ., 2002. 534 p.
2. Gevorkyan YU. L., Grigor'yev A. L. *Skalyarnyy i vektorny analiz dlya klassicheskogo inzhenerenogo obrazovaniya* [Scalar and vector analysis for classical engineering education]. Kharkov, NTU "KHPI" Publ., 2011, vol. 1. 650 p.
3. Gevorkyan YU. L., Grigor'yev A. L., Chikina N. A. *Kratkiy kurs vysshey matematiki* [A short course in higher mathematics]. Kharkov, NTU "KHPI" Publ., 2010, vol. 2. 476 p.
4. Vanin V. A., Gevorkyan YU. L., Grigor'yev A. L. *Skalyarnyy i vektorny analiz dlya klassicheskogo inzhenerenogo obrazovaniya* [Scalar and vector analysis for classical engineering education]. Kharkov, NTU "KHPI" Publ., 2012, vol. 3. 464 p.
5. Vanin V. A., Gevorkyan YU. L., Grygor'yev O. L. *Elementy vektornogo analizu* [Elements of vector analysis]. Kharkov, NTU "KHPI" Publ., 2016. 460 p.
6. Marchenko A. P., Tkachuk N. A., Zarubina A. A., Grigor'yev A. L. Professoru Grunauyeru 90 let! [Prof. Grunauer's 90 year anniversary]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2011, no. 42, pp. 3–14.
7. Grigor'yev A. L., Gevorkyan YU. L. Gnoseologicheskie aspekty modelirovaniya obmennykh kolebaniy v srede Maksvela i Kosserra [Gnoseological aspects of modeling exchange fluctuations in Maxwell and Cosserat media]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2011, no. 13, pp. 55–68.
8. Grigor'yev A. L. Gnoseologicheskiy analiz osnovnykh tsey i printsypov upravlyayemoy evolyutsii belkovykh tel [Gnoseological analysis of the goals and basic principles of the organization of the controlled evolution of protein bodies]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 8(1333), pp. 283–293.

Поступила (received) 01.12.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

ЗМІСТ

Ванін В. А., Кругол М. М., Лазуренко О. П. Математичне моделювання однокрупового газогідравлічного тракту допоміжних механізмів парового котла теплової електричної станції	3
Воропай А. В., Егоров П. А. Учёт влияния массово–инерционной характеристики дополнительной вязко-упругой опоры при нестационарном деформировании прямоугольной пластины	15
Кожушко А. П. Експериментальне та розрахункове дослідження загасання коливань рідини в ємності з вільною поверхнею	24
Александров Є. Є., Александрова Т. Є., Григор'єв О. Л., Моргун Я. Ю. Стійкість та автоколивання електронної замкненої системи стабілізації курсу автомобіля з цистерною	44
Мельник О. С., Козаревич В. О. Моделювання програмованих одноелектронних наносхем	64
Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про припинення в'язким опором вільних коливань нелінійно пружного осцилятора	69
Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання, описані аналогами рівнянь Ван дер Поля і Релея	76
Першина Ю. І. Моделювання динамічного тривимірного тіла з використанням операторів інтерфлетації та мішаної апроксимації	83
Пам'яті Андренко П. М.	96
Нові теми наукових дискусій	
Григорьев А. Л. Актуальные направления модернизации и компьютеризации курса высшей математики в ведущих технических университетах Украины.....	99

CONTENTS

Vanin V. A., Kruhol M. M., Lasurenko A. P. Mathematical modelling of one-group gas-hydraulic circuit of thermal power plant steam boiler auxiliaries.....	3
Voropay A. V., Yegorov P. A. The influence of mass and inertial characteristics of an additional viscoelastic support in the nonstationary deforming of a rectangular plate.....	15
Kozhushko A. P. Experimental and computational study of liquid oscillation damping in a free surface vessel.....	24
Aleksandrov YE. YE., Aleksandrova T. YE., Grigoriev A. L., Morhun YA. YU. Stability and vibrations of the electronic closed system stabilizing the course of a car with a tank.....	44
Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Simulation of programmable single-electron nanocircuits.....	64
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Cessation of free vibrations of a nonlinear elastic system due to viscous resistance.....	69
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Oscillations described by analogues of Van der Pol and Rayleigh equations.....	76
Pershyna I. I. Modeling a dynamic three-dimensional body using interflatation and blending approximation.....	83
In memory of Andrenko P. M.	96
New topics of scientific discussions	
Grigoriev A. L. Current directions of modernization and computerization of the course higher mathematics in the leading technical universities of Ukraine	99

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 1 ' 2020

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 30.12.2020 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 10104. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вил Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ

Вісник

Національного технічного університету «ХПІ».

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях

- зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory** (New Jersey, USA);
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний об'єм статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний об'єм** не лімітовано.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані версії журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронний варіант відразу ж після опублікування стає доступний на сайтах: журналу, Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та бібліотеки національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей
та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://mmtt.khpi.edu.ua>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Тел. +38-057-707-60-35