



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХПІ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 1'2020

**Харків
2020**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 1 (1355) 2020

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 1 (1355) 2020

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2020

Kharkiv
NTU "KhPI", 2020

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2020. — № 1 (1355) 2020. — 136 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України № 1328 від 21.12.2015 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року»

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до зовнішніх інформаційних систем, зокрема до ICI Journals Master List 2018, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Головний редактор

Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України

Заст. головного редактора

Марченко А. П., д-р техн. наук, проф.

Секретар

Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна

Редакційна колегія серії

Відповідальний редактор:

В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора:

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар:

О. О. Набока, канд. фіз.-мат. наук.

Члени редколегії: Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.; О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.; О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. М. Олексенко, д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ф. Пацегон, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.; А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuzev, Sc. D. in Information Technology, Malaysia.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ». Протокол № 1 від 31 січня 2020 р.

Editor-in-chief

Sokol E. I., dr. tech. sc., member-cor. of National Academy of Sciences of Ukraine, NTU "KhPI"

Deputy editor-in-chief

Marchenko A. P., dr. tech. sc., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Secretary

Gorbunov K. O., docent, NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

Deputy Executive Editor:

Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

Executive Secretary:

O. O. Naboka, PhD. Phys.-Math. Sci.

Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorgyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. M. Oleksenko, Dr. Ped. Sci., PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. I. Pershina, Dr. Phys.-Math. Sci., Docent; A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuzev, Sc. D. in Inf. Tech., Malaysia.

А. В. БОНДАРЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ НА ЭНЕРГОЭНТРОПИЮ ОРГАНИЗАЦИИ

Энергоэнтропийная теория организаций дает новый, универсальный взгляд на функционирование и развитие организаций как особого класса систем, в которых происходят процессы во многом аналогичные физическим системам. Энергоэнтропия организации – это характеристика ее состояния с точки зрения эффективности энергии и упорядоченности. В данном исследовании описана взаимосвязь информационной энтропии организации как меры ее упорядоченности и энергоэнтропии в рамках изложения основных положений энергоэнтропийной теории организаций. Основой для исследования послужила модель энергоэнтропии, которая сформирована с учетом специфики организаций. Проведенные исследования выявили условия, при которых влияние информационной энтропии на диссипацию и энергоэнтропию максимизируются. Также установлены исходные параметры энергоэнтропии – свободная энергия и приток энергии в организацию. Дальнейшим развитием представленных результатов является исследование поведения информационной энтропии и энергоэнтропии для конкретных сфер деятельности с учетом динамики суммарной энергии организаций, которая является аналогом их масштаба.

Ключевые слова: энергоэнтропия организации, модель, зависимость, упорядоченность, энергия, система.

А. В. БОНДАРЬ

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ЕНТРОПІЇ НА ЕНЕРГОЕНТРОПІЮ ОРГАНІЗАЦІЇ

Енергоентропійна теорія організацій дає новий, універсальний погляд на функціонування і розвиток організацій як особливого класу систем, в яких відбуваються процеси багато в чому аналогічні фізичним системам. Енергоентропія організації – це характеристика її стану з точки зору ефективності енергії і впорядкованості. В даному дослідженні описано взаємозв'язок інформаційної ентропії організації як міри її впорядкованості і енергоентропії в рамках викладу основних положень енергоентропійної теорії організацій. Основою для дослідження послужила модель енергоентропії, яка сформована з урахуванням специфіки організацій. Проведені дослідження виявили умови, при яких вплив інформаційної ентропії на дисипацію і енергоентропію максимізуються. Також встановлено вихідні параметри енергоентропії – вільна енергія і приплив енергії в організацію. Подальшим розвитком представлених результатів є дослідження поведінки інформаційної ентропії та енергоентропії для конкретних сфер діяльності з урахуванням динаміки сумарної енергії організацій, яка є аналогом їх масштабу.

Ключові слова: енергоентропія організації, модель, залежність, впорядкованість, енергія, система.

A. V. BONDAR

RESEARCH OF INFLUENCE OF INFORMATION ENTROPY ON THE ENERGY ENTROPY OF THE ORGANIZATION

The energy-entropic theory of organizations gives a new, universal view of the functioning and development of organizations as a special class of systems in which processes occur in many respects similar to physical systems. An organization's energy entropy is a characteristic of its state in terms of energy efficiency and orderliness. This study explores the relationship of the informational entropy of an organization as a measure of its orderliness and energy entropy as part of the presentation of the main provisions of the energy-entropic theory of organizations. The main study was the model of energy entropy, which is formed taking into account the specifics of organizations. The studies established the conditions under which the influence of informational entropy on dissipation and energy entropy is maximized. The initial parameters of energy entropy are also established, which are free energy and the influx of energy into the organization. A further development of the presented results is a study of the behavior of information and energy entropy for specific areas of activity, taking into account the dynamics of the total energy of organizations, which is an analog of their scale.

Key words: organization's energy-entropy, model, dependence, orderliness, energy, system.

Введение. Современная наука переживает процесс конвергенции, и классическая теория термодинамики все больше проникает в качестве концепции с соответствующими инструментами в управление организациями. Энергоэнтропийная теория организаций дает новый, универсальный взгляд на функционирование и развитие организаций как особого класса систем, в которых происходят процессы во многом аналогичные физическим системам. Тем не менее, определенная специфика требует обоснования и тщательного исследования каждой категории закономерности. В [1] представлены основные положения указанной теории и установлена на концептуальном уровне взаимосвязь между энергоэнтропией организации и мерой ее упорядоченности – *информационной энтропией*. Тем не менее, данная взаимосвязь требует отдельного исследования с целью получения механизмов снижения энергоэнтропии организации.

Анализ последних исследований. Первой работой, в которой обоснована универсальность закона сохранения энергии и энтропии, является [2]. Дальнейшее развитие идеи энергоэнтропии получили в [3]. Но данные работы носят, в большей части, философский характер, представляя размышления об универсальности отдельных физических категорий и закономерностей.

Универсальность энтропии как специфической характеристической функции состояния системы обоснована в [4, 5]. Несмотря на то, что данные работы не рассматривают предприятия и организации как специфические системы, тем не менее, представленные результаты являются своеобразным мостом между физическими и нефизическими системами. В частности, авторы приводят условия, при которых энтропия существует у системы любой природы.

Можно констатировать практическое отсутствие публикаций, посвященных изложению энергоэнтропийной теории организации, и конкретным формализациям, которые могут быть использованы как для дальнейших

теоретических исследований, так и на практике для анализа состояния организаций различного профиля.

Совершенно другая ситуация наблюдается с информационной энтропией. Данная категория получила значительное распространение благодаря достаточно простой интерпретации. Примерами работ, в которых информационная энтропия используется в контексте функционирования и развития организаций, являются [6, 7].

Таким образом, формирование и исследование модели, связывающей информационную энтропию и энергоэнтропию, является актуальным в виду развития идей энергоэнтропии в контексте организаций.

Постановка задачи. Целью данного исследования является изучение взаимосвязей информационной энтропии и энергоэнтропии организации.

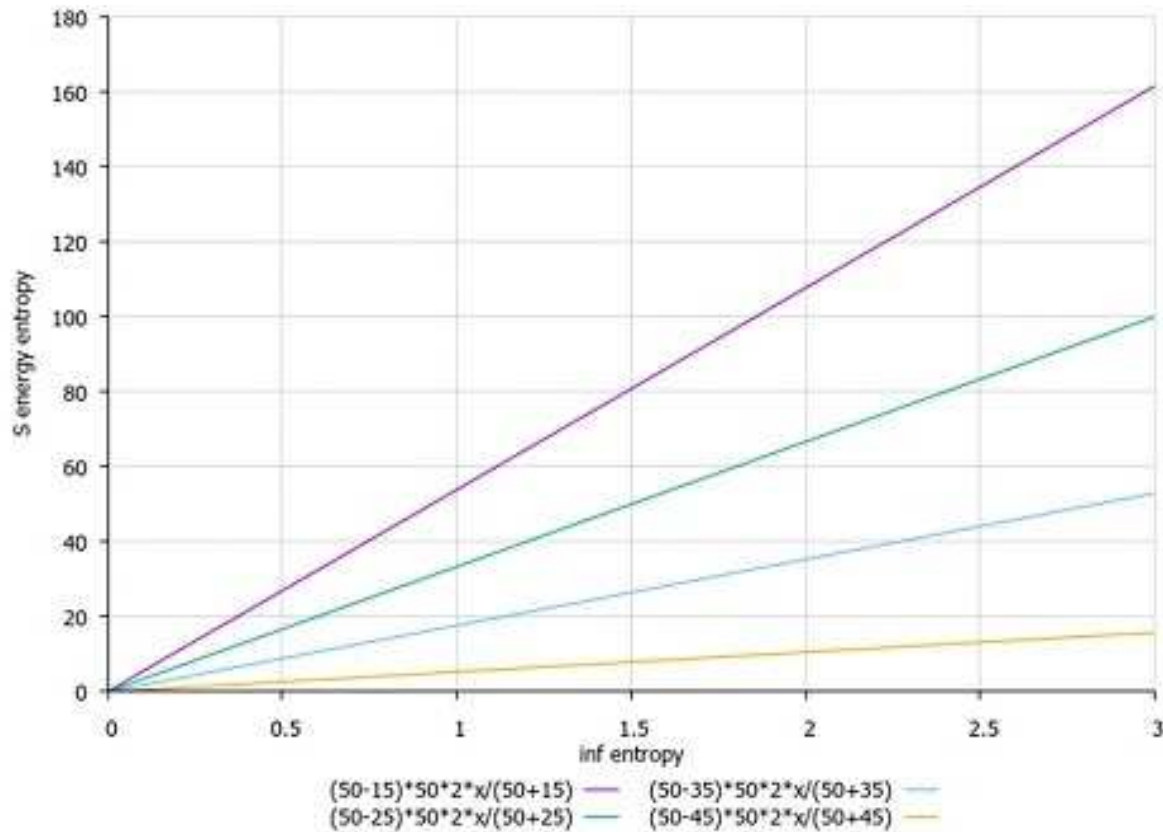


Рис. 1 – Графики зависимости энергоэнтропии от информационной энтропии при $U = 50$, $\eta^{et} = 2$, $W = \{15; 25; 35; 45\}$.

Результаты исследования. Как известно, *диссипация энергии* тем выше, чем ниже упорядоченность организации, поэтому *энергоэнтропия* – это характеристика состояния организации с точки зрения эффективности ее энергии и упорядоченности. На базе концептуальной модели энергоэнтропии организации, изложенной в [1], где обоснована связь между энергоэнтропией и информационной энтропией организации, предложим следующую формализацию:

$$S = \lambda \cdot I, \quad (1)$$

где S – энергоэнтропия, I – информационная энтропия, а λ определяется комбинацией всех энергетических параметров организации:

$$\lambda = \frac{(U - W) \cdot U \cdot \eta^{et}}{U + W}, \quad (2)$$

где U – суммарная энергия (капитал) организации; W – прирост капитала в результате работы организации; η^{et} – показатель эталонной энергоэффективности организации.

Прирост суммарной энергии организации:

$$W = E^{in} - E^{ex}, \quad (3)$$

где E^{in} – приток энергии; E^{ex} – отток энергии (свободная энергия, направляемая на выполнение работы).

$$\eta = \frac{U + W}{U}, \quad (4)$$

где η – показатель энергоэффективности организации, соотношение которого с η^{et} формирует степень достижения организацией эталонного состояния (эталонной энергоэффективности):

$$\mu = \frac{\eta}{\eta^{et}} = \frac{(U + W)}{U \cdot \eta^{et}}. \quad (5)$$

На рис. 1 представлена зависимость энергоэнтропии от информационной энтропии при заданном уровне $U = 50$, $\eta^{et} = 2$ для различных значений $W = \{15; 25; 35; 45\}$. Наибольшее влияние информационная энтропия достигает при минимальном значении прироста суммарной энергии.

Энтропия I отражает уровень упорядоченности организации, которая проявляется, в данном случае, в количестве возможных вариантов состояния организации (E_k^{in}, E_k^{ex}) , $k = \overline{1, K}$ и их вероятностях p_k , $k = \overline{1, K}$:

$$I = - \sum_{k=1}^K p_k \cdot \ln p_k. \quad (6)$$

Показатели $\{S, I, \mu, \eta\}$ формируют систему показателей состояния организации в рамках энергоэнтропийной теории организации. Именно данный набор показателей может однозначно свидетельствовать о состоянии организации и ее динамике. Но основными параметрами, которые обуславливают как энтропию информационную, так и энергоэнтропию, а также показатели энергоэффективности, являются E^{in} , E^{ex} . Действительно, W определяет и эффективность и прирост капитала, а вероятности E^{in} , E^{ex} формируют информационную энтропию организации I .

Уровень информационной энтропии (6) определяется, прежде всего, числом вариантов возможного состояния организации: при увеличении K (то есть числа прогнозируемых вариантов состояния организации) и уравнивании их вероятностей, информационная энтропия (6) растет. И, наоборот, при снижении K и явном выделении наиболее вероятных состояний (6) будет уменьшаться.

Величина E^{ex} – это то количество энергии, которое организация затрачивает на работу и на поддержание собственной структуры, а также структур, связанных с потребителями и поставщиками (маркетингом и логистикой): E^{in} – входящая энергия, которая определяется многими факторами: эффективностью маркетинга и логистики, состоянием внешней среды, качеством продукта организации и т.д. Очевидно, что E^{in} допускает значительное варьирование у организаций одной и той же сферы деятельности и масштаба, в зависимости от ценности организации и ее продукта с точки зрения потребителей. Если организации удалось сформировать устойчивую связь с потребителями на базе ценностного подхода [8 – 10], то диапазон E^{in} сужается. И, наоборот, если организация действует достаточно хаотично, то с одинаковыми вероятностями она может обеспечить как высокий уровень E^{in} , так и низкий.

Таким образом, величины E^{ex} и E^{in} являются зависимыми случайными величинами: затраты на маркетинг, которые являются частью E^{ex} , обуславливают определенную отдачу в виде части E^{in} . Чем эффективнее маркетинговые мероприятия, тем выше значение E^{in} . Таким образом, предварительные исследования поведения E^{in} и E^{ex} позволят определить для каждой из них набор значений:

$$E^{in} = \{E_1^{in}, E_2^{in}, \dots, E_n^{in}\}; \quad E^{ex} = \{E_1^{ex}, E_2^{ex}, \dots, E_m^{ex}\},$$

и соответствующие вероятности:

$$p(E_j^{in} / E_i^{ex}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \quad p(E_i^{ex}, E_j^{in}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

которые позволяют определить значение информационной энтропии в определенной ситуации (путем корректировки (6) следующим образом):

$$I = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(E_i^{ex}, E_j^{in}) \cdot \ln(p(E_j^{in} / E_i^{ex})). \quad (7)$$

Таким образом, с учетом (1) – (5), (7) энергоэнтропия конкретной организации с заданным уровнем U и соответствующей эталонной эффективностью η^{et} определяется поведением зависимых случайных величин E^{in} и E^{ex} (рис. 2). Отметим, что в каждой конкретной сфере деятельности отдельным направлением исследований является изучение поведения E^{in} и E^{ex} .

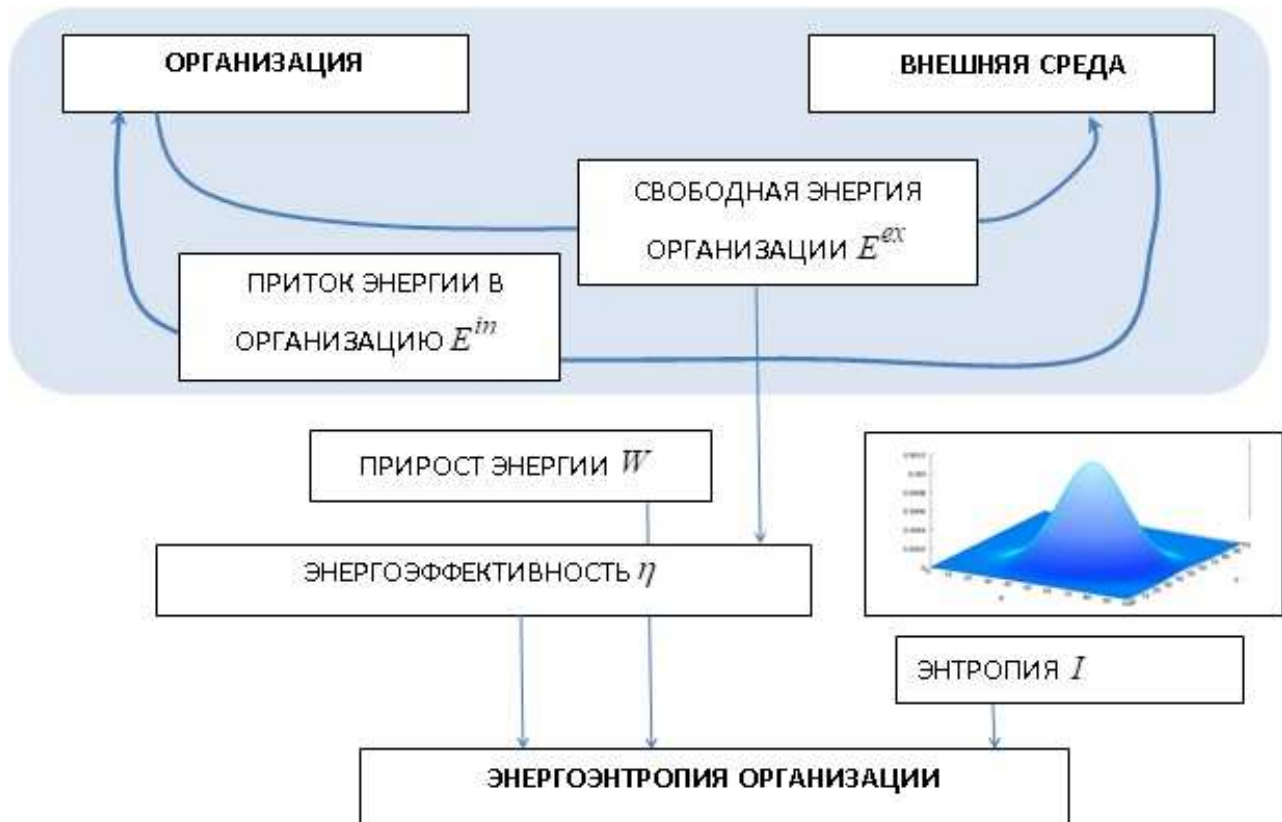


Рис. 2 – Факторы, влияющие на энергоэнтропию конкретной организации с заданным уровнем U и η^{et} .

Рис. 3, 4 демонстрируют динамику λ как связующего параметра между порядком в организации и энергоэнтропией в зависимости от основных влияющих параметров. Графики демонстрируют максимизацию λ при росте суммарной энергии U и эталонной энергоэффективности η^{et} , а также при уменьшении прироста энергии W . Таким образом, в такой ситуации, «неупорядоченность» оказывает максимальное влияние на энергоэнтропию.

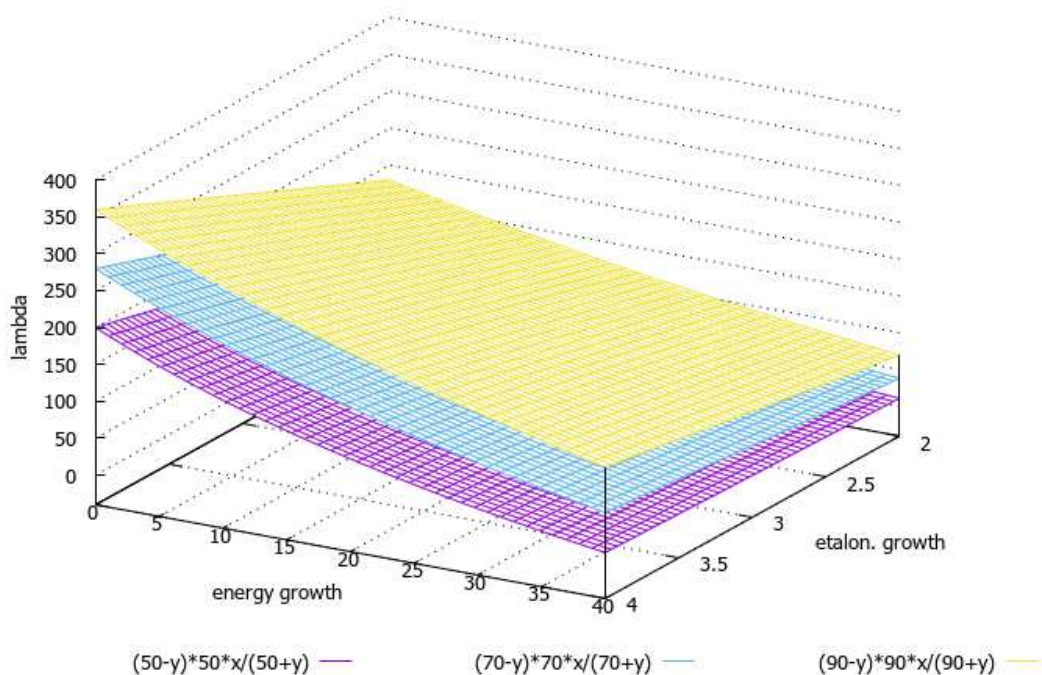


Рис. 3 – Графики зависимости λ от прироста энергии W и эталонной эффективности η^{et} для $U = \{50; 70; 90\}$.

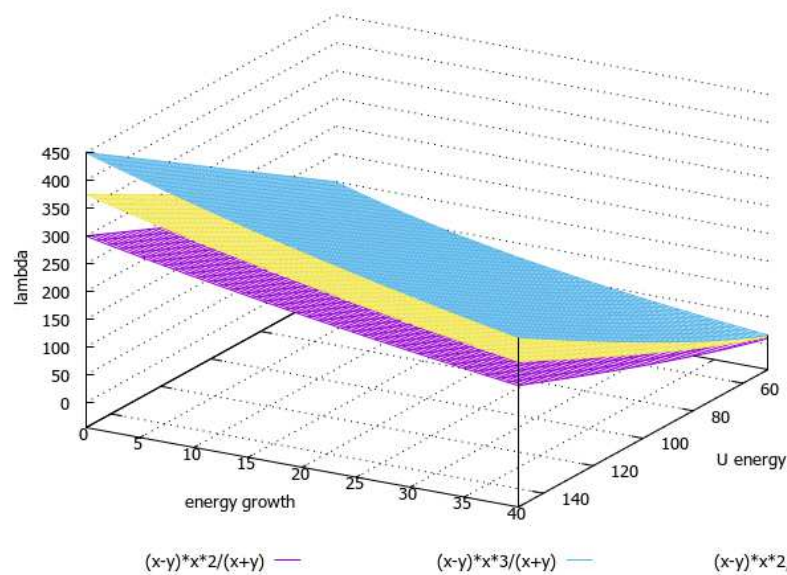


Рис. 4 – Графики зависимости λ от прироста энергии W и энергии U для $\eta^{et} = \{2; 2.5; 3\}$.

Перспективы дальнейших исследований. Дальнейшим развитием представленных результатов является исследование поведения информационной энтропии и энергоэнтропии для конкретных сфер деятельности с учетом динамики суммарной энергии организации, которая является аналогом их масштаба.

Выводы. В данном исследовании установлена взаимосвязь информационной энтропии организации как меры ее упорядоченности и энергоэнтропии в рамках изложения основных положений энергоэнтропийной теории организаций. Основной для исследования послужила модель энергоэнтропии, которая сформирована на основании теоретических положений и концептуальной модели, изложенных в [1]. Проведенные исследования позволили выявить условия, при которых влияние информационной энтропии на диссипацию и энергоэнтропию максимизируются. Также в работе установлены исходные параметры энергоэнтропии – свободная энергия и приток энергии в организацию. Все остальные параметры, влияющие на энергоэнтропию, являются опосредованными.

Список литературы

1. Bondar A., Bushuyev S., Onyshchenko S., Hiroshi H. Entropy Paradigm of Project-Oriented Organizations Management // Proceedings of the 1st International Workshop IT Project Management (ITPM 2020). Volume 1. Lviv, Ukraine, February 18 – 20, 2020, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org). – 2020. – P. 233 – 243. Режим доступа : <http://ceur-ws.org/Vol-2565/paper20.pdf>. – Дата звернення : 11.01.20.
2. Алексеев Г. Н. Энергоэнтропика. – М. : Знание, 1983. – 268 с.
3. Прангшвили И. В. Энтропийные и другие системные закономерности : Вопросы управления сложными системами // Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова. – М.: Наука, 2003. – 428 с.
4. Аверин Г. В., Звягинцева А. В. О взаимосвязи статистической и информационной энтропии при описании состояний сложных систем // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия : Математика. Физика. – 2016. – Т. 44. – №. 20 (241). – С. 105 – 116.
5. Аверин Г. В., Звягинцева А. В. Взаимосвязь термодинамической и информационной энтропии при описании состояний идеального газа // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. – 2013. – №. 1 – 2. – С. 26 – 37.
6. Шахов А. В. Энтропийная модель портфельного управления проектно-ориентированной организацией // Управління проектами та розвиток виробництва. – 2014. – № 2. – С. 87 – 95.
7. Bushuyev S., Sochnev S. Entropy measurement as a project control tool // International Journal of Project Management. – 1999. – № 17 (6). – P. 343 – 350.
8. Онищенко С. П., Арабаджи Е. С. Структура, цель, продукт и ценность программ развития предприятий // Вісник Одеського національного морського університету. – 2011. – № 33. – С. 75 – 86.
9. Бондарь А. В., Онищенко С. П. Оптимизация временных параметров проекта // Управління розвитком складних систем. – 2019. – № 39. – С. 11 – 18. DOI: <https://doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.11340629.V1>.
10. Бондар А. В. Концепція цінності людських ресурсів проектно-орієнтованої організації // Збірник наукових праць Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. – Видавничий дім «Гельветика». – 2019. – № 1. – С. 135 – 141. DOI: [https://doi.org/10.15589/znpp2019.1\(475\).19](https://doi.org/10.15589/znpp2019.1(475).19).

References (transliterated)

1. Bondar A., Bushuyev S., Onyshchenko S., Hiroshi H. Entropy Paradigm of Project-Oriented Organizations Management. *Proceedings of the 1st International Workshop IT Project Management (ITPM 2020). Volume 1. Lviv, Ukraine, February 18-20, 2020, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org)*. 2020, p. 233–243. Available at : <http://ceur-ws.org/Vol-2565/paper20.pdf> (accessed 11.01.20).
2. Alekseyev G. N. *Energoentropika* [Energy-entropics]. Moscow, Znaniye Publ., 1983. 268 p.
3. Prangishvili I. V. Entropiynnye i drugiye sistemnyye zakonomernosti. Voprosy upravleniya slozhnyimi sistemami [Entropy and other systemic laws: Issues of managing complex systems]. *In-t problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova* [V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 428 p.
4. Averin G. V., Zvyagitseva A. V. O vzaimosvyazi statisticheskoy i informatsionnoy entropii pri opisaniy sostoyaniy slozhnykh system [On the re-

- lationship of statistical and informational entropy in describing the states of complex systems]. *Nauchnyye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya : Matematika. Fizika* [Scientific Bulletin of the Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics]. 2016, vol. 44, no. 20 (241), pp. 105–116.
5. Averin G. V., Zvyagintseva A. V. Vzaimosvyaz' termodinamicheskoy i informatsionnoy entropii pri opisani sostoyaniy ideal'nogo gaza [Interrelation of thermodynamic and information entropy in the description of ideal gas states]. *Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii v nauках o prirode i obshchestve* [System analysis and information technologies in the sciences of nature and society]. 2013, no. 1–2, pp. 26–37.
 6. Shakhov A. V. Entropiynaya model' portfel'nogo upravleniya proyektno-orientirovannoy organizatsiyey [Entropy model of portfolio management of a project-oriented organization]. *Upravlinnya proyektamy ta rozvytok vyrobnytstva* [Project management and production development]. 2014, no. 2, pp. 87–95.
 7. Bushuyev S., Sochnev S. Entropy measurement as a project control tool. *International Journal of Project Management*. 1999, no. 17 (6), p. 343–350.
 8. Onishhenko S. P., Arabadzhi Ye. S. Struktura, tsel', produkt i tsennost' programm razvitiya predpriyatiy [The structure, purpose, product and value of enterprise development programs]. *Visnyk Odes'kogo natsional'nogo morskogo univertsytetu* [Bulletin of the Odessa National Marine University]. 2011, no. 33, pp. 75–86.
 9. Bondar A. V., Onishhenko S. P. Optimizatsiya vremennykh parametrov proyekta [Optimization of time parameters of project]. *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system* [Management of Development of Complex Systems]. 2019, no. 39, pp. 11–18. DOI: <https://doi.org/10.6084/M9.FIG-SHARE.11340629.V1>.
 10. Bondar A. V. Kontseptsiya tsinnosti lyuds'kykh resursiv proyektno-orientovanoi organizatsiyi [Human resources value concept for project-oriented organization]. *Zbirnyk naukovykh prats' Natsional'nogo universytetu korablebuduvannya imeni admiralа Makarova* [Proceedings of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding]. Vydavnychy dim «Gel'vatika». 2019, no. 1, pp. 135–141. DOI: [https://doi.org/10.15589/znp2019.1\(475\).19](https://doi.org/10.15589/znp2019.1(475).19).

Поступила (received) 18.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бондар Алла Віталіївна (Бондарь Алла Витальевна, Bondar Alla Vitaliyivna) – кандидат технічних наук, Одеський національний морський університет, м. Одеса; тел.: (063) 936-14-20; e-mail: ocheretyankaalla@gmail.com.

УДК 621.311

В. А. ВАНИН, Б. В. ВАНИН, Н. М. КРУГОЛ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ ГАЗОВОЗДУШНОГО ТРАКТА КОТЛА ТЭС

В работе предлагаются математические модели газозвоздушного тракта котла и механизмов собственных нужд ТЭС. С использованием табличных и графических представлений напорных характеристик серийных вентиляторов и дымососов получены эквивалентные соотношения для сети механизмов. Исследована задача нахождения оптимальных параметров управления для группы центробежных механизмов, обеспечивающих работу газозвоздушного тракта котла. Исследовано влияние разрежения в топке котла на режим работы его вспомогательных механизмов. Приводятся результаты моделирования для типичных последовательно-параллельных соединений механизмов в гидравлических сетях ТЭС.

Ключевые слова: тепловая электрическая станция, групповое управление, гидравлические системы, центробежные механизмы, частотно-регулируемый привод, энергоэффективность.

В. А. ВАНИН, Б. В. ВАНИН, Н. М. КРУГОЛ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЖИМІВ РЕГУЛЮВАННЯ ГАЗОПОВІТРЯНОГО ТРАКТУ КОТЛА ТЕС

В роботі пропонуються математичні моделі газоповітряного тракту котла та механізмів власних потреб ТЕС. З використанням табличних та графічних представлень напірних характеристик серийних вентиляторів та димососів отримані еквівалентні співвідношення для мережі механізмів. Досліджена задача знаходження оптимальних параметрів керування для групи відцентрових механізмів, що забезпечують роботу газоповітряного тракту котла. Виконаний аналіз впливу розрідження в топці котла на режим роботи його допоміжних механізмів. Приводяться результати моделювання для типових послідовно-паралельних з'єднань механізмів в гідравлічних мережах ТЕС.

Ключові слова: теплова електрична станція, групове керування, гідравлічні системи, відцентрові механізми, частотно-регульований привід, енергоефективність.

V. A. VANIN, B. V. VANIN, N. M. KRUGOL

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL POWER PLANT'S BOILER AIR-GAS FLOW PATH REGULATION MODES

The paper presents a mathematical model for thermal power plant's boiler air-gas flow paths and auxiliaries. With application of production fans' and flue gas extractor fans' head-capacity curves and tables, equivalent relations for the net of the mechanisms are obtained. A problem of determining the optimal control parameters for a group of centrifugal mechanisms in the air-gas path is studied. The effect of the boiler furnace draft on its auxiliaries operation is analyzed. The results of mathematical modeling for typical serial and parallel connections of the mechanisms in the thermal power plant hydraulic network are given.

Key words: thermal power plant, group control, hydraulic systems, centrifugal mechanisms, variable frequency drive, energy efficiency.

© В. А. Ванин, Б. В. Ванин, Н. М. Кругол, 2020

Введение. Основными вспомогательными механизмами для работы парового котла являются *дутьевые вентиляторы и дымососы*, объединенные в систему обеспечения собственных потребностей. Экономичная работа этих механизмов влияет на показатели эффективности работы энергоблока и электростанции в целом. Для управления работой такой системы механизмов используют различные способы регулирования их производительности:

- регулирование производительности с помощью угла закрытия направляющего аппарата;
- регулирование скорости вращения рабочего колеса механизма, например, с помощью изменения частоты питающего напряжения – индивидуальный частотный привод;
- групповое регулирование производительности, регулирование частоты питающего напряжения группы центробежных механизмов с дальнейшим дорегулированием угла открытия направляющего аппарата [1, 2].

Целью работы является построение *математической модели газовоздушного тракта котла* и исследования характеристик оптимального режима работы дутьевых вентиляторов и дымососов.

Анализ последних исследований. Анализ некоторых способов регулирования производительности *центробежных механизмов* можно найти в работе Л. В. Проданова [3], где рассматривается возможность внедрения группового регулирования производительности на тепловых электрических станциях. В работах Ванг Шупинг и Е. Джунанто [4], Г. Б. Лазарева [5] производится анализ использования частотного привода в системах собственных нужд тепловых электростанций (ТЭС).

Описание работы дутьевых вентиляторов и дымососов должно строиться на основе качественной математической модели их напорных характеристик $H = H_i(Q, \alpha, f)$ и функций $\eta = \eta_i(Q, \alpha, f)$ для вычисления индивидуального *коэффициента полезного действия (КПД)*. Используя их, строятся модели системы обеспечения работы парового котла ТЭС путем параллельно-последовательных соединений [6]. Некоторые математические модели энергетических котлов можно найти в работах А. А. Пономорева [7] и В. Е. Селезнева [8]. Математическому моделированию центробежных механизмов посвящена работа В. С. Костышина [9]. Общие показатели энергоэффективности таких систем задаются в виде некоторых функций от индивидуальных КПД механизмов.

Определения показателей работы (расходы, напоры и т.д.) систем обеспечения осуществляется решением уравнений, определяющих условия сопряжения с трубопроводной сетью и котлом.

Постановка задачи и математическая модель газовоздушного тракта котла. В *газовоздушный тракт* котла входят оборудование и трубопроводы, по которым движутся воздух, газ и продукты сгорания топлива. Их движение обеспечивается созданием в трубопроводном тракте перепада давлений с помощью тягодутьевых машин – дымососов и дутьевых вентиляторов.

На рис. 1 показано характерное распределение давления в газовоздушном тракте котла при его работе с уравновешенной тягой [10].

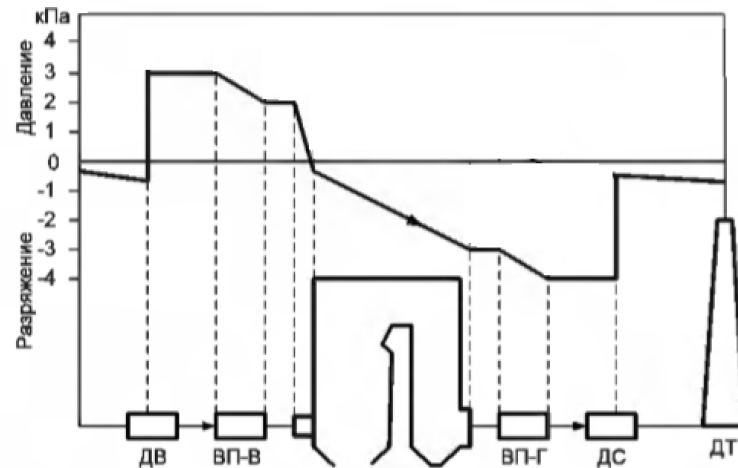


Рис. 1 – Распределение давлений в газовоздушном тракте при уравновешенной тяге: ДВ – дутьевой вентилятор; ВП-В – воздухоподогреватель (воздушная сторона); ВП-Г – воздухоподогреватель (газовая сторона); ДС – дымосос; ДТ – дымовая труба.

Каждый механизм сети задается напорной характеристикой вида $H = H(Q, \alpha, f)$, а сетевые элементы $H = H_c(Q, \xi)$, где Q – расход рабочей среды, α – угол установки лопаток *направляющего аппарата (н.а.)*, f – частота питающего напряжения электропривода механизма, ξ – коэффициент сопротивления гидравлической сети. Чаще всего для них используют зависимость $H_c(Q, \xi) = \xi Q^2$. Для паровых энергетических котлов, используемых на украинских ТЭС, характерным является использование двух дутьевых вентиляторов и одного или двух дымососов.

Построим для эквивалентной схемы газозвоздушного тракта котла, показанного на рис. 2, математическую модель. Так, состояние эквивалентной сети определяется набором характерных величин $Q_K, Q_{\Gamma}, Q_B, Q_{\Upsilon}, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, f_1, f_2, f_3, f_4, \xi_{BT}, \xi_{\Gamma T}$. Эти величины находим из решения системы уравнений для согласованных напорных характеристик групп механизмов при работе их на общие гидравлические сети. Структура уравнений определяется способом соединения механизмов и условиями работы на общие сети. Решения такой системы уравнений представляет параметризованное множество реализаций состояний сети. На нем решается оптимизационная задача энергоэффективности с целевой функцией – обобщенный показатель КПД.

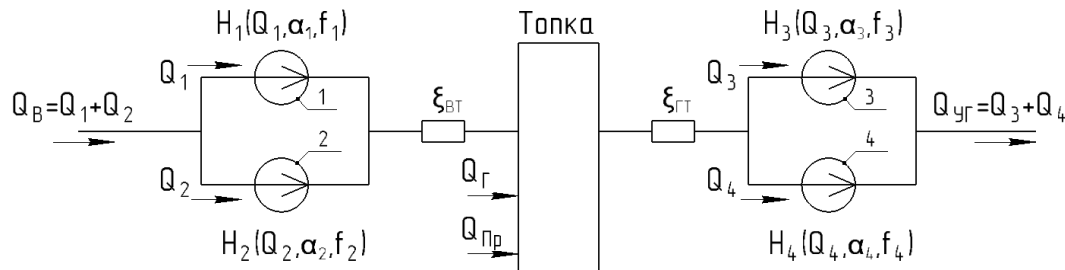


Рис. 2 – Эквивалентная схема газозвоздушного тракта котла: 1, 2 – дутьевые вентиляторы; 3, 4 – дымососы; Q_B – необходимый расход воздуха для эффективного сгорания объема газа Q_{Γ} ; Q_{Υ} – расход уходящих газов, которые образуются в результате процесса горения и присоса объема воздуха через неплотности в корпусе котла $Q_{\text{ПР}}$; $\xi_{BT}, \xi_{\Gamma T}$ – эквивалентные гидравлические сопротивления воздушной и газовой части тракта.

По зависимости расхода газа на производство пара в котле $Q_{\Gamma} = Q_{\Gamma}(Q_K)$ выберем рабочую точку (Q_{Γ}, Q_K) . Тогда производительность дутьевого вентилятора можно определить из соотношения [10]:

$$Q_B = Q_{\Gamma} V_B^0 (\alpha_{\Gamma} - \Delta\alpha_{\Gamma} + \Delta\alpha_{\text{ВП}}) \frac{t_{\text{хв}} + 273}{273},$$

где V_B^0 – теоретически необходимое для горения количество воздуха, $\text{м}^3/\text{м}^3$; α_{Γ} – коэффициент избытка воздуха в топке; $\Delta\alpha_{\Gamma}$ – присосы воздуха в топке котла; $\Delta\alpha_{\text{ВП}}$ – относительная утечка воздуха в воздухоподогревателе котла; $t_{\text{хв}}$ – температура холодного воздуха перед дутьевым вентилятором, $^{\circ}\text{C}$.

Принимаем, что два параллельно работающих дутьевых вентилятора работают в одинаковых условиях, и распределение производительностей между ними обеспечивается выбором параметров управления $\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2$.

При этом

$$Q_B = Q_1 + Q_2.$$

Производительность дымососа можно определить из соотношения [10]:

$$Q_{\Upsilon} = Q_{\Gamma} (V_{\Upsilon} + \Delta\alpha V_B^0) \frac{\vartheta_{\text{д}} + 273}{273},$$

где V_{Υ} – объем продуктов сгорания 1 м^3 топлива, $\text{м}^3/\text{м}^3$; $\Delta\alpha$ – присосы воздуха в газоходе и топке котла; $\vartheta_{\text{д}}$ – температура уходящих газов перед дымососом, $^{\circ}\text{C}$.

При параллельной их работе имеем:

$$Q_{\Upsilon} = Q_3 + Q_4.$$

Центробежный механизм, работающий на сеть, представляет сложную техническую систему. При моделировании режимов работы центробежных механизмов воспользуемся известными для них напорными характеристиками [11, 12].

Вид эквивалентной напорной характеристики $H = H_{\Sigma}(Q, \vec{\alpha}, \vec{f})$ при параллельной работе центробежных механизмов на общую сеть приведен в [6].

Работа эквивалентного центробежного механизма на сеть описывается следующим уравнением [12]:

$$H_{\Sigma}(Q, \vec{\alpha}, \vec{f}) = H_C(Q, \xi).$$

Задача нахождения оптимальных параметров управления группой центробежных механизмов парового энергетического котла. Пускай для обеспечения надежной и экономичной работы газо-воздушного тракта

котла используется группа из 4 центробежных механизмов с заданными характеристиками:

$$H = H_i(Q_i, \alpha_i, f_i), \quad i = 1 \dots 4; \quad \eta = \eta_i(Q_i, \alpha_i, f_i), \quad i = 1 \dots 4.$$

Параллельно работающие центробежные механизмы образуют механизмы с эквивалентными характеристиками:

$$H = H_{12}(Q, \vec{\alpha}, \vec{f}), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \vec{f} = (f_1, f_2);$$

$$H = H_{34}(Q, \vec{\alpha}, \vec{f}), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_3, \alpha_4), \quad \vec{f} = (f_3, f_4).$$

Заданное разрежение в топке котла H_T должно обеспечиваться центробежными механизмами, эквивалентными гидравлическими сопротивлениями воздушного и газового участка газо-воздушного тракта котла ξ_{BT}, ξ_{GT} .

Напорные характеристики для воздушной и газовой части трактов запишем в виде:

$$H_{cBT}(Q_B) = \xi_{BT} Q_B^2; \quad H_{cGT}(Q_{GT}) = \xi_{GT} Q_{GT}^2.$$

Тогда, функционирование газозвушного тракта котла описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} Q_T = 88,535 Q_K - 118,77; \\ Q_B = Q_T V_B^0 (\alpha_T - \Delta \alpha_T + \Delta \alpha_{BP}) \frac{t_{x6} + 273}{273}; \\ Q_B = Q_1 + Q_2; \\ H_{12}(Q_B, \vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{cBT}(Q_B) - H_T; \\ Q_{GT} = Q_T (V_{GT} + \Delta \alpha V_B^0) \frac{\vartheta_D + 273}{273}; \\ H_{34}(Q_{GT}, \vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{cGT}(Q_{GT}) + H_T; \\ Q_{GT} = Q_3 + Q_4. \end{cases} \quad (1)$$

Параметры управления центробежными механизмами группы найдем из условия, что *средневзвешенный КПД* будет иметь наибольшее значение:

$$(\vec{\alpha}, \vec{f}) = \arg \max_{\substack{\alpha \in A, f \in F \\ \omega_{12}(\vec{\alpha}, \vec{f}) = 0 \\ \omega_{34}(\vec{\alpha}, \vec{f}) = 0}} \Psi(\vec{Q}, \vec{\alpha}, \vec{f}), \quad (2)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \in A_1 \\ \alpha_2 \in A_2 \\ \alpha_3 \in A_3 \\ \alpha_4 \in A_4 \end{pmatrix} - \text{ограничения по углу открытия направляющего аппарата; } F = \begin{pmatrix} f_1 \in F_1 \\ f_2 \in F_2 \\ f_3 \in F_3 \\ f_4 \in F_4 \end{pmatrix} - \text{ограничения по}$$

частоте питающего напряжения;

$$\omega_{12}(\vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{12}(Q_B, \vec{\alpha}, \vec{f}) - H_{cBT}(Q_B) - H_T;$$

$$\omega_{34}(\vec{\alpha}, \vec{f}) = H_{34}(Q_{GT}, \vec{\alpha}, \vec{f}) - H_{cGT}(Q_{GT}) - H_T;$$

$$\Psi(\vec{Q}, \vec{\alpha}, \vec{f}) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \eta_i(Q, \alpha, f)}{\sum_{i=1}^N P_i},$$

где $P = P_i(Q)$ – мощность i -го механизма.

Поставленная задача решается *методом целенаправленного поиска*. Изменяя параметры $\alpha_i, f_i, i = 1 \dots 4$ с учетом ограничений задачи оптимизации (2), найдем те их значения, для которых средневзвешенный КПД группы механизмов будет максимальным. Для разных способов регулирования производительности центробежных механизмов нужно будет учесть следующие особенности:

– при регулировании производительности центробежных механизмов изменением угла открытия направляющего аппарата фиксируется частота питающего напряжения на уровне напряжения сети – 50 Гц:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 50 \text{ Гц} = \text{const};$$

– при групповом регулировании производительности частота питающего напряжения варьируется, но она остается равной для всех механизмов группы

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \text{var}.$$

Пример расчета. Рассмотрим нахождение оптимальных параметров управления группы центробежных механизмов, обеспечивающих работу парового энергетического котла MANN-120, установленного на Харьковской ТЭЦ-3. Диапазон работы котла по паропроизводительности – 60-120 т пара/ час. Давление пара после пароперегревателя – 70 кгс/см², температура насыщенного пара – 490 °С.

Работу котла обеспечивают пара дутьевых вентиляторов типа ВДН-17-3 и пара дымососов ДН-18.

Характеристики дутьевого вентилятора ВДН-17-3 имеют вид:

$$H_{1,2}(Q, \alpha, f) = 0,10809 f^2 + 0,00134 \alpha f^2 + 0,0491 \cdot 10^{-3} Q f - 0,0013 \cdot 10^{-3} \alpha Q f - 0,00002 \alpha^2 f^2 - 0,0432 \cdot 10^{-6} Q^2;$$

$$\eta_{1,2}(Q, \alpha, f) = 11,08442 + 1,28361 \alpha + 136,2035 \cdot 10^{-3} Q f^{-1} - 1,18969 \cdot 10^{-3} \alpha Q f^{-1} - 0,01116 \alpha^2 - 60,485 \cdot 10^{-6} Q^2 f^{-2}.$$

Характеристики дымососа ДН-18 имеют вид:

$$H_{3,4}(Q, \alpha, f) = 0,067655 f^2 + 0,003413 \alpha f^2 + 0,037102 \cdot 10^{-3} Q f - 0,0014 \cdot 10^{-3} \alpha Q f - 0,000034 \alpha^2 f^2 - 0,003526 \cdot 10^{-6} Q^2;$$

$$\eta_{3,4}(Q, \alpha, f) = 13,027464 + 1,647837 \alpha + 47,895852 \cdot 10^{-3} Q f^{-1} - 0,535853 \cdot 10^{-3} \alpha Q f^{-1} - 0,017458 \alpha^2 - 10,064 \cdot 10^{-6} Q^2 f^{-2}.$$

Коэффициенты, используемые для моделирования режима работы котла, представлены в табл. 1.

Зависимость расхода газа от паропроизводительности котла MANN-120 имеет вид:

$$Q_{\Gamma} = 88,535 Q_K - 118,77.$$

По результатам математического моделирования режимов работы газовоздушного тракта и решения задачи оптимального управления группой центробежных механизмов котла были получены зависимости средневзвешенного КПД группы механизмов от паропроизводительности котла при разных способах регулирования. На рис. 3 показаны результаты расчета для диапазона работы котла 90-120 т/час, при разрежении в топке котла на уровне 30 мм в.ст.

Таблица 1 – Значение коэффициентов

Обозначение	Значение	Примечание
Коэффициент избытка воздуха в топке котла	$\alpha_T = 1,1$	Топливо – природный газ [13]
Присос воздуха в топке котла	$\Delta \alpha_T = 0,05$	Для газо-мазутных котлов [13]
Присос воздуха в воздухоподогревателе котла	$\Delta \alpha_{ВП} = 0,03$	На каждую ступень Воздухоподогревателя [13]
Присосы воздуха в газоходе и топке котла	$\Delta \alpha = 0,2$	Для газо-мазутных котлов [13]
Теоретически необходимое для горения газа количество воздуха	$V_B^0 = 9,98 \text{ м}^3/\text{м}^3$	Для природного газа Шебелинского месторождения [14]
Теоретический объем продуктов сгорания газа	$V_{YT} = 11,19 \text{ м}^3/\text{м}^3$	Для природного газа Шебелинского месторождения [14]

Рассмотрим режим работы парового энергетического котла ТЭЦ при его паропроизводительности в 100 т/час. Согласно технической документации его работу обеспечивают два дымососа и два дутьевых вентилятора. Для реализации такого режима работы необходимо сжигать в топке котла $Q_{\Gamma} = 8735 \text{ м}^3/\text{час}$ природного газа. Необходимый расход воздуха, который необходимо подать в топку котла, равняется 101 тыс. м^3 . В результате сжигания топлива образуются продукты сгорания, которые с учетом присосов воздуха через неплотности газоходов образуют расход уходящих газов $Q_{YT} = 199,55 \text{ тыс. м}^3/\text{час}$, который обеспечивает группа дымососов.

Как видно из рис. 3, наиболее эффективным способом регулирования производительности есть использование индивидуального привода для каждого из центробежных механизмов. При таком регулировании существуют такие параметры управления (α^*, f^*) , при которых КПД механизма будет принимать максимально воз-

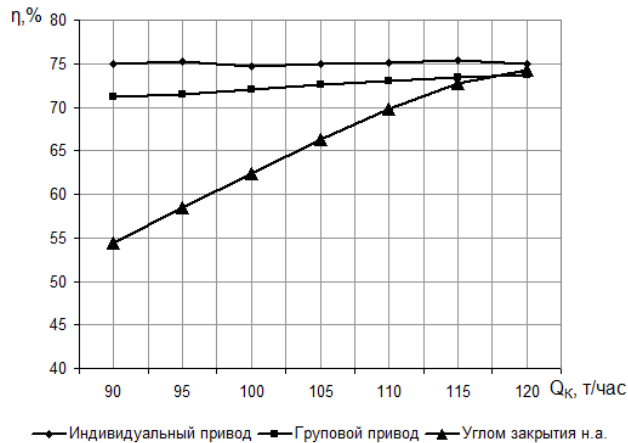


Рис. 3 – Значения средневзвешенного КПД группы центробежных механизмов котла при разных способах регулирования.

Исследования разных режимов работы котла показали, что при использовании одинаковых параллельно работающих центробежных механизмов максимум КПД достигается при равных расходах среды через них, а, следовательно, и параметры управления для них будут одинаковыми. На рис. 5 показана зависимость средневзвешенного КПД группы дымососов котла от производительности на одном из дымососов при общем расходе уходящих газов через группу в 200 тыс. $\text{м}^3/\text{час}$. Как видно из рисунка, максимум КПД достигается при равном распределении расхода среды через дымососы.

Согласно техническим требованиям, в верхней точки топки необходимо поддержание разрежения на уровне 20 – 40 Па, а, следовательно, возникает задача анализа влияния разрежения в топке котла на эффективность работы центробежных механизмов газо-воздушного тракта.

На рис. 6 представлена зависимость средневзвешенного КПД группы центробежных механизмов от значения разрежения в топке котла при его паропроизводительности в 100 т/час. Как видно из рисунка, при индивидуальном приводе, разрежение в топке котла не влияет на средневзвешенный КПД группы механизмов, так как при таком способе регулирования обеспечивается максимально возможный КПД. Увеличение разрежения в топке приводит к росту напора, который должен быть обеспечен дымососами с одной стороны, но снижает напор дутьевых вентиляторов с другой. И на средневзвешенный КПД группы будут влиять более мощные механизмы (в рассматриваемой примере это дымососы).

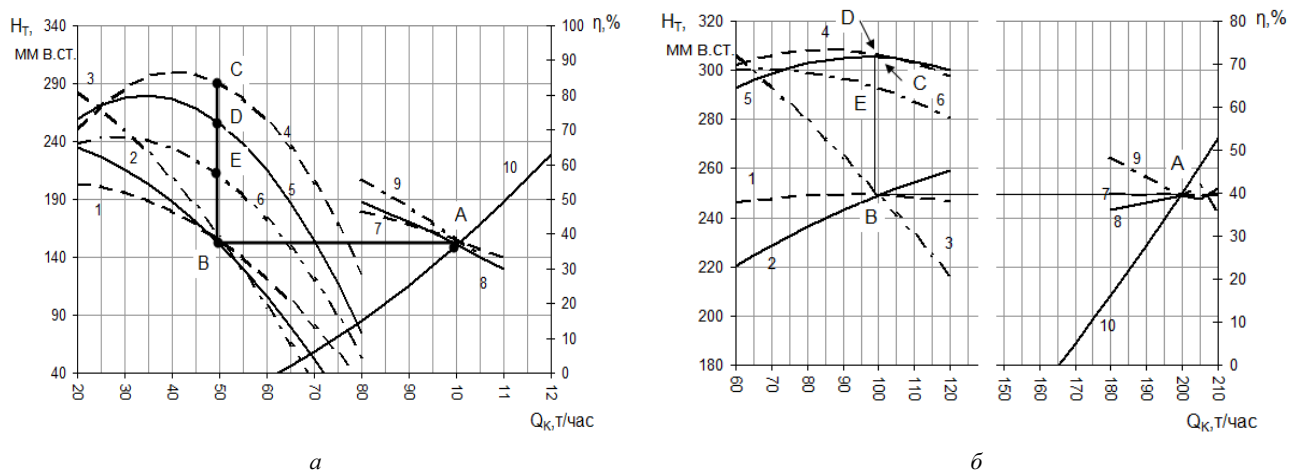


Рис. 4 – Работа механизмов на сеть при разных способах регулирования производительности:

а – характеристики дутьевого вентилятора ВДН-17-3; б – характеристики дымососа Д-18;

1, 2, 3 – $H-Q$ характеристики при индивидуальном, групповом регулировании и изменении угла открытия н.а.;

4, 5, 6 – $\eta-Q$ характеристика при индивидуальном, групповом регулировании и изменением угла открытия н.а.;

7, 8, 9 – эквивалентные $H-Q$ характеристики параллельно работающих механизмов при индивидуальном, групповом регулировании и изменением угла открытия н.а.; 10 – характеристика сети.

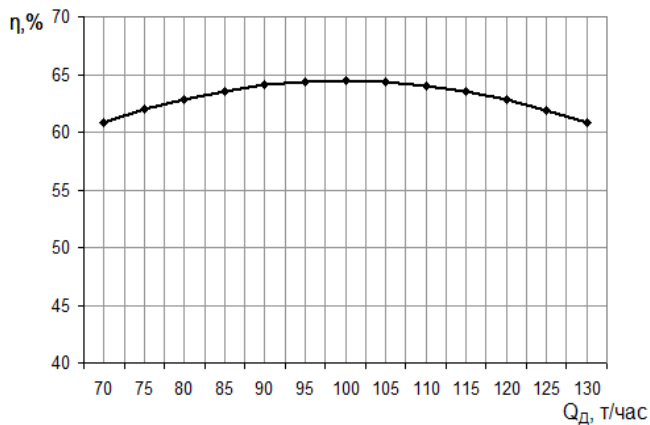


Рис. 5 – Зависимость средневзвешенного КПД группы из двух параллельно работающих дымососов при регулировании их производительности изменением угла открытия н.а.

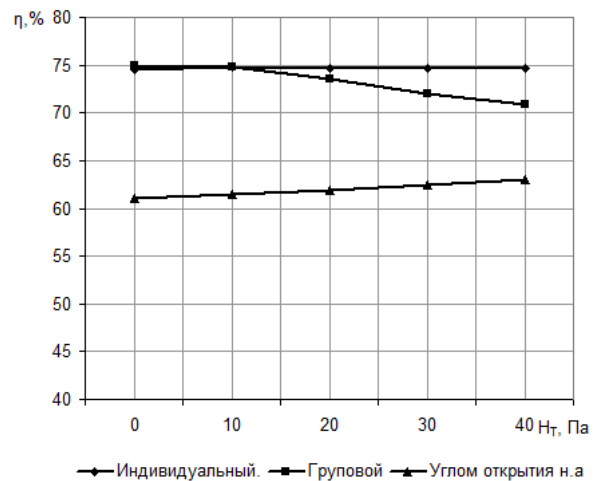


Рис. 6 – Зависимость средневзвешенного КПД группы центробежных механизмов от значения разрежения в топке котла при разных способах регулирования.

Выводы. В статье предложена математическая модель газозоудного тракта парового энергетического котла. Поставлены задачи нахождения оптимальных параметров управления группой центробежных механизмов котла при разных способах регулирования их производительности.

Доказано, что наиболее эффективный способ регулирования производительности есть использование индивидуального частотного привода. Представлены результаты моделирования и найдены значения средневзвешенных КПД группы механизмов в диапазоне работы парового энергетического котла 90 – 120 т/час при разных способах регулирования их производительности.

Произведен анализ влияния распределения расходов между одинаковыми параллельно работающими центробежными механизмами. На примере двух дымососов Д-18 показано, что максимальный средневзвешенный КПД такой группы достигается при равной загрузке механизмов.

Также показано влияние разрежения в топке котла на средневзвешенный КПД механизмов при разных способах регулирования их производительности.

Анализ полученных результатов показал, что наиболее рациональный путь модернизации существующих ТЭС ведет к использованию индивидуального частотного привода для механизмов газозоудного тракта котла. При ограниченных капиталовложениях возможно использование группового способа регулирования производительности таких механизмов ввиду его более низкой стоимости. Эффективность индивидуального частотного привода значительно превышает эффективность существующих способов регулирования производительности дымососов и дутьевых вентиляторов.

Список литературы

1. Лазуренко А. П., Кругол Н. М. Использование группового регулирования механизмами собственных нужд ТЭЦ для повышения КПД в летний период // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. : Енергетика: надійність та енергоефективність. – 2014. – № 56(1098). – С. 78 – 82.
2. Ванін В. А., Лазуренко О. П., Кругол М. М. Оптимальне електромеханічне керування гідродинамічними системами // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. Сер. : Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України. – 2018. – № 195. – С. 18 – 20.
3. Проданов Л. В., Агапов А. П. Применение группового частотного регулирования для агрегатов собственных нужд маневренных блоков ТЭС // Энергетика. – 1990. – № 5. – С. 13 – 19.
4. Wang Shu-ping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinia. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fans and pumps in power plants (CIGRE Sessions 2012, Paris, France, August 26 – 31, 2012). – Режим доступу : https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Paris%202012/A1/A1_203_2012.pdf. – Дата звертання : 15 січня 2020 р.
5. Лазарев Г. Б. Управление эффективностью механизмов собственных нужд ТЭС // Энергия единой сети. – 2013. – №5. – С. 58 – 67.
6. Ванін В. А., Лазуренко О. П., Кругол М. М. Математичні моделі та оптимізація роботи груп механізмів власних потреб ТЕС // Праці міжнародної науково-технічної конференції «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях». – Харків, 2020. – С. 55 – 59.
7. Пономарев А. А. Модель газозоудного тракта теплоэнергетического котла как объекта регулирования // Сборник научных трудов НГТУ. – 2010. – № 3(61). – С. 19 – 29.
8. Селезнев В. Е., Алешин В. В., Прялов С. Н. Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.
9. Костышин В. С. Моделирование режимов работы центробежных насосов на основе электрогидравлической аналогии. – Ивано-Франковск, 2000. – 163 с.

10. Бойко А. Е., Деринг И. С., Охорзина Т. И. Котельные установки и парогенераторы. Аэродинамический расчет котельных установок. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2006. – 72 с.
11. Kruhol N., Lasurenko O., Vanin V. Group Regulation Efficiency Analysis for Thermal Power Plant Auxiliaries // 2019 IEEE 6th International Conference on Energy Smart Systems (ESS). Kiev, Ukraine, 17 – 19 April 2019. doi: 10.1109/ESS.2019.8764242.
12. Ванін В. А., Кругол Н. М., Лазуренко А. П. Математические модели систем обеспечения работы котлоагрегата ТЭС в задаче повышения его энергоэффективности // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – Вип. 8 (1333). – С. 41 – 48.
13. Бойко А. Е. Котельные установки и парогенераторы. Тепловой расчет парового котла. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 96 с.
14. Тепловой расчет котельных агрегатов. Нормативный метод. Изд. 3 -е, перераб. и доп. – С.-Петербург : НПО ЦКТИ – ВТИ, 1998. – 257 с.

References (transliterated)

1. Lazurenko A. P., Kruhol N. M. Ispol'zovanie gruppovogo regulirovaniya mekhanizmami sobstvennykh nuzhd TETS dlya povysheniya KPD v letniy period [Using thermal power plant own need group regulation mechanism for improving efficiency during summer period]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser. : *Energetyka : nadiynist' ta energoefektyvnist'* [Bulletin of NTU "KhPI". Series : Energy: reliability and efficiency]. 2014, no. 56(1098), pp. 78–82.
2. Vanin V. A., Kruhol N. M., Lazurenko O. P. Optymal'ne elektromekhanichne keruvannya gidrodynamichnymy systemamy [Optimal electrical and mechanical control of hydrodynamic machines]. *Visnyk Kharkivskogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil'skogo hospodarstva imeni Petra Vasylenka*. Ser. : *Problemy energozabezpechennya ta energozberezhennya v APK Ukrainy* [Bulletin of the P. Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture. Series : Problems of power supply and energy saving in agro-industrial complex of Ukraine]. 2018, no. 195, pp. 18–20.
3. Prodanov L. V., Agapov A. P. Primenenie geuppovogo chastnogo regulirovaniya dlya agregatov sobstvennykh nuzhd manyevrennykh blokov TES [Using group frequency regulation for auxiliary aggregates of thermal power plant maneuverable units]. *Energetika* [Energetics]. 1990, no. 5, pp. 13–19.
4. Wang Shuping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinia. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fan-sand pumps in power plants (CIGRE Sessions 2012, Paris, France, August 26 – 31, 2012). Available at : https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Pairis%202012/A1/A1_203_2012.pdf (accessed :15.01.19).
5. Lazarev G. B. Upravlenie effektivnost'yu mekhanizmov sobstvennykh nuzhd TES [Controlling efficiency of thermal plant auxiliaries]. *Energiya edinoi seti* [Energetics of single network]. 2013, no. 5, pp. 58–67.
6. Vanin V. A., Lazurenko O. P., Kruhol N. M. Matematychni modeli ta optymizatsiya roboty grup mekhanizmov vlasnykh potreb TES. [Mathematical model and optimization of operation of thermal plant auxiliaries]. *Pratsi mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiyi "Kompyuterne modelyuvannya v naukoyemnykh tekhnolohiyakh"* [Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "Computer simulation in knowledge-intensive technologies"]. Kharkiv, 2020, pp. 55–59.
7. Ponomarev A. A. Model' gazovozdushnogo trakta teploenergeticheskogo kotla kak ob'ekta regulirovaniya [Model of air-gas path of heat and power boiler as a controlled system]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU* [Collection of research papers of NTUU]. 2010, no. 3(61), pp. 19–29.
8. Seleznev V. E., Aleshin V. V., Pryalov S. N. Matematicheskoe modelirovanie truboprovodnykh setey i sistem kanalov : metody, modeli i algoritmy [Mathematical modeling of pipeline systems and channelling: methods, models and algorithms]. Moscow, MAKS Press Publ., 2007. 695 p.
9. Kostyshin V. S. Modelirovanie rezhimov raboty centrobeznykh nasosov na osnove elektrogidravlicheskoy analogii [Modeling centrifugal pump operation modes by electrohydraulic analogy]. Ivano-Frankovsk, 2000. 163 p.
10. Boyko A. E., Dering I. S., Okhorzina T. I. Kotel'nye ustanovki i parogeneratory. Aerodinamicheskiy raschet kotel'nykh ustanovok [Boiler plants and steam generators. Boiler plant aerodynamic analysis]. Krasnoyarsk, IPC KGTU Publ., 2006. 72 p.
11. Kruhol N., Lasurenko O., Vanin V. Group Regulation Efficiency Analysis for Thermal Power Plant Auxiliaries. 2019 IEEE 6th International Conference on Energy Smart Systems (ESS). Kiev, Ukraine, 17 – 19 April 2019. doi: 10.1109/ESS.2019.8764242.
12. Vanin V. A., Kruhol N. M., Lazurenko A. P. Matematicheskie modeli sistem obespecheniya raboty kotloagregata TES v zadache povysheniya ego energoefektivnosti [Mathematical models of thermal power plant boiler operation systems in the problem of the boiler energy efficiency improvement]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2019, vol. 8/2019 (1333), pp. 41–48.
13. Boyko A. E. Kotel'nye ustanovki i parogeneratory. Teplovoy raschet parovogo kotla [Boiler plants and steam generators. Boiler plant thermal analysis]. Krasnoyarsk, IPC KGTU Publ., 2005. 96 p.
14. Teplovoy raschet kotel'nykh agregatov. Normativnyy metod. Izd. 3 -e, pererab. i dop. [Boiler unit thermal analysis. Normative method. Ed. 3, updated and revised]. S.-Peterburg, NPO CKTI – VTI Publ., 1998. 257 p.

Поступила (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович (Ванін Виктор Антонович, Vanin Viktor Antonovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Ванін Борис Вікторович (Ванін Борис Викторович, Vanin Boris Viktorovich) – магістр факультету комп'ютерних наук, Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Кругол Микола Михайлович (Кругол Николай Михайлович, Kruhol Nikolay Mikhaylovich) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: kruhgol@gmail.com.

УДК 0004.04

В. О. ГОРОХОВАТСЬКИЙ, О. П. ТАРАСЕНКО, С. М. ТРОХИМЧУК**ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГІЧНИХ ФОРМ ФУНКЦІЙ ВИБОРУ У ЗАДАЧАХ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ**

У дослідженні вивчається і теоретично обґрунтована можливість застосування апарату логічних форм вибору, що використовується у теорії прийняття рішень, для бінарного подання атрибутів зображень задля скорочення розмірності простору та уніфікації образів. Для цього задіяна методика логічного проектування атрибутів зображення на множину логічних функцій фіксованого виду. Уніфікація вектору атрибутів сприяє стисненню даних. Розвинутий підхід демонструє зв'язок між теоріями прийняття рішень та розпізнавання образів. Наведені конкретні практичні приклади застосування логічних функцій вибору підтверджують працездатність сумісного впровадження цих теорій.

Ключові слова: логічні форми, функції вибору, розпізнавання образів, образ.

В. А. ГОРОХОВАТСКИЙ, А. П. ТАРАСЕНКО, С. Н. ТРОХИМЧУК**ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМ ФУНКЦИЙ ВЫБОРА В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ**

В исследовании изучена и теоретически обоснована возможность применения аппарата логических форм выбора, которые используются в теории принятия решений, для бинарного представления атрибутов изображений с целью уменьшения размерностей и унификации образов. Для этого была задействована методика логического проецирования атрибутов изображения на множество логических функций специального вида. Это представляет собой новый подход при унификации конечного вектора атрибутов, что ведет к значительному уменьшению размера вектора атрибутов. Данный подход показывает связь между теорией принятия решений и теорией распознавания образов. Приведенные конкретные практические примеры применения логических функций выбора подтверждают дееспособность совместного внедрения этих теорий.

Ключевые слова: логические формы, функции выбора, распознавания образов, образ.

V. O. GOROKHOVATSKYI, O. P. TARASENKO, S. M. TROKHIMCHUK**APPLICATION OF LOGIC FORMS OF CHOICE FUNCTIONS IN TASKS OF RECOGNITION OF PATTERNS**

The study examined and theoretically substantiated the possibility of using the apparatus of logical forms of choice, which are used in decision theory, for binary representation of image attributes in order to reduce dimensions and unify images. To do this, we used the methodology of logical projection of image attributes onto a set of logical functions of a special kind. This represents a new approach to unification of the final attribute vector, which leads to a significant reduction in the size of the attribute vector. This approach shows the relationship between decision theory and pattern recognition theory. The given specific practical examples of the application of choice logical functions confirm the viability of the joint implementation of these theories.

Key words: logical forms, functions of the choice, recognitions of images, image.

Вступ. У системах комп'ютерного зору набули популярності та практичного застосування методи розпізнавання візуальних об'єктів, що засновані на локальних прикметах зображення. Такі методи базуються на визначенні множини ключових точок (КТ) та їх описі у вигляді числового чи бінарного вектора – дескриптора, що відображає вміст множини локальних околиць КТ зображення [1 – 6, 8 – 10, 11]. Значення вектора дескриптора інваріантне стосовно групи геометричних перетворень візуальних об'єктів на зображенні (зміщення, поворот, масштабування), а кількість утворених дескрипторів, що формують опис, повинна бути достатньою для прийняття результативного рішення відносно розрізнення розпізнаваних об'єктів [11].

У роботі [1] запропоновано новітній метод ORB (Oriented FAST and Rotated BRIEF), який є модифікованою комбінацією методу FAST (Features from Accelerated Test) [4] для виявлення КТ та визначенням дескриптора у вигляді бінарного рядка за методом BRIEF (Binary Robust Independent Elementary Features) [5]. Метод FAST – один з найбільш поширених сучасних детекторів КТ.

Метод ORB використовує модифікацію FAST-9 (параметр радіусу аналізованого кола з пікселів дорівнює 9) для виявлення потенційних ключових точок, далі уточнюється їх множина за детектором кутів Harris та обчислюється орієнтація і їх дескриптори з використанням BRIEF. Бінарний вектор дескриптора визначається шляхом порівняння значень яскравості пар точок всередині квадратного вікна, що центроване відносно координат КТ та узгоджено з її орієнтацією [1, 6].

Метод ORB менш вимогливий до обчислювальних ресурсів у порівнянні з іншими. Виграш у швидкості обчислень пояснюється простою процедурою побудови дескрипторів. ORB дає за результатами тестування помітний виграш у швидкодії при порівняльній або кращій точності, ніж SIFT та SURF [6, 11].

На рис. 1 показано вигляд дескриптора ORB, де одиниця позначена чорним кольором, а нуль – білим.



Рис. 1 – Бінарний дескриптор ORB.

Зважаючи на бінарний вид дескрипторів ORB, є можливість для побудови результативних правил класифікації, які ґрунтуються виключно на обробленні бінарних даних.

У зв'язку з поширенням бінарного оброблення інформації у системах розпізнавання виникає необхідність цілеспрямованої трансформації аналізованих даних з метою їх уніфікованого стисненого подання.

Математичний апарат *логічних форм функцій вибору (ЛФФВ)* ефективно використовують у прикладних задачах *теорії прийняття рішень* [7]. Зважаючи на те, що розпізнавання бінарних образів, як правило, зводиться до прийняття класифікаційних рішень про належність якогось образу до одного із з класів [8], апарат ЛФФВ може бути безпосередньо застосований для визначення релевантності образів об'єкта та еталонів [10 – 11].

Мета роботи. Актуальним на сьогодні є вивчення можливостей ЛФФВ для розпізнавання цифрових зображень, де завдяки сучасним методам та програмним засобам для формування детекторів ключових точок вдалося побудувати ефективні формальні процедури, де образ розпізнаваного об'єкта має вид множини бінарних векторів [9]. При цьому класифікація зводиться до визначення ступеня релевантності двох множин таких векторів [11], що є безпосереднім предметом для застосування апарату ЛФФВ.

Актуальною також у структурних методах розпізнавання є задача встановлення належності заданій множині бінарних векторів деякого аналізованого вектора, що входить до складу ознак розпізнаваного об'єкта [8]. За кількістю виявлених еквівалентних ознак образів визначається належність об'єкта до визначеного класу.

Суть застосування апарату ЛФФВ. Апарат ЛФФВ оперує бінарними векторами $\beta(X)$ розмірності n , які визначаються наступним чином [7]:

$$\beta(X) = \langle \beta_1(X), \beta_2(X), \dots, \beta_n(X) \rangle, \text{ де } \beta_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \in X; \\ 0, & \text{якщо } x_i \notin X, \end{cases}$$

де $X \subseteq \Omega$ – підмножина заданої множини елементів, $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$.

У теорії ЛФФВ застосовано взаємно-однозначну відповідність між векторами $\beta(X)$ та усякими підмножинами X елементів із Ω . Так, *повній множині* Ω відповідає вектор $\beta(\Omega) = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$, а *пустій множині* $\emptyset$ – вектор $\beta(\emptyset) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$.

На підмножині X множини Ω задана функція вибору C , яка у відповідності до деякого критерію вибирає елементи, що належать підмножині X [1]. Вона задовольняє умові $C(X) \subseteq \Omega$ і теж формує бінарний вектор, компоненти якого вказують на належність чи відсутність елементів із Ω . Важливо те, що ці критерії можуть бути як *формалізованими*, так і *неформалізованими*, що значно розширює коло можливостей.

Розглянемо *сімейство булевих функцій* від $n-1$ змінних

$$f_1(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}), \dots, f_n(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}),$$

які складають основу ЛФФВ, однозначно характеризують функцію вибору та побудовані наступним чином:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} f_i(\beta) &= f_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n), \quad i \neq 1, n; \quad f_1(\beta) = f_1(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n); \\ f_n(\beta) &= f_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{n-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Треба зазначити, що вираз (1) еквівалентний $\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X) = \beta_i(C(X))$, $i \neq 1, n$.

Тобто β_i відповідає за належність елемента, а $f_i(\beta(X))$ – за належність до функції вибору. У теорії ЛФФВ встановлено взаємозв'язок функцій через логічну операцію «І».

З урахуванням визначення *бета-функції* можна стверджувати, що це відповідає наступному виразу:

$$\beta_i(X) = \beta_i(C(X)). \quad (3)$$

Існує твердження, що, якщо задано будь-яке сімейство булевих функцій $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ від $n-1$ змінних, то (1) та (2) однозначно визначають функцію вибору C . Вона співпадає з існуючим сімейством $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$. Таким чином, визначення функції вибору еквівалентно визначенню ЛФФВ (C) [1].

Таким чином, можна зробити висновок, що запропоновано перехід від неформального опису функцій вибору до формального представлення у вигляді аналітичного опису.

Приклад побудови функції вибору. Розглянемо демонстраційний приклад такого перетворення. Хай наступним чином задано $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та функцію вибору C , яка не має аналітичного опису:

$$C(x_i) = x_i; \quad C(x_i, x_j) = x_k, \text{ де } k = \min\{i, j\}; \quad C(x_i, x_j, x_k) = \{x_i, x_j, x_k\} \setminus x_r, \text{ де } r = \max\{i, j, k\};$$

символ $\setminus$ – означає не належність елементу множині.

Побудуємо аналітичний опис для C у вигляді набору ЛФФВ.

Для цього розглянемо табл. 1, за допомогою якої та (1), будемо мати таблиці, які задають f_1, f_2, f_3, f_4 (табл. 2) на підставі (3). Значення f_1, f_2, f_3, f_4 формуються з розгляду табл. 1, де на всій множині значень $\beta(X)$ та $\beta(C(X))$ у відповідних позиціях β_i повинні бути 1, а решта комбінацій дорівнює 0.

Таблиця 1 – формування векторів $\beta(X)$ та $\beta(C(X))$

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1	x_1	$\langle 1000 \rangle$	$\langle 1000 \rangle$
x_2	x_2	$\langle 0100 \rangle$	$\langle 0100 \rangle$
x_3	x_3	$\langle 0010 \rangle$	$\langle 0010 \rangle$
x_4	x_4	$\langle 0001 \rangle$	$\langle 0001 \rangle$
x_1, x_2	x_1	$\langle 1100 \rangle$	$\langle 1000 \rangle$
x_1, x_3	x_1	$\langle 1010 \rangle$	$\langle 1000 \rangle$
x_1, x_4	x_1	$\langle 1001 \rangle$	$\langle 1000 \rangle$
x_2, x_3	x_2	$\langle 0110 \rangle$	$\langle 0100 \rangle$
x_2, x_4	x_2	$\langle 0101 \rangle$	$\langle 0100 \rangle$
x_3, x_4	x_3	$\langle 0011 \rangle$	$\langle 0010 \rangle$
x_1, x_2, x_3	x_1, x_2	$\langle 1110 \rangle$	$\langle 1100 \rangle$
x_1, x_2, x_4	x_1, x_2	$\langle 1101 \rangle$	$\langle 1100 \rangle$
x_1, x_3, x_4	x_1, x_3	$\langle 1011 \rangle$	$\langle 1010 \rangle$
x_2, x_3, x_4	x_2, x_3	$\langle 0111 \rangle$	$\langle 0110 \rangle$
x_1, x_2, x_3, x_4	x_1	$\langle 1111 \rangle$	$\langle 1000 \rangle$

Таблиця 2 – формування функцій f_1, f_2, f_3, f_4

β_2	β_3	β_4	f_1	β_1	β_3	β_4	f_2
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0
β_1	β_2	β_4	f_3	β_1	β_2	β_4	f_4
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0

Використовуючи табл. 2 та розклад функцій у завершену диз'юнктивну нормальну форму (ЗДНФ), маємо:

$$f_1(\beta_2, \beta_3, \beta_4) \equiv 1;$$

$$f_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) = \bar{\beta}_1 \vee \beta_1 (\bar{\beta}_3 \beta_4 \vee \beta_3 \bar{\beta}_4);$$

$$f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \vee \beta_4 (\bar{\beta}_2 \beta_1 \vee \beta_2 \bar{\beta}_1);$$

$$f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3.$$

Ці функції отримані із таблиць та мають аналітичний опис і, що важливо, однозначно відповідають нашому початковому неформальному опису функції вибору C . Таким чином, маємо ЛФФВ (C) = $\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$.

Для f_1, f_4 ЗДНФ є цілком зрозумілими, а ось для f_2, f_3 – ні. Покажемо, який вигляд повинні мати f_2, f_3 .

У тих рядках, де функція f_2 має значення 1 (їх усього 6), будемо відповідні змінні об'єднувати операцією кон'юнкції:

$$\begin{aligned} f_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) &= \overline{\beta_1} \overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \overline{\beta_1} \overline{\beta_3} \beta_4 \vee \overline{\beta_1} \beta_3 \overline{\beta_4} \vee \overline{\beta_1} \beta_3 \beta_4 \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \beta_4 = \overline{\beta_1} \overline{\beta_3} (\overline{\beta_4} \vee \beta_4) \vee \overline{\beta_1} \beta_3 (\overline{\beta_4} \vee \beta_4) \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \beta_4 = \\ &= \overline{\beta_1} \overline{\beta_3} \vee \overline{\beta_1} \beta_3 \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \beta_4 = \overline{\beta_1} (\overline{\beta_3} \vee \beta_3) \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \beta_4 = \overline{\beta_1} \vee \beta_1 (\overline{\beta_3} \overline{\beta_4} \vee \beta_3 \overline{\beta_4}) ; \\ f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) &= \overline{\beta_1} \overline{\beta_2} \overline{\beta_4} \vee \overline{\beta_1} \overline{\beta_2} \beta_4 \vee \beta_1 \overline{\beta_2} \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_2} \beta_4 = \overline{\beta_1} \overline{\beta_2} (\overline{\beta_4} \vee \beta_4) \vee \beta_1 (\overline{\beta_2} \overline{\beta_4} \vee \overline{\beta_2} \beta_4) = \\ &= \overline{\beta_1} \overline{\beta_2} \vee \beta_1 (\overline{\beta_2} \overline{\beta_4} \vee \overline{\beta_2} \beta_4) . \end{aligned}$$

Таким чином, побудували сімейство ЛФФВ (C). Існує і зворотна процедура визначення $C(X)$ по її ЛФФВ (C), що дозволяє зробити рівень абстракції у представленні образів ще більш суттєвим.

При розпізнаванні образів дуже часто об'єкти перетворюються у бінарні вектори великого розміру за допомогою спеціальних процедур-детекторів (наприклад, ORB) та визначенням характерних точок. Інформація про їхні властивості закладена у цих бінарних векторах.

Застосування функцій вибору. Наведемо приклад, який висвітлює основні практичні моменти використання ЛФФВ у задачах розпізнавання образів.

Нехай маємо 2 бінарних вектора-еталона

$$X^1 = \{00\ 01\ 01\} \text{ та } X^2 = \{1110\ 10\ 00\} .$$

У загальному випадку розмір цих векторів може бути різний, як у нашому прикладі. Але компоненти цих векторів складаються з наступних комбінацій, які можуть бути початковими, тобто базовими, елементами множини:

$$\Omega = \{00, 01, 10, 11\} \text{ або } \Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} ,$$

де, відповідно, $x_1 = 00, x_2 = 01, x_3 = 10, x_4 = 11$.

Тепер з урахуванням базових елементів вектори X^1, X^2 мають наступний вигляд:

$$X^1 = \{x_1, x_2, x_2\} \text{ та } X^2 = \{x_4, x_3, x_3, x_1\} .$$

Треба зазначити, що у якості базових елементів можуть виступати будь-які комбінації. Але треба дотримуватися компромісу між кількістю та інформативністю цих елементів.

Припустимо, що для вектора X^1 нас задовольняє функція вибору $C(X^1)$, яка містить 2 підмножини X^1 . Це $\{x_1, x_2\}$ та $\{x_2\}$. А для вектора X^2 нас задовольняє функція вибору $C(X^2)$, яка містить теж 2 підмножини X^2 . Це $\{x_1, x_3, x_4\}$ та $\{x_3\}$.

Побудуємо тепер для них ЛФФВ. Необхідні дані помістимо у табл. 3.

Таблиця 3 – формування векторів $\beta(C(X^1))$ та $\beta(C(X^2))$

X	$C(X^1)$	$C(X^2)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X^1))$	$\beta(C(X^2))$
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_2	x_2	$\emptyset$	$\langle 0100 \rangle$	$\langle 0100 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_3	$\emptyset$	x_3	$\langle 0010 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0010 \rangle$
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 0001 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_2	x_1, x_2	$\emptyset$	$\langle 1100 \rangle$	$\langle 1100 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1010 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1001 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_2, x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 0110 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_2, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 0101 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_3, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 0011 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_2, x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1110 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_2, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1101 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_3, x_4	$\emptyset$	x_1, x_3, x_4	$\langle 1011 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 1011 \rangle$
x_2, x_3, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 0111 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$
x_1, x_2, x_3, x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\langle 1111 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$	$\langle 0000 \rangle$

де $\emptyset$ – порожній елемент множини.

Слід відзначити, що ЛФФВ для кожної функції вибору буде складатися з 4-х логічних функцій, тобто

$$\text{ЛФФВ } (C) = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle.$$

Але для цього слід створити табл. 4 та 5, які аналогічні табл. 2.

Табл. 4 призначена для ЛФФВ $(C(X^1))$, а табл. 5 – для ЛФФВ $(C(X^2))$.

Таблиця 4 – формування ЛФФВ $(C(X^1))$

β_2	β_3	β_4	f_1	β_1	β_3	β_4	f_2
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0
β_1	β_2	β_4	f_3	β_1	β_2	β_4	f_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0

Таблиця 5 – формування ЛФФВ $(C(X^2))$

β_2	β_3	β_4	f_1	β_1	β_3	β_4	f_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0
β_1	β_2	β_4	f_3	β_1	β_2	β_4	f_4
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0

Таким чином, виходячи з побудови ЗДНФ для цих функцій маємо:

– ЛФФВ $(C(X^1))$:

$$\begin{cases} f_1(\beta_2, \beta_3, \beta_4) = \beta_2 \overline{\beta_3} \beta_4; \\ f_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) = \overline{\beta_1} \beta_3 \overline{\beta_4} \vee \beta_1 \overline{\beta_3} \beta_4 = \overline{\beta_3} \beta_4 (\overline{\beta_1} \vee \beta_1) = \overline{\beta_3} \beta_4; \\ f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) \equiv 0; \\ f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv 0; \end{cases}$$

– ЛФФВ $(C(X^2))$:

$$\begin{cases} f_1(\beta_2, \beta_3, \beta_4) = \overline{\beta_2} \beta_3 \beta_4; \\ f_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) \equiv 0; \\ f_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) = \overline{\beta_1} \beta_2 \beta_4 \vee \beta_1 \overline{\beta_2} \beta_4 = \overline{\beta_2} (\overline{\beta_1} \beta_4 \vee \beta_1 \beta_4) = \overline{\beta_2}; \\ f_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \overline{\beta_2} \beta_1 \beta_3. \end{cases}$$

Таким чином, маємо вже стандартизовані аналітичні вирази, які вже набагато меншого розміру та які легко порівнюються як на формальному рівні, так і на семантичному.

Спробуємо вирішити зворотну задачу, щоб продемонструвати взаємно-однозначний зв'язок між ЛФФВ та функцією вибору.

Для цього припустимо, що нам відомі ЛФФВ $(C(X^1))$ та ЛФФВ $(C(X^2))$. Почнемо будувати спочатку функцію вибору для ЛФФВ $(C(X^1))$. Для чого створимо табл. 6, в якій будуть використані дані з табл. 4, а саме:

Таблиця 6 – формування функцію вибору для ЛФФВ $(C(X^1))$

X	β_1	β_2	β_3	β_4	$\beta_1 f_1$	$\beta_2 f_2$	$\beta_3 f_3$	$\beta_4 f_4$	$C(X)$
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2	0	1	0	0	0	1	0	0	x_2
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2	1	1	0	0	1	1	0	0	x_1, x_2
x_1, x_3	1	0	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2, x_3	0	1	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2, x_4	0	1	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_3, x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_3	1	1	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_4	1	1	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_3, x_4	1	0	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2, x_3, x_4	0	1	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_3, x_4	1	1	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$

Таблиця 7 – формування функцію вибору для ЛФФВ $(C(X^2))$

X	β_1	β_2	β_3	β_4	$\beta_1 f_1$	$\beta_2 f_2$	$\beta_3 f_3$	$\beta_4 f_4$	$C(X)$
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	x_3
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2	1	1	0	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_3	1	0	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2, x_3	0	1	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_2, x_4	0	1	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_3, x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_3	1	1	1	0	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_4	1	1	0	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_3, x_4	1	0	1	1	1	0	1	1	x_1, x_3, x_4
x_2, x_3, x_4	0	1	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$
x_1, x_2, x_3, x_4	1	1	1	1	0	0	0	0	$\emptyset$

Бачимо, що дійсно функція вибору $C(X^1)$ для вектору X^1 складається з двох підмножин $\{x_1, x_2\}$ та $\{x_2\}$, що було передбачено на початку. В табл.6 значення f_1, f_2, f_3, f_4 відповідають значенням з ЛФФВ($C(X^1)$) при підстановці відповідних значень $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Тепер проаналізуємо другий варіант при наявності ЛФФВ($C(X^2)$). Для цього побудуємо табл. 7, яка зовнішньо буде схожа на табл. 6.

Бачимо, що дійсно функція вибору $C(X^2)$ для вектору X^2 складається з двох підмножин $\{x_1, x_3, x_4\}$ та $\{x_3\}$, що було передбачено на початку. В табл.7 значення f_1, f_2, f_3, f_4 відповідають значенням з ЛФФВ($C(X^2)$) при підстановці відповідних значень $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Таким чином, практичним прикладом та розрахунками підтверджена взаємно-однозначна відповідність між ЛФФВ($C(X)$) та $C(X)$.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На підставі проведених у роботі досліджень можна зробити наступні висновки:

1. Теоретично показано зв'язок між теорією прийняття рішень та теорією розпізнавання образів на прикладі трансформованого зображення у вигляді багатовимірному вектору атрибутів;
2. Доведено взаємно-однозначну відповідність між логічною формою функції вибору ЛФФВ($C(X)$) та функцією вибору $C(X)$;
3. Показано, що логічна форма функції вибору ЛФФВ($C(X)$) набагато компактніша та універсальніша ніж багатовимірний вектор атрибутів;
4. У перспективі розглядається можливість створення набору логічних форм функцій вибору на підставі повного структурного опису зображення як множини бінарних векторів;
5. Подальші дослідження у плані застосування логічних форм функцій вибору задля цілеспрямованої трансформації бінарних образів сприяють підвищенню результативності прикладного впровадження теорії розпізнавання образів у системах штучного інтелекту.

Список літератури

1. Ethan Rublee, Vincent Rabaud, Kurt Konolige, Gary Bradski. ORB : an efficient alternative to SIFT or SURF // Computer Vision (ICCV), IEEE International Conference on IEEE. – 2011. – P. 2564 – 2571. DOI : 10.1109/ICCV.2011.6126544.
2. Stefan Leutenegger, Margarita Chli, Roland Y. Siegwart. BRISK : Binary Robust Invariant Scalable Keypoints // Computer Vision (ICCV). – 2011. – P. 2548 – 2555. DOI : 10.1109/ICCV.2011.6126542.
3. Гороховатський В. А., Путятин Е. П., Столяров В. С. Исследование результативности структурных методов классификации изображений с применением кластерной модели данных // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2017. – №3 (42). – С. 78 – 85.
4. Rosten Edward, Tom Drummond. Machine learning for high-speed corner detection // 9th European Conference on Computer Vision (ECCV). – 2006. – P. 430 – 443. DOI : 10.1007/11744023_34.
5. Michael Calonder, Vincent Lepetit, Christoph Strecha, Pascal Fua. BRIEF : Binary Robust Independent Elementary Features // 11th European Conference on Computer Vision (ECCV). – 2010. – P. 778 – 792. DOI : 10.1007/978-3-642-15561-1_56.
6. Патин М. В., Коробов Д. В. Сравнительный анализ методов поиска особых точек и дескрипторов при группировке изображений по схожести содержанию // Молодой ученый. — 2016. — №11. — С. 214 – 221. – Режим доступа : <https://moluch.ru/archive/115/31188/>. – Дата обращения : 03 января 2020.
7. Теория выбора и принятия решений. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 328 с.
8. Гороховатський В. А. Структурный анализ и интеллектуальная обработка данных в компьютерном зрении. – Х. : Компания СМІТ, 2014. – 316 с.
9. Gorokhovatsky V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions // Telecommunications and Radio Engineering. – 2016. – Vol. 75. – No. 14. – pp. 1271 – 1283.
10. Тарасенко О. П., Трохимчук С. М. Нейронно-мережові моделі якості. Монографія. – Харків, 2013. – 103 с.
11. Гороховатський В. О., Пупченко Д. В., Солодченко К. Г. Аналіз властивостей, характеристик та результатів застосування новітніх детекторів для визначення особливих точок зображення // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2018. – №1 (47). – С. 93 – 98.

References (transliterated)

1. Ethan Rublee, Vincent Rabaud, Kurt Konolige, Gary Bradski. ORB: an efficient alternative to SIFT or SURF. *Computer Vision (ICCV), IEEE International Conference on IEEE*. 2011, pp. 2564–2571. DOI : 10.1109/ICCV.2011.6126544.
2. Stefan Leutenegger, Margarita Chli, Roland Y. Siegwart. BRISK: Binary Robust Invariant Scalable Keypoints. *Computer Vision (ICCV)*. 2011, pp. 2548–2555. DOI : 10.1109/ICCV.2011.6126542.
3. Gorokhovatskiy V. A., Putyatyn E. P., Stolyarov V. S. Issledovanie rezul'tativnosti strukturnykh metodov klassifikatsii izobrazheniy s primeneniem klasternoy modeli dannykh [Studying performance of image classification structural methods using cluster data model]. *Radioelektronika,*

- informatika, upravlennie [Radioelectronics, informatics, control]. 2017, no. 3 (42), pp. 78–85.
4. Rosten Edward, Tom Drummond. Machine learning for high-speed corner detection. *9th European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 2006, pp. 430–443. DOI : 10.1007/11744023_34.
 5. Michael Calonder, Vincent Lepetit, Christoph Strecha, Pascal Fua. BRIEF : Binary Robust Independent Elementary Features. *11th European Conference on Computer Vision (ECCV)*. 2010, pp. 778–792. DOI : 10.1007/978-3-642-15561-1_56.
 6. Patin M. V., Korobov D. V. Sravnitel'nyy analiz metodov poiska osobykh tochek i deskriptorov pri gruppirovke izobrazheniy po skhozhemu so-derzhaniyu [Comparative analysis of methods for determining interest points and descriptors in similar content based image grouping]. *Molodoy uchenyy* [Young scientist]. 2016, no. 11, pp. 214–221. Available at : <https://moluch.ru/archive/115/31188/>. (accessed 3 January 2020).
 7. Makarov I. M., Vinogradskaya T. M., Rubchinskiy A. A., Sokolov V. B. *Teoriya vybora i prinyatiya resheniy* [Choice and desition making theory]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1982. 328 p.
 8. Gorokhovatskiy V. A. *Strukturnyy analiz i intellektual'naya obrabotka dannykh v komp'yuternom* [Structural analysis and intelligent data processing in computer vision]. Kharkov, Kompaniya SMIT Publ., 2014. 316 p.
 9. Gorokhovatskiy V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 14, pp. 1271–1283.
 10. Tarasenko O. P., Trokhimchuk S. M. *Neyronno-merezhevi modeli yakosti. Monografiya* [Nero-network quality models. Monograph]. Kharkiv, 2013. 103 p.
 11. Gorokhovatskiy V. A., Pupchenko D. V., Solodchenko K. G. Analiz vlastyovostey, kharakterystyk ta rezul'tativ zastosuvannya novitnikh detektoriv dlya vyvchennya osoblyvykh tochk zobrazhennya [Analysis of properties, characteristics and results of applying innovative detectors for determining image interest points]. *Sistemy upravlinnya, navigatsiyi ta zv'yazku* [Control, navigation and communication systems]. 2018, no. 1 (47), pp. 93–98.

Надійшла (received) 18.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гороховатський Володимир Олексійович (Гороховатский Владимир Алексеевич, Gorokhovatskiy Volodymyr Oleksiyovych) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 847-83-70; e-mail: gorohovatsky.vi@gmail.com.

Тарасенко Олександр Прокопович (Тарасенко Александр Прокофьевич, Tarasenko Alexander Prokofevich) – кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Харківський інститут банківської справи», м. Харків; тел.: (066) 637-25-63; e-mail: tap-top@ukr.net.

Трохимчук Сергій Миколайович (Трохимчук Сергей Николаевич, Trokhymchuk Sergii Mikolayovych) – кандидат технічних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 712-90-70; e-mail: trohimchuk_sn@uipa.edu.ua.

УДК 513.88

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЗУЕМЫХ ТОПОЛОГИЯХ ДЛЯ СЛАБО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Статья посвящена изучению метризуемых топологий на аддитивной группе вещественных чисел, которые компактифицируют эту группу. Веденная метризуемая топология слабее исходной естественной топологии на вещественной оси. Она является модификацией топологии Марченко. В ней выделена счетная система окрестностей на базе спектра заданной функции. Построена инвариантная метрика, задающая эквивалентную топологию. Доказана компактность пополненного метрического пространства. Рассмотрена псевдометрика, использующая только спектр заданной скалярно почти периодической функции. Для получения хаусдорфового пространства сделан переход к факторпространству. На факторпространстве псевдометрика является метрикой и показано, что значения скалярно почти периодической функции совпадают на первоначальном пространстве и на факторпространстве. Доказано утверждение, что множество скалярно почти периодических функций на оси совпадает с множеством скалярно равномерно непрерывных в этой топологии функций, заданных на метрическом пространстве.

Ключевые слова: метризуемая топология, равномерная непрерывность, почти периодичность, абстрактная функция.

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЄНКО

ПРО ДЕЯКІ МЕТРИЗУЄМІ ТОПОЛОГІЇ ДЛЯ СЛАБО МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Стаття присвячена вивченню метризуємих топологій на адитивній групі дійсних чисел, які компактифікують цю групу. Така метризуєма топологія слабкіша за вихідну природно топологію на дійсній осі. Вона є модифікацією топології Марченко. У ній виділено злічену систему околів на базі спектру заданої функції. Побудовано інваріантну метрику, що задає еквівалентну топологію. Доведено компактність поповненого метричного простору. Розглянуто псевдометрику, що використовує тільки спектр заданої скалярної майже періодичної функції. Для отримання хаусдорфового простору зроблено перехід до факторпростору. На факторпросторі псевдометрика є метрикою і показано, що значення скалярної майже періодичної функції збігаються на первинному просторі і на факторпросторі. Доведено твердження, що множина скалярних майже періодичних функцій на осі збігається з множиною скалярних рівномірно безперервних в цій топології функцій, які задані на метричному просторі.

Ключові слова: метризуєма топологія, рівномірна безперервність, майже періодичність, абстрактна функція.

© С. Д. Димитрова-Бурлаєнко, 2020

S. D. DIMITROVA-BURLAYENKO

ON SOME METRIZABLE TOPOLOGIES FOR WEAKLY ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

The article deals with studying metrizable topologies on the additive group of real numbers that compactify this group. The introduced metrizable topology is weaker than the original natural topology on the real axis. It is a modification of the Marchenko topology. In the introduced topology a countable system of neighborhoods is selected based on the spectrum of a given function. An invariant metric is constructed which defines an equivalent topology. The completed metric space is proved to be compact. A pseudometric using only the spectrum of a given scalar almost periodic function is considered. To obtain the Hausdorff space we pass to a factor space. On the factor space the pseudometric is a metric and it is shown that the values of a scalar almost periodic function on the original space coincide with those on the factor space. It is also proved that the set of scalar almost periodic functions on the axis coincides with the set of functions defined on a metric space, which are scalar uniformly continuous in this topology.

Key words: metrizable topology, uniform continuity, almost periodicity, abstract function.

Введение. В ряде случаев рассмотрение абстрактных почти периодических функций $f(t): \mathbb{R} \rightarrow Y$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел на оси, Y – пространство Банаха, сводится к рассмотрению равномерно непрерывных функций в некоторой метризуемой топологии. В настоящей работе используется топология В. А. Марченко [1]. Чтобы получить метризуемую топологию, выделяем счетную базу, ориентированную на определенную функцию. Показано, что почти периодические функции – это равномерно непрерывные функции в этой метрике и только они.

Основные обозначения, базовые определения и предложения. На оси вещественных чисел $\mathbb{R}$ естественную топологию обозначим через $\mathfrak{I}_0$, а некоторую более слабую топологию через $\mathfrak{I}_M$; Y – сепарабельное пространство Банаха; Y^*, Y^{**} – сопряженное и второе сопряженное пространства Y ; $\langle y^*, x \rangle$ – линейная непрерывная форма на Y , $y^* \in Y^*$, $x \in Y$; S^* – единичная сфера Y^* . Через $f(t)$ обозначим функцию, заданную на $\mathbb{R}$, со значениями в Y .

Множество E называется относительно плотным множеством на группе $\mathbb{R}$, если существует q элементов $C_1, C_2, \dots, C_q$ таких, что

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^q (C_i + E).$$

Если множество $E \subset \mathbb{R}$ относительно плотно, нетрудно показать, что существует число $l > 0$, так что $\forall a \in \mathbb{R} \quad (a; a+l) \cap E \neq \emptyset$. Такое множество E содержит бесконечную последовательность $\{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ со свойствами:

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} v_k = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = +\infty \quad \text{и} \quad v_k < v_{k+1}, \quad v_{k+1} - v_k \leq l, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Относительно плотным множеством интервалов называется множество действительных чисел E , для которого можно указать положительные числа l и δ такие, что любой интервал оси $(a, a+L)$, $L > l$, обязательно содержит интервал $(b, b+\Delta) \subset E$, $\Delta \geq \delta$ [1].

Определение 1. Непрерывная функция $f(t): (-\infty, +\infty) \rightarrow Y$ является почти периодической (п.п.), если для любого $\varepsilon > 0$ множество $E = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \right\}$ относительно плотно.

Определение 2. Функция $f(t): (-\infty, +\infty) \rightarrow Y$ называется скалярно почти периодической, если числовая функция $\langle y^*, f(t) \rangle$, $\forall y^* \in Y^*$ почти периодична.

Для скалярно почти периодической функции можно найти коэффициенты Фурье a_μ по формуле:

$$\langle y^*, a_\mu \rangle = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{2Z} \int_{-Z}^Z \langle y^*, f(t) \rangle \exp(-i\mu t) dt, \quad y^* \in Y^*.$$

В общем случае коэффициенты Фурье принадлежат Y^{**} , то есть являются непрерывными линейными функционалами на Y^* .

Спектром функции $f(t)$ называется множество чисел μ , для которых $a_\mu \neq 0$. Отметим, что любая скалярно почти периодическая функция со значениями в сепарабельном банаховом пространстве имеет счетный спектр [2].

Предложение 1 [3]. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и натуральное $N = N(\varepsilon)$, такие, что каждое действительное число τ , удовлетворяющее системе неравенств

$$|\exp(i\lambda_n \tau) - 1| \leq \delta \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

является ε – почти периодом почти периодической функции $f(t)$, то есть.

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Следуя В. А. Марченко [1], введем на оси действительных чисел топологию $\mathfrak{J}_M$:

$$E(\delta | \lambda) = \{x \in \mathbb{R} : |\lambda x| < \delta \pmod{2\pi}\},$$

то есть множество чисел x , для которых существуют целые числа $k \in \mathbb{Z}$ такие, что $2\pi k - \delta < \lambda x < 2\pi k + \delta$

$$E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} |\lambda_1 x| < \delta \pmod{2\pi} \\ \dots \quad \dots \\ |\lambda_n x| < \delta \pmod{2\pi} \end{array} \right\},$$

то есть множество чисел x , которые являются решениями системы неравенств $|\lambda_i x| < \delta \pmod{2\pi}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Легко видеть, что

$$E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = E(\delta | \lambda_1) \cap E(\delta | \lambda_2) \cap \dots \cap E(\delta | \lambda_n)$$

и

$$E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset E(\delta | \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$E(\delta_1 | \lambda) \subset E(\delta_2 | \lambda), \quad \text{если } \delta_1 < \delta_2.$$

В. А. Марченко[1] рассматривал все возможные множества вида $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, где $\delta > 0$, λ_i – действительные числа. Отметим некоторые свойства множеств $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (доказательства см. в [1]):

- а) $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset E(\delta' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ при $0 < \delta < \delta'$;
- б) $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n) \subset E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $m < n$;
- в) $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cap E(\delta' | \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n) \supset E(\delta'' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$, $\delta > 0$, $\delta' > 0$, $\delta'' = \min(\delta, \delta')$;
- г) $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \pm E(\delta' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset E(\delta + \delta' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
- д) если $x_0 \in E(\delta' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, то $\exists \delta$, $0 < \delta < \delta'$, что $x_0 \in E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset E(\delta' | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
- е) для $\forall \varepsilon > 0$ и $x \in E(\varepsilon | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ $\exists \delta > 0$, что $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + x \subset E(\varepsilon | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
- ж) все множества $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ являются **относительно плотными** множествами интервалов.

Цель статьи ввести на аддитивной группе вещественных чисел $\mathbb{R}$ метризуемую топологию, используя часть множеств $E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Эту топологию строим по функции, используя ее спектр. Топология вводится с помощью счетного множества чисел. Это множество должно содержать спектр данной функции, но может содержать еще спектры счетного числа функций. Более того, если спектр задан, то ему может соответствовать несчетное множество функций. Например, если имеем спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, то можно рассмотреть функции вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\mu_n t), \quad a_n \in Y, \quad t \in \mathbb{R},$$

для которых сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y^*, a_n \rangle| < \infty \quad \forall y^* \in S^*.$$

Пусть задана скалярно почти периодическая функция $f_1(t)$ со спектром $\{\mu'_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если среди чисел μ'_n есть 0, то всегда можно найти число μ'_0 так, что все числа $\mu_n = \mu'_n + \mu'_0 \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Достаточно, вместо функции $f_1(t)$ рассмотреть функцию $f(t) = f_1(t)e^{i\mu'_0 t}$, которая будет иметь спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\mu_n \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что функция $f(t)$ имеет спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, который не содержит число 0. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотное множество рациональных чисел в интервале $(0, \infty)$. Введем счетное множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{r_1}, \quad \dots, \quad \lambda_{2n-1} = \mu_n, \quad \lambda_{2n} = \frac{\pi}{r_n}, \quad \dots$$

Основные результаты.

Теорема 1. Множество окрестностей нуля вида $\left\{U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, задает базу окрестностей

нуля некой топологии $\mathfrak{J}_M$ на оси действительных чисел.

Доказательство: Покажем, что:

1. Единственной точкой принадлежащей всей системе является нуль.

Предположим, что это не так. Пусть $x \neq 0$ произвольное действительное число. Найдем рациональное число r_m такое, что

$$0.99 < \frac{|x|}{r_m} < 1, \quad (\text{например } |x| < r_m < 1,001|x|).$$

Тогда $x \notin E\left(1 \mid \frac{\pi}{r_m}\right)$, так как $\pi > \pi \left| \frac{x}{r_m} \right| > 1$. Находим n так, чтобы $\frac{\pi}{r_m}$ было среди чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Тогда $x \notin U_n$, так как $U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{n} \mid \frac{\pi}{r_m}\right) \subset E\left(1 \mid \frac{\pi}{r_m}\right)$ и $x \notin E\left(1 \mid \frac{\pi}{r_m}\right)$. Этим доказано, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}.$$

2. Для всякой окрестности U_m найдется окрестность U_n , такая что

$$U_n \pm U_n \subset U_m.$$

Достаточно взять $n \geq 2m$ и заметить, что окрестности вида $E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right)$ симметрические множества.

$$x \in U_n \Leftrightarrow 2\pi k'_i - \frac{1}{n} < \lambda_i x < 2\pi k'_i + \frac{1}{n}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

$$y \in U_n \Leftrightarrow 2\pi k''_i - \frac{1}{n} < \lambda_i y < 2\pi k''_i + \frac{1}{n}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или

$$x \pm y \Leftrightarrow 2\pi(k'_i \pm k''_i) - \frac{2}{n} < \lambda_i(x \pm y) < 2\pi(k'_i \pm k''_i) + \frac{2}{n} \rightarrow |\lambda_i(x \pm y)| < \frac{2}{n} \pmod{2\pi},$$

$$U_n \pm U_n \subset E\left(\frac{2}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{2}{2m} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{m} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) = U_m.$$

3. Пересечение $U_k \cap U_m$ содержит некоторую окрестность U_n , где $n > \max\{k, m\}$.

Случай $k = m$ тривиальный. Пусть для определенности $k < m$. Так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$ и $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, то

$$U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{k} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\right) = U_k,$$

$$U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n\right) \subset E\left(\frac{1}{m} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m\right) = U_m.$$

Следовательно,

$$U_n \subset U_k \cap U_m.$$

4. Для любой точки $x \in U_m$ найдется окрестность U_n так, что $x + U_n \subset U_m$.

Так как $x \in E\left(\frac{1}{m} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right)$, то

$$\lambda_1 x = 2\pi k_1 + \gamma_1, \quad -\frac{1}{m} < \gamma_1 < \frac{1}{m}$$

$$\lambda_2 x = 2\pi k_2 + \gamma_2, \quad -\frac{1}{m} < \gamma_2 < \frac{1}{m}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_m x = 2\pi k_m + \gamma_m, \quad -\frac{1}{m} < \gamma_m < \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$\max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i| = \gamma < \frac{1}{m}.$$

Находим δ так, что

$$\gamma < \delta < \frac{1}{m} \Rightarrow x \in E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

Выбираем число n ($n > m$) так, что $\frac{1}{n} < \frac{1}{m} - \delta$ или $\delta + \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$,

$$E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + E\left(\frac{1}{n} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) \subset E\left(\delta + \frac{1}{n} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x + U_n &\subset E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + E\left(\frac{1}{n} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_n\right) \subset E(\delta | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + E\left(\frac{1}{n} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) \subset \\ &\subset E\left(\delta + \frac{1}{n} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) \subset E\left(\frac{1}{m} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\right) = U_m. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что система окрестностей $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базу окрестностей нуля аддитивной группы вещественных чисел ([5] стр. 108, гл. 3, §18). Теорема 1 доказана.

На действительной оси рассмотрим топологию $\mathfrak{J}_\rho$, задаваемую функцией $\rho(u, v)$ ($\lambda_n \neq 0$):

$$\begin{aligned} \rho(u, v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_t |\exp(i\lambda_n(u+t)) - \exp(i\lambda_n(v+t))|}{1 + \sup_t |\exp(i\lambda_n(u+t)) - \exp(i\lambda_n(v+t))|} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_t |\exp(i\lambda_n(t+v)) [\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1]|}{1 + \sup_t |\exp(i\lambda_n(t+v)) [\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1]|} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1|}{1 + |\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1|}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Функция $\rho(u, v)$ является инвариантным расстоянием между точками u и v . Операции сложения и нахождения обратного элемента непрерывны. Топология $\mathfrak{J}_\rho$, определяемая расстоянием $\rho(u, v)$, слабее исходной топологии $\mathfrak{J}_0$.

Доказательство: Функция $\rho(u, v)$ выполняет все требования расстояния.

Неотрицательность $\rho(u, v) \geq 0$ следует из формулы $\rho(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1|}{1 + |\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1|}$

Покажем теперь, что из $\rho(u, v) = 0$ следует, что $u = v$. Пусть $\rho(u, v) = 0$, тогда

$$\forall n \quad |\exp(i\lambda_n(u-v)) - 1| = 0$$

или

$$(1 - \cos(\lambda_n(u-v)))^2 + (\sin(\lambda_n(u-v)))^2 = 0,$$

$$2 \left| \sin\left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2}\right) \right| = 0,$$

$$|\lambda_n(u-v)| = 2l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем, что случай $l \neq 0$ (то есть $|u-v| > 0$) приводит к противоречию. Если $|u-v| > 0$ можно найти $\lambda_{2n} = \frac{\pi}{r_n}$ так, что $0,99 < \left| \frac{u-v}{r_n} \right| < 1,01$ и $3 < |\lambda_{2n}(u-v)| < 3,2$. Для любого n должно быть $|\lambda_n(u-v)| = 2l\pi$ и в частности $|\lambda_{2n}(u-v)| = 2l\pi$, но с другой стороны должно быть $3 < 2l\pi < 3,2$. Последнее невозможно. Следовательно, $l = 0$ и $u = v$, то есть из $\rho(u, v) = 0$ следует $u = v$.

Покажем **симметричность**, то есть $\rho(u, v) = \rho(v, u)$:

$$\begin{aligned}\rho(u, v) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u-v)) | | 1 - \exp(i\lambda_n(v-u)) |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u-v)) | | 1 - \exp(i\lambda_n(v-u)) |} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| 1 - \exp(i\lambda_n(v-u)) |}{1 + | 1 - \exp(i\lambda_n(v-u)) |} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(v-u)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(v-u)) - 1 |} = \rho(v, u).\end{aligned}$$

Неравенство треугольника $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ непосредственно вытекает из неравенств:

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

и

$$\begin{aligned}| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 | &= | \exp(i\lambda_n((u-w) + (w-v))) - 1 | = \\ &= | \exp(i\lambda_n(u-w)) \{ \exp(i\lambda_n(w-v)) - 1 \} | \leq \\ &\leq | \exp(i\lambda_n(u-w)) | | \exp(i\lambda_n(w-v)) - 1 | + | \exp(i\lambda_n(u-w)) - 1 | \leq \\ &\leq | \exp(i\lambda_n(u-w)) - 1 | + | \exp(i\lambda_n(w-v)) - 1 |.\end{aligned}$$

Покажем, что **расстояние инвариантно относительно трансляций**, то есть

$$\begin{aligned}\rho(u+w, v+w) &= \rho(u, v) \\ \rho(u+w, v+w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u+w-v-w)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u+w-v-w)) - 1 |} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |} = \rho(u, v).\end{aligned}$$

Операции сложения и нахождения обратного элемента непрерывны в топологии $\mathfrak{J}_\rho$:

если

$$\rho(u, u') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \rho(v, v') < \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\begin{aligned}\rho(u+v, u'+v') &= \rho(u, (u') + (v'-v)) \leq \rho(u, u') + \rho(u' + (0), u' + (v'-v)) = \\ &= \rho(u, u') + \rho(0, v'-v) = \rho(u, u') + \rho(v, v') < \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, операция суммы непрерывна.

Если $\rho(u, u') < \varepsilon$, то $\rho(-u, -u') = \rho(u, u') < \varepsilon$. Следовательно, операция нахождения обратного элемента непрерывна.

Покажем, что топология $\mathfrak{J}_\rho$ слабее исходной топологии $\mathfrak{J}_0$. Замечая, что

$$| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 | = 2 \left| \sin \left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2} \right) \right|,$$

получим оценку:

$$\begin{aligned}\rho(u, v) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{| \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |}{1 + | \exp(i\lambda_n(u-v)) - 1 |} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} 2 \left| \sin \left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2} \right) \right| + \frac{1}{2^N}.\end{aligned}$$

По числу $\varepsilon > 0$ находим N так, что

$$\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.$$

Выражение

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} 2 \left| \sin \left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2} \right) \right|$$

равномерно непрерывно относительно $|u-v|$ на всей оси и поэтому можно найти $\delta > 0$ так, что при $|u-v| < \delta$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} 2 \left| \sin \left(\frac{\lambda_n(u-v)}{2} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho(u, v) < \varepsilon.$$

Последняя оценка показывает, что если $|u-v| \rightarrow 0$, то и $\rho(u, v) \rightarrow 0$. Таким образом, топология $\mathfrak{J}_\rho$ слабее исходной топологии $\mathfrak{J}_0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Топология $\mathfrak{J}_\rho$, определенная метрикой $\rho(u, v)$, эквивалентна топологии $\mathfrak{J}_M$, определенной системой окрестностей $U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство: Предположим, что $u_k \xrightarrow[k]{} 0$ по метрике, то есть $\rho(u_k, 0) \xrightarrow[k]{} 0$.

Пусть задана окрестность $U_n = E\left(\frac{1}{n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right)$. Найдем такое N , что при $k > N = N(n)$

$$\rho(u_k, 0) < \frac{1}{2^{n+1}} \sin\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\left|\frac{\lambda_m u_k}{2}\right|\right)}{2^{n+1}} &\leq \frac{1}{2^m} \frac{|\exp(i\lambda_m u_k) - 1|}{1 + |\exp(i\lambda_m u_k) - 1|} \leq \rho(u_k, 0) < \frac{1}{2^{n+1}} \sin\left(\frac{1}{2n}\right), \quad m = 1, 2, \dots, n, \\ \sin\left(\left|\frac{\lambda_m u_k}{2}\right|\right) &\leq \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \\ -\frac{1}{2n} + k\pi &< \frac{\lambda_m u_k}{2} < \frac{1}{2n} + k\pi, \quad |\lambda_m u_k| < \frac{1}{n} \pmod{2\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \text{ при } k > N. \end{aligned}$$

Последнее означает, что

$$u_k \in U_n \quad \forall k > N,$$

то есть $u_k \xrightarrow[k]{} 0$ в топологии $\mathfrak{J}_M$.

Пусть теперь $u_k \xrightarrow[k]{} 0$ в топологии $\mathfrak{J}_M$, и $\varepsilon > 0$. Находим целое число $n_1 > 1$ так, что $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда и $\frac{1}{2^{n_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Находим номер $N > n_1$ так, что при $k > N$ $u_k \in U_N$. Тогда, при $k > N$

$$|\exp(i\lambda_n(u_k)) - 1| \leq |\lambda_n u_k| < \frac{1}{N} < \frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon}{4} \quad n = 1, 2, \dots, N$$

и

$$\rho(u_k, 0) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\lambda_n u_k) - 1|}{1 + |\exp(i\lambda_n u_k) - 1|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\lambda_n u_k) - 1|}{1 + |\exp(i\lambda_n u_k) - 1|} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2^{n_1}} < \varepsilon.$$

Это и означает, что если $u_k \xrightarrow[k]{} 0$ в топологии $\mathfrak{J}_M$, то $u_k \xrightarrow[k]{} 0$ в топологии $\mathfrak{J}_\rho$. Топологии $\mathfrak{J}_M$ и $\mathfrak{J}_\rho$ эквивалентны. Таким образом, теорема 3 доказана.

Теорема 4. Метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho(\cdot, \cdot))$ предкомпактно и после пополнения $(T, \rho(\cdot, \cdot))$ является метрическим компактом.

Доказательство: Покажем, что из любой последовательности чисел можно выделить фундаментальную последовательность в топологии $\mathfrak{J}_M$ ($\mathfrak{J}_\rho$).

Пусть задана последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим последовательность окрестностей нуля $V_n = U_{2^n}$ (то есть $\delta = \frac{1}{2^n}$), $V_{n+1} \subset V_n$ и $V_{n+1} \pm V_{n+1} \subset V_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Каждая из окрестностей V_n является относительно плотным множеством интервалов. Возьмем V_1 и запишем $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{q_1} (a_i^{(1)} + V_1)$. Хотя бы в одной из окре-

стностей $a_{i(1)}^{(1)} + V_1$ находится бесконечное число членов $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то есть

$$\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(1)}^{(1)} + V_1, \quad \{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Далее, возьмем V_2 и запишем

$$a_{i(1)}^{(1)} + V_1 \subset \bigcup_{i=1}^{q_2} (a_i^{(2)} + V_2), \quad a_i^{(2)} + V_2 \subset a_{i(1)}^{(1)} + V_1, \quad i = 1, 2, \dots, q_2.$$

Хотя бы в одной из окрестностей $a_{i(2)}^{(2)} + V_2$ находится бесконечное число членов $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, то есть

$$\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(2)}^{(2)} + V_2 \subset a_{i(1)}^{(1)} + V_1, \quad \{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим:

$$\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n)}^{(n)} + V_n, \dots, a_{i(n+p)}^{(n+p)} + V_{n+p} \subset \dots \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)} + V_{n+1},$$

$$\{x_k^{(n+p)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+p)}^{(n+p)} + V_{n+p}, \quad \{x_k^{(n+p)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\text{то есть } \{x_k^{(n+p)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)} + V_{n+1} \quad \forall p = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$\{x_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_{i(n+1)}^{(n+1)} + V_{n+1}.$$

Обозначим через

$$y_s = x_s^{(s)}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, n, \dots, n+p, \dots$$

Тогда для любого p ,

$$y_{n+p} - y_{n+1} \in V_{n+1} - V_{n+1} \subset V_n$$

и последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна. Чтобы получить компактность последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, нужна полнота пространства $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$. Отметим, что множество рациональных чисел счетно и плотно в топологии $\mathfrak{J}_0$. Так как топология $\mathfrak{J}_M$ слабее топологии $\mathfrak{J}_0$, то оно плотно и в топологии $\mathfrak{J}_M$. Таким образом, пространство $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$ сепарабельно и имеет счетную базу окрестностей нуля. Его можно плотно вложить в его пополнение $(T, \mathfrak{J}_M)$ [4]. Тогда последовательность $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ (это образ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $(T, \mathfrak{J}_M)$) будет компактной. Компактной будет и любая другая последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $(T, \mathfrak{J}_M)$, так как ее можно аппроксимировать последовательностью $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$ и $z_k - x_k \xrightarrow{k} 0$ (в силу плотности $\mathbb{R}$ в T). Тогда компактность $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ влечет компактность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, пространство $(T, \mathfrak{J}_M)$ компактно. Этим теорема 4 доказана.

Теорема 5. Функция $f(t): (\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M) \rightarrow Y$ скалярно почти периодична тогда и только тогда, когда она скалярно равномерно непрерывна на $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$.

Доказательство: Пусть функция $f(t)$ скалярно почти периодическая и $y^* \in S^*$. Тогда $\langle y^*, f(t) \rangle$ является числовой почти периодической функцией на $\mathbb{R}$. Согласно Предложению 1 для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и конечное множество чисел $\{\mu'_s\}_{s=1}^k$ из спектра функции $\langle y^*, f(t) \rangle$, что из выполнения неравенств

$$|\exp(i\mu'_s \tau) - 1| \leq \delta, \quad (s = 1, 2, \dots, k), \text{ то есть } \tau \in E(\delta | \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k),$$

следует, что τ есть ε -почти период функции $\langle y^*, f(t) \rangle$, то есть

$$\sup_t |\langle y^*, f(t+\tau) - f(t) \rangle| < \varepsilon,$$

или

$$\tau \in E(\delta | \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_t |\langle y^*, f(t+\tau) \rangle - \langle y^*, f(t) \rangle| < \varepsilon \right\}.$$

Находим N_1 так, что $\frac{1}{N_1} < \delta$ и N_2 так, что $\{\mu'_s\}_{s=1}^k \subset \{\lambda_n\}_{n=1}^{N_2}$. Тогда для $m > \max\{N_1, N_2\}$

$$U_m \subset E(\delta | \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k)$$

и

$$U_m \subset E(\delta | \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_k) \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_t |\langle y^*, f(t+\tau) \rangle - \langle y^*, f(t) \rangle| < \varepsilon \right\}.$$

Следовательно, функция $\langle y^*, f(t) \rangle$ равномерно непрерывна на $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$.

Обратно, если функция $\langle y^*, f(t) \rangle$ равномерно непрерывна на $(\mathbb{R}, \mathfrak{J}_M)$, то для заданного $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_m такая, что

$$U_m \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_t |\langle y^*, f(t+\tau) \rangle - \langle y^*, f(t) \rangle| < \varepsilon \right\}.$$

Любая окрестность U_m является относительно плотным множеством и по определению 1 функция $\langle y^*, f(t) \rangle$ почти периодична, то есть функция $f(t)$ скалярно почти периодична. Следовательно, теорема 5 доказана.

Замечание. Можно ввести метризуемую топологию на оси только по спектру, используя модуль $\mathfrak{M} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}$ показателей Фурье слабо почти периодической функции $f(t): \mathbb{R} \rightarrow Y$. В этом случае ограничения на спектр не накладываются (число 0 также допускается).

Для получения хаусдорфова пространства необходимо перейти к факторпространству. Легко видеть, что формула

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup_t |\exp(i\mu_n(u+t)) - \exp(i\mu_n(v+t))|}{1 + \sup_t |\exp(i\mu_n(u+t)) - \exp(i\mu_n(v+t))|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\mu_n(u-v)) - 1|}{1 + |\exp(i\mu_n(u-v)) - 1|}$$

дает псевдометрику. Применяя стандартный прием, рассмотрим инвариантную нормальную подгруппу $\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{R} : d(q, 0) = 0\}$ и по ней определим отношение эквивалентности $u \equiv v \pmod{\mathbb{H}} \Leftrightarrow u - v \in \mathbb{H}$. Переходим к факторгруппе $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} / \mathbb{H}$. Тогда, если

$$u = \xi + z, \quad v = \zeta + z, \quad z \in \mathbb{H},$$

то

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\exp(i\mu_n(\xi + z - \zeta - z)) - 1|}{1 + |\exp(i\mu_n(\xi + z - \zeta - z)) - 1|} = d(\xi, \zeta).$$

Таким образом, расстояние $d(u, v)$ на факторгруппе $\mathbb{R}_1$ не зависит от представителей (ξ, ζ) .

Покажем, что значение функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, совпадает со значением $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}_1$, где $t = \xi + z$, $z \in \mathbb{H}$. Заметим, что $z \in \mathbb{H}$ означает, что

$$d(z, 0) = 0 \text{ или } \exp(i\mu_n z) = 1 \quad \forall n$$

или

$$\exp(i\mu_n t) = \exp(i\mu_n(\xi + z)) = \exp(i\mu_n \xi) \exp(i\mu_n z) = \exp(i\mu_n \xi).$$

Функцию $\langle y^*, f(t) \rangle$ можно равномерно аппроксимировать тригонометрическим полиномом [3], выбирая показатели экспонент тригонометрического полинома из множества показателей Фурье $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}$. Для

любого $\varepsilon > 0$ и функционала $y^* \in S^*$ можно найти полином $\sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k t)$ такой, что

$$\left| \langle y^*, f(t) \rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t.$$

Тогда для $t = \xi + z$

$$\begin{aligned} & \left| \langle y^*, f(t) \rangle - \langle y^*, f(\xi) \rangle \right| \leq \\ & \left| \langle y^*, f(\xi+z) \rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k(\xi+z)) + \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k(\xi+z)) - \langle y^*, f(\xi) \rangle \right| \leq \\ & \left| \langle y^*, f(t) \rangle - \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k(t)) + \sum_{k=1}^{Q_\varepsilon(y^*)} a_k \langle y^*, A_k \rangle \exp(i\mu_k(\xi)) - \langle y^*, f(\xi) \rangle \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Число ε произвольно и поэтому $\langle y^*, f(t) \rangle = \langle y^*, f(\xi) \rangle$ для любого функционала $y^* \in S^*$. Следовательно, $f(t) = f(\xi)$ для любого $t = \xi + z$, $z \in \mathbb{H}$ или $f(t) = f(\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_1$.

Выводы. Исследование скалярно почти периодических функций можно свести к исследованию скалярной равномерной непрерывности функций, заданных на метрическом пространстве. Подход к исследованию почти периодичности через замену на исследование равномерной непрерывности часто применяется (см. например [1], [6], [7], [9], [10] и др.). Отметим, что если функция в топологии Марченко является только непрерывной, то она является Левитановской почти периодической функцией ([1], [8]).

Список литературы

1. Марченко В. А. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье // Записки научно-исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества. – 1950. – Т. XX. – С. 3 – 32.
2. Кадец М. И., Кюрстен К. Д. Счетность спектра слабо почти-периодических функций со значениями в банаховом пространстве // Теория функций, функц. анализ и прил. – 1980. – Вып. 33. – С. 45 – 49.
3. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: МГУ, 1978. – 204с.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.
5. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.
6. Димитрова С. Д. Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану функций // Вісник Харківського університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2001. – № 514. – С. 106 – 114.
7. Димитрова С. Д., Димитров Д. Б. Теорема о сохранении непрерывности // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2003. – № 602. – Вып. 53. – С. 77 – 81.
8. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Представление L – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – Вып 68. – С. 65 – 75.
9. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Условия сохранения непрерывности при дифференцировании функций // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник научных статей. – Х.: Вировец А. П. «Апостроф», 2011. – С. 332 – 333.
10. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Критерии сохранения почти периодичности второй производной от почти периодической функции // Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – № 22 (1347) – С. 23 – 30.

References (transliterated)

1. Marchenko V. A. Metody summirovaniya obobshhennykh ryadov Fur'ye [Summation Methods of Generalized Fourier Series]. *Zapiski nauchno issledovatel'skogo instituta matematiki i mekhaniki KhGU i Khar'kovskogo matematicheskogo obshchestva* [Notes of the Research Institute of mathematics and mechanics of the Kharkov National University and Kharkov mathematical society]. 1950, vol. XX, pp. 3–32.
2. Kadets M. I., Kyursten K. D. Shchetnost' spektra slabo pochti-periodicheskikh funktsiy so znacheniyami v banakhovom prostraanstve [Countability of the spectrum of weakly almost periodic functions with values in a Banach space]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nogo analiza i prilozhniya* [Theory of functions, functional analysis and applications]. 1980, vol. 33, pp. 45–49.
3. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti periodicheskie funktsii i differentsial'nyye uravneniya* [Almost periodic functions and differential equations]. Moscow, MGU Publ., 1978. 205 p.
4. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 519 p.
5. Pontryagin L. S. *Nepreryvnyye gruppy* [Continuous Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 520 p.
6. Dimitrova S. D. Krivolineyny integral ot pochti periodicheskikh i pochti periodicheskikh po Levitanu funktsiy [Curvilinear integral of almost periodic and Levitan almost periodic functions]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Seriya: Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser.: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2001, vol. 514, pp. 106–114.
7. Dimitrova S. D., Dimitrov D. B. Teorema o sokhraneni nepreryvnosti [The theorem on the preservation of continuity]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya: Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser.: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2003, no. 602, vol. 53, pp. 77–81.
8. Dimitrova-Burlayenko S. D. Predstavleniye L – pochti periodicheskikh funktsiy kak nepreryvnyye funktsii na topologicheskoy gruppe [Representation of L -almost periodic functions as continuous functions on a topological group]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2010, no. 68, pp. 65–75.
9. Dimitrova-Burlayenko S. D. Usloviya sokhraneniya nepreryvnosti pri differentsirovani funktsiy [Conditions for maintaining continuity when differentiating functions]. *Sovremennyye problemy matematiki i yeye prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh. Sbornik nauchnykh statey* [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies. Collection of scientific papers]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011, pp. 332–333.

10. Dimitrova-Burlayenko S. D. Kriterii sokhraneniya pochty periodichnosti vtoroy proizvodnoy ot pochty periodicheskoy funktsii [Criteria for preserving almost periodicity of the second derivative of an almost periodic function]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 22 (1347), pp. 23–30.

Поступила (received) 17.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Дімитрова-Бурлаєнко Світлана Дімова (Димитрова-Бурлаєнко Светлана Димова, Dimitrova-Burlayenko Svetlana Dimova) – кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com.

УДК 629.1.02

А. П. КОЖУШКО

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЛИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ АГРЕГАТИВ ЗМІННОЇ МАСИ

Наведено математичні моделі для визначення поперечних коливань агрегатів змінної маси (причіпних та напівпричіпних цистерн) при виконанні транспортної роботи у складі машинно-тракторного агрегату. В математичній моделі шляхом використання характеристики поверхневих хвиль Релея враховано перерозподіл рідини у цистерні, який викликано поперечними коливаннями оболонки. Встановлено, що дія поперечних коливань рідини на транспортній швидкості в одновісній напівпричіпній цистерні на поперечні зміщення вісі не суттєва. Тому що центр мас цистерни розташовано попереду колісної вісі, що забезпечує її поперечну стійкість руху. Визначено, що на поперечну стійкість причіпної цистерни суттєвий вплив спричиняє перерозподіл мас в цистерні, особливо це помітно при дослідженні впливу задньої вісі цистерни.

Ключові слова: колісний трактор, цистерна, поперечні коливання, перерозподіл мас, вплив агрегату.

А. П. КОЖУШКО

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ АГРЕГАТОВ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Приведены математические модели для определения поперечных колебаний агрегатов переменной массы (прицепных и полуприцепных цистерн) при выполнении транспортной работы в составе машинно-тракторного агрегата. В математической модели путем использования характеристики поверхностных волн Рэлея учтено перераспределение жидкости в цистерне, которое вызвано поперечными колебаниями оболочки. Установлено, что действие поперечных колебаний жидкости на транспортной скорости в одноосной полуприцепной цистерне на поперечные смещения оси не существенно. Потому что центр масс цистерны расположен впереди колесной оси, что обеспечивает ее поперечную устойчивость движения. Определено, что на поперечную устойчивость прицепной цистерны существенное влияние оказывает перераспределение масс в цистерне, особенно это заметно при исследовании влияния задней оси цистерны.

Ключевые слова: колесный трактор, цистерна, поперечные колебания, перераспределение масс, влияние агрегата.

A. P. KOZHUSHKO

STUDYING SMALL TRANSVERSE VIBRATIONS OF VARIABLE MASS UNITS

Mathematical models are given for determining the transverse vibrations of variable mass units (trailed and semi-trailer tanks) when performing transport work as a part of a machine-tractor unit. In the mathematical model the redistribution of liquid in the tank, which is caused by transverse vibrations of the shell, is taken into account using the characteristics of Rayleigh surface waves. It is established that in a uniaxial semi-trailer tank at the transport speed the effect of the transverse vibrations of the liquid on the transverse displacements of the axis is negligible. The reason is that the center of mass of the tank is located in front of the wheel axle, which ensures its lateral stability of movement. It was determined that the lateral stability of the trailer tank is significantly affected by the redistribution of masses in the tank, this is especially noticeable when studying the wobble of the rear axle of the tank.

Key words: wheeled tractor, tank (cistern), lateral vibrations, mass redistribution, unit wagging.

Вступ та постановка задач дослідження. Виконання транспортної роботи колісним трактором базується на перевезенні різного роду вантажу. Транспортований агрегат кріпиться до колісного трактора *тягово-зчіпним пристроєм* – це призводить до появи додаткових ступенів свободи, а також, як результат, до появи *малих поперечних коливань (впливу)* агрегату. Великий вплив на поперечні коливання транспортіваних агрегатів несе присутність *еластичних пневматичних шин*. Окрім того, необхідно відмітити, що поперечні коливання причіпного та/або напівпричіпного агрегатів виникають, в більшій мірі, за рахунок впливу автоколивальних процесів системи і, в меншій мірі, від періодичних збурювальних сил, які виникають при русі по дорожньому покриттю.

Розглядаючи багатокомпонентний складний рух колісного трактора при транспортуванні агрегатів *змінної маси (тракторних цистерн)*, неможливо оминати питання поперечних коливань. І, хоча їх дія на колісний трактор не суттєва (за рахунок зазору в тягово-зчіпному пристрої), але вплив цистерни при русі по дорогах загального користування може спричинити виникнення дорожньо-транспортних пригод.

© А. П. Кожушко, 2020

Формування динамічної моделі поперечних коливань дозволить оцінити вплив конструктивних параметрів на стійкість руху при прямолінійному русі. Відмітимо, що при даному дослідженні будуть розглядатися *причинні та напівпричинні цистерни без підвіски* – це забезпечить якісне оцінювання впливу характеристик шин, положення центру мас цистерн, швидкості руху на показники стійкості руху.

Аналіз останніх досліджень. Динаміка руху об'єкта змінної маси актуальна майже в кожній галузі дослідження: ракетобудування, кораблебудування і, навіть, в сільському господарстві. Вирішення проблематики руху об'єкту зі змінною масою може бути зведено до визначення динамічних властивостей матеріальної точки змінної маси [1 – 3] або до властивостей вантажу [4 – 6], який рухається з плином часу. Кожна з цих методик має свою доцільність при використанні залежно від поставлених перед науковцем завдань. Так, при визначенні динамічних властивостей матеріальної точки змінної маси, широко застосовується *рівняння Мецгерського*.

Мецгерський І. В. є першим хто запропонував математичне розв'язання руху системи зі змінною масою та запровадив нову *теорію динаміки тіл змінної маси*. Даний підхід доцільно розглядати лише при дослідженні транспортно-технологічної роботи (збирально-транспортної або розподільчо-транспортної), оскільки математичний апарат передбачає зменшення (або збільшення) маси за проміжок певного часу. Тому при дослідженні транспортної роботи, коли вантаж виконує роль лише перерозподілу мас, цей метод використовувати не припустимо.

На сьогоднішній день існує декілька засобів для розв'язання задач з дослідження руху рідини: модель ідеальної нестисливої рідини (*рівняння Ейлера*); *квазігідродинамічні моделі*; модель в'язкої нестисливої рідини (*рівняння Нав'є – Стокса*) та інші. Окрім того, також існують моделі, які базуються на обчисленні *стохастичних диференціальних рівнянь*. Їх зазвичай застосовують лише при дослідженні руху рідини в турбулентному режимі. Розв'язання окреслених вище моделей вдається за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При обчисленні необхідно також вводити *граничні умови*. Це обумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Окрім того, труднощі перед науковцями виникають на етапі перетворення *континуальної моделі* в модель зі звичайними *диференціальними рівняннями*. Тому при виборі моделі для дослідження руху рідини необхідно виходити з поставлених задач.

В роботі [7] автори за допомогою математичного моделювання континуальної моделі низькочастотних коливань оболонки, використовуючи при цьому характеристики *поверхневих хвиль Релея* (частинних похідних), досягли перерозподілу мас в цистерні. А вже в роботі [8] континуальну модель замінили на *дискретну модель*, яка з достатньою для практики точністю може використовуватися в динамічній (нелінійній) моделі руху колісного трактора з агрегатом змінної маси.

Оцінюючи властивості поперечних коливань, які діють на транспортний засіб, відмітимо, що такий рух зумовлює появу автоколивань, а в деяких випадках і *параметричні коливання*. Першим, хто почав досліджувати поперечні коливання транспортного засобу в зіпці з агрегатами, вважається *Я. Х. Закін*. Ним в роботі [9] було доведено, що при появі періодичних коливань причепа виникає баланс в коливальній системі енергії, яка витрачається, що свідчить про автоколивання. Цей баланс порушується при впровадженні жорстких еластичних шин та при відсутності зазору в тягово-зчипному пристрої. Основний принцип, який закладено при розгляді поперечних коливань в умовах дослідження прямолінійного руху, зведено до знаходження критичної швидкості руху [10]. З роботи [11] відомо, що більшість науковців працюють над стійкістю руху в контексті дослідження геометричних параметрів транспортного засобу, конструктивних особливостей ходової системи та навіть деяких елементів трансмісії. Так, з роботи [12] встановлено, що задля запобігання *розгойдування ланок автопоїзду* в схему зв'язку причепа з транспортним засобом необхідно ввести *пружнодемпфірований елемент (канатний та/або резинкордний)*, який би мав змогу компенсувати кутові коливання причепа.

З проведеного аналізу встановлено, що в науковій літературі дослідження поперечних коливань, які призводять до виникнення автоколивань, колісного трактора з причіпними та напівпричіпними цистернами окреслено не досить повно. Більшість науковців вважають, що експлуатація тракторних цистерн не може досягти критичної швидкості руху. Але в умовах сучасного рівня енергонасиченості ці тенденції змінюються.

Метою роботи є проведення теоретичного дослідження з визначення поперечних коливань агрегатів змінної маси (тракторних цистерн) шляхом оцінки величин кута зміщення поздовжньої вісі та поперечне зміщення центру мас транспортованого агрегату змінної маси.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- скласти математичну модель поперечних коливань при русі колісного трактора з напівпричіпним та причіпним агрегатом змінної маси;
- оцінити коливальний рух агрегатів змінної маси при дослідженні поперечних коливань, на прикладі *виляння*.

Виляння напівпричіпної цистерни. При дослідженні стійкості руху напівпричіпної цистерни побудуємо спрощену схему для визначення малих поперечних коливань (рис. 1). При формуванні математичної моделі прийемо умову, що колісний трактор рухається по рівній горизонтальній поверхні з постійною швидкістю V ; тягово-зчипний пристрій трактора має в поперечному напрямі жорсткість c^{Π} та коефіцієнт демпфірування f^{Π} . На основі цього будемо вважати, що відсутні вертикальні повздовжні та поперечні коливання ланок транспорт-

ного засобу, тому можливо сили, які діють на колеса напівпричіпної цистерни в бічному та повздовжньому напрямках, замінити на сумарні бічні та повздовжні сили, що прикладені до середини вісі цистерни. При розгляді спрощеної схеми (рис. 1) прийнемо за узагальнюючі координати поперечне зміщення точки зчипки z_A та кутове зміщення повздовжньої вісі напівпричіпної цистерни γ .

Відповідно до схеми (рис. 1), використовуючи *принцип Даламбера*, сформуємо математичну модель, яка дозволяє визначити поперечні коливання напівпричіпного агрегату

$$\begin{cases} (m_{\Pi} + m_p) \cdot \ddot{z}_O + c^{\Pi} \dot{x}_A + f^{\Pi} \dot{z}_A + P_{\delta} + P_{B\Sigma} = P_f \gamma; \\ (m_{\Pi} + m_p) l'_3 \ddot{z}_O + J_{\Pi} \ddot{\gamma} = -P_{\delta} (l'_3 + l'_4) - M_{B\Sigma}; \\ m_m^p \cdot \ddot{z}_m^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_m^p - \dot{z}_O) + c_m^p \cdot (z_m^p - z_O) = (m_m^p \cdot (g + \ddot{z}_O)) \cdot \gamma, \quad m=1, 2, 3, \end{cases} \quad (1)$$

де m_{Π} – маса рами напівпричіпної цистерни; m_p – маса рідини в цистерні; $\ddot{z}_O$, $\dot{z}_O$, z_O – поперечне прискорення, швидкість та переміщення центру мас цистерни [7]; l'_3 – відстань від точки зчипки до вісі цистерни; $\ddot{\gamma}$, γ – кутове прискорення та переміщення повздовжньої вісі цистерни; P_f – сила *опору кочення*:

$$P_f = f \cdot (m_{\Pi} + m_p) \cdot g; \quad (2)$$

f – коефіцієнт опору руху; $P_{B\Sigma}$ – сумарна сила, що діє на платформу цистерни [8]:

$$P_{B\Sigma} = \sum_{m=1}^3 \left[f_m^p \cdot (\dot{z}_O - \dot{z}_m^p) + c_m^p \cdot (z_O - z_m^p) + (m_m^p \cdot (g + \ddot{z}_O)) \cdot \gamma \right]; \quad (3)$$

c_m^p , f_m^p – жорсткість та коефіцієнт демпфірування коливань m -го шару рідини; $\ddot{z}_m^p$, $\dot{z}_m^p$ – прискорення та переміщення m -го шару рідини; m_m^p – парціальна маса m -го шару рідини; $M_{B\Sigma}$ – сумарний момент сил, що діють на платформу цистерни [8]:

$$M_{B\Sigma} = \sum_{m=1}^3 \left[f_m^p \cdot (\dot{z}_O - \dot{z}_m^p) + c_m^p \cdot (z_O - z_m^p) + (m_m^p \cdot (g + \ddot{z}_O)) \cdot \gamma \right] \cdot h_m^p; \quad (4)$$

h_m^p – відстань між центрами мас поверхневого m -го шару рідини та цистерни:

$$h_m^p = \frac{g}{(2 \cdot \pi \cdot \beta_m)^2} + H; \quad (5)$$

β_m – власні частоти поперечних коливань m -го шару рідини в площині xOz ; H – рівень наповненості цистерни.

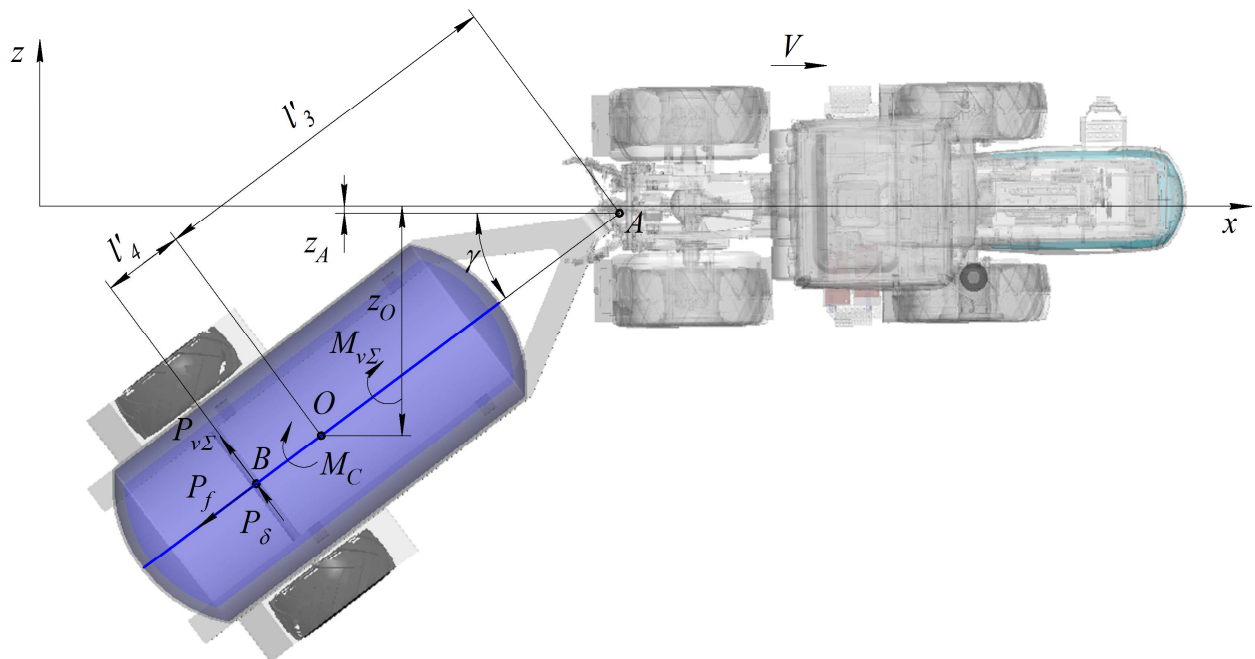


Рис. 1 – Спрощена схема для визначення малих поперечних коливань напівпричіпної цистерни.

Знайдемо взаємозв'язок між поперечним зміщенням центру мас напівпричіпної цистерни та узагальнюючими координатами

$$z_O = z_A + l'_3 \cdot \sin(\gamma) \approx z_A + l'_3 \gamma, \quad (6)$$

де z_A – поперечне переміщення точки зчипки цистерни.

При розв'язанні системи рівнянь (1) не визначеною змінною залишається бокова сила P_δ , тобто величина бокового зміщення шини. При дослідженні поперечних коливань транспортного засобу необхідно враховувати бокове зміщення, адже його наявність впливає на рух транспортного засобу (прискорення, швидкість, траєкторію руху, тощо). Рівняння, за яким обчислюється значення бокової сили, виглядає наступним чином [13 – 15]:

$$P_\delta = k_x \cdot \delta, \quad (7)$$

де k_x – коефіцієнт опору боковому зміщенню шини; δ – кут бокового зміщення.

З робіт [13 – 15] відомо, що рівняння (7) використовується при знаходженні малих значень кутів зміщення шини. Характерна залежність зміни бокової сили P_δ від кута бокового зміщення δ зображена на рис. 2.

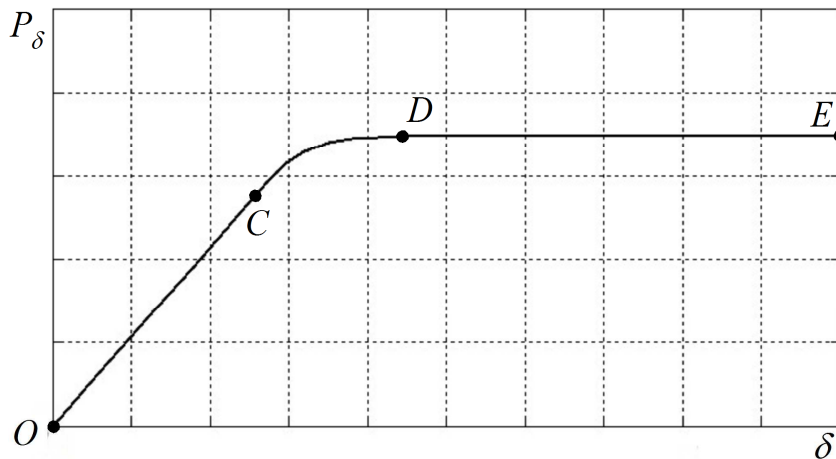


Рис. 2 – Залежність зміни бокової сили P_δ від кута бокового зміщення δ .

Як видно з рис. 2, залежність $P_\delta(\delta)$ поділена на три ділянки [13 – 15]:

- ділянка OC : зміщення шини відбувається без ковзання ($k_x = \text{const}$);
- ділянка CD : часткове ковзання поверхні шини (перехід зміщення до ковзання шини). Бокові сили діють на окремих ділянках поверхні шини не однаково. Чим ближче ділянка, яка розглядається, до заднього кінця відбитка, тим швидше бокова сила досягає величини сили зчеплення і починається ковзання [15];
- ділянка DE : початок повного ковзання шини ($P_\delta = \varphi_{\text{ц}} \cdot G$, де $\varphi_{\text{ц}}$ – коефіцієнт зчеплення між шиною та опорною поверхнею; G – вертикальне навантаження на колесо).

Виходячи з вище зазначеного, відмітимо, що нехтувати кутами зміщення шин або вісі напівпричіпної цистерни неможливо. Рівняння необхідно формувати з умови відсутності бокового руху в напрямках, нормальних до напрямку абсолютних швидкостей вісі та шин. Тому доцільно сформулювати рівняння, що описуватимуть кути зміщення вісі та шин напівпричіпної цистерни за допомогою узагальнюючих швидкостей (рис. 3).

Визначимо кут зміщення, як відношення бокової швидкості V_z (швидкості, нормальної до площини обертання колеса) до поздовжньої швидкості V_x (швидкості, яка направлена в бік руху колеса та знаходиться в площині його обертання), тобто $\delta = V_z/V_x$. Таким чином, знаходимо проекції абсолютних швидкостей колеса в напрямку, нормальному і співпадаючому з площиною обертання колеса.

На рис. 4 показано спрощений вид напівпричіпної цистерни, а також показані швидкості, які діють в точці B при вилянні цистерни та поступальному русі.

У випадку малих поперечних коливань напівпричіпної цистерни приймемо, що швидкість середини її вісі при поступальному русі дорівнює швидкості трактора V . При поперечних коливаннях точка зчипки середини вісі цистерни має додаткову швидкість $\dot{z}_A$, яка направлена в бік зміщення точки зчипки нормально повздовжній площині вісі трактора. При виникненні кутових поперечних коливань цистерни швидкість точки B дорівнює $L_{\text{П}} \dot{\gamma}$ ($L_{\text{П}}$ – сума l'_3 та l'_4) та направлено нормально до повздовжньої вісі цистерни в бік кутової швидкості.

Розглянемо дію узагальнюючих швидкостей у допоміжній системі координат $z_1 B x_1$. Повздовжню вісь напівпричіпної цистерни (вісь обертання колеса) направимо до точки зчипки, поперечну вісь – уздовж вісі обертання колеса (нормально до площини обертання колеса). Сформуємо складові абсолютної швидкості в точці B :

$$V_z = -L_{\Pi} \dot{\gamma} - \dot{z}_A \cdot \cos(\gamma) - V \cdot \sin(\gamma) \approx -(\dot{z}_A + L_{\Pi} \dot{\gamma} + V \cdot \gamma); \quad (8)$$

$$V_x = V \cdot \cos(\gamma) - \dot{z}_A \cdot \sin(\gamma) \approx V - \dot{z}_A \cdot \gamma. \quad (9)$$

Оскільки у системі координат $z_1 B x_1$ кут зміщення вісі напівпричіпа негативний (кут направлено за годинниковою стрілкою), тоді вираз для його визначення матиме наступний вид:

$$-\delta = V_z / V_x = -(\dot{z}_A + L_{\Pi} \dot{\gamma} + V \cdot \gamma) / (V - \dot{z}_A \cdot \gamma) \Rightarrow \delta = (\dot{z}_A + L_{\Pi} \dot{\gamma} + V \cdot \gamma) / (V - \dot{z}_A \cdot \gamma). \quad (10)$$

Приведемо вираз (10) до загального знаменника, тоді отримаємо рівняння для вісі напівпричіпної цистерни, яке сформовано з умови відсутності бокового руху в напрямку, нормальному до напрямку абсолютної швидкості вісі:

$$\dot{z}_A (1 + \delta \gamma) + V (\gamma - \delta) + L_{\Pi} \dot{\gamma} = 0. \quad (11)$$

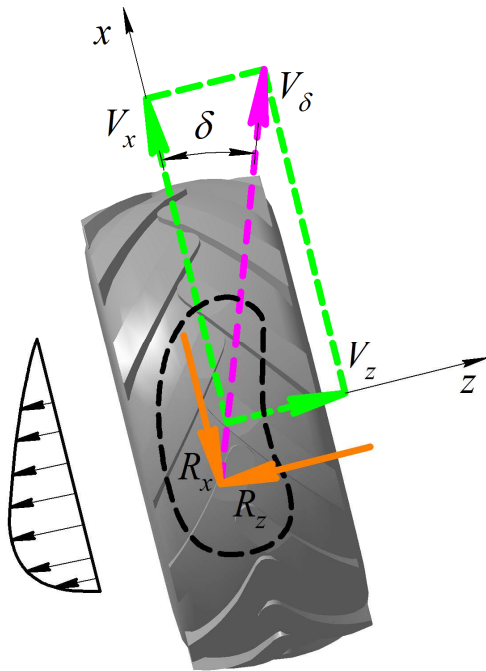


Рис. 3 – Спрощена схема шини, на яку діють поєздовжні та поперечні сили.

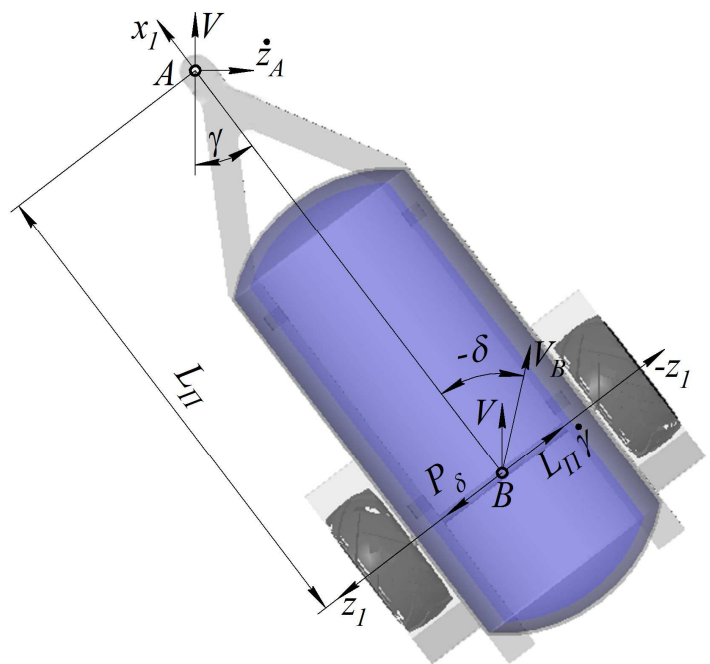


Рис. 4 – Спрощений вид напівпричіпної цистерни для визначення кута зміщення вісі за допомогою узагальнюючих швидкостей.

В рівнянні (11) можливо зробити спрощення, а саме знехтувати виразом $\dot{z}_A \delta \gamma$, тому що він являє собою величину другого порядку малості. Таким чином, рівняння (10) матиме наступний вид:

$$\begin{cases} (m_{\Pi} + m_p) \cdot (\ddot{z}_A + l'_3 \ddot{\gamma}) + c^{\Pi} \dot{z}_A + (f^{\Pi} + k_z/V) \dot{z}_A + k_z L_{\Pi} \dot{\gamma}/V + P_{B\Sigma} + (m_{\Pi} + m_p) \left(k_z / (m_{\Pi} + m_p) - f \right) g \gamma = 0; \\ (m_{\Pi} + m_p) l'_3 \ddot{z}_A + k_x L_{\Pi} \dot{z}_A/V + (m_{\Pi} + m_p) \cdot (l'_3)^2 \cdot \ddot{\gamma} + J_{\Pi} \ddot{\gamma} + k_z L_{\Pi}^2 \dot{\gamma}/V + k_z L_{\Pi} \gamma + P_{B\Sigma} \cdot h_m^p = 0; \\ m_m^p \cdot \ddot{z}_m^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_m^p - \dot{z}_A - l'_3 \dot{\gamma}) + c_m^p \cdot (z_m^p - z_A - l'_3 \gamma) - (m_m^p \cdot (g + \ddot{z}_A + l'_3 \ddot{\gamma})) \cdot \gamma = 0, \quad m = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (12)$$

Розглянемо на прикладі одновісної напівпричіпної цистерни ВНЦ-6 (рис. 5) малі поперечні коливання (вилляння). Початкові умови для розрахунку наведено в табл. 1. Однією з вимог [16] стійкості транспортованих агрегатів є $l'_3 \leq 0,5 L_{\Pi}$.

Таблиця 1 – Вихідні дані для цистерни ВНЦ-6

Маса рами цистерни, кг	m_{Π}	2000
Маса рідини в цистерні, кг	m_p	6000
Відстань від точки зчіпки до вісі цистерни, м	l'_3	4,575
Відстань від зчіпки до кінця цистерни, м	L_{Π}	5,775
Довжина цистерни, м	$2l$	3,9
Рівень наповненості цистерни, м	H	1,4
Жорсткість в поперечному напрямі, кН/м	c^{Π}	58,8
Коефіцієнт демпфірування в поперечному напрямі, Нс/м	f^{Π}	2452
Коефіцієнт опору боковому зміщенню шини	k_z	80000



Рис. 5 – Загальний вид напівпричіпної цистерни ВНЦ-6.

На рис. 6, 7 наведено результати при початковому куті поздовжньої вісі цистерни $\gamma = 0,0175$ рад (1 град) та швидкості руху $V = 5$ м/с (18 км/год).

Як видно з рис. 6, 7, поперечні коливання, які виникли, поступово згасають. Тому для більшої наочності виконаємо моделювання (рис. 8) при початковому куті поздовжньої вісі цистерни $\gamma = 0,192$ рад (11 град [17]) та швидкості руху $V = 5$ м/с (18 км/год).

З рис. 8 помітно, що дія коливань рідини на транспортній швидкості в одновісній напівпричіпній цистерні на поперечні зміщення вісі не суттєва. Це пов'язано з тим, що центр мас цистерни розташований попереду колісної вісі, що забезпечує її поперечну стійкість руху. Окрім того, помітно, що поперечний рух рідини компенсує автоколивання цистерни за рахунок різниці гармонік.

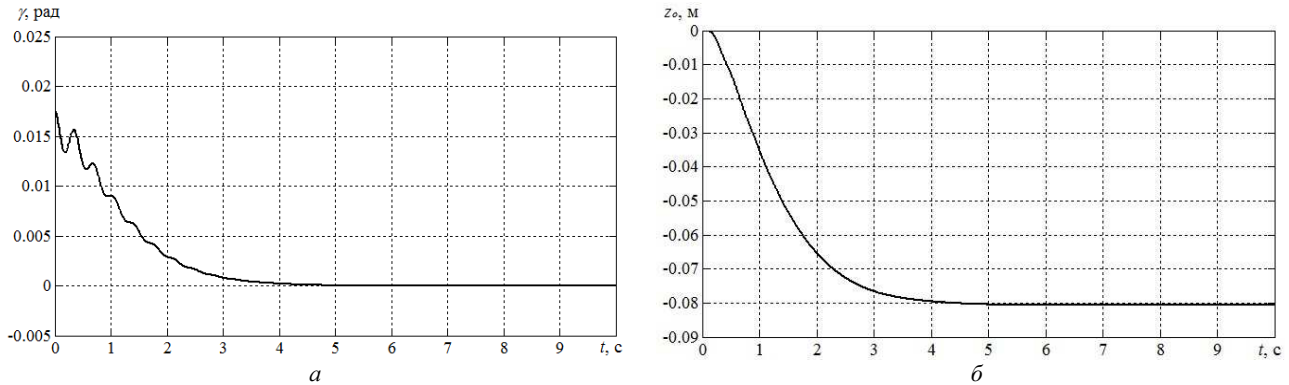


Рис. 6 – Результати моделювання впливу ВНЦ-6 при $\gamma = 1$ град: a – кут зміщення поздовжньої вісі; b – поперечне зміщення центру мас цистерни.

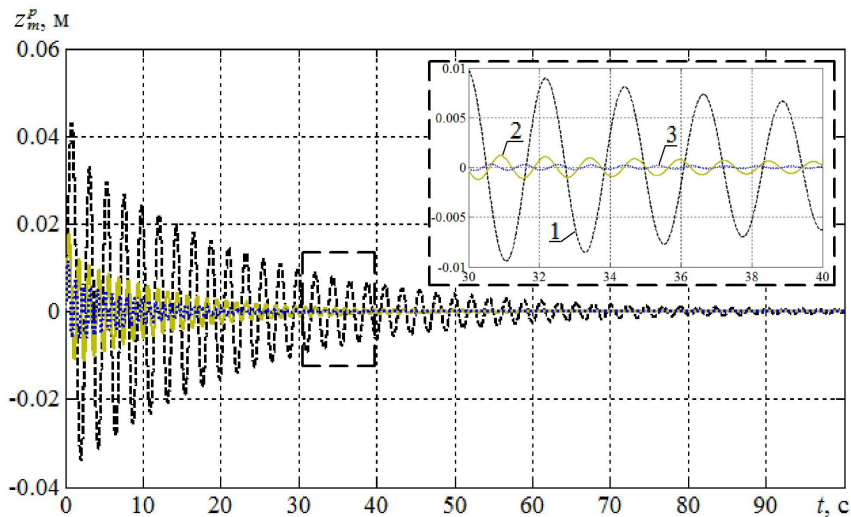


Рис. 7 – Поперечний зсув поверхневих шарів рідини: 1 – $m = 1$; 2 – $m = 2$; 3 – $m = 3$.

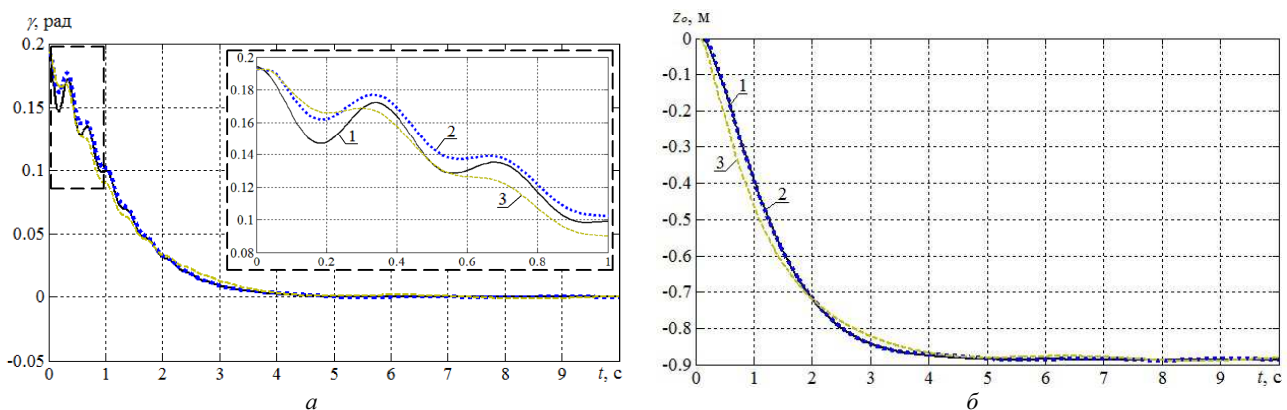


Рис. 8 – Результати моделювання впливу ВНЦ-6 при $\gamma = 11$ град: a – кут зміщення поздовжньої вісі; b – поперечне зміщення центру мас цистерни; 1 – $H = 1,4$ м; 2 – $H = 1,2$ м; 3 – $H = 0,5$ м.

Виявлення причіпної цистерни. При дослідженні малих поперечних коливань (виявлення) причіпної цистерни визначимо сили та моменти, які діють на агрегат змінної маси (рис. 9). Приймаємо наступні допущення: колісний трактор рухається з постійною швидкістю V по рівній горизонтальній поверхні; тягово-зчіпний пристрій має жорсткість c^Π та коефіцієнт демпфірування f^Π .

Аналізуючи схему, зображену на рис. 9, відмітимо, що на причіпну цистерну діють поперечні сили пружності та демпфірування в тягово-зчіпному пристрої колісного трактора; бокові реакції від дорожнього покриття на колеса передньої $P_{\delta 1}$ та задньої $P_{\delta 2}$ осей; сили, які утворюються при опорі руху передньої P_{f1} та задньої P_{f2} осей причіпної цистерни; момент тертя в поворотному колі M_T , а також моменти опору повороту коліс передньої M_{C1} та задньої M_{C2} осей причіпної цистерни.

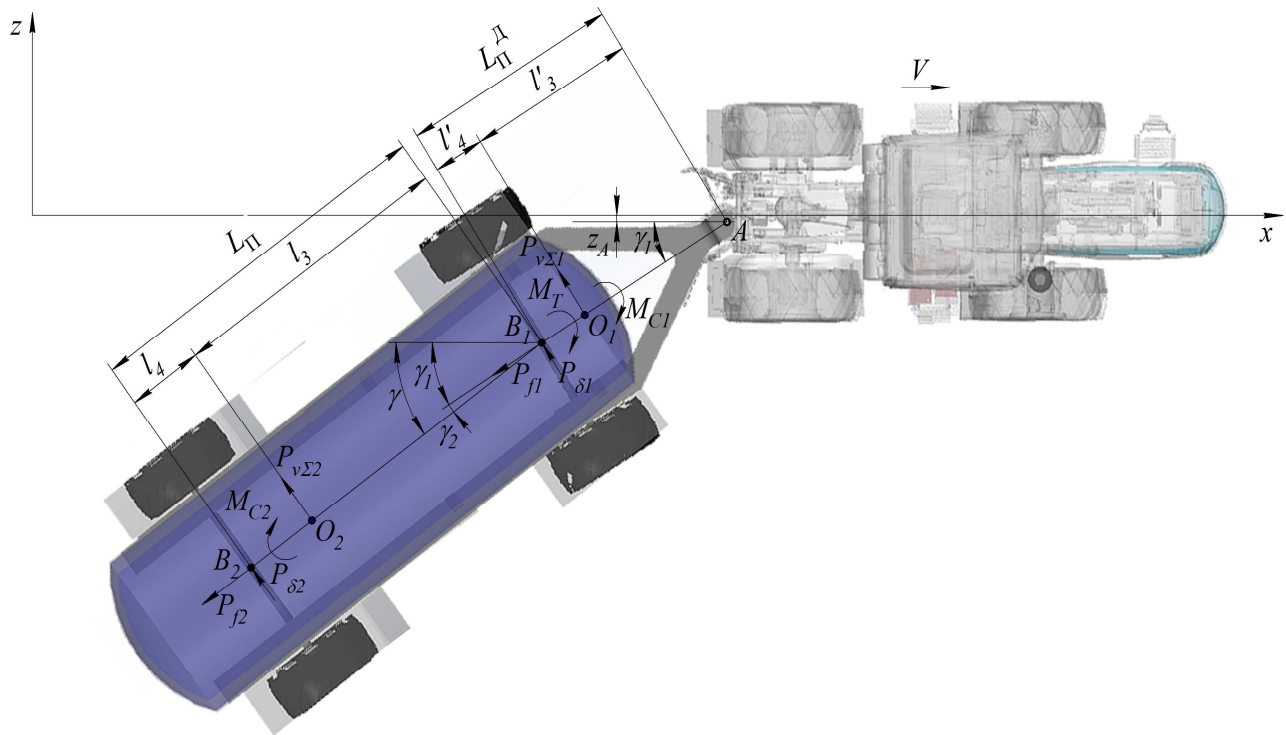


Рис. 9 – Спрощена схема для визначення малих поперечних коливань причіпної цистерни.

Точка зчипки A зміщується в поперечному напрямі z_A , передня частина причіпної цистерни здійснює коливальний рух відносно точки зчипки, відхиляється від напрямку, паралельного поздовжній вісі колісного трактора, на кут γ_1 . Задня частина причіпної цистерни коливається відносно середини передньої вісі та відхиляється від поздовжньої вісі передньої частини на кут γ_2 . При відхиленні задньої частини причіпної цистерни її поздовжня вісь створює кут γ з напрямом, паралельним поздовжній вісі трактора, який дорівнює $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

При розгляді малих поперечних коливань причіпної цистерни встановимо, що моменти опору повороту коліс передньої та задньої осей незначні і тому їх значенням можна знехтувати. Бокові сили, які діють на колеса однієї вісі, можна рахувати однаковими та замінити їх сумою сил, що прикладені до середини кожної з осей.

Беручи до уваги прийняті припущення, сформуємо математичну модель, яка описує малі поперечні коливання причіпної цистерни при прямолінійному русі колісного трактора з постійною швидкістю:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{z}_{O1} + m_2 \ddot{z}_{O2} + c^\Pi x_A + f^\Pi \dot{z}_A + P_{\delta 1} + P_{\delta 2} + P_{B\Sigma 1} + P_{B\Sigma 2} = (P_{f1} + P_{f2}) \gamma_1 + P_{\delta 2} \gamma_2; \\ m_1 l'_3 \ddot{z}_{O1} + m_2 (L_\Pi^D + l_3) \ddot{z}_{O2} + (J_1 + J_2) \cdot \ddot{\gamma}_1 + J_2 \ddot{\gamma}_2 = -P_{\delta 1} L_\Pi^D - P_{\delta 2} (L_\Pi + L_\Pi^D) - M_{B\Sigma 1} - M_{B\Sigma 2} + P_{f2} L_\Pi^D \gamma_2; \\ m_2 l_3 \ddot{z}_{O2} + J_2 (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2) = -P_{\delta 2} L_\Pi - M_{B\Sigma 2} - M_T \text{sign}(\dot{\gamma}_2); \\ m_{m1}^p \cdot \ddot{z}_{m1}^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_{m1}^p - \dot{z}_{O1}) + c_m^p \cdot (z_{m1}^p - z_{O1}) = [m_{m1}^p \cdot (g + \ddot{z}_{O1})] \cdot \gamma_1, \quad m = 1, 2, 3; \\ m_{m2}^p \cdot \ddot{z}_{m2}^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_{m2}^p - \dot{z}_{O2}) + c_m^p \cdot (z_{m2}^p - z_{O2}) = [m_{m2}^p \cdot (g + \ddot{z}_{O2})] \cdot \gamma_2, \quad m = 1, 2, 3, \end{array} \right. \quad (13)$$

де $\ddot{z}_{O1}$, $\dot{z}_{O1}$, z_{O1} – поперечне прискорення, швидкість та зміщення центру мас передньої частини цистерни; $\ddot{z}_{O2}$, $\dot{z}_{O2}$, z_{O2} – поперечне прискорення, швидкість та зміщення центру мас задньої частини цистерни;

$$z_{O1} = z_A + l'_3 \sin(\gamma_1) \approx z_A + l'_3 \gamma_1; \quad (14)$$

$$z_{O2} = z_A + (L_{\Pi}^D + l_3) \sin(\gamma_1) + l_3 \sin(\gamma_2) \approx z_A + (L_{\Pi}^D + l_3) \gamma_1 + l_3 \gamma_2. \quad (15)$$

З урахуванням рівнянь (14, 15) перетворимо рівняння (13):

$$\left\{ \begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{z}_A + (m_1 l'_3 + m_2 (L_{\Pi}^D + l_3)) \ddot{\gamma}_1 + m_2 l_3 \ddot{\gamma}_2 + c^{\Pi} \dot{z}_A + f^{\Pi} \dot{z}_A + P_{\delta 1} + P_{\delta 2} + P_{B\Sigma 1} + P_{B\Sigma 2} &= (P_{f1} + P_{f2}) \gamma_1 + P_{\delta 2} \gamma_2; \\ (m_1 l'_3 + m_2 (L_{\Pi}^D + l_3)) \ddot{z}_A + (m_1 (l'_3)^2 + m_2 (L_{\Pi}^D + l_3)^2 + J_1 + J_2) \ddot{\gamma}_1 + (m_2 l_3 (L_{\Pi}^D + l_3) + J_2) \ddot{\gamma}_2 &= \\ &= -P_{\delta 1} L_{\Pi}^D - P_{\delta 2} (L_{\Pi} + L_{\Pi}^D) - M_{B\Sigma 1} - M_{B\Sigma 2} + P_{f2} L_{\Pi}^D \gamma_2; \\ m_2 l_3 \ddot{z}_A + (m_2 l_3 (L_{\Pi}^D + l_3) + J_2) \ddot{\gamma}_1 + (m_2 (l'_3)^2 + J_2) \ddot{\gamma}_2 &= -P_{\delta 2} L_{\Pi} - M_{B\Sigma 2} - M_T \text{sign}(\gamma_2); \\ m_{m1}^p \cdot \ddot{z}_{m1}^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_{m1}^p - \dot{z}_{O1}) + c_m^p \cdot (z_{m1}^p - z_{O1}) &= [m_{m1}^p \cdot (g + \ddot{z}_{O1})] \cdot \gamma_1, \quad m = 1, 2, 3; \\ m_{m2}^p \cdot \ddot{z}_{m2}^p + f_m^p \cdot (\dot{z}_{m2}^p - \dot{z}_{O2}) + c_m^p \cdot (z_{m2}^p - z_{O2}) &= [m_{m2}^p \cdot (g + \ddot{z}_{O2})] \cdot \gamma_2, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

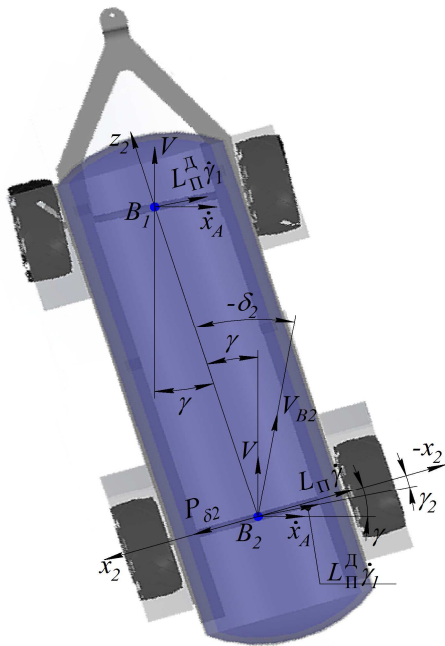


Рис. 10 – Спрощений вид причіпної цистерни для визначення кута зміщення задньої вісі за допомогою узагальнюючих швидкостей.

Бокові сили, які діють на вісі причіпної цистерни, представимо як добуток коефіцієнту опору зміщення вісі на кут зміщення (вираз (7)). Для передньої вісі причіпної цистерни кут її зміщення визначається виразом (11):

$$\delta_1 = \dot{z}_A + V \gamma_1 + L_{\Pi} \dot{\gamma}_1 / V.$$

Для обчислення кута зміщення задньої вісі причіпної цистерни побудуємо допоміжну систему координат $z_2 B_2 x_2$ (рис. 10):

$$\delta_2 = \frac{\dot{z}_A + L_{\Pi}^D \dot{\gamma}_1 + L_{\Pi} (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) + V (\gamma_1 + \gamma_2)}{V + L_{\Pi}^D \dot{\gamma}_1 \gamma_2 - \dot{z}_A (\gamma_1 + \gamma_2)}. \quad (17)$$

Розв'язуючи систему рівнянь, визначаємо параметри, які характеризують коливальний рух причіпної цистерни, за змінами яких можна аналізувати стійкість її руху. Розглянемо на прикладі двовісної причіпної цистерни ВНЦ-6/2 (рис. 11) малі поперечні коливання (вильяння). Початкові умови для розрахунку наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Вихідні дані для визначення вильяння ВНЦ-6/2

Маса рами цистерни, кг	m_{Π}	2000
Маса рідини в цистерні, кг	m_p	6000
Відстань від точки зчіпки до центру мас зміщення передньої частини, м	l'_3	2
Відстань від центру мас зміщення передньої частини до передньої вісі цистерни, м	l'_4	0,3
Відстань від передньої вісі до центру мас зміщення задньої частини, м	l_3	2,5
Відстань від центру мас зміщення задньої частини до задньої вісі цистерни, м	l_4	0,7
Довжина цистерни, м	$2l$	3,9
Рівень наповненості цистерни, м	H	1,4
Жорсткість в поперечному напрямі, Н/м	c^{Π}	58860
Коефіцієнт демпфірування в поперечному напрямі, Нс/м	f^{Π}	2452
Коефіцієнт опору боковому зміщенню шини	k_z	80000



Рис. 11 – Загальний вид причіпної цистерни ВНЦ-6/2.

На рис. 12, 13 наведено результати при початковому куті поздовжньої вісі цистерни $\gamma_1 = 0,0175$ рад (1 град) та швидкості руху $V = 5$ м/с (18 км/год).

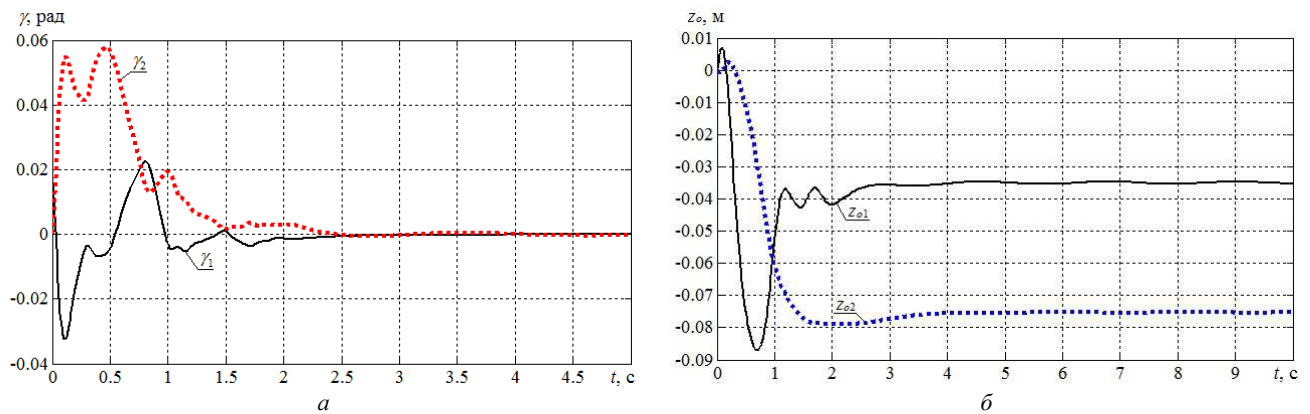


Рис. 12 – Результати моделювання впливу ВНЦ-6/2 при $\gamma = 1$ град: a – кут зміщення поздовжньої вісі; b – поперечне зміщення центру мас цистерни.

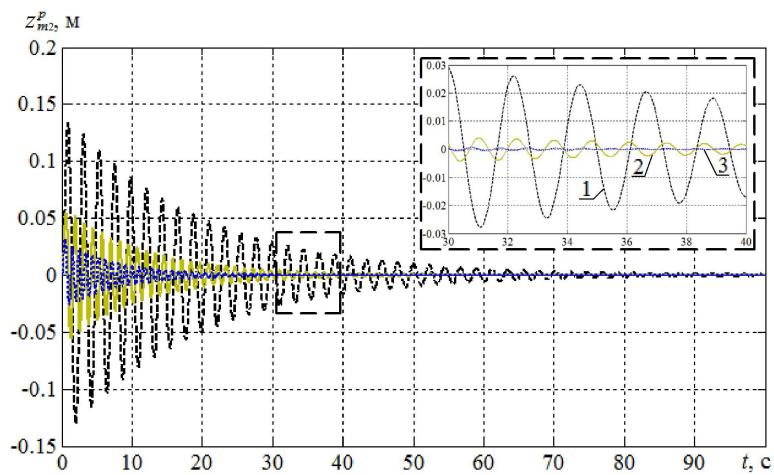


Рис. 13 – Поперечний зсув поверхневих шарів рідини: 1 – $m = 1$; 2 – $m = 2$; 3 – $m = 3$.

Порівнюючи рис. 7 та рис. 13 встановимо, що поперечний зсув поверхневих шарів рідини більший в причіпній цистерні, ніж в напівпричіпній. Що стосується поперечних коливань, то помітимо, що передня частина причіпної цистерни рухається стійко (зберігається вимога $I_3^D \leq 0,5L_{II}^D$ [16]). Виконаємо моделювання поперечних коливань причіпної цистерни при різному рівні наповненості (рис. 14, 15) та при початковому куті поздовжньої вісі $\gamma_1 = 0,192$ рад (11 град [17]) та швидкості руху $V = 5$ м/с (18 км/год).

Аналізуючи кути зміщення причіпної цистерни (рис. 14), встановимо, що різний рівень наповненості суттєвим чином не впливає на зміну кутів.

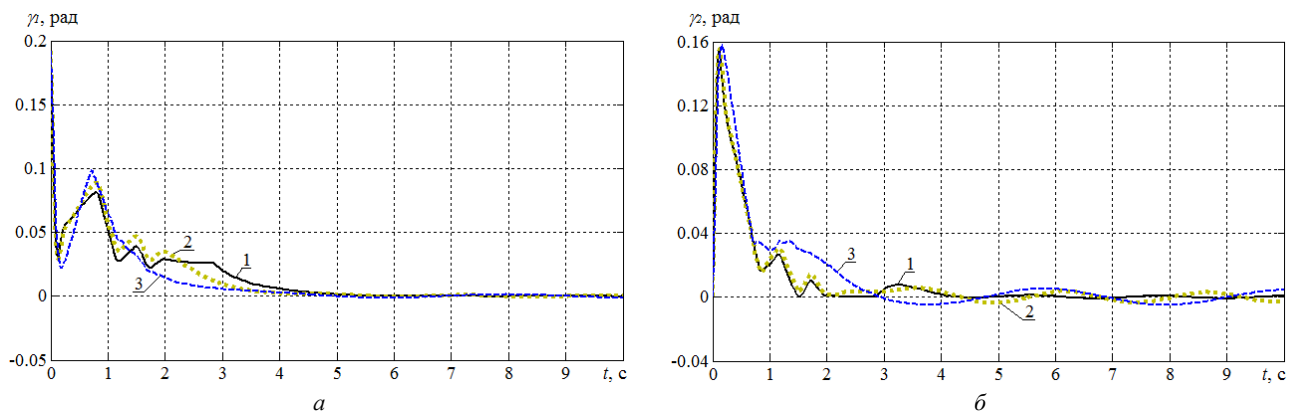


Рис. 14 – Результати моделювання впливу ВНЦ-6/2 при $\gamma = 11$ град:

a – кут зміщення передньої вісі; b – кут зміщення задньої вісі; 1 – $H = 1,4$ м; 2 – $H = 1,2$ м; 3 – $H = 0,5$ м.

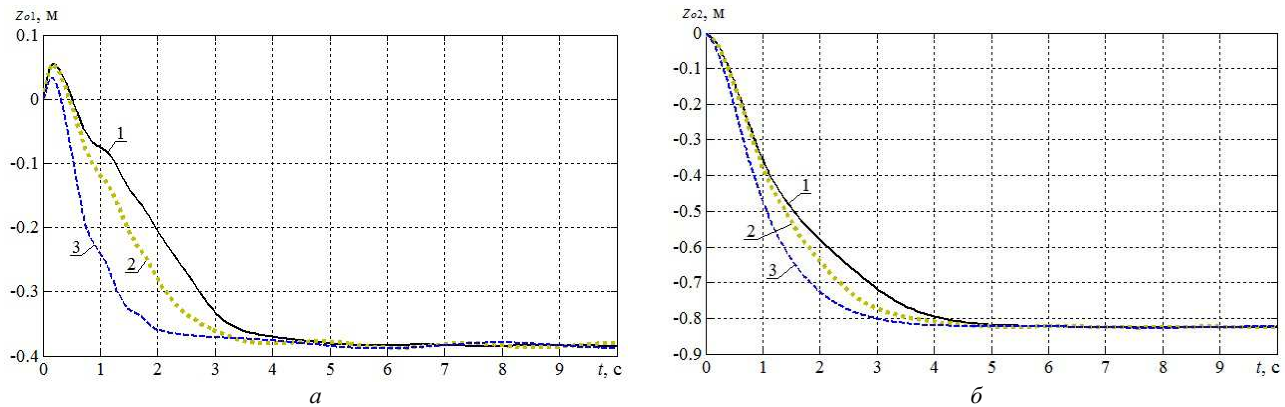


Рис. 15 – Результати моделювання впливу ВНЦ-6/2 при $\gamma = 11$ град: а – зміщення центру мас передньої вісі; б – зміщення центру мас задньої вісі; 1 – $H = 1,4$ м; 2 – $H = 1,2$ м; 3 – $H = 0,5$ м.

При зміні рівня наповненості цистерни визначено, що швидка зміна поперечного зміщення центру мас осей (рис. 15) причіпної цистерни досягається при меншому рівні рідини в цистерні.

Аналіз отриманих даних свідчить про те, що на стійкий рух причіпних цистерн впливає перерозподіл мас в агрегаті, тому необхідно проводити подальше комплексне дослідження поперечного руху причіпних агрегатів разом з рухом колісного трактора.

Перспективним напрямком дослідження буде слугувати розгляд керованості та маневреності колісних тракторів при транспортуванні агрегатів змінної маси. Окрім того, необхідно встановити існування параметричних коливань і як вони впливають на поперечні коливання системи «колісний трактор – агрегат змінної маси».

Висновки. Складено математичну модель, яка дозволяє оцінити поперечні коливання агрегату змінної маси (цистерни), який знаходиться в зчепці з колісним трактором. Математична модель імітує вплив агрегату змінної маси.

Встановлено, що дія коливань рідини на транспортній швидкості в напівпричіпній цистерні на поперечні зміщення вісі не суттєва, адже центр мас цистерни розташований попереду колісної вісі, що забезпечує її поперечну стійкість руху. Що стосується причіпної цистерни, то на її поперечну стійкість суттєво впливає перерозподіл мас в цистерні, а також транспортна швидкість руху.

Список літератури

1. Поляков В. А., Хачапуридзе Н. М. Рациональная реализация математической модели движения магнитолевитирующего поезда // Наука и прогресс транспорта : Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – Дніпро : ДНУЖТ, 2007. – №19. – С. 183 – 189.
2. Belknap S. B. A general transport rule for variable mass dynamics // AIAA Journal. – 1972. – № 10(9). – P. 1137 – 1138. DOI: 10.2514/3.50334.
3. Свитачев А. И., Разуваева А. С., Чекаев А. Н. Моделирование динамики тягово-транспортных машин с элементами конструкций переменной массы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – № 1(33). – С. 91 – 92.
4. Бороненко Ю. П., Житков Ю. Б. Особенности динамики вагона-цистерны с жидким грузом // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2017. – № 4 (14). – С. 597 – 604.
5. Rumold W. Modeling and Simulation of Vehicles Carrying Liquid Cargo // Multibody System Dynamics. – 2001. – № 5. – P. 351 – 374.
6. Razaghi R., Sharavi M., Feizi M. M. Investigating the effect of sloshing on the energy absorption of tank wagons crash // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. – 2015. – № 39(2). – P. 187 – 200.
7. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
8. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
9. Закин Я. Х., Шукин М. М., Марголис М. Я., Ширяев П. П., Андреев А. С. Конструкция и расчет автомобильных поездов. – Москва : Машиностроение, 1968. – 332 с.
10. Литвинов А. С., Фаробин Я. Е. Автомобиль : Теория эксплуатационных свойств : учебник для вузов по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство». – Москва : Машиностроение, 1989. – 240 с.
11. Успенский И. А., Ремболович Г. К., Юхин И. А. Анализ теоретических исследований устойчивости движения транспортных средств в сельском хозяйстве // Вестник Рязанского государственного агротехнологического университета им. П.А. Костычева. – Рязань : РГАТУ, 2010. – № 1. – С. 58 – 60.
12. Бусаров Ю. П., Черкунов В. Б., Татарченко А. Е. Подавление автоколебаний прицепа // Автомобильная промышленность. – 1986. – № 10. – С. 17 – 19.
13. Pacejka H. B. Tire and vehicle dynamics. – SAE, Warrendale, 2006. – 622 p.
14. Подригало М. А., Клець Д. М. Модель нелінійного відведення еластичного колеса автомобіля // Збірник наукових праць Академії внутрішніх військ МВС України. – 2013. – № 1(21). – С. 57 – 62.
15. Певзнер Я. М. Теория устойчивости автомобиля. – М. : Машгиз, 1947. – 156 с.
16. Артемьев П. П., Атаманов Ю. Е., Богдан Н. В. Тракторные поезда. – Москва : Машиностроение, 1982. – 183 с.
17. Абдулгазис А. У. Модель бокового увода шины колеса автомобиля // Энерго- и ресурсосбережение: промышленность и транспорт. – 2016. – №5. – С. 12 – 16.

References (transliterated)

1. Polyakov V. A., Khachapuridze N. M. Ratsional'naya realizatsiya matematicheskoy modeli dvizheniya magnitolevitiruyushhego poyezda [Rational realization of mathematical model of maglev train motion]. *Nauka i progress transporta : Vestnik Dnepropetrovskogo natsional'nogo universiteta zhelezнодорожного транспорта* [Science and advancements in transport: Bulletin of the Dnipro National University of Rail Transport]. Dnipro, DNUZHT Publ., 2007, no. 19, pp. 183–189.
2. Belknap S. B. A general transport rule for variable mass dynamics. *AIAA Journal*. 1972, no. 10(9), pp. 1137–1138. DOI: 10.2514/3.50334.
3. Svitachev A. I., Razuvayeva A. S., Chekayev A. N. Modelirovanie dinamiki tyagovo-transportnykh mashin s elementami konstruktivnykh peremennoy massy [Modeling dynamics of traction and transportation machines with variable mass structural units]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovanie* [Contemporary technologies. System analysis. Modeling]. 2012, no. 1(33), pp. 91–92.
4. Boronenko Yu. P., Zhitikov Yu. B. Osobennosti dinamiki vagona-tsistemy s zhidkim gruzom [Features of dynamics of railtank car filled with liquid cargo]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putye soobshcheniya* [Proceedings of the St. Petersburg State Transport University]. 2017, no. 4 (14), pp. 597–604.
5. Rumold W. Modeling and Simulation of Vehicles Carrying Liquid Cargo. *Multibody System Dynamics*. 2001, no. 5, pp. 351–374.
6. Razaghi R., Sharavi M., Feizi M. M. Investigating the effect of sloshing on the energy absorption of tank wagons crash. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. 2015, no. 39(2), pp. 187–200.
7. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Matematychnye modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v goryzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universitetu «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnistsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
8. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnogo traktora ta tsystemy z ridynoyu na pryamomu shlyakhu zi skladnym rel'yefom [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universitetu «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnistsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
9. Zakin Ya. Kh., Shhukin M. M., Margolis M. Ya., Shiryayev P. P., Andreev A. S. *Konstruktsiya i raschet avtomobil'nykh poezdov* [Constructing and computing car trains]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 332 p.
10. Litvinov A. S., Farobin Ya. E. *Avtomobil' : Teoriya ekspluatatsionnykh svoystv : uchebnik dlya vuzov po spetsial'nosti «Avtomobili i avtomobil'noe khozyaystvo»* [Automobile: Theory of operation properties: textbook in Automobile and vehicle fleet specialty for higher educational institutions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 240 p.
11. Uspenskiy I. A., Rembalovich G. K., Yukhin I. A. Analiz teoreticheskikh issledovaniy ustoychivosti dvizheniya transportnykh sredstv v sel'skom khozyaystve [Analysis of theoretical studies of motion stability for transportation vehicles in agriculture]. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo agrotekhnicheskogo universiteta im. P.A. Kostycheva* [Bulletin of the P.A. Kostychev Ryazan State Agrotechnological University]. Ryazan, RGATU Publ., 2010, no. 1, pp. 58–60.
12. Busarov Yu. P., Cherkunov V. B., Tatarchenko A. E. Podavlenie avtokolebaniy pritsepa [Suppression of trailer auto-oscillations]. *Avtomobil'naya promyshlennost' [Automobile industry]*. 1986, no. 10, pp. 17–19.
13. Pacejka H. B. *Tire and vehicle dynamics*. SAE, Warrendale, 2006. 622 p.
14. Podrygalo M. A., Klets D. M. Model' nelineynogo vidvedennya elastichnogo kolesa avtomobilya [Model of nonlinear deviation of automobile elastic wheel]. *Zbirnyk naukovykh prats' Akademiyi vnutrishnikh viys'k MVS Ukrainy* [Collection of the scientific papers of the Academy of Internal Affairs of the MIA of Ukraine]. 2013, no. 1(21), pp. 57–62.
15. Pevzner Ya. M. *Teoriya ustoychivosti avtomobilya* [Automobile stability theory]. Moscow, Mashgiz Publ., 1947. 156 p.
16. Artem'ev P. P., Atamanov Yu. E., Bogdan N. V. *Traktornye poezda* [Tractor trains]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 183 p.
17. Abdulgasis A. U. Model' bokovogo uvoda shyny kolesa avtomobilya [Automobile wheel tire slipping model]. *Enargo- i resursoberezhenie : promyshlennost' i transport* [Energy and resource saving: industry and transport]. 2016, no. 5, pp. 12–16.

Надійшла(received) 19.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

УДК 621.05

Г. А. КРУТИКОВ, М. Г. СТРИЖАК

ПРОЕКТУВАННЯ ЕЛЕКТРОГІДРАВЛІЧНОГО СЛІДКУЮЧОГО ПРИВОДА НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ МІНІМІЗАЦІЇ ЕНЕРГОВИТРАТ

Розглянуто питання можливості вибору оптимальних з точки зору енергетичної досконалості параметрів електрогідравлічного сліdkуючого привода на стадії його проектування. Отримана інженерна методика розрахунку привода дозволяє мінімізувати споживану потужність за рахунок вибору мінімального необхідного типорозміру циліндра і оптимальної величини тиску налаштування напірного клапана. Отримані залежності дозволяють обрати раціональну форму перехідного процесу у приводі і є основою для наступного етапу динамічного синтезу електрогідравлічного сліdkуючого привода – вибору оптимального значення коефіцієнта підсилення електронного підсилювача, а також структури і параметрів корегуючої ланки.

Ключові слова: електрогідравлічний сліdkуючий привод, енергозбереження, мінімізація енерговитрат.

© Г. А. Крутиков, М. Г. Стрижак, 2020

Г. А. КРУТИКОВ, М. Г. СТРИЖАК

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОГО СЛЕДЯЩЕГО ПРИВОДА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОЗАТРАТ

Рассмотрены вопросы возможности выбора оптимальных с точки зрения энергетического совершенства параметров электрогидравлического следящего привода на стадии его проектирования. Полученная инженерная методика расчета привода позволяет минимизировать потребляемую мощность за счет выбора минимального необходимого типоразмера цилиндра и оптимальной величины давления настройки напорного клапана. Получены зависимости, позволяющие выбрать рациональную форму переходного процесса в приводе и являющиеся основой для следующего этапа динамического синтеза электрогидравлического следящего привода – выбора оптимального значения коэффициента усиления электронного усилителя, а также структуры и параметров корректирующего звена.

Ключевые слова: электрогидравлический следящий привод, энергосбережение, минимизация энергозатрат.

G. A. KRUTIKOV, M. G. STRYZHAK

DESIGN OF AN ELECTRO HYDRAULIC SERVO DRIVE ON THE BASIS OF THE PRINCIPLE OF MINIMIZING ENERGY COSTS

The questions of the possibility of choosing the optimal parameters of an electro-hydraulic servo drive from the point of view of energy excellence at the design stage are considered in two cases: under the action of only inertial load and when combined with inertial and static loads. The resulting engineering methodology for calculating the drive allows one to minimize power consumption by choosing the minimal required cylinder size and the optimal pressure setting for the pressure valve. Analytical dependences are obtained for calculating the power, the steady-state speed of the executive element and the flow rate, which allow choosing the rational form of the transient process in the drive and are the basis for the next stage of the dynamic synthesis of the electro-hydraulic servo drive, namely, choosing the optimal value of the gain of the electronic amplifier, as well as the structure and parameters of the correction link.

Key words: electro-hydraulic servo drive, energy saving, minimizing energy consumption.

Вступ. Електрогідролічний слідуючий привод (ЕГСП) є одним з найбільш ефективних та універсальних засобів автоматизації виробничих процесів, адже дозволяє поєднувати необмежені функціональні можливості сучасної мікроелектроніки із значними силовими можливостями гідроприводів. Використовувані у цих системах двокаскадні електрогідролічні підсилювачі (ЕГП) мають надзвичайно високий коефіцієнт підсилення (більше $3 \cdot 10^5$), що дозволяє в якості вхідних сигналів керування використовувати малопотужні електричні сигнали [1].

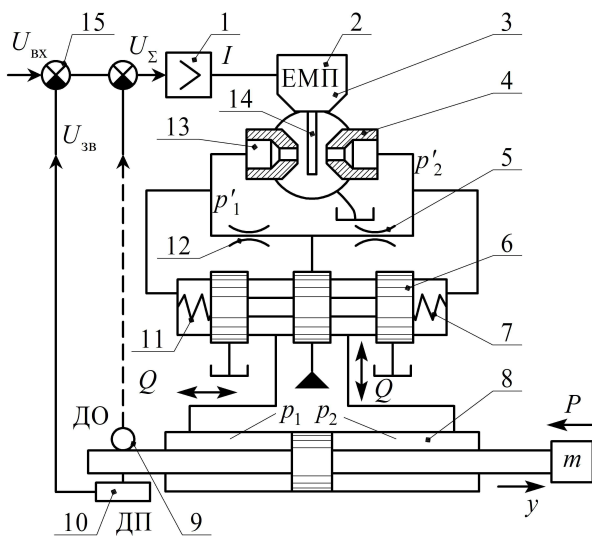


Рис. 1 – Схема ЕГСП.

Аналіз останніх досліджень. ЕГСП узагальнено складається із чотирьох блоків (рис. 1): електрогідролічного підсилювача потужності (ЕГП), до складу якого входить електромеханічний перетворювач (ЕМП) 2, перший каскад підсилення – міст «сопло-заслінка», який включає у себе два сопла 4 та 13, заслінку 14 і постійні дроселі 5 і 12; другий каскад підсилення – дроселюючий золотник 6; другий блок – блок датчиків та редукторів 9, 10; третій блок – функціональний перетворювач, який включає в себе електронний підсилювач 1 і суматор 15; четвертий блок – виконавчий механізм (ВМ) 8 [2, 3].

У системі позиційного керування привод, як правило, працює в *аналогово-дискретному режимі*. Це означає, що початкова *напруга неузгодження* U_{Σ} настільки велика, що електронний підсилювач опиняється у зоні насичення (точки 1, 2 на рис. 2).

У результаті цього вихідна ланка ЕГСП після розгону рухається з максимальною усталеною швидкістю $v_{\max}$ (крива 1 на рис. 3). Цей режим характеризується тим, що сигнал зворотного зв'язку не впливає на характер руху вихідної ланки і привод залишається розімкненим, тобто працює у дискретному режимі. При підході до точки позиціонування, тобто при достатньо малому сигналі неузгодження U_{Σ} , електронний підсилювач входить у робочу зону (точка 3 на рис. 2). Реалізується фаза гальмування вихідної ланки, при якій зворотний зв'язок активно формує керуючий вплив, тобто привод переходить у аналоговий режим. Реалізація аналогово-дискретного режиму при позиційній системі керування призводить до значного підвищення швидкодії привода (рис. 3).

Постановка задачі. ЕГСП типу ПЕГС (з лінійними циліндрами), що випускаються серійно, мають три типорозміри виконавчого механізму і умовою нормальної роботи ЕГП є використання тиску живлення в межах від 6,3 МПа до 16 МПа. Тому можливості вибору оптимальних з точки зору енергетичної досконалості параметрів привода обмежуються саме цими умовами. При цьому необхідно виходити з конкретних умов функціонування ЕГСП (*статичне та інерційне навантаження*) і вимог до експлуатаційних показників (*максимальний хід робочого органа і час спрацювання*).

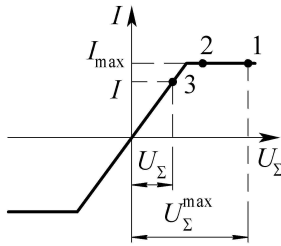


Рис. 2 – Характеристика електронного підсилювача.

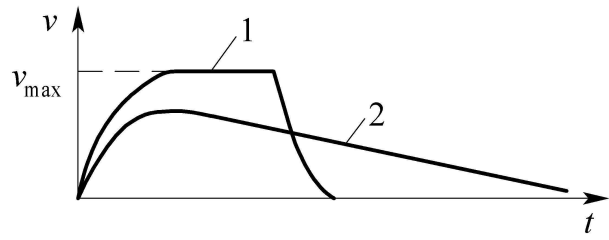


Рис. 3 – Рух вихідної ланки при аналогово-дискретному режимі (1) і аналоговому режимі (2).

Математична модель. Рівняння руху вихідної ланки розімкненого привода отримаємо прийнявши припущення про симетричність привода та нестисливість робочого тіла:

$$m \frac{dv}{dt} = F(p_1 - p_2) - P, \quad (1)$$

де m – маса рухомих частин привода; P – статичне навантаження; F – площа поршня; v – швидкість поршня; p_1, p_2 – тиск у порожнинах циліндра:

$$Fv = \mu f_3 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_n - p_1)} = \mu f_3 \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2}, \quad (2)$$

де ρ – щільність рідини; f_3 – площа дроселюючої щілини золотника; μ – коефіцієнт витрати; p_n – тиск на виході з насоса.

Об'єднавши рівняння (1) і (2), отримаємо диференціальне рівняння руху поршня:

$$m \frac{dv}{dt} = p_n F - \frac{\rho F^3 v^2}{(\mu f_3)^2} - P. \quad (3)$$

Вираз для усталеної швидкості отримаємо з (3) при $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$v_{уст} = \frac{\mu f_3}{F} \sqrt{\frac{p_n - P/F}{\rho}}. \quad (4)$$

Використовуючи це значення, приведемо рівняння руху поршня до компактнішої форми:

$$m \frac{dv}{dt} = A \left(1 - \frac{v^2}{v_{уст}^2} \right), \quad (5)$$

де $A = p_n F - P$.

Інтегруючи рівняння (5), отримаємо вираз для швидкості поршня у розімкненому приводі:

$$v = v_{уст} \frac{e^{t/T_p} - 1}{e^{t/T_p} + 1} = v_{уст} \left[1 - \frac{2}{1 + e^{t/T_p}} \right], \quad (6)$$

де $T_p = \frac{m \cdot v_0}{2A}$ – постійна часу розгону (рис. 4).

Вибір параметрів ЕГСП, виходячи з принципу мінімізації енерговитрат, проведемо спочатку при дії лише інерційного навантаження. Задача у такому випадку формулюється наступним чином: необхідно обрати такі параметри ЕГСП, які забезпечують переміщення заданої маси m на задану відстань u за заданий час t_Σ при

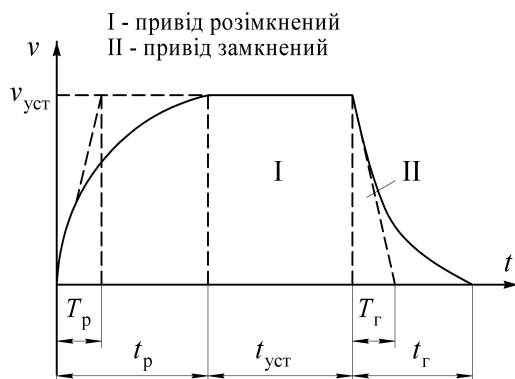


Рис. 4 – Зміна швидкості робочого органа ЕГСП при роботі у позиційному режимі.

мінімальних витратах енергії. У випадку створення широкодіапазонного ЕГСП у якості відстані u може бути прийнятий максимальний хід робочого органа L .

Номинальна потужність, яку розвиває привод у розімкненому режимі N_n , визначається як:

$$N_n = Q_{max} \cdot p_{ном} = F \cdot v_{уст} \cdot p_{ном}. \quad (7)$$

Характер зміни швидкості робочого органа при роботі в *позиційному режимі* показаний на рис. 4. При розгоні і русі з максимальною швидкістю привод залишається розімкненим (зона I на рис. 4). При підході до точки позиціонування, коли робочий орган знаходиться у режимі гальмування, привод замкнений по положенню (зона II на рис. 4).

Результати математичного моделювання. У теорії автоматичного керування для експоненційних перехідних процесів прийнято вважати процес закінченим при $t = t_p \cong 3T_p$, де t_p – час розгону. Крім цього, задачею динамічного синтезу ЕГСП є забезпечення також експоненційного характеру перехідного процесу і при гальмуванні (рис. 4). При такому гальмуванні максимальне від'ємне прискорення $a_{\max}$ спостерігається у початковий момент гальмування. Якщо дотична, проведена у початковій точці гальмування до кривої $v(t)$, відповідає прямій $a_{\max} = \text{const}$ і вона відсікає на вісі абсцис відрізок T_r (рис. 4), то останній буде відповідати постійному часу гальмування. У цьому випадку швидкість при гальмуванні може бути визначена як:

$$v = v_{\text{уст}} \cdot e^{-t/T_r}. \quad (8)$$

При цьому максимальне від'ємне прискорення:

$$a_{\max} \cong \frac{A}{m}. \quad (9)$$

Через те, що $v_{\text{уст}} = T_r \cdot a_{\max}$, постійна часу гальмування може бути знайдена як

$$T_r = \frac{v_{\text{уст}}}{a_{\max}} = \frac{v_{\text{уст}} \cdot m}{A}. \quad (10)$$

Аналогічно і з фазою розгону: повний час гальмування $t_r \cong 3T_r$.

Повний час спрацювання t_{Σ} складається з трьох відрізків часу:

$$t_{\Sigma} = t_p + t_{\text{уст}} + t_r = 3T_p + 3T_r + \frac{1}{v_{\text{уст}}} \left[L - \int_0^{3T_p} v_{\text{уст}} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{t/T_p}} \right) dt - \int_0^{3T_r} v_{\text{уст}} e^{-t/T_r} dt \right], \quad (11)$$

де L – повний хід робочого органа ЕГСП.

В результаті інтегрування виразу (11) отримаємо:

$$t_{\Sigma} = 2,75 \frac{v_{\text{уст}} \cdot m}{A} + \frac{L}{v_{\text{уст}}}. \quad (12)$$

Зробивши заміну $v_{\text{уст}} = \frac{N_n}{A}$, перепишемо вираз (12):

$$t_{\Sigma} = 2,75 \frac{N_n \cdot m}{A^2} + \frac{L \cdot A}{N_n}, \quad (13)$$

де $A = p_n \cdot F$ для випадку чисто інерційного навантаження.

Розв'язком рівняння (13) є значення номінальної потужності N_n :

$$N_n = \frac{t_{\Sigma} \pm \sqrt{t_{\Sigma}^2 - \frac{11m \cdot L}{A}}}{5,5 \frac{m}{A^2}}. \quad (14)$$

Наявність двох коренів рівняння (14) свідчить про те, що розв'язання задачі переміщення заданої маси m на задану відстань L за заданий час t_{Σ} можливе при двох значеннях номінальної потужності $N_{n(1)}$ і $N_{n(2)}$. Якщо при більшій потужності $N_{n(1)}$ має місце виграш у шляху під час розгону і руху з усталеною швидкістю (s_1), то при меншій потужності $N_{n(2)}$ має місце виграш у шляху s_2 при гальмуванні (причому $s_1 = s_2$) (рис. 5). Тому у подальшому розглядається менший корінь рівняння (14) $N_{n(1)}$.

Вираз (14) має сенс, якщо

$$A > A_{\text{обм}} = \frac{11m \cdot L}{t_{\Sigma}^2}. \quad (15)$$

Вираз (15) встановлює значення мінімальної (обмежуючої) сили $A_{\text{обм}}$, при якій ще досягається усталена швидкість $v_{\text{уст}}$. Оптимальне значення $A_{\text{опт}}$, яке мінімізує значення номінальної потужності N_n , отримаємо з рівності $\frac{dN_n}{dA} = 0$:

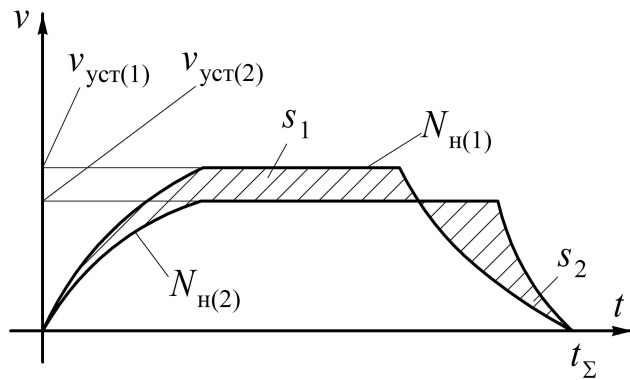


Рис. 5 – Процес позиціювання при різних потужностях.

При цьому значенні A потужність привода N_H буде мінімальною:

$$A_{\text{опт}} = 12,6 \frac{m \cdot L}{t_{\Sigma}^2}. \quad (16)$$

$$N_{H \min}(A_{\text{опт}}) = 18,7 \frac{m \cdot L^2}{t_{\Sigma}^3}; \quad (17)$$

$$v_{\text{уст}}^* = \frac{N_{H \min}}{A_{\text{опт}}} = 1,49 \frac{L}{t_{\Sigma}}; \quad (18)$$

$$Q_{\max}^* = v_{\text{уст}}^* \cdot F^* = \frac{1,49 F^* \cdot L}{t_{\Sigma}}, \quad (19)$$

де F^* , $v_{\text{уст}}^*$, $Q_{\max}^*$ – оптимальні значення параметрів.

Значення F^* та p_h^* , які мінімізують потужність N_H , визначаються шляхом підбору. При відомому значенні $A_{\text{опт}} = F^* \cdot p_h^*$ з каталогу спочатку обирають ПЕГС з мінімальним значенням F_1^* і визначають тиск налаштування напірного клапана $p_h^* = A_{\text{опт}} / F_1^*$. Якщо $6,3 \text{ МПа} < p_h^* < 16 \text{ МПа}$, то залишають прийняті значення F^* та p_h^* . Якщо $p_h^* > 16 \text{ МПа}$ – переходять до наступного (більшого) типорозміру ПЕГС з площею поршня F_2^* і знову визначають p_h^* . Такий перебір виконують доки при черговому обраному значенні F_i^* значення p_h^* не виявиться у заданому робочому діапазоні тисків.

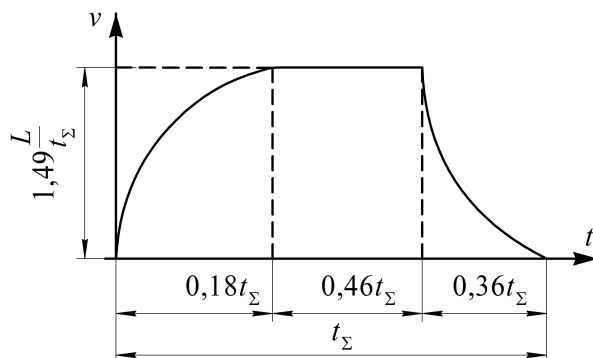


Рис. 6 – Оптимальна форма перехідного процесу за швидкістю.

$$T_p = \frac{v_{\text{уст}}^* \cdot m}{2 A_{\text{опт}}} = 0,06 t_{\Sigma}; \quad (20)$$

$$T_r = \frac{v_{\text{уст}}^* \cdot m}{A_{\text{опт}}} = 0,12 t_{\Sigma}; \quad (21)$$

$$t_p = 3T_p^* = 0,18 t_{\Sigma}; \quad t_r = 3T_r = 0,36 t_{\Sigma}; \quad (22)$$

$$t_{\text{уст}} = 0,46 t_{\Sigma}.$$

Це дозволяє визначити оптимальну форму перехідного процесу за швидкістю, яка забезпечує мінімум споживаної потужності (рис. 6).

За умови дії додатково до інерційного *статичного* навантаження розв'язання задачі ускладнюється. Ста-

тичне навантаження може бути як зустрічним так і супутнім:

$$A = p_h \cdot F \pm P. \quad (23)$$

Розв'язок рівняння (14) у цьому випадку має вигляд:

$$N_H = \frac{t_{\Sigma} A_0 (A_0^2 - P^2) - \sqrt{t_{\Sigma}^2 A_0^2 (A_0^2 - P^2) - 4mLA_0^2 (A_0^2 - P^2)(2,75A_0 - 1,35P)}}{2m(2,75A_0 \pm 1,35P)}, \quad (24)$$

де знак «+» відповідає супутньому навантаженню, а знак «-» – зустрічному; $A_0 = p_h \cdot F$.

Вираз для визначення $A_{\text{опт}}^*$ можна отримати в результаті розв'язування рівняння

$$\frac{dN_H}{dA_0} = 0,$$

де N_H відповідає виразу (24). Однак, такий метод розв'язання пов'язаний з певними труднощами. Для інженерних розрахунків можна скористатися графіками, отриманими у ВНДІ Гідроприводі на основі розрахунків на ЕОМ [4] (рис. 7). Тут суцільна лінія відповідає зустрічному навантаженню, пунктирна – супутньому. На графіку (рис. 7) криві 1 і 1' відповідають безрозмірним значенням $N_{\min} / (N_{\min})_0$ відповідно при зустрічному та супутньому навантаженнях, де $(N_{\min})_0$ – значення потужності при чисто інерційному навантаженні (17).

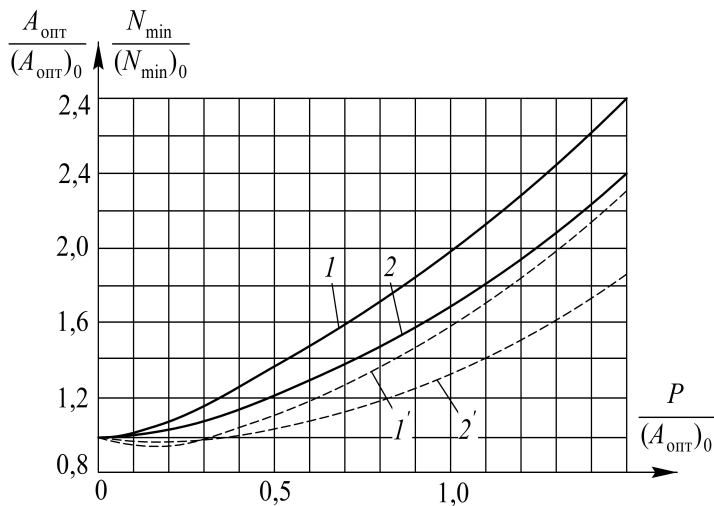


Рис. 7 – Графік для визначення безрозмірних значень зусилля та потужності при врахуванні статичного навантаження.

Перспективи подальших досліджень. Визначення параметрів ЕГСП при вирішенні конкретної технологічної задачі часто пов'язане з виконанням протилежних вимог, зокрема вимоги високої точності позиціонування і високої швидкодії з великим запасом стійкості, що є взаємно виключними. Для забезпечення заданої швидкодії, заданої форми перехідного процесу і точності позиціонування робочого органа в умовах позиційного керування існують обмежені можливості, пов'язані з вибором коефіцієнта підсилення електронного підсилювача, а також структури і параметрів корегуючої ланки.

В подальшому планується визначити зв'язок необхідної точності позиціонування і заданого характеру перехідного процесу з параметрами бажаних логарифмічних амплітудно-частотних і фазо-частотних характеристик.

Висновки. Викладена методика вибору параметрів ЕГСП дозволяє мінімізувати споживану потужність привода за рахунок вибору мінімального необхідного типорозміру циліндра і оптимальної величини тиску налаштування напірного клапана. Вибір раціональної форми перехідного процесу також є основою для наступного етапу динамічного синтезу ЕГСП – вибору оптимального значення коефіцієнта підсилення електронного підсилювача, а також структури і параметрів корегуючої ланки.

Список літератури

1. Крейнин Г. В. Гидравлические и пневматические приводы промышленных роботов и манипуляторов. – М. : Машиностроение, 1993. – 300 с.
2. Гидропривод и гидрооборудование в станкостроении. Методические рекомендации. – Ч. 1, 2. – М. : НИИМАШ, 1980. – 434 с.
3. Леценко В. А. Гидравлические следящие приводы станков с программным управлением. – М. : Машиностроение, 1975. – 288 с.
4. Проектирование гидроприводов и систем управления промышленных роботов. Методические рекомендации. – М. : НИИМАШ, 1975. – 63 с.

References (transliterated)

1. Kreynin G. V. *Gidravlicheskiye i pnevmaticheskiye privody promyshlennykh robotov i manipulyatorov* [Hydraulic and pneumatic drives of industrial robots and manipulators]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1993. 300 p.
2. *Gidroprivod i gidrooborudovaniye v stankostroyenii. Metodicheskkiye rekomendatsii. Ch. 1, 2* [Hydraulic drive and hydraulic equipment in machine tool industry. Guidelines. Part 1, 2]. Moscow, NIIMASH Publ., 1980. 434 p.
3. Leshchenko V. A. *Gidravlicheskiye sledyashchiye privody stankov s programmnyy upravleniyem* [Programmable Hydraulic Followers]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1975. 288 p.
4. *Proyektirovaniye gidroprivodov i sistem upravleniya promyshlennykh robotov. Metodicheskkiye rekomendatsii* [Design of hydraulic drives and control systems for industrial robots. Guidelines]. Moscow, NIIMASH Publ., 1975. 63 p.

Надійшла (received) 26.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Крутіков Геннадій Анатолійович (Крутиков Геннадий Анатольевич, Krutikov Gennadiy Anatolievich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 512-63-35; e-mail: gkrutikov@gmail.com.

Стрижак Мар'яна Георгіївна (Стрижак Марьяна Георгиевна, Stryzhak Mariana Georgievna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (063) 471-38-21; e-mail: vladislavtish@gmail.com.

А. НЕМАХ, Д. Ф. ДОНСЬКИЙ, С. В. НЕСТЕРЕНКО

ПОБУДОВА РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ОЦІНКИ ЗАХИСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ В АГРЕСИВНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НАФТОВИХ РОДОВИЩ ІРАКУ

Тампонажні композиції на основі портландцементу марки G , які, як правило, застосовуються для кріплення обсадних колон на родовищах Іраку, недостатньо захищають матеріал обсадних колон від існуючих факторів корозії: температури, ступеня мінералізації розчину, вмісту сірководню і вуглекислого газу. Нами запропонований комплексний підхід для вирішення цієї складної проблеми. Пропонується використання нових конструкційних матеріалів – аустенітно-феритних сталей в поєднанні з тампонажними композиціями з поліпшеними властивостями за рахунок аміновмісних домішок. Отримані рівняння регресії для швидкості корозії для сталей Ст45 і SAF 2507 в залежності від різних агресивних факторів середовища: солемісту, температури, вмісту CO_2 та вмісту H_2S , проведений їх дисперсійний і графічний аналізи.

Ключові слова: портландцемент, обсадна колона, температура, ступінь мінералізації, сірководень, вуглекислий газ, вуглецева сталь, аустенітна сталь, рівняння регресії, швидкість корозії, дисперсійний аналіз, графічний аналіз.

А. НЕМАХ, Д. Ф. ДОНСКОЙ, С. В. НЕСТЕРЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ЦЕМЕНТНОГО КАМНЯ В АГРЕССИВНЫХ СРЕДАХ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ИРАКА

Тампонажные композиции на основе портландцемента марки G , которые, как правило, применяются для крепления обсадных колонн на месторождениях Ирака, недостаточно защищают материал обсадных колонн от существующих факторов коррозии: температуры, степени минерализации раствора, содержания сероводорода и углекислого газа. Нами предложен комплексный подход для решения этой сложной проблемы. Предлагается использование новых конструкционных материалов – аустенитно-ферритных сталей в сочетании с тампонажными композициями с улучшенными свойствами за счет аминосодержащих добавок. Получены уравнения регрессии для скорости коррозии для сталей Ст45 и SAF 2507 при действии различных агрессивных факторов среды: солесодержания, температуры, содержания CO_2 и содержания H_2S , проведен их дисперсионный и графический анализы.

Ключевые слова: портландцемент, обсадная колонна, температура, степень минерализации, сероводород, углекислый газ, углеродистая сталь, аустенитно-ферритная сталь, уравнение регрессии, скорость коррозии, дисперсионный анализ, графический анализ.

A. NEAMAH, D. F. DONSKY, S. V. NESTERENKO

DESIGNING REGRESSION MODEL FOR ESTIMATING PROTECTION PROPERTIES OF CEMENT STONE IN AGGRESSIVE ENVIRONMENTS OF IRAQI OIL DEPOSITS

The type G Portland cement based grouting mixtures, which are typically used to secure casing columns at Iraq oil deposits, do not sufficiently protect the casing material from existing corrosion factors, such as temperature, solution mineralization, hydrogen sulphide and carbon dioxide content. We propose a comprehensive approach to address this complex problem. It is proposed to use new construction materials, namely austenitic steels in combination with new grouting mixture with improved properties due to amine-containing additives. The regression equation for the corrosion rate for steels St45 and SAF 2507 is obtained, depending on various aggressive factors, such as salt content, temperature, CO_2 and H_2S content, and its dispersion and graphical analyzes is carried out.

Key words: Portland cement, casing, temperature, degree of mineralization, hydrogen sulphide, carbon dioxide, carbon steel, austenitic steel, regression equation, corrosion rate, dispersion analysis, graphical analysis.

Вступ. В даний час в світі зростає частка нафтогазових родовищ, які потребують підвищених витрат на їх розробку і освоєння. Одним з істотних джерел підвищення обсягів видобутку нафти для Іраку є розробка родовищ зі складними гірничо-геологічними умовами будівництва свердловин (високі пластові тиски, наявність в пластовій воді з підвищеним солемістом кислих агресивних компонентів – сірководню в поєднанні з вуглекислим газом). Це вимагає якісно нового підходу до їх цементування, що супроводжується рядом ускладнень в розробці нових композицій [1].

Постановка задачі. Застосування захисних покриттів поверхні обсадних труб малоефективне, тому що в процесі *спуско-підйомних операцій* і цементування відбувається порушення цілісності захисного шару.

У зв'язку з цим особливо актуальним є *комплексний підхід* до вирішення проблеми, а саме – *розробка способів модифікації цементного каменю*, що знаходиться в безпосередньому контакті з поверхнею обсадної колони, і надання цементному кільцю властивостей, що знижують інтенсивність корозійних процесів кріплення свердловин, а також застосування нових перспективних марок сталей, якими є *аустенітно-феритні сталі* [2, 3].

Аналіз попередніх розробок. У загальному комплексі робіт зі спорудження та підтримки роботоспроможності свердловин значний обсяг займають процеси роз'єднання пластів. У зв'язку з цим одним з напрямків є створення *ізоляційного комплексу*, в тому числі і цементного кільця, що дозволяє забезпечити тривалу безперебійну експлуатацію свердловин. Основне призначення цементування – якісне роз'єднання пластів, при якому забезпечується надійна ізоляція продуктивної частини розрізу свердловини і окремих прошарків в багатопластовому покладі, створення міцного кріплення і захисту її обладнання від корозійного впливу агресивних середовищ, які є характерними для багатьох нафтових родовищ Іраку і мають схожі гірничо-геологічні умови і гід-

рогеологічний режим [4 – 8].

Після цементування і заміщення бурового розчину *тампонажним* виникає безліч проблем, пов'язаних з фізико-механічними властивостями розчину і каменю. До цементного кільця пред'являються вимоги, які важко здійснити одночасно. З одного боку, цементний камінь повинен служити *флюїдоізоляційним бар'єром* між поглинаючими і проявляючими пластами, а з іншого – пов'язувати обсадні колони і гірські породи в жорстку складову конструкцію. При цьому, як в процесі цементування, так і в період експлуатації свердловин існує безліч невирішених проблем. Поряд з технологічними факторами, важливу роль з точки зору якісного цементування грає правильний вибір тампонажного матеріалу, який повинен відповідати цілому комплексу вимог щодо забезпечення надійного кріплення свердловин.

При виборі рецептур тампонажних матеріалів для кріплення свердловин в корозійно-активних середовищах зазвичай не враховується можливість зміни ізоляційних властивостей каменю в часі. Цементний камінь, що забезпечує герметичність кріплення свердловин в першу добу тверднення, після тривалого впливу агресивних середовищ може повністю втратити свої ізоляційні властивості. Особливо небезпечні міжпластові перетоки і прояви флюїдів, що містять хімічно активні і токсичні компоненти, такі як: сірководень, вуглекислий газ, високомінералізовані розчини солей магнію і кальцію, які є агресивними по відношенню як до матеріалу обсадної колони так і до цементного кільця.

На даний момент існує потреба в науковому обґрунтуванні для прийняття рішення щодо створення та застосування тампонажних систем, де їх переваги виявлялися б найбільшою мірою. Одним з найбільш важливих завдань сьогодні, що стоять перед розробниками нафтових і газових свердловин, є охорона надр за рахунок забезпечення довговічності кріплення свердловин в регіонах, що містять пластові флюїди, агресивні по відношенню до цементного каменю. Підвищення якості кріплення свердловин в цих умовах може бути забезпечено створенням нових рецептур корозійностійких тампонажних матеріалів з поліпшеними технологічними показниками в поєднанні з перспективними конструкційними сталлями.

Аналіз стану фонду свердловин Іраку показав, що основними причинами виходу свердловин з ладу є відсутність тампонажних систем, що відповідають умовам їх застосування. Незважаючи на широкий спектр тампонажних матеріалів, вибір таких в умовах Іраку досить обмежений, що зумовлює використання портландцементу марки G для облаштування більшості свердловин. Застосовувані в даний час тампонажні матеріали на шлаковій основі відрізняються підвищеною стійкістю до дії сірководню в порівнянні з портландцементами, але асортимент їх дуже малий. Крім того, шлакові цементи не здатні запобігти сірководневій корозії поверхні обсадних труб через свій хіміко-мінералогічний склад.

Високі концентрації сірководню і вуглекислого газу обумовлюють значний ступінь агресивного впливу цих газів не тільки на цементне кільце, але і на обсадні колони, як правило, виготовлені зі сталей, що мають невисоку корозійну стійкість.

Поверхнева корозія обсадних колон викликається за рахунок проникнення сірководню через капілярно-пористу структуру цементного каменю, що виконує роль дифузійного бар'єру для проникнення пластових флюїдів, або через наявність дефектів при неякісному цементуванні (табл. 1) [9].

Таблиця 1 – Аналіз причин негерметичності заколонного простору

Причини негерметичності заколонного простору	Властивості цементного розчину і каменю, відповідальні за прояв негерметичності
1. Незаповнення заколонного простору цементним розчином.	Висока в'язкість цементного розчину і погане витіснення ним бурового розчину.
2. Корозійне руйнування цементного каменю пластовими флюїдами.	Низька стійкість структури цементного каменю, яка збільшується з його проникністю.
3. Поява тріщин в цементному камені при його перфорації.	Велика крихкість, низька тріщиностійкість цементного каменю.
4. Дегідратація глиняної кірки цементним розчином, що набирає міцність, і цементним каменем, втрата контакту між цементним каменем і стінкою камери.	Властиві цементному каменю. Контракційні явища.
5. Відхід цементного каменю від обсадної колони.	Відсутність адгезії цементного каменю до труби.
6. Поява дуже міцного високопроникного цементного каменю навпроти пористих пластів з низьким пластовим тиском.	Висока фільтровіддача цементного розчину, залежність міцності цементного каменю від водоцементного співвідношення вихідного розчину.
7. Руйнування цементного каменю гідростатичним напором пластів.	Неможливість забезпечення високої міцності цементного каменю через необхідність закачувати цементний розчин з високим водоцементним співвідношенням і його розведенням пластовими флюїдами.
8. Руйнування слабозцементованих порід в привибійній зоні.	Неможливість створення міцного цементного каменю з проникністю 1 мкм^2 і більш.
9. Руйнування цементного каменю, що знаходиться проти водонасичених пластів за рахунок осмотичного підсосу пластової води.	Наявність проникності каменю до $0,05 \text{ мкм}^2$ призводить до руйнування каменю на мікрорівні і подальшому зростанню його проникності.

Порушення герметичності кріплення свердловин в результаті зміни структури цементного каменю і його руйнування, а також корозійного пошкодження колон призводять до ускладнень, зокрема виникають заколонні газопроявлення і міжпластові перетоки. Це є неприпустимим з позицій промислової та екологічної безпеки експлуатації сірководневих родовищ.

Аналіз існуючих методів досліджень цементного каменю в агресивних середовищах [10 – 21] показує, що проведення таких випробувань в натурних умовах пов'язано з низкою труднощів і тому актуальним є створення експресних лабораторних методик випробувань на корозійну стійкість цементного каменю, що дозволяють моделювати *термобаричні умови свердловин*, а саме: концентрацію агресивних газів і склад пластових флюїдів [22 – 24].

Метою дослідження було вивчення в лабораторних умовах впливу складу тампонажних композицій на основі існуючих рецептур з використанням *портландцементу марки G* з домішками на основі аміновмісних сполук для підвищення їх захисних властивостей в контакт з різними зразками сталей у високо мінералізованих середовищах з високою концентрацією сірководню і вуглекислого газу, що є характерним для Іраку.

Об'єкт дослідження – цементний камінь з тампонажних матеріалів, що застосовуються для будівництва свердловин в Іраку – портландцементу марки *G*.

Предмет дослідження – моделювання корозійних процесів у різних сталях в залежності від ряду факторів, а саме: температури, ступеня мінералізації розчину, вмісту сірководню і вуглекислого газу.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до мети даної роботи дослідження було спрямоване на рішення основного завдання, а саме: оцінку корозійно-захисних властивостей тампонажних сумішей, отриманих на основі портландцементу марки *G*, для сталей марок Ст45 (аналог сталі K55) [22] і SAF2507 по відношенню до агресивних флюїдів нафтового пласту. Експериментальні досліди проводили на лабораторній установці у вигляді автоклаву, в якому моделювались рівні різних факторів, граничні значення яких були вибрані з реальних умов кількох свердловин *іракського родовища Мішріф* [25].

Математична модель. В якості цільової функції була вибрана швидкість корозії ($\text{г}/(\text{м}^2 \cdot \text{год})$). Інтервали варіювання факторів в плані-матриці для проведення експерименту були вибрані на основі промислових даних (табл. 2).

Таблиця 2 – Фактори експерименту та їх рівні

Фактор	Код фактору	Одиниця виміру	Рівні факторів				
			-2	-1	0	+1	+2
Солевміст	A	$\text{г}/\text{дм}^3$	20	40	80	120	160
Температура	B	$^{\circ}\text{C}$	50	65	80	95	110
Вміст CO_2	C	%	0,1	1,1	2,1	3,1	4,1
Вміст H_2S	D	%	0,02	0,62	1,22	1,82	2,42

В загальному вигляді швидкість корозії є функцією цих факторів, які можна вважати незалежними (1):

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (1)$$

В нашому випадку $Y = V_i$, де $i = 1$ або 2 – це швидкість корозії, V_1 , відповідно, для сталі SAF2507 (модель 1) і V_2 – для сталі Ст45 (модель 2); x_1, x_2, x_3, x_4 відповідають факторам A, B, C, D в табл. 2.

Кодування факторів проводилося для переведення натуральних значень факторів в безрозмірні величини. Це забезпечує можливість порівняльної оцінки впливу на процес різних параметрів незалежно від їх розмірності, а також дозволяє побудувати стандартну ортогональну план-матрицю експерименту.

Зв'язок між кодованим і натуральним виразом фактора задається формулою:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}, \quad (2)$$

де x_i – кодований вираз i -го фактора; X_i – натуральне значення фактора; X_{i0} – значення i -го фактора на нульовому рівні; ΔX_i – інтервал варіювання i -го фактора.

В якості нульового рівня факторів зазвичай вибирають центр інтервалу, який відповідає середньозваженим значенням факторів для промислових умов свердловин нафтових родовищ Іраку при існуючих технологічних режимах [22].

Серед центрально-композиційних планів другого порядку найбільшого поширення набули ротатабельні плани. Ці плани дають можливість передбачати значення *функції відгуку з дисперсією (точністю)*, однаковою на рівних відстанях від центру плану (по всьому факторному простору). При цьому функція відгуків апроксимо-

вана поліномом другого порядку виду:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \cdot x_i^2, \quad (3)$$

де n – число незалежних змінних.

Для планування експерименту застосовували центрально-композиційний ротатабельний план другого порядку (табл. 3), який було доповнено *зоряними точками*. Обробка результатів експерименту та аналіз регресійної моделі здійснено за допомогою модуля «Планування експерименту» статистичної програми Statgraphics 5.0 Plus.

Таблиця 3 – План-матриця для проведення експерименту та отримані значення швидкості корозії ($\text{г}/(\text{м}^2 \cdot \text{год})$) для вибраних зразків сталі

Значення факторів				Показник швидкості корозії, $\text{г}/(\text{м}^2 \cdot \text{год})$	
A	B	C	D	V_1 (SAF2507)	V_2 (Ст 45)
-1	-1	-1	-1	0,007	0,017
1	-1	-1	-1	0,01	0,014
-1	1	-1	-1	0,022	0,042
1	1	-1	-1	0,033	0,083
-1	-1	1	-1	0,0062	0,0092
1	-1	1	-1	0,01	0,014
-1	1	1	-1	0,01	0,0104
1	1	1	-1	0,014	0,0147
-1	-1	-1	1	0,007	0,011
1	-1	-1	1	0,014	0,014
-1	1	-1	1	0,016	0,084
1	1	-1	1	0,011	0,168
-1	-1	1	1	0,011	0,011
1	-1	1	1	0,017	0,017
-1	1	1	1	0,018	0,183
1	1	1	1	0,024	0,21
-2	0	0	0	0,016	0,018
2	0	0	0	0,018	0,066
0	-2	0	0	0,007	0,024
0	2	0	0	0,025	0,14
0	0	-2	0	0,015	0,02
0	0	2	0	0,018	0,068
0	0	0	-2	0,022	0,016
0	0	0	2	0,025	0,07
0	0	0	0	0,022	0,042
0	0	0	0	0,021	0,041

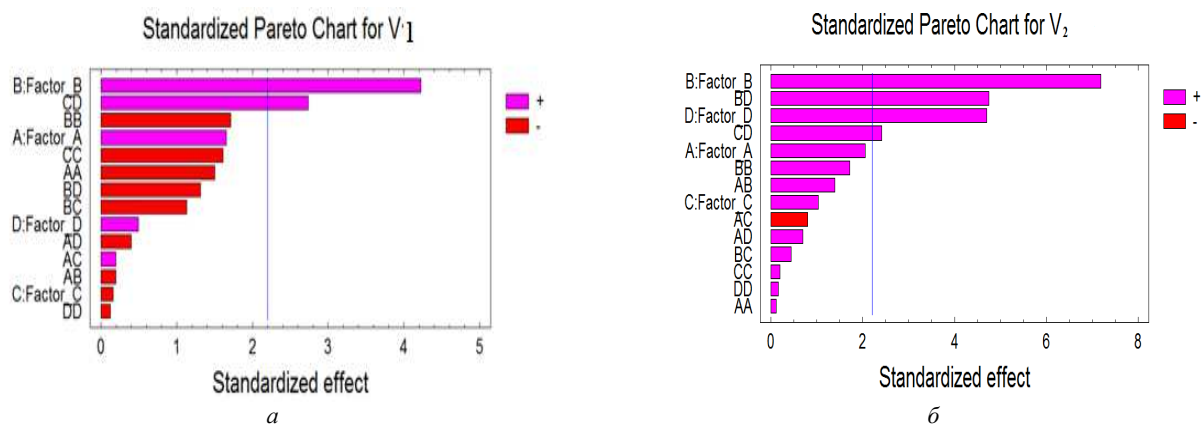


Рис. 1 – Оцінка значимості коефіцієнтів отриманих моделей: a – модель 1; b – модель 2.

В результаті обробки приведених даних в програмі Statgraphics були отримані рівняння регресії, проведений дисперсійний та графічний аналізи [26]. Результати аналізу показані в табл. 4 та рис. 1 і рис. 2. Аналіз регресійних рівнянь показує, що є певний зв'язок між швидкістю корозії V_1 для сталі SAF2507 (модель 1) і V_2 для

сталі Ст45 (модель 2) та обраними факторами впливу: солевмістом (A), температурою (B), вмістом CO_2 (C) та вмістом H_2S (D). Коефіцієнти моделі наведено у нормованому (кодованому) вигляді.

Таблиця 4 – Результати дисперсійного аналізу отриманих математичних моделей в програмі Statgraphics

Модель 1 V_1 (SAF2507)	Модель 2 V_2 (Ст45)
$V_1 = 0,0215 + 0,00165833*Factor_A + 0,00424167*Factor_B - 0,000158333*Factor_C + 0,000491667*Factor_D - 0,00176875*Factor_A^2 - 0,0002375*Factor_A*Factor_B + 0,0002375*Factor_A*Factor_C - 0,0004875*Factor_A*Factor_D - 0,00201875*Factor_B^2 - 0,0013875*Factor_B*Factor_C - 0,0016125*Factor_B*Factor_D - 0,00189375*Factor_C^2 + 0,0033625*Factor_C*Factor_D - 0,00014375*Factor_D^2$	$V_2 = 0,0415 + 0,0109625*Factor_A + 0,0383292*Factor_B + 0,0055125*Factor_C + 0,0250708*Factor_D + 0,000732292*Factor_A^2 + 0,00909375*Factor_A*Factor_B - 0,00518125*Factor_A*Factor_C + 0,00455625*Factor_A*Factor_D + 0,0107323*Factor_B^2 + 0,00286875*Factor_B*Factor_C + 0,0310063*Factor_B*Factor_D + 0,00123229*Factor_C^2 + 0,0157313*Factor_C*Factor_D + 0,000982292*Factor_D^2$
R-squared = 77,1667 percent R-squared (adjusted for d.f.) = 48,1062 percent Standard Error of Est. = 0,00492104 Mean absolute error = 0,00264551 Durbin-Watson statistic = 1,04223 (P=0,0007) Lag 1 residual autocorrelation = 0,468342	R-squared = 91.2429 percent R-squared (adjusted for d.f.) = 80.0975 percent Standard Error of Est. = 0,026112 Mean absolute error = 0,0149119 Durbin-Watson statistic = 2.24685 (P=0,095) Lag 1 residual autocorrelation = -0,141324

Для першої моделі коефіцієнт детермінації R – квадрат дорівнює 77.1, для другої – 91.24, що, в цілому, підтверджує адекватність отриманих моделей. Значимість коефіцієнтів моделі визначалася за допомогою P – рівня і наведена на *стандартизованому Парето-графіку* (рис. 1). Вертикальна лінія на рис. 1 відповідає 95 % статистичній значущості коефіцієнтів.

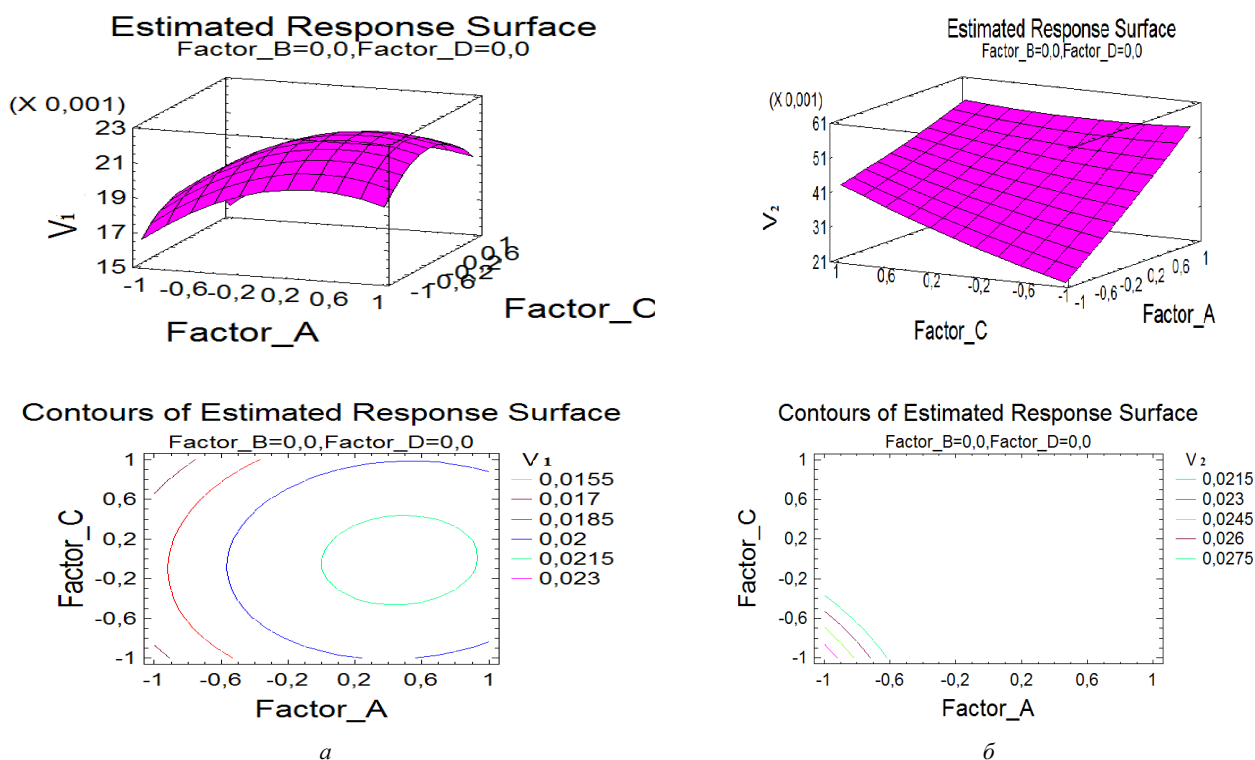


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: а – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(A, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів А і С;

б – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 під шаром цементного покриття $V_2 = f(A, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів А і С.

При порівнянні отриманих регресійних рівнянь встановлено, що в обох випадках на першому місці стоїть фактор (B) – температура, що є цілком логічно з точки зору її впливу на розвиток будь-якого хімічного процесу, в тому числі, корозії. Також для обох моделей (швидкість корозії зразків сталі V_1 для сталі SAF2507 (модель 1) і V_2 для сталі Ст45 (модель 2)) спостерігається сумісний вплив факторів (C) – вміст CO_2 та (D) – вміст H_2S , що

говорить про взаємопов'язаність їх дії на розвиток процесів корозії для обох зразків сталі.

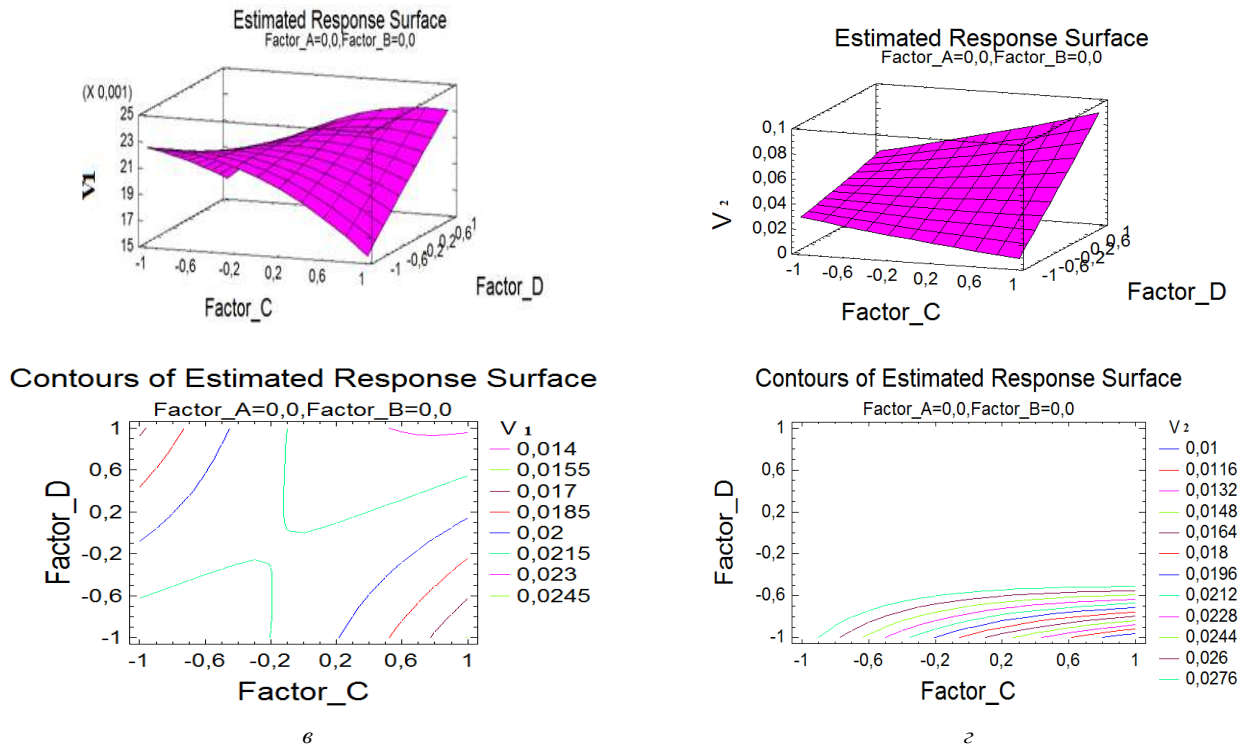


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: а – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(D, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів D і C; б – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 при $V_2 = f(D, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів D і C.

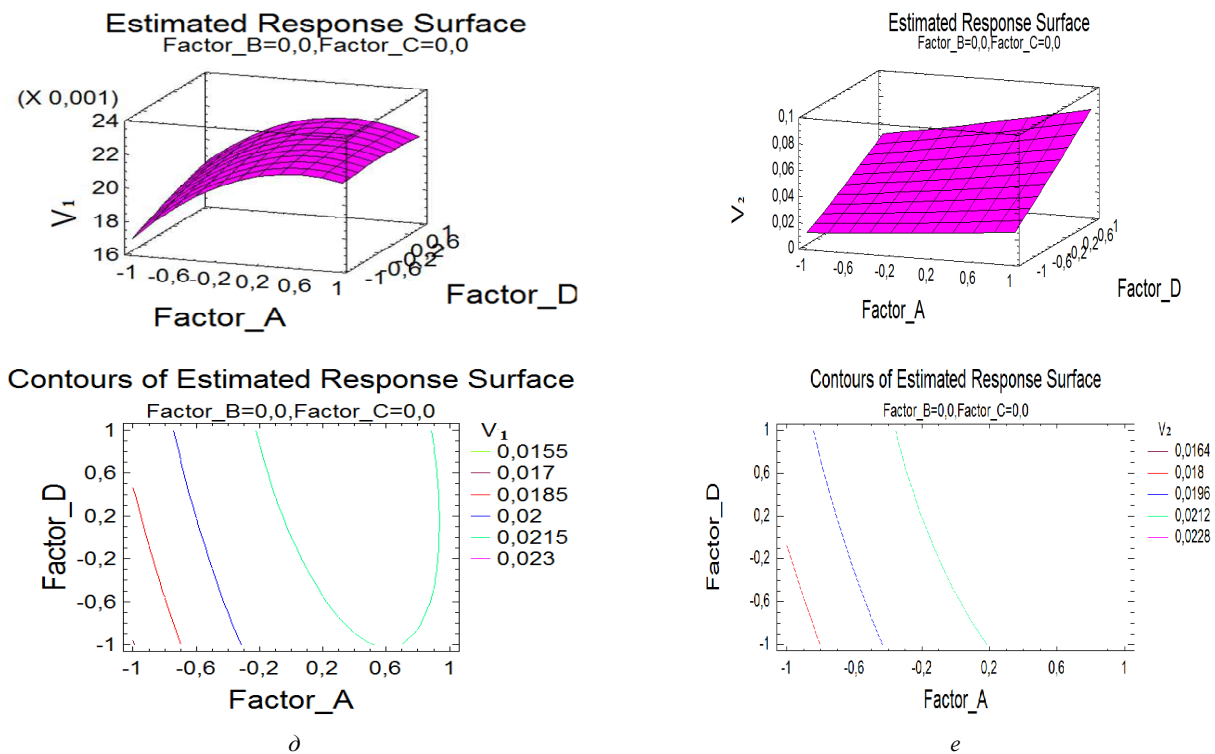


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: д – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(A, D)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів A і D; е – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 під шаром цементного покриття $V_2 = f(A, D)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів A і D.

Цілком закономірним для обох моделей є також значимість коефіцієнтів, відповідальних за вплив фактору (D) – вміст H_2S . Спостерігаються також і деякі відмінності в поведінці моделей: так, наприклад, значимість коефіцієнту, який відповідає за сумісний вплив факторів (B) і (D) – температури та вмісту H_2S , більш суттєва для зразка сталі Ст45 на відміну від зразка сталі SAF2507.

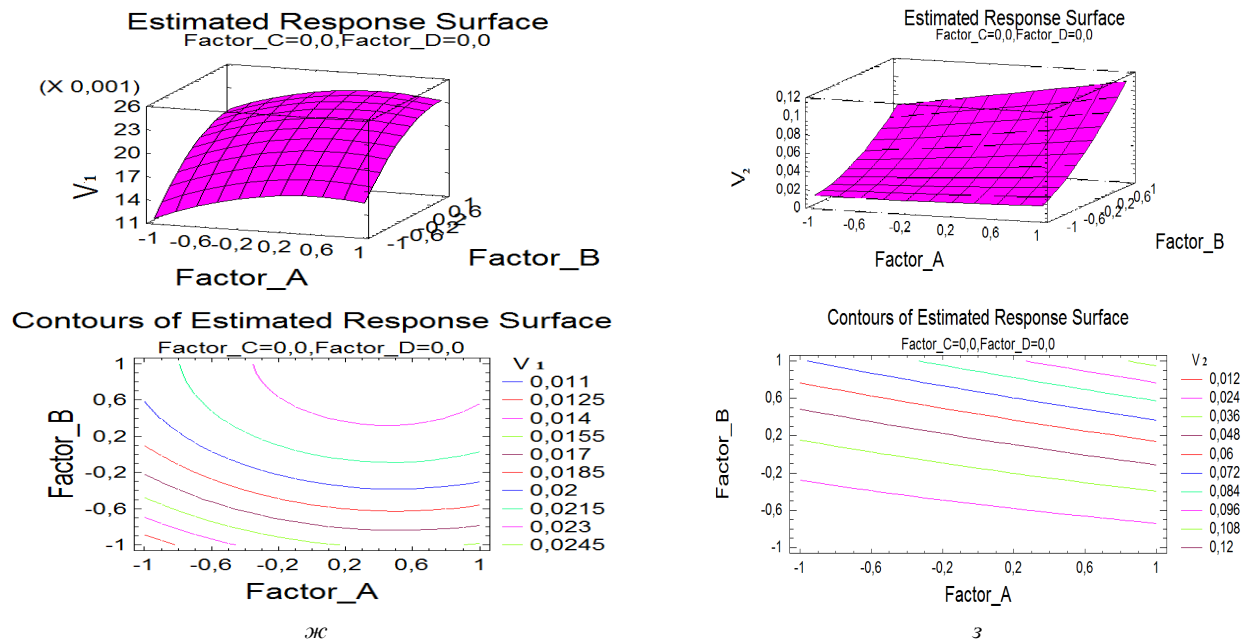


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: *ж* – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(A, B)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів A і B; *з* – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 під шаром цементного покриття $V_2 = f(A, B)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів A і B.

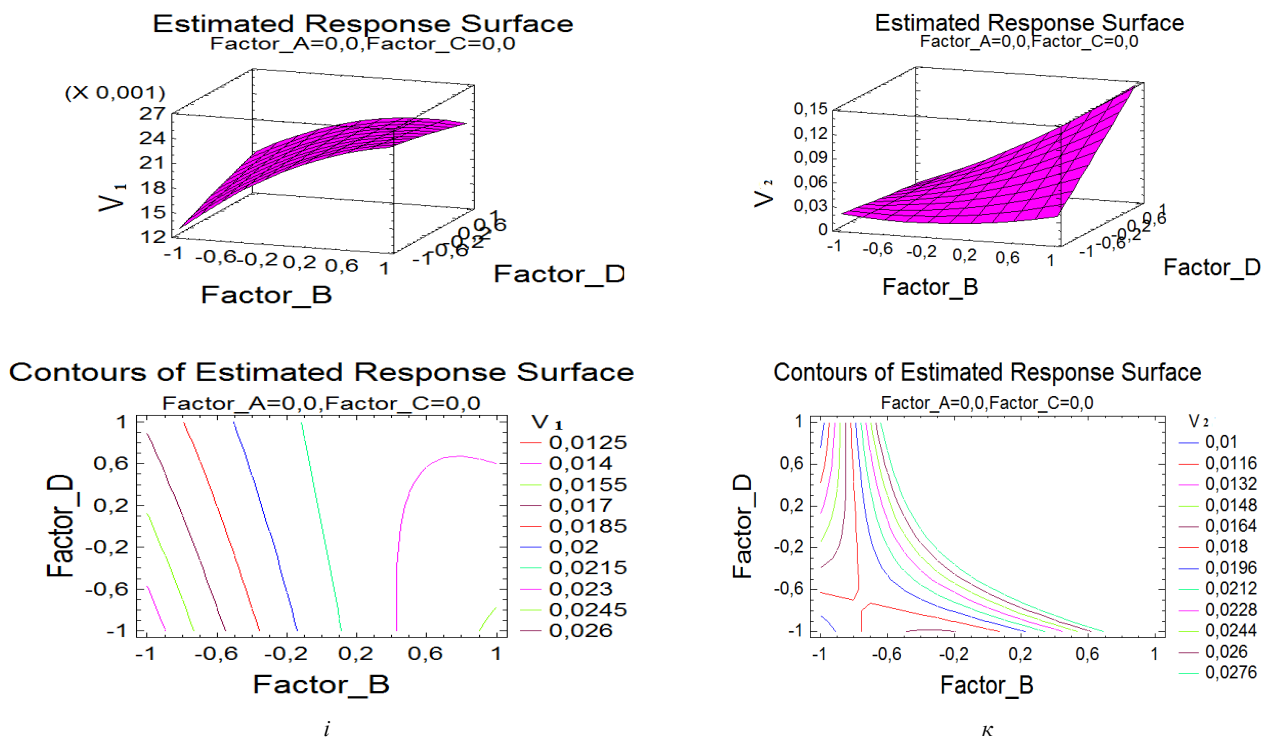


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: *і* – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(B, D)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів B і D; *к* – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 під шаром цементного покриття $V_2 = f(B, D)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів B і D.

На рис. 2, а – м наведені тривимірні перетини поверхні цільової функції та контурні криві цих поверхонь. Зупинимось на них докладніше.

Графічний аналіз отриманих рівнянь (рис. 2) показує, що для першої моделі (зразок сталі SAF2507) залежності $V_1 = f(C, D)$, $V_1 = f(C, A)$, $V_1 = f(A, D)$, $V_1 = f(C, B)$, $V_1 = f(B, D)$, $V_1 = f(A, B)$, мають екстремальний характер (рис. 2, а, в, д, ж, и) і існують поверхні з максимальними значеннями швидкості корозії, які треба враховувати при використанні цього матеріалу. Для зразка сталі Ст45 таких областей не спостерігається, окрім варіанту (рис. 2, к), де для залежності $V_2 = f(B, D)$ існує певний мінімум для швидкості корозії. Для зразка сталі SAF2507 при цьому (рис. 2, и) спостерігається певна оптимальна область для показника швидкості корозії з максимумом.

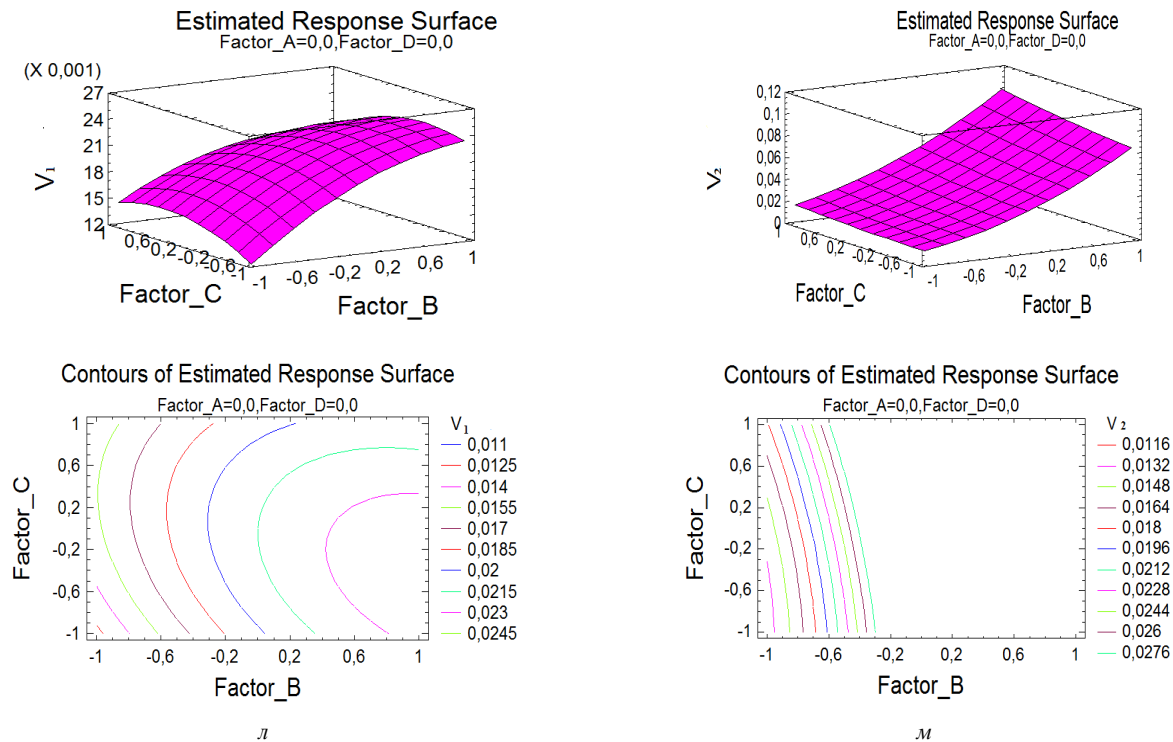


Рис. 2 – Порівняльний графічний аналіз отриманих моделей: л – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі SAF2507 під шаром цементного покриття $V_1 = f(B, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів В і С; м – тривимірний графік залежності швидкості корозії для сталі Ст45 під шаром цементного покриття $V_2 = f(B, C)$ та контурний графік поверхні відгуку для факторів В і С. Кодування факторів та їх розмірність співпадає з даними табл. 2 і табл. 3.

Висновки. Таким чином, в результаті постановки експерименту з вивчення впливу покриття на основі портландцементу марки G і комплексною добавкою на основі аміновмісних компонентів на корозійну стійкість сталей Ст45 і SAF 2507 отримані рівняння регресії, які в цілому адекватно відображають залежність швидкості корозії для сталей Ст45 і SAF 2507 під шаром цементного покриття з інгібітором корозії в залежності від дії різних агресивних факторів підземного середовища: солевмісту, температури, вмісту CO_2 та вмісту H_2S , проведений їх дисперсійний і графічний аналізи.

Список літератури

1. Жирнов Р. А., Дербеньов В. А., Шкляр Р. Л. Досвід і перспективи освоєння сероводородовмісних родовищ // Газова промисловість. – 2010. – №5. – С. 29 – 33.
2. Дергач Т. А., Проскуркин Е. В. Отечественные разработки в области производства труб нефтяного сортамента высокой коррозионной стойкости и эксплуатационной надежности // Металлург. и горноруд. пром-сть. – 2006. – № 3. – С. 51 – 56.
3. Нестеренко С. В. Коррозионная стойкость новых аустенитно-ферритных сталей в коксохимической промышленности // Кокс и химия. – Москва : Металлургиздат, 2020. – № 2. – С. 36 – 44.
4. Amer Jassim Al-Khafajia, Fadhil Sadoonib, Mohammed Hadi Hindia. Contribution of the Zubair source rocks to the generation and expulsion of oil to the reservoirs of the Mesopotamian Basin, Southern Iraq // Petroleum Science and Technology. – Режим доступу : <https://doi.org/10.1080/10916466.2019.1575869>. – Дата звертання : 25 грудня 2019.
5. Kareem Khwedim, Michael Schneider, Nawrass Ameen, Ahmed Abdulameer, Andreas Winkler The Dibdibba aquifer system at Safwan–Zubair area, southern Iraq, hydrogeology and environmental situation // Environ Earth Sci. – 2017. – 76:155. – DOI : 10.1007/s12665-017-6469-0.
6. Al-Habba Y. Q., Abdullah M. A geochemical study of hydrocarbon source rocks in Northern Iraq // Oil and Arab Cooperation Journal. – 1989. – v. 15. – P. 11 – 15.
7. Abdulaziz Abdullah al-Laboun. Stratigraphy and Hydrocarbon Potential of the Paleozoic Succession in Both Tabuk and Widyan Basins. In: Halbouty, M., Ed., Future Petroleum Provinces of the World, American Association of Petroleum Geologists Memoir, no. 40, pp. 373-394.

8. ИРАК. Геологическое строение, нефтегазоносность и состояние нефтегазовой промышленности, обработка и интерпретация сейсмических материалов по лицензионным блокам в южной и центральной частях Западной Пустыни, оценка прогнозных ресурсов нефти и газа // ООО «Совгеоинфо». – 2009. – 158 с.
9. Рябова Л. И. Теория и практика направленного регулирования свойств тампонажных систем, обеспечивающих качественное крепление скважин в сложных геолого-технических условиях, в том числе и агрессивных средах : Дис. д-ра техн. наук : 25.00.15. – Краснодар, 2005. – 431 с.
10. Перейма А. А. Разработка тампонажных материалов и технологических жидкостей для заканчивания и ремонта скважин в сложных горно-геологических условиях : Дис. д-ра техн. наук : 25.00.15. – Ставрополь, 2009. – 300 с.
11. Доровских И. В., Живаева В. В. Выявление закономерностей процессов разрушения скважинной цементной оболочки в условиях повышенной коррозионной активности флюида // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. – 2009. – № 9. – С. 47 – 52.
12. Petersen J. S. Extensive water analysis in Ceiling field // Oil and gas. – 1946. – № 11. – P. 112 – 118.
13. Albertson M. L. Corrosion in high pressure gas condensate wells // Oil and gas. – 1946. – № 12. – P. 97 – 105.
14. Kennet Eilerts. Sodium chromate effective in combating corrosion in gas wells // Oil and gas. – 1946. – № 5. – P. 121. – 126.
15. Poetker R. H., Brock P. S., Huckseberg S. A. Does the inhibitor squeeze method work? // Petroleum Engineer. – 1957. – № 12. – P. 125 – 132.
16. Poetker R. H., Stone Y. D. Inhibition improve 17 % while cost dropped 50 % // Oil and gas. – 1956. – № 6. – P. 115 – 120.
17. Мавлютов М. Р., Кравцов В. М., Овчинников В. П. Анализ причин заколонных проявлений и пути повышения качества цементирования скважин в условиях сероводородной агрессии. Обз. инф. Сер. Бурение. – М. : ВНИО-ЕНГ, 1984. – 52 с.
18. Аззамов Ф. А. Известково-кремнеземистые тампонажные материалы для крепления скважин в условиях высоких температур и коррозионно-активных сред : Дис. ... д-ра техн. наук (25.00.15). – Уфа, 1990. – 45 с.
19. Макаренко П. П., Булатов А. И., Рябова Л. И. Сероводородная коррозия тампонажного камня в скважинах // Тр. СКО РИА. – Москва, 1996. – С. 54 – 67.
20. Аззамов Ф. А., Измухамбетов Б. С. Долговечность тампонажного камня в коррозионно-активных средах. – СПб. : ТОВ «Недра», 2005. – 318 с.
21. Перейма А. А., Петраков Ю. И., Трусов С. Б. Коррозионная стойкость цементного камня в сероводородсодержащих средах // Нефтяное хозяйство. – 1986. – № 3. – С. 29 – 32.
22. Нестеренко С. В., Донський Д. Ф., Немах А. Моделювання антикорозійного захисту матеріалу обсадної колони в лабораторних умовах // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – 2019. – № 21 (1346). – С. 69 – 74. doi:10.20998/2220-4784.2019.21.11.
23. Лазуткин Е. А., Квеско Н. Г. Исследование влияния природной пластовой воды на коррозию стальных труб, применяемых при строительстве и эксплуатации нефтедобывающих скважин (на примере Юрубчено-Тохомского месторождения) // Молодой учёный. – 2017. – № 16 (150). – С. 184 – 187.
24. Максютин А. В., Шангараева А. В., Султанова Д. А. Способы предотвращения солеотложения при разработке и эксплуатации залежей нефти // Журнал «Современные проблемы науки и образования». – 2015. – № 1.
25. Товажнянский Л. Л. Конструкционные металлические материалы в химическом и нефтегазовом машиностроении : учеб. пособие. – Харьков : Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 212 с. – ISBN 978-966-2426-48-9.
26. Білецький В. С., Смирнов В. О. Моделювання процесів переробки корисних копалин : монографія. – Донецьк : Східний видавничий дім, 2013. – 304 с.

References (transliterated)

1. Zhirnov R. A., Derbenov V. A., Shklyar R. L. Dosvid i perspektyvy osvoyennya serovodorodovmisnykh rodovyskh [Experience and prospects of development of hydrogen sulphide containing deposits]. *Gazova promyslovist'* [Gas industry]. 2010, no. 5, pp. 29–33.
2. Dergach T. A., Proskurkin E. V. Otechestvennyye razrabotki v oblasti proizvodstva trub neflyanogo sortamenta vysokoy korrozionnoy stoykosti i ekspluatatsionnoy nadezhnosti [Domestic developments in the field of production of oil pipes with high corrosion resistance and operational reliability]. *Metallurg. i gornorud. prom-t'* [Metallurg. and the miner. Prom.]. 2006, no. 3, pp. 51–56.
3. Nesterenko S. V. Korrozionnaya stoykost' novykh austenitno-ferritnykh staley v koksohimicheskoy promyshlennosti [Corrosion resistance of new austenitic-ferritic steels in the coke industry]. *Koks i khimiya* [Coke and chemistry]. Moscow, Metallurgizdat Publ., 2020, no. 2, pp. 36–44.
4. Amer Jassim Al-Khafajia, Fadhil Sadoonib, Mohammed Hadi Hindia. Contribution of the Zubair source rocks to the generation and expulsion of oil to the reservoirs of the Mesopotamian Basin, Southern Iraq. *Petroleum Science and Technology*. Available at : <https://doi.org/10.1080/10916466.2019.1575869>. (accessed 25.12.2019).
5. Kareem Khwedim, Michael Schneider, Nawrass Ameen, Ahmed Abdulameer, Andreas Winkler. The Dibdibba aquifer system at Safwan–Zubair area, southern Iraq, hydrogeology and environmental situation. *Environ Earth Sci*. 2017, 76:155. DOI : 10.1007/s12665-017-6469-0.
6. Al-Habba Y. Q., Abdullah M. A geochemical study of hydrocarbon source rocks in Northern Iraq. *Oil and Arab Cooperation Journal*. 1989, v. 15, pp. 11–15.
7. Abdulaziz Abdullah al-Laboun. Stratigraphy and Hydrocarbon Potential of the Paleozoic Succession in Both Tabuk and Widyan Basins. In: Halbouty, M., Ed., *Future Petroleum Provinces of the World, American Association of Petroleum Geologists Memoir*, no. 40, pp. 373–394.
8. Irak. Geologicheskoe stroenie, neftegazonosnost' i sostoyanie neftegazovoy promyshlennosti, obrabotka i interpretatsiya seysmicheskikh materialov po litsenzionnym blokam v yuzhnoy i tsentral'noy chastyakh Zapadnoy Pustyni, otsenka prognoznnykh resursov nefli i gaza [Iraq : Geological structure, oil and gas content and state of the oil and gas industry, processing and interpretation of seismic materials by licensed blocks in the southern and central parts of the Western Desert, estimation of oil and gas forecast resources]. ООО «Sovgeoinfo» [Sovgeoinfo LLC]. 2009. 158 p.
9. Ryabova L. I. Teoriya i praktika napravlennoy regulirovaniya svoystv tamponazhnykh sistem obespechivayushchikh kachestvennoe kreplenie skvazhin v slozhnykh gorno-geologicheskikh usloviyakh, v tom chisel i agresivnykh sredakh : Dis. D-ra tekhn. nauk. (25.00.15) [Theory and practice of directional control of the properties of cementing systems, providing high-quality fastening of wells in difficult geological and technical conditions, including aggressive environments Dr. Eng. Sci. Diss. : 25.00.15]. Krasnodar, 2005. 431 p.
10. Pereyma A. A. Razrabotka tamponazhnykh materialov i tekhnologicheskikh zhidkostey dlya zakanchivaniya i remonta skvazhin v slozhnykh gorno-geologicheskikh usloviyakh : Dis. ... Dr. tekhn. nauk (25.00.15) [Development of cementing materials and process fluids for the completion and repair of wells in difficult mining and geological conditions. Dr. Eng. Sci. Diss. : 25.00.15]. Stavropol, 2009. 300 p.
11. Dorovskikh I. V., Zhivaeva V. V. Vyyavlenie zakonornostey protsessov razrusheniya skvazhinnoy tsementnoy obolochki v usloviyakh povyshennoy korrozionnoy aktivnosti fliuida [Detection of patterns of processes of destruction of the cement shell of the well in conditions of increased corrosion activity of fluid]. *Budivnytstvo naftovykh i gazovykh sverdlodyn na sushy i na mori* [Construction of oil and gas wells on land and at sea]. 2009, no. 9, pp. 47–52.
12. Petersen J. S. Extensive water analysis in Ceiling field. *Oil and gas*. 1946, no. 11, pp. 112–118.
13. Albertson M. L. Corrosion in high pressure gas condensate wells. *Oil and gas*. 1946, no. 12, pp. 97–105.
14. Kennet Eilerts. Sodium chromate effective in combating corrosion in gas wells. *Oil and gas*. 1946, no. 5, pp. 121–126.
15. Poetker R. H., Brock P. S., Huckseberg S. A. Does the inhibitor squeeze method work? *Petroleum Engineer*. 1957, no. 12, pp. 125–132.
16. Poetker R. H., Stone Y. D. Inhibition improve 17 % while cost dropped 50 %. *Oil and gas*. 1956, no. 6, pp. 115–120.
17. Mavlyutov M. R., Kravtsov V. M., Ovchinnikov V. P. Analiz prychyn zakononnykh proyaviv i shlyakhy pidvyshchennya yakosti tsementuvannya sverdlodyn v umovakh sirkovodnevoyi agresiyi. *OBZ inf. Ser. Burinnya* [Analysis of causes of illicit manifestations and ways of improving the qual-

- ity of cementing of wells in the conditions of hydrogen sulphide aggression. OBZ. inf. Ceries Boring]. Moscow, VNIIO-ENG Publ., 1984. 52 p.
18. Agzamov F. A. *Izvestkovo-kremnezemnistye tamponazhnye materialy dlya krepleniya skvazhyn v usloviyakh vysokikh temperatur i korrozionno-aktivnykh sred* : Dis. ... Dr. tekhn. nauk (25.00.15) [Limestone-siliceous tamponage materials for mounting wells in high temperatures and corrosive environments. Dis. ... Dr. Sciences (25.00.15)]. Ufa, 1990. 45 p.
 19. Makarenko P. P., Bulatov Yu. I., Ryabova L. I. Serovodородnaya korroziya tamponazhnogo kamnya v skvazhinakh [Hydrogen sulphide corrosion of slurry stone in wells]. *Tr. SKO RIO* [Tr. RIA RMS]. Moscow, 1996, pp. 54–67.
 20. Agzamov F. A., Izmukhambetov B. S. *Dolgovechnost' tamponazhnogo kamnya v korrozionno-aktivnykh sredakh* [Durability of the calcining stone in corrosion-active environments]. St. Petersburg, Nedra LLC, 2005. 318 p.
 21. Pereyma A. A., Petrakov Yu. I., Rabbits S. B. Korrozionnaya stoykost' tsementnogo kamnya v serovodorodnykh sredakh [Corrosion resistance of cement stone in hydrogen sulphide environments]. *Naftove gospodarstvo* [Oil economy]. 1986, no. 3, pp. 29–32.
 22. Nesterenko S. V., Donsky D. F., Neamakh A. Modelyuvannya antykorozivnogo zakhystu materialu obsadnoyi kolony v laboratornykh umovakh [Modeling of anticorrosive protection of casing material in laboratory conditions]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Innovatsiyni doslidzhennya u naukovykh robotakh studentiv* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Innovative Research in Students' Scientific Works]. 2019, no. 21 (1346), pp. 69–74. doi: 10.20998 / 2220-4784.2019.21.11.
 23. Lazutkin E. A., Kvesko N. G. Issledovaniye vliyaniya prirodnoy plastovoy vody na korroziyu stal'nykh trub, primenyayemykh pri stroitel'stve i ekspluatatsii nefte dobyvayushchikh skvazhin (na primere Yurubcheno-Tokhomskogo mestorozhdeniya) "Molodoy uchenyy" [Investigation of the influence of natural formation water on the corrosion of steel pipes used in the construction and operation of oil wells (on the example of Yurubcheno-Tohomsky field)]. *Molodoy uchenyy* [Young scientist]. 2017, no. 16 (150), pp. 184–187.
 24. Maksyutin A. V., Shangaraeva A. V., Sultanova D. A. Sposoby predotvrashcheniya soledotlozheniya pri razrabotke i ekspluatatsii zalezhey nefi [Ways to Prevent Salt Deposition in the Development and Operation of Oil Deposits]. *Zhurnal "Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya"* [Journal of Contemporary Issues of Science and Education]. 2015, no. 1.
 25. Tovozhnyanskiy L. L. Konstruktsionnyye metalicheskiye materialy v khimicheskoy i neftegazovom mashinostroyenii : ucheb. posobie [Structural metal materials in chemical and oil and gas mechanical engineering : textbook]. Kharkov, Pidruchnyk NTU "KhPI", 2012. 212 p. ISBN 978-966-2426-48-9.
 26. Bilets'kiy V. S., Smimov V. O. Modelyuvannya protsesiv pererobky korysnykh kopalyn : Monohrafiya [Modeling of mineral processing processes : Monograph]. Donetsk : East Publishing House, 2013. 304 p.

Надійшла (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Немах Амір Мохаммед Аладжмін (Немах Амир Мохаммед Аладжмин, Neamah Ameer Mohammed Alajmeen) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут», м. Харків; тел.: (+964) 780-750-0835; e-mail: ameernema30@gmail.com; Orcid code: 0000-0001-5929-7847.

Донський Дмитро Федорович (Донской Дмитрий Федорович, Donsky Dmytro Fedorovich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут», м. Харків; тел.: (095) 810-45-36; e-mail: dfdonsky@gmail.com. Orcid code: 0000-0003-3546-6110.

Нестеренко Сергій Вікторович (Нестеренко Сергей Викторович, Nesterenko Sergii Viktorovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: (066) 017-32-16; e-mail: nester.hnamg@gmail.com. Orcid code: 0000-0002-2089-6786.

УДК 621.165

М. М. НЕЧУЙВИТЕР

АСПЕКТИ СТАБІЛІЗАЦІЇ ТЕПЛООВОГО СТАНУ КОРПУСІВ ЦИЛІНДРІВ ВИСОКОГО ТИСКУ ПАРОВИХ ТУРБІН В ПУСКОВИХ ТА ЗМІННИХ РЕЖИМАХ

Проведені дослідження щодо застосування методу зворотного формування температурної нерівномірності роз'ємних корпусів циліндрів парових турбін шляхом управління їх тепловим станом в пускових та змінних режимах. Виявлені критерії, а саме: температурних перепадів між ступенями; постійної різниці сумарних тангенціальних напружень від різниці тисків на стінку корпусу циліндра; температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра, регулювання котрих за відповідними їм програмами при пусках турбіни з різних теплових станів та роботи в змінних режимах, дозволяє стабілізувати тепловий стан корпусу циліндра. Запропоновані технічні рішення щодо підвищення техніко-економічних характеристик експлуатації парових турбін, енергоблоку.

Ключові слова: парова турбіна, корпус циліндра високого тиску, розкриття горизонтальних роз'ємів, управління тепловим станом, пускова мобільність.

М. М. НЕЧУЙВИТЕР

АСПЕКТЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСОВ ЦИЛИНДРОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ ПАРОВЫХ ТУРБИН В ПУСКОВЫХ И ПЕРЕМЕННЫХ РЕЖИМАХ

Проведены исследования относительно применения метода обратного формирования температурной неравномерности разъемных корпусов цилиндров паровых турбин путем управления их тепловым состоянием в пусковых и переменных режимах. Определены критерии, а именно: температурных перепадов между ступенями; постоянной разницы суммарных тангенциальных напряжений от разницы давлений на стенку корпуса цилиндра; температурных тангенциальных напряжений при линейном законе изменения температуры по радиусу цилиндра, регулирование которых по соответствующим им программам при пусках турбины из различных тепловых состояний и работе в переменных режимах, позволяет стабилизировать тепловое состояние корпуса цилиндра. Предложены технические решения применительно к повышению технико-экономических характеристик эксплуатации паровых турбин, энергоблока.

Ключевые слова: паровая турбина, корпус цилиндра высокого давления, раскрытие горизонтальных разъемов, управление тепловым состоянием, пусковая мобильность.

© М. М. Нечуйвітер, 2020

M. M. NECHUIVITER

ASPECTS OF STABILIZATION OF THE HEAT CONDITION OF HIGH PRESSURE CYLINDRICAL CASES OF STEAM TURBINES IN THE STARTING AND VARIABLE MODES

An application of the method of creating inverse temperature non-uniformity for steam turbine high pressure cylinder inner split housings by controlling their heat state in the starting and variable modes is studied. Criteria are defined, namely: temperature differences between steps; constant difference of total tangential stresses from the pressure difference on the wall of the cylinder body; tangential stresses of the temperature with the linear law of temperature change along the radius of the cylinder, regulation of which, according to their respective programs, allows to stabilize the heat state of the cylinder body when starting a turbine from various thermal conditions and exploiting it in variable modes. Technical solutions are proposed aimed at increasing the technical and economical characteristics of the operation of steam turbines and power unit.

Key words: steam turbine, high pressure cylinder housing, opening of horizontal sockets, heat state management, starting mobility.

Присвячується світлій пам'яті О. Г. Кнабе

Вступ. Підвищення технічної ефективності елементів існуючих *парових турбін, турбоустановок електростанцій* – це одна з актуальних проблем сучасної енергетики України.

Експлуатаційна надійність та довговічність турбоагрегату залежать від здійснення режимів пуску та зупину [1]. Останні при відхиленні від технологічних норм пускових операцій, режимів набору навантаження можуть приводити до низки аварійних наслідків як термінових, так і згодом, в часі. Це поява тріщин в корпусах турбін, клапанів та в паропроводах, прогинання роторів і циліндрів турбін, короблення фланців горизонтального роз'єму, ослаблення посадкових з'єднань, зміна структурного стану металу, підвищене зношення підшипників, а також низка інших неполадок, що зумовлені помилками при виконанні пускових операцій. Пуски блочних турбоагрегатів на *до критичні* та *зверху критичні* параметри вимагають виконання додаткових технологічно-пускових операцій у зв'язку з виникненням сумісних термічних та механічних напружень в елементах агрегату.

До основних змін механічного стану турбоагрегату під час пуску і набору навантаження відносяться:

- виникнення напружень в паропроводах, корпусах турбін і клапанах від внутрішнього тиску пари;
- виникнення напружень вигину в діафрагмах, дисках, направляючих і робочих лопатках;
- поява напружень від відцентрових сил в робочих лопатках, дисках, барабанах, втулках і інших елементах турбоагрегату, котрі обертаються;
- поява дотичних напружень на валу турбіни внаслідок передачі на вал генератора крутного моменту;
- знакозмінне виникнення напружень від вібрації в робочих лопатках, валах і інших елементах турбоустановки;
- поява вісьового зусилля, що діє на упорний підшипник; зміна радіальних зазорів в проточній частині турбіни;
- зміна посадочних напружень деталей ротора, що мають температурний натяг.

Тобто, в процесі пуску та набору навантаження турбіни в окремих вузлах та деталях турбоагрегату виникає напружений стан з можливими в деяких вузлах та деталях високими значеннями.

Для парових турбін, котрі працюють на зверху критичних та високих параметрах, при експлуатації їх в пускових режимах, режимах змінних навантажень з метою забезпечення вимог до техніко-економічних характеристик – економічності, маневреності, надійності, мобільності, довготривалості, продовження терміну експлуатації, необхідним є застосування перспективних методів управління їх тепловим станом, прогнозування та підтримання щільності горизонтального розкриття зовнішніх, внутрішніх корпусів циліндрів. Останнє вимагає вирішення задач, що пов'язані з низкою вузлів парової турбіни, котрі стримують швидкість пускових операцій, тим самим знижують розрахункові техніко-економічні характеристики. Експлуатація парових турбін на зверху критичні параметри пари на прикладі реконструйованого енергоблоку потужністю 300 МВт [2] з паровою турбіною ХТГЗ («Харьковский турбогенераторный завод», «Харьковский турбинный завод им. С. М. Кирова», АО "Турбоатом») на основі удосконалення існуючих конструктивних рішень показала, що проектна потужність турбіни навіть після її реконструкції дозволила підвищити технічну ефективність турбоустановки: внутрішній відносний *коefficient корисної дії* турбіни, ККД, на 14,7 %). Слід відмітити, що результати цієї реконструкції фактично на 15 МВт не досягають проектної потужності, а *внутрішній відносний ККД циліндра низького тиску* (ЦНТ) парової турбіни на 4 % нижчий розрахункового.

Перспективним методом управління тепловим станом корпусів циліндрів парових турбін для вирішення вищезазначеної задачі є застосування *методу зворотного формування температурної нерівномірності (ЗФТН)* роз'ємних корпусів циліндрів, оскільки при цьому досягається розрахункова економічність проточної частини турбіни, маневреність, надійність, пускова мобільність на низці вузлів турбіни. Останній вимагає забезпечення

та виконання комплексу умов:

- для вузлів турбін, що експлуатувались, відновлення концентричності вузла турбіни (правка з установкою кріплення, наплавлення, проточка);
- вирішення питань нового затягнення кріплення роз'єму та відносного розширення ротора турбіни;
- вирішення конструктивних особливостей установки болтів на фланці кріплення роз'єму;
- дотримання низки технологічних умов – вибору термодинамічних параметрів (температурного перепаду, коефіцієнтів тепловіддачі) – визначення стаціонарних та нестаціонарних температурних полів вузлів турбін, зони застосування ЗФТН;
- постійного контролю концентричності вузлів турбіни після застосування ЗФТН;
- оцінки напруженості вузлів турбіни при *нульовому* електричному навантаженні $N_e = 0$ МВт;
- спрощення конструкції турбіни та вибору металу для виготовлення вузлів корпусів нових турбін.

Постановка задачі. Метою роботи є дослідження можливостей збільшення техніко-економічних характеристик турбоагрегату в пускових режимах, режимах збільшення навантаження енергоблоку шляхом застосування методу зворотного формування температурної нерівномірності (ЗФТН).

Задачі дослідження: виявлення критеріїв стабільності ЗФТН.

Матеріали дослідження. Аналіз розрахункових досліджень [3] показав наступне.

1) У циліндрі турбіни (рис. 1), що відповідає 2 – 5 ступеням з внутрішнім радіусом r_1 (500 мм) та зовнішнім радіусом r_2 (800 мм), довжиною циліндра l , у стані внутрішнього тиску середовища (пари) p_1 , $p_1 = \varphi_1(r_1, l)$ з температурою T_1 , $T_1 = \vartheta_1(r_1, l)$ та постійного зовнішнього тиску $p_2 = c_1$ з постійною температурою $T_2 = c_2$, температурний перепад в стінці внутрішнього тиску – це середня температура зовнішньої поверхні ступені, має залежність за ступенями:

$$\Delta T_{2-5} = 204, 184, 164, 144 \text{ } ^\circ\text{C},$$

тобто спостерігається постійна величина зменшення температури пари за ступенями на 20°C . Для застосування способу формування оберненої температурної нерівномірності необхідно забезпечення температурного перепаду між ступенями.

2) Сумарні тангенціальні напруження (рис. 2) $[\sigma_\Theta]_{r_1}^{\Delta p+t'}$, $[\sigma_\Theta]_{r_2}^{\Delta p+t'}$ – це, відповідно, напруження від різниці тисків Δp на стінку корпусу циліндра високого тиску та температурні тангенціальні напруження при лінійному законі зміни температури t' по радіусу циліндра при номінальному навантаженні $N_e = 300$ МВт. Експериментальні дані дозволяють фіксувати, що різниці вищезазначених сумарних тангенціальних напружень між ступенями згідно [3] наближені до сталої величини, приблизно 20 МПа.

Для застосування способу формування оберненої температурної нерівномірності необхідно підтримання постійної різниці сумарних тангенціальних напружень.

3) Тангенціальні напруження після застосування зворотного формування температурної нерівномірності циліндра високого тиску на поверхні f при номінальному навантаженні $N_e = 300$ МВт – це $[\sigma_\Theta]_{r_1}^f$, $[\sigma_\Theta]_{r_2}^f$. Експериментальні дані [3] дозволяють фіксувати, що різниці сумарних тангенціальних напружень від різниці тисків Δp на стінку корпусу циліндра високого тиску, температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури t' по радіусу циліндра r та тангенціальних напружень після застосування ЗФТН – це Δ_1 , Δ_2 , тобто, $\Delta_1 = \{[\sigma_\Theta]_{r_1}^{\Delta p+t'} - [\sigma_\Theta]_{r_1}^f\}$, та $\Delta_2 = \{[\sigma_\Theta]_{r_2}^{\Delta p+t'} - [\sigma_\Theta]_{r_2}^f\}$, змінюються в діапазоні 10 – 20 МПа. Підтримання постійної різниці Δ_1 , Δ_2 ... на ступенях 2 – 5 ЦВТ дозволяє забезпечити стабільність застосування ЗФТН.

Здійснювати спосіб формування оберненої температурної нерівномірності необхідно за параметром температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра.

Застосування методу ЗФТН дозволяє підвищити маневрені характеристики парових турбін не тільки застосуванням обігріву фланців та шпильок циліндра високого тиску, але й без обігріву останніх при умові розробки програми ЗФТН при пусках турбіни з різних теплових станів.

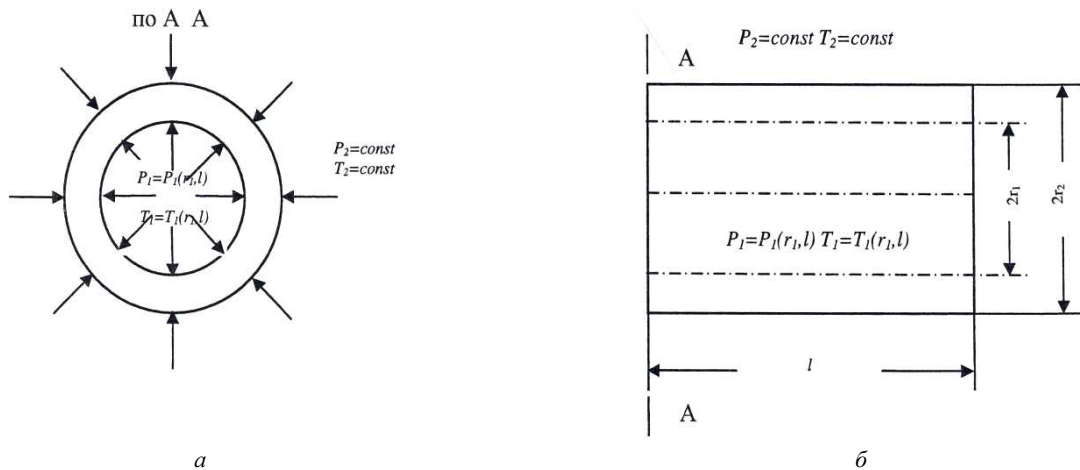


Рис. 1 – Циліндр з внутрішнім r_1 та зовнішнім r_2 радіусами: *a* – напрям підводу пари з тиском p_1 та температурою T_1 ; *б* – напрям підводу пари з параметрами p_1 , T_1 у вісьовій проекції.

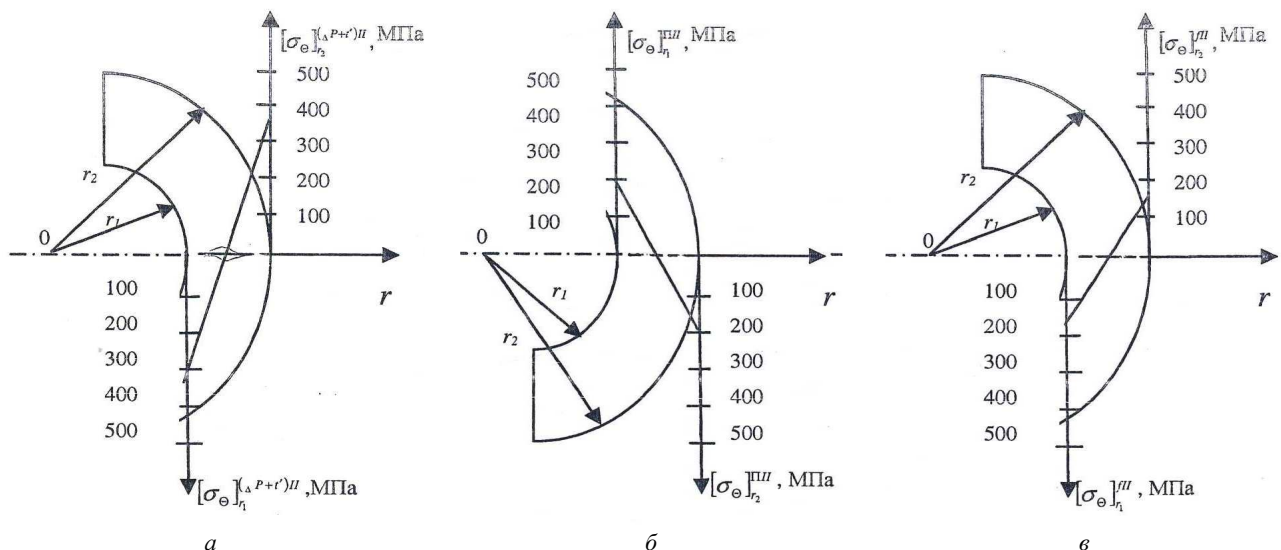


Рис. 2 – Тангенціальні сумарні напруження внутрішнього корпусу ЦВТ в зоні 2-го ступеня після застосування ЗФТН при навантаженні $N_e = 300$ МВт: *a* – сумарні тангенціальні напруження в зоні 2-го ступеня до ЗФТН (на роз'ємі показана щілина протікання пари при $N_e = 300$ МВт); *б* – температурні тангенціальні напруження в зоні 2-го ступеня при застосуванні ЗФТН та при $N_e = 0$ МВт; *в* – сумарні тангенціальні напруження в зоні 2-го ступеня після застосування ЗФТН при $N_e = 300$ МВт.

Результати дослідження. Згідно [3] доцільним є застосування ЗФТН: без обігріву фланців та шпильок в різні періоди після пуску при умові розробки програми ЗФТН при пусках турбіни з різних теплових станів; з обігрівом фланців та шпильок при удосконалених сумісних програмах при пусках турбіни з різних теплових станів.

Для забезпечення застосування ЗФТН при умові розробки програми ЗФТН для пусків турбіни з різних теплових станів запропоновані способи формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємів корпусів циліндра високого тиску парової турбіни [4, 5, 6].

В пропонувані способи формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів ЦВТ парової турбіни, що працює в режимі наближеному до номінального, регулюють температурні перепади (напори) між ступенями, сумарні тангенціальні напруження між ступенями, температурні тангенціальні напруження при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра.

На рис. 3 зображена схема реалізації способів формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємів корпусів ЦВТ в режимах, що наближені до номінального навантаження турбіни.

Способи формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра

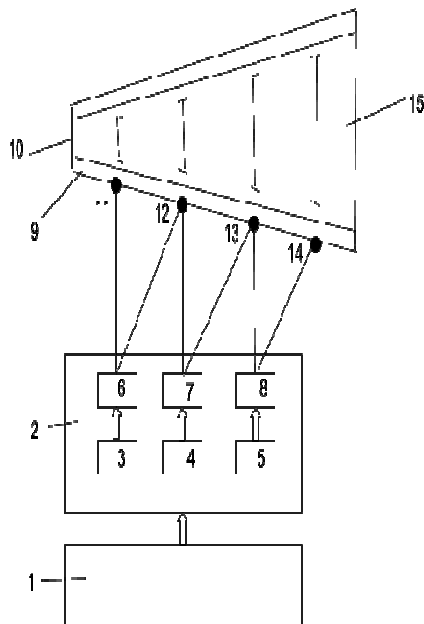


Рис. 3 – Схема реалізації способів формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємів корпусів ЦВТ.

Реалізація за способом формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни за параметром постійної різниці сумарних тангенціальних напружень здійснюється за схемою згідно рис. 3, що включає програмний блок формування постійної різниці сумарних тангенціальних напружень оберненої температурної нерівномірності 1, котрий підключено до програмного блоку формування та регулювання постійної різниці сумарних тангенціальних напружень 2, з блоками постійної різниці сумарних тангенціальних напружень 3, 4, 5 та регуляторами постійної різниці сумарних тангенціальних напружень 6, 7, 8, що підключені до точок корпусу 9, турбіни 10, відповідно до другого 11, та третього 12, ступенів, до третього 12, та четвертого 13, ступенів, до четвертого 13, та п'ятого 14, ступенів ЦВТ 15.

Реалізація за способом формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни за параметром температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра здійснюється за схемою згідно рис. 3, що включає програмний блок формування температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 1, котрий підключено до програмного блоку формування та регулювання температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 2, з блоками температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 3, 4, 5 та регуляторами температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 6, 7, 8, що підключені до точок корпусу 9, турбіни 10, відповідно до другого 11, та третього 12, ступенів, до третього 12, та четвертого 13, ступенів, до четвертого 13, та п'ятого 14, ступенів ЦВТ 15.

Пропоновані способи формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни реалізуються за схемою рис. 3, котра ідентична для всіх трьох способів, наступним чином.

При роботі парових турбін в режимах, що наближені до номінального навантаження по схемі на рис. 3, інформації програмних блоків формування температурного напору оберненої температурної нерівномірності, формування постійної різниці сумарних тангенціальних напружень оберненої температурної нерівномірності, формування температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 1 задають програми температурних перепадів між ступенями, постійної різниці сумарних тангенціальних напружень між ступенями, температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 2 з блоками температурного перепаду, постійної різниці сумарних тангенціальних напружень, температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями 3, 4, 5 і регуляторами температурного перепаду, постійної різниці сумарних тангенціальних напружень, температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра 6, 7, 8, від яких сформовані оперативні сигнали поступають до точок корпусу 9

високого тиску парової турбіни здійснюються за параметрами:

- температурного напору;
- постійної різниці сумарних тангенціальних напружень;
- температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра.

Реалізація за способом формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни за параметром температурного напору здійснюється за схемою згідно рис. 3, котра включає програмний блок формування температурного напору оберненої температурної нерівномірності 1, котрий підключено до програмного блоку формування та регулювання температурних перепадів 2 з блоками температурного перепаду 3, 4, 5 та регуляторами температурного перепаду 6, 7, 8, що підключені до точок корпусу 9 турбіни 10 відповідно до другого 11 та третього 12 ступенів, до третього 12 та четвертого 13 ступенів, до четвертого 13 та п'ятого 14 ступенів ЦВТ 15.

турбіни 10 відповідно до другого 11 та третього 12 ступенів, до третього 12 та четвертого 13 ступенів, до четвертого 13 та п'ятого 14 ступенів ЦВТ 15 та регулюють нагрів корпусу турбіни.

Використання пропонувані способів формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни дозволяє, в порівнянні з існуючими способами, досягти максимального коефіцієнта корисної дії ЦВТ парової турбіни в режимах, що наближені до номінального, та підвищити її маневреність.

Перспективи подальших досліджень. Використання пропонувані способів формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни дозволяє стабілізувати тепловий стан корпусу, досягти максимального коефіцієнта корисної дії циліндра високого тиску парової турбіни в режимах, що наближені до номінального, та підвищити її маневреність.

Висновки. Стабільність теплового стану корпусу циліндра високого тиску парової турбіни (не розкриття горизонтального роз'єму корпусу) визначається експлуатаційними термодинамічними, експлуатаційними механічними критеріями стану ступенів циліндра, отриманням максимального коефіцієнта корисної дії ЦВТ парової турбіни та підвищенням її маневреності в режимах, що наближені до номінального. При способі зворотного формування температурної нерівномірності стабільність досягається регулюванням: температурних перепадів між ступенями; постійної різниці сумарних тангенціальних напружень; температурних тангенціальних напружень при лінійному законі зміни температури по радіусу циліндра між ступенями.

Список літератури

1. Капелович Б. Э. Эксплуатация паротурбинных установок. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 304 с.
2. Кнабе А. Г. Способ повышения экономичности и маневренности разъемных корпусов турбин на высокие параметры пара // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 6. – С. 3 – 8.
3. Кнабе О. Г., Нечуйвітер М. М., Шелепов І. Г. Доцільність застосування методу зворотного формування температурної нерівномірності для роз'ємних корпусів циліндрів парових турбін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Енергетичні та теплотехнічні процеси та устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 13. – С. 55 – 60.
4. Нечуйвітер М. М., Кнабе О. Г. Пат. 112336, Україна. Спосіб формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни / М. М. Нечуйвітер, О. Г. Кнабе. – 2016.
5. Нечуйвітер М. М., Кнабе О. Г. Пат. 121288, Україна. Спосіб формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни / М. М. Нечуйвітер, О. Г. Кнабе. – 2017.
6. Нечуйвітер М. М., Кнабе О. Г. Пат. 134028, Україна. Спосіб формування оберненої температурної нерівномірності внутрішніх роз'ємних корпусів циліндра високого тиску парової турбіни / М. М. Нечуйвітер, О. Г. Кнабе. – 2019.

References (transliterated)

1. Kapelovich B. E. *Ekspluatatsiya paroturbinnikh ustanovok* [Steam-turbine plant operation]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 304 p.
2. Knabe A. G. *Sposob povysheniya ekonomichnosti i manevrennosti raz'yomnykh korpusov turbin na vysokie parametry para* [Method for improving efficiency and control response of turbine split housing at high steam parameters]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering]. 2010, vol. 13, no. 6, pp. 3–8.
3. Knabe A. G., Nechuyviter M. M., Shelepov I. G. *Dotsil'nist' zastosuvannya metodu zvorotnogo formuvannya temperaturnoyi nerivnomirnosti dlya roz'yemnykh korpusiv tsylindriv parovoykh turbin* [Feasibility of the method of reverse forming of uneven temperature for split housings of steam turbine cylinders]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Energetichni ta teplotekhnichni protsesy ta ustatkuvannya* [Bulletin of NTU "KhPI". Series : Energy and thermal engineering processes and equipment]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 13, pp. 55–60.
4. Nechuyviter M. M., Knabe A. G. *Sposib formuvannya obernenoyi tempereturnoyi nerivnomirnosti vnutrishnikh roz'yemnykh korpusiv tsylindra vysokogo tysku parovoyi turbiny* [Method of creating inverse temperature non-uniformity for steam turbine high pressure cylinder inner split housings]. Patent UA, no. 112336, 2016.
5. Nechuyviter M. M., Knabe A. G. *Sposib formuvannya obernenoyi tempereturnoyi nerivnomirnosti vnutrishnikh roz'yemnykh korpusiv tsylindra vysokogo tysku parovoyi turbiny* [Method of creating inverse temperature non-uniformity for steam turbine high pressure cylinder inner split housings]. Patent UA, no. 121288, 2017.
6. Nechuyviter M. M., Knabe A. G. *Sposib formuvannya obernenoyi tempereturnoyi nerivnomirnosti vnutrishnikh roz'yemnykh korpusiv tsylindra vysokogo tysku parovoyi turbiny* [Method of creating inverse temperature non-uniformity for steam turbine high pressure cylinder inner split housings]. Patent UA, no. 134028, 2019.

Надійшла (received) 03.02.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Марія Михайлівна (Нечуйвітер Мария Михайловна, Nechuyviter Maria Michailivna) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

УДК 517.5

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ФУНКЦІЇ ЛАМБЕРТА**

Виведено компактні формули для обчислення значень функції Ламберта на певних проміжках її області визначення. Це досягнуто заміною трансцендентних рівнянь на відповідні алгебраїчні (квадратні та кубічні), за умови малої зміни їх коренів при переході від одних видів рівнянь до інших. У побудові апроксимацій задіяна формула Шенкса, що наближено виражає суму повільно збіжного степеневому ряду. Порівняння наближених значень функції Ламберта з точними її значеннями показало, що похибка запропонованих апроксимацій на виділених проміжках аргументів менша за 0,5 %. Проміжки охоплюють не тільки великі, а і малі та від'ємні значення аргументу, де функція двозначна. Апроксимація стосується обох гілок функції.

Ключові слова: функція Ламберта, апроксимація елементарними функціями, формула Шенкса.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА**

Выведены компактные формулы для вычисления значений функции Ламберта на некоторых промежутках ее области определения. Это достигнуто заменой трансцендентных уравнений на соответствующие алгебраические (квадратные и кубические), при условии малого изменения их корней при переходе от одних видов уравнений к другим. В построении аппроксимаций задействована формула Шенкса, которая приближенно выражает сумму медленно сходящегося степенного ряда. Сравнение приближенно вычисленных значений функции Ламберта с точными ее значениями показало, что погрешность предложенных аппроксимаций на выделенных промежутках аргументов меньше 0,5 %. Промежутки охватывают не только большие, но и малые, а также отрицательные значения аргумента, где функция двухзначная. Аппроксимация касается обеих ветвей функции.

Ключевые слова: функция Ламберта, аппроксимация элементарными функциями, формула Шенкса.

V. P. OLSHANSKIY**ON THE APPROXIMATION OF THE LAMBERT FUNCTION**

Compact formulas are derived for calculating the values of the Lambert function on some intervals of its domain. This is achieved by replacing the transcendental equations by the corresponding algebraic (square and cubic) equations, provided that their roots change little when passing from one type of the equation to another. In the construction of approximations, the Shanks formula is used, which approximately expresses the sum of a slowly converging power series. A comparison of the approximately calculated values of the Lambert function with its exact values showed that the error of the proposed approximations on the selected intervals of the arguments is less than 0.5 %. The gaps cover not only large, but also small, as well as negative values of the argument, where the function is two-valued. The approximation applies to both branches of the function.

Key words: Lambert function, approximation by elementary functions, Shanks formula.

Вступ. Функція Ламберта була відома ще з часів Л. Ейлера, але на неї довго не звертали уваги. Як окрема спеціальна функція вона з'явилась в системі комп'ютерного забезпечення *Maple* в 80-роках минулого століття і була названа *Lambert W*. Її використання дає можливість розв'язати аналітично деякі трансцендентні рівняння.

Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження. Функція Ламберта поширена в сучасних дослідженнях з фізики і механіки. В роботі [1] вона задіяна для опису нових *форм ентропії*. В публікаціях [2, 3] її використали при аналітичному розв'язанні задач балістики матеріальної точки в середовищі з опором. В статті [4] цю функцію задіяли для розрахунку амплітуд вільних коливань осцилятора, коли сила в'язкого опору пропорційна квадрату швидкості руху. В прикладних дослідженнях функцію використовують при математичному моделюванні нерівномірного руху зернової суміші, як в'язкої рідини, по нахиленому плоскому віброрешету [5] та при розв'язуванні задачі пневмосепарування насіння повітряним потоком [6]. Останнім часом функцію Ламберта вживають також при математичному моделюванні удару в'язкопружних тіл [7 – 9]. В монографії [3] надруковані таблиці цієї спеціальної функції, що спрощує числову реалізацію відповідних аналітичних розв'язків. Асимптотичні подання функції Ламберта при великих значеннях її аргументу надруковано в [3, 10]. Тут пропонуємо інші варіанти апроксимації.

Метою статті є виведення та апробація формул для наближеного обчислення значень функції Ламберта додатного й від'ємного аргументів, з урахуванням її двозначності при від'ємних аргументах.

Апроксимація функції при близьких до нуля значеннях аргументу. Виходимо з того, що функція подається повільно збіжним степеневим рядом [1]:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!}, \quad (1)$$

що збігається в області $x \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right]$.

Щоб одержати наближений замкнутий вираз суми $S(x)$ цього ряду, скористаємося *формулою Шенкса* [11, 12], за якою:

$$S(x) \approx S_n(x) - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \quad (2)$$

Тут S_n – сума n членів ряду; a_n і a_{n+1} – n -й і $(n+1)$ -й його члени.

Прийmemo за S_n наступну суму в (1):

$$S_n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4. \quad (3)$$

Тоді: $a_n = -\frac{8}{3}x^4$, $a_{n+1} = \frac{125}{24}x^5$ і згідно з (2), (3):

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8x^4}{3 \cdot \left(1 + \frac{125}{64}x\right)}. \quad (4)$$

Наближені значення $W(x)$, при $x > 0$, обчислені по формулі (4), записано в табл. 1, де також вказано й умовно точні значення, запозичені з таблиці 1.3 стор. 15 в [3].

Таблиця 1 – Наближені й точні значення $W(x)$

x	Формула (4)	в [3]	x	Формула (4)	в [3]
	Значення $W(x)$			Значення $W(x)$	
0,1	0,0913	0,0913	0,3	0,2369	0,2368
0,2	0,1689	0,1689	$1/e$	0,2788	0,2785

Порівняння результатів показує, що на проміжку $x \in [0, 1/e]$ похибка наближення (4) менша за 0,5 %.

Формулу (4) можна використовувати і для наближених обчислень значень першої гілки $W_1(-x)$ двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу. Результати підстановки від'ємних x в формулу (4) записано в табл. 2, де також вказано умовно точні значення $W_1(-x)$, запозичені в таблиці 1.1 стор. 10 в [3].

Як бачимо, на проміжку $x \in (0; 0,25)$ похибка апроксимації (4) менша за 0,5 %, але вона швидко зростає при більших x . Тому при $x \rightarrow 1/e$ потрібні інші наближення. Про одне з них піде мова далі.

Таблиця 2 – Наближені й точні значення $-W_1(-x)$

x	Формула (4)	в [3]	x	Формула (4)	в [3]
	Значення $-W_1(-x)$			Значення $-W_1(-x)$	
0,05	0,0527	0,0527	0,25	0,3563	0,3574
0,10	0,1118	0,1118	0,30	0,4827	0,4894
0,15	0,1795	0,1795	0,35	0,6633	0,7166
0,20	0,2590	0,2592	1/e	0,7514	1,0000

Додаткова апроксимація $W_1(-x)$ при $x \in [0, 25; 1/e]$. Якщо $f = -W_1(-x)$, то має місце рівняння:

$$f e^{-f} = x. \quad (5)$$

Задамо в ньому:

$$x = \frac{1}{e} - \xi; \quad f = 1 - \varepsilon; \quad \xi > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in [0, 25; 1/e], \quad f > 0. \quad (6)$$

Тоді вираз (5) отримує форму:

$$(1 - \varepsilon)e^\varepsilon = 1 - \xi e. \quad (7)$$

Розгорнемо e^ε в степеневий ряд:

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 + \dots$$

Щоб знайти наближено його суму прийmemo: $S_n = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$; $a_n = \frac{1}{2}\varepsilon^2$; $a_{n+1} = \frac{1}{6}\varepsilon^3$. Тоді, за формулою Шенкса (2):

$$e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{6 - 2\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 6}{6 - 2\varepsilon}. \quad (8)$$

Підставивши (8) в (7), приходимо до кубічного рівняння:

$$\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2e\xi\varepsilon - 6e\xi = 0.$$

Воно має розв'язок:

$$\varepsilon = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - 1, \quad (9)$$

$$\text{де } p = 2e\xi - 3; \quad q = 2 - 8e\xi; \quad \alpha = \arccos \left(-\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right).$$

Враховуючи (6) і (9), одержуємо наступну додаткову апроксимацію:

$$W_1(-x) \approx 2 \left(\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - 1 \right), \quad (10)$$

$$\text{в якій } \xi = \frac{1}{e} - x.$$

Про похибки наближення (10) надана інформація в табл. 3.

Таблиця 3 – Наближені та точні значення $-W_1(-x)$ при $x \geq 0,25$

x	Формула (4)	в [3]	Похибка %
	Значення $-W_1(-x)$		
0,250	0,3562	0,3574	0,34
0,300	0,4886	0,4894	0,16
0,350	0,7164	0,7166	0,03
0,367	0,9324	0,9324	0,00
$1/e$	1,0000	1,0000	0,00

Розрахунки показують, що похибка формули (10) невеликі. Отже, в сукупності формули (4) і (10) забезпечують апроксимацію $W_1(-x)$ в області її визначення з похибкою меншою за 0,5 %.

Апроксимація $W(x)$ при великих x . Виходимо з того, що $W(x)$ є аналітичним розв'язком рівняння:

$$\ln W + W = \ln x. \quad (11)$$

Підстановкою $W = \ln x - y$, де $y = y(x) < \ln x$ – невідома функція, рівнянню (11) надаємо вигляд:

$$Q + \ln \left(1 - \frac{y}{P} \right) - y = 0. \quad (12)$$

Тут $P = \ln x$, $Q = \ln P$.

Далі використаємо ряд:

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

Обчисливши наближено його суму по формулі Шенкса, отримуємо:

$$\ln(1-z) \approx -z - \frac{3z^2}{2(3-2z)} = \frac{z^2 - 6z}{6-4z}. \quad (13)$$

Підставивши вираз (13) в (12), приходимо до рівняння:

$$z^2(4P+1) - 2(3+3P+2Q) + 6Q = 0.$$

Його розв'язком є:

$$z = \frac{y}{P} = \frac{3+3P+2Q}{4P+1} - \sqrt{\left(\frac{3+3P+2Q}{4P+1} \right)^2 - \frac{6Q}{4P+1}}.$$

У підсумку одержуємо апроксимацію:

$$W(x) \approx P \left[1 - \frac{3+3P+2Q}{4P+1} + \sqrt{\left(\frac{3+3P+2Q}{4P+1} \right)^2 - \frac{6Q}{4P+1}} \right]. \quad (14)$$

Альтернативу їй знаходимо в роботі [10], де:

$$W(x) \approx P - Q + \frac{Q}{P} + \frac{Q(Q-2)}{2P^2} + \frac{Q(2Q^2-9Q+6)}{6P^3} + \frac{Q(3Q^3-22Q^2+36Q-12)}{12P^4}. \quad (15)$$

Результати обчислень $W(x)$ за формулами (14) і (15) записано в табл. 4, де також вказано значення функції Ламберта, одержані на комп'ютері в середовищі Maple.

Таблиця 4 – Значення $W(x)$ при $x \geq 3$

x	Формула (14)	Формула (15)	Maple	x	Формула (14)	Формула (15)	Maple
	Значення $W(x)$				Значення $W(x)$		
3	1,0499	1,0297	1,0499	50	2,8607	2,8604	2,8609
4	1,2022	1,2017	1,2022	100	3,3854	3,3852	3,3856
5	1,3267	1,3333	1,3267	200	3,9296	3,9294	3,9297
10	1,7454	1,7488	1,7455	1000	5,2495	5,2495	5,2496

Порівняння показує, що виведена тут формула (14) забезпечує більш високу точність обчислень, ніж (15).

Апроксимація $W_2(-x)$ $x > 0$. Це друга гілка двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу. Якщо $f = -W_2(-x)$, то має місце рівняння:

$$f - \ln f = -\ln(x). \quad (16)$$

Функцію f подаємо сумою:

$$f = -\ln x + y(x), \quad (17)$$

де $y(x) > \ln x$.

Підстановкою (17) в (16), отримуємо рівняння:

$$T + \ln\left(1 + \frac{y}{S}\right) - y = 0, \quad (18)$$

в якому: $S = -\ln x$, $T = \ln S$, $x \in \left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

Далі використаємо апроксимацію:

$$\ln(1+z) \approx z - \frac{3z^2}{6+4z} = \frac{z^2+6z}{6+4z}, \quad (19)$$

до якої призводить формула Шенкса (2).

Враховуючи (19), вираз (18) зводимо до квадратного рівняння:

$$z^2 - 2\frac{3-3S+2T}{4S-1}z - \frac{6T}{4S-1} = 0,$$

що має розв'язок:

$$z = \frac{y}{S} = \frac{3-3S+2T}{4S-1} + \sqrt{\left(\frac{3-3S+2T}{4S-1}\right)^2 + \frac{6T}{4S-1}}.$$

У підсумку одержуємо апроксимацію:

$$W_2(-x) \approx -S \left[1 + \frac{3-3S+2T}{4S-1} + \sqrt{\left(\frac{3-3S+2T}{4S-1}\right)^2 + \frac{6T}{4S-1}} \right]. \quad (20)$$

Про її похибки надана інформація в табл. 5.

Таблиця 5 – Значення $-W_2(-x)$

x	Формула (20)	в [3]	Похибка %
	Значення $-W_2(-x)$		
0,001	9,1182	9,1180	0,002
0,010	6,4732	6,4728	0,006
0,100	3,5787	3,5772	0,041
0,200	2,5448	2,5426	0,087
0,300	1,7829	1,7813	0,090
$1/e$	1,0000	1,0000	0,000

Як бачимо, формула (20) з малою похибкою наближає $W_2(-x)$ на всій області її визначення.

Перспективи подальших досліджень. Апроксимаційні формули (14) і (20) можна уточнити, зводячи пошук значень функції Ламберта до обчислення коренів не квадратних, а кубічних рівнянь, що потребує подальших досліджень.

Висновки. Запропоновані апроксимації доповнюють таблиці спеціальної функції Ламберта, де вона визначена для окремих значень її аргументу. Ці апроксимації мають компакту форму і дають можливість з похибкою меншою за 0,5 % обчислювати значення спеціальної функції, при числовій реалізації аналітичних розв'язків різних задач, побудованих з її використанням.

Список літератури

1. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy // *IMA Journal of Applied Mathematics*. – 2007. – V. 72. – P. 785 – 800.
2. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Інверсія розв'язку Дідона в задачі балістики матеріальної точки // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – № 4. – С. 145 – 147.
3. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук А. О., 2013. – 204 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.
5. Тищенко Л. Н., Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Выборешетная сепарация зерновых смесей. – Харьков : Мисьдрук, 2011. – 280 с.
6. Бакум М. В., Ольшанський В. П., Крекот М. М. Закономірності руху часток в квазігоризонтальному каналі // *Вісник ХНТУСГ*. Серія : Технічні науки. – Харків : ХНТУСГ, 2014. – Вип. 148. – С. 90 – 97.
7. Дягель Р. В., Лапшин В. В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. – 2011. – № 5. – С. 164 – 173.
8. Боровин Г. К., Лапшин В. В. Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кроссли // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия : Естественные науки*. – 2018. – № 6. – С. 18 – 30. – DOI : 10.18698/1812-3368.
9. Боровин Г. К., Дягель Р. В., Лапшин В. В. Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. – Москва : ИПМ, 2008. – № 53. – 18 с.
10. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function // *Advances in Computational Math*. – 1996. – V. 5. – P. 329 – 359.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – Москва : Мир, 1967. – 310 с.
12. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.

References (transliterated)

1. Farial Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007, vol. 72, pp. 785–800.
2. Ol'shans'kyi V. P., Ol'shans'kyi S. V. Inversiya rozv'yazku Didiona v zadachi balistyky material'noyi tochky [Inversion of Dedion's solution in the problem of material point ballistics]. *Naukovi visti NTUU "KPI"* [Scientific News of NTUU "KPI"]. Kyiv, NTU "KPI" Publ., 2013, no. 4, pp. 145–147.
3. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lambert v zadachakh ballistiki material'noy tochki [Lambert function in ballistics problems of a material point]. Kharkov, Izdatel' Savchuk A.O. Publ., 2013. 204 p.
4. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lambert v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 18 (1061), pp. 116–119.
5. Tishhenko L. N., Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Vibroreshetnaya separatsiya zernovykh smesey [Vibro-sieve separation of grain mixtures]. Kharkov, Mis'kdruk Publ., 2011. 280 p.
6. Bakum M. V., Ol'shans'kyi V. P., Krekot M. M. Zakonomirnosti rukhu chastok v kvazigoryzontal'nomu kanali [Regularities of particle motion in a quasi-horizontal channel]. *Visnyk KhNTUSG. Seriya : Tekhnichni nauky* [Bulletin of KhNTUSG. Series : Technical Sciences]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2014, no. 148, pp. 90–97.
7. Dyagel' R. V., Lapshin V. V. O nelineynoy vyazkouprugoy modeli kollinearnogo udara Khanta-Krossli [On the nonlinear viscoelastic model of a Hunt-Crossley collinear impact]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics]. 2011, no. 5, pp. 164–173.
8. Borovin G. K., Lapshin V. V. Obobshchennaya model' udara Gerts-Khanta-Krossli [Generalized model of the Hertz-Hunt-Crossley hit]. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Seriya : Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State University. Series : Natural Sciences]. 2018, no. 6, pp. 18–30. DOI: 10.18698/1812-3368.
9. Borovin G. K., Dyagel' R. V., Lapshin V. V. Nelineynaya vyazkouprugaya model' kollinearnogo udara [Non-linear viscoelastic collinear impact model]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics]. Moscow, IPM Publ., 2008, no. 53, 18 p.
10. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Math*. 1996, vol. 5, pp. 329–359.
11. Van Dyke M. *Metody vozmushcheniy v mekhanike zhidkosti* [Methods of perturbations in fluid mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1967, 310 p.
12. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976, 319 p.

Надійшла (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АВТОКОЛИВАННЯ, ОПИСАНІ УЗАГАЛЬНЕНИМ РІВНЯННЯМ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Розглянуто квазілінійні автоколивання, представлені узагальненим рівнянням Ван дер Поля. Узагальнення проведено заміною в названому рівнянні квадрату швидкості на її довільний невід'ємний степінь. Методом енергетичного балансу побудовано наближений аналітичний розв'язок, який описує вихід коливальної системи на режим усталених автоколивань. Одержано компактну формулу для обчислення амплітуди цього режиму і доведено, що вона не залежить від початкових умов. Обчислення вказаної амплітуди пов'язане з використанням таблиці гама-функції. Показано, що одержаний наближений аналітичний розв'язок в окремих випадках узагальнює відомі результати в теорії коливань. Для висвітлення похибок цього розв'язку додатково проведено чисельне інтегрування узагальненого диференціального рівняння на комп'ютері для конкретних числових даних. Задовільна узгодженість чисельних результатів, одержаних двома способами, підтвердила придатність наближених формул до проведення інженерних розрахунків. Досліджено також коливання, які описує узагальнене рівняння після заміни на протилежний знак дисипативної сили. Тоді рух коливальної системи залежить від початкових умов. При менших за порогове стартових відхиленнях осцилятора від положення статичної рівноваги він виконує вільні затухаючі коливання. У випадку більших за порогове початкових відхилень відбувається розгойдування вільних коливань і з плином часу розмахи осцилятора прямують до нескінченності за обмежений проміжок часу. Виведена формула порогового відхилення дозволяє судити про стійкість динамічної системи при різних показниках нелінійності в рівнянні руху та різних початкових збуреннях.

Ключові слова: автоколивання, узагальнене рівняння Ван дер Поля, метод енергетичного балансу, чисельний розв'язок задачі Коші.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

АВТОКОЛЕБАНИЯ, ОПИСАННЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Рассмотрено квазилинейные автоколебания, представленные обобщенным уравнением Ван дер Поля. Обобщение проведено заменой в названном уравнении квадрата скорости на ее произвольную неотрицательную степень. Методом энергетического баланса построено приближенное аналитическое решение, которое описывает выход колебательной системы на режим установившихся автоколебаний. Получена компактная формула для вычисления амплитуды этого режима и доказано, что она не зависит от начальных условий. Вычисление указанной амплитуды связано с использованием таблицы гамма-функции. Показано, что полученное приближенное аналитическое решение в отдельных случаях обобщает известные результаты в теории колебаний. Для выявления погрешностей этого решения дополнительно проведено численное интегрирование обобщенного дифференциального уравнения на компьютере для конкретных численных данных. Удовлетворительная согласованность численных результатов, полученных двумя способами, подтвердила пригодность приближенных формул для проведения инженерных расчетов. Исследованы также колебания, которые описывает обобщенное уравнение после замены на противоположный знак диссипативной силы. Тогда движение колебательной системы зависит от начальных условий. При стартовых отклонениях осцилятора от положения статического равновесия, величина которых меньше порогового, осцилятор совершает свободные затухающие колебания. В случае начальных отклонений, больших порогового, происходит раскачивание свободных колебаний и с течением времени размахи осцилятора стремятся к бесконечности на ограниченном промежутке времени. Выведенная формула порогового отклонения дает возможность делать заключение об устойчивости динамической системы при различных показателях нелинейности в уравнении движения и различных начальных возмущениях.

Ключевые слова: автоколебания, обобщенное уравнение Ван дер Поля, метод энергетического баланса, численное решение задачи Коши.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

SELF-OSCILLATIONS DESCRIBED BY THE GENERALIZED VAN DER POL EQUATION

Quasilinear self-oscillations, represented by the generalized Van der Pol equation, are considered. The generalization of the equation is carried out by replacing the second degree of the velocity by its arbitrary non-negative degree. An approximate analytical solution, describing the transition of the oscillatory system to the regime of steady-state self-oscillations, is constructed using the energy balance method. A compact formula is obtained for calculating the amplitude of this regime and it is proved that it does not depend on the initial conditions. The calculation of the indicated amplitude involves using the table of gamma functions. It is shown that in some cases the obtained approximate analytical solution generalizes the known results of the theory of oscillations. To identify the errors of this solution, we integrated the generalized differential equation numerically using a computer for specific numerical data. The satisfactory consistency of the numerical results obtained by applying two different methods confirmed the adequacy of the approximate formulas for engineering calculations. The oscillations described by the generalized equation with the dissipative force of opposite sign are also studied. In this case the motion of the oscillatory system depends on the initial conditions. For the deviations of the oscillator from the position of static equilibrium smaller than a threshold value, free damped oscillations occur. In the case of large initial deviations beyond the threshold, free oscillations build up and over time the oscillator sweeps tend to the infinity for a limited period of time. The threshold deviation formula is derived which makes it possible to draw a conclusion about the stability of a dynamic system for various nonlinearity indices in the equation of motion and various initial perturbations.

Key words: self-oscillations, generalized Van der Pol equation, energy balance method, numerical solution of the Cauchy problem.

Вступ. Автоколивання досить поширений вид нелінійних коливань неконсервативних систем. Вони мають місце в акустиці, електро- і радіотехніці, металообробці, гальмах транспортних засобів, системах автоматичного управління тощо. Тому важливо належним чином моделювати їх, щоб зменшити їх шкідливий вплив або посилити корисний вплив на робочий процес.

Огляд літературних джерел. Автоколивання вже тривалий час є предметом наукових досліджень. Починаючи з академіка О. О. Андропова [1], їх теорія входить окремими розділами в монографії і підручники з теорії коливань [2 – 6]. Їм присвячено також окремі спеціальні видання, з яких виділимо [7, 8]. В останні роки загальну теорію використовують для моделювання автоколивань певних елементів конструкції [9 – 12]. При висвітленні теорії автоколивань часто звертаються до рівняння Ван дер Поля [3, 4]. Тому постає питання, як зміняться його

можливості при внесенні до нього певних змін, чим і зумовлена мета роботи.

Метою статті є аналіз автоколивань, які буде описувати рівняння Ван дер Поля після узагальнення його заміною *квадратичної нелінійності* на довільну степеневу з невід'ємним показником степеня.

Узагальнене рівняння і наближений його розв'язок. Розглядаємо рух, який описує диференціальне рівняння:

$$m \ddot{x} - (K_1 - K_2 |x|^v) \dot{x} + c x = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) – m – маса осцилятора; $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ – сталі коефіцієнти; $v \geq 0$ – показник нелінійності; c – коефіцієнт пружності; $x = x(t)$ – переміщення системи, як функція часу t ; a_0 – стартове відхилення осцилятора від положення рівноваги; крапка над x означає похідну за часом t .

При $v = 2$ рівняння (1) переходить у класичне рівняння Ван дер Поля.

Якщо в (1) $v = 0$, то рівняння стає лінійним. При $K_1 < K_2$ воно описує вільні затухаючі коливання, розмахи яких спадають за експоненціальним законом. При $K_1 = K_2$ затухання відсутнє, а при $K_1 > K_2$ відбувається розгойдування коливань. Ці варіанти руху детально висвітлено в [5]. Тому далі вважаємо, що $v > 0$.

Наближений розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t), \quad (3)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $a(0) = a_0$, $a(t)$ – функція, що змінюється повільно.

Коефіцієнти K_1, K_2 вважаємо достатньо «малими», щоб виконувалась нерівність:

$$|K_1 - K_2 (\max x(t))^v| \ll 2\sqrt{mc}.$$

Дотримуючись [6], зміну потенціальної енергії $\Delta\Pi$ за напівцикл коливань наближено подаємо виразом:

$$\Delta\Pi = c \frac{\pi}{\omega} a \frac{da}{dt} = \pi m \omega a \frac{da}{dt}, \quad (4)$$

а роботу *дисипативної сили* $A_{\text{дс}}$ – інтегралом:

$$A_{\text{дс}} = K_1 a^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt - K_2 a^{2+v} \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} |\cos(\omega t)|^v \sin^2(\omega t) dt.$$

Далі приймемо до уваги, що [13]:

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{2\omega}; \quad \int_0^{\pi/\omega} |\cos(\omega t)|^v \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)},$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція.

Тоді:

$$A_{\text{дс}} = \frac{a^2 \omega}{2} \left[\pi K_1 - \sqrt{\pi} K_2 a^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)} \right]. \quad (5)$$

Згідно з методом енергетичного балансу:

$$\Delta\Pi = A_{\text{дс}},$$

що, з урахуванням (4) і (5), набуває вигляд:

$$\frac{da}{dt} = \gamma_1 a - \gamma_2 a^{v+1}, \quad (6)$$

$$\text{де } \gamma_1 = \frac{K_1}{2m}; \quad \gamma_2 = \frac{K_2}{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)}.$$

Після розділення змінних в (6) та інтегрування отримуємо:

$$\int \frac{da}{\gamma_1 a - \gamma_2 a^{v+1}} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\int \frac{da}{a} + \int \frac{b a^{v-1}}{1 - b a^v} da \right) = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \left| \frac{a^v}{1 - b a^v} \right| = t + A.$$

де $b = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, A – довільна стала.

Задовольняючи початковій умові, знаходимо, що:

$$A = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \left| \frac{a_0^v}{1 - b a_0^v} \right|.$$

Отже, розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$\ln \left| \frac{a^v (1 - b a_0^v)}{a_0^v (1 - b a^v)} \right| = \gamma_1 v t.$$

Звідки випливає, що:

$$a(t) = \frac{a_0 a_*}{\left[a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v}}. \quad (7)$$

Тут:

$$a_* = \left(\frac{1}{b} \right)^{1/v} = \left[\frac{K_1 \sqrt{\pi}}{K_2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \right]^{1/v}. \quad (8)$$

Із (7) граничним переходом одержуємо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a_*,$$

незалежно від a_0 .

Таким чином, a_* – це амплітуда автоколивань в усталеному режимі, причому її нескладно обчислити за формулою (8).

Покажемо, що усталений режим є стійким граничним циклом на фазовій площині.

Якщо $a_0 < a_*$, то $\left[a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v} > a_0$, $a(t) < a_*$. В цьому випадку при $t \rightarrow \infty$ $a(t)$ прямує до a_* знизу.

Якщо $a_0 > a_*$, то $\left[a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v} < a_0$, $a(t) > a_*$. Тоді при $t \rightarrow \infty$ $a(t)$ прямує до a_* зверху.

Отже, граничний цикл при $a(t) = a_*$ є стійким.

Розглянемо додатково, якими будуть вирази a_* і $a(t)$ при $v = 2$, що відповідає класичному рівнянню ван дер Поля. Для вказаного v :

$$\Gamma(3) = 2; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{і}$$

$$a_* = 2 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}; \quad a(t) = \frac{a_0 a_*}{\sqrt{a_0^2 + (a_*^2 - a_0^2) e^{-\frac{K_1}{m} t}}} = \frac{a_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} e^{\frac{K_1}{m} t}}{\sqrt{\frac{K_1}{K_2} + \frac{a_0^2}{4} \left(e^{\frac{K_1}{m} t} - 1 \right)}}. \quad (9)$$

Якщо задати $m = 1$ кг, $\frac{K_1}{K_2} = 1$ м², $K_1 = \varepsilon$, то $a_* = 2$ м і вираз (9) перейде в формулу, що одержана в [4]

асимптотичним методом, в першому наближенні. Вираз (9) є також в [3].

Щоб отримати інформацію про фактичні похибки наближеного розв'язку (3), (7), розглянемо приклади розрахунку.

Приклад 1. Для проведення обчислень приймаємо: $m = 3$ кг; $c = 2700$ Н/м; $K_1 = 12$ Нс/м; $v = 0,4$;

$K_2 = 84$ нс/м^{1,4}. Для цих числових даних: $\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right) \approx 1,10180$; $\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \approx 1,29806$ і обчислене за формулою (8)

$a_* \approx 0,02141$ м. Значення гамма-функцій взяли з таблиці 6.1 стор. 91 в [14]. Величини перших п'яти піків $a(t_i)$, знайдені за формулою (7), і час їх досягнення $t_i = \frac{2\pi i}{\omega}$ вказано в табл. 1 і табл. 2. Результати в табл. 1 одержано при $a_0 = 0,01$ м, а в табл. 2 – при $a_0 = 0,03$ м. Для порівняння в таблицях записано і більш точні результати, отримані чисельним розв'язанням задачі Коші (1), (2) на комп'ютері. Ці результати виділено позначкою *.

Таблиця 1 – Значення $\max x(t)$ і час їх досягнення при $\nu = 0,4$; $a_0 = 0,01$ м

i	t_i , с	$100a(t_i)$, м	t_i^* , м	$100x(t_i^*)$, м
1	0,20944	1,1089	0,20937	1,1089
2	0,41888	1,2144	0,41874	1,2144
3	0,62832	1,3149	0,62810	1,3149
4	0,83776	1,4092	0,83749	1,4092
5	1,04720	1,4965	1,04687	1,4966

Таблиця 2 – Значення $\max x(t)$ і час їх досягнення при $\nu = 0,4$; $a_0 = 0,03$ м

i	t_i , с	$100a(t_i)$, м	t_i^* , м	$100x(t_i^*)$, м
1	0,20944	2,8392	0,20956	2,8392
2	0,41888	2,7124	0,41911	2,7125
3	0,62832	2,6113	0,62863	2,6114
4	0,83776	2,5299	0,83814	2,5300
5	1,04720	2,4637	1,04766	2,4639

Як видно з таблиць, наближені результати близькі до умовно точних, одержаних чисельним інтегруванням.

Приклад 2. Замінімо в числових даних першого прикладу лише значення ν і K_2 . Для проведення розрахунків тепер приймаємо: $\nu = 1,8$; $K_2 = 7 \cdot 10^4$ нс/м^{2,8}. При таких числових даних: $\Gamma\left(\frac{\nu+4}{2}\right) \approx 1,82736$; $\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \approx 0,88726$. Обчислене за формулою (8) $a_* \approx 0,0166$ м. Пікові значення $x(t)$ та час їх досягнення, розраховані двома методами, записано в табл. 3 і табл. 4. Результати чисельного інтегрування мають позначку *.

Таблиця 3 – Значення $\max x(t)$ і час їх досягнення при $\nu = 1,8$; $a_0 = 0,007$ м

i	t_i , с	$100a(t_i)$, м	t_i^* , м	$100x(t_i^*)$, м
1	0,20944	0,9452	0,20897	0,9445
2	0,41888	1,1820	0,41769	1,1865
3	0,62832	1,3832	0,62644	1,3817
4	0,83776	1,5121	0,83541	1,5113
5	1,04720	1,5856	1,04466	1,5854

Таблиця 4 – Значення $\max x(t)$ і час їх досягнення при $\nu = 1,8$; $a_0 = 0,025$ м

i	t_i , с	$100a(t_i)$, м	t_i^* , м	$100x(t_i^*)$, м
1	0,20944	1,9410	0,21399	1,9341
2	0,41888	1,7771	0,42468	1,7741
3	0,62832	1,7112	0,63470	1,7113
4	0,83776	1,6840	0,84451	1,6839
5	1,04720	1,6712	1,05422	1,6714

У другому прикладі похибки наближеного методу більші, ніж у першому, але формули (3), (7) і (8) можна вважати придатними для інженерних розрахунків.

Зі збільшенням показника ν система швидше виходить на усталений режим автоколивань.

Видозмінене рівняння Ван дер Поля. З'ясуємо далі, який рух буде описувати рівняння:

$$m \ddot{x} + (K_1 - K_2 |x|^v) \dot{x} + c x = 0, \quad (10)$$

що відрізняється від (1) знаком другого доданку. Подаючи його розв'язок добутком (3), методом енергетичного балансу тепер отримуємо:

$$a(t) = \frac{a_0 a_*}{\left[a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{v \gamma_1 t} \right]^{1/v}}, \quad (11)$$

де a_* , як і раніше, визначається формулою (8).

Із (11) випливає, що при $a_0 < a_*$ $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$. Це означає, що в цьому випадку рівняння (10) описує затухаючі коливання, що тривають до нескінченності.

Якщо в (11), $a_0 > a_*$, то $\lim_{t \rightarrow t_*} a(t) = \infty$, де

$$t_* = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \frac{a_0^v}{a_0^v - a_*^v}.$$

Отже, при $a_0 > a_*$ відбувається розгойдування коливань, внаслідок чого втрачає стійкість коливальна система за обмежений проміжок часу.

Порогове значення $a_0 = a_*$ визначається формулою (8).

Приклад 3. Для числових даних, що в прикладі 2, порогове значення $a_0 = 0,0166$ м. Щоб підтвердити цей результат, проведено чисельне інтегрування рівняння (10) на комп'ютері для інших значень a_0 . Одержані графіки коливань зображено на рис. 1 і рис. 2.

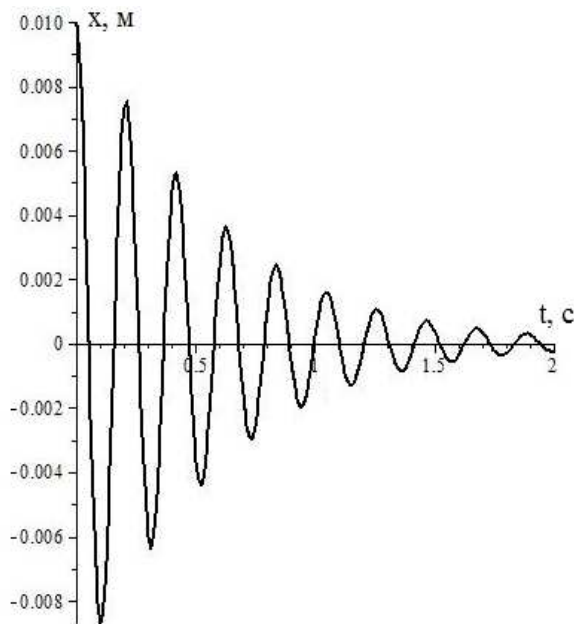


Рис. 1 – Графік коливань при $a_0 = 0,01$ м.

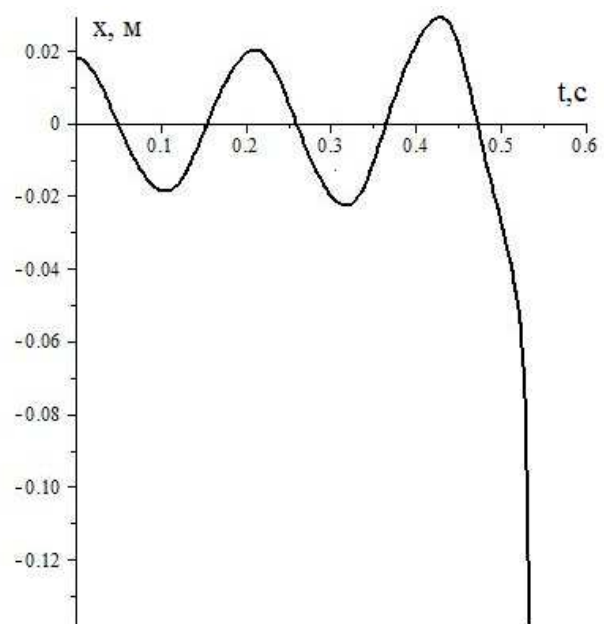


Рис. 2 – Графік коливань при $a_0 = 0,018$ м.

При $a_0 = 0,01 < 0,0166$ м відбувається згасання вільних коливань, а при $a_0 = 0,018 > 0,0166$ м система втрачає стійкість.

Перспектива подальших досліджень. Вище розглядали автоколивання та вільні коливання осцилятора з лінійною характеристикою пружності. Потребує належної уваги аналогічний аналіз коливань систем з нелінійними характеристиками жорсткості, які поширені на практиці [2].

Висновки. Дослідження показало, що узагальнене рівняння Ван дер Поля теж описує квазілінійні автоколивання осцилятора. При більших показниках нелінійності осцилятор швидше виходить на усталений режим автоколивань. Заміна знаку дисипативної сили в рівнянні коливань змінює вид руху, який воно моделює. В залежності від початкового збурення, рівняння описує або вільні згасаючі коливання, або процес розгойдування ко-

ливань з втратою стійкості системи за обмежений проміжок часу.

Список літератури

1. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 916 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
5. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
6. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Ленинград : Машиностроение, 1976. – 320 с.
7. Лазарев Г. С. Автоколебания при резании металлов. – Москва : Высшая школа, 1971. – 244 с.
8. Крагельский И. В., Гиттис Н. В. Фрикционные автоколебания. – Москва : Наука, 1987. – 181 с.
9. Войтюк Д. Г. Физико-механический анализ автоколебательных режимов работы вибрационной рыхлительной лапы культиватора // Вісник ХНТУСГ. – 2012. – № 2(66). – С. 10 – 16.
10. Ловейкин В. С., Човнюк Ю. В., Костина О. Ю. Дослідження релаксаційних автоколивань з спрощеної характеристики тертя у скребкових конвеєрах при транспортуванні сипких матеріалів // Механізація сільськогосподарських виробництв. Вісник ХНТУСГ. – 2013. – Вип. 135. – С. 328 – 335.
11. Бурлака В. В., Ольшанський В. П., Малець О. М. До розрахунку релаксаційних автоколивань у скребкових конвеєрах // Физические и компьютерные технологии : 19 Международная научно-техническая конференция. Труды конференции. – Харьков : ФЭД, 2014. – С. 120 – 123.
12. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Наука, 1962. – 1100 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.

References (transliterated)

1. Andronov A. A., Vit A. A., Khaikin S. E. *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury Publ., 1959. 916 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh sistem* [Nonlinear dynamics of elastic systems]. Moscow-Izhevsk, Institute kompyuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
3. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
4. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
5. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 320 p.
7. Lazarev G. S. *Avtokolebaniya pri rezanii metallov* [Auto-oscillations during metal cutting]. Moscow, Vyshha shkola Publ., 1971. 244 p.
8. Kragel'skiy I. V., Gittis N. V. *Friktsionnyye avtokolebaniya* [Frictional self-oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 181 p.
9. Voytyuk D. G., Chovnyuk Yu. V., Gumenyuk Yu. O., Gutsol A. P. Fiziko-mekhanicheskyy analiz avtokolebatel'nykh rezhimov raboty vibratsionnoy rykhlytel'noy lapy kultivatora [Physico-mechanical analysis of self-oscillating modes of a vibrating cultivating point of a cultivator]. *Vibratsiyyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vseukrayins'kyi naukovy-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in Engineering and Technology. All-Ukrainian Scientific and Technical Journal]. 2012, no. 2(66), pp. 10–16.
10. Loveykin V. S., Chovnyuk Yu. V., Kostina O. Yu. Doslidzhennya relaksatsiynykh avtokolyvan' z sproshhenoyi kharakterystyky tertya u skrebkovykh konveyerakh pry transportuvanni sypanykh materialiv [Investigation of relaxation self-oscillations on the simplified characteristic of friction in scraper conveyors during transportation of bulk materials]. *Mekhanizatsiya sil's'kogospodars'kykh vyrobnytstv. Visnyk KHNTUSG* [Mechanization of agricultural productions, Bulletin of KhNTUSG]. 2013, no. 135, pp. 328–335.
11. Burlaka V. V., Ol'shans'kiy (Olshanskiy) V. P., Malets' O. M. Do rozrakhunku relaksatsiynykh avtokolyvan' u skrebkovykh konveyerakh [To the calculation of relaxation self-oscillations in scraper conveyors]. *Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 19 Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya. Trudy konferentsii* [Physical and computer technologies : 19th International Scientific and Technical Conference. Conference proceedings]. Kharkov, FED Publ., 2014. pp. 120–123 p.
12. Ol'shans'kiy (Olshanskiy) V. P., Tishchenko L. N., Ol'shans'kiy (Olshanskiy) S. V. *Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
13. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
14. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.

Надійшла (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Н. Л. ПАВЛОВА, С. П. ОНИЩЕНКО

КОНЦЕПЦИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ ПОРТФЕЛЯ ПРОЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

В данном исследовании представлена концепция моделирования оптимальных параметров проектов портфеля текущей деятельности проектно-ориентированных организаций, которая учитывает специфику рассматриваемой категории портфелей и является универсальной базой для создания математических моделей для конкретных отраслей. Концепция предполагает интегральное рассмотрение проектов в рамках офиса портфеля с детализацией их до конкретных работ, что позволяет осуществлять закрепление работ за поставщиками / исполнителями с учетом возможностей формирования системного эффекта – эффекта синергизма. Такой подход обеспечивает повышение эффективности результатов основной деятельности проектно-ориентированных организаций.

Ключевые слова: портфель, модель, синергизм, работа, сетевой график, параметры.

Н. Л. ПАВЛОВА, С. П. ОНИЩЕНКО

КОНЦЕПЦІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРОЄКТІВ ПОРТФЕЛЯ ПРОЄКТНО-ОРІЄНТОВАНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ

В даному дослідженні представлена концепція моделювання оптимальних параметрів проєктів портфеля поточної діяльності проектно-орієнтованих організацій, яка враховує специфіку даної категорії портфелів і є універсальною базою для створення математичних моделей для конкретних галузей. Концепція передбачає інтегральний розгляд проєктів в рамках офісу портфеля з деталізацією їх до конкретних робіт, що дозволяє здійснювати закріплення робіт за постачальниками / виконавцями з урахуванням можливостей формування системного ефекту – ефекту синергізму. Такий підхід забезпечує підвищення ефективності результатів основної діяльності проектно-орієнтованих організацій.

Ключові слова: портфель, модель, синергізм, робота, мережевий графік, параметри.

N. L. PAVLOVA, S. P. ONYSHCHENKO

THE CONCEPT OF MODELING THE OPTIMAL PARAMETERS OF THE PROJECTS OF THE PORTFOLIO OF THE PROJECT-ORIENTED ORGANIZATION

This study presents the concept of modeling the optimal parameters of projects in the portfolio related to the current activities of project-oriented organizations, which takes into account the specifics of the considered category of portfolios and forms a universal basis for creating mathematical models for the specific activities. The concept involves a comprehensive analysis of projects in the portfolio management office. Projects are detailed to the level of the specific works, which allows ones to assign work to suppliers / performers, taking into account the possibility of forming a system effect, known as a synergistic effect. The concept implements two levels of requirements, namely the project level and the portfolio as a whole. Such an approach provides an increase in the efficiency of the results of the main activities of project-oriented organizations.

Key words: portfolio, model, synergy, work, network diagram, parameters.

Введение. Специфика проектно-ориентированных организаций заключается в том, что их основная деятельность представляется в виде совокупности проектов [1], и при этом управление организацией осуществляется в соответствии с концепцией и на базе *методов управления проектами*. Такой подход к управлению организациями обеспечивает более гибкое распределение ресурсов; нацеленность на результат всего проекта, а не конкретной задачи; возможность быстрого реагирования на изменения во внешней среде даже временного характера и т.д., что в итоге приводит к повышению эффективности результатов деятельности организации. Проекты таких организаций имеют определенную специфику и формируют специфический портфель проектов, который отличается от портфелей проектов предприятий и организаций в классическом понимании данной категории, связанной со стратегиями развития.

Как и для классического портфеля проектов, оптимизация его *результата* или *ценности* за счет установления соответствующей системы параметров также является актуальной задачей и для *портфеля проектов проектно-ориентированной организации*. Отметим, что данный портфель соответствует проектному представлению основной деятельности, то есть речь идет не о развитии организации, а об ее *функционализации*.

Анализ публикаций и исследований. Функционирование проектно-ориентированных организаций является объектом многих современных исследований. Например, в [2] дана концепция ценностного подхода к управлению такими организациями. В [3 – 5] представлены методы управления ресурсами в проектно-ориентированной организации. Основной акцент – на анализе использования и выравнивании трудовых ресурсов. Тем не менее, предоставленные методы рассматривают проекты *агрегировано*, без детализации по работам. Хотя именно *работа* является функциональной единицей в проекте, и если для портфеля проектов развития это не имеет особого значения, то для проектов, соответствующих основной деятельности организаций, параметры, связанные с конкретными работами, представляют интерес с точки зрения их оптимизации.

Следует отметить, что наибольшее внимание в современных публикациях уделяется развитию, а не функционализации проектно-ориентированных организаций, и существующие модели оптимизации портфелей проектов (например, [6 – 12]) ориентированы исключительно на специфику портфелей развития. Тем не менее, от-

дельные предлагаемые идеи и подходы могут быть трансформированы и для рассматриваемой категории портфелей. Так, в [9 – 12] моделирование развития посредством программ и портфелей осуществлялось с выделением временных параметров, которые непосредственно влияют как на расходы, так и на экономические результаты по каждому проекту, что дает возможность их оптимизации.

В работе [13] проекты рассмотрены на уровне детализации по работам и предложен метод для оптимизации сроков программы путем расстановки работ проектов в рамках ее жизненного цикла, по сути – это одна из немногих публикаций, где совокупность проектов рассматривается с детализацией по работам, и оптимизация их параметров осуществляется интегрировано. Данная идея может быть развита в отношении портфеля проектов, соответствующих основной деятельности проектно-ориентированных организаций.

Постановка задачи. Выделение специфики работ проектов портфеля, соответствующего основной деятельности организаций, позволит установить источники для формирования определенного интегрального эффекта. Поэтому целью данного исследования является разработка *концепции оптимизации параметров портфеля проектов* при рассмотрении их на уровне работ.

Концепция оптимизации. Если в классическом портфеле проектов основное внимание уделяется соответствию стратегиям и финансовым ресурсам, то для портфелей текущей (основной деятельности) необходимо более детализированное рассмотрение имеющихся ресурсов, а также более детализированное рассмотрение самих проектов. Такая идея и будет положена в основу предлагаемого подхода.

Основная специфика проектов портфеля текущей деятельности:

1) в большинстве случаев они не могут быть отклонены для реализации (так как это основная деятельность), то есть отсутствует задача формирования состава портфеля, которая является центральной для портфелей проектов развития;

2) структуры данных проектов с точки зрения комплекса работ достаточно идентичны, как и формальное содержание данных работ.

Поясним второе утверждение более детально. В качестве примера рассмотрим транспортную компанию, основная деятельность которой – организация доставки грузов из точки A в точку B . Данный процесс состоит из множества операций, которые выполняются целым комплексом участников (автоперевозчики, морские перевозчики, стивидорные компании, таможенные брокеры и т.п.). Принципиальная схема процесса организации доставки груза имеет одну структуру (которая может быть представлена в виде сетевого графика). Уникальность услуги по организации доставки, что делает возможным рассмотрение ее в качестве проекта, дает, прежде всего, уникальные требования к доставке и уникальные условия реализации доставки. В качестве руководителя проекта выступает менеджер транспортной компании, подрядчиками – все участники процесса доставки. Множество реализуемых услуг по организации доставки груза формирует портфель текущей деятельности.

Спецификой таких проектов является то, что большая часть из них связана с конкретным множеством *подрядчиков* для каждой работы. Например, морская перевозка в определенном регионе осуществляется определенным набором компаний, точно также как и таможенное оформление в конкретном пункте реализуется определенным множеством соответствующих компаний. И, привлекая одних и тех же подрядчиков для выполнения *типовых* работ, транспортная компания может получить определенный эффект в виде скидок к стоимости, что позволяет либо сделать услугу для клиентов более дешевой, либо самой получить дополнительную выгоду. Таким образом, появляется возможность реализации на практике *эффекта масштаба*. Такой подход, в частности, был реализован для выбора схемы доставки грузов в [14] и предусматривал именно физическое перемещение груза, а не комплекс работ по организации его доставки. Отметим, что портфель проектов текущей деятельности организации является достаточно гибкой структурой, что объясняется относительно небольшой продолжительностью проектов (по сравнению с проектами развития), поэтому *фиксированный* портфель имеет смысл только для рассматриваемого промежутка времени. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что такие временные границы заданы и рассматриваемый портфель соответствует им.

Концептуальная модель интегрального рассмотрения работ проектов текущей деятельности проектно-ориентированной организации представлена на рис. 1.

Итак, пусть в портфеле проектов текущей деятельности n проектов. Каждый проект представляется комплексом работ, технологически увязанных в определенную структуру *сетевой модели* (графика). Таким образом, декомпозиция структуры проектов до уровня работ приводит к заданию набора:

$$\{A^i, G^i\},$$

где $A^i = \{A_j^i\}$, $j = \overline{1, m_i}$ – множество работ по проекту; m_i – их общее количество; G^i – это ориентированный граф, который описывает технологическую последовательность работ.

Пусть каждому проекту присуща некая количественная характеристика q^i , $i = \overline{1, n}$ – количество единиц продукции, например, или, в продолжение рассуждений о транспортной компании, q^i – это количество груза (количество контейнеров с грузом).

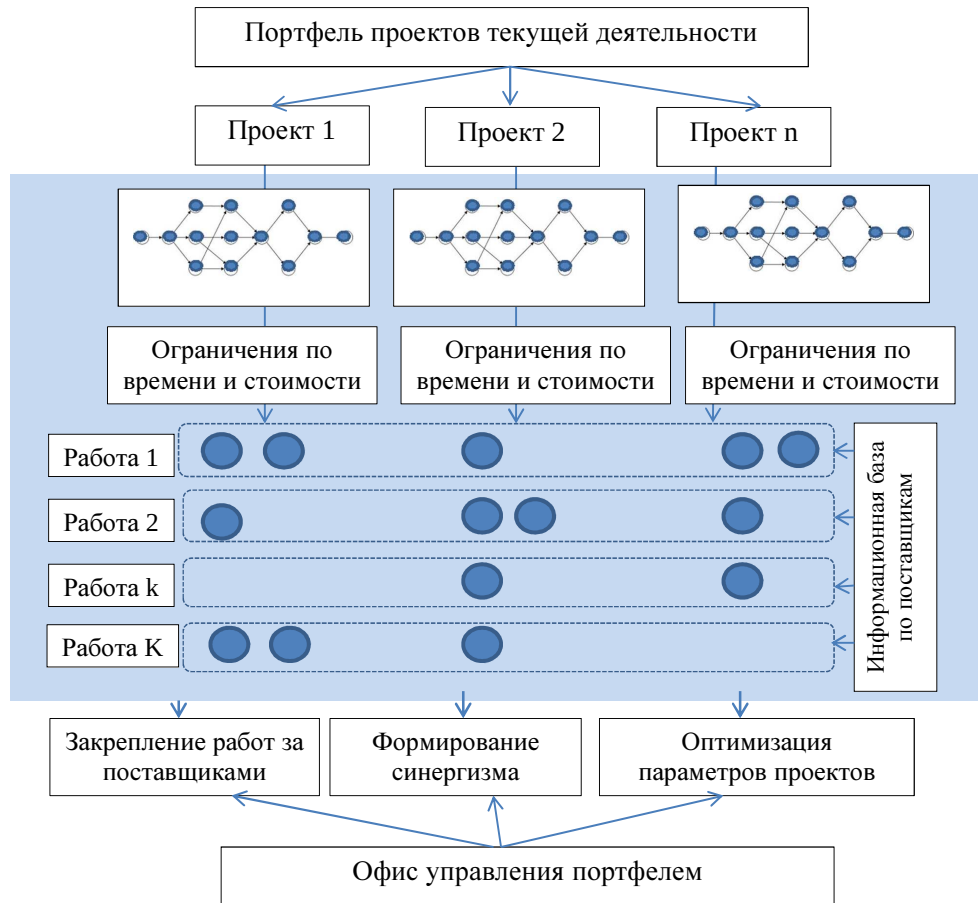


Рис. 1 – Концептуальная модель интегрального рассмотрения проектов портфеля.

В рамках рассматриваемой совокупности проектов могут быть выделены подмножества работ одного типа (например, морская перевозка или таможенное оформление, если речь идет о транспортной компании).

И вся совокупность работ по портфелю $\bigcup_{i=1}^n A^i$ может быть перегруппирована следующим образом:

$$\bigcup_{i=1}^n A^i = \bigcup_{k=1}^K A_k \cup B, \quad (1)$$

где $A_k = \{A_k^i\}$, $i = \overline{1, n}$ – множество работ k -го типа; A_k^i – работа i -го проекта, соответствующая k -ому типу работ (типовых); $\bigcup_{k=1}^K A_k$ – совокупность работ всех проектов, которые относятся к типовым; K – общее количество типовых работ; B – множество работ, которые не относятся к типовым и свойственны отдельным проектам.

Отметим, что практически реализация такой перегруппировки работ возможна при наличии единой информационной базы (офиса управления портфелем).

Каждый тип работ $k = \overline{1, K}$ связан с определенным множеством поставщиков (подрядчиков), таким образом, для каждого $k = \overline{1, K}$ существует множество $B_k = \{B_k^l\}$, $l = \overline{1, L_k}$, $k = \overline{1, K}$, элементы которого B_k^l , $l = \overline{1, L_k}$ соответствуют характеристикам данной работы у данного поставщика. В общем случае B_k^l – векторная величина, составляющие которой характеризуют, например, стоимостные, временные и качественные показатели. В качестве минимального набора B_k^l можно использовать следующий:

$$B_k^l = \langle T_k^l, R_k^l(Q_k) \rangle, \quad (2)$$

где T_k^l , $R_k^l(Q_k)$ – соответственно, время и стоимость выполнения данной работы l -ым поставщиком. Отметим,

что стоимость естественным образом зависит от объема работы Q_k , который формируется из объемов данной работы по всем проектам, то есть:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n q_k^i, \quad k = \overline{1, K}, \quad (3)$$

где q_k^i – объем k -ой работы по i -ому проекту. Как правило, для проектов текущей деятельности организаций $q_k^i = q^i, k = \overline{1, K}$, то есть объем по работам соответствует *объему* проекта.

За счет эффекта масштаба в рамках стоимостей выполненных работ формируется *системный эффект – эффект синергизма* ([10, 15]) как на уровне отдельной работы:

$$R_k^l(Q_k) < \sum_{i=1}^n R(q_k^i), \quad k = \overline{1, K}, \quad (4)$$

так и в рамках всего портфеля:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K R^*(q_k^i) > \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} R_k^l(Q_k), \quad (5)$$

где

$$R^*(q_k^i) = \min_{l=1, L_k} \{R_l^k(q_k^i)\}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (6)$$

Таким образом, как правило, даже минимальные отдельные стоимости работ по проекту для соответствующих объемов не обеспечивают тот уровень затрат, который возможен при интегральном рассмотрении всех работ по всем проектам.

Такой системный эффект S составляет:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K R^*(q_k^i) - \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} R_k^l(Q_k). \quad (7)$$

Перспективы дальнейших исследований. Представленная концепция моделирования оптимальных параметров проектов портфеля текущей деятельности проектно-ориентированных организаций является методологической основой для разработки соответствующих математических моделей с максимальным учетом специфики деятельности организаций. Таким образом, идентификация системы параметров проектов и ограничений с учетом отраслевой специфики обеспечит максимальную практическую значимость моделей.

Выводы. В данном исследовании представлена концепция оптимизации параметров проектов портфеля, которая учитывает специфику рассматриваемой категории портфелей и является универсальной базой для создания отраслевых математических моделей.

Концепция предполагает интегральное рассмотрение проектов в рамках офиса портфеля с детализацией их до конкретных работ, что позволяет осуществлять закрепление работ за поставщиками / исполнителями с учетом возможностей формирования системного эффекта – эффекта синергизма. Такой подход обеспечивает повышение эффективности результатов основной деятельности проектно-ориентированных организаций.

Теоретическое значение полученных результатов состоит в формировании определенного вклада в развитие инструментального обеспечения управления проектами.

Список литературы

1. Bondar A., Bushuyev S., Onyshchenko S., Hiroshi H. Entropy Paradigm of Project-Oriented Organizations Management // Proceedings of the 1st International Workshop IT Project Management (ITPM 2020) Volume 1. Lviv, Ukraine, February 18 – 20, 2020, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org). – 2020. – P. 233 – 243. – Режим доступа : <http://ceur-ws.org/Vol-2565/paper20.pdf>. – Дата звертання : 11.01.20.
2. Бушуйев С. Д., Бушуйева Н. С. Механизмы формирования ценности в деятельности проектно-управляемых организаций // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №1,2 (43). – С. 4 – 9. DOI : doi.org/10.15587/2312-8372.2016.76138.
3. Катаев Д. С. Матричное управление трудовыми ресурсами промышленных предприятий // Управление проектами и развитие производства. – 2014. – №1 (49). – С. 5 – 63.
4. Онищенко С. П., Логинов О. В. Организация распределения заданий по подразделениям проектно-ориентированного ВУЗа // Технологический аудит и резервы производства. – 2016. – № 4(3). – С. 61 – 67. DOI : doi.org/10.15587/2312-8372.2016.76138.
5. Сгорченкова Н. Ю. Інтеграція матричних технологій і метода критичних ланцюгів і управління ресурсами портфелів проектів і програм // Управління розвитком складних систем. – К. – 2012. – №7. – С. 30 – 35.
6. Кононенко И. В., Букреева К. С. Метод формирования портфеля проектов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 6/2 (42). – С. 15 – 19.
7. Кононенко И. В., Букреева К. С. Модель и метод оптимизации портфелей проектов предприятия для планового периода // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – № 1/2(43). – С. 9 – 11.
8. Аньшин В. М., Демкин И. В., Никонов И. М., Царьков И. Н. Модели управления портфелем проектов в условиях неопределенности – М. : МАТИ. – 2007. – 117 с.

9. Onyshchenko S., Bondar A., Andrievska V., Sudnyk N., Lohinov O. Constructing and exploring the model to form the road map of enterprise development // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2019. – Vol. 5, No 3 (101). – pp. 33 – 42. DOI : doi.org/10.15587/1729-4061.2019.179185.
10. Onyshchenko S., Leontieva A. Modeling of the optimal composition of the enterprise technical development program // *Technology audit and production reserves*. – 2018. – No. 5(2). – pp. 36 – 41. DOI : doi.org/10.15587/2312-8372.2018.146463.
11. Бондарь А. В., Онищенко С. П. Оптимизация временных параметров проекта // *Управління розвитком складних систем*. – 2019. – № 39. – С. 11 – 18. DOI : doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.11340629.V1.
12. Онищенко С. П., Леонтьева А. И. Практические аспекты оптимизации состава программы развития в условиях "нечеткости" условий и результатов реализации проектов // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 79 – 85.
13. Онищенко С. П., Арабаджи Е. С. Разработка инструментов управления временем в рамках планирования реализации программы развития предприятия // *Технологический аудит и резервы производства*. – 2016. – № 2 (3). – С. 7 – 12. DOI : doi.org/10.15587/2312-8372.2016.66674.
14. Смирковская В. Ю. Моделирование процесса формирования схем доставки грузов // *Вісник ОНМУ : Зб. наук. праць*. – Одеса : ОНМУ, 2007. – № (21). – С. 155 – 171.
15. Онищенко С. П., Арабаджи Е. С. Структура, цель, продукт и ценность программ развития предприятий // *Вісник Одеського національного морського університету*. – 2011. – Вип. 33. – С. 175 – 186.

References (transliterated)

1. Bondar A., Bushuyev S., Onyshchenko S., Hiroshi H. Entropy Paradigm of Project-Oriented Organizations Management. *Proceedings of the 1st International Workshop IT Project Management (ITPM 2020) Volume 1. Lviv, Ukraine, February 18-20, 2020, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org)*. 2020, p. 233–243. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2565/paper20.pdf> (accessed 11.01.20).
2. Bushuev S. D., Bushueva N. S. Mekhanizmy formirovaniya tsennosti v deyatel'nosti proektno-upravlyaemykh organizatsii [Mechanisms for the formation of values in the activities of project-driven organizations]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2010, no. 1,2 (43), pp. 4–9. DOI: doi.org/10.15587/2312-8372.2016.76138.
3. Kataev D. S. Matrichnoe upravleniye trudovymi resursami promyshlennyykh predpriyatiy [Matrix labor management of industrial enterprises]. *Upravlenie proektami i razvitie proizvodstva* [Project management and production development]. 2014, no. 1 (49), pp. 55–63.
4. Onyshchenko S. P., Loginov O. V. Organizatsiya raspredeleniya zadaniy po podrazdeleniyam proektno-orientirovannogo VUZa [Organization of assignment of tasks to units of a project-oriented university]. *Tekhnologicheskii audit i rezervy proizvodstva* [Process audit and production reserves]. 2016, no. 4(3), pp. 61–67. DOI: doi.org/10.15587/2312-8372.2016.76138.
5. Yegorchenkova N. Yu. Integratsiya matrychnykh tekhnologiy i metoda krytychnykh lantsyugiv i upravlinnya resursamy portfeliv proektiv i program [Integration of matrix technologies and method of critical chains and project and program portfolio resource management]. *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system* [Complex system development management]. Kyiv, 2012, no. 7, pp. 30–35.
6. Kononenko I. V., Bukreeva K. S. Metod formirovaniya portfelya proektiv [Project Portfolio Building Method]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2009, no. 6/2 (42), pp. 15–19.
7. Kononenko I. V., Bukreeva K. S. Model' i metod optimizatsii portfeliev proektiv predpriyatiya dlya planovogo perioda [Model and method for optimizing enterprise project portfolios for the planning period]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2010, no. 1/2(43), pp. 9–11.
8. An'shin V. M., Demkin I. V., Nikonov I. M., Tsar'kov I. N. Modeli upravleniya portfelem proektiv v usloviyakh neopredelennosti [Project Portfolio Management Models Under Uncertainty]. Moscow, MATI Publ., 2007. 117 p.
9. Onyshchenko S., Bondar A., Andrievska V., Sudnyk N., Lohinov O. Constructing and exploring the model to form the road map of enterprise development. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, vol. 5, no. 3 (101), pp. 33–42. DOI: doi.org/10.15587/1729-4061.2019.179185.
10. Onyshchenko S., Leontieva A. Modeling of the optimal composition of the enterprise technical development program. *Technology audit and production reserves*. 2018, no. 5(2), pp. 36–41. DOI: doi.org/10.15587/2312-8372.2018.146463.
11. Bondar A. V., Onyshchenko S. P. Optimizatsiya vremennykh parametrov proekta [Optimization of project time parameters]. *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system* [Complex system development management]. 2019, no. 39, pp. 11–18. DOI : doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.11340629.V1.
12. Onyshchenko S. P., Leont'eva A. I. Prakticheskie aspekty optimizatsii sostava programmy razvitiya v usloviyakh "nechetkosti" usloviy i rezul'tatov realizatsii proektiv [Practical aspects of development program optimization under "fuzzy" conditions and project result]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnicheskogo universytetu "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 27 (1303), pp. 79–85.
13. Onyshchenko S. P., Arabadzhii E. S. Razrabotka instrumentov upravleniya vremenem v ramkakh planirovaniya realizatsii programmy razvitiya predpriyatiya [Development of time management tools as part of planning the implementation of an enterprise development program]. *Tekhnologicheskii audit i rezervy proizvodstva* [Process audit and production reserves]. 2016, no. 2 (3), pp. 7–12. DOI: doi.org/10.15587/2312-8372.2016.66674.
14. Smrkovskaya V. Yu. Modelirovaniye protsessa formirovaniya skhem dostavki грузов [Modeling the process of formation of cargo delivery schemes]. *Visnyk ONMU : Zb. nauk. prats* [Bulletin of the Odessa National Marine University: collection of scientific papers]. Odessa, ONMU Publ., 2007, no. (21), pp. 155–171.
15. Onyshchenko S. P., Arabadzhii E. S. Struktura, tsel', produkt i tsennost' programm razvitiya predpriyatiy [The structure, purpose, product and value of enterprise development programs]. *Visnyk Odes'kogo natsional'nogo morskogo universytetu* [Bulletin of the Odessa National Marine University: collection of scientific papers]. 2011, no. 33, pp. 175–186.

Поступила (received) 19.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Павлова Наталія Леонідівна (Павлова Наталья Леонидовна, Pavlova Natallia Leonidivna) – старший викладач, Одеський національний морський університет, м. Одеса; тел.: (050) 989-68-21; e-mail: pavlova_1983@ukr.net.

Онищенко Світлана Петрівна (Онищенко Светлана Петровна, Onyshchenko Svitlana Petrivna) – доктор економічних наук, професор, директор навчально-наукового інституту морського бізнесу Одеського національного морського університету, м. Одеса; тел.: (067) 557-76-46; e-mail: onyshchenko@gmail.com.

T. S. POLYANSKAYA, O. O. NABOKA

NUMERICAL SOLUTION OF A SYSTEM OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH HILBERT AND CAUCHY KERNELS

In the paper a specific system of first kind singular integral equations with the Hilbert and Cauchy kernels arising when solving some problems of electrostatics and electrodynamics is studied. The method of discrete singularities is applied for constructing its discrete mathematical model, which is a system of n linear algebraic equations. Under the additional smoothness assumptions on the right-hand parts of the equations of the initial system and regularity assumptions on the kernels of the integrals in them the obtained system of linear algebraic equations is proved to admit a unique solution for n sufficiently large. The rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the system of singular integral equations is estimated.

Key words: system of singular integral equations, method of discrete singularities, Hilbert kernel, Cauchy kernel, discrete model.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, О. О. НАБОКА

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЯДРАМИ КОШІ І ГІЛБЕРТА

В роботі вивчається система сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядрами Коші і Гільберта спеціального виду, що виникає, зокрема, при розв'язанні задач електростатики та електродинаміки. На основі методу дискретних особливостей побудовано дискретну математичну модель цієї системи, що має вигляд системи n лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено, що за додаткових умов гладкості на праві частини та регулярні ядра вихідних рівнянь отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має при достатньо великих n єдиний розв'язок. Дана оцінка швидкості збіжності розв'язку дискретної задачі до точного розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: система сингулярних інтегральних рівнянь, метод дискретних особливостей, ядро Гільберта, ядро Коші, дискретна модель.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, Е. А. НАБОКА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРАМИ КОШИ И ГИЛЬБЕРТА

В работе изучается система сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядрами Коши и Гильберта специального вида, возникающая, в частности, при решении задач электростатики и электродинамики. На основе метода дискретных особенностей построена дискретная математическая модель этой системы, которая имеет вид системы n линейных алгебраических уравнений. Доказано, что если правые части уравнений исходной системы удовлетворяют дополнительным условиям гладкости, а ядра являются регулярными, полученная система линейных алгебраических уравнений имеет при достаточно больших n единственное решение. Дана оценка скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: система сингулярных интегральных уравнений, метод дискретных особенностей, ядро Гильберта, ядро Коши, дискретная модель.

Introduction. The method of discrete singularities is an efficient method for solving singular integral equations as well as systems of such equations arising in applications, for instance, when solving the applied problems of aerohydrodynamics, electrodynamics, elasticity theory, problems of mathematical physics [1, 2]. A detailed study of numerical solution of a single singular integral equation with the Hilbert kernel is presented in [3]. In [4] the method of discrete singularities is applied for solving the problem of diffraction on a grate which gives rise to a singular integral equation with the Cauchy kernel.

In the present paper a specific system of the first kind singular integral equations with Hilbert and Cauchy kernels (for all indices) is studied. The necessity in substantiating the method of discrete singularities for a system of this type arises in particular when solving problems of electrostatics and electrodynamics [5, 6].

Setting the problem for a system of singular integral equations (SIE). We study the following system of SIE:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\tau) \rho_{\lambda_i}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(t, \tau) u_k(\tau) \rho_{\lambda_k}(\tau) d\tau + \\ & \quad + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(t, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi = f_i(t), \quad |t| < 1, \quad i = 1, \dots, m_1; \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u_i(\varphi) d\varphi + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(\theta, \tau) u_k(\tau) \rho_{\lambda_k}(\tau) d\tau + \\ & \quad + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(\theta, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi = f_i(\theta), \quad i = m_1 + 1, \dots, m, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

for the unknown functions $u_1(\tau), \dots, u_{m_1}(\tau), u_{m_1+1}(\varphi), \dots, u_m(\varphi)$. The first integrals in the left-hand parts of the equations in (1) are improper and are considered in the sense of their *Cauchy principal value*.

In (1) λ_k , $k=1, \dots, m_1$ are the indices of the solution $y_k(\tau) = u_k(\tau)\rho_{\lambda_k}(\tau)$, such that $\lambda_k = -1$ for $1 \leq k \leq l_1$, $\lambda_k = 0$ for $l_1+1 \leq k \leq l_2$, $\lambda_k = 1$ for $l_2+1 \leq k \leq m_1$; the corresponding weights are defined by the formulae:

$$\rho_{-1}(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}, \quad \rho_0(\tau) = \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}, \quad \rho_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}; \quad (2)$$

$f_i(\theta)$, $Q_{ik}(t, \varphi)$, $Q_{ik}(\theta, \tau)$, $Q_{ik}(\theta, \varphi)$ are given functions 2π -periodic in θ and φ . We assume that $f_i(t) \in C_{[-1,1]}^{\mu, \gamma}$ for $i=1, \dots, m_1$ and $f_i(\theta) \in C^{\mu, \gamma}$ for $i=m_1+1, \dots, m$ and the kernels Q_{ik} ($i, k=1, \dots, m$) possess the same properties in each variable uniformly with respect to another variable. The notation $C^{\mu, \gamma}$ stands for the class of μ times continuously differentiable functions which μ -th derivatives satisfy the *Holder condition* with the exponent γ ($0 < \gamma \leq 1$).

Let $\vec{u} = (u_i)_{i=1}^m$ with $u_i = u_i(\tau)$ for $1 \leq i \leq m_1$, and $u_i = u_i(\varphi)$ for $m_1+1 \leq i \leq m$. Consider the following operators:

$$(A_\lambda u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)\rho_\lambda(\tau)}{\tau-t} d\tau; \quad (\Gamma u)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi-\theta}{2} u(\varphi) d\varphi;$$

$$\hat{A}\vec{u} = \vec{w} = (w_k)_{k=1}^m, \text{ where } w_k(t) = (A_{\lambda_k} u_k)(t) \text{ for } 1 \leq k \leq m_1, \text{ and } w_k(\theta) = (\Gamma u_k)(\theta) \text{ for } m_1+1 \leq k \leq m;$$

$$\hat{Q}\vec{u} = \left(\sum_{k=1}^m Q_{ik} u_k \right)_{i=1}^m \text{ with } (Q_{ik} u_k)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ik}(\xi, \tau) u_k(\tau) \rho_{\lambda_k}(\tau) d\tau \text{ for } 1 \leq k \leq m_1, \text{ and}$$

$$(Q_{ik} u_k)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ik}(\xi, \varphi) u_k(\varphi) d\varphi \text{ for } m_1+1 \leq k \leq m.$$

We also introduce the vector function $\vec{f} = (f_i)_{i=1}^m$, where $f_i = f_i(\xi)$ for $1 \leq i \leq m$. Here and below $\xi = t$ for $1 \leq i \leq m_1$, and $\xi = \theta$ for $m_1+1 \leq i \leq m$.

Using the operator notations given above system (1) is reduced to the form:

$$(\hat{A} + \hat{Q})\vec{u} = \vec{f}. \quad (3)$$

System (3), and, hence, system (1), is assumed to have a unique solution, which satisfies the following auxiliary conditions:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u_k(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, & k = l_2+1, \dots, m_1; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(\varphi) d\varphi = 0, & k = m_1+1, \dots, m. \end{cases} \quad (4)$$

Moreover, for the solutions to system (1) the following conditions need to hold, which are in themselves the necessary conditions of the system solvability:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[f_i(t) - \sum_{k=1}^m (Q_{ik} u_k)(t) \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, & i = 1, \dots, l_1; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f_i(\theta) - \sum_{k=1}^m (Q_{ik} u_k)(\theta) \right] d\theta = 0, & i = m_1+1, \dots, m. \end{cases} \quad (5)$$

In the physical applications the functions $f_i(\xi)$, $Q_{ik}(\xi, \tau)$ and $Q_{ik}(\xi, \varphi)$ are such that for all values of k and any ξ the following holds:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_i(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 Q_{ik}(t, \xi) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \equiv 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq m_1; \\ \int_0^{2\pi} f_i(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} Q_{ik}(\theta, \xi) d\theta \equiv 0 \quad \text{for } m_1+1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (6)$$

Conditions (6) then imply that (5) holds for any vector functions $\vec{u} = (u_i)_{i=1}^m$ and does not provide any additional

limitations on the class of solutions to (1).

Discretization of the system of SIE. Before proceeding to discretizing system (1) we introduce interpolation polynomials we use throughout the paper.

Let $\{q_n^{(\lambda,1)}(t)\}_{n=0}^\infty$ be a system of polynomials orthogonal in $L_2[-1,1]$ with the weight $\rho_\lambda(t)$, and let $\{t_r^{(\lambda,n)}\}_{r=1}^n$ be the roots of the polynomial $q_n^{(\lambda,1)}(t)$. As it is shown in [7] for $\rho_\lambda(t)$ given by (2) the polynomials $q_{n-\lambda}^{(\lambda,2)}(t) = (A_\lambda q_n^{(\lambda,1)})(t)$ are orthogonal in $L_2[-1,1]$ with the weight $\rho_\lambda^{-1}(t)$. Denote by $\{t_{op}^{(\lambda,n)}\}_{p=1}^{n-\lambda}$ the roots of $q_{n-\lambda}^{(\lambda,2)}(t)$.

Below we use the following system of polynomials:

$$\begin{aligned} q_n^{(1,1)}(t) &= T_n(t), \quad q_{n-1}^{(1,2)}(t) = U_{n-1}(t), \quad \{t_r^{(1,n)}\}_{r=1}^n = \left\{ \cos \frac{2r-1}{2n} \pi \right\}_{r=1}^n, \quad \{t_{op}^{(1,n)}\}_{p=1}^{n-1} = \left\{ \cos \frac{p\pi}{n} \right\}_{p=1}^{n-1}; \\ q_n^{(0,1)}(t) &= \frac{T_{n+1}(t) - T_n(t)}{t-1}, \quad q_n^{(0,2)}(t) = -U_n(t) + U_{n-1}(t), \quad \{t_r^{(0,n)}\}_{r=1}^n = \left\{ \cos \frac{2r\pi}{2n+1} \right\}_{r=1}^n, \quad \{t_{op}^{(0,n)}\}_{p=1}^n = \left\{ \cos \frac{2p-1}{2n+1} \pi \right\}_{p=1}^n; \\ q_n^{(-1,1)}(t) &= U_n(t), \quad q_{n+1}^{(-1,2)}(t) = -T_{n+1}(t), \quad \{t_r^{(-1,n)}\}_{r=1}^n = \left\{ \cos \frac{r\pi}{n+1} \right\}_{r=1}^n, \quad \{t_{op}^{(-1,n)}\}_{p=1}^{n+1} = \left\{ \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi \right\}_{p=1}^{n+1}, \end{aligned}$$

where $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $U_n(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)}$ are the Chebyshev polynomials of the first and second kind respectively.

Let $(L_n^{(\lambda,1)}v)(t)$ be the Lagrange interpolation polynomial for the function $v(t)$ with the nodes $\{t_r^{(\lambda,n)}\}_{r=1}^n$, and let $(L_{n-\lambda}^{(\lambda,2)}v)(t)$ be its Lagrange interpolation polynomial with the nodes $\{t_{op}^{(\lambda,n)}\}_{p=1}^{n-\lambda}$.

We introduce also *trigonometric interpolation polynomials* for the function $v(t)$. Consider a unit circle centered at the origin. Assume that it is separated into $2n+1$ equal arcs by the points which angular coordinates are $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=0}^{2n}$. Denote $\{\varphi_{oj}^{(n)}\}_{j=0}^{2n}$ the angular coordinates of the centers of the arcs $\varphi_j^{(n)} \varphi_{j+1}^{(n)}$, $j = 0, \dots, 2n$ ($\varphi_{2n+1}^{(n)} = \varphi_0^{(n)}$). Let $(P_n^{(1)}v)(\varphi)$ be the trigonometric interpolation polynomial for the function $v(t)$ with the nodes $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=0}^{2n}$, whereas $(P_n^{(2)}v)(\varphi)$ be the trigonometric interpolation polynomial for this function with the nodes $\{\varphi_{oj}^{(n)}\}_{j=0}^{2n}$.

Below we use the function $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

Discretization of system of SIE (1) is carried out by the method of discrete singularities. The approximate solution $\bar{u}_{\bar{n}} = (u_{kn_k})_{k=1}^m$ ($\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$) to system (1), where $u_{kn_k}(\tau) = (L_{n_k}^{(\lambda_k,1)}u_k)(\tau)$ for $1 \leq k \leq m_1$, $u_{kn_k}(\varphi) = (P_{n_k}^{(1)}u_k)(\varphi)$ for $m_1 + 1 \leq k \leq m$, is found from the following system of SIE:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{in_i}(\tau) \rho_{\lambda_i}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ikn_i n_k}(t, \tau) u_{kn_k}(\tau) \rho_{\lambda_k}(\tau) d\tau + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ikn_i n_k}(t, \varphi) u_{kn_k}(\varphi) d\varphi + \\ & \quad + \eta(-\lambda_i) \beta_{i\bar{n}} = (L_{n_i-\lambda_i}^{(\lambda_i,2)} f_i)(t), \quad i = 1, \dots, m_1; \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u_{in_i}(\varphi) d\varphi + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ikn_i n_k}(\theta, \tau) u_{kn_k}(\tau) \rho_{\lambda_k}(\tau) d\tau + \sum_{k=m_1+1}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ikn_i n_k}(\theta, \varphi) u_{kn_k}(\varphi) d\varphi + \\ & \quad + \beta_{i\bar{n}} = (P_{n_i}^{(2)} f_i)(\theta), \quad i = m_1 + 1, \dots, m, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

supplemented by the conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u_{kn_k}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0, \quad k = l_2 + 1, \dots, m_1; \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{kn_k}(\varphi) d\varphi = 0, \quad k = m_1 + 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (8)$$

In (7) $\beta_{i\bar{n}}$ are the auxiliary regularization variables and the notation $Q_{ikn_in_k}(\cdot, \cdot)$ stand for:

$$\begin{aligned} Q_{ikn_in_k}(t, \tau) &= \left(L_{n_i - \lambda_i, t}^{(\lambda_i, 2)} L_{n_k, \tau}^{(\lambda_k, 1)} Q_{ik} \right)(t, \tau), \quad 1 \leq i, k \leq m_1; \\ Q_{ikn_in_k}(t, \varphi) &= \left(L_{n_i - \lambda_i, t}^{(\lambda_i, 2)} P_{n_k, \varphi}^{(1)} Q_{ik} \right)(t, \varphi), \quad 1 \leq i \leq m_1, \quad m_1 + 1 \leq k \leq m; \\ Q_{ikn_in_k}(\theta, \tau) &= \left(P_{n_i, \theta}^{(2)} L_{n_k, \tau}^{(\lambda_k, 1)} Q_{ik} \right)(\theta, \tau), \quad m_1 + 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq m_1; \\ Q_{ikn_in_k}(\theta, \varphi) &= \left(P_{n_i, \theta}^{(2)} P_{n_k, \varphi}^{(1)} Q_{ik} \right)(\theta, \tau), \quad m_1 + 1 \leq i, k \leq m. \end{aligned}$$

Let us discuss in some detail the essence of the regularization variables.

A straightforward replacement of all the functions in (1) by their interpolation polynomials results in a system of SIE with respect to $\vec{u}_{\bar{n}}$ for which, as a rule, the necessary conditions of solvability do not hold. This problem is resolved by introducing the regularization functions:

$$\begin{aligned} \text{for } 1 \leq i \leq m_1, \quad \bar{f}_{i\bar{n}}^R(t) &= \left(L_{n_i - \lambda_i}^{(\lambda_i, 2)} f_i \right)(t) - \frac{\eta(-\lambda_i)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(L_{n_i - \lambda_i}^{(\lambda_i, 2)} f_i \right)(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \\ Q_{ikn_in_k}^R(t, \zeta) &= Q_{ikn_in_k}(t, \zeta) - \frac{\eta(-\lambda_i)}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ikn_in_k}(t, \zeta) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt; \\ \text{for } m_1 + 1 \leq i \leq m, \quad \bar{f}_{i\bar{n}}^R(\theta) &= \left(P_{n_i}^{(2)} f_i \right)(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_{n_i}^{(2)} f_i \right)(\theta) d\theta, \\ Q_{ikn_in_k}^R(\theta, \zeta) &= Q_{ikn_in_k}(\theta, \zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ikn_in_k}(\theta, \zeta) d\theta. \end{aligned}$$

$$\text{Denote } \vec{f}_{\bar{n}} = \left(f_{i\bar{n}} \right)_{i=1}^m, \quad \hat{Q}_{\bar{n}} \vec{u} = \left(\sum_{k=1}^m Q_{ikn_in_k} u_{kn_k} \right)_{i=1}^m, \quad \bar{f}_{\bar{n}}^R = \left(\bar{f}_{i\bar{n}}^R \right)_{i=1}^m, \quad \hat{Q}_{\bar{n}}^R \vec{u} = \left(\sum_{k=1}^m Q_{ikn_in_k}^R u_{kn_k} \right)_{i=1}^m.$$

Then using these notations system (7) is readily reduced to the following operator equation:

$$(\hat{A} + \hat{Q}_{\bar{n}}^R) \vec{u}_{\bar{n}} = \vec{f}_{\bar{n}}^R, \quad (9)$$

supplemented by conditions (8).

Apparently, the regularization functions introduced above satisfy conditions (6). Hence, the necessary condition of solvability holds for equation (9).

Equation (9) can also be written in the form:

$$(\hat{A} + \hat{Q}_{\bar{n}}) \vec{u}_{\bar{n}} + \vec{\beta}_{\bar{n}} = \vec{f}_{\bar{n}}, \quad (10)$$

with $\vec{\beta}_{\bar{n}} = \left(\beta_{i\bar{n}} \right)_{i=1}^m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{i\bar{n}} = \frac{\eta(-\lambda_i)}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\left(L_{n_i - \lambda_i}^{(\lambda_i, 2)} f_i \right)(t) - \sum_{k=1}^m \left(Q_{ikn_in_k} u_{kn_k} \right)(t) \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad i = 1, \dots, m_1; \\ \beta_{i\bar{n}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(P_{n_i}^{(2)} f_i \right)(\theta) - \sum_{k=1}^m \left(Q_{ikn_in_k} u_{kn_k} \right)(\theta) \right] d\theta, \quad i = m_1 + 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

The equalities defining $\beta_{i\bar{n}}$ are in fact the quadratures of the integrals found in the left-hand parts of conditions (5).

Now we can conclude that problem (7), (8) is equivalent to problems (9), (8) and (10), (8).

Consider the equations of system (7), (8) with the numbers $i = 1, \dots, m_1$ at the points $\left\{ t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)} \right\}_{p_i=1}^{n_i - \lambda_i}$, and those with

the numbers $i = m_1 + 1, \dots, m$ at the points $\{\varphi_{oj_i}^{(n_i)}\}_{j_i=0}^{2n_i}$ and compute the integrals using the quadrature formulae [8, 9].

Taking into account the equality of the values of a functions and its interpolation polynomial at the nodes of interpolation we arrive at a linear system of algebraic equations (SLAE) for the unknown functions $u_i(t_{r_i}^{(\lambda_i, n_i)}), 1 \leq r_i \leq n_i, 1 \leq i \leq m_1; u_i(\varphi_{r_i}^{(n_i)}), 0 \leq r_i \leq 2n_i, m_1 + 1 \leq i \leq m; \beta_{i\bar{n}}, 1 \leq i \leq l_1, m_1 + 1 \leq i \leq m$, equivalent to system (7), (8). The SLAE obtained approximates system of SIE (1) supplemented by auxiliary conditions (4):

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{r_i=1}^{n_i} a_{r_i}^{(\lambda_i, n_i)} \left[\frac{1}{t_{r_i}^{(\lambda_i, n_i)} - t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)}} + Q_{ii}(t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)}, t_{r_i}^{(\lambda_i, n_i)}) \right] u_i(t_{r_i}^{(\lambda_i, n_i)}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m_1} \sum_{r_k=1}^{n_k} a_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)} Q_{ik}(t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)}, t_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}) u_k(t_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}) + \\ & + \sum_{k=m_1+1}^m \sum_{r_k=0}^{2n_k} \frac{1}{2n_k+1} Q_{ik}(t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)}, \varphi_{r_k}^{(n_k)}) u_k(\varphi_{r_k}^{(n_k)}) + \eta(-\lambda_i) \beta_{i\bar{n}} = f_i(t_{op_i}^{(\lambda_i, n_i)}), \quad p_i = 1, \dots, n_i - \lambda_i; \quad i = 1, \dots, m_1; \\ & \sum_{r_i=0}^{2n_i} \frac{1}{2n_i+1} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi_{r_i}^{(n_i)} - \varphi_{0j_i}^{(n_i)}}{2} + Q_{ii}(\varphi_{0j_i}^{(n_i)}, \varphi_{r_i}^{(n_i)}) \right] u_i(\varphi_{r_i}^{(n_i)}) + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{r_k=1}^{n_k} a_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)} Q_{ik}(\varphi_{0j_i}^{(n_i)}, t_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}) u_k(t_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}) + \\ & + \sum_{\substack{k=m_1+1 \\ k \neq i}}^m \sum_{r_k=0}^{2n_k} \frac{1}{2n_k+1} Q_{ik}(\varphi_{0j_i}^{(n_i)}, \varphi_{r_k}^{(n_k)}) u_k(\varphi_{r_k}^{(n_k)}) + \beta_{i\bar{n}} = f_i(\varphi_{0j_i}^{(n_i)}), \quad j_i = 0, \dots, 2n_i; \quad i = m_1 + 1, \dots, m, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\frac{1}{n_k} \sum_{r_k=1}^{n_k} u_k(t_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}) = 0, \quad k = l_2 + 1, \dots, m_1; \quad \frac{1}{2n_k+1} \sum_{r_k=0}^{2n_k} u_k(\varphi_{r_k}^{(n_k)}) = 0, \quad k = m_1 + 1, \dots, m. \quad (12)$$

In (11) $a_{r_k}^{(\lambda_k, n_k)}$ are the coefficients of the quadrature formulae [8]:

$$a_{r_k}^{(1, n_k)} = \frac{1}{n_k}, \quad a_{r_k}^{(0, n_k)} = \frac{4}{2n_k+1} \sin^2 \left(\frac{r_k \pi}{2n_k+1} \right), \quad a_{r_k}^{(-1, n_k)} = \frac{1}{n_k+1} \sin^2 \left(\frac{r_k \pi}{n_k+1} \right).$$

Note that system (11), (12) consists of $\sum_{i=1}^{m_1} n_i + 2 \sum_{i=m_1+1}^m n_i + 2(m - m_1) + l_1$ equations which number equals the quantity of its unknowns.

From the above it follows that system (11), (12) is equivalent to problem (7), (8) in the sense that the solutions $\bar{u}_{\bar{n}} = (u_{kn_k})_{k=1}^m$ to problem (7), (8) coincide with the solutions to system (11), (12) at the interpolation nodes.

We prove below that starting from some $n = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$ problem (7), (8), and, hence, problem (11), (12), admits a unique solution.

Main spaces and operators. In what follows we use the following spaces:

$L_{\rho[-1,1]}^2$ – the Hilbert space of functions on $[-1, 1]$ endowed with the scalar product:

$$(x, y)_{\rho} = \int_{-1}^1 x(\tau) \bar{y}(\tau) \rho(\tau) d\tau;$$

$L_{[0, 2\pi]}^2$ – the Hilbert space of 2π – periodic functions with the scalar product given by:

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(\varphi) \bar{y}(\varphi) d\varphi;$$

$\bar{L}_I^2$ – the Hilbert space of vector functions $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^m$, $x_i = x_i(\tau) \in L_{\rho_{\lambda_i}[-1,1]}^2$ for $1 \leq i \leq m_1$, $x_i = x_i(\varphi) \in L_{[0, 2\pi]}^2$ for $m_1 + 1 \leq i \leq m$ with the scalar product:

$$(\bar{x}, \bar{y})_I = \sum_{k=1}^{m_1} (x_k, y_k)_{\rho_{\lambda_k}} + \sum_{k=m_1+1}^m (x_k, y_k);$$

$\bar{L}_I^{2,0}$ – the subspace of $\bar{L}_I^2$ which elements satisfy (4);

$\bar{L}_H^2$ – the Hilbert space of vector functions $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^m$ $x_i = x_i(t) \in L_{\rho_{\lambda_i}^{-1}[-1,1]}^2$ for $1 \leq i \leq m_1$, $x_i = x_i(\varphi) \in L_{[0,2\pi]}^2$ for $m_1 + 1 \leq i \leq m$ with the scalar product:

$$(\bar{x}, \bar{y})_H = \sum_{k=1}^{m_1} (x_k, y_k)_{\rho_{\lambda_k}^{-1}} + \sum_{k=m_1+1}^m (x_k, y_k);$$

$\bar{L}_H^{2,0}$ – the subspace of $\bar{L}_H^2$ which elements satisfy the condition $(\bar{x}, \bar{e}_k)_H = 0$ for $1 \leq k \leq l_2$ and $m_1 + 1 \leq k \leq m$, where $\bar{e}_k = (\delta_{ik})_{i=1}^m$ and δ_{ik} is the Kronecker symbol.

From [10] we know that both the characteristic equation $(A_\lambda x)(t) = y(t)$ supplemented by the auxiliary conditions $\eta(\lambda) \int_{-1}^1 x(\tau) \rho_\lambda(\tau) d\tau = 0$ as well as the characteristic equation $(\Gamma x)(\theta) = y(\theta)$ with the auxiliary condition $\int_0^{2\pi} x(\varphi) d\varphi = 0$ admit a unique solution if the respective assumption holds: either $\eta(-\lambda) \int_{-1}^1 y(t) \rho_\lambda^{-1}(t) dt = 0$ or $\int_0^{2\pi} y(\theta) d\theta = 0$. Consequently, the operator $\hat{A}$ possesses a continuous inverse if restricted to the pair of spaces:

$$(\bar{L}_I^{2,0}, \bar{L}_H^{2,0}). \quad (13)$$

The operator $\hat{Q}$ is completely continuous, hence, the unique solvability of problem (3), (4) implies that the operator $\hat{A} + \hat{Q}$ is continuously invertible in the pair of spaces (13).

Next we introduce a pair of finite dimensional functional spaces, which are subspaces of the main spaces $\bar{L}_I^2$ and $\bar{L}_H^2$, and study the restriction of equation (9) to them.

Let Π_r be the set of all algebraic polynomials which degree does not exceed $r-1$; let Φ_r denote the set of all trigonometric polynomials which order does not exceed r ;

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{I\bar{n}} &= \{ \bar{w} = (w_k)_{k=1}^n : w_k(\tau) \in \Pi_{n_k} \text{ for } 1 \leq k \leq m_1, w_k(\varphi) \in \Phi_{n_k} \text{ for } m_1 + 1 \leq k \leq m \}; \\ \bar{\Pi}_{H\bar{n}} &= \{ \bar{w} = (w_k)_{k=1}^n : w_k(t) \in \Pi_{n_k - \lambda_k} \text{ for } 1 \leq k \leq m_1, w_k(\theta) \in \Phi_{n_k} \text{ for } m_1 + 1 \leq k \leq m \}; \\ \bar{\Pi}_{I\bar{n}}^0 &= \bar{L}_I^{2,0} \cap \bar{\Pi}_{I\bar{n}}; \quad \bar{\Pi}_{H\bar{n}}^0 = \bar{L}_H^{2,0} \cap \bar{\Pi}_{H\bar{n}}. \end{aligned}$$

We study the restriction of equation (9) to the pair of spaces:

$$(\bar{\Pi}_{I\bar{n}}^0, \bar{\Pi}_{H\bar{n}}^0). \quad (14)$$

In this case conditions (8) apparently hold.

To prove that equation (9) admits a solution when considered in the pair of spaces (14) we need to estimate the values of $\left\| \left(\hat{Q} - \hat{Q}_{\bar{n}}^R \right) \bar{u}_{\bar{n}} \right\|_H$ and $\left\| \bar{f} - \bar{f}_{\bar{n}}^R \right\|_H$. Using the properties of the interpolation polynomials and Jackson's theorems [9] we arrive at the following result: if $n = \min\{n_1, \dots, n_m\}$ then

$$\left\| \left(\hat{Q} - \hat{Q}_{\bar{n}}^R \right) \bar{u}_{\bar{n}} \right\|_H \leq \frac{1}{(n-2)^{\mu+\gamma}} M(Q) \|u_{\bar{n}}\|_I, \quad \left\| \bar{f} - \bar{f}_{\bar{n}}^R \right\|_H \leq \frac{1}{(n-2)^{\mu+\gamma}} F(f), \quad (15)$$

where $M(Q)$ and $F(f)$ are constants depending only on Q and f .

We are now in position to use the following theorem from [11] describing the properties of an operator close to an invertible one:

Theorem 1. Let X and Y be linear normed spaces, and $\tilde{X} \subset X$ and $\tilde{Y} \subset Y$ be their finite dimensional subspaces such that $\dim \tilde{X} = \dim \tilde{Y}$. Consider the equations:

the exact one

$$Tx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

and the approximate one

$$\tilde{T}\tilde{x} = \tilde{y} \left(\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y} \right),$$

where T and $\tilde{T}$ are linear operators, $T: X \rightarrow Y$, $\tilde{T}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

If the following conditions hold:

a) the operator T is continuously invertible in (X, Y) ,

b) $p = \|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \|T - \tilde{T}\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}} < 1$,

then the approximate equation admits a unique solution $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ for any right-hand part $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Moreover, if $x^* \in X$ is the exact solution of the equation $Tx = y$ and $\delta = \|y - \tilde{y}\|_Y$, then

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X} (1 - p)^{-1} [\delta - p \|y\|_Y].$$

From estimates (15) and Theorem 1 it follows that for n sufficiently large equation (9) admits a unique solution in the pair of spaces (14). Hence, the same is true for SLAE (11), (12). Moreover, the following estimate describing the rate of convergence of the approximate solution to the exact one holds:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_n\|_l \leq \alpha_n, \quad \text{where} \quad \alpha_n = O(n^{-\mu-\gamma}) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

We also provide estimates for the regularization variables:

$$\text{for } 1 \leq i \leq l_1 \text{ and } m_1 \leq i \leq m: |\beta_{i\bar{n}}| \leq \sigma_n, \quad \text{where} \quad \sigma_n = O(n^{-\mu-\gamma}) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Conclusions. The method of discrete singularities is applied for solving a specific system of first kind singular integral equations with the Hilbert and Cauchy kernels. The system of linear algebraic equations approximating the given system and auxiliary conditions is derived. It is proved that if the right-hand parts of the system of singular integral equations satisfy some smoothness conditions and the kernels are regular then for n sufficiently large the approximating system of linear algebraic equations admits a unique solution. Moreover, the rate of convergence of the approximate solution to the exact one is estimated.

Bibliography

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 254 с.
2. Полянская Т. С. Математические модели задач дифракции Е-поляризованных волн на бесконечно тонких идеально проводящих решетках. // Труды XVI Международного симпозиума МДОЗМФ-2013. – Харьков-Херсон, 2013. – С. 326 – 328.
3. Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of a singular integral equation with the Hilbert kernel by the method of discrete singularities. // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – 2019. – no. 22 (1347). – pp. 89 – 94.
4. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках. // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 9 – С. 1229 – 1239.
5. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков, 1991. – 67 с.
6. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
7. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применения к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1968. – 288 с.
8. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. – В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – Москва: Наука, 1964, с. 64-74.
9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – Москва – Ленинград: ГТТИ, 1949. – 688 с.
10. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92с.
11. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231с.

References (transliterated)

1. Belotserkovskiy S. M., Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primeneniye v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical methods for singular integral equations and their application in aerodynamics, elastisity theory, electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 254 p.
2. Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye modeli zadach difraktsii E-polyarizovannykh voln na beskonечно tonkikh ideal'no provodyashchikh reshetkakh* [Mathematical models of the problems of diffraction of E-polarized waves on infinitely thin perfectly conducting grates]. *Trudy XVI Mezhdunarodnogo simpoziuma MDOZMF-2013* [Proceedings of the XVI International Symposium MDSPMP-2013]. Kharkov–Kherson, 2013, pp. 326–328.
3. Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of a singular integral equation with the Hilbert kernel by the method of discrete singularities. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies*. 2019, no. 22 (1347), pp. 89–94.
4. Gandel' Y. V., Polyanskaya T. S. *Obosnovaniye chislennogo metoda resheniya sistem singulyarnykh integral'nykh uravneniy zadach difraktsii na reshetkakh* [Substantiation of the numerical method for solving systems of singular integral equations in the problems of diffraction on grates]. *Differents. Uravneniya* [Differential equations], 2003, vol. 39, np. 9, pp. 1229–1239.

5. Gandel' Y. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh zaryadov. Ucheb. posobie. Ch. I* [Mathematical problems of the method of discrete charges. Tutorial. Part I]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1991. 67 p.
6. Gandel' Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems of the method of discrete currents. Textbook. Part II]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1992. 145 p.
7. Ivanov V. V. *Teoriya priblizhennykh metodov i yeye primeneniya k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate methods theory and its application to numerical solving of singular integral equations]. Kiyev, Naukova dumka Publ., 1968. 288p.
8. Korneychuk A. A. *Kvadrurnyye formuly dlya singulyarnykh integralov* [Quadrature formulae for singular integrals]. In: *Chislennyye metody resheniya differentsial'nykh i integral'nykh uravneniy i kvadrurnyye formuly* [Numerical methods for solving differential and integral equations and quadrature formulae]. Moscow, Nauka, 1964. pp. 64–74.
9. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow–Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688 p.
10. Gandel' Y. V. *Leksii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Textbook. Part I]. Kharkov, V. N. Karazin Kharkov National University Publ., 2001. 92 p.
11. Gabdulkhaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. Kazan, Izd. Kazanskogo. Universiteta Publ., 1980. 231 p.

Received (надійшла) 09.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.

UDC 621.039, 519.65

T. V. POTANINA, O. V. YEFIMOV, G. L. KHAVIN**MODELING NPP POWER UNIT STEAM TURBINE INSTALLATION STEAM SEPARATOR-SUPERHEATER TEMPERATURE CHARACTERISTICS BY INTERVAL ANALYSIS METHODS**

The determination of the temperature characteristics of one of the significant elements of the wet-steam turbines of nuclear power units – the steam separator-superheater is considered: namely the construction of the dependence of the temperature of the heated steam at the outlet of the second stage on the changing load of the power unit. Modeling is carried out taking into account the error limitation without reliable information about its distribution. To evaluate the coefficients of empirical dependence, constructed according to the results of experimental data, it is proposed to use numerical methods of interval analysis. The interval approach allows building a refined tube, guaranteed to contain acceptable dependences of the temperature of the heated steam on the electric power of the power unit. In a situation of data uncertainty and limited errors, numerical methods of interval analysis allow creating models of processes and equipment of NPP units with the maximum possible correspondence to a real object.

Key words: equipment of NPP power units, steam separator-superheater, temperature characteristics, uncertainty, processing of experimental data, non statistical measurement errors, interval analysis, interval model.

Т. В. ПОТАНИНА, О. В. ЄФІМОВ, Г. Л. ХАВІН**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕПАРАТОРА-ПАРОПЕРЕГРІВНИКА ПАРОТУРБІННОЇ УСТАНОВКИ ЕНЕРГОБЛОКА АЕС МЕТОДАМИ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ**

Розглянуто визначення температурних характеристик одного із значущих елементів вологопарових турбін енергоблоків АЕС – сепаратора-пароперегрівника: побудова залежності від навантаження енергоблоку температури пари, що нагрівається, на виході з другого ступеня. Моделювання здійснюється з врахуванням обмеженості похибки вимірювань без вірогідної інформації про її розподіл. Для оцінювання коефіцієнтів емпіричної залежності, що конструюється за результатами експериментальних даних, пропонується застосування чисельних методів інтервального аналізу. Інтервальний підхід дозволяє побудувати уточнену трубку, яка гарантовано містить припустимі залежності температури пари, що нагрівається від електричної потужності енергоблоку. В ситуації невизначеності даних та обмеженості похибок чисельні методи інтервального аналізу дозволяють створювати моделі процесів та устаткування енергоблоків атомних електростанцій з максимальною можливістю їх відповідності реальному об'єкту.

Ключові слова: обладнання енергоблоків АЕС, сепаратор-пароперегрівник, температурні характеристики, невизначеність, обробка експериментальних даних, нестатистичні похибки вимірювань, інтервальний аналіз, інтервальна модель.

Т. В. ПОТАНИНА, А. В. ЕФИМОВ, Г. Л. ХАВИН**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕПАРАТОРА-ПАРОПЕРЕГРЕВАТЕЛЯ ПАРОТУРБИННОЙ УСТАНОВКИ ЭНЕРГОБЛОКА АЭС МЕТОДАМИ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

Рассмотрено определение температурных характеристик одного из значимых элементов влажнопаровых турбин энергоблоков АЭС – сепаратора-пароперегревателя: построение зависимости температуры нагреваемого пара на выходе из второй ступени от изменяющейся нагрузки энергоблока. Моделирование выполняется с учетом ограниченности погрешности измерений без достоверной информации о ее распределении. Для оценивания коэффициентов эмпирической зависимости, конструируемой по результатам экспериментальных данных, предлагается применение численных методов интервального анализа. Интервальный подход позволяет построить уточненную трубку, гарантиро-

© T. V. Potanina, O. V. Yefimov, G. L. Khavin, 2020

вано содержащую допустимые зависимости температуры нагреваемого пара от электрической мощности энергоблока. В ситуации неопределенности данных и ограниченности ошибок численные методы интервального анализа позволяют создавать модели процессов и оборудования энергоблоков атомных электростанций с максимально возможным их соответствием реальному объекту.

Ключевые слова: оборудование энергоблоков АЭС, сепаратор-пароперегреватель, температурные характеристики, неопределенность, обработка экспериментальных данных, нестатистические погрешности измерений, интервальный анализ, интервальная модель.

Introduction. Solving the problems of increasing the efficiency, reliability and safety of electricity and heat production by nuclear power plants, implementation of the strategy of long-term operation of NPP units whose design life-time has expired or expires in the near future is a topical and strategic state level problem directly related to the energy sector of Ukraine, energy saving and prevention of large-scale man-made disasters [1].

In this regard, there is a growing demand for the development of new methods for analyzing the quality and safety of the operation of thermal power systems, such as nuclear power plant units, diagnostics and forecasting of equipment reliability. This leads to the search for new and improvement of existing methods of technological process modeling in order to determine the reliability and optimize their parameters, to study the relationship between these parameters when upgrading thermal power facilities control systems. Of particular importance is the use of these methods in systems of intellectual support in the absence, significant limitation or uncertainty of information about changes in the parameters of technological processes during the operation of thermal power systems.

Initial data and problem setting. One of the main tasks arising during the operation of wet-steam turbines is to reduce the moisture content in the flow part of the turbine. An increase in steam humidity can lead to a significant decrease in the internal efficiency of the turbine and erosion of the turbine blades.

Moisture is removed using separation devices.

SPP-1000 steam separator-superheater is used for KhTZ K-500-60/1500 and K-1000-60/1500 turbines of nuclear power units with a WWER-1000 reactor.

The turbine unit is equipped with four steam separators-superheaters. The steam separator-superheater is a vertical cylindrical apparatus consisting of a louver-type separator and a two-stage superheater (surface heat exchanger), which are located in the same housing (Fig. 1).

Wet steam from the turbine high-pressure cylinder (HPC) enters the inlet annular chamber, from which it is distributed through the inlet separator manifolds. The steam dried in the separator enters the annulus of the first stage of the steam superheater, where it is finally dried and partially overheated. Final overheating of the steam occurs at the second stage of the steam superheater. Then the overheated steam from the separator-superheater is sent to the low pressure cylinder (LPC) of the turbine. Heating steam for the first stage of the steam superheater is the steam from the first selection of the turbine high pressure cylinder, while for the second stage it is sharp steam.

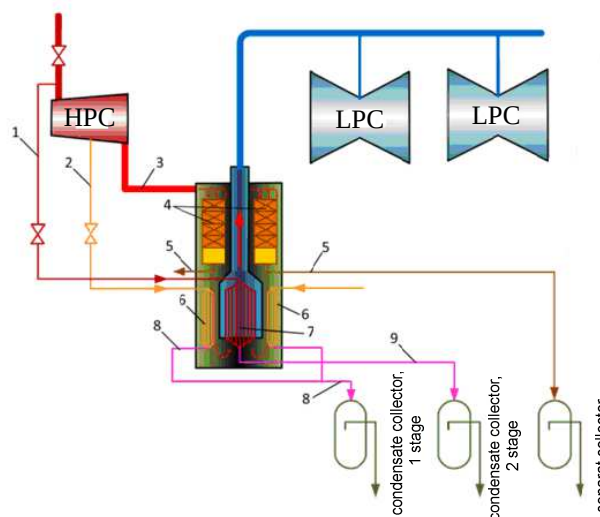


Fig. 1 – Steam separator-superheater installation diagram: 1 – heating fresh steam; 2 – heating steam from the first selection; 3 – wet steam from a high pressure cylinder; 4 – separation bags; 5 – removal of the separat; 6 – superheater of the first stage; 7 – superheater of the second stage; 8 – condensate of heating steam of the first stage; 9 – condensate of heating steam of the second stage.

Consider the problem of determining the temperature characteristics of steam separators-superheaters. Such characteristics, in general, describe the influence of many different factors on the temperature of the heated steam at its outlet with the stages of the steam separator-superheater. One of the important factors is the mode factor, i.e. the change in electrical power (load).

At our disposal are the data of various measurement experiments [2] of the steam temperature at the outlet of the first and second stages when changing the electric power N of the unit in the range 50 ÷ 100 % (Table 1). Temperature values were obtained at the fixed power of the unit.

Table 1 – Thermal test data for the K-1000-60/1500 turbine

$N, \%$	50	60	70	80	90	100
steam temperature at the outlet of the first stage $T_1, ^\circ\text{C}$	180.5	187	192	195	196	198
steam temperature at the outlet of the second stage $T_2, ^\circ\text{C}$	258	257	256	254	252.5	251

It is obvious that the experimental data contain inaccuracies and have interval uncertainty. Uncertainty is caused by measurement and rounding errors, noise, incomplete information. The analysis of numerous scientific works devoted to processing experimental data characterized by uncertainty, shows that an interval model can be considered as one of the most adequate existing models [3 – 16].

It is known that for a wide range of tasks of constructing a mathematical model based on the results of an experiment, the dependence being formalized is the following:

$$y = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{b}) + \varepsilon_y, \quad (1)$$

where $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ is the vector of input variables; $\mathbf{b}$ – the vector of model parameters; y – the output variable; φ – the function describing the deterministic component of the dependence of y on $\mathbf{x}$, and ε_y – the value describing the uncertainty of the presented dependence.

In the probabilistic model, which is the most common among other methods of constructing a model of the dependence between the input and output variables, the component ε_y is a normally distributed random variable, with a mean of zero and standard deviation σ_y . The uncertainty of the variable y for a given confidence level is described by a confidence interval (the rule «2- σ »):

$$\hat{y} - 2\sigma_y \leq y \leq \hat{y} + 2\sigma_y, \quad (2)$$

where $\hat{y}$ is the point estimate of the unknown quantity obtained as a result of the experiment.

The interval model [3] does not impose any requirements on the absolute error ε_y to be given by any distribution law, but only considers its limitations: $|\varepsilon_y| \leq \varepsilon$. What, in fact, is accepted in metrology is the assumption that the value $\hat{y}$ is obtained using an inaccurate instrument with a known error ε_y . And then for any value of $\hat{y}$ there is an interval of uncertainty:

$$\mathbf{y} = [\hat{y} - \varepsilon_y, \hat{y} + \varepsilon_y], \quad (3)$$

moreover, the interval can always be extended when new sources of errors are detected and their quantitative evaluation is possible.

Many factors influence the uncertainty of temperature measurements using thermocouples and resistance thermometers that measure the temperature of the heat carrier (vapor) at atomic power plants. The basic ones are: random effects when measuring; measurement uncertainty of the recording instrument; tolerance class of thermocouple and resistance thermometer; change in the characteristics of the thermocouple and resistance thermometer over a period of time between checks. There are also several factors specific for a thermocouple such as: the accuracy class of the extension wires connecting the thermocouple to the recording device and the temperature compensation error of the reference junctions. According to the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” [17], the uncertainties generated by the listed sources are considered random variables that obey a normal, uniformly symmetric or uniformly asymmetric distribution.

The sample presented in Table 1 contains a rather limited number of experimental points – only six measurements, and the structure and probabilistic characteristics of the measurement errors are unknown. Thus, it is impossible to justify the use of standard procedures for processing the experimental data, which rely on statistical methods such as: representative sample (it should be of sufficient length), normality of the distribution of measurement errors (the error is probabilistic and its distribution is normal and unbiased), accuracy of the values of the main argument.

In such a situation, applying numerical methods of interval analysis provides more complete information on the dependence of the vapor temperature on the load [18 – 19].

Results and their discussion. We briefly introduce the basic principles of interval arithmetic [3]. Any interval number (range) can be written in the form of some closed real interval $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$, where $\underline{\mathbf{a}} < \overline{\mathbf{a}}$ [3]. In the case of

$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}$, the interval $\mathbf{a}$ is identified with a real number a . The width of any interval $\mathbf{a}$ is defined as $w(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}$. The middle (center) of the interval is $\text{mid}(\mathbf{a}) = \frac{\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}}{2}$. The interval radius is defined as $\text{rad}(\mathbf{a}) = \frac{\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}}{2}$. The absolute value (module) of the interval is $|\mathbf{a}| = \max\{\bar{\mathbf{a}}, |\underline{\mathbf{a}}|\}$. The interval $\mathbf{a}$ determines the set of possible values of the unknown true parameter a . In the interval approach, no probabilistic or fuzzy measures in the range (interval) $\mathbf{a}$ are specified, i.e. all values within the interval are considered equally probable (not identical to the uniform distribution of a random variable).

The interval operations are carried out according to the following rules:

1. Addition $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}]$.
2. Subtraction $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}]$.
3. Multiplication $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\min(\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}), \max(\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})]$.
4. Division $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] \times [\frac{1}{\bar{\mathbf{b}}}, \frac{1}{\underline{\mathbf{b}}}]$, and besides $0 \notin \mathbf{b}$.
5. Multiplication by scalar $k \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} [k\underline{\mathbf{a}}, k\bar{\mathbf{a}}], & k \geq 0 \\ [k\bar{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}}], & k < 0 \end{cases}$.

In the interval model, the inaccuracy or uncertainty of the output parameter (which in our task is the steam temperature t) is described by the interval $\mathbf{t} = [\underline{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{t}}]$, where $\underline{\mathbf{t}}$ and $\bar{\mathbf{t}}$ are the lower and upper bounds of this interval respectively. The interval defines the set of possible values of the unknown true parameter t . The peculiarity of the interval approach is that no probabilistic or fuzzy measure is set within the interval $\mathbf{t}$, that is, all values within the interval are equally possible.

Assume that the output steam temperature at the outlet of the second stage of steam separator-superheater t depends linearly on the electrical load of the unit N (%):

$$t(N, b1, b2) = b1 + b2 \cdot N + \varepsilon, \quad (4)$$

where $b1, b2$ are parameters.

The following values from (4) are to be estimated: the membership set $I(b1, b2)$ of the actual values of the parameters and the range of the actual values of the dependence (4).

The experimental data are presented by the sample:

$$\{T2_i, N_i, i = 1, \dots, n\}, \quad (5)$$

where $T2_i$ is the observation of the dependence; N_i are the values of the argument; $n = 6$ is the sample length (Fig. 2).

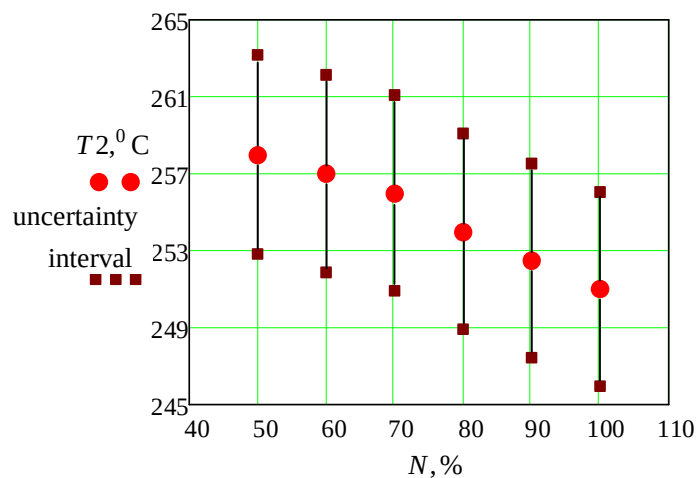


Fig. 2 – Experimental data: $T2$, °C – steam temperature at the outlet of the second stage recorded at the specified level of electrical load N , % of the unit [2]; vertical posts – uncertainty intervals.

We assume that the values N_i are known exactly. Although the values of electric power in the conditions of ther-

mal tests of a turbine unit are also determined with some error. For the most accurate measurement of the electric power at the terminals of the generator, the following measures are taken:

- choosing measuring transformers with the actual error in the operating range of measurements up to $\pm(0.1 \div 0.2)\%$ and adopting of measures that reduce errors to a minimum (due to the difficulty of accounting for the latter). In particular, in order to avoid overload, it is necessary to check the actual load of the measuring transformers, minimizing it;
- eliminating harmful effects on the accuracy of measurement;
- connecting measuring instruments as close as possible to the output terminals and to any branch through which leakage or supplementary supply of energy can occur;
- using two independent measurement methods simultaneously.

The measurement of temperature values T_2 are assumed to contain noise errors. Resistance thermocouples that measure the temperature of the heat carrier (vapor) at atomic power plants have the device error $\pm(0.15 + 0.002|t|)^\circ\text{C}$ or $\pm(0.3 + 0.005|t|)^\circ\text{C}$, depending on the tolerance class [20]. In addition, the given error should be taken into account, the value of which is indicated in the metrological standards. The reduced measurement error takes into account all the components of the parameter measurement: methodological, instrumental, and subjective. When measuring the temperature of the steam in the pipeline behind the steam separator-superheater, the reduced error for direct control is 1.5 %, the readings and registration by the secondary devices are determined with an error of 2 %.

That is, for each experimental value:

$$T2_i = \widehat{T2}_i + \varepsilon_i, |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{\max}, i = 1, \dots, 6, \quad (6)$$

where $T2_i$ is the result of the vapor temperature measurement; $\widehat{T2}_i$ denotes the unknown true value of the temperature; ε_i is the i -measurement error; the maximum value of the error $\varepsilon_{\max}$ is about 5°C .

For each vapor temperature measurement the lower $\underline{T2}_i$ and upper $\overline{T2}_i$ bounds of the uncertainty interval $\mathbf{T2}_i$ are calculated using model (3):

$$\mathbf{T2}_i = [\underline{T2}_i, \overline{T2}_i], i = 1, \dots, 6, \underline{T2}_i = T2_i - \varepsilon_{\max}, \overline{T2}_i = T2_i + \varepsilon_{\max}. \quad (7)$$

In the physical sense the uncertainty interval is the range of possible values of the vapor temperature that contains the unknown true value.

The set of the uncertainty intervals shown in Fig. 2:

$$\{\mathbf{T2}_i\} = \{[252.84, 263.16], [251.86, 262.14], [250.88, 261.12], [248.92, 259.08], [247.45, 257.55], [245.98, 256.02]\}. \quad (8)$$

Each uncertainty interval $\mathbf{T2}_i$, $i = 1, \dots, 6$ contains possible values of the measured value, consistent with this measurement, that is, at least one curve of dependence (4) can be drawn through *all* intervals of uncertainty.

For each pair of the intervals $\mathbf{T2}_i$ and $\mathbf{T2}_j$, $i = 1, \dots, 5$, $j = i + 1, \dots, 6$, of uncertainties of the sample measurements given by (7) – (8), a two-dimensional *partial membership set* $G_{i,j}(b1, b2)$ of parameters $b1, b2$ [18] compatible with the given pair of uncertainty intervals is calculated.

The next step is to determine the membership set $I(b1, b2)$ of the parameters $b1, b2$ compatible with the entire sample of measurements:

$$I(b1, b2) = \bigcap_{i=1, \dots, 5, j=i+1, \dots, 6} G_{i,j}(b1, b2). \quad (9)$$

From (4) and (7) follow the constraints for the membership set:

$$T2_i - \varepsilon_{\max} \leq b1 + b2 \cdot N_i \leq T2_i + \varepsilon_{\max}, i = 1, \dots, 6. \quad (10)$$

Accordingly, these conditions take the form:

$$\begin{aligned} 252.84 &\leq b_1 + 50 \cdot b_2 \leq 263.16, \\ 251.86 &\leq b_1 + 60 \cdot b_2 \leq 262.14, \\ 250.88 &\leq b_1 + 70 \cdot b_2 \leq 261.12, \\ 248.92 &\leq b_1 + 80 \cdot b_2 \leq 259.08, \\ 247.45 &\leq b_1 + 90 \cdot b_2 \leq 257.55, \\ 245.98 &\leq b_1 + 100 \cdot b_2 \leq 256.02. \end{aligned} \quad (11)$$

The formal application of the rule for constructing a membership set leads to the following result: the set $I(b1, b2)$

is a polygon with seven vertices, and the parameter b_2 takes values of different signs:

$$\{(b_1, b_2)\} = \{(252.84, 0), (249.66, 0.0636), (256.02, 0), (257.74, -0.098), (262.31, -0.16333), (280.34, -0.3436), (270.3, -0.1428)\}. \quad (12)$$

However, the analysis of experimental data (Table 1) and the principles of the process of drying and superheating of steam in a separator-superheater show that dependence (4) is a function that decreases with increasing electric power. Therefore, it makes sense to require that parameter $b_2 < 0$. Accordingly, with the new restriction on the parameters, the membership set $I(b_1, b_2)$ takes the form of a polygon with six vertices (Fig. 3 – the gray region):

$$I(b_1, b_2): \mathbf{b}^1 = (b_1, b_2) = (252.84, 0), \mathbf{b}^2 = (256.02, 0), \mathbf{b}^3 = (270.3, -0.1428), \mathbf{b}^4 = (280.34, -0.3436), \mathbf{b}^5 = (262.31, -0.16333), \mathbf{b}^6 = (257.74, -0.098). \quad (13)$$

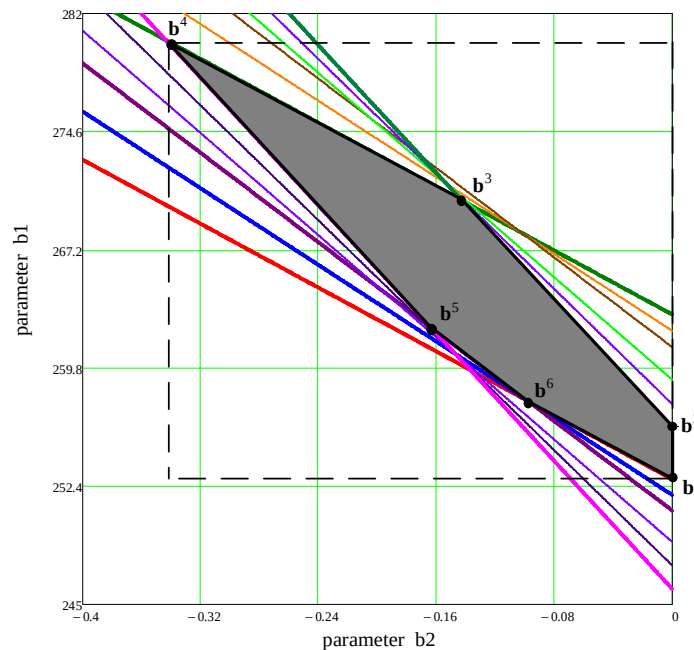


Fig. 3 – The membership set $I(b_1, b_2)$.

This set is characterized by the unconditional minimal external estimates which are the parameter intervals $[\underline{b}_1, \overline{b}_1]$ and $[\underline{b}_2, \overline{b}_2]$. These intervals are determined according to the rules:

$$\mathbf{b}_1 = [\underline{b}_1; \overline{b}_1]: \underline{b}_1 = \text{Arg}\{\min b_1 \in I(b_1, b_2)\}, \overline{b}_1 = \text{Arg}\{\max b_1 \in I(b_1, b_2)\}; \quad (14)$$

$$\mathbf{b}_2 = [\underline{b}_2; \overline{b}_2]: \underline{b}_2 = \text{Arg}\{\min b_2 \in I(b_1, b_2)\}, \overline{b}_2 = \text{Arg}\{\max b_2 \in I(b_1, b_2)\}. \quad (15)$$

The extreme corner points defining the size of the set $I(b_1, b_2)$ (rectangle marked with dotted lines in Fig. 3) and the boundaries of the intervals $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$ are $\mathbf{b}^1 = (252.84, 0)$, $\mathbf{b}^4 = (280.34, -0.3436)$. Thus,

$$\mathbf{b}_1 = [252.84, 280.34], \mathbf{b}_2 = [-0.3436, 0]. \quad (16)$$

The interval approach allows to construct a refined tube $t(N)$ of guaranteed – valid dependencies. Such a tube is defined by its lower $\underline{t}(N_i)$ and upper $\overline{t}(N_i)$ limits, which are calculated using the membership set in the following way:

$$\mathbf{t}(N) = \{\underline{t}(N_i), \overline{t}(N_i)\}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (17)$$

where

$$\underline{t}(N_i) = \min_{(b_1, b_2) \in I(b_1, b_2)} \{b_1 + b_2 \cdot N_i\}, \quad \overline{t}(N_i) = \max_{(b_1, b_2) \in I(b_1, b_2)} \{b_1 + b_2 \cdot N_i\}.$$

Namely (Fig. 4)

$$\{\underline{t}(N_i)\} = \{252.84, 251.86, 250.877, 249.224, 247.61, 245.977\},$$

$$\{\overline{t}(N_i)\} = \{263.16, 261.732, 260.304, 258.876, 257.448, 256.02\}.$$

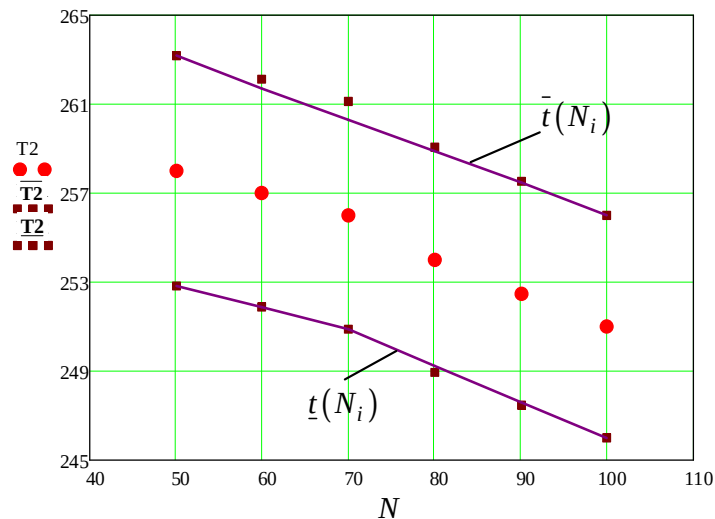


Fig. 4 – The boundaries of the tube of actual values.

It should be noted that at some points the actual value tube is narrower than the uncertainty intervals.

The interval model of the dependence of steam temperature at the outlet of the second stage on electric power can be represented as:

$$[t(N)] = [252.84, 280.34] + [-0.3436, 0] \cdot N. \quad (18)$$

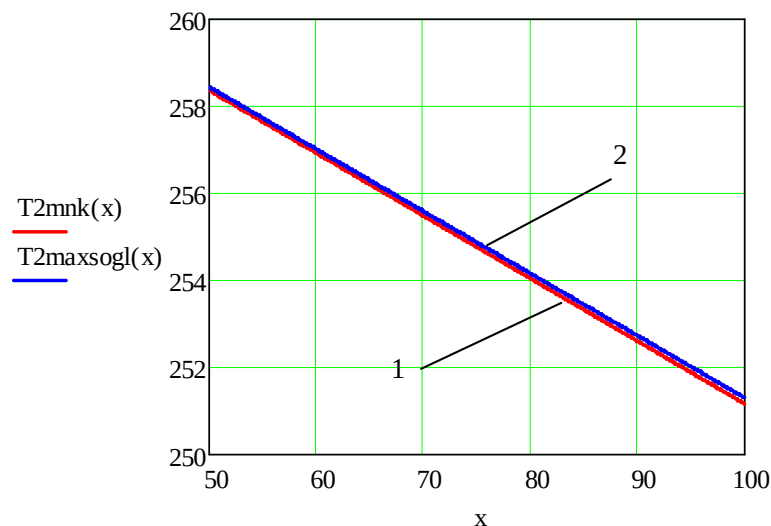


Fig. 5 – Forecast models for the dependence of steam temperature on electric power:
line 1 – LSM-estimation, line 2 – estimate constructed using the maximum compatibility method.

Using the point estimates of the parameters $\hat{b}_1, \hat{b}_2$ of the unknown coefficients of the output variable model (steam temperature at the outlet of the second stage) with a fixed vector of the input variable (electric power), it is possible to construct a point estimate defining some prediction model. The parameter estimates obtained by applying the *uncertainty center method* [21] are:

$$\hat{b}_{1c} = 0.5(\underline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_1), \quad \hat{b}_{2c} = 0.5(\underline{\mathbf{b}}_2 + \overline{\mathbf{b}}_2), \quad (19)$$

$$\hat{b}_{1c} = 266.59, \quad \hat{b}_{2c} = 0.1718.$$

Accordingly, the direct forecast is the following:

$$\hat{t}(N) = 266.59 - 0.1718 \cdot N. \quad (20)$$

Using standard statistical approaches for processing experimental data, we determine the parameters of relation (4) by the *least squares method* [21]. The resulting equation is:

$$\hat{t}(N) = 265.571 - 0.144 \cdot N, \quad (21)$$

the mean square deviation is $\sigma = 0.333$. Least squares linear approximation graph is shown in Fig. 5 (line1).

Another assessment was performed using the *maximum compatibility method*. This method was proposed by Shary S. P. [12, 19] to restore dependencies from data with interval uncertainty and as a solution determines the points at which the best agreement of the data with the dependence parameters is achieved. The desired dependency has the form:

$$\hat{t}(N) = 265.588 - 0.1428 \cdot N. \quad (22)$$

In the problem under consideration, the point estimates (21) and (22) of the parameters are fairly close.

Conclusion. When solving problems of safety and reliability assessment of systems and equipment of NPP units, as well as improving their efficiency by determining operational (energy) characteristics, the problem of taking into account uncertainty factors in the objects and processes for which models are created, as well as choosing mathematical tools for their description remains relevant. The classic "point-by-point" representation of values in modeling and optimization problems often does not allow to reach the maximum possible correspondence between a real object and its model. Ignoring the interval nature of the problem leads to a solution in the form of certain "exact" numbers, and the closeness of such solutions to the lower possible and, accordingly, the upper possible values of the interval cannot be estimated. In the practice of operating NPP units this can result, in a number of cases, in erroneous decisions when solving problems of process optimization, as well as assessing safety and reliability indicators.

In this situation, the advantages of data processing, model defining and constructing by means of interval analysis methods are quite obvious, as their means allow to take into account inaccuracies in setting the initial data, measurement errors, uncertainties of parameters and system model, multimode nature of the operation of such complex systems as NPP units. Therefore, the use of the mathematical tools of interval analysis, its capabilities and advantages is promising for solving a wide range of problems connected with safety and reliability assessment, increase in the efficiency of NPP units based on correct operational characteristics in condition of the uncertainty of initial data.

Acknowledgments. The authors are grateful to Dr. Shary S.P., Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Modeling, Novosibirsk State University, for advice and assistance in work.

Bibliography

1. Доповідь про стан ядерної та радіаційної безпеки в Україні в 2018 році. – Київ, 2019. – 70 с. – Режим доступу : <http://www.snrc.gov.ua/nuclear/doccatalog/document?id=425406>. – Дата звертання : 01 січня 2020.
2. Бузлуков В. А., Теплицкий М. Г., Ойберман Л. Б., Ефимов А. В., Палагин А. А., Меньшикова Е. Д. Получение характеристик оборудования турбоустановок методом натурно-вычислительного эксперимента // Теплоэнергетика. – 1987. – № 8. – С.19 – 21.
3. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. Introduction to interval analysis. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. – 223 p.
4. Потанина Т. В., Ефимов А. В., Гаркуша Т. А., Есипенко Т. А. Применение методов интервального анализа для оценки безопасности и надежности энергоблоков АЭС // Ядерная та радіаційна безпека. – 2018. – № 3 (79). – С. 23 – 29.
5. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. – London : Springer – Verlag Limited Publ., 2001. – 379 p.
6. Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль : Економічна думка ТНЕУ, 2011. – 216 с.
7. Gutowski M. W. Interval experimental data fitting // Focus on Numerical Analysis. – NY : Nova Science Publishers, 2006. – P. 27 – 70.
8. Воцинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – Т. 68. – № 1. – С. 118 – 126.
9. Крюков А. В., Литвинцев А. И. Интервальное моделирование режимов электроэнергетических систем в фазных координатах // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2014. – № 4(44). – С. 57 – 62.
10. Родионова О. Е. Интервальный метод обработки результатов многоканальных экспериментов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.01. – Москва, 2008. – 273 с.
11. Grishkevich A. Interwlowe oszacowania wskaźników niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych na podstawie metod optymalizacji // Prace naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. "Technika, Informatyka, Inżynieria Bezpieczeństwa". – 2014. – vol. II. – pp. 91 – 106.
12. Shary S. P. Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty // Journal of Global Optimization. – 2016. – vol. 66. – issue 1. – pp. 111 – 126.
13. Kreinovich V., Shary S. P. Interval methods for data fitting under interval uncertainty: a probabilistic treatment // Reliable Computing. – 2016. – vol. 23. – pp. 105 – 140.
14. Yefimov A. V., Pylypenko M. M., Potanina T. V., Yesypenko T. A., Harkusha T. A., Stadnik Yu. S. Processing of experimental data of the process of refining nuclear material Zr1%Nb by electron-beam melting by means of interval analysis methods // БАИТ. – 2019. – № 5 (123). – С. 118 – 123.
15. Потанина Т. В., Ефимов О. В. Застосування методів інтервального аналізу для визначення експлуатаційних характеристик енергоблоків АЕС // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Hydraulic machines and hydraulic units. – 2019. – № 2. – С. 77 – 81.
16. Yefimov A. V., Potanina T. V. Application of interval analysis for improving reliability of estimation of hardness value spread for nuclear structural materials // БАИТ. – 2020. – № 1 (125). – С. 206 – 210.
17. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement : First edition. – ISO, Switzerland, 1993. – 101 с.
18. Кумков С. И. Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы. – 2010. – № 3. – С. 79 – 89.
19. Шарый С. П. Задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределенностью // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2020. – Т. 86. – № 1. – С. 62 – 74.

20. ДСТУ 2858:2015. Термоперетворювачі опору. Загальні технічні вимоги і методи випробувань // Нац. стандарт України. – Київ : Мінекономрозвитку України, 2017. – 22 с.
21. Жилин С. И. Эксперименты по оцениванию параметров эмпирической зависимости методом наименьших квадратов и методом центра неопределенности // Известия Алтайского государственного университета. – 2003. – № 1. – С. 24 – 27.
22. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – Л. : Физматгиз, 1962. – 352 с.

References (transliterated)

1. *Dopovid' pro stan yadernoyi ta radiatsiynoyi bezpeku v Ukraini v 2018 rotsi* [Report on the State of Nuclear and Radiation Safety in Ukraine in 2018]. Available at : <http://www.snrc.gov.ua/nuclear/doccatalog/document?id=425406> (accessed 01.01.2020).
2. Buzlukov V. A., Teplitzkiy M. G., Oyberman L. B., Efimov A. V., Palagin A. A., Men'shikova Ye. D. Poluchenie kharakteristik oborudovaniya turbostanovok metodom naturno-vychislitel'nogo eksperimenta [Obtaining the characteristics of the turbine units equipment by the full-scale computing experiment method]. *Teploenergetika* [Heat power engineering]. 1987, no. 8, pp. 19–21.
3. Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J. *Introduction to interval analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 2009. 223 p.
4. Potanina T. V., Yefimov A. V., Garkusha T. A., Yesipenko T. A. Primeneniye metodov interval'nogo analiza dlya otsenki bezopasnosti i nadezhnosti energoblokov AES [Application of interval analysis methods for NPP power units safety and reliability assessment]. *Yaderna ta radiatsiynaya bezpeka* [Nuclear and radiation safety]. 2018, no. 3 (79), pp. 23–29.
5. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. *Applied Interval Analysis*. London, Springer-Verlag Limited Publ., 2001. 379 p.
6. Dyvak M. P. *Zadachi matematychnogo modeluvannya statychnykh system z interval'nyimi danyimi* [Problems of mathematical simulation of static systems with interval data]. Ternopil', Ekonomichna dumka Publ., 2011. 216 p.
7. Gutowski M. W. Interval experimental data fitting. *Focus of Numerical Analysis*. New York, Nova Science Publishers, 2006. pp. 27–70.
8. Voshhinin A. P. Interval'nyy analiz dannykh : razvitiye i perspektivy [Interval data analysis: development and prospects]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial laboratory. Materials diagnostics]. 2002, vol. 68, no. 1, pp. 118–126.
9. Kryukov A. V., Litvintsev A. I. Interval'noye modelirovaniye rezhimov elektroenergeticheskikh system v faznykh koordinatakh [Interval simulation of electrical power systems modes in phase coordinates]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemyy analiz. Modelirovaniye* [Modern technologies. System analysis. Simulation]. 2014, no. 4(44), pp. 57–62.
10. Rodionova O. Ye. *Interva'lnyy metod obrabotki rezul'tatov mnogokanal'nykh eksperimentov : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk 01.04.01* [Interval method for processing the results of multichannel experiments. Dr. phis.– mat. sci. diss.]. Moscow, 2008. 273 p.
11. Grishkevich A. Interwalowe oszacowania wskaźników niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych na podstawie metod optymalizacji. *Prace naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. "Technika, Informatyka, Inżynieria Bezpieczeństwa"*. 2014, vol. II, pp. 91–106.
12. Shary S. P. Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty. *Journal of Global Optimization*. 2016, vol. 66, issue 1, pp. 111–126.
13. Kreinovich V., Shary S. P. Interval methods for data fitting under interval uncertainty: a probabilistic treatment. *Reliable Computing*. 2016, vol. 23, pp. 105–140.
14. Yefimov A. V., Pylypenko M. M., Potanina T. V., Yesipenko T. A., Garkusha T. A., Stadnik Yu. S. Processing of experimental data of the process of refining nuclear material Zr1%Nb by electron-beam melting by means of interval analysis methods. *PAST*. 2019, no. (123), pp. 118–123.
15. Potanina T. V., Yefimov O. V. Zastosuvannya metodiv interval'noho analizu dlya vyznachennya ekspluatatsiynykh kharakterystyk enerhoblokov AES [Application of interval analysis method for determining operating characteristics of NPP power units]. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Hydraulic machines and hydraulic units*. 2019, no. 2, pp. 77–81.
16. Potanina T. V., Yefimov A. V. Application of interval analysis for improving reliability of estimation of hardness value spread for nuclear structural materials. *PAST*. 2020, no. 1 (125), pp. 206–210.
17. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement : First edition*. ISO, Switzerland, 1993. 101 p.
18. Kumkov S. I. Obrabotka eksperimental'nykh dannykh ionnoy provodimosti rasplavlennogo elektrolita metodami interval'nogo analiza [Processing of experimental data on the ionic conductivity of molten electrolyte by interval analysis methods]. *Raspavy* [Melts]. 2010, no. 3, pp. 79–89.
19. Shary S. P. Zadacha vosstanovleniya zavisimostey po dannym s interval'noy neopredelennost'yu [Data fitting problem under interval uncertainty in data]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial laboratory. Materials diagnostics]. 2020, vol. 86, no. 1, pp. 62–74.
20. *DSTU 2858:2015. Termoperetvoryuvachi oporu. Zagal'ni tekhnichni vymogy i metody vyprobuvan'* [State Standard 2858:2015. Thermo-converters of resistance. General technical requirements and test methods]. Kyiv, Ministry of Economic Development and Trade of Ukraine Publ., 2017. 22 p.
21. Zhilin S. I. Eksperimenty po otsenivaniyu parametrov empiricheskoy zavisimosti metodom naimen'shikh kvadratov i metodom tsentra neopredelennosti [Experiments on the estimation of empirical dependence parameters by the least squares method and the method of center of uncertainty]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [News of the Altai State University]. 2003, no. 1, pp. 24–27.
22. Linnik Yu. V. *Metod naimen'shykh kvadratov i osnovy teorii obrabotki nablyudeniy* [Least squares method and the basics of observation processing theory]. Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1962. 352 p.

Received (надійшла) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Потаніна Тетяна Володимирівна (Потанина Татьяна Владимировна, Potanina Tetiana Volodymyrivna)

– кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: potaninatetiana@gmail.com.

Єфімов Олександр Вячеславович (Ефимов Александр Вячеславович, Yefimov Oleksandr Vyacheslavovych)

– доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-65-55; e-mail: AVEfimov@kpi.kharkov.ua.

Хавін Геннадій Львович (Хавин Геннадий Львович, Khavin Gennadij L'vovych)

– доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-25; e-mail: gennadii.khavin@gmail.com.

I. A. TOKMAKOVA

FINITE-STEP METHOD FOR DETERMINING EQUILIBRIUM STATE OF GYROTHEODOLITE

The problem of orientation of a solid by using a torsion suspended gyrotheodolite is considered. Such gyrotheodolites are widely used in modern technology. During their operation, the problem arises of identifying the equilibrium position. It can be solved in many ways. A method is proposed for identifying the equilibrium position of a gyrotheodolite, which has several advantages over other well-known classical methods (least squares method, Kalman filter, and others). A mathematical description of the gyrotheodolite rotor motion is provided, a mathematical model of the method is given, and further development of the research is indicated.

Key words: gyrotheodolite, azimuth, gyroscope, inertial moment, damping moment, directing moment, moment from other unaccounted process forces.

I. A. ТОКМАКОВА

КІНЦЕВО-КРОКОВИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОВАЖНОГО ПОЛОЖЕННЯ ГІРОТЕОДОЛИТА

Розглядається задача орієнтації твердого тіла за допомогою гіртеодоліта на торсіонному підвісі. Такі гіртеодоліти мають широке застосування в сучасній техніці. При їх роботі виникає задача ідентифікації положення рівноваги. Вона може вирішуватися багатьма способами. Запропоновано метод ідентифікації рівноважного положення гіртеодоліта, який має ряд переваг перед іншими відомими класичними методами (методом найменших квадратів, фільтром Калмана та іншими). Викладено математичний опис руху ротора гіртеодоліта, дана математична модель методу і позначено подальший розвиток даних досліджень.

Ключові слова: гіртеодоліт, азимут, гіроскоп, інерційний момент, демпфуючий момент, спрямовуючий момент, момент від інших неврахованих сил процесу.

И. А. ТОКМАКОВА

КОНЕЧНО-ШАГОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ГИРОТЕОДОЛИТА

Рассматривается задача ориентации твёрдого тела с помощью гиroteодолита на торсионном подвесе. Такие гиroteодолиты имеют широкое применение в современной технике. При их работе возникает задача идентификации положения равновесия. Она может решаться многими способами. Предложен метод идентификации равновесного положения гиroteодолита, который имеет ряд преимуществ перед другими известными классическими методами (методом наименьших квадратов, фильтром Калмана и другими). Изложено математическое описание движения ротора гиroteодолита, дана математическая модель метода и обозначено дальнейшее развитие данных исследований.

Ключевые слова: гиroteодолит, азимут, гироскоп, инерциальный момент, демпфирующий момент, направляющий момент, момент от прочих неучтённых сил процесса.

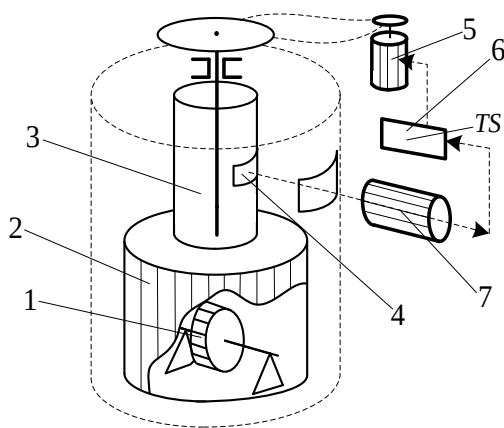


Fig. 1 – Gyrotheodolite model.

proposed in this paper we consider the features of the mathematical description of the gyrotheodolite rotor motion.

A gyrotheodolite is commonly used for determining the *azimuths* of directions on the Earth's surface. By its construction a gyrotheodolite is an *angle gauge* incorporating a *gyroscope*, which is the part of the device responsible for determining the direction of the true meridian, and a theodolite [1].

The problem of determining the azimuth arises in various applications, such as, for instance, navigation of aircrafts, ships, submarines, during surveying, mine tunneling, etc. For solving this problem gyroscopic azimuth-orientation instruments are widely used, which have several advantages over the astronomical, magnetic and other methods, such as the capability to operate in any season and at any time of the day, inside closed objects including indoor spaces [2].

Introduction. Nowadays the majority of the problems of identification of the parameters of orientation systems by the measurement results are solved using the algorithms based on various numerical methods. When developing a competitive numerical method one needs to provide for a series of requirements which are due to the features of the specific practical problem considered. When identifying the *gyrotheodolite equilibrium position* it is of particular importance to meet the following requirements:

- providing the identification accuracy;
- the minimal amount of measurements;
- the algorithm performance;
- stability of the computational process;
- the algorithm simplicity;
- low interference susceptibility.

Previous to developing a mathematical model of the method

In the majority of the gyrotheodolite models available the sensitive element, which is directly involved in determining the true meridian plane, consists of a torsion suspended pendulous gyroscope with automated tracking system (fig. 1).

Gyrorotor 1 in casing 2 is suspended by a flexible tape called torsion 3. In order to reduce the uncertainty torque caused by the torsion elastic torque (*torsion bar spring tension*) a *tracking system* or torsion support system is introduced, which rotates the torsion upper end fixation unit following the motion of the sensitive element. The tracking system is composed of mirror 4, error sensor 7, amplifier 6 and drive 5 connected to torsion upper end fixation unit 3 [2].

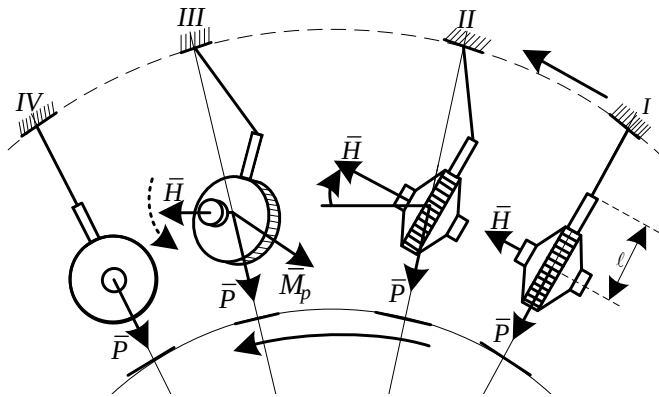


Fig. 2 – Gyrotheodolite operation principle.

gyrorotor axis stays unchanged in the inertial space, since no momentum is applied to the gyroscope in position I, fig. 2. Hence, the main axis deviates from the local horizon plane (position II, fig. 2), besides the gyroscope rotates about the point at which it is attached to the torsion. The gravitational moment generated thereby $M_p = P\ell\beta$, where β is the angle of deviation of the gyroscope main axis from the meridian plane (position II, fig. 2), induces the gyroscope precession in the direction which takes the kinetic moment $\vec{H}$ to get aligned with the meridian plane (position IV, fig. 2). In order for the gyroscope main axis to keep its northwards direction after being aligned with the meridian plane it

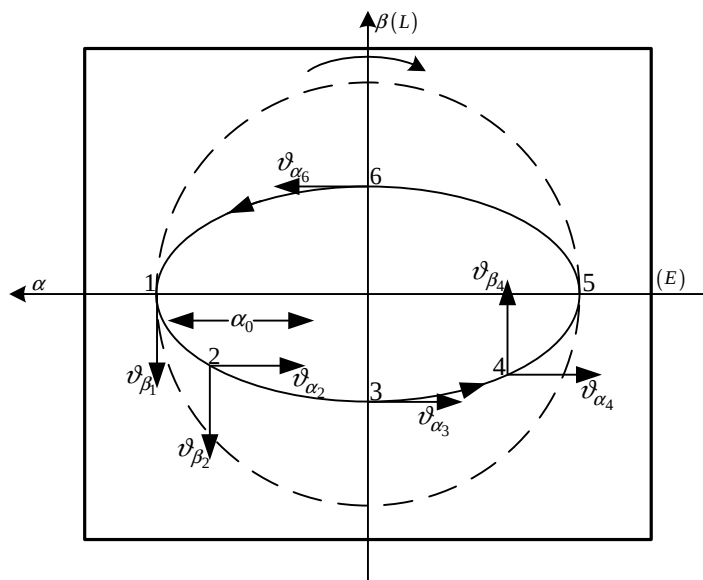


Fig. 3 – Gyrotheodolite main axis precession scheme.

by β^* (for northern latitude).

Thus the gravitational moment needs to give rise to gyroscope precession in azimuth with the velocity $\omega_{pr} = \omega_E \sin \varphi$ relative to the inertial space:

$$\omega_{pr} = \frac{M_p}{H} \quad \text{or} \quad \omega_E \sin \varphi = \frac{P_\ell \beta^*}{H}, \quad (1)$$

To simplify the explanation of the operation principle of a torsion suspended two-degree-of-freedom gyrotheodolite pendulum let us assume that the gyrotheodolite is placed at the Equator (fig. 2) and the main gyroscope axis is horizontal and aligned with the West-East direction at the initial moment of time, besides the kinetic momentum is directed eastwards (position I, fig. 2). In this case the sensitive element gravity center is in the vertical plane and, hence, does not generate a moment about the gyromotor axis. Due to the daily rotation of the Earth the horizon plane as well as the direction of the local vertical changes its location with respect to the inertial space continuously. At the same time the direction of the

needs to rotate with the same angular velocity as the meridian plane, i.e. $\omega_E \sin \varphi$ at the latitude φ , where ω_E is the angular velocity of the Earth.

Thus at the deviation by angle α_0 (or β_0) the gyro compass executes undamped oscillations about its equilibrium position, which lies in the meridian plane, moreover the trajectory of the gyroscope axis is an ellipse which semi-major axis is in the horizon plane and semi-minor axis is in the vertical plane. As a rule the ratio $\alpha_{\max} / \beta_{\max}$ reaches 200–500 and the oscillation period is tens of minutes. Since the vertical component of the angular velocity of the Earth at the Equator is zero: $\varphi = 0^\circ$, $\omega_\beta = \omega_E \sin \varphi = 0$, the middle position of the oscillations of the gyroscope in the β angle (fig. 3) lies in the horizon plane. At arbitrary latitude the trajectory (fig. 4) of the gyroscope axis is also an ellipse with center shifted up

$$\text{hence, } \beta^* = \frac{H}{P\ell} \omega_E \sin \varphi. \quad (2)$$

At the deviation of the main axis from the horizon plane the angle velocity of the gyroscope precession is the same as the velocity of the meridian plane rotation. Nevertheless, there occur the oscillations of the gyroscope main axis relative to the meridian plane, which origins are considered below.

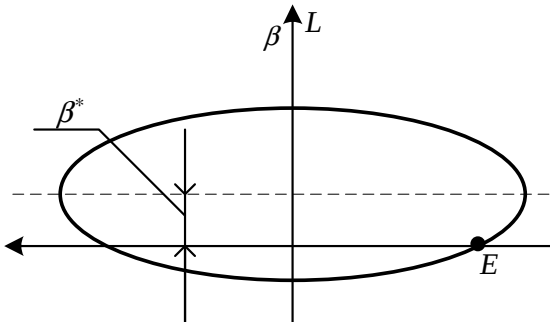


Fig. 4 – Trajectory of gyroscope axis at arbitrary latitude.

Assume that at the initial moment of time the gyroscope main axis is in the horizon plane at the Equator and it is deviated from the meridian plane by the angle α_0 (point 1 in fig. 3). Since at this position the angle $\beta = 0$ and the pendulosity $M_p = 0$, the gyroscope acts as a free gyroscope, i.e. the positive end of its main axis falls relative to the horizon plane due to the Earth's rotation. The deviation of the gyroscope main axis by the angle β from the horizon plane results in the gyroscope precession in the direction of alignment of the main axis with the meridian plane due to the pendulosity $M_p = P\ell\beta$ (point 3 in fig. 3).

In the position corresponding to point 3 (fig. 3) the angle β of deviation of the gyroscope from the horizon plane reaches its maximum modulo and the velocity of the gyroscope is zero, hence, it passes this position.

On segment 3 – 5 (fig. 3) the horizon plane rotates towards the gyroscope main axis. Thus the angle β decreases which results in the decreasing pendulosity M_p ; the eastward precession of the gyroscope main axis slows down and at point 5 (fig. 3) the precession angle velocity becomes zero, the gyroscope deviation from the meridian plane reaches its maximum. Further on the rotation of the horizon plane causes the rise of the gyroscope main axis above the horizon plane, the angle β increases thus bringing about the gyroscope precession. The pendulosity is now of the opposite sign which again results in gyroscope precession relative to meridian plane (segment 5 – 6, fig. 3). At point 6 (fig. 3) the deviation of the gyroscope main axis from the horizon plane reaches its maximum one more time, thus the gyroscope moves westwards with the maximal speed, hence, its main axis passes the meridian plane.

On segment 6 – 1 (fig. 3) the horizon plane moves towards the gyroscope main axis, hence, the angle β and the pendulosity M_p gradually decrease, the gyroscope precession slows down and its angular velocity becomes zero at point 1 (fig. 3) [3].

In the absence of the momenta other than pendulosity the trajectory of the gyroscope axis is an ellipse. In reality, since the presence of the momenta (such as suspension friction moment, torsion bar spring tension moment, etc.) is inevitable, the oscillations of the gyroscope axis decay in time, nevertheless the decay process lasts for quite a long time. That is why the computational algorithms for quick identification of the true meridian are required, which allow for solving the problem with the given accuracy and in short time at the maximal volume of measurements of the angle α .

The motion of the gyrotheodolite main axis is approximately described by the following equation [4]:

$$A\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + HU \cos \varphi \sin \varphi = M, \quad (3)$$

where $A\ddot{\alpha}$ is the inertia moment; $D\dot{\alpha}$ is the damping moment; $HU \cos \varphi \sin \varphi$ is the meridian alignment moment; M stands for the moment resulting from other unaccounted forces; U is the gyrotheodolite velocity.

Equation (3) can be considered as a particular case of an automatic control system (ACS).

The problem of identification of system parameters by the output signal measurement results is one of the relevant identification problems, which in the case of equation (1) consists in identifying the true meridian or the angle α equilibrium.

In those cases when in the process of problem solving the volume of the stored information and processing time are strictly regulated applying the classical methods (such as, for instance, Kalman filter, etc.) can't be justified. Then the finite-step method proposed in this paper can be successfully applied, which provides a solution after a finite predetermined number of computations without any iterative procedure involved. At the same time the solution obtained by this method is mathematically exact.

We need to mention here that the algorithm proposed provides a solution to the identification problem for a real ACS with the given accuracy in the case when its mathematical model slightly differs from the real one.

Problem setting. Main and secondary problems. The solution to equation (1) and those which are similar to it can be given by the sum of a constant R and decaying sinusoids as follows:

$$\alpha(t) = R + \sum_{k=1}^N A'_k R^{\beta_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k), \quad (4)$$

where β_k can be either positive or zero [4].

Since in the case of gyrotheodolite and some ACS's the constant is the main object to be identified, the problem of computing R with high accuracy in limited time is referred to as *the main problem* below. Then *the secondary problem* consists in identifying the parameters A'_k , β_k , ω_k , ψ_k . The algorithm presented in the paper provides for solving both of these problems. Nevertheless, the main focus is on the substantiation of the main problem with outlining the ways for solving the secondary one. Let us name the method presented *the method of equidistant points*.

Mathematical model. Method of equidistant points. Solving the main problem, i.e. the problem of identifying the constant R in (4), requires sufficient number N_1 of measurements $\alpha(t_j)$. The number N_1 depends on the quantity of the unknown parameters in (4) which need to be identified. We assume that the measurements are taken at regular intervals of time, then

$$t_j = t_0 + j\Delta t, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

where t_0 and t_j denote the moments of the initial and current measurements; Δt is the given step of measurements; j is the measurement number.

Let us choose a conditional midpoint on the measurement time interval from t_0 to t_N :

$$t_c = \frac{t_0 + t_p}{2} = t_0 + p'\Delta t, \quad (6)$$

where $p = 2p' < N_1$. The specific values of p' and N_1 are determined below.

In what follows we operate with the values t_j and t_{p-j} symmetric with respect to the midpoint.

From (5) and (6) it follows that:

$$t_c = \frac{t_j + t_{p-j}}{2}; \quad t_{p-j} = 2t_c - t_j,$$

that is why the method of solving the main problem given below is called the method of equidistant points:

t_{p-j} and t_j are distanced equally from t_c .

Assuming that the measurement $\alpha(t)$ can be given analytically by (4) we write down the differences and sums of measurements for equidistant points:

$$\begin{aligned} \alpha_{p-j} - \alpha_j &\equiv \alpha_{p'+(p'-j)} - \alpha_{p'-(p'-j)} = R + \sum_{k=1}^N A'_k e^{-\beta_k t_{p-j}} \sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) - R - \sum_{k=1}^N A'_k e^{\beta_k t_j} \sin(\omega_k t_j + \psi_k) = \\ &= \sum_{k=1}^N A'_k \left[e^{-\beta_k t_{p-j}} \sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) - e^{\beta_k t_j} \sin(\omega_k t_j + \psi_k) \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha_{p-j} + \alpha_j \equiv \alpha_{p'+(p'-j)} + \alpha_{p'-(p'-j)} = 2R + \sum_{k=1}^n A'_k \left[e^{-\beta_k t_{p-j}} \sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) + e^{\beta_k t_j} \sin(\omega_k t_j + \psi_k) \right]. \quad (8)$$

The dependence of t_j and t_{p-j} on the midpoint t_c is given by:

$$\begin{aligned} t_j &= t_0 + j\Delta t = t_0 + p'\Delta t - (p' - j)\Delta t = t_c - (p' - j)\Delta t; \\ t_{p-j} &= t_0 + (p - j)\Delta t = t_0 + p'\Delta t + (p' - j)\Delta t = t_c + (p' - j)\Delta t. \end{aligned} \quad (9)$$

We transform the expression in square brackets in (7) using *the Euler formulae*:

$$\begin{aligned} e^{-\beta_k t_{p-j}} \sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) - e^{\beta_k t_j} \sin(\omega_k t_j + \psi_k) &= \exp[-\beta_k t_c - \beta_k (p' - j)\Delta t] \sin[\omega_k t_c + \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k] - \\ &- \exp[-\beta_k t_c + \beta_k (p' - j)\Delta t] \sin[\omega_k t_c - \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k] = \exp[-\beta_k t_c - \beta_k (p' - j)\Delta t] \times \\ &\times \left\{ \exp[(\omega_k t_c + \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k) \cdot i] - \exp[(\omega_k t_c - \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k) \cdot (-i)] \right\} \frac{1}{2i} - \exp[-\beta_k t_c + \beta_k (p' - j)\Delta t] \cdot \\ &\cdot \left\{ \exp[(\omega_k t_c - \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k) \cdot i] - \exp[(\omega_k t_c + \omega_k (p' - j)\Delta t + \psi_k) \cdot (-i)] \right\} \frac{1}{2i} = \\ &= \exp[-\beta_k t_c + i(\omega_k t_c + \psi_k)] \cdot \sin[(p' - j)\Delta t (\omega_k + i\beta_k)] + \exp[-\beta_k t_c - i(\omega_k t_c - \psi_k)] \cdot \sin[(p' - j)\Delta t (\omega_k - i\beta_k)] = \\ &= a'_k \sin[x'_k (p - j)\Delta t] + a''_k \sin[x''_k (p' - j)\Delta t], \end{aligned} \quad (10)$$

where $a'_k = \exp[-\beta_k t_c + i(\omega_k t_c + \psi_k)]$; $a''_k = \exp[-\beta_k t_c - i(\omega_k t_c - \psi_k)]$; $x'_k = \omega_k + i\beta_k$; $x''_k = \omega_k - i\beta_k$; p' is the num-

ber of the measurement corresponding to the conditional midpoint.

Apparently the coefficients a'_k, a''_k, x'_k, x''_k are independent of the number j and, hence, are the same for any equidistant points α_{p-j} and α_j ($j=1, 2, \dots$).

By analogy transform the expression in the square brackets in (8):

$$e^{-\beta_k t_{p-j}} \cdot \sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) + e^{-\beta_k t_j} \cdot \sin(\omega_k t_j + \psi_k) = b'_k \cos[x'_k(p'-j)\Delta t] + b''_k \cos[x''_k(p'-j)\Delta t], \quad (11)$$

where $b'_k = -ia'_k$, $b''_k = ia''_k$.

In the case of zero coefficients $\beta_k = 0$ (10) and (11) are simplified to become:

$$\sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) - \sin(\omega_k t_j + \psi_k) = 2 \cos(\omega_k t_c + \psi_k) \sin(\omega_k(p'-j)\Delta t) = a'''_k \sin x'''_k(p'-j)\Delta t; \quad (12)$$

$$\sin(\omega_k t_{p-j} + \psi_k) + \sin(\omega_k t_j + \psi_k) = 2 \sin(\omega_k t_c + \psi_k) \cos \omega_k(p'-j)\Delta t = b'''_k \cos x'''_k(p'-j)\Delta t, \quad (13)$$

where $a'''_k = 2 \cos(\omega_k t_c + \psi_k)$, $b'''_k = 2 \sin(\omega_k t_c + \psi_k)$, $(a'''_k)^2 + (b'''_k)^2 = 4$, $x'''_k = \omega_k$.

Clearly, the coefficients a'''_k, b'''_k, x'''_k do not depend on the number in this case as well.

Comparing (10) and (12) we conclude that in the both cases $\beta_k \neq 0$ and $\beta_k = 0$ these expressions are of the same type with the only difference that for $\beta_k \neq 0$ we have two summands of the form $a_k \sin x_k(p'-j)\Delta t$ and for $\beta_k = 0$ only one such summand, where a_k and x_k are unknown values ($a_k = a'_k, a''_k$ or a'''_k ; $x_k = x'_k, x''_k$ or x'''_k).

Similarly, (11) and (13) are of the same form $b_k \cos x_k(p'-j)\Delta t$ with the unknown b_k and x_k , moreover, the coefficients b_k can be written in terms of a_k . By the above argument, substituting (10) and (11) in (7) and (8) we get:

$$\delta_m \equiv \alpha_{p-j} - \alpha_j = \sum_{k=1}^N A_k \sin x_k(p'-j)\Delta t; \quad \eta_m \equiv \alpha_{p-j} + \alpha_j = 2R + \sum_{k=1}^N B_k \cos x_k(p'-j)\Delta t, \quad (14)$$

where $A_k = A'_k a_k$, $B_k = A'_k b_k = f(A_k)$.

Form (8) and (10) it follows that for each summand of the form $A'_k e^{-\beta_k t_c} \sin(\omega_k t_c + \psi_k)$ there are two corresponding summands of the form $A_k \sin x_k(p'-j)\Delta t$ in the first formula of (14) and two summands of the form $B_k \cos x_k(p'-j)\Delta t$ in the second formula of (14). Thus each decaying sinusoid is reduced to two complex sinusoids (cosinusoids) with complex amplitudes. From (12) and (13) we have that for each summand of the form $A_k \sin(\omega_k t_c + \psi_k)$ there is one corresponding summand in (14).

Hence, in (14) the number N depends on the expected measurement composition and equals:

$$N = 2n_1 + n_2, \quad (15)$$

where n_1 is the number of the decaying sinusoids, n_2 is the number of the sinusoids that do not decay in formula (4), which is given a priori.

Consequently, formulae (14) derived above contain $2N+1$ unknowns: R, A_k, x_k , all of which are independent of the measurement number.

To simplify the further argument we introduce the following notations:

$$\Delta x_k = x_k \Delta t, \quad p'-j = m, \quad (16)$$

then the differences and sums of measurements are reduces to the form:

$$\delta_m \equiv \alpha_{p'+m} - \alpha_{p'-m} = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\Delta x_k \cdot m); \quad \eta_m \equiv \alpha_{p'+m} + \alpha_{p'-m} = 2R + \sum_{k=1}^N B_k \cos(\Delta x_k \cdot m), \quad (17)$$

with the coefficients A_k, B_k introduced in (14).

In what follows we omit the prime symbol from the notations a_k and x_k keeping in mind that these coefficients are the same as given by (19) depending on the value of β_k .

Thus we arrive at:

$$\delta_m \equiv \alpha_{p'+m} - \alpha_{p'-m} \equiv \sum_{k=1}^N A_k \sin(\Delta x_k \cdot m); \quad (18)$$

$$\eta_m \equiv \alpha_{p'+m} + \alpha_{p'-m} \equiv 2R + \sum_{k=1}^N B_k \cos(\Delta x_k \cdot m), \quad (19)$$

where the unknowns R, A_k and Δx_k do not depend on the measurement number, B_k can be written in terms of A_k (see formulae (14)).

To identify the unknowns let us consequentially set $m \equiv 1, 2, 3, \dots, N+1$ in (18) and write down the following system of equation:

$$\delta_m = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\Delta x_k \cdot m) \quad (m \equiv 1, 2, 3, \dots, N+1), \quad (20)$$

where A_k are the coefficients to be identified.

A non-trivial solution A_k exists if the following determinant equals zero [2]:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_{N+1} & \sin[(N+1)\Delta x_1] & \sin[(N+1)\Delta x_N] \\ \delta_N & \sin(N\Delta x_1) & \sin(N\Delta x_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_2 & \sin(2\Delta x_1) & \sin(2\Delta x_N) \\ \delta_1 & \sin \Delta x_1 & \sin \Delta x_N \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

which can be reduced to the form:

$$D_1^{(N)} = \begin{vmatrix} \delta_{N+1}^{(N)} & y_1^N & \dots & y_N^N \\ \delta_N^{(N)} & y_1^{N-1} & \dots & y_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_3^{(N)} & y_1^2 & \dots & y_N^2 \\ \delta_2^{(N)} & y_1 & \dots & y_N \\ \delta_1^{(N)} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

where $y_k = \cos \Delta x_k$, and $\delta_m^{(N)}$ is given by the formula:

$$\delta_m^{(\ell)} = 2\delta_m^{(\ell-1)} \quad (m=1, 2, \dots, \ell; \ell=2, 3, \dots, N),$$

which is derived by transforming D_1 as shown below.

We apply the following transformations to the determinant D_1 given by (21) [5].

We first subtract its third row from the first one, the forth row from the second one, and so on, i.e. we subtract the $(n+2)$ -th row of the determinant from its n -th row; the last row but one is kept unchanged and the last one is multiplied by 2.

Then in the n -th row of the determinant we get:

$$\sin(N+2-n)\Delta x_k - \sin(N+2-n-2)\Delta x_k = 2\cos(N-n+1)\Delta x_k \cdot \sin \Delta x_k.$$

We reduce each column by $2\sin \Delta x_k$ (assuming that $\Delta x_k \neq 0, k\pi$).

Thus,

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_{N+1}^{(1)} & \cos N\Delta x_1 & \dots & \cos N\Delta x_N \\ \delta_N^{(1)} & \cos(N-1)\Delta x_1 & \dots & \cos(N-1)\Delta x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_2^{(1)} & \cos \Delta x_1 & \dots & \cos \Delta x_N \\ \delta_1^{(1)} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

where $\delta_m^{(1)} = \delta_m - \delta_{m-2}$ ($m=3, 4, \dots, N+1$), $\delta_2^{(1)} = \delta_2$, $\delta_1^{(1)} = 2\delta_1$.

Next we add successively the first row of the determinant with its third row, the second row with the forth row, and so on up to the sum of the $(N-1)$ -st and $(N+1)$ -st rows; whereby we get in the n -th row:

$$\cos(N+1-n)\Delta x_k + \cos(N+1-n-2)\Delta x_k = 2\cos(N-n)\Delta x_k \cos \Delta x_k.$$

Multiplying the N -th and $(N+1)$ -st rows by 2 we then reduce each row of the determinant by 2:

$$D_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \delta_{N+1}^{(2)} & y_1 \cos(N-1)\Delta x_1 & \dots & y_N \cos(N-1)\Delta x_N \\ \delta_N^{(2)} & y_1 \cos(N-2)\Delta x_1 & \dots & y_N \cos(N-2)\Delta x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_3^{(2)} & y_1^2 & \dots & y_N^2 \\ \delta_2^{(2)} & y_1 & \dots & y_N \\ \delta_1^{(2)} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

where $y_k = \cos \Delta x_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$); $\delta_m^{(2)} = \delta_m^{(1)} + \delta_{m-2}^{(1)}$ ($m = 3, 4, \dots, N+1$); $\delta_2^{(2)} = 2\delta_2^{(1)}$; $\delta_1^{(2)} = 2\delta_1^{(1)}$.

Summing the determinant rows as above up to the sum of the $(N-2)$ -nd and N -th rows and multiplying the rows with numbers N , $N-1$ and $N+1$ by 2, after reducing all the columns by 2 we arrive at the following equation:

$$D_1^{(3)} = \begin{vmatrix} \delta_{N+1}^{(3)} & y_1^2 \cos[(N-2)\Delta x_1] & \dots & y_N^2 \cos[(N-2)\Delta x_N] \\ \delta_N^{(3)} & y_1^2 \cos[(N-3)\Delta x_1] & \dots & y_N^2 \cos[(N-3)\Delta x_N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_4^{(3)} & y_1^3 & \dots & y_N^3 \\ \delta_3^{(3)} & y_1^2 & \dots & y_N^2 \\ \delta_2^{(3)} & y_1 & \dots & y_N \\ \delta_1^{(3)} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

where $\delta_m^{(3)} = \delta_m^{(2)} + \delta_{m-2}^{(2)}$ ($m = 4, 5, \dots, N+1$); $\delta_m^{(3)} = 2\delta_m^{(2)}$ ($m = 1, 2, 3$).

By repeating the procedure we get:

$$D_1^{(N)} = \begin{vmatrix} \delta_{N+1}^{(N)} & y_1^N & \dots & y_N^N \\ \delta_N^{(N)} & y_1^{(N-1)} & \dots & y_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_3^{(N)} & y_1^2 & \dots & y_N^2 \\ \delta_2^{(N)} & y_1 & \dots & y_N \\ \delta_1^{(N)} & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (23)$$

where

$$\delta_m^{(\ell)} = \delta_m^{(\ell-1)} + \delta_{m-2}^{(\ell-1)} \quad (m = \ell+1, \dots, N+1); \quad (24)$$

$$\delta_m^{(\ell)} = 2\delta_m^{(\ell-1)} \quad (m = 1, 2, \dots, \ell; \ell = 2, 3, \dots, N), \quad (25)$$

with $y_k = \cos \Delta x_k$, and $\delta_m^{(N)}$ given by formulae (24), (25).

Expanding determinant (23) by the elements of its first column and dividing the equation obtained by the cofactors of the element $\delta_{N+1}^{(N)}$ we have:

$$\sum_{i=1}^N z_i \delta_{N+1-i}^{(N)} = -\delta_{N+1}^{(N)}, \quad (26)$$

where

$$z_i = (-1)^i \cdot \frac{D_{i+1}}{D_1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (27)$$

and the determinants D_{i+1} ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$) are derived by deleting the $(i+1)$ -st row from the table:

$$\begin{vmatrix} y_1^N & \dots & y_N^N \\ y_1^{N-1} & \dots & y_N^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1 & \dots & y_N \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

The determinant D_1 obtained from table (28) by deleting its first row is in fact the Vandermonde determinant and can be computed by the formula [2]:

$$D_1 = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \dots (y_1 - y_N)(y_2 - y_3) \dots (y_{N-1} - y_N). \quad (29)$$

The determinant D_1 does not vanish if

$$y_k \neq y_m \text{ for } k \neq m \quad (k, m = 1, 2, \dots, N). \quad (30)$$

Hence, if condition (30) holds then system (20) is reduced to a single linear equation (26) in N unknowns z_i .

By analogy one reduces the system of equations obtained from (19) for m equal to $0, 1, 2, \dots, N$:

$$\eta_m = 2R + \sum_{k=1}^N B_k \cos(\Delta x_k \cdot m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (31)$$

where the coefficients B_k are unknown. A non-trivial solution B_k exists if the following determinant is zero:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \eta_N - 2R & \cos(N\Delta x) & \dots & \cos(N\Delta x_N) \\ \eta_{N-1} - 2R & \cos[(N-1)\Delta x_1] & \dots & \cos[(N-1)\Delta x_N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_2 - 2R & \cos(2\Delta x_1) & \dots & \cos(2\Delta x_N) \\ \eta_1 - 2R & \cos\Delta x_1 & \dots & \cos\Delta x_N \\ \eta_0 - 2R & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Arguing as above, the determinant D_2 can be reduced to the form:

$$D_2^{(N)} = \begin{vmatrix} \eta_N^{(N)} - 2^N R & y_1^N & \dots & y_N^N \\ \eta_{N-1}^{(N)} - 2^N R & y_1^{N-1} & \dots & y_N^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_1^{(N)} - 2^N R & y_1 & \dots & y_N \\ \eta_0^{(N)} - 2^N R & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (32)$$

where

$$\eta_m^{(\ell)} = \eta_m^{(\ell-1)} + \eta_{m-2}^{(\ell-1)} \quad (m = \ell, \ell+1, \dots, N); \quad \eta_m^\ell = 2\eta_m^{(\ell-1)} \quad (m = 1, 2, \dots, \ell; \ell = 2, 3, \dots, N). \quad (33)$$

We expand determinant (32) following the same procedure as for determinant (22) above to get:

$$\sum_{i=1}^N z_i (\eta_{N-i}^{(N)} - 2^N R) = -(\eta_N^{(N)} - 2^N R), \quad (34)$$

where z_i are given by (27).

Introducing the notations $\varphi_i = \delta_{N+1-i}^{(N)}$; $Q = \eta_{N-i}^{(N)}$ for simplifying the representation, we reduce equations (26) and (34) to the form:

$$\sum_{i=1}^N z_i \varphi_i = -\varphi_0; \quad \sum_{i=1}^N z_i (Q - 2^N R) = -(Q_0 - 2^N R). \quad (35)$$

Thus constructing the linear combinations of differences (18) and sums (19) of measurements at equidistant points by formulae (25) and (33) we arrive at system of equations (35) in $N+1$ unknowns, namely N unknown values of z_i and the unknown constant R . This transformation has place if inequality (30) holds, which since $y_k = \cos \Delta x_k$ (where $\Delta x_k = x_k \cdot \Delta t$, $x_k = \omega_k \pm i\beta_k$) can be written as follows: $\cos x_k \Delta t \neq \cos x_m \Delta t$ ($k \neq m$, $k = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, N$) or, otherwise:

$$\Delta t \neq \frac{2\pi}{x_k \pm x_m}, \quad x_k \neq x_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; \quad k \neq m; \quad k = 1, 2, \dots, N), \quad (36)$$

that is the analytical form of measurements (4) does not contain same frequency sinusoids and the measurement step Δt must satisfy inequality (36).

In order to determine all the unknowns (N values of z_i and the constant R) from system (35) it needs to be expanded to contain $N+1$ equation. This can be done by using equation (35) N times, shifting the conditional midpoint by one step Δt to the right each next time, i.e.:

$$\sum_{i=1}^N z_i \varphi_{i,S} = -\varphi_{0,S} \quad (S = 0, 1, 2, \dots, N-1),$$

where $\varphi_{i,0} \equiv \varphi_i$, $\varphi_{0,0} \equiv \varphi_0$ from (35); $\varphi_{i,S} = \delta_{N+1-i+S}$, $\varphi_{0,S} = \delta_{N+1+S}^{(N)}$, $\delta_m^{(N)}$ are given by (25), z_i is given by (27).

Hence, the expanded system of equations for identifying N unknowns z_i and R is written in the form:

$$\sum_{i=1}^N z_i \varphi_{i,S} = -\varphi_{0,S} \quad (S = 0, 1, 2, \dots, N-1); \quad \sum_{i=1}^N z_i (Q_i - 2^N R) = -(Q - 2^N R). \quad (37)$$

All the values z_i can be found from the first N equations of system (37) in case the system determinant is non-zero:

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{1,0} & \varphi_{2,0} & \dots & \varphi_{N,0} \\ \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \dots & \varphi_{N,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,N-1} & \varphi_{2,N-1} & \dots & \varphi_{N,N-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (38)$$

which has place for the actual measurements.

Then from the last equation of (37) we find R :

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N z_i Q_i + Q_0}{2^N \left(\sum_{i=1}^N z_i + 1 \right)}. \quad (39)$$

This concludes the solution of the main problem of the method of equidistant points.

Apparently, to solve the main problem by formulae (37), (38) one needs the measurement $\alpha(t)$ taken at $3N+2$ points, where $N = 2n_1 + n_2$ according to (15), i.e. the number of measurements needs to be greater than the number of the unknowns in the measurement analytical formula (4).

The sufficient number of measurements is $N_1 = 3N+2$, and the measurement corresponding to the conditional midpoint satisfies $p' \geq N+2$.

The solution to the secondary problem can be derived by determining z_i from (37) and subsequent computation of y_j ($j = 1, 2, 3, \dots, N$), which are in fact the roots of the equation:

$$y^N + \sum_{i=1}^N (-1)^i z_i y^{N-1} = 0 \quad [4].$$

The values of y_j being determined we then find $\Delta x_j = x_j \Delta t$ and can compute β_k and ω_k by formulae (10). We also note that A_k and B_k can be identified from (20) and (31), and their values can then be used to compute the amplitudes A'_k and phases φ_k of the sinusoids in (4). Since this problem is not in the focus of the present paper we limit ourselves here to just outlining the ways of it's solving.

Prospects of further research. The further development of the methods of identification of system parameters comprises:

– development of the algorithms for solving the main problem in the case when the process is given in the form:

$$\alpha = R + \sum_{k=1}^N A'_k(t) e^{-\beta_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

where $A'_k(t)$ is the polynomial corresponding to the multiple roots of the differential equation considered;

- development of the efficient methods for solving the secondary problem;
- improvement of the algorithms aimed at reducing the number of the measurements required;
- construction of the error correction algorithms providing the improvement in accuracy while reducing the information retrieval time.

Studying these points provides a sufficient solution for a wide range of practical problems.

Conclusions. In this paper a mathematical substantiation and computational formulae of an innovative finite-step computational method are presented. The algorithm developed is efficient for solving both main and secondary problems. When solving such problems for specific systems their respective features need to be taken into account, which essentially improves the accuracy of the results as well as the processing time. The results and computational formulae proposed can be used for solving similar problems of identification of various automatic control systems.

Bibliography

1. Данилин В. П. Гироскопические приборы. – Москва : Высшая школа, 1965. – 539 с.
2. Каргу Л. И. Гироскопические приборы и системы : учебник для вузов. – Ленинград : Судостроение, 1988. – 240 с.
3. Павлов В. А. Теория гироскопа и гироскопических приборов : учебное пособие. – Ленинград : Судостроение, 1964. – 495 с.
4. Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Гироскопические приборы и системы. – Москва : Высшая школа, 1988. – 424 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – Москва : Наука, 1968. – 431 с.

References (transliterated)

1. Danilin V. P. *Гироскопические приборы* [Gyroscopic instruments]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965. 539 p.
2. Kargu L. I. *Гироскопические приборы и системы : учебник для вузов* [Gyroscopic instruments and systems: textbook for higher educational institutions]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1988. 240 p.
3. Pavlov V. A. *Теория гироскопа и гироскопических приборов : учебное пособие* [Theory of gyroscope and gyroscopic instruments: educational aid]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1964. 495 p.
4. Pel'por D. S. *Гироскопические системы. Гироскопические приборы и системы* [Gyroscopic systems. Gyroscopic instruments and systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988. 424 p.
5. Kurosh A. G. *Kurs vysshey algebrы* [Course in linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 431 p.

Received (надійшла) 09.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: tokmakova.irina58@gmail.com.

УДК 519.6

Є. Л. ХУРДЕЙ

ТЕОРІЯ ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ІЗ ЗАДАНИМИ ПРОЕКЦІЯМИ

Оператори апроксимації функції двох змінних, що інтерполюють її своїми проекціями по M непаралельних прямих, недостатньо досліджувалися в науковій літературі. У той же час ця теоретична проблема викликає практичний інтерес, коли дані проєкцій (інтеграли вздовж ліній) виходять із компактного сканера томографії. У роботі побудований оператор інтерполяції, який точно відновлює поліноми степеня $M-1$. Метод досліджувався для випадку системи взаємно перпендикулярних прямих та для трьох непаралельних перетинних прямих (сторін трикутника). Знайдено інтегральне представлення залишкового члена наближення диференціальних функцій отриманими операторами. Запропонований метод дозволяє розширити теорію та практичне застосування комп'ютерної томографії.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, оператори інтерполяції з відомими проекціями, залишок наближення, апроксимація, проєкції вздовж ліній.

Е. Л. ХУРДЕЙ

ТЕОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ЗАДАНЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ

Операторы аппроксимации функции двух переменных, которые интерполируют ее своими проекциями по M непараллельных прямым, недостаточно исследовались в научной литературе. В то же время эта теоретическая проблема вызывает практический интерес, когда данные проекции (интегралы вдоль линий) выходят из компактного сканера томографии. В работе построен оператор интерполяции, который точно восстанавливает полином степени $M-1$. Метод исследовался для случая системы взаимно перпендикулярных прямых и для трех непараллельных пересекающихся прямых (сторон треугольника). Найдено интегральное представление остаточного члена приближения дифференцируемых функций полученными операторами. Предложенный метод позволяет расширить теорию и практическое применение компьютерной томографии.

Ключевые слова: компьютерная томография, операторы интерполяции с известными проекциями, остаток приближения, аппроксимация, проекции вдоль линий.

© Є. Л. Хурдей, 2020

Y. L. KHURDEI

THEORY OF CONSTRUCTION OF OPERATORS OF INTERPOLATION WITH PREDETERMINED PROJECTIONS

Operators of approximation of the functions of two variable, interpolating the functions by their projections along M nonparallel lines, were not sufficiently considered in the scientific literature. At the same time, this theoretical problem has a strong practical interest when the given projections (integrals along lines) come from a computed tomography scanner. The paper constructs the interpolation operator which exactly restores the polynomials of degree $M-1$. The method was investigated for a system of mutually perpendicular lines and for three nonparallel intersecting lines (side of a triangle). An integral representation of the residual member of the approximation by the obtained operators for differentiable functions is found. The proposed method allows in expand theory and practical applications of computed tomography.

Key words computer tomography, operators of interpolation with known projections, remainder of the approximation, operators of interpolation, projections along lines.

Вступ. Пропонується і досліджується *теорія побудови операторів наближення функцій двох змінних*, які інтерполюють функцію в точках перетину M ($M \geq 3$) непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані значення проєкцій (інтегралів вздовж вказаних M прямих). Вважаються відомими лише вказані проєкції, які можуть надходити з комп'ютерного томографа. Невідомі інтерполяційні дані знаходяться з умови: побудований оператор повинен точно відновлювати всі поліноми степеня $M-1$ ($M=3$) або знаходяться з умови мінімуму побудованого оператора в нормі L_2 *методом найменших квадратів*. Метод досліджувався для випадку системи взаємно перпендикулярних прямих та для трьох непаралельних перетинних прямих (сторін трикутника). Знайдено інтегральне представлення залишкового члена наближення диференційовних функцій отриманими операторами. Метод допускає узагальнення на випадок M груп перетинних прямих, в кожній групі всі прямі паралельні.

Аналіз останніх досліджень. У відомих авторах публікаціях, присвячених методам розв'язання задач комп'ютерної томографії, [1 – 3] досліджуються методи, основані на використанні *прямого та оберненого перетворення Радона, прямого метода Фур'є* тощо.

В працях [4] та [5] запропоновано конструктивний підхід до побудови операторів наближення функцій двох змінних за допомогою відомих їх проєкцій вздовж заданої системи прямих. В цих роботах сформульовано загальний підхід до побудови операторів інтерполяції функції двох змінних в системі точок перетину M прямих, які мають задані значення проєкцій і задані значення наближуваної функції в точках перетину цих прямих.

В роботі [5] цей метод був досліджений для випадку, коли система прямих є взаємно перпендикулярною. В роботах [6] та [7] досліджено випадок трьох непаралельних перетинних прямих та випадок системи M перетинних прямих ніякі три з яких не перетинаються в одній точці.

В роботі [8] вперше запропоновано і досліджено метод наближення функцій двох змінних за допомогою операторів, що використовують лише проєкції вздовж трьох сторін трикутника.

Постановка задачі. В даній роботі досліджується метод побудови операторів інтерполяції із заданими проєкціями вздовж вказаних M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Вперше пропонується загальний підхід до вибору невідомих інтерполяційних значень наближуваної функції в точках інтерполяції, які є точками перетину вказаних прямих. Критерій полягає в наступному: оператор наближення, побудований за допомогою інтерполяційних даних в точках перетину вказаної системи прямих та проєкцій вздовж цих прямих, повинен точно відновлювати довільні поліноми $M-1$ ($M=3$) степеня від двох змінних.

Теорія побудови операторів інтерполяції функції $f(x, y)$ в точках перетину M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані проєкції вздовж вказаної системи прямих.

Нехай задано область $D \subset \mathbb{R}^2$, $\text{diam} D < \infty$, $\Gamma_k^* = D \cap \Gamma_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1, M}$. Нехай функція $f(x, y)$ має такі властивості: $f(x, y) \in C(D)$, $D = \text{supp}(f)$. Розглянемо M непаралельних прямих, які описуються рівняннями $\Gamma_k : \omega_k(x, y) \equiv \alpha_k \cdot x + \beta_k \cdot y - \phi_k = 0$, $k = \overline{1, M}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$.

Будуємо оператор $L1_M f(x, y)$, який інтерполює $f(x, y)$ в точках $(X_{pq}, Y_{pq}) \in \Gamma_p^* \cap \Gamma_q^*$, $p, q = \overline{1, M}$, $p \neq q$ у вигляді:

$$L1_M f(x, y) = \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^M f(X_{kl}, Y_{kl}) h_{kl}(x, y), \quad (1)$$

$$\text{де } h_{kl}(x, y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq l}}^M \frac{\omega_j(x, y)}{\omega_j(X_{kl}, Y_{kl})}.$$

Лема 1. Оператор $L1_M f(x, y)$ інтерполює кожну неперервну функцію $f(x, y)$ у точках (X_{pq}, Y_{pq}) ,

$p, q = \overline{1, M}$, $p \neq q$:

$$L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq}), \quad p, q = \overline{1, M}, \quad p \neq q.$$

Доведення.

Дійсно, підставивши у формулу (1) $x = X_{pq}$, $y = Y_{pq}$, отримаємо

$$L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ l < k}}^M f(X_{kl}, Y_{kl}) h_{kl}(X_{pq}, Y_{pq}).$$

Врахуємо, що $h_{kl}(X_{pq}, Y_{pq}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, l}}^M \frac{\omega_j(X_{pq}, Y_{pq})}{\omega_j(X_{kl}, Y_{kl})}$, та якщо $j = p$ або $j = q$, то $\omega_j(X_{pq}, Y_{pq}) = 0$. Тобто, лише

при $k = p$, $l = q$ $h_{kl}(X_{pq}, Y_{pq}) = 1$.

Тому, $L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ l < k}}^M f(X_{kl}, Y_{kl}) \Delta_{k,p} \Delta_{l,q} = f(X_{pq}, Y_{pq})$, де $\Delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Отже, $L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq})$, $p, q = \overline{1, M}$, $p \neq q$.

Лема 1 доведена.

Побудуємо оператор $L2_M f(x, y)$ у вигляді:

$$L2_M f(x, y) = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y)}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y) ds_j}. \quad (2)$$

Лема 2. Оператор $L2_M f(x, y)$ має такі властивості:

$$L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = 0, \quad p, q = \overline{1, M}, \quad p \neq q.$$

Доведення.

Підставимо у формулу (2) $x = X_{pq}$, $y = Y_{pq}$.

Врахуємо, що $L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(X_{pq}, Y_{pq})}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y) ds_j}$, бо у випадках $k = p$ або $k = q$, маємо

$$\omega_k(X_{pq}, Y_{pq}) = 0. \quad \text{Тобто} \quad \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(X_{pq}, Y_{pq}) = 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

Отже, $L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = 0$, $p, q = \overline{1, M}$, $p \neq q$.

Лема 2 доведена.

Побудова операторів інтерполяції функції двох змінних на системі точок перетину M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані проекції вздовж вказаної системи прямих.

Введемо позначення:

$$L_M f(x, y) = L1_M f(x, y) + L2_M (f(x, y) - L1_M f(x, y)). \quad (3)$$

Теорема 1. Оператор $L_M f(x, y)$ має такі властивості:

1. $L_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq})$, $p, q = \overline{1, M}$, $p \neq q$;

2. $\int_{\Gamma_j^*} L_M f(x, y) ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j$, $j = \overline{1, M}$.

Доведення.

1. З леми 1 витікає, що $L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq})$. Тому,

$$L_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) + L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) - L2_M L1_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq}) + L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) - L2_M f(X_{pq}, Y_{pq}) = f(X_{pq}, Y_{pq}), p, q = \overline{1, M}, p \neq q.$$

Таким чином, перше твердження теореми 1 доведене.

2. Для доведення твердження 2 теореми, звертаємо увагу на те, що при інтегруванні функції $L2_M(f(x, y) - L1_M f(x, y))$ по прямій Γ_j^* всі доданки, крім доданка при $k = j$ будуть дорівнювати 0. Тому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j^*} L_M f(x, y) ds_j &= \int_{\Gamma_j^*} (L1_M f(x, y) + L2_M(f(x, y) - L1_M f(x, y))) ds_j = \\ &= \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j + \int_{\Gamma_j^*} \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma_k^*} (f(x, y) - L1_M f(x, y)) ds_k \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y)}{\int_{\Gamma_k^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_k} ds_j = \\ &= \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j + \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma_k^*} (f(x, y) - L1_M f(x, y)) ds_k \frac{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_j}{\int_{\Gamma_k^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_k} = \\ &= \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j + \sum_{k=1}^M \int_{\Gamma_k^*} (f(x, y) - L1_M f(x, y)) ds_k \frac{\Delta_{k,j} \int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_j}{\int_{\Gamma_k^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_k} = \\ &= \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j + \int_{\Gamma_j^*} (f(x, y) - L1_M f(x, y)) ds_j \frac{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j} = \\ &= \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j + \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j - \int_{\Gamma_j^*} L1_M f(x, y) ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j, j = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Лема 3. Будь-який поліном $(M-1)$ -го степеня з властивостями $P_{M-1}(X_{pq}, Y_{pq}) = 0$ може бути однозначно представлений у вигляді $L2_M P_{M-1}(x, y) = \sum_{k=1}^M a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y)$, де a_k – коефіцієнти полінома $P_{M-1}(x, y)$.

Доведення.

Оскільки всі прямі перетинаються одна з одною і в одній точці не перетинається більше ніж дві прямі, то очевидно, що $L2_M P_{M-1}(X_{pq}, Y_{pq}) = 0$, $p \neq q$, оскільки в кожному добутку $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \omega_j(x, y)$ знайдеться такий множник $\omega_p(x, y)$ або $\omega_q(x, y)$, який дорівнює 0 в точці (X_{pq}, Y_{pq}) .

Для доведення того, що існують a_k , $k = \overline{1, M}$ не рівні 0 одночасно, знайдемо їх із системи

$$\int_{\Gamma_j^*} L2_M f(x, y) ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x, y) ds_j = \gamma_j, \quad j = \overline{1, M};$$

Нехай $f(x, y) = P_{M-1}(x, y)$ і з умови теореми $L2_M P_{M-1}(x, y) = \sum_{k=1}^M a_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y)$, тоді

$$\int_{\Gamma_j^*} L2_M P_{M-1}(x, y) ds_j = \sum_{k=1}^M a_k \int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x, y) ds_j = a_j \int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j = \gamma_j,$$

оскільки для кожного $k \neq j$ в добуток буде входити множник $\omega_k(x, y) \neq 0$ на лінії Γ_j .

Доводимо, що $a_j = \frac{\gamma_j}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j}$, $j = \overline{1, M}$. Ця рівність є очевидною, якщо $\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j \neq 0$. Вважа-

ємо, що $f(x, y)$ є фінітною такою, що $\text{supp } f(x, y) = D$ і кожна пряма Γ_k перетинає цю область так, що координати точок $(X_{k_{\min}}, Y_{k_{\min}})$, $(X_{k_{\max}}, Y_{k_{\max}})$ задовольняють умові $\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j \neq 0$.

Зауваження. Для випадку $M = 3$ доведення того, що $\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \omega_i(x, y) ds_j \neq 0$ очевидне, якщо інтегрувати

вздовж сторін трикутника.

Лема 3 доведена.

Теорема 2. Кожний поліном степеня $(M-1)$ може бути однозначно представлений за допомогою M проєкцій вздовж M прямих Γ_j , $j = \overline{1, M}$ і за допомогою C_{M-1}^2 інтерполяційних даних в точках перетину цих прямих.

Доведення.

Поліном степеня M від двох змінних має $C_{M+2}^2 = \frac{(M+2)(M+1)}{2}$ коефіцієнтів. Поліном степеня $M-1$ має $C_{M-1+2}^2 = C_{M+1}^2 = \frac{(M+1)M}{2}$ коефіцієнтів. Інтерполяційний оператор $L1_M f(x, y)$ має

$$C_{M-2+2}^2 = C_M^2 = \frac{M(M-1)}{2} \text{ коефіцієнтів.}$$

Тоді формула для полінома $L_M f(x, y) = L1_M f(x, y) + L2_M(f(x, y) - L1_M f(x, y))$ буде поліномом степеня $M-1$.

Поліном $L1_M f(x, y)$ є поліномом $(M-2)$ -го степеня з властивостями $L1_M f(x, y) \equiv f(x, y)$, $\forall f(x, y) \in P_{M-2}$, де $P_{M-2} = \left\{ \sum_{0 \leq i+j \leq M-2} a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ – множина поліномів від двох змінних степеня $(M-2)$.

Побудуємо оператор $L1_M P_{M-2}(x, y) = \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{s=r+1}^M P_{M-2}(X_{rs}, Y_{rs}) h_{rs}(x, y)$, де $h_{rs}(x, y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^M \frac{\omega_j(x, y)}{\omega_j(X_{rs}, Y_{rs})}$. Ці функції є

поліномами степеня $(M-2)$, оскільки кожна функція $h_{rs}(x, y)$ є базисним поліномом Лагранжевої інтерполяції

в $C_M^2 = \frac{M(M-1)}{2}$ точках перетину M прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Оскільки,

$C_M^2 + M = \frac{M(M-1)}{2} + M = M \left(\frac{M-1+2M}{2} \right) = \frac{M(M+1)}{2}$, то система функцій $h_{rs}(x, y)$ $r, s = \overline{1, M}$, $r \neq s$ і

$\frac{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^M \omega_r(x, y)}{\int_{\Gamma_s^*} \prod_{r=1}^M \omega_r(x, y) ds_s}$ створюють повну лінійно незалежну систему поліномів степеня $\leq M-1$.

Розглянемо функцію $L_M^* f(x, y) = L_{2M}(f(x, y) - L_{1M} f(x, y))$, яка має властивості:

1. Ця функція є поліномом степеня $M-1$;
2. $L_{2M}^* P_{M-2}(X_{rs}, Y_{rs}) = 0$, $r, s = \overline{1, M}$, $r \neq s$.

Згідно з припущенням леми 3, поліном $L_{2M}^* f(x, y)$ однозначно може бути знайдений за допомогою M проекцій від нього вздовж вказаної системи прямих. Він може бути представлений у вигляді:

$$L_{2M}^* f(x, y) = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j^*} (f(x, y) - L_{1M} f(x, y)) ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y)}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y) ds_j},$$

оскільки за припущенням $\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^M \omega_k(x, y) ds_j \neq 0$.

Звідси отримаємо: $L_M f(x, y) = L_{1M} f(x, y) + L_{2M}(f(x, y) - L_{1M} f(x, y))$ задовольняє всі необхідні властивості теореми.

Теорема 2 доведена.

Інтегральне представлення залишку наближення.

Теорема 3. Якщо $f(x, y)$ належить до класу $\mathbb{C}^M(D)$, $D = \text{supp } f(x, y)$, то похибка наближення $Rf(x, y) = f(x, y) - L_M f(x, y)$ може бути представлена в інтегральній формі

$$Rf(x, y) = r_{M-1} f(x, y) - L_M(r_{M-1} f(x, y)),$$

де $r_{M-1} f(x, y)$ – похибка наближення $f(x, y)$ в інтегральній формі.

Доведення. Кожну M разів диференційовану функцію можна представити у вигляді формули Тейлора

$$f(x, y) = T_{M-1} f(x, y) + \int_0^1 \frac{\partial^M}{\partial t^M} f(X_{pq} + t(x - X_{pq}), Y_{pq} + t(y - Y_{pq})) \cdot \frac{(1-t)^{M-1}}{(M-1)!} dt,$$

де $T_{M-1} f(x, y) = \sum_{0 \leq r+s \leq M-1} f^{(r,s)}(X_{pq}, Y_{pq}) \frac{(x - X_{pq})^r (y - Y_{pq})^s}{r!s!}$ – поліном Тейлора степеня $(M-1)$ розкладу функції $f(x, y)$ в околі точки (X_{pq}, Y_{pq}) . Враховуємо, що $T_{M-1} f(x, y)$ є поліномом Тейлора функції $f(x, y)$ степеня $(M-1)$, а оператори $L_M f(x, y)$ точно відновлюють всі поліноми степеня $(M-1)$. Згідно з лемою можемо написати наступну низку рівностей:

$$\begin{aligned} &= T_{M-1} f(x, y) + r_{M-1} f(x, y) - [L_M T_{M-1} f(x, y) + L_M r_{M-1} f(x, y)] = \\ &= T_{M-1} f(x, y) + r_{M-1} f(x, y) - L_M T_{M-1} f(x, y) - L_M r_{M-1} f(x, y) = \\ &= T_{M-1} f(x, y) + r_{M-1} f(x, y) - T_{M-1} f(x, y) - L_M r_{M-1} f(x, y) = \\ &= r_{M-1} f(x, y) - L_M r_{M-1} f(x, y). \end{aligned}$$

Теорема 3 доведена.

Приклад.

Розглянемо трикутник з вершинами $A_1(R, 0)$, $A_2\left(-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$, $A_3\left(-\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$ і рівняннями сторін (рис. 1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} : \omega_{12}(x, y) &= (x - X_1)(Y_2 - Y_1) - (y - Y_1)(X_2 - X_1) = 0; \\ \Gamma_{23} : \omega_{23}(x, y) &= (x - X_2)(Y_3 - Y_2) - (y - Y_2)(X_3 - X_2) = 0; \\ \Gamma_{13} : \omega_{13}(x, y) &= (x - X_1)(Y_3 - Y_1) - (y - Y_1)(X_3 - X_1) = 0. \end{aligned}$$

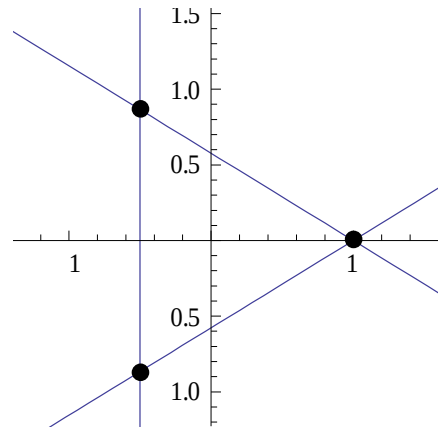


Рис. 1 – Задана система прямих на трикутнику.

Введемо позначення: $L1_3 f(x, y) = L1 f(x, y)$, та $L2_3 f(x, y) = L2 f(x, y)$.

Будуємо оператор $L1 f(x, y)$, який інтерполює $f(x, y)$ у вершинах трикутника $(X_k, Y_k), k = \overline{1, 3}$ у вигляді:

$$L1 f(x, y) = f(X_1, Y_1) \cdot \frac{\omega_{23}(x, y)}{\omega_{23}(X_1, Y_1)} + f(X_2, Y_2) \cdot \frac{\omega_{13}(x, y)}{\omega_{13}(X_2, Y_2)} + f(X_3, Y_3) \cdot \frac{\omega_{12}(x, y)}{\omega_{12}(X_3, Y_3)};$$

$$L2 f(x, y) = \frac{\omega_{23}(x, y)\omega_{31}(x, y)}{\int_{\Gamma_{12}} \omega_{23}(x, y)\omega_{31}(x, y)ds_{12}} \cdot \int_{\Gamma_{12}} f(x, y)ds_{12} + \frac{\omega_{12}(x, y)\omega_{31}(x, y)}{\int_{\Gamma_{23}} \omega_{12}(x, y)\omega_{31}(x, y)ds_{23}} \cdot \int_{\Gamma_{23}} f(x, y)ds_{23} +$$

$$+ \frac{\omega_{12}(x, y)\omega_{23}(x, y)}{\int_{\Gamma_{31}} \omega_{12}(x, y)\omega_{23}(x, y)ds_{31}} \cdot \int_{\Gamma_{31}} f(x, y)ds_{31}.$$

Введемо позначення:

$$Lf(x, y) = L1 f(x, y) + L2(f(x, y) - L1 f(x, y)).$$

Перевіримо властивості оператора $Lf(x, y)$:

$$1. Lf(X_i, Y_i) = f(X_i, Y_i), i = \overline{1, 3};$$

$$2. \int_{\Gamma_{ij}} Lf(x, y)ds_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} f(x, y)ds_{ij}.$$

1. Підставимо у формулу $Lf(x, y)$ точку $(X_i, Y_i), i = \overline{1, 3}$. Отримаємо

$$Lf(X_i, Y_i) = L1 f(X_i, Y_i) + L2(f(X_i, Y_i) - L1 f(X_i, Y_i)) = L1 f(X_i, Y_i) + L2 f(X_i, Y_i) - L2 L1 f(X_i, Y_i) =$$

$$= f(X_i, Y_i) + L2 f(X_i, Y_i) - L2 f(X_i, Y_i) = f(X_i, Y_i), i = \overline{1, 3}.$$

Таким чином, перша властивість доведена.

2. Розглянемо інтеграл

$$\int_{\Gamma_{ij}} Lf(x, y)ds_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} (L1 f(x, y) + L2(f(x, y) - L1 f(x, y)))ds_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} L1 f(x, y)ds_{ij} + \int_{\Gamma_{ij}} L2(f(x, y) - L1 f(x, y))ds_{ij} =$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} L1 f(x, y)ds_{ij} + \int_{\Gamma_{ij}} L2 f(x, y)ds_{ij} - \int_{\Gamma_{ij}} L2 L1 f(x, y)ds_{ij} =$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} L1 f(x, y)ds_{ij} + \int_{\Gamma_{ij}} L2 f(x, y)ds_{ij} - \int_{\Gamma_{ij}} L1 f(x, y)ds_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} L2 f(x, y)ds_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} f(x, y)ds_{ij},$$

$$(i, j) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Перевіримо, що $Lf(x, y) \equiv f(x, y)$ для всіх $f(x, y) \in P_2$.

Побудуємо оператор $L1 f(x, y)$ у вигляді:

$$L1 P_2(x, y) = P_2(X_1, Y_1) \frac{\omega_{23}(x, y)}{\omega_{23}(X_1, Y_1)} + P_2(X_2, Y_2) \frac{\omega_{31}(x, y)}{\omega_{31}(X_2, Y_2)} + P_2(X_3, Y_3) \frac{\omega_{12}(x, y)}{\omega_{12}(X_3, Y_3)}.$$

Цей поліном має властивості:

$$L1 P_2(X_k, Y_k) = P_2(X_k, Y_k), k = \overline{1, 3}$$

Поліном $P_2^*(x, y) = P_2(x, y) - L1P_2(x, y)$ є поліномом другого степеня з властивостями $P_2^*(X_k, Y_k) = 0$, $k = 1, 3$. Згідно з лемою 3, кожний такий поліном 2-го степеня може бути однозначно виражений формулою:

$$P_2(x, y) = \frac{\omega_{13}(x, y)\omega_{12}(x, y)}{\int_{\Gamma_{23}} \omega_{13}(x, y)\omega_{12}(x, y)ds_{23}} \cdot \gamma_{23} + \frac{\omega_{12}(x, y)\omega_{23}(x, y)}{\int_{\Gamma_{13}} \omega_{12}(x, y)\omega_{23}(x, y)ds_{13}} \cdot \gamma_{13} + \frac{\omega_{23}(x, y)\omega_{13}(x, y)}{\int_{\Gamma_{12}} \omega_{23}(x, y)\omega_{13}(x, y)ds_{12}} \cdot \gamma_{12}.$$

Таким чином, оператор інтерполяції функції $f(x, y)$ в вершинах трикутника (X_k, Y_k) , $k = 1, 3$ із заданими проекціями вздовж кожної сторони трикутника може бути представлений у вигляді:

$$L1f(x, y) = f(X_1, Y_1) \frac{\omega_{23}(x, y)}{\omega_{23}(X_1, Y_1)} + f(X_2, Y_2) \frac{\omega_{13}(x, y)}{\omega_{13}(X_2, Y_2)} + f(X_3, Y_3) \frac{\omega_{12}(x, y)}{\omega_{12}(X_3, Y_3)};$$

$$Lf(x, y) = L1f(x, y) + L2(f(x, y) - L1f(x, y)).$$

Отже, $Lf(x, y) \equiv f(x, y)$ для всіх $f(x, y) \in P_2$.

Висновки. В даній статті для випадку наближення функції 2-х змінних за допомогою відомих проекцій – інтегралів вздовж заданої системи M прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і серед яких немає паралельних та інтерполяційних даних в точках перетину вказаної системи прямих, запропоновано в методі побудови інтерполяційних операторів невідомі інтерполяційні дані знаходити з умов, щоб оператор наближення точно відновлював всі поліноми степеня $(M - 1)$. Всі результати сформульовані і доведені у вигляді лем та теорем. Доведена теорема про те, що кожний довільний поліном степеня $(M - 1)$ від двох змінних однозначно може бути представлений за допомогою лише M проекцій вздовж заданої системи прямих, якщо в ньому всі інші невідомі коефіцієнти у кількості $(C_{M+2}^2 - M)$ вибираються з умови, щоб отриманий оператор $L_M f(x, y)$ точно відновлював всі поліноми степеня $(M - 1)$. Знайдено інтегральне представлення залишку наближення M раз неперервно диференційовної функції 2-х змінних побудованими операторами.

Список літератури

1. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии : Пер. с англ. – Москва : Мир, 1990. – 279 с.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. – Москва : Мир, 1983. – 352 с.
3. Терновой К. С., Синьков М. В., Закидальский А. И. Введение в современную томографию. – Київ : Наукова думка, 1983. – 231 с.
4. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
5. Литвин О. О., Хурдей Є. Л. Методи побудови операторів із заданими проекціями вздовж перетинних прямих, які інтерполюють $f(x, y)$ в точках перетину цих прямих // Проблеми машиностроєння, № 3. – Харків. – 2013. – С. 60 – 67.
6. Литвин О. О., Хурдей Є. Л. Поліноміальна інтерполяція з відовими проекціями на довільній системі N груп прямих, які складаються з M паралельних прямих // Проблеми машиностроєння, № 3. – Харків. – 2014. – С. 33 – 37.
7. Литвин О. М., Литвин О. О., Хурдей Є. Л. Про вибір невідомих значень наближуваної функції в операторі інтерполяції із заданими проекціями // Біоніка інтелекта, №2. – Харків. – 2017. – С. 66 – 71.

References (transliterated)

1. Natterer F. *Matematicheskie aspekty komp'uternoy tomografii* [Mathematical Aspects of Computer Tomography, Trans. from Eng.]. Moscow, Mir Publ., 1990. p. 279.
2. Khermen H. *Vosstanovlenie izobrazheniy po proektsiyam* [Recover Images from Projections, Basics Reconstruction Tomography]. Moscow, Mir Publ., 1983. p. 352.
3. Ternovoy K. S., Sin'kov M. V., Zakidal'skiy A. I. *Vvedenie v sovremennuyu tomografiyu* [Introduction to Modern Tomography]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983. p. 231.
4. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlineation Functions and Some of their Applications]. – Kharkiv, Osнова Publ., 2002. p. 544.
5. Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Metody pobudovy operatoriv iz zadanymy proektsiyamy vzdovzh peretynnykh pryamykh, yaki interpoluyut' $f(x, y)$ v tochkakh peretynu tsykh pryamykh [Method for constructing operators with the given projections along intersecting straight lines interpolating $f(x, y)$ at the lines' intersection points]. *Problemy mashinostroeniya* [Journal of Mechanical Engineering]. Kharkiv, 2013, no. 3, pp. 60–67.
6. Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Polinomial'na interpolatsiya z vidomymy proektsiyamy na dovil'niy systemi N grup pryamykh, yaki skladayut'sya z M paralelnykh pryamykh [Polynomial interpolation with known projections on an arbitrary system of N groups of lines consisting of M parallel lines]. *Problemy mashinostroeniya* [Journal of Mechanical Engineering]. Kharkiv, 2014, no. 3, pp. 33 – 37.
7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Pro vybir nevidomykh znachen' nablyzhuval'noyi funktsiyi v operatori interpolatsiyi iz zadanymy proektsiyamy [About the selection of unknown data of approximated function in the operator of the interpolation with the set projection]. *Bionika intellekta* [Bionics Intellect]. Kharkiv, 2017, no. 2, pp. 66–71.

Надійшла (received) 07.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хурдей Євгенія Леонідівна (Хурдей Евгения Леонидовна, Khurdei Evheniia Leonidivna) – асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (095) 909-44-03; e-mail: evgenia_hurdei@ukr.net.

N. V. CHEREMSKAYA

STUDYING THE BEHAVIOR OF RANK (QUASIRANK) AND INFINITESIMAL CORRELATION FUNCTIONS OR CORRELATION DIFFERENCES IN LINEAR TRANSFORMATIONS OF RANDOM FUNCTIONS

The first-order linear stochastic equation $x(n+1) = ax(n) + b\xi(n)$, $x(n)|_{n=0} = x_0$ determines the simplest kind of regression signal that is widely used in applications. The case where the right part is a non-stationary sequence has not actually been investigated. In the paper the properties of the solution of this equation are studied within the framework of the correlation theory in the case when $\xi(n)$ belongs to a particular class of random non-stationary signals, in addition, the classification is carried out using the concepts of rank or quasirank of non-stationarity. The Hilbert approach to the correlation theory of random sequences utilized in the paper allows us to study the question of the asymptotic behavior of the correlation function and makes it possible to obtain a simple inhomogeneous representation of the correlation function in terms of the correlation difference.

Key words: correlation function, mathematical expectation, non-stationary random sequences and processes, rank of non-stationarity.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ РАНГУ (КВАЗІРАНГУ) ТА ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНИХ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ АБО КОРЕЛЯЦІЙНИХ РІЗНИЦЬ ПРИ ЛІНІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Лінійне різницеве стохастичне рівняння першого порядку $x(n+1) = ax(n) + b\xi(n)$, $x(n)|_{n=0} = x_0$ визначає найпростіший вид регресійного сигналу, який широко використовується в застосуваннях. Випадок, коли права частина є нестационарною послідовністю, фактично не досліджувалася. В статті досліджуються властивості розв'язку цього рівняння в межах кореляційної теорії у випадку, коли $\xi(n)$ належить тому чи іншому класу випадкових нестационарних сигналів, до того ж класифікація здійснюється за допомогою понять рангу або квазірангу нестационарності. Гільбертів підхід до кореляційної теорії випадкових послідовностей, використаний у статті, дозволяє досліджувати питання про асимптотичну поведінку кореляційної функції і отримати просте однозначне представлення кореляційної функції через кореляційні різниці.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, нестационарні випадкові послідовності і процеси, ранг нестационарності.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РАНГА (КВАЗИРАНГА) И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ИЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейное разностное стохастическое уравнение первого порядка $x(n+1) = ax(n) + b\xi(n)$, $x(n)|_{n=0} = x_0$ определяет простейший вид регрессионного сигнала, который широко используется в приложениях. Случай, когда правая часть представляет собой нестационарную последовательность, фактически не исследовался. В статье исследуются свойства решения этого уравнения в рамках корреляционной теории в случае, когда $\xi(n)$ принадлежит тому или иному классу случайных нестационарных сигналов, причем классификация осуществляется с помощью понятий ранга или квазиранга нестационарности. Гильбертов подход к корреляционной теории случайных последовательностей, использованный в статье, позволяет исследовать вопрос об асимптотическом поведении корреляционной функции и получить простое однозначное представление корреляционной функции через корреляционную разность.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, нестационарные случайные последовательности и процессы, ранг нестационарности.

Introduction. To solve applied problems, it is often necessary to consider deterministic linear transformations of random functions and find appropriate probability characteristics (mixed moments of various order, distribution laws). For instance, a necessity might arise in finding statistical characteristics of the output of a linear filter if the input is subjected to a random influence or determining statistical characteristics of an electromagnetic field on a chaotic screen, etc.

Analysis of recent research. An important role in applications is played by the class of linear transformations that preserves the properties of stationarity (homogeneity) [1 – 4]. For *non-stationary (inhomogeneous)* random functions, the structure of linear transformation did not play any role, since there were no characteristics that would describe deviations from *stationarity (homogeneity)*. The introduction in [8, 9] of infinitesimal correlation functions and correlation differences necessitated the consideration of new problems related to the study of the behavior of these functions in the linear transformations of random processes, sequences and fields. Obviously, with an arbitrary linear transformation of a stationary (homogeneous) random function, a new random function arises, which has, generally speaking, *an infinite rank (quasirank)*. Therefore, as in the case of linear transformations of stationary random functions, we should restrict ourselves to the corresponding classes of linear transformations [5, 6].

Formulation of the problem. To simulate a wide range of processes with discrete time, stochastic linear difference equations are used with a random right-hand part representing a discrete white noise [3, 7]. The case where the

right-hand part is a sequence belonging to a class of non-stationary random sequences has not actually been investigated. Also the nature of non-stationarity has not been studied. Given the above, the relevant task is to study the properties of the solution of linear difference stochastic equation of the first order (1) within the framework of correlation theory in the case when it belongs to a class of random non-stationary signals, in addition, classification is carried out by means of rank concepts [8] or quasirank non-stationarity [9].

Mathematical model. We begin by considering the linear first-order difference stochastic equation:

$$x(n+1) = ax(n) + b\xi(n), \quad x(n)|_{n=0} = x_0, \quad (1)$$

the solution of which is $x(n) = a^n x_0 + b \sum_{j=0}^{n-1} a^j \xi(n-1-j)$. If $x(n)|_{n=n_0 \geq 1} = x_0$, then $x(n) = a^{n-n_0} x_0 + b \sum_{k=n_0}^{n-1} a^{n-(k-1)} \xi(k)$; if $n_0 \rightarrow -\infty$ and $|a| < 1$, then $x(n) = b \sum_{k=-\infty}^{n-1} a^{n-(k-1)} \xi(k) = b \sum_{p=0}^{\infty} a^p \xi(n-1-p)$ (steady mode),

where $\xi(n)$ is a random sequence with a given expected value $M\xi(n, \omega)$ and known correlation function $K_{\xi\xi}(n, m)$.

Besides, $Mx(n_0, \omega) = Mx_0(\omega)$, $x_0(\omega)$ and $\xi(n, \omega)$ – are independent random variables.

Note that (1) defines the simplest kind of regression signal that is widely used in applications. Most often, when analyzing a system of form (1), $\xi(n)$ is assumed to be a stationary random sequence, moreover $K_{\xi\xi}(n, m) = c\delta_{nm}$, where δ_{nm} is a Kronecker symbol.

From (1), for the steady mode correlation function, we obtain

$$K_{xx}(n, m) = |b|^2 \sum_{p, q=0}^{\infty} a^p \overline{a^q} K_{\xi\xi}(n-1-p, m-1-q), \quad (|a| < 1). \quad (2)$$

Consider some particular cases of (2).

Let $\xi(n)$ be a stationary in a broad sense random sequence. Then

$$K_{xx}(n, m) = |b|^2 \sum_{p, q=0}^{\infty} a^p \overline{a^q} K_{\xi\xi}(n-m-(p-q)) = K_{xx}(n-m),$$

that is $x(n)$ is a stationary random sequence.

1) This fact is well known in applications [4], and the rank of non-stationarity of $x(n)$ is zero.

2) Let $\xi(n)$ be a non-stationary dissipative random sequence of finite non-stationarity rank r , which has an operator image in the corresponding Hilbert space H of the form $\xi(n) = A^n \xi_0$, where A is a limited dissipative operator with a finite non-Hermitian subspace $\dim \overline{\text{Im } AH} = r < \infty$. Then

$$K_{\xi\xi}(n, m) = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_{\alpha}(n+\tau) \overline{\varphi_{\alpha}(m+\tau)} + K_{\xi\xi}^{(0)}(n-m),$$

where $\varphi(n) = \langle A^n \xi_0, g \rangle$, g is a channel element of the operator A , and for $K_{xx}(n, m)$ we get

$$K_{xx}(n, m) = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_{\alpha}(n+\tau) \overline{\Phi_{\alpha}(m+\tau)} + K_{xx}^{(0)}(n-m),$$

where $\Phi_{\alpha}(n+\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} a^p \varphi_{\alpha}(n-1-p+\tau)$. It follows that $x(n)$ is a non-stationary random sequence which rank does not exceed r .

If we consider unsteady solutions of stochastic difference equation (1), then for $K_{xx}(n, m)$ we have

$$K_{xx}(n, m) = |b|^2 \sum_{j, l=0}^{n-1, m-1} a^j \overline{a^l} K_{\xi\xi}(n-1-j, m-1-l). \quad (3)$$

It can be seen from (3) that even when $\xi(n)$ is a stationary random sequence, $x(n)$ is a non-stationary sequence.

Consider the case when $K_{\xi\xi}(p, q)$ is of the form:

$$K_{\xi\xi}(p, q) = \sum_{\alpha=1}^r \psi_{\alpha}(p) \overline{\psi_{\alpha}(q)}, \quad (4)$$

where $\psi_{\alpha}(p) = \langle A^p \xi_0, e_{\alpha} \rangle$, e_{α} is a basis in the Hilbert space H .

Equality (4) is a finite-dimensional analogue of the Karhunen – Loeve decomposition for random sequences [10]. Then from (3) given (4) we obtain:

$$K_{xx}(n, m) = |b|^2 \sum_{\alpha=1}^r \Psi_{\alpha}(n) \overline{\Psi_{\alpha}(m)}, \quad (5)$$

where $\Psi_{\alpha}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a^j \psi_{\alpha}(n-1-j)$.

The rank of non-stationarity in this case does not exceed $2r$, since each summand in (4) or (5) generates two summands in the correlation difference. For example:

$$\text{if } K_{\xi\xi}(p, q) = \psi(p) \overline{\psi(q)}, \quad \text{then } K_{xx}(p, q) = \Psi(n) \overline{\Psi(m)}, \quad \Psi(n) = \sum_{j=0}^{n-1} a^j \psi(n-1-j) \quad \text{and}$$

$$W(n, m) = K(n, m) - K(n+1, m+1) = \Psi(n) \overline{\Psi(m)} - \Psi(n+1) \overline{\Psi(m+1)} = \sum_{\alpha, \beta}^2 \Theta_{\alpha}(n) J_{\alpha\beta} \overline{\Theta_{\beta}(m)},$$

where $\Theta_1(n) = \Psi(n)$, $\Theta_2(n) = \Psi(n+1)$, that is $\Theta_2(n+1) = \Theta_1(n)$, and the matrix J has the form $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (in the general case $\Psi(n)$ and $\Psi(n+1)$ are linearly independent).

It can be seen that the rank of non-stationarity does not exceed two. It is equal to one in the case when $\Psi(n)$ and $\Psi(n+1)$ are linearly dependent functions.

Consider a Hankel random sequence $\xi(n)$ with $K_{\xi\xi}(n, m) = K_{\xi\xi}(n+m)$. Then in the steady mode we obtain from (2) that $K_{xx}(n, m) = |b|^2 \sum_{p, q=0}^{\infty} a^p \overline{a^q} K_{\xi\xi}(n+m-p-q-2)$, hence $K_{xx}(n, m)$ depends only on $n+m$. If $\xi(n)$ is of

finite quasirank, that is $K_{\xi\xi}(n, m)$ is represented in the form: $K_{\xi\xi}(n, m) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\alpha}(n-l) \overline{\varphi_{\alpha}(m+l-1)} + K_{\xi\xi}^{(0)}(n+m)$,

then we obtain a similar image for $K_{xx}(n, m)$:

$$K_{xx}(n, m) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_{\alpha}(n-l) \overline{\Theta_{\alpha}(m+l-1)} + K_{xx}^{(0)}(n+m),$$

where $\Theta_{\alpha}(n) = \sum_{p=0}^{\infty} a^p \varphi_{\alpha}(n-p-1)$.

Remark. In the unsteady mode $K_{xx}(n, m) = \sum_{j,l=0}^{n-1, m-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi(n, \tau) \overline{\Phi(m, \tau)}$, where $\Phi(n, \tau) = b \sum_{j=0}^{n-1} a^j \varphi_{\alpha}(n-1-j+\tau)$.

Since $W(n, m) = |b|^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi(n, \tau) \overline{\Phi(m, \tau)} - |b|^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi(n+1, \tau) \overline{\Phi(m+1, \tau)}$, then the rank of the corresponding quadratic form in the general case is infinite.

Consider a linear system in the case of continuous time t , which is described by a stochastic differential equation of the n -th order of the form:

$$L_t \xi(t) = \eta(t), \quad (6)$$

where $L_t = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k}$, and $\eta(t)$ is a random process with a known mathematical expectation (let it be zero for simplicity)

and a correlation function $K_{\eta\eta}(t, s)$. Taking into account the corresponding initial conditions at $t = t_0$, the solution of equation (6) has the form:

$$\xi(t) = \xi_{\text{uniform}}(t) + \int_0^t G(t-s)\eta(s)ds, \quad (7)$$

where $G(t-s)$ is the corresponding Cauchy (Green's) function. If all the roots of the characteristic equation $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$ are negative or have a negative real part, then in (7) one can pass to the limit for $t_0 \rightarrow \infty$ and obtain the steady mode:

$$\xi_{\text{steady}}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)\eta(s)ds. \quad (8)$$

It follows from (8) that if $\eta(s)$ is a stationary random process, then $\xi_{\text{steady}}(t)$ is also a stationary random process. This simple reasoning is the basis for solving many applied problems of the correlation theory of stationary random processes (linear problems of filtering theory, forecasting, and others). [2 – 4, 7, 11 – 15].

We note that if $\eta(s)$ is a non-stationary dissipative random process of finite rank of non-stationarity, then it follows from (8) that $\xi_{\text{steady}}(t)$ is a non-stationary random process of finite rank of non-stationarity that does not exceed

the rank of the non-stationarity of $\eta(s)$. Indeed, since $K_{\eta\eta}(t, s) = \sum_{\alpha=1}^r \int_0^\infty \varphi_\alpha(t+\tau) \overline{\varphi_\alpha(s+\tau)} d\tau$ then we obtain for

$K_{\xi\xi}(t, s)$ the images $K_{\xi\xi}(t, s) = \sum_{\alpha=1}^r \int_0^\infty \Phi_\alpha(t+\tau) \overline{\Phi_\alpha(s+\tau)} d\tau$, where $\Phi_\alpha(t+\tau) = \int_0^\infty G(\sigma_1) \varphi_\alpha(t+\tau-\sigma_1) d\sigma_1$. In this

case, the infinitesimal correlation function has the form $V_{\xi\xi}(t, s) = \sum_{\alpha=1}^r \Phi_\alpha(t) \overline{\Phi_\alpha(s)}$. The statement is also true for non-

dissipative non-stationary random processes, where $K_{\eta\eta}(t, s)$ is of the form $K_{\eta\eta}(t, s) =$

$= \int_0^\infty \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(t+\tau) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s+\tau)} d\tau$, with the involutive matrix $J = (J_{\alpha\beta})$, such that $J^2 = I$, $J^* = J$.

If in equation (6) the coefficients a_k depend on t , then the rank of the non-stationarity is, in general, not finite, because $\xi(t)$ takes the form (under zero initial conditions) $\xi(t) = \int_{t_0}^t G(t-s)\eta(s)ds$ and

$$K_{\xi\xi}(t, s) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s G(t, \sigma_1) \overline{G(s, \sigma_2)} K_{\eta\eta}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 = \sum_{\alpha=1}^r \int_0^\infty \Phi_\alpha(t, \tau) \overline{\Phi_\alpha(s, \tau)} d\tau,$$

where $\Phi_\alpha(t, \tau) = \int_{t_0}^t G(t, \sigma_1) \varphi_\alpha(\sigma_1 + \tau) d\sigma_1$ and the rank of the quadratic form $\sum_{\alpha, \beta=1}^r V_{\xi\xi}(t_\alpha, t_\beta) a_\alpha \overline{a_\beta}$, generally

speaking, is infinite, since $V_{\xi\xi}(t, s) = - \sum_{\alpha=1}^r \int_0^\infty \left(\frac{\partial \Phi_\alpha(t, \tau)}{\partial t} \overline{\Phi_\alpha(s, \tau)} + \Phi_\alpha(t, \tau) \frac{\partial \overline{\Phi_\alpha(s, \tau)}}{\partial s} \right) d\tau$.

If we turn to linear transformations of fields, a sufficiently general linear transformation of the field $\xi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) has the image:

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = \int_V G(x, y) \eta(y) dy, \quad (9)$$

where $G(x, y)$ is Green's function of the corresponding differential or integro-differential operator, and $\eta(y)$ is the field of given random sources. If $G(x, y) = G(x-y)$, and $V = R_n$, then

$$\xi(x) = \int_{R_n} G(x-y) \eta(y) dy. \quad (10)$$

It follows from (9) that $\xi(x)$ is a statistically homogeneous field if $\eta(y)$ is a statistically homogeneous field. If the field $\eta(y)$ has a finite rank of inhomogeneity r , then, as in the case of non-stationary random processes, it is easy to show that the field $\xi(x)$ has a rank of inhomogeneity that does not exceed r .

For continuous Hankel random processes and fields, it is also true that the solutions of the form (7), (10), which

can be considered as linear transformations of the Hankel process or Hankel field, preserve the property of Hankel invariance, and random processes and fields of finite quasirang are mapped into random processes and fields of finite quasirang.

The following statement is crucial for further study. If we consider the general linear problem for ξ of the form:

$$L\xi(x) = \eta(x), \quad (11)$$

where L is an arbitrary linear deterministic operator, and $\eta(x)$ is a random process or a field with a continuous correlation function, then embedding $\eta(x)$ into corresponding Hilbert space H_η we also obtain a corresponding embedding of $\xi(x)$ in H_η , and stochastic problem (11) turns into a linear deterministic problem in H_η of the form $L\xi_x = \eta_x$. Within the framework of the correlation analysis of this problem, the corresponding correlation function is represented by a scalar product:

$$K_{\eta\eta}(x, y) = \langle \eta_x, \eta_y \rangle_{H_\eta}, \text{ and } K_{\xi\xi}(x, y) = \left\langle \left(L^{-1}\xi \right)_x, \left(L^{-1}\xi \right)_y \right\rangle_{H_\eta}.$$

This transition follows directly from Karhunen – Loeve orthogonal decomposition and can be used for solving linear stochastic problems.

Prospects for further research. The results obtained can easily be transferred to the case of vector equations of the form (1), where a and b are matrices of the corresponding order, or when a and b are operators in auxiliary variables. The proposed approach can be used to model non-stationary random sequences and their classification in the framework of correlation theory.

Conclusions. Thus, the correlation differences introduced in [8, 9] allow one to study quite completely the non-stationarity structure of some classes of random sequences, which are determined by stochastic difference equations. The Hilbert approach to the correlation theory of random sequences allowed us to study the question of the asymptotic behavior of the correlation function and made it possible to obtain a simple inhomogeneous representation of the correlation function in terms of the correlation difference.

Bibliography

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения оценок и модуляции. I том. – М.: Советское радио, 1972. – 744 с.
3. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 321 с.
4. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 724 с.
5. Черемская Н. В. О моделировании некоторых классов нестационарных случайных последовательностей при помощи треугольных моделей операторов // Радиотехника. – 2003. – Вып. 132. – С. 70 – 77.
6. Cheremskaya N. V. About one class of linear transformations of non-stationary random sequences // Тези доповідей XXVII міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2019, 15 – 17 травня 2019 р. у 4 ч. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019 р. – Ч. I. – С. 82.
7. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
8. Янцевич А. А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. I Корреляционная теория // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С. 139 – 141.
9. Черемская Н. В. Последовательности в гильбертовом пространстве бесконечного ранга нестационарности // Вісник Харківського університету. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 1999. – № 444. – С. 157 – 161.
10. Лозе М. Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.
11. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М., 1977. – 654 с.
12. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – К.: Наукова думка, 1975. – 276 с.
13. Ивахненко А. Г. Предсказание случайных процессов. – К.: Наукова думка, 1975. – 197 с.
14. Левин Б. Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
15. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием. – М.: Радио и связь, 1989. – 296 с.

References (transliterated)

1. Bendat Dzh., Pirsol A. *Prikladnoy analiz sluchaynykh dannykh* [Applied analysis of random data]. Moscow, Mir Publ., 1989. 540 p.
2. Van Tris G. *Teoriya obnaruzheniya otsenok i modulyatsiy. 1 tom* [Estimate and modulation detection theory. Vol. 1]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1972. 744 p.
3. Ostrem K. *Vvedeniye v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya* [Introduction to the stochastic management theory]. Moscow, Mir Publ., 1973. 321 p.
4. Tsyypkin YA. Z. *Teoriya impul'snykh sistem* [Pulse system theory]. Moscow, GIFML Publ., 1958. 724 p.
5. Cheremskaya N. V. O modelirovanii nekotorykh klassov nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey pri pomoshhi treugol'nykh modeley operatorov [On modeling a class of non-stationary random sequences by triangular operator models]. *Radiotekhnika* [Radio engineering]. 2003, Issue 132, pp. 70–77.
6. Cheremskaya N. V. About one class of linear transformations of non-stationary random sequences. *Tezy dopovidey XXVII mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi MicroCAD-2019, 15–17 travnya 2019 r. u 4 ch. CH. I.* [Abstracts of the XXVII International scientific and practical conference MicroCAD-2019, May 15–17, 2019, in 4 parts. Part I]. Kharkiv, NTU «KHPi» Publ., 2019. p. 82.

7. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nyye lineynyye otsenki i upravleniye* [Statistically optimal estimates and management]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
8. Yantsevich A. A. Nestatsionarnyye posledovatel'nosti v gil'bertovom prostranstve. I Korrelyatsionnaya teoriya [Non-stationary sequences in Hilbert space. I Correlation theory]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. 1986, Vol. 45, pp. 139–141.
9. Cheremskaya N. V. Posledovatel'nosti v gil'bertovom prostranstve beskonечnogo ranga nestatsionarnosti [Sequences in Hilbert space of infinite nonstationarity rank]. *Visnyk Kharkivsk'ogo universytetu. Ser. : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the Karazin University. Series: Mathematics, applied mathematics and mechanics]. 1999, no. 444, pp. 157–161.
10. Loeyv M. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry Publ., 1962. 719 p.
11. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, 1977. 654 p.
12. Ivakhnenko A. G. *Dolgosrochnoye prognozirovaniye i upravleniye slozhnyimi sistemami* [Long-term forecasting and random system management]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1975. 276 p.
13. Ivakhnenko A. G. *Predskazaniye sluchaynykh protsessov* [Prediction of random processes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1975. 197 p.
14. Levin B. R., Shvarts V. *Veroyatnostnyye modeli i metody v sistemakh svyazi i upravleniya* [Probabilistic models and methods in communication and management systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 312 p.
15. Fal'kovich S. Ye., Ponomarev V. I., Shkvarko YU. V. *Otimal'nyy priyem prostranstvenno-vremennykh signalov v radiokanalakh s rasseyaniyem* [Optimal reception of space and time signals in radio channels with scattering]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1989. 296 p.

Received (Надійшло) 26.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

УДК 681.518

Н. О. ЧІКІНА, І. В. АНТОНОВА, Е. М. СОЛОШЕНКО

СИСТЕМНИЙ МОДУЛЬ «РЕЗИСТЕНТНІСТЬ» НЕЧІТКОЇ ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ ПРОФЕСІЙНИХ РИЗИКІВ

Системний модуль «Резистентність» експертної системи з нечітким логічним виведенням побудовано за результатами якісного та кількісного аналізу професійних ризиків стану здоров'я робочих підприємств хіміко-фармацевтичної галузі Харкова та Харківської області. Модуль «Резистентність» є складовою частиною нечіткої експертної системи «РИЗИК» оцінки ризику розвитку професійно обумовлених захворювань. Якісний аналіз ризиків надав можливість ідентифікувати найбільш впливові на стан здоров'я фактори ризику. Запропоновано метод кількісної оцінки професійних ризиків в умовах неповноти інформації на основі аналізу кривих оцінки резистентності гомеостазу. Метод може бути використаний для диференціації рівнів ризику розвитку широкого кола захворювань.

Ключові слова: нечітка експертна система, якісний та кількісний аналіз ризику, професійні ризики, криві резистентності гомеостазу.

Н. А. ЧИКИНА, И. В. АНТОНОВА, Э. Н. СОЛОШЕНКО

СИСТЕМНЫЙ МОДУЛЬ «РЕЗИСТЕНТНОСТЬ» НЕЧЕТКОЙ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ РИСКОВ

Системный модуль «Резистентность» экспертной системы с нечетким логическим выводом построен по результатам качественного и количественного анализа профессиональных рисков состояния здоровья рабочих предприятий химико-фармацевтической отрасли Харькова и Харьковской области. Модуль «Резистентность» является составной частью нечеткой экспертной системы «РИСК» оценки риска развития профессионально обусловленных заболеваний. Качественный анализ рисков дал возможность идентифицировать факторы риска, оказывающие наибольшее влияние на состояние здоровья. Предложен метод количественного анализа профессиональных рисков в условиях неполноты информации на основе кривых оценки резистентности гомеостаза. Метод может быть использован для дифференциации уровней риска развития широкого круга заболеваний.

Ключевые слова: нечеткая экспертная система, качественный и количественный анализ риска, профессиональные риски, кривые резистентности гомеостаза.

N. A. CHIKINA, I. V. ANTONOVA, E. N. SOLOSHENKO

«RESISTANCE» SYSTEM MODULE OF PROFESSIONAL RISK FUZZY EXPERT SYSTEM

The «Resistance» system module of an expert system with a fuzzy logical output is based on the results of the qualitative and quantitative analysis of the occupational health risks of the chemical and pharmaceutical industries workers in Kharkov and Kharkov region. The «Resistance» module is an integral part of the «RISK» fuzzy expert system for assessing the risk of developing professionally caused diseases. Qualitative risk analysis made it possible to identify risk factors that have the greatest impact on the health status. A method is proposed for a quantitative analysis of occupational risks under conditions of incomplete information on the basis of curves for assessing the resistance of homeostasis. The method can be used to differentiate risk levels for the development of a wide range of diseases.

Key words: fuzzy expert system, qualitative and quantitative risk analysis, professional risks, homeostasis resistance curves.

© Н. О. Чікіна, І. В. Антонова, Е. М. Солошенко, 2020

Вступ. Дані моніторингу [1] стану здоров'я робітників підприємств хіміко-фармацевтичної промисловості свідчать про високий рівень захворюваності на *алергодерматози* та інші *шкіряні захворювання*, що, у свою чергу, може привести до збільшення кількості *професійно обумовлених захворювань* (ПОЗ).

Появу й удосконалення автоматизованих систем для масових обстежень населення не можна розглядати у відриві від процесів, що пов'язані із проникненням комп'ютерних технологій в лікарське мислення. Якщо на початку розвитку *медичної кібернетики* мова йшла про створення *експертних систем* для *диференціальної діагностики захворювань* зі схожою симптоматикою, то в останні роки виникає необхідність створення *автоматизованих інформаційних систем-порадників лікаря* [2].

Побудова моделей, що використовують міркування людини, й застосування їх у комп'ютерних системах являє собою одну з найважливіших науково-технічних проблем. При кількісному описі й побудові моделей біологічних об'єктів доцільно, а в ряді випадків – і необхідно, використовувати здатність людського інтелекту приймати практично корисні рішення в умовах неповної й невизначеної (нечіткої) інформації для того, щоб адекватно врахувати специфіку цих об'єктів. Потужним інструментом спільного вирішення цих проблем є математичний апарат нечіткої логіки, основи якого були запропоновані Л. Заде ще в 1965 році [3]. Це підштовхнуло дослідників до створення *нечітких експертних систем* (НЕС).

Логіко-лінгвістичні методи опису нечітких систем засновані на тому, що поведінка досліджуваної системи описується природною мовою (або близькою до природної) в термінах лінгвістичних змінних [4]. Вхідні й вихідні параметри системи є лінгвістичними змінними, а якісний опис процесу задається сукупністю найпростіших правил наступного виду: L_j : якщо $\tilde{A}_j$, то $\tilde{B}_j$, ($j = \overline{1, k_0}$), де $\tilde{A}_j$ й $\tilde{B}_j$ – нечіткі підмножини, що задані на декартовому добутку універсальних множин вхідних і вихідних лінгвістичних змінних відповідно.

Традиційно в алергології задача ранньої діагностики захворювання пов'язана з аналізом *факторів ризику* (ФР), кількість яких за останні роки стрімко зростає. Наявність ФР і факторів схильності до різних алергічних захворювань, оцінка рівня адаптаційно-компенсаторних можливостей організму дає можливість із певним ступенем упевненості індивідуально прогнозувати можливість розвитку професійно обумовлених алергодерматозів [5, 6].

Якісний аналіз ризиків проводиться за для ідентифікації ризиків, виявлення можливих причин їх появи, аналіз передбачуваних наслідків та рекомендацій по їх усуненню. Таким чином, у процесі якісного аналізу виявляються усі можливі ризики, вплив яких на цільовий признак X_0 має місце. Кількісний аналіз ризиків дає можливість визначити ступінь впливу ФР на розвиток захворювань, проводити *ранжування факторів*. Існує кілька підходів до визначення *критерію кількісної оцінки ризику* (статистичні методи, метод експертного оцінювання, метод аналогій та ін.).

Задача кількісної оцінки професійного ризику розвитку ПОЗ у робітників підприємств пов'язана із груповою характеристикою, що визначає місце роботи на підприємстві з найбільшим ризиком розвитку ПОЗ. А оскільки в основі НЕС лежить принцип обчислення суперпозиції багатьох впливів на остаточний результат (*композиційне правило Заде*), то реалізація отриманих вирішальних правил на основі нечіткого логічного виведення дозволяє врахувати спільний вплив цілого ряду факторів у розв'язку задачі прогнозу ризику розвитку ПОЗ.

В [7] описана НЕС оцінки ризику розвитку ПОЗ, що побудована на основі аналізу виявлених у результаті досліджень індивідуальних і групових ФР.

Аналіз останніх досліджень. Професійні алергічні захворювання шкіри є однією з істотних і актуальних проблем професійної патології, що помітно впливають на людей, суспільство, економіку [8]. У професіях із групи ризику захворюваність значно перевищує середній показник і досягає десятків людей на 10000 працюючих на рік. Професійні алергодерматози часто рецидивують і здатні приводити до тимчасової втрати працездатності, створюючи високий професійний, соціальний, психологічний вплив [9].

Одним з найперспективніших напрямів у медицині праці є розробка методології, що дозволяє комплексно оцінювати й прогнозувати показники здоров'я у взаємозв'язку з інтегральними параметрами виробничих факторів і функціональним напруженням організму працівника у відповідь на трудове навантаження [10].

Професійні шкідливості (контакт з речовинами хімічного й біологічного походження) є основною причиною виникнення професійно обумовлених алергодерматозів. Крім того, існують ФР, які не є причиною виникнення захворювання, але передують його розвитку [11]. Для ФР найбільш ефективною є оцінка їх спільного впливу на розвиток захворювання.

На етапі якісного аналізу ФР [5, 6, 11] були виявлені як індивідуальні, так і групові ФР розвитку професійно обумовлених алергодерматозів у робітників підприємств хіміко-фармацевтичної промисловості. Кількісний аналіз надав можливість порівнювати виявлені ФР розвитку ПОЗ за силою впливу, а за результатами порівняння – ранжувати. Виявилось, що найбільш впливовим на розвиток ПОЗ є ФР «Місце роботи» із градаціями

«Пов'язане», «Частково пов'язане» і «Не пов'язане» безпосередньо з контактом зі шкідливими речовинами, що викликають розвиток професійно обумовлених алергодерматозів. Це є професійний ризик розвитку ПОЗ.

Диференціація рівнів професійного ризику розвитку ПОЗ у робітників проводиться за результатами аналізу групових характеристик, що визначають, зокрема, місце роботи на підприємстві хіміко-фармацевтичної галузі й особливості анамнезу, тобто приналежності обстежуваних робітників до певної групи ризику.

Постановка задачі. На підприємствах хіміко-фармацевтичної промисловості до професійних ризиків відносять вплив активних хімічних речовин, що викликають різні захворювання *алергічного генезу*.

При формуванні вибірки, що відповідає вимогам проведених досліджень, частина даних, як правило, неповних, не оброблялась. Причинами такої неповноти даних були звільнення частини робітників з підприємства, перехід на інше місце роботи на даному підприємстві з меншим професійним ризиком. Крім того, не всі робітники звертаються в медсанчастину підприємства, особливо із приводу рецидивів захворювання, займаючись самолікуванням. Тому отримані раніше результати не повною мірою відображають наявну первинну інформацію.

Виходячи із цього, стандартні параметричні й непараметричні статистичні методи недостатньо ефективні для аналізу такої вибірки, що й визначає необхідність застосування спеціальних методів, у яких можна було б урахувати й використовувати неповноту наявної інформації. Дані, що містять неповну інформацію, називають *цензурованими* (censored). Найпоширенішими описовими методами дослідження цензурованих даних є побудова *таблиць дожиття* (mortality table) і *метод Каплана-Мейєра* (Kaplan-Meier method) [12]. Побудова таблиць дожиття є одним з найбільш традиційних методів дослідження даних про виживаність. Початково термін «виживаність» запозичений з лексики страхових компаній, які використовують його в статистичних розрахунках при страхуванні життя своїх клієнтів. За допомогою певної методики компанія оцінює потенційний ризик летального результату (страховий випадок) або середній час виживання (виживаність, час до події) клієнта з урахуванням супутніх ризиків, що й визначає розмір індивідуальних страхових внесків [13].

Тому актуальною є задача розробки методу диференціації рівнів ризику на основі якісної та кількісної оцінки професійних ризиків у робітників підприємств хіміко-фармацевтичної галузі за умови неповноти інформації, а також його реалізація у системному модулі «Резистентність» НЕС прогнозу ризику розвитку ПОЗ.

Математична модель. Згідно до введених у роботах [5, 6] позначень усі обстежені робітники були поділені на чотири групи ризику: ГР1 («Ті, які мають в анамнезі алергічні захворювання різної етіології»), ГР2 («Ті, які мають в анамнезі соматичні захворювання»), ГР3 («Ті, які мають в анамнезі різні шкірні захворювання неалергічного генезу»), ПЗ («Практично здорові»).

У даних дослідженнях проводилось порівняння захворюваності на ПОЗ у робітників, які потрапили в групу ризику ГР1 із груп ризику ГР2, ГР3 і ПЗ. Інакше кажучи, мала місце задача про вплив наявності в анамнезі обстежуваних робітників різних соматичних захворювань і шкірних захворювань неалергічного генезу на захворюваність на ПОЗ.

Ця задача розв'язувалась у два етапи. На першому етапі проводилось порівняння динаміки проявів ПОЗ у робітників із груп ризику ПЗ та об'єднаної групи ГР2,3. На другому етапі аналогічне порівняння проводилось для груп ризику ГР2 і ГР3.

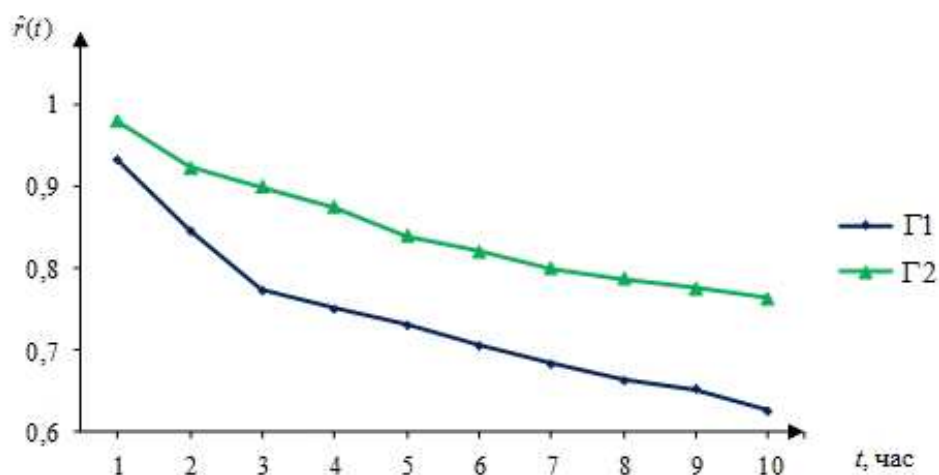


Рис. 1 – Криві оцінки $\hat{r}(t)$ резистентності гомеостазу: Γ_1 – по групі Ω_1 ; Γ_2 – по групі Ω_2 .

Уведемо в розгляд допоміжну функцію $r(t)$, що визначає в кожний момент часу t ймовірність того, що

ПОЗ ще не виявиться до моменту часу t , тобто враховуються тільки первинні прояви ПОЗ у робітників. Назвемо її функцією резистентності гомеостазу, що характеризує опірність організму професійним шкідливостям.

Для сукупності Ω вимірності n значення функції резистентності гомеостазу обчислюється у такий спосіб:

$$r(t) = \frac{n_t}{n}, \quad 1 \leq t \leq S,$$

де n_t – кількість робітників, які не мали проявів ПОЗ до моменту t роботи на даному підприємстві; $t=1$ відповідає початку роботи на даному підприємстві; S – найбільший стаж роботи, при якому вперше було виявлено ПОЗ. Ніякого іншого способу оцінки $r(t)$ не існує.

Для досягнення мети даних досліджень розглядалися дві вибірки Ω_1 й Ω_2 із усієї сукупності даних $\bar{\Omega}$, таким чином, що $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \bar{\Omega}$. При цьому у вибірку Ω_1 ввійшли обстежені робітники з групи ризику ГР2,3, а в Ω_2 – з групи ризику ПЗ. У якості вибірки $\bar{\Omega}$ була обрана відповідна частина бази даних обстеження робітників та службовців фармацевтичної фірми «Здоров'я», що сформована за результатами НДР [14], у якій брали участь співробітники Харківського НДІ Дерматології й Венерології та НТУ «ХПІ».

По кожній сформованій вибірці Ω_1 й Ω_2 були отримані оцінки функції резистентності гомеостазу $\hat{r}_1(t)$ й $\hat{r}_2(t)$:

$$\hat{r}_j(\tau) = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_\tau,$$

де $f_i = 1 - \frac{m_i}{n_i}$, $i = \overline{1, \tau}$, $1 \leq \tau \leq S$; $j = \overline{1, 2}$; m_i – число робітників з первинними проявами ПОЗ, що з'явилися до моменту $t = i$; n_i – загальна кількість робітників на підприємстві до моменту $t = i$; S – найбільший стаж роботи, при якому вперше було виявлено ПОЗ. При цьому в число n_i не входять робітники, чий стаж роботи $S < i$.

Результати обчислень представлені на рис. 1 у вигляді кривих Γ_1 і Γ_2 оцінки резистентності гомеостазу $\hat{r}_j(t)$, $j = \overline{1, 2}$, відповідних до груп обстежених Ω_1 і Ω_2 . Описана процедура називається методом Каплана – Мейєра [12] і застосовується при аналізі виживаності й побудові кривих дожиття.

За наявними даними криві Γ_1 й Γ_2 дають найбільш повну оцінку $\hat{r}(t)$ резистентності гомеостазу. Оцінка точності наближення була розрахована за *формулою Грінвуда* [12]. Наявність такої оцінки дозволяє визначати довірчі інтервали для $\hat{r}(t)$ в момент часу t .

Кількісна оцінка професійного ризику була проведена за результатами порівняння кривих Γ_1 і Γ_2 із застосуванням *непараметричного логрангового критерію* [12]. Нульова гіпотеза H_0 полягала в тому, що в обох групах Ω_1 і Ω_2 резистентність гомеостазу є однаковою.

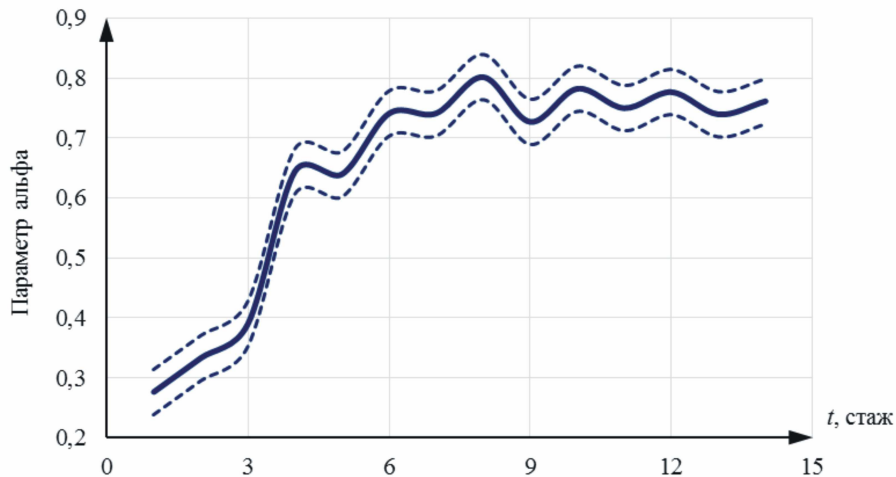
Однією з вимог логрангового критерію є те, що функції $r_1(t)$ й $r_2(t)$ пов'язані між собою співвідношенням $r_1(t) = [r_2(t)]^\alpha$. Оскільки співвідношення $r_1(t) = [r_2(t)]^\alpha$, що пов'язує рівні професійного ризику, відповідно до логрангового критерію має місце при кожному t , то параметр α можна оцінити як

$$\alpha = \frac{\ln(r_1(S))}{\ln(r_2(S))},$$

де $r_1(S)$ й $r_2(S)$ – резистентність гомеостазу в групах Ω_1 і Ω_2 до кінця спостереження – моменту часу $t = S$.

При цьому, якщо $\alpha = 1$, то криві оцінок $\hat{r}_1(t)$ і $\hat{r}_2(t)$ співпадають, що рівносильно відсутності відмінностей у рівнях професійних ризиків; якщо $\alpha < 1$, то рівень захворюваності на професійно обумовлені алергодерматози вище в групі обстежених Ω_1 , а значення функції резистентності $\hat{r}_1(t)$ нижче, і навпаки, якщо $\alpha > 1$, то рівень захворюваності вище в групі обстежених Ω_2 , та, відповідно, значення функції резистентності $\hat{r}_2(t)$ нижче.

Як показали обчислення, стандартне відхилення вибіркового розподілу склало $z_{\text{набл.}} = 1,9815$, що більше за критичне значення для рівня значущості $p < 0,05$ у випадку нормального розподілу, яке становить $z_{\text{кр.}} = 1,96$. Тому гіпотеза H_0 про відсутність відмінностей резистентності гомеостазу в групах Ω_1 і Ω_2 відхиляється. Крім того, значення параметра $\alpha = 0,797$ дає можливість зробити висновок про те, що рівень резистентності професійним ризикам вище в групі обстежених Ω_2 .

Рис. 2 – Динаміка параметру резистентності α .

Наведена вище оцінка параметру α є однією з можливих, що розрахована за умови $t = S$. Тому для отримання додаткової інформації було розглянуто динаміку цього параметра за весь час спостереження (рис. 2).

Візуальний аналіз рис. 2 дає можливість зробити такі висновки:

- 1) параметр резистентності α зростає для робітників підприємств зі стажем 1 – 7 років;
- 2) параметр резистентності α практично не змінюється для робітників підприємств зі стажем 7 – 15 років.

За аналогічною схемою були проаналізовані групи ризику ГР2 і ГР3. Однак по наявній базі даних відмінності в кривих оцінки резистентності виявлені не були.

Результати роботи програми. Результати проведених досліджень дають можливість використовувати метод кількісної оцінки професійних ризиків у НЕС «Ризик» [7] у якості відповідної підсистеми «Резистентність».

Нехай для опису множини Ω , що складається з n об'єктів, використовується k ознак (виявлених факторів ризику): $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$. Кожному об'єкту з множини Ω відповідає деяке значення цільової ознаки X_0 . Ознаки $X_i (i = \overline{0, k})$ виміряні в порядковій або номінальній шкалах. Цільова ознака X_0 має k_0 градацій, тобто набуває k_0 різних значень. Для всіх градацій ознак $X_i (i = \overline{0, k})$ були побудовані функції належності $\mu^{jp}(X_i)$ вхідної ознаки X_i нечіткому терму X_i^{jp} .

На основі результатів попередніх досліджень був синтезований набір k_0 правил виду:

L_j : ЯКЩО $(X_1 = X_1^{j1}) \wedge (X_2 = X_2^{j1}) \wedge \dots \wedge (X_n = X_n^{j1})$ (з вагою ω_{j1})

АБО $(X_1 = X_1^{j2}) \wedge (X_2 = X_2^{j2}) \wedge \dots \wedge (X_n = X_n^{j2})$ (з вагою ω_{j2})

.....

АБО $(X_1 = X_1^{jq_j}) \wedge (X_2 = X_2^{jq_j}) \wedge \dots \wedge (X_n = X_n^{jq_j})$ (з вагою ω_{jq_j}),

ТО $X_0 = X_0^j$,

де L_j – вирішальне правило з номером $j (j = \overline{1, k_0})$; X_i^{jp} – градація вхідної змінної X_i в правилі з номером $jp (j = \overline{1, k_0}, p = \overline{1, q_j})$; q_j – кількість правил, у яких вихід X_0 оцінюється термом X_0^j ; $\wedge$ – символ операції t – норми (логічного «і»).

На основі бази нечітких правил $L_j (j = \overline{1, k_0})$ була отримана модель Мамдані (Mamdani) [4] нечіткого логічного виведення для прогнозу ризику розвитку ПОЗ.

Оскільки на етапі аналізу наявних даних не були виявлені відмінності в рівнях професійного ризику в групах ГР2 і ГР3, то надалі вони були об'єднані в одну групу ГР2,3. Групам ризику ГР1, ГР2,3 і ПЗ у НЕС «Ризик» відповідають наступні градації цільової ознаки X_0 = «Рівень ризику розвитку ПОЗ»: $X_0^{(1)}$ = «Високий ризик розвитку ПОЗ», $X_0^{(2)}$ = «Підвищений ризик розвитку ПОЗ», $X_0^{(3)}$ = «Невисокий ризик розвитку ПОЗ».

Структурна схема доповненої НЕС оцінки ризику розвитку ПОЗ наведена на рис. 3.

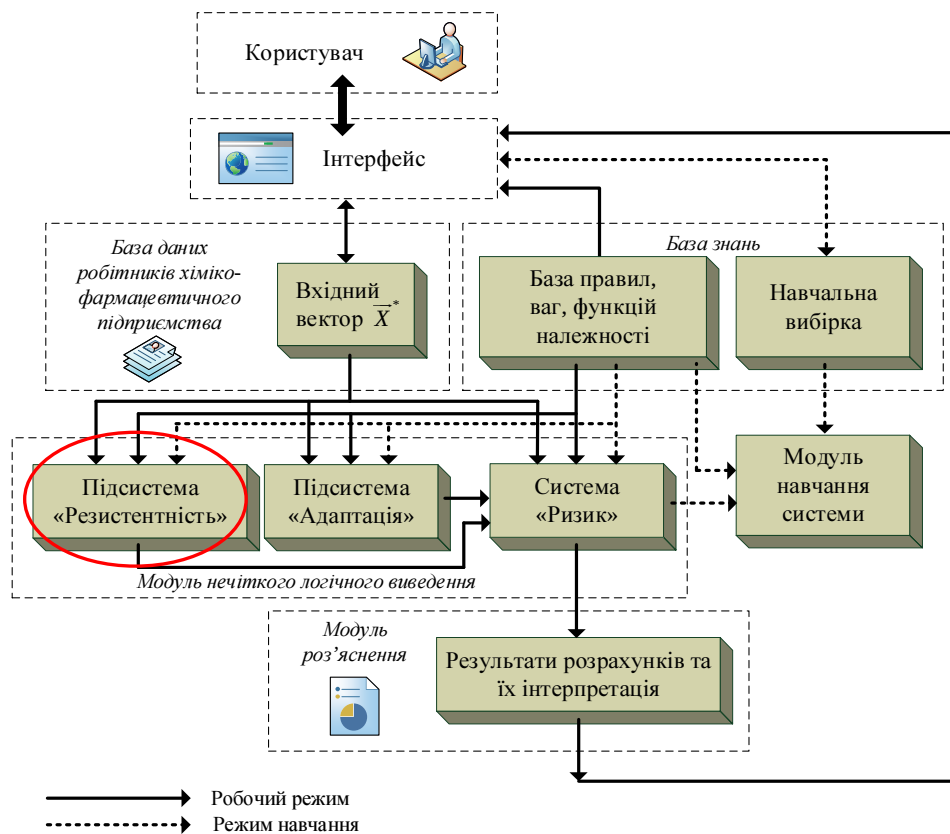


Рис. 3 – Структурна схема доповненої НЕС оцінки ризику розвитку ПОЗ.

Описана в [7] НЕС «Ризик» доповнена в модулі нечіткого логічного виведення підсистемою «Резистентність». Для включення до НЕС підсистеми «Резистентність» була введена додаткова ознака «Резистентність» із градаціями «Низька», «Висока».

У процесі структурної ідентифікації моделі системи для кожної змінної $X_i \left(i = \overline{0, k} \right)$ було задане її ім'я, терм-множини (градації) T_i , відповідні універсальні множини U_i .

Прийmemo позначення: X_1 = «Місце роботи»: T_1 = {«Пов'язане», «Частково пов'язане», «Не пов'язане»}, $U_1 \in [0, 1]$; X_2 = «Анамнез»: T_2 = {«Алергічні захворювання», «Різні соматичні захворювання», «Практично здорова людина»}, $U_2 \in [1, 3]$; X_3 = «Резистентність»: T_3 = {«Низька», «Висока»}, $U_3 \in [0, 1]$; X_4 = «Рівень резистентності»: T_4 = {«Низький», «Високий»}, $U_4 \in [0, 1]$. Для цільової ознаки: X_0 = «Рівень ризику розвитку ПОЗ»: T_0 = {«Високий ризик розвитку ПОЗ», «Підвищений ризик розвитку ПОЗ», «Невисокий ризик розвитку ПОЗ»}, $U_0 \in [0, 1]$.

Нижче наведені відповідні вирішальні правила в модулі нечіткого логічного виведення НЕС «Ризик»:

ЯКЩО (X_1 = «Пов'язане») (з вагою 0,8) АБО (X_2 = «Різні соматичні захворювання») (з вагою 0,7), ТО (X_3 = «Низька»).

ЯКЩО (X_1 = «Частково пов'язане») (з вагою 0,8) АБО (X_2 = «Практично здорова людина») (з вагою 0,8), ТО (X_3 = «Висока»).

ЯКЩО (X_4 = «Низький») (з вагою 0,6), ТО (X_0 = «Підвищений ризик розвитку ПОЗ»).

ЯКЩО (X_4 = «Високий») (з вагою 0,6), ТО (X_0 = «Невисокий ризик розвитку ПОЗ»).

Зміст наведених вирішальних правил полягає в наступному.

Якщо у обстеженого робітника в анамнезі присутні які-небудь соматичні захворювання або місце роботи пов'язане безпосередньо із професійними шкідливостями, то, відповідно до введеної вище термінології, опірність до ПОЗ у нього низька, а ризик розвитку ПОЗ підвищений.

Якщо у обстеженого робітника місце роботи частково пов'язане із професійними шкідливостями або в анамнезі відсутні будь-які шкірні або соматичні захворювання, то опірність до ПОЗ у нього висока, а ризик розвитку ПОЗ невисокий.

Згідно з механізмом Мамдани нечітке виведення в експертній системі здійснюється у такий спосіб [4]:

1. На етапі фазифікації визначаються ступені істинності, тобто значення функцій належності $\mu^{jp}(X_i)$ ($i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k_0}, p = \overline{1, q_j}$) для лівої частини правила L_j (що складається з jp підправил).

2. Для поточних вхідних значень $\overline{X_0} = (X_1^*; X_2^*; \dots; X_k^*)$ за мінімаксним методом визначається значення функції належності, що відповідає ступеню істинності цільової ознаки, тобто число

$$\mu_0^j(\overline{X}^*) = \bigvee_{p=1, q_j} (\omega_{jp} \wedge \mu^{jp}(X_i^*)), \quad j = \overline{1, k_0},$$

де $\vee(\wedge)$ – операція s – норми (t – норми).

3. На етапі дефазифікації визначається чітке значення цільової ознаки X_0 , відповідне до вхідного вектора $\overline{X_0} = (X_1^*; X_2^*; \dots; X_k^*)$. У даних дослідженнях це значення визначається за методом центру ваги.

Таким чином, на основі побудованих функцій належності, відповідних до факторів ризику, і сформованих на підставі виявлених закономірностей правил нечіткого логічного виведення в пакеті *Fuzzy Logic* середовища MATLAB, була реалізована модель НЕС прогнозу ризику розвитку ПОЗ.

Перспективи подальших досліджень. Результати проведених досліджень можуть бути використані для якісної та кількісної оцінки ризику розвитку широкого кола захворювань у пацієнтів з обтяженим анамнезом.

Висновки. Проведений у даній статті метод якісного та кількісного аналізу рівнів ризику розвитку ПОЗ на основі аналізу кривих резистентності гомеостазу був реалізований у вигляді підсистеми «Резистентність» у модулі нечіткого логічного виведення існуючої НЕС «Ризик». Це дає можливість використовувати результати роботи НЕС у якості рекомендацій із заходів профілактики ПОЗ при проведенні профілактичних оглядів на підприємстві, а також при укладанні медичного страхового полісу на виробництві зі шкідливими умовами праці.

Список літератури

1. Арустамян О. М., Ткачшин В. С., Кондратюк В. Є., Корж А. В., Алексійчук О. Ю. Сучасні проблеми професійної патології в Україні // ENVIRONMENT & HEALTH. – 2017. – № 4. – С. 62 – 67.
2. Солошенко Э.Н., Чикина Н. А. Определение факторов риска развития аллергодерматозов у рабочих предприятий химико-фармацевтической промышленности с помощью математических методов // Тезисы докладов научно-практической конференции «Метагигиена-93». – 1993. – С. 137 – 138.
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – № 8 (3). – Р. 338 – 353.
4. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М. : Горячая линия-Телеком, 2007. – 288 с.
5. Чикина Н. А., Антонова И. В. Изучение влияния внутренних факторов риска на развитие аллергодерматозов у рабочих химико-фармацевтических предприятий // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск : Информатика и моделирование. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2007. – № 19. – С. 195 – 200.
6. Чикина Н. А., Антонова И. В. Математические модели адаптации к вредным условиям труда на основе метода корреляционной адаптометрии // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск : Информатика и моделирование. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – № 49. – С. 184 – 189.
7. Поворознюк А. И., Чикина Н. А., Антонова И. В. Нечеткая экспертная система прогноза риска развития профессионально обусловленных заболеваний // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск : Информатика и моделирование. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. – № 31. – С. 127 – 132.
8. Montano D. Chemical and biological work-related risks across occupations in Europe: a review // Journal of Occupational Medicine and Toxicology. – 2014. – № 9, article 28. – DOI :10.1186/1745-6673-9-28.
9. Тимошина Д., Луб'янова І. Сучасні проблеми професійної алергопатології // Медицина праці. – 2011. – №4. – С. 47 – 51.
10. Орехова О. В., Павленко О. І. Професійні ризики здоров'я працюючих як сучасна концепція медицини праці // Український журнал з проблем медицини праці. – 2017. – № 3(52). – С. 77 – 87.
11. Чикина Н. А., Антонова И. В. АИС многофакторной профилактики профессионально обусловленных заболеваний в условиях вредного производства // Сб. науч. трудов 3-го Международного радиоэлектронного форума «Прикладная электроника. Состояние и перспективы развития». – Харьков, 2008. – Т.4. – С. 238 – 241.
12. Гланц С. Медико-биологическая статистика. – М. : Практика, 1999. – 459 с.
13. Румянцев П. О., Саенко В. А., Румянцева У. В., Чекин С. Ю. Статистические методы анализа в клинической практике. – Режим доступа : <http://medstatistic.ru/articles/StatMethodsInClinics.pdf>. – Дата звертання : 10.01.2020.
14. Отчет о научно-исследовательской работе «Разработка комплекса мероприятий с автоматизированной системой управления по ранней диагностике, лечению и профилактике больных аллергодерматозами среди рабочих с вредными условиями труда». – 1993. – № 01.9.10 050715.

References (transliterated)

1. Arustamyan O. M., Tkachishin V. S., Kondratyuk V. Ye., Korzh A. V., Alekseychuk O. Yu. Suchasni problemy profesynoyi patologiyi v Ukraini [Modern problems of occupational pathology in Ukraine]. ENVIRONMENT & HEALTH. 2017, no. 4, pp. 62–67.
2. Soloshenko E. N., Chikina N. A. Opredeleniye faktorov riska razvitiya allergodermatozov u rabochikh predpriyatiy khimiko-farmatsevticheskoy

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1 (1355) 2020.

- promyshlennosti s pomoshch'yu matematicheskikh metodov [Determining allergic dermatosis risk factors for chemical-pharmaceutical industry workers using mathematical methods]. *Tezisy dokladov nauchno-prakticheskoy konferentsii «Metagigiena-93»* [Meta hygiene'93. Proc. of the Sci.-Pract. Conf.], 1993, pp. 137–138.
3. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965, no. 8 (3), pp. 338–353.
 4. Shtovba S. D. *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami MATLAB* [Designing fuzzy systems using MATLAB]. Moscow, Goryachaya liniya-Telekom Publ., 2007. 288 p.
 5. Chikina N. A., Antonova I. V. Izuchenie vliyaniya vnutrennikh faktorov riska na razvitie allergodermatozov u rabochikh khimiko-farmatsevticheskikh predpriyatiy [Studying the influence of internal risk factors on the allergic dermatoses development of chemical and pharmaceutical enterprises workers]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vyipusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2007, no. 19, pp. 195–200.
 6. Chikina N. A., Antonova I. V. Matematicheskie modeli adaptatsii k vrednym usloviyam truda na osnove metoda korrelyatsionnoy adaptometrii [Mathematical models of adaptation to harmful working conditions based on the method of correlation adaptometry]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vyipusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2008, no. 49, pp. 184–189.
 7. Povoroznyuk A. I., Chikina N. A., Antonova I. V. Nechetkaya ekspertnaya sistema prognoza riska razvitiya professional'no obuslovlennykh zabolovaniy [Fuzzy expert system for predicting the risk of developing occupationally determined diseases]. *Vestnik NTU «KhPI». Tematicheskii vyipusk : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2010, no. 31, pp. 127–132.
 8. Montano D. Chemical and biological work-related risks across occupations in Europe : a review. *Journal of Occupational Medicine and Toxicology*. 2014, no. 9, article 28, doi :10.1186/1745-6673-9-28.
 9. Timoshina D., Lub'yanova I. Suchasni problemy profesinoyi alergopatologii [Modern problems of occupational allergology]. *Medytsyna pratsi* [Occupational health]. 2011, no. 4, pp. 47–51.
 10. Orekhova O. V., Pavlenko O. I. Profesiyni ryzyky zdorov'ya pratsyuyuchykh yak suchasna kontseptsiya medytsyny pratsi [Occupational health risks of workers as a modern concept of occupational medicine]. *Ukrayins'kyi zhurnal z problem medytsyny pratsi* [Ukrainian Journal of Occupational Health]. 2017, no. 3(52), pp. 77–87.
 11. Chikina N. A., Antonova I. V. AIS mnogofaktornoy profilaktiki professional'no obuslovlennykh zabolovaniy v usloviyakh vrednogo proizvodstva [The AIS of multifactorial prophylaxis of professionally caused diseases in harmful production]. *Sb. nauch. trudov 3-go Mezhdunarodnogo radioelektronnoho foruma «Prikladnaya elektronika. Sostoyanie i perspektivy razvitiya»* [Applied Electronics. Status and development prospects. Proc. of the 3rd International Radio-Electronic Forum]. Kharkov, 2008, vol. 4, pp. 238–241.
 12. Glants S. *Mediko-biologicheskaya statistika* [Primer of biostatistics]. Moscow, Praktika Publ., 1999. 459 p.
 13. Rumyantsev P. O., Saenko V. A., Rumyantseva U. V., Chekin S. Yu. *Statisticheskie metody analiza v klinicheskoy praktike* [Statistical methods of analysis in clinical practice]. Available at : <http://medstatistic.ru/articles/StatMethodsInClinics.pdf>. (accessed 10.01.2020).
 14. *Otchet o nauchno-issledovatel'skoy rabote «Razrabotka kompleksa meropriyatiy s avtomatizirovannoy sistemoy upravleniya po ranney diagnostike, lecheniyu i profilaktike bol'nykh allergodermatozami sredi rabochikh s vrednymi usloviyami truda»* [Report on the research work «Developing a set of measures for early diagnosis, treatment and prevention of patients with allergic dermatosis among workers with harmful working conditions using an automated control system»]. 1993, no. 01.9.10 050715.

Надійшло (received) 17.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Чікіна Наталія Олександрівна (Чикина Наталья Александровна, Chikina Natalia Aleksandrovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-93; e-mail: nachikina56@gmail.com.

Антонова Ірина Володимирівна (Антонова Ирина Владимировна, Antonova Iryna Vladimirovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-98-33; e-mail: antonova2601@gmail.com.

Солошенко Ельвіра Миколаївна (Солошенко Эльвира Николаевна, Soloshenko Elvira Nykolaevna) – доктор медичних наук, професор, Державна установа «Інститут дерматології та венерології Національної академії медичних наук України», м. Харків; тел.: (050) 648-13-85; e-mail: elvirasolo@ukr.net.

УДК 539.3

Е. Г. ЯНЮТИН, А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАН И ПЛАСТИН
В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

Рассматривается нестационарное деформирование механических объектов (мембран и пластин) имеющих форму прямоугольного равнобедренного треугольника. Для решения задачи используется подход, предложенный Дж. В. Стреттом (лордом Рэлеем) в монографии «Теория звука» и использованный С. П. Тимошенко в задаче о статическом деформировании треугольной пластины. Указанный подход состоит в дополнении треугольной пластины второй (идентичной исходной) до полного квадрата и решении задачи для квадратной мембраны/пластины, к которой кроме возмущающей силы прикладывается дополнительная нагрузка противоположного знака. Таким образом, решение задачи сводится к исследованию колебаний квадратной мембраны, закрепленной по контуру, или квадратной изотропной пластины средней толщины (типа Тимошенко), имеющей шарнирное опирание. Приведены примеры расчетов для треугольной мембраны и пластины средней толщины, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода при решении задач нестационарного деформирования.

Ключевые слова: треугольная мембрана, пластина средней толщины, нестационарное нагружение, форма прямоугольного равнобедренного треугольника, прогиб.

© Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, П. А. Егоров, 2020

Є. Г. ЯНЮТИН, О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ
НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАН І ПЛАСТИН
У ФОРМІ ПРЯМОКУТНОГО РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Розглядається нестационарне деформування механічних об'єктів (мембран і пластин), які мають форму прямокутного рівнобедреного трикутника. Для розв'язання задачі використовується підхід, запропонований Дж. В. Стреттом (лордом Релеєм) в монографії «Теорія звуку» і використаний С. П. Тимошенко у задачі про статичне деформування трикутної пластини. Зазначений підхід полягає в доповненні трикутної пластини другою (ідентичною вихідній) до повного квадрату і розв'язанні задачі для квадратної мембрани/пластини, до якої крім збурюючого навантаження прикладається додаткове протилежного знаку. Таким чином, розв'язання задачі зводиться до дослідження коливань квадратної мембрани, яка закріплена по контуру, або квадратної ізотропної пластини середньої товщини (типу Тимошенко), що має шарнірне обпирання. Наведені приклади розрахунків для трикутної мембрани і пластини середньої товщини, які демонструють ефективність запропонованого підходу при розв'язанні задач нестационарного деформування.

Ключові слова: трикутна мембрана, пластинка середньої товщини, нестационарне навантаження, форма прямокутного рівнобедреного трикутника, прогин.

Y. G. YANYUTIN, A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV
NONSTATIONARY VIBRATIONS OF RECTANGULAR ISOSCELES TRIANGLE SHAPED
MEMBRANES AND PLATES

Nonstationary deforming of mechanical objects (membranes and plates) having the shape of a rectangular isosceles triangle is considered. To solve the problem, we use the approach proposed by J. V. Strutt (Lord Rayleigh) in the monograph "The Theory of Sound" and used by S. P. Timoshenko in the problem of static deformation of a triangular plate. This approach consists in supplementing the triangular plate with the second one (identical to the original plate) to compose a full square and solving the problem for a square membrane/plate, to which, in addition to the disturbing force, an additional load of the opposite sign is applied. Thus, solving the problem is reduced to the study of vibrations of a square membrane fixed along the contour or of a hinged square isotropic plate of medium thickness (Timoshenko type). Examples of calculations for a triangular membrane and a medium-thickness plate are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach in solving problems of nonstationary deformation.

Key words: triangular membrane, medium-thickness plate, nonstationary loading, shape of a rectangular isosceles triangle, deflection.

Введение и анализ последних исследований. Теория колебаний прямоугольной мембраны может быть использована для изучения колебаний треугольной мембраны. Рекомендации по этому вопросу приведены Дж. В. Стреттом в работе, которая относится к одной из лучших книг по теории колебаний деформируемых объектов [1]. В упомянутой книге он пишет: «Изложенная ... теория квадратных мембран включает в себе гораздо больше, чем мы первоначально имели в виду... Так, например, там, где диагональ квадрата представляет узловую линию, мы получаем решение, примененное к мембране, закрепленная граница которой представляет равнобедренный прямоугольный треугольник».

Позже прием, подсказанный лордом Рэлеем, был использован в монографии [2] при решении задачи о статическом деформировании треугольной пластинки.

В настоящее время исследование объектов, имеющих произвольную сложную форму, принято выполнять с использованием численных методов, зачастую метода конечных элементов. Кроме того, широкое распространение получили пакеты прикладных программ ANSYS, NASTRAN, COSMOS и другие, в которых не сложно получить решение прямых задач для рассматриваемых в этой статье треугольных объектов. Однако, всегда представляет интерес получение аналитических решений, которые дают возможность построения решений не только прямых, но и обратных задач механики деформируемого твердого тела.

Вынужденные колебания мембраны в форме прямоугольного равнобедренного треугольника. В первой части статьи будет приведено описание решения задачи о вынужденных колебаниях мембраны в виде треугольника (рис. 1, а). Для простоты рассматриваем колебания мембраны, вызванные внешними сосредоточенными воздействиями.

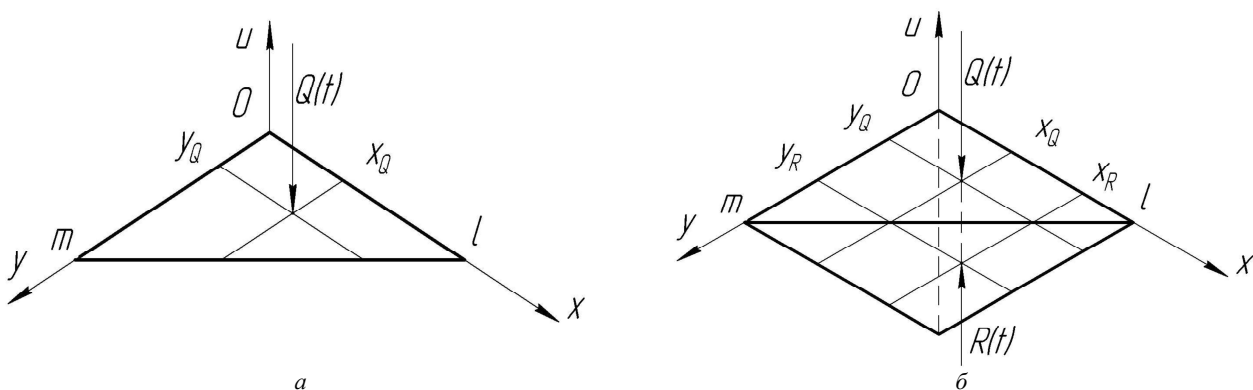


Рис. 1 – Схема исследуемой системы.

Задача о колебаниях мембраны сводится к решению следующего уравнения, подобного приведенному в

[3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} Q^*(x, y, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, y, t)$ – отклонения точек мембраны от плоскости xOy ; $a^2 = T / \rho$; T – величина натяжения мембраны; ρ – поверхностная плотность, считающаяся постоянной; $Q^*(x, y, t)$ – интенсивность поперечной нагрузки, действующей на мембрану.

Система координат x, y и связанная с ней прямоугольная мембрана показаны на рис. 1, б. Поскольку мембрана предполагается квадратной, то длина одной ее стороны равна длине второй: $m = l$. Начальные условия предполагаем нулевыми, то есть $u|_{t=0} = f(x, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x, y) = 0$. Диагонали мембраны лежат на прямых, уравнения которых следующие:

$$y - x = 0, \quad y + x - l = 0. \quad (2)$$

Необходимо обеспечить удовлетворение таких граничных условий:

$$u(0, y, t) = 0 \quad (\text{на первой стороне треугольника});$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (\text{на второй стороне треугольника});$$

$$u(x, l - x, t) = 0 \quad (\text{на третьей стороне треугольника}). \quad (3)$$

Укажем, что первые два условия из (3) выполняются автоматически при выборе в качестве основы прямоугольной мембраны. И задача состоит только в удовлетворении третьего условия (3) – равенства нулю прогибов на диагонали $u(x, l - x, t) = 0$. Для этого воспользуемся дополнительной силой, приложенной к прямоугольной мембране.

Пусть действующая сила меняется во времени как функция $Q(t)$. Эта функция является заданной в случае, если решается прямая задача, и неизвестной, если решается обратная задача (определение изменения во времени возмущающей силы).

Введем в рассмотрение еще одну силу. Первая приложена в точке с координатами x_Q, y_Q , а вторая приложена в точке с координатами x_R, y_R , где $x_R = l - y_Q, y_R = l - x_Q$. Вторая точка расположена симметрично по отношению к первой относительно прямой $y + x - l = 0$. Формулы для указанных сосредоточенных воздействий следующие:

$$Q(x, y, t) = P(t) \delta(x - x_Q) \delta(y - y_Q);$$

$$R(x, y, t) = -P(t) \delta(x - x_R) \delta(y - y_R). \quad (4)$$

Используя аналогичные подходы к решению задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны [4], получим выражение, определяющее процесс колебаний мембраны в форме равнобедренного прямоугольного треугольника:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^Q}{\lambda_{kn}} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_{kn}(t - \tau)) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^R}{\lambda_{kn}} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_{kn}(t - \tau)) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}, \quad (5)$$

$$\text{где } \lambda_{kn}^2 = \frac{a^2 \pi^2}{l^2} (k^2 + n^2); \quad C_{kn}^Q = \frac{1}{\rho} \frac{4}{l^2} \sin \frac{k\pi x_Q}{l} \sin \frac{n\pi y_Q}{l}; \quad C_{kn}^R = \frac{1}{\rho} \frac{4}{l^2} \sin \frac{k\pi x_R}{l} \sin \frac{n\pi y_R}{l}.$$

Рассмотрим два варианта приложения сосредоточенной силы к мембране. Первый – сила находится на прямой $y - x = 0$ ($y = x$), и второй вариант – сила приложена в произвольной точке мембраны.

Начнем со случая, когда сосредоточенная сила находится на прямой $y - x = 0$.

Покажем, что на прямой $y + x = l$ соотношение (5) принимает значения равные нулю, то есть на третьей стороне мембраны удовлетворяется условие закрепления.

Для простоты предположим, что функция $P(t) = qH(t)$ (пропорциональна *единичной функции Хевисайда*). Это упрощение не является принципиальным.

После элементарных для тригонометрических функций преобразований формулу (5) можно будет записать в следующем виде (при условии, что $y = l - x$, а $y_Q = x_Q$):

$$u(x, l - x, t) = \frac{q}{\rho a^2 \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1 - \cos(\lambda_{kn} t)}{k^2 + n^2} \sin \frac{k\pi x_Q}{l} \sin \frac{n\pi x_Q}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[(-1)^{n+1} - (-1)^{k+1} \right]. \quad (6)$$

Если в соотношении (6) n и k одновременно четные, то выражение в квадратных скобках равно нулю. Если n и k одновременно нечетные, то выражение в квадратных скобках также равно нулю. Если одно из чисел n или k четно, а второе нечетно, то квадратная скобка будет формировать число 2 или -2 .

В последнем случае в бесконечной сумме (6) будут встречаться члены, одинаковые по модулю, но с разными знаками. Следовательно, на третьей стороне треугольника будет иметь место $u(x, l - x, t) \equiv 0$.

Рассмотрим более общий случай расположения возмущающей силы, действующей на треугольную мембрану, когда сосредоточенная сила не находится на прямой $y - x = 0$. В этом случае вторая сила формирует симметрию в колебаниях мембраны и обеспечивает закрепление сторон треугольника вдоль прямой $y + x = l$. Нетрудно показать, что в силу рассмотренных ранее соображений функция (5) при $y = l - x$ также равна нулю.

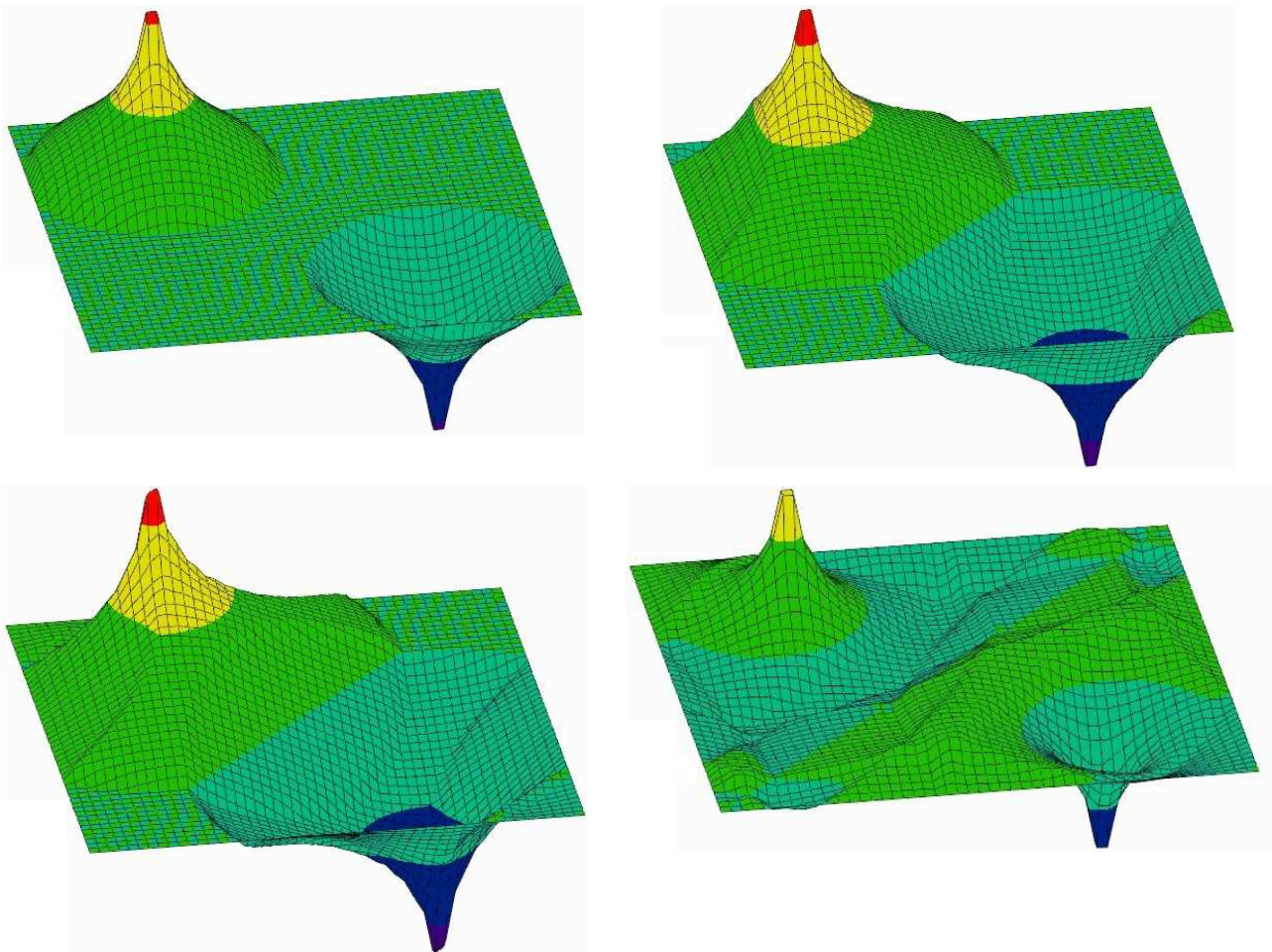


Рис. 2 – Процесс деформирования мембраны в различные моменты времени.

То есть выражение (5) определяет нестационарные колебания мембраны в форме равнобедренного прямоугольного треугольника с закреплением ее вдоль всех сторон.

В качестве исходных данных для численных расчетов по соответствующей прямой задаче приняты следующие характеристики: поверхностная плотность материала мембраны $\rho = 7.89 \text{ кг/м}^2$, скорость распространения волн деформации $a = 268 \text{ м/с}$, габариты мембраны $l = 0.4 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$, координаты точек приложения первой и второй сосредоточенных сил $x_Q = 0.1 \text{ м}$, $y_Q = 0.1 \text{ м}$, $x_R = 0.3 \text{ м}$, $y_R = 0.3 \text{ м}$. Величина возмущающей нагрузки $q = 10^3 \text{ Н}$. Количество учитываемых членов в соответствующих двойных рядах Фурье принято равным 50 в каждом из двух направлений.

Графики на рис. 2 иллюстрируют процесс деформирования квадратной мембраны в разные моменты вре-

мени. Как видно из приведенных рисунков, перемещения на одной из диагоналей отсутствуют. Соответственно граничные условия для треугольной мембраны выполняются.

Обратные задачи для такой мембраны решаются с помощью подходов, освещенных в [5].

Естественно, поскольку исследуются линейные задачи, то можем легко рассмотреть варианты воздействия на треугольную мембрану двух и более сил. Пусть, например, на мембрану воздействуют две силы, которые во времени меняются как функции $P_1(t)$ и $P_2(t)$, которые приложены и приложены в точках с координатами (x_{Q1}, y_{Q1}) и (x_{Q2}, y_{Q2}) соответственно. При решении задачи достаточно рассмотреть воздействие на соответствующую квадратную мембрану четырех сил, запись соответствующих формул, отражающих поперечные колебания треугольной мембраны, будет аналогичной формуле (5).

Воздействие на треугольную мембрану произвольной нагрузки. Пусть область, занимаемая квадратной мембраной, будет обозначена через D . Она ограничена отрезками прямых: $x = 0$; $y = 0$; $x = l$; $y = l$. Соответственно диагоналями квадрата есть отрезки прямых: $y = x$; $y + x = l$. Область D состоит из двух подобластей ω_1 и ω_2 . Подобласть ω_1 – это левый прямоугольный треугольник с равными катетами длиной l . Подобласть ω_2 – правый треугольник с катетами такой же длины. Гипотенуза у этих треугольников общая. Ее длина $c = l\sqrt{2}$. Эта гипотенуза лежит на прямой $x + y = l$. Пусть в подобласти ω_1 задана функция $f_Q(x, y, t)$, которая определяет нормальную нагрузку, воздействующую на левую треугольную мембрану. Зададим в подобласти ω_2 функцию $f_R(x, y, t)$, которая будет определять аналогичную нагрузку. Функция $f_R(x, y, t)$ должна быть зеркальным отражением функции $f_Q(x, y, t)$ относительно прямой $x + y = l$, причем

$$f_R(x, y, t) = -f_Q(l - y, l - x, t). \quad (7)$$

Поэтому считаем, что на квадратную мембрану действует нагрузка

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f_Q(x, y, t), & \text{если } x, y \in \omega_1; \\ f_R(x, y, t), & \text{если } x, y \in \omega_2. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение для колебания квадратной мембраны следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} F(x, y, t). \quad (9)$$

Для решения этого уравнения, по существу, достаточно уметь разложить каждую часть (9) в двойной ряд Фурье, то есть надо уметь определить коэффициенты в следующем разложении:

$$F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn}(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad (10)$$

где предполагается, что $F(x, y, t)$ определяется формулой (8), а $F_{kn}(t)$ (в случае рассмотрения прямых задач) – заданные функции времени.

Помножим (10) на $\sin\left(\frac{k_1\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{l}\right)$ и проинтегрируем полученные соотношения по x и по y в пределах $(0, l)$:

$$\int_0^l \int_0^l F(x, y, t) \sin\left(\frac{k_1\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_1\pi y}{l}\right) dx dy = \frac{l^2}{4} F_{k_1 n_1}(t). \quad (11)$$

В дальнейшем от величин k_1 и n_1 можно перейти к величинам k и n .

Повторный интеграл, стоящий в левой части (11), можно записать в виде двойного по области D , то есть

$$\iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy = \frac{l^2}{4} F_{kn}(t). \quad (12)$$

Преобразуем соотношение (12), используя свойство аддитивности двойного интеграла. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy &= \iint_{\omega_1} f_Q(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy - \\ &- \iint_{\omega_2} f_Q(l - y, l - x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

В каждом из двух интегралов по подобластям ω_1 и ω_2 перейдем к повторным интегралам, используя пра-

вила вычисления двойных интегралов. Формула (13) примет вид:

$$\iint_D F(x, y, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy = \int_0^l \left(\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \int_0^{l-x} f_Q(x, y, t) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy \right) dx - \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \int_{l-y}^l f_Q(l-y, l-x, t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \right) dy. \quad (14)$$

Целесообразно записать соотношение (14) в следующей форме (с такими переобозначениями: $x = \alpha$; $y = \beta$):

$$F_{kn}(t) = \frac{4}{l^2} \left[\int_0^l \left(\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q(\alpha, \beta, t) \sin\frac{n\pi\beta}{l} d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q(l-\beta, l-\alpha, t) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta \right]. \quad (15)$$

Удобно использовать для построения дальнейшего решения уравнения (9) *преобразование Лапласа*. Укажем, что в приведенных ниже соотношениях выражения записанные в пространстве изображений обозначены дополнительным верхним индексом L и параметром Лапласа s , например, $u_{kn}^L(s)$. Если принять, что начальные условия нулевые, то решение уравнения (9), можно записать в пространстве изображений в виде:

$$u^L(x, y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}^L(s) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \quad (16)$$

где функция $u_{kn}^L(s)$ будет иметь форму

$$u_{kn}^L(s) = \frac{4}{\rho l^2} \frac{\Phi_{kn}^L(s)}{s^2 + \frac{a^2}{l^2}(k^2 + n^2)},$$

причем

$$\Phi_{kn}^L(s) = \int_0^l \left(\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q^L(\alpha, \beta, s) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q^L(l-\beta, l-\alpha, s) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta.$$

На основании соотношения (16) нетрудно получить формулу для коэффициентов разложения в двойной ряд Фурье функции, являющейся разложением $F(x, y, t)$ в (9). Тогда решение уравнения (9) можно записать:

$$u_{kn}(t) = \frac{4}{a\rho l} \frac{1}{\sqrt{k^2 + n^2}} \int_0^t \Phi_{kn}(\tau) \sin\left(\frac{a}{l} \sqrt{k^2 + n^2} (t - \tau)\right) d\tau, \quad (17)$$

причем

$$\Phi_{kn}(\tau) = \int_0^l \left(\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) \int_0^{l-\alpha} f_Q(\alpha, \beta, \tau) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) d\beta \right) d\alpha - \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi\beta}{l}\right) \int_{l-\beta}^l f_Q(l-\beta, l-\alpha, \tau) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right) d\alpha \right) d\beta. \quad (18)$$

Первый повторный интеграл в (18) отвечает двойному интегралу по подобласти ω_1 , а второй – по подобласти ω_2 .

При рассмотрении задачи идентификации произвольной нагрузки $F(x, y, t)$, действующей на треугольную мембрану, можно воспользоваться подходом, изложенном в работе [6], в которой строятся решения задач об отыскании нагрузки на осесимметричную деформирующуюся цилиндрическую оболочку конечной длины.

Колебания пластин в форме прямоугольного равнобедренного треугольника. Аналогично вышеизложенному материалу для мембран можно решать подобные задачи и для пластин в форме прямоугольного равнобедренного треугольника, имеющего шарнирное опирание по контуру. Причем указанный подход можно применять как для тонких пластин (*модели Кирхгоффа*), так и для пластин средней толщины (в рамках *гипотез Тимошенко*). В силу ограничений, накладываемых на работу форматом научной статьи (так как решение задач для прямоугольных пластин подробно описано в монографиях [5, 6] и необходимо лишь воспользоваться предложенным здесь подходом, для введения дополнительных сил), опустим теоретический материал. Приведем результаты численных расчетов для треугольных пластин, подтверждающих идеи, высказанные Рэлеем и Тимошенко, а также изложенный выше материал для треугольных мембран.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка приложена в точке (x_Q, y_Q) , а дополнительная нагрузка – в точке

(x_R, y_R) . При вычислениях принимались следующие значения:

- модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7890$ кг/м³;
- толщина пластины $h = 0.4$ м; длина и ширина $l = m = 0.4$ м;
- число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 3 приведен график изменения во времени возмущающей нестационарной нагрузки. По вертикальной оси отложена нестационарная сила в ньютонах, по горизонтали – время в секундах.

На рис. 4 приведена схема расположения точек на пластине в плане.

Координаты точек:

- $x_Q = 0.2$ м, $y_Q = 0.1$ м – приложения возмущающей силы (сосредоточенной нагрузки) $Q(x, y, t)$;
- $x_R = 0.3$ м, $y_Q = 0.2$ м – приложения дополнительной силы (сосредоточенной нагрузки) $R(x, y, t)$;
- $y_m = 0.2$ м, $y_m = 0.2$ м – центра пластины.

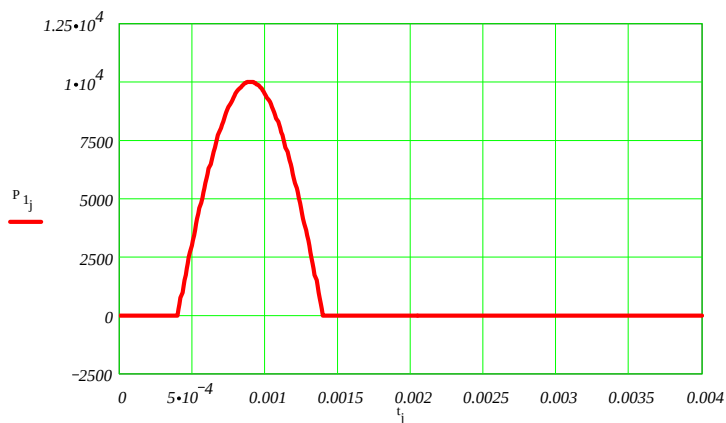


Рис. 3 – Возмущающая нагрузка.

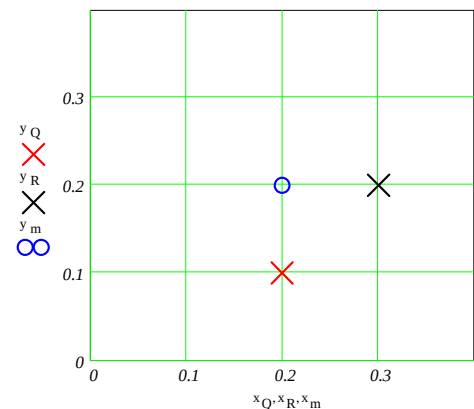


Рис. 4 – Схема нагружения пластины.

На рис. 5 показаны графики изменения прогибов во времени в трёх точках пластины согласно схеме нагружения (рис. 4).

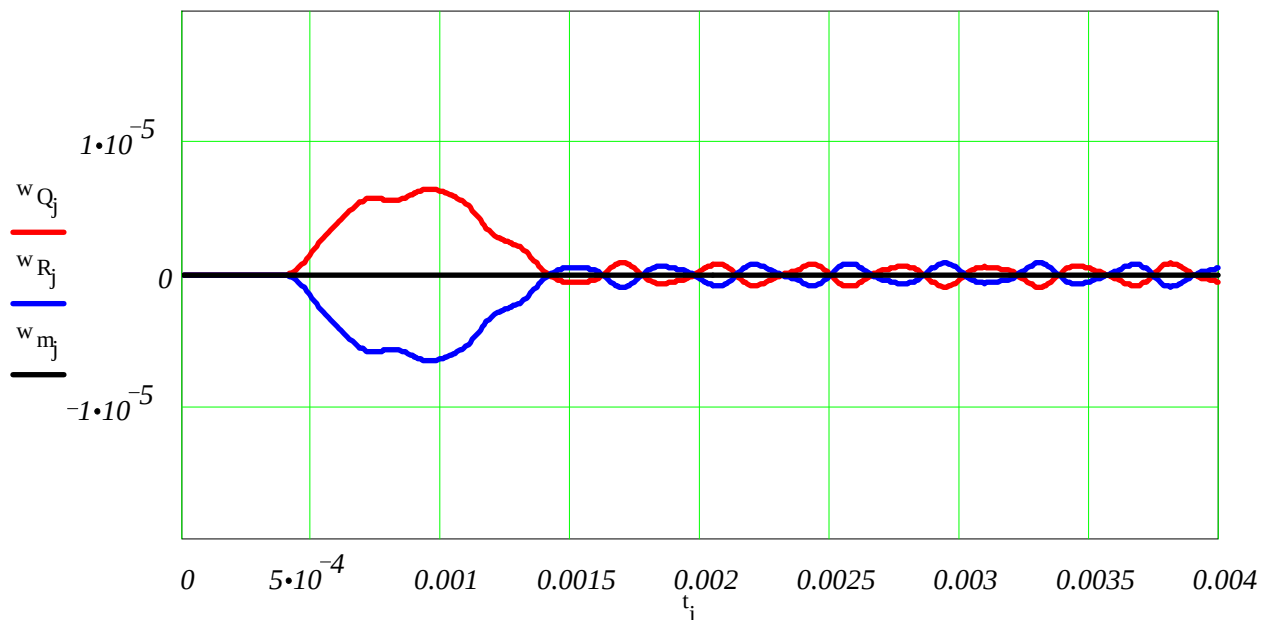


Рис. 5 – Изменение прогибов пластины во времени.

Из рис. 5 видно, что прогиб под действующей на треугольную пластину возмущающей нагрузкой полностью совпадает с прогибом в точке приложения дополнительной нагрузки, но имеет противоположный знак, а прогиб в центре пластины (эта точка лежит на границе треугольной пластины, которая совпадает с диагональю квадратной пластины) равен нулю.



На группе рисунков 6 можно видеть, что колебания квадратной пластины антисимметричны относительно диагонали. Следует отметить, что на контурных графиках чётко видно нулевую линию уровня, которая почти совпадает с диагональю квадратной пластины, делящей её на две треугольные. То, что нулевая линия уровня не

совпадает с диагональю и не является абсолютно прямой (на некоторых ее участках наблюдается небольшая кривизна), обусловлено особенностями отображения контурных графиков (*Contour Plot*) в приложении MathCAD, потому что закрашивание областей выполняется с некоторым допуском по изменению величин, а сами контурные линии (*Contour Lines*) проводятся между областями разных цветов. В том, что для приведенного расчета прогиб, например, в самом центре квадратной пластины равен нулю в любой момент времени, можно убедиться, посмотрев на рис. 5. Также укажем, что в результате численного эксперимента подтверждено отсутствие прогибов пластины в различных точках, принадлежащих диагонали. Графики для этих точек не приведены ввиду малой информативности.

Выводы. На основе подхода, предложенного лордом Рэлеем и примененного С. П. Тимошенко при решении задачи о статическом деформировании треугольной пластины, в настоящей работе решены задачи нестационарного деформирования треугольной мембраны и пластины средней толщины.

Однако, использование описанного подхода применимо только для треугольных мембран и шарнирно закрепленных треугольных пластин, имеющих форму равнобедренного прямоугольного треугольника (половина квадрата с диагональной стороной).

К сожалению, указанный подход не применим для прямоугольного треугольника с неравными катетами (половиной прямоугольной пластины). Возможно, существуют подобные, но более сложные подходы для исследования пластин, являющихся половиной прямоугольной (не квадратной) пластины для статических задач. Однако, в динамических задачах такие подходы, по-видимому, не работают, что обусловлено сложной волновой картиной нагружения и невозможностью компенсации перемещений точек пластины, вызванных отраженными волнами.

Список литературы

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – 503 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
4. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209 – 216.
5. Янютин Е. Г., Янчевський І. В., Воронай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
6. Янютин Е. Г., Воронай А. В., Поваляев С. И., Янчевський І. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.

References (transliterated)

1. Strett Dzh. V. (Lord Reley). *Teoriya zvuka* [The Theory of Sound]. Moscow, GITTL Publ., 1955. Vol. 1. 503 p.
2. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.
3. Aramanovich I. G., Levin V. I. *Urvneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.
4. Yanyutin YE. G., Yegorov P. A. Nestatsionarnye kolebaniya membrany, nesushhey neskol'ko sosredotochenykh mass [Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2012, no. 54 (960), pp. 209–216.
5. Yanyutin YE. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstrukttsiy. Monografiya* [Problems of pulse deforming of structural elements. Monograph]. Kharkov, KhNADU Publ., 2004. 392 p.
6. Yanyutin YE. G., Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Load identification in pulse deforming of solids. Monograph in two parts. Part II]. Kharkov, Izd-vo KhNADU Publ., 2010. 212 p.

Received (надійшла) 26.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Янютін Євген Григорович (Янютин Евгений Григорьевич, Yanyutin Yevgen Grigorovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Воронай Олексій Валерійович (Воронай Алексей Валериевич, Voropay Alexey Valerievich) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович (Егоров Павел Анатольевич, Yegorov Pavlo Anatoliyovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

ЗМІСТ

Бондарь А. В. Исследование влияния информационной энтропии на энергоэнтропию организации	3
Ванин В. А., Ванин Б. В., Кругол Н. М. Математическое моделирование режимов регулирования газоз-душного тракта котла ТЭС.....	8
Гороховатський В. О., Тарасенко О. П., Трохимчук С. М. Застосування логічних форм функцій вибору у задачах розпізнавання образів	16
Димитрова-Бурлаенко С. Д. О некоторых метризуемых топологиях для слабо почти периодических функ-ций	23
Кожушко А. П. Дослідження малих поперечних коливань агрегатів змінної маси	33
Крутіков Г. А., Стрижак М. Г. Проектування електрогидравлічного слідкуючого привода на основі прин-ципу мінімізації енерговитрат	43
Немах А., Донський Д. Ф., Нестеренко С. В. Побудова регресійної моделі для оцінки захисних властивос-тей цементного каменю в агресивних середовищах нафтових родовищ Іраку	49
Нечуйвітер М. М. Аспекти стабілізації теплового стану корпусів циліндрів високого тиску парових турбін в пускових та змінних режимах.....	58
Ольшанський В. П. Про апроксимацію функції Ламберта	64
Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Автоколивання, описані узагальненим рівнянням Ван дер Поля	69
Павлова Н. Л., Онищенко С. П. Концепция моделирования оптимальных параметров проектов портфеля проектно-ориентированной организации	75
Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of a system of singular integral equation with Hilbert and Cauchy kernels.....	80
Potanina T. V., Yefimov O. V., Khavin G. L. Modeling NPP power unit steam turbine installation steam separator-superheater temperature characteristics by interval analysis methods	87
Tokmakova I. A. Finite-step method for determining equilibrium state of gyrotheodolite	96
Хурдей Є. Л. Теорія побудови операторів інтерполяції із заданими проекціями	105
Cheremskaya N. V. Studying the behavior of rank (quasirank) and infinitesimal correlation functions or correlation differences in linear transformations of random functions.....	113
Чікіна Н. О., Антонова І. В., Солошенко Е. М. Системний модуль «резистентність» нечіткої експертної си-стеми професійних ризиків	118
Янютин Е. Г., Воропай А. В., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембран и пластин в форме прямо-угольного равнобедренного треугольника	125

CONTENTS

Bondar A. V. Research of influence of information entropy on the energy entropy of the organization.....	3
Vanin V. A., Vanin B. V., Kruhol M. M. Mathematical modeling of thermal power plant's boiler air-gas flow path regulation modes	8
Gorokhovatskyi O. V., Tarasenko O. P., Trokhymchuk S. M. Application of logic forms of choice functions in tasks of recognition of patterns.....	16
Dimitrova-Burlayenko S. D. On some metrizable topologies for weakly almost periodic functions.....	23
Kozhushko A. P. Studying small transverse vibrations of variable mass units	33
Krutikov G. A., Stryzhak M. G. Design of an electro hydraulic servo drive on the basis of the principle of minimizing energy costs	43
Neamah A., Donsky D. F., Nesterenko S. V. Designing regression model for estimating protection properties of cement stone in aggressive environments of Iraqi oil deposits.....	49
Nechuiviter M. M. Aspects of stabilization of the heat condition of high pressure cylindrical cases of steam turbines in the starting and variable modes	58
Olshanskiy V. P. On the approximation of the Lambert function.....	64
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Self-oscillations described by the generalized Van der Pol equation.....	69
Pavlova N. L., Onyshchenko S. P. The concept of modeling the optimal parameters of the projects of the portfolio of the project-oriented organization	75
Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of a system of singular integral equation with Hilbert and Cauchy kernels	80
Potanina T. V., Yefimov O. V., Khavin G. L. Modeling NPP power unit steam turbine installation steam separator-superheater temperature characteristics by interval analysis methods.....	87
Tokmakova I. A. Finite-step method for determining equilibrium state of gyrotheodolite.....	96
Khurdei Y. L. Theory of construction of operators of interpolation with predetermined projections	105
Cheremskaya N. V. Studying the behavior of rank (quasirank) and infinitesimal correlation functions or correlation differences in linear transformations of random functions	113
Chikina N. A., Antonova I. V., Soloshenko E. N. «Resistance» system module of professional risk fuzzy expert system.....	118
Yanyutin Y. G., Voropay A. V., Yegorov P. A. Nonstationary vibrations of rectangular isosceles triangle shaped membranes and plates	125

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 1 (1355) 2020

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

Відповідальний за випуск Костякова Е. В.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид. № 1-20.

Підп. до друку 27.02.2020 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк. 8,75.
Тираж 100 пр. Зам. № 202255. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, віл Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.