



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях

№ 8'2019

Харків
2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 8 (1333) 2019

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 8 (1333) 2019

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2019

Kharkiv
NTU "KhPI", 2019

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2019. — № 8 (1333) 2019. — 298 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України № 1328 від 21.12.2015 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року»

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до зовнішніх інформаційних систем, у тому числі індексується у Google Scholar та ICI Journals Master List 2017, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Головний редактор

Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України

Заст. головного редактора

Марченко А. П., д-р техн. наук, проф.

Секретар

Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна

Редакційна колегія серії

Відповідальний редактор:

В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора:

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар:

О. О. Набока, канд. фіз.-мат. наук.

Члени редколегії: Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.; О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.; О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. М. Олексенко, д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ф. Пацегон, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.; А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuhev, Sc. D. in Information Technology, Malaysia.

Editor-in-chief

Sokol E. I., Dr. Tech. Sc., Member-Cor. of National Academy of Sciences of Ukraine, NTU "KhPI"

Deputy editor-in-chief

Marchenko A. P., Dr. Tech. Sc., Prof., NTU "KhPI", Ukraine

Secretary

Gorbunov K. O., Docent, NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

Deputy Executive Editor:

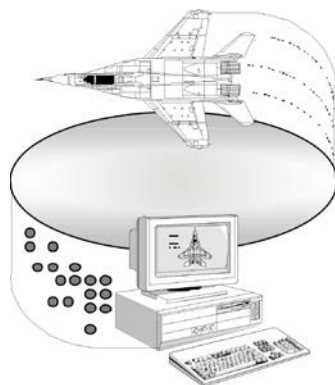
Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

Executive Secretary:

O. O. Naboka, PhD. Phys.-Math. Sci.

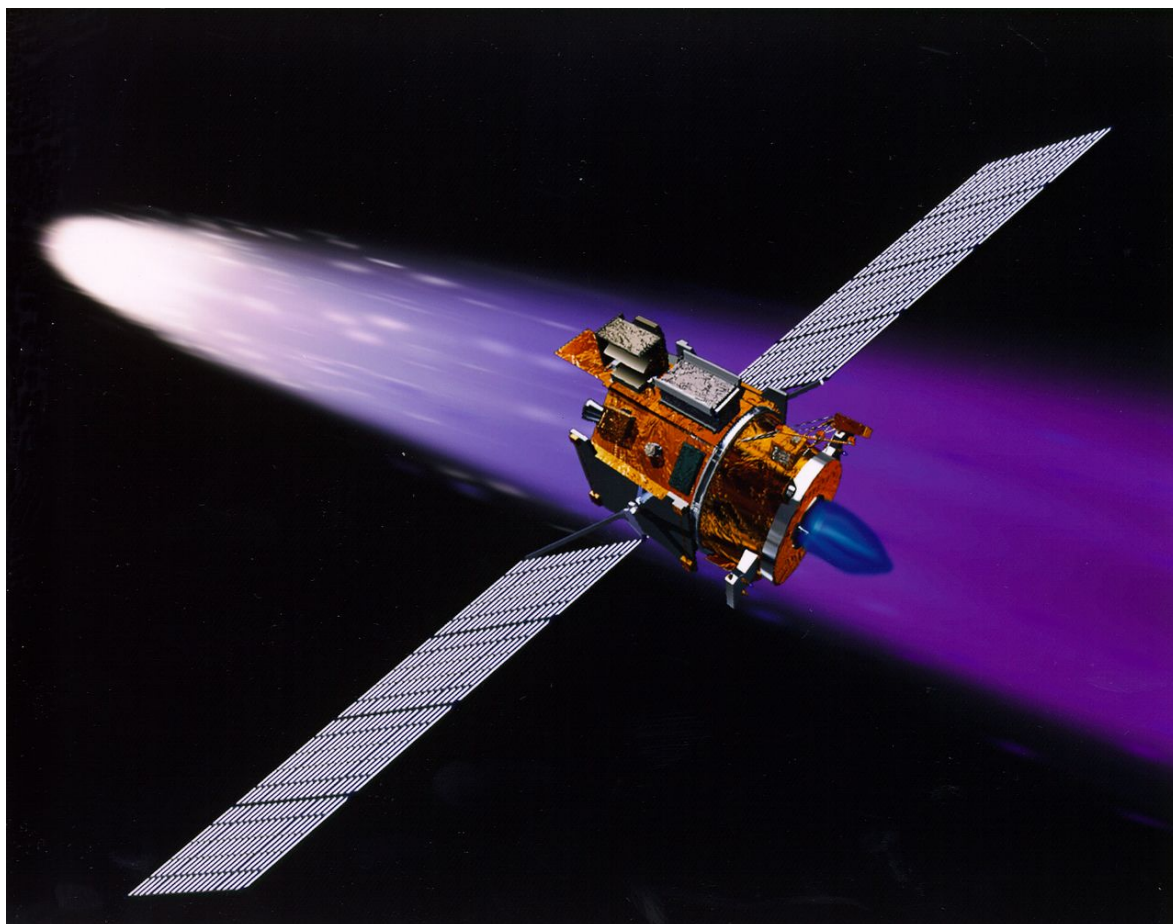
Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. M. Oleksenko, Dr. Ped. Sci., PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. I. Pershina, Dr. Phys.-Math. Sci., Docent; A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuhev, Sc. D. in Inf. Tech., Malaysia.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ». Протокол № 5 від 23 квітня 2019 р.



Математичне моделювання складних систем

Mathematical modeling of composite systems



Дальній космічний зонд

УДК 539.219.3

*Г. С. АБРАМОВ, М. Г. АБРАМОВ***КОАЛЕСЦЕНЦИЯ КАК АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТАДИЯ ПРОЦЕССА ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ**

Изучена асимптотическая стадия процесса внутреннего окисления – коалесценция в пластинах бинарных сплавов. Показано, что стадии коалесценции Лифшица-Слѐзова предшествует достаточно длительная стадия замедленного роста частиц, которая обусловлена потоком легирующего элемента из пластины во внешнюю среду.

Ключевые слова: бинарные сплавы, внутреннее окисление, коалесценция, теория Лифшица-Слѐзова.

*Г. С. АБРАМОВ, М. Г. АБРАМОВ***КОАЛЕСЦЕНЦІЯ ЯК АСИМПТОТИЧНА СТАДІЯ ПРОЦЕСУ ВНУТРІШНЬОГО ОКИСЛЕННЯ**

Вивчено асимптотичну стадію процесу внутрішнього окислення – коалесценцію в пластинах бінарних сплавів. Показано, що стадії коалесценції Ліфшиця-Сльозова передєе довго тривала стадія уповільненого зростання частинок, яка обумовлена потоком легуючого елемента з пластини в зовнішнє середовище.

Ключові слова: бінарні сплави, внутрішнє окислення, коалесценція, теорія Ліфшиця-Сльозова.

*G. S. ABRAMOV, M. G. ABRAMOV***COALESCENCE AS ASYMPTOTIC STAGE OF INTERNAL OXIDATION PROCESS**

The asymptotic stage of the process of internal oxidation – coalescence of binary alloys in the plates is explored. It is shown that the coalescence stage of Lifshitz-Slyozov theory is preceded by a long step of decreasing the particle growth rate, which is caused by the flow of the alloying element from the plate to the external environment.

Key words: binary alloys, internal oxidation, coalescence theory of Lifshitz-Slyozov.

Введение. В предыдущих работах авторов [1 – 3] проведено экспериментальное и теоретическое исследование процесса внутреннего окисления в бинарных сплавах. Построена физическая и математическая модели процесса и выполнено моделирование всех стадий процесса от зарождения, роста и до коалесценции частиц окислов. Особый интерес представляет асимптотическая стадия процесса – коалесценция, которая для внутреннего окисления имеет ряд особенностей, и формирует, в конечном итоге, долговременные характеристики внутреннеокисленных сплавов, из которых наибольший интерес представляют жаропрочность, жаростойкость и износостойкость. Это определяет актуальность исследования асимптотической стадии процесса внутреннего окисления, так как её недостаточная изученность как в теоретическом, так и в экспериментальном отношении в определённой мере сдерживает и практическое использование процессов типа внутреннего окисления.

Анализ последних исследований. Рассмотрим кинетику изменения \bar{R} при больших временах процесса внутреннего окисления пластины. Литературные данные по этому вопросу противоречивы. Так имеется ряд экспериментальных работ, в которых подтверждается предсказываемый теорией Лифшица – Слѐзова [4] кубический закон роста среднего радиуса со временем [5 – 7], Вместе с тем, есть многочисленные работы [8 – 10], указывающие на существование кинетических законов $\bar{R}^n = kt$, где показатель степени n имеет значения от 1,7 до 9. В исследованиях, где определена кинетика роста \bar{R} более быстрая, чем кубическая, по-видимому, изучалась ранняя стадия процесса, связанная с образованием и диффузионным ростом частиц за счёт вещества пересыщенного твёрдого раствора. Гораздо большие трудности встречает объяснение результатов, где получена кинетика роста \bar{R} более медленная, чем кубическая. Предложенные для объяснения кинетических законов роста частиц с $n > 3$ механизмы коалесценции, контролируемой не объёмной диффузией, а диффузией по границам зѐрен, блоков и дислокационным трубкам [11], часто не спасают положения, так как получаемая в этих работах кинетика с $n = 4-5$ не в состоянии объяснить экспериментально измеренные кинетики с $n > 5$.

Постановка задачи. Исследовать особенности стадии коалесценции в процессе внутреннего окисления в отличие от асимптотической стадии распада пересыщенных твёрдых растворов. Провести сравнение теоретических результатов, результатов моделирования и эксперимента.

Основная часть. Моделирование процесса внутреннего окисления на примере пластины бинарного сплава [2] позволило объяснить кинетику изменения $\bar{R}(t)$. Из рис. 1 видно, что после стадии бурного образования и роста частиц с кинетикой, "характеризующейся" показателем $n \leq 2$, следует стадия медленного роста, которая затем сменяется коалесценцией частиц ($n = 3$).

На рис. 1, *a* прямой линией отмечен участок, соответствующий кубическому закону роста \bar{R} (касательная к правому хвосту кривой). На рис. 1, *б* показан момент перегиба кривой $\lg \bar{R} - \lg t$, то есть переход от более медленной кинетики к более быстрой.

© Г. С. Абрамов, М. Г. Абрамов, 2019

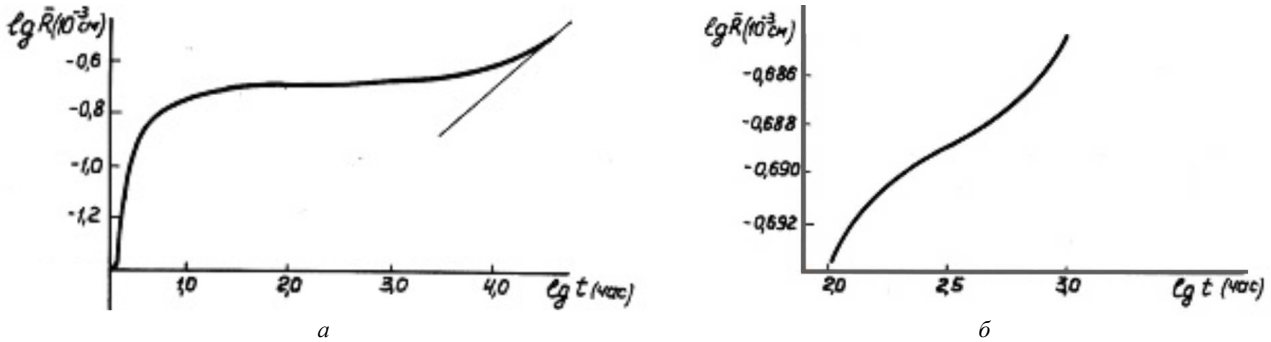


Рис. 1 – Моделирование кинетики роста \bar{R} частиц на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления пластины бинарного сплава: *a* – прямой линией отмечен участок, соответствующий кубическому закону роста \bar{R} ; *б* – момент перегиба кривой $\lg \bar{R} - \lg t$.

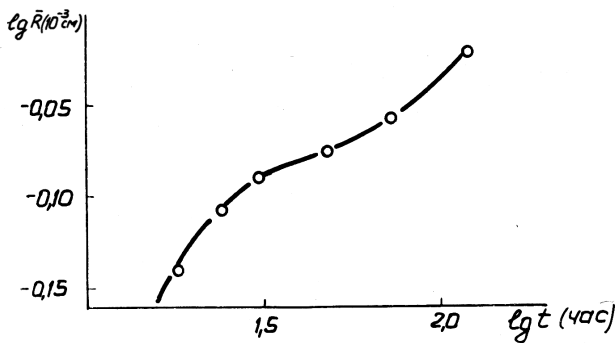


Рис. 2 – Кинетика изменения \bar{R} в центре пластины сплава Ni – 1% Cr при внутреннем окислении.

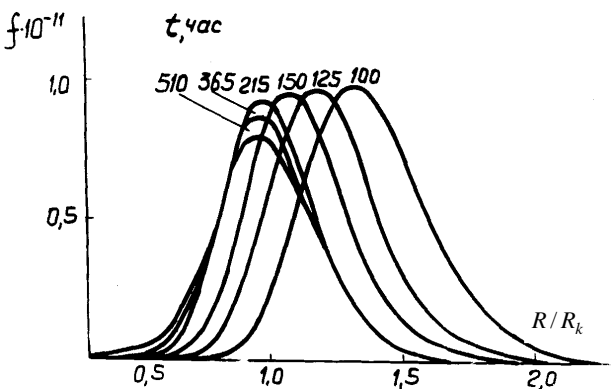


Рис. 3 – Кинетика изменения функции распределения на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления пластины бинарного сплава.

Медленная стадия процесса, на которой происходит практически полная стабилизация среднего радиуса частиц, не имеет места при распаде пересыщенных твёрдых растворов в изолированной системе. Экспериментально эта стадия наблюдается при внутреннем окислении сплава Ni – 1% Cr (рис. 2).

О том, что на асимптотической стадии имеет место процесс коалесценции, свидетельствует и вид кривых функций распределения на рис. 3.

Видно, что с увеличением продолжительности процесса правый конец функции распределения стремится к точке с абсциссой $R/R_k = 1,5$ как это и следует из теории Лифшица – Слезова. У функции распределения, полученной моделированием процесса внутреннего окисления пластины бинарного сплава, все же имеется небольшой "хвост", выходящий за координату $R/R_k = 1,5$. Это обстоятельство отмечалось в работе [4] и связано с определенным приближением аналитической теории коалесценции.

Покажем, что в системе с пересыщенным твёрдым раствором и растущими частицами второй фазы стадия стабилизации среднего радиуса связана с наличием диффузионного потока легирующего элемента к поверхностям пластины, на которых пересыщение равно нулю. В случае малого объёма частиц и больших временах процесса, когда весь объём сплава является двухфазным, уравнения диффузии в твёрдом растворе могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial t} = D_{11} \frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial x^2} - C_1^\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial t} = D_{22} \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial x^2} - C_\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\Delta_i(0, t) = \Delta_i(l, t) = 0; \quad \Delta_i(x, 0) = \Delta_i^0(x), \quad (3)$$

где $\Delta_i = C_i(x, t) - C_i^p$, ($i = 1, 2$) – пересыщение твёрдого раствора по i -му компоненту.

С помощью метода разделения переменных получим решение (2) с условиями (3):

$$\Delta_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{2m} \exp(-\lambda_{2m} t) - \int_0^t \frac{db_{2m}}{d\tau} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{l} x. \quad (4)$$

Здесь

$$a_{2m} = \frac{2}{l} \int_0^l \Delta_2^{(0)} \sin \frac{m\pi}{l} x dx; \quad b_{2m} = \frac{2}{l} C_2^\phi \int_0^l V_\phi \sin \frac{m\pi}{l} x dx; \quad \lambda_{2m} = D_{22} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2; \quad C_2^\phi V_\phi = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin \frac{m\pi}{l} x. \quad (5)$$

Преобразуя свёртку в правой части (4), учитывая малые изменения объёма частиц во времени:

$$\int_0^t \frac{db_{2m}}{d\tau} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau = b_{2m}(t) - b_{im}(0) \exp(-\lambda_{2m}t) - \lambda_{2m} \int_0^t b_{2m}(\tau) \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} - \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \frac{d^2b_{2m}}{dt^2} + \dots - \left(\frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 - \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \frac{db_{2m}^2}{dt} \Big|_0 + \dots \right) \exp(-\lambda_{2m}t) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{2m}^2} \int_0^t \frac{d^n b_{2m}}{d\tau^n} \exp(-\lambda_{2m}(t-\tau)) d\tau \approx \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} - \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \exp(-\lambda_{2m}t)$$

и замечая, что, согласно (5), $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{db_{2m}}{dt} \sin \frac{m\pi}{l} = C_2^\phi \frac{V_\phi}{\partial t}$, имеем:

$$\Delta_2 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(a_{2m} + \frac{1}{\lambda_{2m}} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \right) \exp(-\lambda_{2m}t) \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} + \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx. \quad (6)$$

Далее, подставляя это решение в (1) и пользуясь теми же приёмами, что и для получения выражения (6), имеем

$$\Delta_1 \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{1m} - p a_{1m} + \frac{1}{\lambda_{1m}} \frac{C_1^\phi}{C_2^\phi} \frac{db_{2m}}{dt} \Big|_0 \right) \exp(-\lambda_{1m}t) \sin \frac{m\pi}{l} x + p \Delta_2 + \frac{C_1^\phi}{D_{11}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx. \quad (7)$$

где

$$\lambda_{1m} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2; \quad p = \frac{D_{12}}{D_{11}}.$$

На асимптотической стадии процесса ($t \rightarrow \infty$) (6) и (7) преобразуются к следующему виду (с учётом $\lambda_{2m} \ll \lambda_{1m}$):

$$\Delta_2 \equiv a_{21} + \frac{1}{\lambda_{21}} \frac{db_{21}}{dt} \Big|_0 \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{m\pi}{l} x + \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx; \quad (8)$$

$$\Delta_1 \equiv p \Delta_2 \Big|_{t \rightarrow \infty} + \frac{C_1^\phi}{D_{11}} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial V_\phi}{\partial t} dx dx. \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) определим меру пересыщения $L(x, t)$, которая, как показано в [3], записывается следующим образом:

$$L(x, t) = \ln a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} - \ln a_{1p}^{\omega_1} a_{2p}^{\omega_2} = \frac{2\gamma M}{\rho R_r T R_k}. \quad (10)$$

Здесь ω_1 и ω_2 стехиометрические коэффициенты растущего соединения, соответственно, для компонентов 1 и 2; T – температура, R_r – газовая постоянная, γ – коэффициент поверхностного натяжения, M – молекулярный вес соединения, ρ – его плотность; a_i и a_{ip} ($i=1, 2$) – соответственно, текущая и равновесная термодинамические активности i -го компонента в твёрдом растворе.

Используя разложение Вагнера: $a_1 = c_1 \exp(\varepsilon_{11}C_1 + \varepsilon_{12}C_2)$; $a_2 = c_2 \exp(\varepsilon_{21}C_1 + \varepsilon_{22}C_2)$ получаем из (10) для случая малого отклонения C_i от C_{ip} (что соответствует асимптотической стадии процесса):

$$L(x, t) = \gamma_1 (C_1 - C_{1p}) + \gamma_2 (C_2 - C_{2p}); \quad \gamma_1 = (\omega_1 + \omega_2 \varepsilon_{11} C_{1p} + \omega_2 \varepsilon_{21} C_{1p}) / c_{1p};$$

$$\gamma_2 = (\omega_2 + \omega_2 \varepsilon_{22} C_{2p} + \omega_1 \varepsilon_{12} C_{2p}) / c_{2p}. \quad (11)$$

Подстановка в (11) выражений (8) и (9) и последующее дифференцирование по x даёт

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial V}{\partial t} - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \beta_2 \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (12)$$

где

$$\beta_1 = \frac{C_2^\phi}{D_{22}} \left[(\gamma_1 p + \gamma_2) + \gamma_1 \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{C_1^\phi}{C_2^\phi} \right]; \quad \beta_2 = (\gamma_1 p + \gamma_2) \left(a_{21} + \frac{1}{\lambda_{21}} \frac{db_{21}}{dt} \Big|_0 \right).$$

Первое слагаемое в первой части (12) характеризует уменьшение пересыщения за счёт наличия внутренних стоков (частицы второй фазы), а второе – внешних (поверхности пластины $x=0$ и $x=l$). Из (12) также видно, что оба эти слагаемые имеют разные знаки. Если мощность внутренних стоков больше, чем внешних, то

$\partial^2 L / \partial x^2 > 0$, в противном случае $\partial^2 L / \partial x^2 < 0$. Поскольку на поверхностях пластины $L(0, t) = L(l, t) = 0$ и, в соответствии с этим $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \leq 0$, то есть существует максимальная мощность внутренних стоков, при которой вторая производная меры пересыщения равна нулю. Исходя из этого, находим из (12):

$$\frac{\partial V_m}{\partial t} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \exp(-\lambda_{21}t) \sin \frac{\pi}{l} x; \quad V_m = \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{D_{22}} \sin \frac{\pi}{l} x (1 - \exp(-\lambda_{21}t)). \quad (13)$$

Из (13) следует, что при больших временах зависимость $V_m(t)$ и, соответственно, $\bar{R}(t)$ (при $N = const$) являются слабыми функциями времени, которые могут быть описаны выражениями типа $\bar{R}^n = kt$ лишь весьма приближённо. При такой аппроксимации показатель степени n будет определяться величиной dV_m/dt – чем меньше dV_m/dt , тем больше n .

Анализ выражения (13) также показывает, что максимальная скорость роста суммарного объёма фазы зависит от величины диагонального коэффициента диффузии легирующего элемента D_{22} , толщины пластины l и удалённости сечения x , в котором рассматривается процесс, от поверхности пластины: dV_m/dt возрастает с уменьшением D_{22} и увеличением l и x . При $\frac{\partial V}{\partial t} < \frac{\partial V_m}{\partial t}$, $V(t)$ является ещё более слабой временной функцией, чем (13), но сделанные выводы качественно остаются верными и для этих случаев. Это подтверждается результатами численного моделирования.

Таким образом, присутствие в системе с пересыщенным твёрдым раствором и растущими частицами второй фазы свободных поверхностей, на которых пересыщение равно нулю, обуславливает наличие диффузионного потока вещества из пластины во внешнюю среду. Этот поток отнимает у растущих частиц часть вещества из твёрдого раствора, вследствие чего и замедляется кинетика их роста. Эффект нивелируется по мере уменьшения градиента пересыщения по сечению пластины. При этом система становится все более замкнутой: вещество растворяющихся мелких частиц поступает через твёрдый раствор на рост крупных (отсутствуют "потери" за счёт диффузии вещества из твёрдого раствора во внешнюю среду), то есть всё полнее реализуется процесс коалесценции, описываемый теорией Лифшица – Слёзова.

Таблица 1 – Экспериментальные данные внутреннего окисления пластины бинарного сплава $Ni - 1\% Cr$

x/l	R , мкм		$\frac{\Delta R}{\Delta t} \cdot 10^2 \frac{\text{мкм}}{\text{час}}$	$\frac{\bar{R}_{48}}{\bar{R}_{30}}$
	$t = 30$ ч	$t = 30$ ч		
0,10	0,55	0,76	1,17	1,40
0,25	0,74	0,84	0,55	1,13
0,50	0,83	0,87	0,22	1,05
$\frac{\bar{R}_{0,50}}{\bar{R}_{0,10}}$	1,51	1,14	–	–

Кубический закон роста $\bar{R}(t)$, полученный по теории Лифшица – Слёзова, достигается при внутреннем окислении пластины со стороны значений $n > 3$, в то время как при распаде пересыщенного твёрдого раствора этот закон достигается со стороны значений $n < 3$. В этом состоит главная особенность асимптотической стадии процесса внутреннего окисления тонких пластин по сравнению с распадом пересыщенного твёрдого раствора в изолированной системе.

Во многих случаях, как представляется, экспериментальное обнаружение кинетики роста \bar{R} с $n > 3$ может быть следствием того, что исследуемые системы находились ещё на медленной стадии неустановившейся коалесценции и кубический закон роста \bar{R} мог быть найден на более поздней стадии процесса. С другой стороны, анализ экспериментальных работ [6 – 10] показывает, что далеко не всегда утверждение о кубическом законе роста \bar{R} следует из приводимых экспериментальных данных.

Вторая отличительная особенность процесса коалесценции при внутреннем окислении пластин состоит в том, что этот процесс индивидуален для каждого сечения диффузионной зоны. Каждое сечение зоны внутреннего окисления можно представить как отдельную систему, "степень замкнутости" которой зависит от величины градиентов пересыщения по отношению к соседним сечениям. В каждом сечении протекают все стадии формирования двухфазной структуры: зарождение, рост и коалесценция частиц второй фазы; начало каждой стадии для соседних сечений сдвинуто по времени и этот сдвиг тем больше, чем дальше рассматриваемые сечения от центра поверхности (чем ближе к центру пластины). Изучая кинетику изменения параметров структуры двухфазной области, необходимо фиксировать сечение зоны внутреннего окисления, в котором производятся измерения, так как различные сечения зоны внутреннего окисления в одно и то же время могут находиться на различных стадиях эволюции структуры двухфазной области: зарождения, роста и коалесценции.

Процесс диффузионного перераспределения компонентов между сечениями пластины приводит в

конечном итоге к выравниванию \bar{R} в различных сечениях. Экспериментальные данные о распределении \bar{R} в различных сечениях внутреннеокисленного сплава $Ni-1\%Cr$ и кинетике изменения распределения $\bar{R}(x)$ показывают тенденцию к выравниванию \bar{R} по сечению пластины.

Из табл. 1, построенной по экспериментальным данным внутреннего окисления пластины бинарного сплава $Ni-1\%Cr$, видно, что скорость роста \bar{R} значительно выше в приповерхностных сечениях пластины, чем в центральном сечении. Нижняя строка таблицы иллюстрирует выравнивание \bar{R} : отношение средних размеров частиц в центральном и приповерхностном сечениях пластины уменьшается со временем и приближается к единице. Различие \bar{R} в разных сечениях зоны внутреннего окисления при больших временах обуславливает и различие в пересыщении твёрдого раствора в этих сечениях. В соответствии с *законом Гиббса – Томсона* в сечении с меньшим \bar{R} пересыщение твёрдого раствора выше, чем в сечении с большим \bar{R} . При моделировании это хорошо прослеживается на этой стадии процесса, когда $\bar{R} = R_k$.

Как следует из экспериментальных данных по внутреннему окислению сплавов [1, 2], при больших временах окисления объем фазы в центральном сечении пластины асимптотически приближается к некоторой постоянной величине. Здесь существенно то обстоятельство, что асимптотическое приближение к постоянному объёму фазы происходит сверху, со стороны больших значений объёма фазы. Это свидетельствует о том, что переход к процессу установившейся коалесценции связан с некоторым подрастворением частиц второй фазы. Аналогичный эффект наблюдается и при моделировании процесса внутреннего окисления. На рис. 4, 5 экспериментальные результаты и результаты моделирования представлены в координатах $1/V_\phi - 1/R$. Видно, что асимптотической стадии предшествует стадия, которая может быть аппроксимирована линейной зависимостью $1/V_\phi - 1/R$. Затем на обеих кривых имеется минимум и асимптотическое приближение к постоянному значению $1/V_\phi$. Физической причиной этого явления также является незамкнутость системы по легирующему элементу в процессе внутреннего окисления.

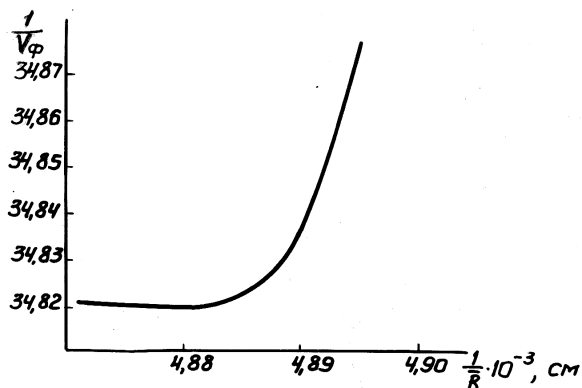


Рис. 4 – Моделирование зависимости $1/V_\phi$ от $1/\bar{R}$ на асимптотической стадии процесса внутреннего окисления.

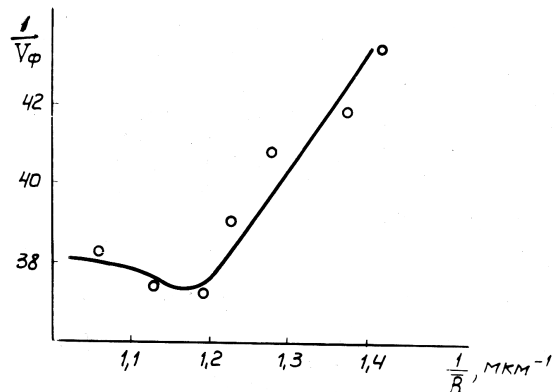


Рис. 5 – Зависимость $1/V_\phi$ от $1/\bar{R}$ в центральном сечении пластины сплава $Ni-1\%Cr$; $l = 500$ мкм, $T = 1150^\circ C$.

Выводы. При рассмотрении асимптотической стадии внутреннего окисления пластин обнаружено, что стадии коалесценции, хорошо описываемой в рамках теории Лифшица-Слэзова, предшествует достаточно длительная стадия замедленного роста частиц, которая не имеет места при распаде пересыщенных твёрдых растворов в изолированных системах. Показано, что замедленный рост частиц обусловлен наличием потока легирующего элемента из пластины во внешнюю среду, причём скорость роста частиц понижается с увеличением коэффициента диффузии легирующего элемента и уменьшением толщины пластины.

Список литературы

1. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Моделирование процесса внутреннего окисления и экспериментальные результаты // Вестник ХНТУ. – 2010. – Вып. 3 (39). – С. 10 – 15.
2. Абрамов Г. С. Моделирование асимптотической стадии процесса внутреннего окисления // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 2 (41). – С. 432 – 435.
3. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г., Бардачов Ю. Н. Моделирование формирования двухфазных областей в процессе внутреннего окисления бинарных сплавов // Вестник ХНТУ. – 2014. – № 3 (50). – С. 192 – 202.
4. Лифшиц И. М., Слэзов В. В. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твёрдых растворов // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 35. – В. 2 (8). – С. 479 – 492.
5. Нечипоренко Е. П., Слэзов В. В. Коалесценция в двухфазных сплавах // ФТТ. – 1972. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 1469 – 1474.
6. Footner P. K., Alcock C. B. Growth kinetics of dispersed thoria in Ni and Ni-Cr alloys // Met. Trans. – 1972. – V. 5. – № 8. – P. 717 – 720.
7. Dalal H., Grant N. J. Thoria stability in TD-NiCr at high-temperatures in the presence of chromium in solution // Met. Trans. – 1973. – V. 4. – № 1. – P. 381 – 382.
8. Иванов В. Е., Нечипоренко Е. П., Криворучко В. М. Коалесценция частиц Al_2O_3 в молибдене при высоких температурах // Изв. АН СССР.

Неорган. матер. – 1970. – № 6. – В. 8. – С. 1427 – 1431.

9. Сергеевкова В. М., Березуцкий В. В. О скорости роста дисперсных частиц в никеле // Порошк. металлургия. – 1967. – № 7. – С. 84 – 88.
10. Сергеевкова В. М., Березуцкий В. В. Влияние природы окислов на скорость роста дисперсных частиц в никеле // Порошк. Металлургия. – 1967. – № 8. – С. 54 – 59.
11. Слѣзов В. В. Коалесценция пересыщенного твердого раствора в случае диффузии по границам блоков или дислокационным линиям // ФТТ. – 1967. – Т. 9. – В. 4. – С. 1187 – 1191.

References (transliterated)

1. Abramov G. S., Abramov M. G. Modelirovanie protsessa vnutrennego okisleniya i eksperimental'nye rezul'taty [Modeling of internal oxidation process and experimental results]. *Vestnik KhNTU* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2010, vol. 3 (39), pp. 10–15.
2. Abramov G. S. Modelirovanie asimptoticheskoy stadii protsessa vnutrennego okisleniya [Modeling of asymptotic stage of internal oxidation process]. *Vestnik KhNTU* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2011, no. 2 (41), pp. 432–435.
3. Abramov G. S., Abramov M. G., Bardachov Yu. N. Modelirovanie formirovaniya dvukhfaznykh oblastey v protsesse vnutrennego okisleniya binarnykh splavov [Modeling of forming two-phase regions in the process of binary alloys internal oxidation]. *Vestnik KhNTU* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2014, no. 3 (50), pp. 192–202.
4. Lifshits I. M., Sliozov V. V. O kinetike diffuzionnogo raspada peresyshhennykh tvordyykh rastvorov [On kinetics of diffusion dissolving of oversaturated solid solutions]. *ZhETF* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1958, vol. 35, no. 2(8), pp. 479–492.
5. Nechiporenko E. P., Sliozov V. V. Koalestsentsiya v dvukhfaznykh splavakh [Coalescence in two-phase alloys]. *FTT* [Physics of solid]. 1972, vol. 14, no. 5, pp. 1469–1474.
6. Footner P. K., Alcock C. B. Growth kinetics of dispersed thoria in Ni and Ni-Cr alloys. *Met. Trans.* 1972, vol. 5, no. 8, pp. 717–720.
7. Dalal H., Grant N. J. Thoria stability in TD-NiCr at high-temperatures in the presence of chromium in solution. *Met. Trans.* 1973, vol. 4, no. 1, pp. 381–382.
8. Ivanov V. E., Nechiporenko E. P., Krivoruchko V. M. Koalestsentsiya chastits Al_2O_3 v molibdene pri vysokikh temperaturakh [Coalescence of the particles Al_2O_3 in molybdenum at high temperatures]. *Izv. AN SSSR. Neorgan. mater.* [Digest of the Academy of Science of the USSR. Inorganic materials]. 1970, no. 6, vol. 8, pp. 1427–1431.
9. Sergeenkova V. M., Berezutskiy V. V. O skorosti rosta dispersnykh chastits v nikelе [On the growth velocity of dispersive particles in nickel]. *Poroshok. Metallurgiya* [Powder Metallurgy]. 1967, no. 7, pp. 84–88.
10. Sergeenkova V. M., Berezutskiy V. V. Vliyanie prirody okislov na skorost' rosta dispersnykh chastits v nikelе [Influence of oxide nature on dispersive particles' growth rate in nickel]. *Poroshok. Metallurgiya* [Powder Metallurgy]. 1967, no. 8, pp. 54–59.
11. Slyozov V. V. Koalestsentsiya peresyshhenogo tvordogo rastvora v sluchae diffuzii po granitsam blokov ili dislokatsionnym liniyam [Coalescence of oversaturated solid solution in case of diffusion along block boundaries or dislocation lines]. *FTT* [Physics of solid]. 1967, vol. 9, no. 4, pp. 1187–1191.

Поступила (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Абрамов Геннадій Серафимович (Абрамов Геннадий Серафимович, Abramov Gennady Serafimovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (067) 789-10-01; e-mail: gennadabra@gmail.com.

Абрамов Михайло Геннадійович (Абрамов Михаил Геннадиевич, Abramov Mikhail Gennadievich) – викладач, Херсонська філія Національного університету кораблебудування, м. Херсон; тел.: (096) 713-49-20; e-mail: mike_a@ukr.net.

УДК 532.516

С. В. АЛЕКСЕЕНКО

РАСЧЕТ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЗАДАЧАХ ОБ ОБЛЕДЕНЕНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрена методика расчета конвективного теплообмена обледеневающей поверхности с набегающим потоком в задачах об обледенении летательных аппаратов на основе решения усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса и однопараметрической дифференциальной модели турбулентности Spalart-Allmaras с коррекцией для шероховатой стенки. Выполнено сравнение результатов расчетов, полученных с помощью предложенной методики и с помощью корреляционных соотношений. Показана возможность применения предложенного подхода к вычислению коэффициента конвективного теплообмена в задачах об обледенении в трехмерной постановке.

Ключевые слова: обледенение летательных аппаратов, численное моделирование, шероховатость поверхности, модель турбулентности, конвективный теплообмен.

С. В. АЛЕКСЕЕНКО

РОЗРАХУНОК КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ В ЗАДАЧАХ ПРО ЗЛЕДЕНІННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Розглянуто методику розрахунку конвективного теплообміну поверхні, яка обмерзає, з потоком, що набігає, в задачах про зледеніння літальних апаратів на основі розв'язання усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса і однопараметричної диференціальної моделі турбулентності Spalart-Allmaras з корекцією для шорсткою стінки. Виконано порівняння результатів розрахунків, отриманих за допомогою запропонованої методики і за допомогою кореляційних співвідношень. Показана можливість застосування запропонованого підходу до обчислення коефіцієнта конвективного теплообміну в задачах про зледеніння в тривимірній постановці.

Ключові слова: зледеніння літальних апаратів, чисельне моделювання, шорсткість поверхні, модель турбулентності, конвективний теплообмін.

© С. В. Алексеенко, 2019

S. V. ALEKSEYENKO

NUMERICAL SIMULATION OF THE AIRFOILS ICING PROCESSES: CONVECTIVE HEAT EXCHANGE CALCULATION

The calculating method of the convective heat exchange of the icing surface with the incoming airflow in the problems of simulation of airfoils icing processes based on solving of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations with the Spalart-Allmaras one-parameter differential turbulence model for a rough wall was considered. Comparison of the calculation results obtained using the proposed method and using correlation ratios was performed. The possibility of applying the proposed approach to the calculation of the convective heat transfer coefficient in icing problems in a three-dimensional formulation was shown.

Key words: aircrafts icing, numerical simulation, surface roughness, turbulence model, convective heat transfer.

Введение. Обеспечение безопасности полетов, в том числе в сложных метеорологических условиях, является актуальной проблемой, которой во всем мире уделяется все более пристальное внимание. Известно, что переохлажденные капли воды, содержащиеся в облаках, могут замерзать, попадая на передний край фюзеляжа, крыльев, на элементы оперения, детали авиационных двигателей. При этом наиболее общими негативными явлениями, которые могут быть вызваны обледенением аэродинамических поверхностей, являются уменьшение подъемной силы и угла срыва потока с крыла, а также элементов хвостового оперения, потерю продольной устойчивости. Кроме того, образующийся ледяной слой разрушает гладкую структуру течения, вызывает потерю тяги, рост турбулентного следа, увеличение лобового сопротивления, приводит к увеличению веса. Причем увеличение веса летательного аппарата играет вторичную роль по сравнению с негативными эффектами, вызванными изменениями режима обтекания.

Разработка систем защиты от обледенения и определение их эффективности является очень сложной проблемой, охватывающей различные исследовательские направления, такие как метеорология, аэродинамика, тепломассообмен, физика фазовых переходов, материаловедение.

В современных условиях, с целью сокращения времени и стоимости разработки систем защиты от обледенения, оценки их эффективности, понимания особенностей влияния изменения геометрии аэродинамических поверхностей вследствие образования ледяных наростов на картину течения и, соответственно, для создания наиболее совершенных систем защиты от обледенения возникает необходимость в применении, наряду с экспериментальными методами исследования, методов численного моделирования.

При этом, при моделировании процессов обледенения очень важно как можно точнее определять распределение коэффициента конвективного теплообмена вдоль обтекаемой шероховатой поверхности, поскольку он оказывает доминирующее влияние на тепло- и массообмен на обледеневающей поверхности и, по сути, определяет форму образующихся ледяных наростов [1]. А при проектировании тепловой антиобледенительной системы распределение коэффициента конвективной теплоотдачи играет ключевую роль в определении локальных тепловых потоков, которые необходимо подводить к каждому элементу защищаемой поверхности.

Анализ последних исследований. Коэффициент конвективного теплообмена может быть определен двумя основными способами: с помощью корреляционных соотношений из расчета пограничного слоя и по известному температурному полю, решая уравнения Навье – Стокса для внешнего воздушно-капельного потока [1].

В некоторых случаях, используя критерии подобия, трехмерная задача об обледенении может быть упрощена до двумерной, как, например, это сделано в большинстве существующих классических методик, моделирующих процессы обледенения [2, 3]. Такой подход позволяет использовать одномерные интегральные или полумпирические соотношения для пограничного слоя и, тем самым, значительно упростить и ускорить расчет внешнего обтекания, определение коэффициентов трения и теплоотдачи. Кроме того, интегральные соотношения для пограничного слоя очень хорошо протестированы, подкорректированы и верифицированы на очень большом количестве экспериментов, и программные продукты, разработанные с использованием таких соотношений, как, например, LEWICE [2], признаются в процессе сертификации летательных аппаратов [4]. Также необходимо отметить, что результаты расчетов с использованием интегральных соотношений, благодаря их высокой точности, могут быть использованы для верификации разрабатываемых методов *RANS CFD*, в условиях недостаточности, а иногда и отсутствия необходимых экспериментальных данных.

Однако с другой стороны, созданные в предположении несжимаемости набегающего воздушного потока и с использованием одномерных приближений, подходы, использующие интегральные методы, не позволяют учитывать предысторию потока, имеют ограниченное применение в случае достаточно больших скоростей и сложных форм ледяных наростов (из-за наличия локальных трансзвуковых зон и значительных градиентов давления), в задачах в трехмерной постановке. Также такая методика не дает возможность определять аэродинамические характеристики профилей с наличием шероховатых ледяных наростов.

При разработке, хотя и более сложных и громоздких, однако более совершенных методик численного решения задачи об обледенении аэродинамических поверхностей на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса необходима модель, которая бы учитывала шероховатость обтекаемой поверхности и позволяла бы вычислять тепловые потоки в области ледяных образований. Основными проблемами здесь являются, с одной стороны, отсутствие универсальной модели турбулентности, которая бы также учитывала ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое, с другой стороны, отсутствие достаточного количества экспериментальных данных о распределении местных коэффициентов трения и чисел Стэнтона для различных геометрий и условий, в том числе полученных с учетом взаимодействия влетающих капелек с обтекаемой поверхностью: деформацией, разбрызгиванием, выплескиванием, перепрыгиванием [5].

Учитывая сказанное выше, при разработке методик моделирования процессов обледенения летательных аппаратов в трехмерной постановке актуальной является задача определения коэффициента конвективного теплообмена на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса с учетом шероховатости поверхности.

Постановка задачи. В работе, при решении задачи численного моделирования обледенения профиля крыла, для описания внешнего воздушно-капельного потока, применена модель взаимопроникающих сред с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса [6 – 9]. При моделировании турбулентности использовалась *однопараметрическая дифференциальная модель Spalart-Allmaras* [10] с коррекцией для шероховатой стенки [11]. Процесс нарастания льда описывается с помощью метода поверхностных контрольных объемов, основанном на уравнениях массового и теплового балансов.

Моделирование шероховатости поверхности. Одной из первых проблем, возникших при изучении шероховатости, оказалось многообразие форм самих неровностей, решением которой может быть использование некой идеальной «модельной» шероховатости [12]. В этом случае, рассматривая данную конкретную шероховатость, ей в соответствие можно поставить «эквивалентную» модельную с высотой бугорков k_s . На практике шероховатость поверхности характеризуют безразмерным параметром

$$k_s^+ = \frac{k_s u_\tau}{\nu}, \quad (1)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости; $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ – скорость трения; τ_w – касательное напряжение трения на стенке; ρ – плотность газа.

При рассмотрении шероховатости поверхности льда в качестве *модельной*, как правило, используют так называемую *песочную шероховатость*. В зависимости от степени влияния шероховатости на аэродинамику обтекания тел, можно выделить три режима течения [12]:

1. Режим без проявления влияния шероховатости на сопротивление и профиль скорости (высота неровностей меньше допустимой высоты шероховатости $k_s^+ \leq 5$, то есть вершины бугорков шероховатости «утоплены» в вязком подслое). Сопротивление соответствует сопротивлению гладкой поверхности.

2. Переходный режим, когда $5 < k_s^+ \leq 70$. Часть элементов шероховатости выступает из вязкого подслоя. Сопротивление складывается из сопротивления гладкой поверхности и выступающих элементов шероховатости.

3. Полное проявление шероховатости, $k_s^+ > 70$. Все элементы шероховатости выступают из вязкого подслоя. Сопротивление полностью определяется воздействием выступающих элементов шероховатости.

При этом необходимо отметить, что, поскольку высота неровностей на обледеневающей поверхности, даже на начальном этапе процесса обледенения, оказывается больше толщины местного пограничного слоя, в задачах об обледенении имеет место *полное проявление шероховатости*.

Модель турбулентности. В качестве модели турбулентности в работе была выбрана модель *Spalart-Allmaras* [10], которая изначально была разработана и предложена именно для решения задач внешней аэродинамики и калибрована для расчета обтекания профилей и крыльев. Кроме того, к достоинствам выбранной модели можно отнести относительно небольшие затраты машинного времени и памяти, поскольку модель является однопараметрической с одним дифференциальным уравнением, а также ее устойчивость и хорошую сходимость, и, соответственно, обладающую меньшей чувствительностью к величине шага по времени и минимальному шагу вблизи стенки.

При этом с целью учета влияния шероховатости граничное условие на стенке для \tilde{v} , в соответствии с [11], были изменены с граничного условия $\tilde{v} = 0$, принятого в оригинальной модели [10], на:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = \frac{\tilde{v}}{d}, \quad (2)$$

где n – нормаль к стенке.

Расстояние d было увеличено путем введения смещения $d = d_{\min} + d_0$, где d_{\min} – расстояние до стенки; $d_0(h)$ – длина, на которую корректируется расстояние.

В свою очередь, *Nikuradse* [13] показал, что для т.н. очень неровных поверхностей (когда $k_s^+ > 70$), профили скорости в логарифмической области соответствуют выражению:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.5. \quad (3)$$

Поскольку влияние шероховатости велико, то коэффициент турбулентной вязкости должен быть больше по сравнению с молекулярной вязкостью газа, в том числе и на стенке ($\nu_t = \tilde{\nu}$). Следовательно, уравнение сохранения импульса сводится к:

$$u_{\tau}^2 = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} = u_{\tau} k d \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

решением которого является:

$$u^+ = \frac{1}{k} [\ln(y + d_0) - \ln(d_0)]. \quad (5)$$

Тождественность этих двух выражений для профиля скорости дает:

$$d_0 = \exp(-8.5k) k_s \approx 0.03k_s. \quad (6)$$

Кроме того, переменную χ , входящую в соотношения для определения турбулентной вязкости как $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$, было предложено заменить на [11]:

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} + c_{R1} \frac{k_s}{d}, \quad c_{R1} = 0.5. \quad (7)$$

Ламинарно-турбулентный переход. Проблема описания ламинарно-турбулентного перехода в рамках RANS является одной из наиболее трудно моделируемых проблем. В задачах внешней аэродинамики переход обычно происходит в пограничном слое, поэтому, как правило, задача сводится к определению точки перехода на обтекаемой поверхности. При этом можно выделить естественный и вынужденный переход. В первом случае переход происходит за счет естественного развития возмущений в неустойчивом ламинарном пограничном слое, а во втором – в неустойчивом пограничном слое возникают возмущения из-за наличия поверхностных элементов-турбулизаторов, таких как, например, нитка, бугорок, шероховатость, что обычно приводит к немедленной турбулизации пограничного слоя [12].

В расчетах на практике применяют несколько приемов для определения точки перехода. Это может быть предписанный переход, который определяют из общих соображений или используя экспериментальные данные, а также переход, обусловленный наличием турбулизаторов. Для описания спонтанного перехода могут предприниматься попытки построить такие демпфирующие функции в низкорейнольдсовой модели турбулентности, чтобы переход осуществлялся в правильном месте, или попытки создания локальных дифференциальных уравнений перехода. Также положение точки спонтанного перехода может находиться из свойств пограничного слоя: интегрируются характеристики пограничного слоя вдоль обтекаемой поверхности и на основе этих интегралов определяется точка перехода [12].

Такой прием, например, используется в методике LEWICE, где в задаче об обледенении профилей внешний поток рассматривается как потенциальное течение, а при расчете пограничного слоя используется приближение для шероховатой ровной пластины и критерием ламинарно-турбулентного перехода является выполнение неравенства [2]:

$$\text{Re}_k = \frac{V_k k_s}{\nu} \geq 600, \quad (8)$$

где V_k – скорость потока на расстоянии от стенки, равном высоте эквивалентной песочной шероховатости k_s ; Re_k – локальное число Рейнольдса, рассчитанное по высоте шероховатости.

В предложенной методике, при рассмотрении вопроса об определении точки ламинарно-турбулентного перехода, предложено использовать так называемый *fully turbulence* подход [12], поскольку в задаче об обледенении профиля шероховатость, для учета которой в модель *Spalart-Allmaras* внесены изменения, как раз и является турбулизатором, инициирующим ламинарно-турбулентный переход практически уже в точке торможения. Аргументами в пользу справедливости использования такого решения являются: незначительная, как показывают расчеты с использованием интегральных соотношений, длина ламинарного участка пограничного слоя вдоль профиля (~2% длины хорды крыла); небольшая скорость набегающего потока в этой области (соответственно, турбулентность развивается относительно медленно, значение турбулентной вязкости оказывается меньше значения ламинарной вязкости на протяжении значительной доли ламинарного участка); а также тот факт, что в области точки торможения на крыле в реальном полете в условиях обледенения происходят множественные соударения влетающих капелек с поверхностью профиля, их интенсивное разбрызгивание, движение, отскакивание, являясь дополнительным фактором турбулизации пограничного слоя [5] (что не учитывается при использовании интегральных одномерных соотношений).

Конвективный теплообмен. Корреляционные соотношения. В случае применения подхода с использованием одномерных интегральных или полуэмпирических соотношений для пограничного слоя, полученных для плоской пластины, коэффициент конвективного теплообмена h_{cv} может быть определен с помощью следующих соотношений [14]:

$$h_{cv} = \rho_e C_p U_e St, \quad (8)$$

где St – число Стэнтона; U_e – скорость на границе пограничного слоя; ρ_e – плотность воздуха; C_p – удельная теплоемкость.

Число Стэнтона St , учитывающее шероховатость поверхности, может быть определено по аналогии *Chilton-Colburn* [15] для ламинарного режима или по аналогии *Spalding* [14] для турбулентного режима.

По аналогии *Chilton-Colburn* число Стэнтона St определяется как:

$$St = \frac{C_f}{2} Pr^{-2/3}, \quad (9)$$

где C_f – коэффициент трения; Pr – число Прандтля.

Коэффициент трения в ламинарном режиме для шероховатой ровной пластины:

$$\frac{C_f}{2} = 0,225 \frac{\nu_e}{U_e} \frac{1}{\theta_l}, \quad (10)$$

где ν_e – кинематическая вязкость воздуха; θ_l – толщина потери импульса, развитого в ламинарном режиме.

Толщина потери импульса [16] определяется интегрированием скорости на границе пограничного слоя вдоль криволинейной продольной координаты s в ламинарной зоне:

$$\theta_l = 0,664 \nu_e^{0,5} U_e^{-1,435} \sqrt{\int_0^s U_e^{1,87} ds}. \quad (11)$$

По аналогии *Spalding* [14] число Стэнтона St для шероховатой ровной пластины в турбулентном режиме определяется как:

$$St = \frac{\frac{C_f}{2}}{Pr_t + \sqrt{\frac{C_f}{2} St_k^{-1}}}, \quad (12)$$

где Pr_t – число Прандтля для турбулентного потока ($Pr_t \approx 0,9$ [17]); St_k – число Стэнтона с учетом шероховатости, которое равно:

$$St_k = 1,92 Re_{\tau-k}^{-0,45} Pr^{-0,8}. \quad (13)$$

Число Рейнольдса $Re_{\tau-k}$ зависит от высоты шероховатости k_s , скорости трения U_τ и кинематической вязкости воздуха ν_e :

$$Re_{\tau-k} = \frac{U_\tau k_s}{\nu_e}. \quad (14)$$

Скорость трения пропорциональная скорости на границе пограничного слоя U_e и коэффициенту трения C_f :

$$U_\tau = U_e \sqrt{\frac{C_f}{2}}. \quad (15)$$

Местный коэффициент трения зависит от толщины потери импульса в турбулентном режиме θ_l и высоты шероховатостей k_s :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0,1681}{\left[\ln \left(864 \frac{\theta_l}{k_s} \right) + 2,568 \right]^2}. \quad (16)$$

Толщина потери импульса может быть найдена, используя *подход Thwaites* [16], заключающийся в интегрировании скорости на границе пограничного слоя по криволинейной продольной координате в турбулентной зоне:

$$\theta_l = \theta_{lr} + 0,036 \nu_e^{1/5} U_e^{-3,29} \left(\int_{s_{lr}}^s U_e^{3,86} ds \right)^{4/5}, \quad (17)$$

где s_{lr} – расстояние, соответствующего переходу ламинарного режима в турбулентный; θ_{lr} – толщина потери импульса в точке перехода.

Согласно принятому предположению, шероховатость поверхности инициирует более ранний ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое и также оказывает влияние на величину местного коэффициента трения. В приближении плоской шероховатой пластины считают [18], что ламинарно-турбулентный переход происходит, когда число Рейнольдса, рассчитанное по высоте эквивалентной песочной шероховатостей k_s [19], превосходит или равно 600:

$$Re_k = \frac{U_k k_s}{\nu_e} \geq 600. \quad (18)$$

где U_k – скорость потока на уровне шероховатостей, которая может быть вычислена по профилю скорости в ламинарном режиме, используя следующее отношение:

$$U_k = \left(\frac{3 k_s}{2 \delta_l} - \frac{1 k_s^3}{2 \delta_l^3} \right) U_e, \tag{19}$$

либо равна скорости на границе пограничного слоя U_e в случае, если высота шероховатостей k_s превосходит толщину пограничного слоя в ламинарном режиме δ_l :

$$\delta_l = \frac{15}{2} \theta_l. \tag{20}$$

Подход, основанный на решении уравнений Навье-Стокса. В рамках разработанной методики осредненная местная температура обледеневающей аэродинамической поверхности определяется из решения массового и теплового балансов для данного контрольного объема [6 – 9]. Так в области, характеризующейся влажным режимом обледенения (на обтекаемой поверхности будет присутствовать незамерзшая вода) осредненная температура рассматриваемого элемента поверхности будет близка к температуре фазового перехода. В области сухого режима обледенения (на обтекаемой поверхности присутствует только лед) осредненная температура элемента поверхности будет ниже температуры фазового перехода, но выше температуры набегающего потока (за счет выделения в рассматриваемом контрольном объеме высвобождающейся теплоты фазового перехода), либо, если влага на этот участок обтекаемой поверхности, покрытый льдом, больше не выпадает – ниже температуры набегающего потока (за счет испарения льда).

Принимая гипотезу сплошности среды, будем считать справедливыми условия «прилипания» на стенке. То есть будем полагать, что непосредственно у самой поверхности обтекаемого тела имеется тонкий слой неподвижного газа, и в пограничном слое можно выделить вязкий динамический подслой, а также тепловой подслой, характеризующийся ламинарным течением и преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом. Таким образом, будем считать, что при описании изменения температуры вдоль нормали к стенке в границах толщины теплового подслоя справедлива линейная зависимость [20]. Тогда, решая задачу об обледенении аэродинамической поверхности, конвективный тепловой поток может быть определен по известному температурному полю вблизи поверхности при ее заданной температуре.

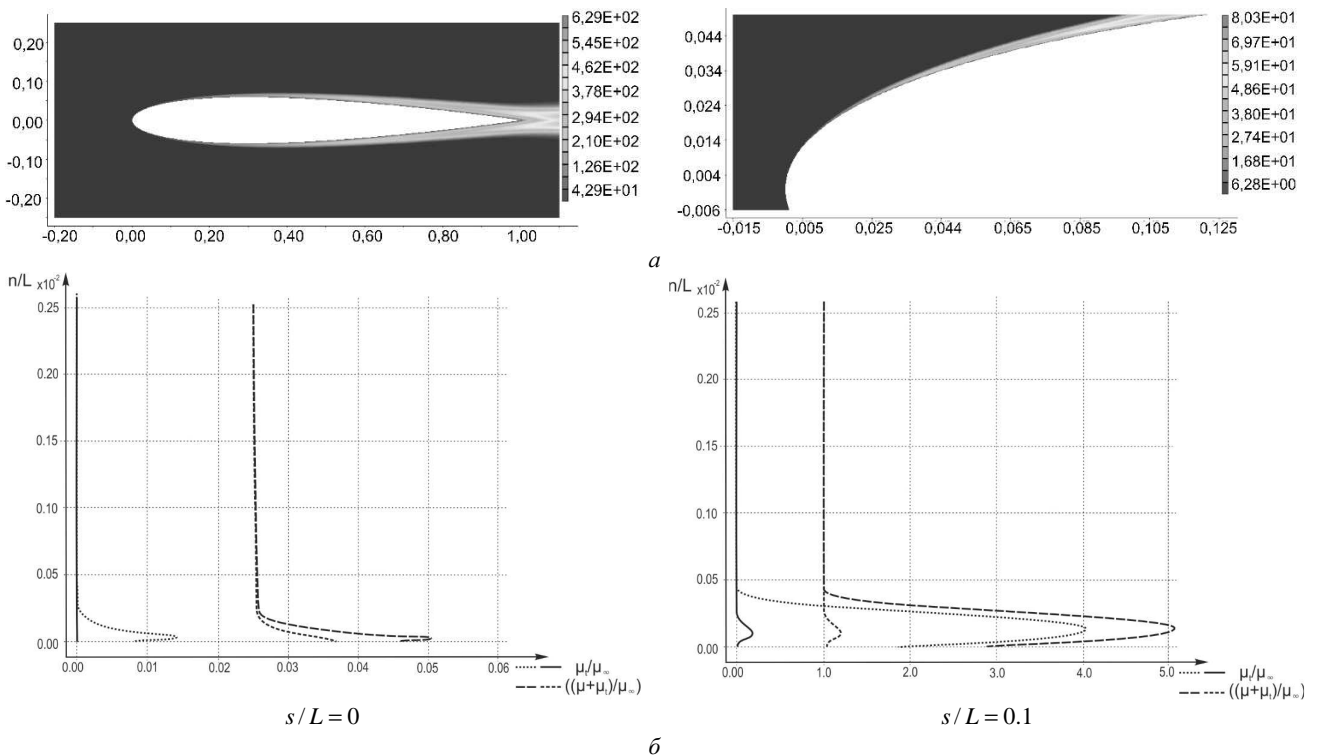


Рис. 1 – Распределение вязкости: а – в окрестности профиля NACA 0012; б – вдоль нормали к обтекаемой поверхности в точке с поверхностной координатой s/L : — ---- – гладкая поверхность, – шероховатая поверхность ($k_s = 0,00020$ м).

Температура стенки и тепловой поток в процессе расчета определяется из условия равенства на границе раздела обтекаемая поверхность – набегающий поток температур и тепловых потоков (граничные условия четвертого рода):

$$T_w = T_a; \tag{21}$$

$$-\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = -\lambda_a \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_a, \quad (22)$$

где T – температура; n – нормаль к границе раздела; λ – коэффициент теплопроводности; индекс w обозначает стенку; a – набегающий поток.

Результаты расчетов. С помощью усовершенствованного программно-методического обеспечения, учитывающего шероховатость поверхности, были проведены исследования обледенения аэродинамических поверхностей. Результаты расчетов представлены на примере обтекания профиля крыла *NACA 0012* с длиной хорды $L = 0,3$ м воздушно-капельным потоком под нулевым углом атаки, имеющим скорость $V_\infty = 129,46$ м/с, температуру $T_\infty = -12,6$ °C, давление $p_\infty = 9,075 \cdot 10^4$ Па. Расчеты были выполнены для гладкого и шероховатого профиля имеющего значения высот эквивалентной «песочной» шероховатости $k_s = 0,00020$ и $0,00035$ м. Учет шероховатости стенки приводит к значительному увеличению толщины пограничного слоя и увеличению степени его турбулентности. Величина турбулентной вязкости на стенке имеет ненулевое значение.

На рис. 1 приведено распределение вязкости в окрестности обтекаемого профиля, имеющего шероховатость $k_s = 0,00020$ м, а также вдоль нормали к обтекаемой поверхности в точке торможения и на некотором удалении от точки торможения. Видно, что учет шероховатости стенки приводит к значительному увеличению толщины пограничного слоя и увеличению степени его турбулентности. Величина турбулентной вязкости на стенке имеет ненулевое значение. Распределение температуры воздушного потока вдоль нормали n к обтекаемой поверхности в точке торможения и на некотором удалении от точки торможения представлено на рис. 2.

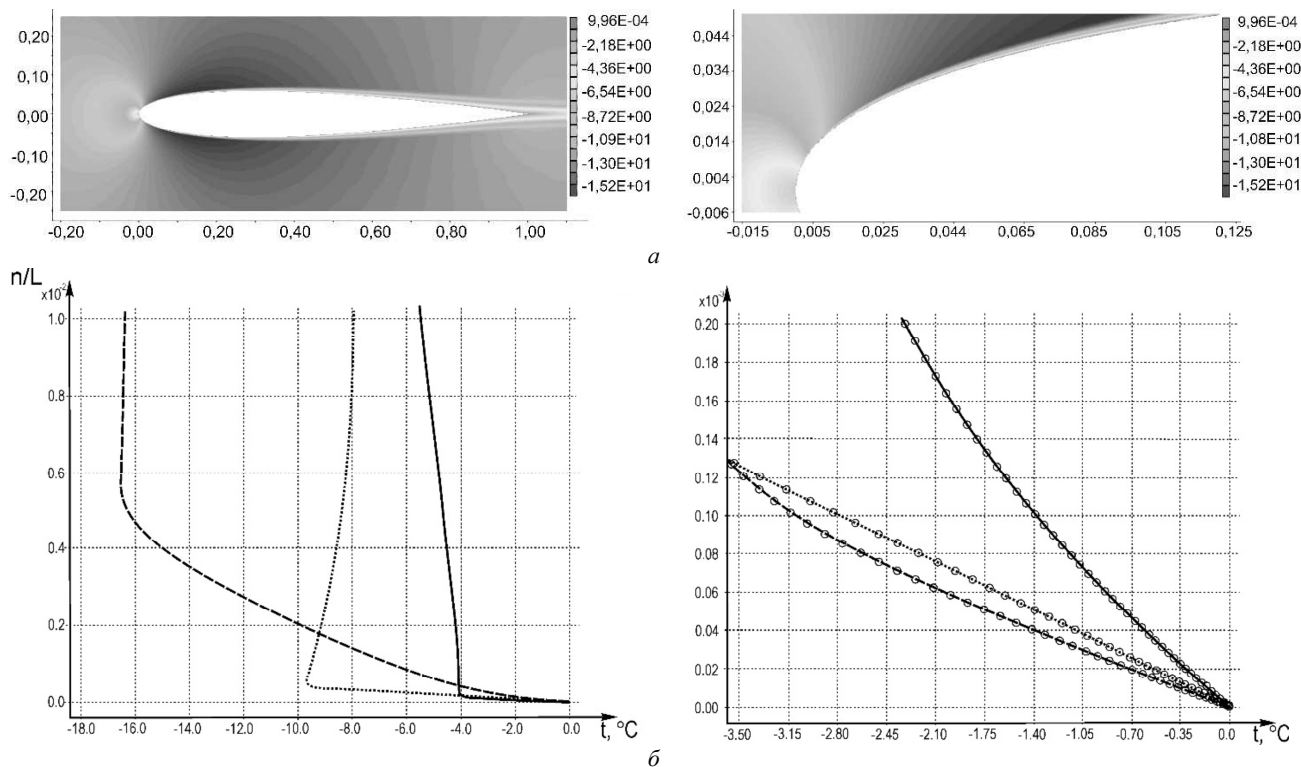


Рис. 2 – Распределение температуры: a – в окрестности профиля *NACA 0012*; b – вдоль нормали к обтекаемой поверхности профиля *NACA 0012*, имеющей эквивалентную песочную шероховатость $k_s = 0,00020$ м, в точках с поверхностными координатами: $s/L = 0$ (—); $s/L = 0,1$ (.....); $s/L = 0,5$ (-----).

Необходимо отметить, что для получения корректных результатов расчетов, сетка должна задаваться таким образом, чтобы в область вязкого подслоя, характеризующегося линейным распределением скорости и температуры, попадало достаточное количество расчетных точек; на практике это требование может быть реализовано выполнением неравенства для нормированного расстояния до стенки $y^+ < 0,4$. В представленных результатах видно, что, по крайней мере, порядка десяти точек в области стенки задают линейную зависимость (рис. 2), что обеспечивает получение тепловых потоков с высокой точностью.

Затем было выполнено сравнение полученных результатов расчетов с результатами интегрального решения, которое, в свою очередь, было получено в рамках обоснованных границ применимости и в соответствии с экспериментальными данными. Так, сравнение распределения коэффициентов давления C_p и трения C_f вдоль поверхности профиля *NACA 0012* с шероховатостью $k_s = 0,0002$ м рассчитанных по интегральным соотношениям и с помощью разработанной методики приведено на рис. 3. Наблюдается хорошее согласование распределе-

ния коэффициентов давления C_p (за исключением задней кромки), но при этом отличие в распределении значений коэффициентов трения C_f : существенное расхождение в области точки торможения и предполагаемого ламинарно-турбулентного перехода (поскольку интегральные соотношения получены в приближении плоской пластины) и в целом более высокие значения вдоль остальной поверхности профиля.

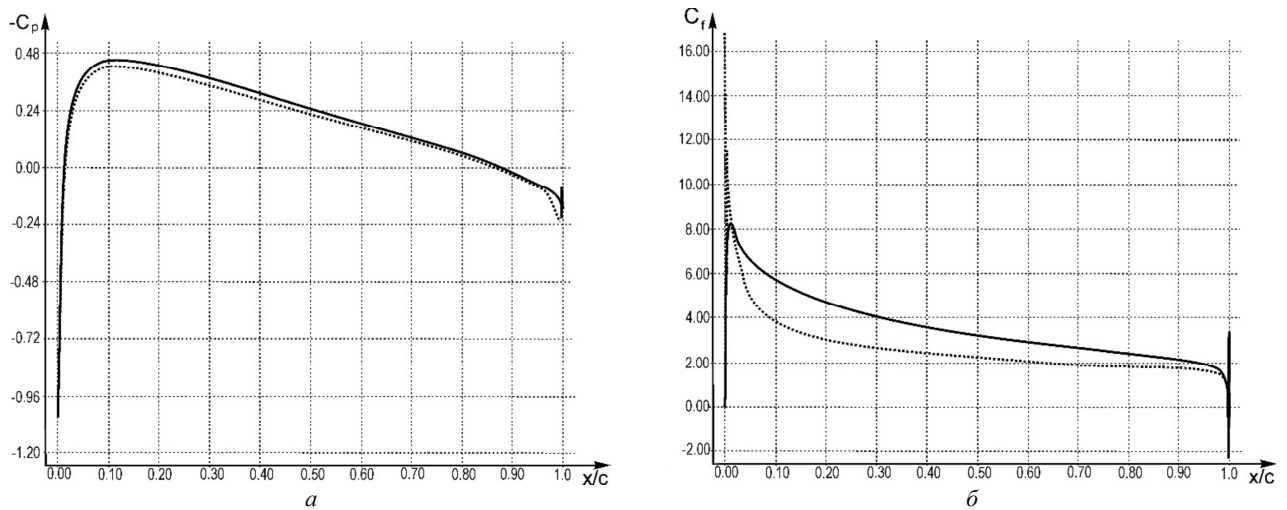


Рис. 3 – Распределение вдоль поверхности профиля *NACA 0012*, имеющей шероховатость, эквивалентную *песочной*, с высотой неровностей $k_s = 0,00020$ м: — – интегральный метод; – с использованием аналогии Рейнольдса:

a – коэффициента давления C_p ; b – коэффициента трения C_f .

Распределение коэффициента конвективного теплообмена вдоль поверхности профиля *NACA 0012*, рассчитанного с помощью разработанной методики, для гладкой стенки и с шероховатостью $k_s = 0,00020$ и $k_s = 0,00035$ м приведены на рис. 4. Показано, что в случае *гладкой* поверхности, коэффициент конвективного теплообмена максимален в области точки торможения и уменьшается по мере удаления вдоль хорды крыла.

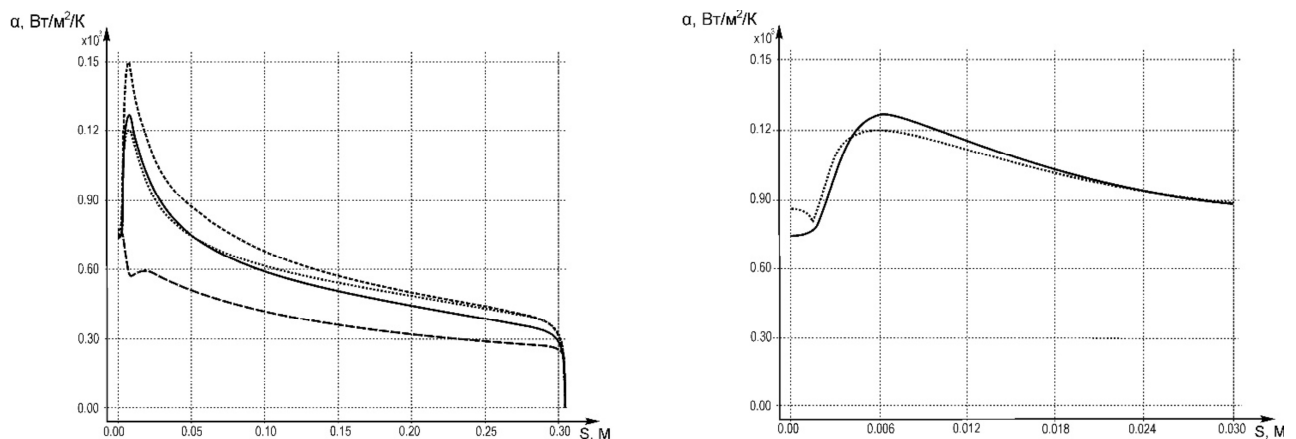


Рис. 4 – Распределение коэффициента конвективного теплообмена вдоль поверхности профиля *NACA 0012*, имеющей шероховатость, эквивалентную *песочной* с высотой неровностей: $k_s = 0,00000$ м (---);

$k_s = 0,00020$ м (..... – интегральный метод, — – с использованием аналогии Рейнольдса); $k_s = 0,00035$ м (----).

Для шероховатой стенки с высотой неровностей $k_s = 0,00020$ м приведено сравнение с результатами, полученными с помощью интегральных соотношений. Наблюдается хорошее соответствие рассчитанной по интегральным соотношениям длины ламинарного участка пограничного слоя, на котором коэффициент конвективного теплообмена несколько уменьшается по мере удаления от точки торможения, и по результатам разработанной методики протяженности области, где турбулентная вязкость оказывается незначительной по сравнению с ламинарной и, соответственно, коэффициент конвективного теплообмена остается практически постоянным. Затем по результатам обеих методик происходит резкое увеличение значений коэффициента конвективного теплообмена до значений ~ 1200 Вт/м²/К, вследствие увеличения степени турбулентности пограничного слоя и далее постепенное уменьшение значений по мере роста толщины пограничного слоя. При этом в целом обе методики дают схожее распределение коэффициента конвективного теплообмена вдоль поверхности профиля. При увеличении высоты шероховатости до значения $k_s = 0,00035$ м характер зависимости не изменяется, макси-

мальное значение коэффициента конвективного теплообмена составляет $\sim 1500 \text{ Вт/м}^2/\text{К}$.

Перспективы дальнейших исследований. Направлением дальнейших исследований является переход к решению задачи об обледенении аэродинамических поверхностей летательных аппаратов в трехмерной постановке с учетом сжимаемости и вязкости потока, а также шероховатости поверхности.

Выводы. Таким образом, в данной работе приведена методика расчета конвективного теплообмена обледеневающей поверхности с набегающим потоком на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса и однопараметрической дифференциальной модели турбулентности Spalart-Allmaras с коррекцией для шероховатой стенки.

Выполнено сравнение результатов расчетов, полученных с помощью предложенной методики и с использованием интегральных соотношений: наблюдается хорошее качественное и количественное согласование распределения коэффициента конвективного теплообмена и коэффициента давления вдоль поверхности обтекаемого профиля (с расхождением до 10 %) и завышенное значение коэффициента трения.

Полученные результаты демонстрируют возможность использования предложенной методики при решении задач обледенения аэродинамических поверхностей с учетом шероховатости обтекаемой поверхности.

Список литературы

1. Fuzaro Rafael C., Mendes Pio D., A. Lima da Silva G. CFD and Boundary Layer Models with Laminar-Turbulent Transition around Airfoils and a Rough Cylinder : Results Validation // SAE Technical Paper. – 2015. – 2015-01-2163. – 14 p. DOI:10.4271/2015-01-2163.
2. Wright W. B. User Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6 // National Aeronautics and Space Administration. – Cleveland, May 1995. – 95 p. (Contractor Report, 198355).
3. Guffond D., Brunet L. Validation du programme bidimensionnel de capitation // Océ National D'Etudes et de Recherches Aérospatiales. – Chatillon Cedex, France, 1988. (Rapport Technique, RP 20/5146 SY).
4. Advisory Circular of Federal Aviation Administration 25-28. Compliance of Transport Category Airplanes with Certification Requirements for Flight in Icing Conditions. – October 27, 2014. – 89 p.
5. Alekseyenko S., Sinapius M., Schulz M., Prykhodko O. Interaction of Supercooled Large Droplets with Aerodynamic Profile // SAE Technical Paper. – 2015. – 2015-01-2118. – 12 p. DOI:10.4271/2015-01-2118.
6. Alekseyenko S. V., Prykhodko O. A. Numerical simulation of icing of a cylinder and an airfoil: model review and computational results // TsAGI Science Journal. – 2013. – V.44. – Issue 6. – P. 761 – 805.
7. Alekseenko S. V., Prikhod'ko A. A. Mathematical Modeling of Ice Body Formation on the Wing Airfoil Surface // Fluid Dynamics. – 2014. – V. 49. – No. 6. – P. 715 – 732. DOI: 10.1134/S0015462814060039.
8. Prikhod'ko A. A., Alekseenko S. V. Numerical Simulation of the Processes of Icing on Airfoils with Formation of a “Barrier” Ice // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, May 2014. – V.87. – Issue 3. – P. 598 – 607. DOI:10.1007/s10891-014-1050-0.
9. Prykhodko A. A., Alekseenko S. V. Numerical Simulation of the Process of Airfoil Icing in the Presence of Large Supercooled Water Drops // Technical Physics Letters. – 2014. – V. 40. – No. 10. – P. 884 – 887. DOI:10.1134/S1063785014100125.
10. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // AIAA Paper. – 1992. – No. 92 – 0439. – 22 p. DOI: 10.2514/6.1992-439.
11. Aupoix B., Spalart P. R. Extensions of the Spalart-Allmaras Turbulence Model to Account for Wall Roughness // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2003. – V. 24. – P. 454 – 462.
12. Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений : учебное пособие. – СПб : Издательство Политехнического университета. – 2012. – 88 с.
13. Nikuradse J. Stromungsgesetze in rauhen Rohren (Laws of Flow in Rough Pipes) // VDI – Forschungsheft 361. – 1933 (translated in NACA TM 1292, Nov. 1950).
14. White F. M. Viscous Fluid Flow // Mechanical Engineering, Second Edition, McGraw-Hill. – 1991. – P. 23 – 29 and 569.
15. Kreith F., Black W. Z. Basic Heat Transfer. – New York : Harper & Row, Publishers, Inc., 1980. – P. 218 – 219 and P. 486 – 489.
16. Kays W. M., Crawford M. E. Convective Heat and Mass Transfer. – McGraw-Hill Book Company, 3th edition, 1993. – P. 206 – 301.
17. Cebeci T., Bradshaw P. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. – New York, 1984. – P. 165 – 201.
18. Von Doenhoff A. E., Horton E. A. A Low-Speed Experimental Investigation of the Effect of a Sandpaper Type of Roughness on Boundary-Layer Transition // NACA Technical Manual 1349. – 1958. – P. 239 – 254.
19. Young A. D. Boundary layers // American Institute of Aeronautics and Astronautics Education Series. – 1989. – P. 176 – 187.
20. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. – М. : “Энергоиздат”, 1981. – 415 с.

References (transliterated)

1. Fuzaro Rafael C., Mendes Pio D., A. Lima da Silva G. CFD and Boundary Layer Models with Laminar-Turbulent Transition around Airfoils and a Rough Cylinder : Results Validation. *SAE Technical Paper*. 2015, 2015-01-2163. 14 p. DOI:10.4271/2015-01-2163.
2. Wright W. B. User Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6. *National Aeronautics and Space Administration*. Cleveland, May 1995. 95 p. (Contractor Report, 198355).
3. Guffond D., Brunet L. Validation du programme bidimensionnel de capitation. *Océ National D'Etudes et de Recherches Aérospatiales*. Chatillon Cedex, France, 1988. (Rapport Technique, RP 20/5146 SY).
4. Advisory Circular of Federal Aviation Administration 25-28. Compliance of Transport Category Airplanes with Certification Requirements for Flight in Icing Conditions. – October 27, 2014. – 89 p.
5. Alekseyenko S., Sinapius M., Schulz M., Prykhodko O. Interaction of Supercooled Large Droplets with Aerodynamic Profile. *SAE Technical Paper*. 2015, 2015-01-2118. 12 p. DOI:10.4271/2015-01-2118.
6. Alekseyenko S. V., Prykhodko O. A. Numerical simulation of icing of a cylinder and an airfoil: model review and computational results. *TsAGI Science Journal*. 2013, vol. 44, issue 6, pp. 761–805.
7. Alekseenko S. V., Prikhod'ko A. A. Mathematical Modeling of Ice Body Formation on the Wing Airfoil Surface. *Fluid Dynamics*. 2014, vol. 49, no. 6, pp. 715–732. DOI: 10.1134/S0015462814060039.
8. Prikhod'ko A. A., Alekseenko S. V. Numerical Simulation of the Processes of Icing on Airfoils with Formation of a “Barrier” Ice. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. May 2014, vol. 87, issue 3, pp. 598–607. DOI:10.1007/s10891-014-1050-0.
9. Prykhodko A. A., Alekseenko S. V. Numerical Simulation of the Process of Airfoil Icing in the Presence of Large Supercooled Water Drops. *Technical Physics Letters*. 2014, vol. 40, no. 10, pp. 884–887. DOI:10.1134/S1063785014100125.
10. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*. 1992, no. 92 – 0439. 22 p. DOI: 10.2514/6.1992-439.

11. Auipoix B., Spalart P. R. Extensions of the Spalart-Allmaras Turbulence Model to Account for Wall Roughness. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2003, vol. 24, pp. 454–462.
12. Garbaruk A. V., Strelets M. Kh., Shur M. L. *Modelirovanie turbulentsosti v raschyotakh slozhnykh techeniy : uchebnoe posobie* [Modeling turbulence in complicated flow computations: textbook]. Sankt-Peterburg, Izdatel'stvo Politekhnicheskogo universiteta publ., 2012. 88 p.
13. Nikuradse J. Stromungsgesetze in rauhen Rohren (Laws of Flow in Rough Pipes). *VDI – Forschungsheft 361*. 1933 (translated in NACA TM 1292, Nov. 1950).
14. White F. M. Viscous Fluid Flow. *Mechanical Engineering. Second Edition*. McGraw-Hill, 1991, pp. 23–29 and 569.
15. Kreith F., Black W. Z. *Basic Heat Transfer*. New York, Harper & Row, Publishers, Inc., 1980. pp. 218–219 and pp. 486–489.
16. Kays W. M., Crawford M. E. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill Book Company, 3rd edition, 1993. pp. 206–301.
17. Cebeci T., Bradshaw P. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*. New York, 1984. pp. 165–201.
18. Von Doenhoff A. E., Horton E. A. A Low-Speed Experimental Investigation of the Effect of a Sandpaper Type of Roughness on Boundary-Layer Transition. *NACA Technical Manual 1349*. 1958. pp. 239–254.
19. Young A. D. Boundary layers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Education Series*. 1989. pp. 176–187.
20. Isachenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S. *Teploperedacha* [Heat transfer]. Moscow, Eynergoizdat Publ., 1981. 415 p.

Поступила (received) 07.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Алексєнко Сергій Вікторович (Алексєнко Сергей Викторович, Alekseyenko Sergey Viktorovich) – кандидат технічних наук, доцент, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро; тел.: (050) 480-85-03; e-mail: alexeyenko_sv@ukr.net.

УДК 517.95

А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК

КОМП'ЮТЕРНЕ ПРОГНОЗУВАННЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ДООЧИСТКИ ВОДИ ПІСЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ КОАГУЛЯЦІЇ У ШВИДКИХ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ

Сформовано математичну модель для комп'ютерного прогнозування процесу доочистки води від багатоконпонентних домішок після застосування коагуляції у швидких багатошарових фільтрах конусоподібної форми при додержанні сталої швидкості фільтрування, що враховує дослідження зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, які володіють окислювально-відновними властивостями. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів дослідити зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, спрогнозувати оптимальні варіанти використання коагулянтів і фільтрувальних матеріалів, збільшення тривалості роботи швидких багатошарових конусоподібних фільтрів за рахунок вибору їх форми і висоти шарів з урахуванням граничнодопустимих норм по кожній компоненті багатоконпонентних домішок.

Ключові слова: математична модель, комп'ютерне прогнозування, процес доочистки води, багатоконпонентна домішка, коагуляція, швидкий багатошаровий фільтр, конусоподібна форма, кусково-однорідне пористе завантаження.

А. Я. БОМБА, Ю. Е. КЛИМЮК

КОМП'ЮТЕРНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДООЧИСТКИ ВОДЫ ПОСЛЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОАГУЛЯЦИИ В БЫСТРЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЛЬТРАХ

Сформирована математическая модель для компьютерного прогнозирования процесса доочистки воды от многокомпонентных примесей после применения коагуляции в быстрых многослойных конусообразных фильтрах при соблюдении постоянной скорости фильтрования, что учитывает исследования изменения характеристик кусочно-однородных пористых загрузок, которые обладают окислительно-восстановительными свойствами. Предложенная модель позволяет путем проведения компьютерных экспериментов исследовать изменение характеристик кусочно-однородных пористых загрузок, спрогнозировать оптимальные варианты использования коагулянтов и фильтровальных материалов, увеличение продолжительности работы быстрых многослойных конусообразных фильтров за счет выбора их формы и высоты слоев с учетом предельно-допустимых норм по каждой компоненте многокомпонентных примесей.

Ключевые слова: математическая модель, компьютерное прогнозирование, процесс доочистки воды, многокомпонентная примесь, коагуляция, быстрый многослойный фильтр, конусообразная форма, кусочно-однородная пористая загрузка.

А. Я. БОМБА, Ю. Е. КЛИМЮК

COMPUTER PREDICTION OF IMPROVING EFFICIENCY OF WATER PURIFICATION AFTER COAGULATION IN RAPID MULTILAYER FILTERS

In the paper a mathematical model for computer predicting the process of water purification from multicomponent impurities after applying coagulation in rapid multilayer cone-shaped filters with the constant rate of filtration, which takes into account the changes in the characteristics of piecewise-homogeneous porous redox load, is formulated. Each layer of the load is characterized by its own coefficients of filtration, active porosity and diffusion of multicomponent impurities in the filtration flow, and the sediment adsorbed on the grains of the load. An algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the corresponding nonlinear singularly perturbed boundary value problem for a model region of a conical shape, bounded by two equipotential surfaces and a flow surface, separated by some given equipotential surfaces into several subdomains, is developed. The proposed model allows to predict by computer experiments the change in the characteristics of piecewise-homogeneous porous loads, to determine the optimal variants of coagulants and filter materials, and to increase the durability of the rapid multilayer cone-shaped filters by choosing their shape and height of layers taking into account the maximum allowable standards for each component of multicomponent impurities.

Key words: mathematical model, computer prediction, process of water purification, multicomponent impurity, coagulation, rapid multilayer filter, cone-shaped form, piecewise-homogeneous porous load.

© А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, 2019

Вступ. Основними методами очищення води для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності є освітлення, знебарвлення та знезараження [1 – 4]. Освітлення води зазвичай досягається шляхом її відстоювання і фільтрування через шар зернистого або порошкоподібного фільтруючого матеріалу у швидких фільтрах. Для досягнення необхідного ефекту воду необхідно піддати коагулюванню [5]. При цьому відбувається значне знебарвлення води. Додаткове знебарвлення води досягається коагулюванням, що передбачає застосування різних окислювачів і сорбентів. При цьому також відбувається значне знезараження води. Постійно зростаючі потреби у господарстві в очищеній воді та зростання вартості коагулянтів і фільтрувальних матеріалів вимагають проведення досліджень, пов'язаних із їх більш ефективним використанням та збільшенням тривалості роботи швидких фільтрів.

Аналіз останніх досліджень. Як показує аналіз літературних джерел, зокрема [6 – 12], суттєвий вклад у розробку теоретичних основ доочистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження зробило багато як вітчизняних, так і зарубіжних вчених. Відмітимо, що в якості математичної моделі процесу доочистки рідини від домішок вітчизняними дослідниками найчастіше використовується модель Д. М. Мінца [7] при сталій швидкості фільтрування або деяка її модифікація (вдосконалена модель). У [13] запропоновано її просторове узагальнення для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатоподібних криволінійних фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрування, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (тривалості роботи, форми, розмірів фільтра, висоти шарів тощо) за рахунок введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру, врахування дифузії у фільтраційній течії і в осаді, адсорбованому на зернах завантаження. У [14] вона вдосконалена шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни коефіцієнта фільтрації завантаження вздовж висоти фільтру, зокрема, отримані у роботі результати числових експериментів підтвердили необхідність врахування у моделях зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень. У [15] запропоновано просторове узагальнення моделі Д. М. Мінца для прогнозування процесу доочистки води від багатокомпонентних домішок у швидких фільтрах конусоподібної форми при додержанні сталої швидкості фільтрування, де додатково враховано масообмінні процеси між компонентами багатокомпонентної домішки у фільтраційній течії і в осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Актуальною задачею є узагальнення відповідної моделі для комп'ютерного прогнозування процесу доочистки води від багатокомпонентних домішок після застосування коагуляції у швидких багатоподібних фільтрах конусоподібної форми при додержанні сталої швидкості фільтрування, оскільки дозволило б шляхом проведення комп'ютерних експериментів дослідити зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, спрогнозувати оптимальні варіанти використання коагулянтів і фільтрувальних матеріалів, збільшення тривалості роботи швидких багатоподібних фільтрів за рахунок вибору їх форми і висоти шарів з урахуванням граничнодопустимих норм по кожній компоненті багатокомпонентних домішок.

Математична модель. Змоделюємо процес доочистки води від багатокомпонентної домішки після застосування коагуляції у швидкому багатоподібному фільтрі конусоподібної форми із врахуванням дослідження зміни характеристик вздовж висоти фільтру кусково-однорідного пористого завантаження, що володіє окислювально-відновними властивостями – просторовій однозв'язній області G_z ($z = (x, y, z)$), обмеженій гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями S_* , S^* і поверхнею течії S^{**} та розділеній деякими заданими $p-1$ еквіпотенціальними поверхнями S_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$) на p підобластей G_z^r ($r = \overline{1, p}$) (рис. 1, а). При цьому для області $G = G_z \times (0, \infty)$ відповідна модельна задача складатиметься з систем рівнянь:

$$\left\{ \bar{v} = \kappa_0^0 \cdot \text{grad } \phi, \text{div } \bar{v} = 0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}; \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma \cdot C_j)'_t &= \text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \bar{v} \cdot \text{grad } C_j - \sum_{k=1}^{m_1} a_{j,k} \cdot C_j + \sum_{k=1}^{m_1} a_{k,j} \cdot C_k - \sum_{k=1}^{m_1} a_{k,j}^{**} \cdot C_j \quad (j = \overline{1, m_1}); \\ (\sigma \cdot C_j)'_t &= \text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \bar{v} \cdot \text{grad } C_j - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{j,k} \cdot C_j + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{k,j} \cdot C_k + \sum_{k=1}^{m_1} a_{j,k}^{**} \cdot C_k - \alpha_j \cdot C_j + \beta_j \cdot U_j; \\ (\sigma \cdot U_j)'_t &= \text{div}(D_j^* \cdot \text{grad } U_j) - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{j,k}^* \cdot U_j + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_{k,j}^* \cdot U_k + \alpha_j \cdot C_j - \beta_j \cdot U_j \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \\ \kappa_t' &= - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \mu_k \cdot U_k, \sigma_t' = - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \gamma_k \cdot U_k, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

за крайових умов:

$$\left\{ \phi|_{S_*} = \phi_*, \phi|_{S^*} = \phi^*, \phi_n'|_{S^{**}} = 0; \right. \quad (3)$$

$$\left\{ C_j|_{S_*} = c_j^*, C_j'|_{S_*} = 0, C_j'|_{S^{**}} = 0 \quad (j = \overline{1, m_2}); \right. \quad (4)$$

$$\left\{ U_j \Big|_{S_*} = c_j^*, U'_j \Big|_{S^*} = 0, U''_j \Big|_{S^{**}} = 0 \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \right. \quad (5)$$

початкових умов:

$$\left\{ C_j \Big|_{t=0} = c_j^0 \quad (j = \overline{1, m_2}), U_j \Big|_{t=0} = u_j^0 \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}), \kappa \Big|_{t=0} = \kappa_0^0, \sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0^0 \right. \quad (6)$$

та умов узгодженості на поверхнях розділу S_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$):

$$\left\{ \begin{aligned} \phi \Big|_{S_{r-}} &= \phi \Big|_{S_{r+}} = \phi_{*r}^*, \kappa_r^0 \cdot \phi'_n \Big|_{S_{r-}} = \kappa_r^0 \cdot \phi'_n \Big|_{S_{r+}} \quad (r = \overline{1, p-1}); \\ \left. \begin{aligned} C_j \Big|_{S_{r-}} &= C_j \Big|_{S_{r+}} \quad (j = \overline{1, m_2}), U_j \Big|_{S_{r-}} = U_j \Big|_{S_{r+}} \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \\ D_{r,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_{rn}^0 \cdot C_j \Big|_{S_{r-}} &= D_{r+1,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_{rn}^0 \cdot C_j \Big|_{S_{r+}} \quad (j = \overline{1, m_2}); \\ D_{r,j}^* \cdot U'_{j\bar{n}} \Big|_{S_{r-}} &= D_{r+1,j}^* \cdot U'_{j\bar{n}} \Big|_{S_{r+}} \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \\ \sum_{j=1}^{m_2} (D_{r,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_{rn} \cdot C_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r,j}^* \cdot U'_{j\bar{n}} \Big|_{S_{r-}} &= \\ = \sum_{j=1}^{m_2} (D_{r+1,j} \cdot C'_{j\bar{n}} - v_{rn} \cdot C_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r+1,j}^* \cdot U'_{j\bar{n}} \Big|_{S_{r+}} &; \\ (\sigma \cdot (\sum_{j=1}^{m_2} C_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} U_j))' \Big|_{S_{r-}} &= (\sigma \cdot (\sum_{j=1}^{m_2} C_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} U_j))' \Big|_{S_{r+}} \quad (r = \overline{1, p-1}), \end{aligned} \right. \quad (8) \end{aligned}$$

де $\phi = \phi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації; $0 < \phi_* = \phi_{*0}^* < \phi_{*1}^* < \phi_{*2}^* < \dots < \phi_{*(p-1)}^* < \phi_{*p}^* = \phi^* < \infty$; ϕ_* і ϕ^* – довільні дійсні додатні числа; $\phi_{*1}^*, \phi_{*2}^*, \dots, \phi_{*(p-1)}^*$ – невідомі значення потенціалу; $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} \gg 0$; κ_0^0 – початковий коефіцієнт фільтрації, $\kappa_0^0 = \{\kappa_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\kappa_r^0 > 0$ ($r = \overline{1, p}$); \bar{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C_j = C_j(x, y, z, t)$ і $U_j = U_j(x, y, z, t)$ – концентрації j -тої компоненти багатокомпонентної домішки відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження; $\kappa = \kappa(x, y, z, t)$ – коефіцієнт фільтрації, $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ – активна пористість; D_j і D_j^* – коефіцієнти дифузії j -тої компоненти багатокомпонентної домішки відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, $D_j = \{D_{r,j}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $D_{r,j} = \varepsilon \cdot d_{r,j}, d_{r,j} > 0$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}$), $D_j^* = \{D_{r,j}^*, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $D_{r,j}^* = \varepsilon \cdot d_{r,j}^*, d_{r,j}^* > 0$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}$); $a_{j,k}$, $a_{j,k}^{**}$ і $a_{j,k}^*$ – коефіцієнти, що характеризують швидкість протікання масообмінних процесів між j -тою і k -тою компонентами багатокомпонентної домішки відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, $a_{j,k} = \{a_{r,j,k}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $a_{j,k}^{**} = \{a_{r,j,k}^{**}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $a_{j,k}^* = \{a_{r,j,k}^*, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $a_{r,j,k} = \varepsilon \cdot \bar{a}_{r,j,k}$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}, k = \overline{1, m_2}$), $a_{r,j,k}^* = \varepsilon \cdot \bar{a}_{r,j,k}^*$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}, k = \overline{m_1+1, m_2}$); α_j і β_j – коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованої і десорбованої за одиницю часу j -тої компоненти багатокомпонентної домішки, $\alpha_j = \{\alpha_{r,j}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\beta_j = \{\beta_{r,j}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\beta_{r,j} = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_{r,j}$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}$); μ_j і γ_j – коефіцієнти, що характеризують швидкість зміни відповідно коефіцієнта фільтрації та активної пористості завантаження за рахунок сорбції j -тої компоненти багатокомпонентної домішки, $\mu_j = \{\mu_{r,j}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\gamma_j = \{\gamma_{r,j}, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\mu_{r,j} = \varepsilon \cdot \bar{\mu}_{r,j}$, $\gamma_{r,j} = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_{r,j}$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}$), $\bar{a}_{r,j,k} = \bar{a}_{r,j,k}(x, y, z, t)$, $a_{r,j,k}^{**} = a_{r,j,k}^{**}(x, y, z, t)$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}, k = \overline{1, m_2}$), $\bar{a}_{r,j,k}^* = \bar{a}_{r,j,k}^*(x, y, z, t)$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}, k = \overline{m_1+1, m_2}$), $\alpha_{r,j} = \alpha_{r,j}(x, y, z, t)$, $\bar{\beta}_{r,j} = \bar{\beta}_{r,j}(x, y, z, t)$; $\bar{\mu}_{r,j} = \bar{\mu}_{r,j}(x, y, z, t)$ і $\bar{\gamma}_{r,j} = \bar{\gamma}_{r,j}(x, y, z, t)$ ($r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1+1, m_2}$) – неперервні обмежені функції; ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$); $c_j^0 = \{c_{r,j}^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $u_j^0 = \{u_{r,j}^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $\sigma_0^0 = \{\sigma_r^0, (x, y, z) \in G_z^r, r = \overline{1, p}\}$, $c_j^* = c_j^*(M, t)$

$(j = \overline{1, m_2})$, $c_{r,j}^0 = c_{r,j}^0(x, y, z)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$), $u_j^* = u_j^*(M, t)$ ($j = \overline{m_1 + 1, m_2}$), $u_{r,j}^0 = u_{r,j}^0(x, y, z)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$) і $\sigma_r^0 = \sigma_r^0(x, y, z)$ ($r = \overline{1, p}$) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G [16]; $M \in S_*$, v_{rn}^0 і v_{rn} ($r = \overline{1, p-1}$) – відповідно початкові і поточні нормальні складові швидкості на поверхнях розділу S_{*r} ($r = \overline{1, p-1}$).

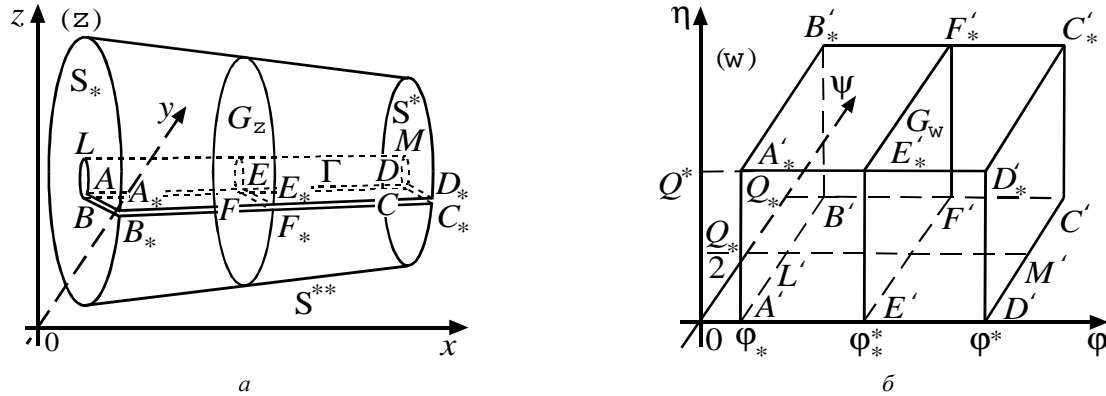


Рис. 1 – Просторова двошарова модельна область:

a – область фільтрації G_z з умовним розрізом Γ (конусоподібний фільтр); b – область комплексного потенціалу G_w .

Шляхом фіксації на поверхні S_* деякої точки A та послідовного виконання умовних розрізів $\Gamma_1 = ALMDBLMC$ і $\Gamma_2 = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідних поверхонь течії (для зручності позначимо $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) задача (1) – (8) зводиться до розв’язання в отриманій однозв’язній кусково-однорідній області $G_z \setminus \Gamma$ – криволінійному паралелепіпеді $ABCD_*A_*B_*C_*D_*$, обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями ABB_*A_* , CDD_*C_* і чотирма поверхнями течії $ABCD = ALMD \cup BLMC$, $A_*B_*C_*D_*$, ADD_*A_* = BCC_*B_* та розділений деякими заданими екіпотенціальними поверхнями $E_r F_r F_{*r} E_{*r}$ ($r = \overline{1, p-1}$) на p підобластей:

$$G_z^1 \setminus \Gamma^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}; \quad G_z^r \setminus \Gamma^r = E_{r-1} F_{r-1} F_r E_r E_{*(r-1)} F_{*(r-1)} F_{*r} E_{*r} \quad (r = \overline{2, p-1});$$

$$G_z^p \setminus \Gamma^p = E_{p-1} F_{p-1} C D E_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_* \quad (\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \dots \cup \Gamma^p, \quad \Gamma^1 = A E_1 E_{*1} A_* B F_1 F_{*1} B_*);$$

$$\Gamma^r = E_{r-1} F_{r-1} F_r E_r E_{*(r-1)} F_{*(r-1)} F_{*r} E_{*r} \quad (r = \overline{2, p-1}), \quad \Gamma^p = E_{p-1} D D_* E_{*(p-1)} F_{p-1} C C_* F_{*(p-1)} \quad (\text{рис. 1, a}),$$

які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умови непроникності $\phi'_{\bar{n}}|_{\Gamma} = 0$ вздовж розрізу Γ задачі, що описується системами рівнянь (1), (2) з наступними умовами:

$$\left\{ \phi \Big|_{ABB_*A_*} = \phi_*, \quad \phi \Big|_{CDD_*C_*} = \phi^*, \quad \phi'_{\bar{n}} \Big|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0; \right. \quad (9)$$

$$\left\{ C_j \Big|_{ABB_*A_*} = c_j^*, \quad C'_j \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad C'_j \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m_2}); \right. \quad (10)$$

$$\left\{ U_j \Big|_{ABB_*A_*} = u_j^*, \quad U'_j \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad U'_j \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \right. \quad (11)$$

початковими умовами (6), умовами узгодженості на поверхнях розділу $E_r F_r F_{*r} E_{*r}$ ($r = \overline{1, p-1}$):

$$\left\{ \phi \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = \phi \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} = \phi_{*r}^*, \quad \kappa_r^0 \cdot \phi'_{\bar{n}} \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = \kappa_{r+1}^0 \cdot \phi'_{\bar{n}} \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (r = \overline{1, p-1}); \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} &= C_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (j = \overline{1, m_2}), \quad U_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} = U_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ D_{r,j} \cdot C'_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} - v_{rn}^0 \cdot C_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} &= D_{r+1,j} \cdot C'_j - v_{rn}^0 \cdot C_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (j = \overline{1, m_2}); \\ D_{r,j}^* \cdot U'_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} &= D_{r+1,j}^* \cdot U'_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ \sum_{j=1}^{m_1} (D_{r,j} \cdot C'_j - v_{rn} \cdot C_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r,j}^* \cdot U'_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} &= \\ = \sum_{j=1}^{m_1} (D_{r+1,j} \cdot C'_j - v_{rn} \cdot C_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r+1,j}^* \cdot U'_j \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}}; \\ (\sigma \cdot (\sum_{j=1}^{m_1} C_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} U_j))' \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r-}} &= (\sigma \cdot (\sum_{j=1}^{m_1} C_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} U_j))' \Big|_{E_r F_r F_{*r} E_{*r+}} \quad (r = \overline{1, p-1}) \end{aligned} \right. \quad (13)$$

і подальшого «склеювання» берегів умовного розрізу Γ із використанням умов:

$$\left\{ \varphi \Big|_{ALMD} = \varphi \Big|_{BLMC}, \varphi'_n \Big|_{ALMD} = \varphi'_n \Big|_{BLMC}, \varphi \Big|_{ADD_*A_*} = \varphi \Big|_{BCC_*B_*}, \varphi'_n \Big|_{ADD_*A_*} = \varphi'_n \Big|_{BCC_*B_*} \right. \quad (14)$$

та узгодженості величин концентрацій компонент багатоконпонентної домішки у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, на умовних поверхнях розрізу із використанням умов:

$$\left\{ \begin{aligned} C_j \Big|_{ALMD} &= C_j \Big|_{BLMC}, C'_{j\bar{n}} \Big|_{ALMD} = C'_{j\bar{n}} \Big|_{BLMC}; \\ C_j \Big|_{ADD_*A_*} &= C_j \Big|_{BCC_*B_*}, C'_{j\bar{n}} \Big|_{ADD_*A_*} = C'_{j\bar{n}} \Big|_{BCC_*B_*} \quad (j = \overline{1, m_2}); \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U_j \Big|_{ALMD} &= U_j \Big|_{BLMC}, U'_{j\bar{n}} \Big|_{ALMD} = U'_{j\bar{n}} \Big|_{BLMC}; \\ U_j \Big|_{ADD_*A_*} &= U_j \Big|_{BCC_*B_*}, U'_{j\bar{n}} \Big|_{ADD_*A_*} = U'_{j\bar{n}} \Big|_{BCC_*B_*} \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Аналогічно [15, 16] шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa_0^0 \cdot grad \varphi = grad \psi \times grad \eta$ [17] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (9) на умови: $\psi \Big|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi \Big|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta \Big|_{ABCD} = 0$, $\eta \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, задача (1), (9), (12), (14) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_z \setminus \Gamma$ на відповідну область комплексного потенціалу – прямокутний паралелепіпед $G_w = A'B'C'D'A_*B_*C_*D_*$, який розділений заданими поверхнями $E_r F_r E'_r F'_r$ ($r = \overline{1, p}$) на деякі p підобластей:

$$G_w^1 = A'B'E'_1 F'_1 A_* B_* E'_* F'_*; \quad G_w^r = E'_r F'_r F'_{r+1} E'_{r+1} E'_* F'_* F'_{*r+1} E'_{*r+1} \quad (r = \overline{2, p-2});$$

$$G_w^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C' D' E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_* D'_* \quad (\text{рис. 1, б}),$$

де $G_w^r = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(r-1)}^* < \varphi < \varphi_{*r}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ ($r = \overline{1, p}$), φ_{*r}^* ($r = \overline{1, p-1}$); Q_* , Q^* – невідомі параметри; $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата, і наступного «склеювання» берегів умовного розрізу Γ .

Алгоритм розв'язання цієї задачі отримано в [18], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} , параметри Q_* , Q^* , Q та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (10), (11), (6), (13), (15), (16) отримаємо відповідну дифузійну задачу для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\left\{ \begin{aligned} (\tilde{\sigma} \cdot c_j)'_t &= D_j \cdot (b_1 \cdot c''_{j\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{j\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{j\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{j\psi} + b_5 \cdot c'_{j\eta}) - \\ &- \frac{\tilde{v}^2}{\kappa_0^0} \cdot c'_{j\varphi} - \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{j,k} \cdot c_k + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{k,j} \cdot c_k - \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{j,k}^{**} \cdot c_j \quad (j = \overline{1, m_1}); \\ (\tilde{\sigma} \cdot c_j)'_t &= D_j \cdot (b_1 \cdot c''_{j\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{j\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{j\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{j\psi} + b_5 \cdot c'_{j\eta}) - \\ &- \frac{\tilde{v}^2}{\kappa_0^0} \cdot c'_{j\varphi} - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{j,k} \cdot c_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{k,j} \cdot c_k + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{k,j}^{**} \cdot c_k - \\ &- \tilde{\alpha}_j \cdot c_j + \tilde{\beta}_j \cdot u_j \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \\ (\tilde{\sigma} \cdot u_j)'_t &= D_j^* \cdot (b_1 \cdot u''_{j\varphi\varphi} + b_2 \cdot u''_{j\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{j\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{j\psi} + b_5 \cdot u'_{j\eta}) - \\ &- \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{j,k}^* \cdot u_j + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{k,j}^* \cdot u_k + \tilde{\alpha}_j \cdot c_j - \tilde{\beta}_j \cdot u_j \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \\ \tilde{\kappa}'_t &= - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{\mu}_k \cdot u_k, \tilde{\sigma}'_t = - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{\gamma}_k \cdot u_k, \quad (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p}; \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ c_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_j^*, c'_{j\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, c'_{j\psi} \Big|_{\psi=0} = c'_{j\psi} \Big|_{\psi=Q_*} = c'_{j\eta} \Big|_{\eta=0} = c'_{j\eta} \Big|_{\eta=Q^*} = 0 \quad (j = \overline{1, m_2}); \right. \quad (18)$$

$$\left\{ u_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_j^*, u'_{j\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, u'_{j\psi} \Big|_{\psi=0} = u'_{j\psi} \Big|_{\psi=Q_*} = u'_{j\eta} \Big|_{\eta=0} = u'_{j\eta} \Big|_{\eta=Q^*} = 0 \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}); \right. \quad (19)$$

$$\left\{ c_j \Big|_{t=0} = \tilde{c}_j^0 \quad (j = \overline{1, m_2}), u_j \Big|_{t=0} = \tilde{u}_j^0 \quad (j = \overline{m_1+1, m_2}), \tilde{\kappa} \Big|_{t=0} = \kappa_0^0, \tilde{\sigma} \Big|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0; \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} c_j = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} c_j \quad (j = \overline{1, m_2}), \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} u_j = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} u_j \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} (D_{r,j} \cdot c'_j \varphi - \kappa_r^0 \cdot c_j) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} (D_{r+1,j} \cdot c'_j \varphi - \kappa_{r+1}^0 \cdot c_j) \quad (j = \overline{1, m_2}); \\ & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} D_{r,j}^* \cdot u'_j \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} D_{r+1,j}^* \cdot u'_j \varphi \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} \left(\sum_{j=1}^{m_1} (D_{r,j} \cdot c'_j \varphi - \tilde{\kappa}_r \cdot c_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r,j}^* \cdot u'_j \varphi \right) = \\ & = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} \left(\sum_{j=1}^{m_1} (D_{r+1,j} \cdot c'_j \varphi - \tilde{\kappa}_{r+1} \cdot c_j) + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} D_{r+1,j}^* \cdot u'_j \varphi \right); \\ & \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r-0}^*} \left(\tilde{\sigma} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_1} c_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} u_j \right) \right)'_t = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{r+0}^*} \left(\tilde{\sigma} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_1} c_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} u_j \right) \right)'_t \quad (r = \overline{1, p-1}); \end{aligned} \right. \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & c_j \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = c_j \Big|_{\eta=0, \psi=Q_s - \tilde{\psi}}, \quad c'_j \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = c'_j \Big|_{\eta=0, \psi=Q_s - \tilde{\psi}}; \\ & c_j \Big|_{\psi=0} = c_j \Big|_{\psi=Q_s}, \quad c'_j \Big|_{\psi=0} = c'_j \Big|_{\psi=Q_s} \quad (j = \overline{1, m_2}); \end{aligned} \right. \tag{22}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & u_j \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = u_j \Big|_{\eta=0, \psi=Q_s - \tilde{\psi}}, \quad u'_j \Big|_{\eta=0, \psi=\tilde{\psi}} = u'_j \Big|_{\eta=0, \psi=Q_s - \tilde{\psi}}; \\ & u_j \Big|_{\psi=0} = u_j \Big|_{\psi=Q_s}, \quad u'_j \Big|_{\psi=0} = u'_j \Big|_{\psi=Q_s} \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}), \end{aligned} \right. \tag{23}$$

де $c_j = c_j(\varphi, \psi, \eta, t) = C_j(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$, $u_j = u_j(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{c}_j^* = \tilde{c}_j^*(\psi, \eta, t)$; $\tilde{u}_j^* = \tilde{u}_j^*(\psi, \eta, t)$; $\tilde{c}_j^0 = \{ \tilde{c}_{r,j}^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{u}_j^0 = \{ \tilde{u}_{r,j}^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{\sigma}_r^0 = \{ \tilde{\sigma}_r^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{a}_{j,k} = \{ \tilde{a}_{r,j,k}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{a}_{j,k}^{**} = \{ \tilde{a}_{r,j,k}^{**}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{a}_{j,k}^* = \{ \tilde{a}_{r,j,k}^*, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{a}_{r,j,k} = \varepsilon \cdot \tilde{a}_{r,j,k}^*$, $\tilde{a}_{r,j,k}^{**} = \varepsilon \cdot \tilde{a}_{r,j,k}^{**}$; $\tilde{\alpha}_j = \{ \tilde{\alpha}_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{\beta}_j = \{ \tilde{\beta}_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{\mu}_j = \{ \tilde{\mu}_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{\gamma}_j = \{ \tilde{\gamma}_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{\beta}_{r,j} = \varepsilon \cdot \tilde{\beta}_{r,j}$, $\tilde{\mu}_{r,j} = \varepsilon \cdot \tilde{\mu}_{r,j}$, $\tilde{\gamma}_{r,j} = \varepsilon \cdot \tilde{\gamma}_{r,j}$; $\tilde{c}_{r,j}^0 = \tilde{c}_{r,j}^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{u}_{r,j}^0 = \tilde{u}_{r,j}^0(\varphi, \psi, \eta)$, $\tilde{\sigma}_r^0 = \tilde{\sigma}_r^0(\varphi, \psi, \eta)$; $\tilde{a}_{r,j,k} = \tilde{a}_{r,j,k}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{a}_{r,j,k}^{**} = \tilde{a}_{r,j,k}^{**}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{a}_{r,j,k}^* = \tilde{a}_{r,j,k}^*(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\alpha}_{r,j} = \tilde{\alpha}_{r,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\beta}_{r,j} = \tilde{\beta}_{r,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\mu}_{r,j} = \tilde{\mu}_{r,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{\gamma}_{r,j} = \tilde{\gamma}_{r,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$; $\tilde{v} = \{ \tilde{v}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $\tilde{v}_r = \tilde{v}_r(\varphi, \psi, \eta)$; $b_r = \{ b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$; $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta)$ ($r = \overline{1, p}$, $s = \overline{1, 5}$); $b_{r,1} = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = \tilde{v}_r^2 / (\kappa_r^0)^2$; $b_{r,2} = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2$; $b_{r,3} = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2$, $b_{r,4} = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''$, $b_{r,5} = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}''$, $\tilde{\psi} \in [0, \frac{Q_s}{2}]$.

Розв’язання задачі. Аналогічно до [15, 16] знайдено числово-асимптотичне наближення розв’язку $c_j = \{ c_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$ ($j = \overline{1, m_2}$), $u_j = \{ u_{r,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$ ($j = \overline{m_1 + 1, m_2}$), $\tilde{\kappa} = \{ \tilde{\kappa}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$, $\tilde{\sigma} = \{ \tilde{\sigma}_r, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^r, r = \overline{1, p} \}$ задачі (17) – (23) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_{r,j} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{r,j,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_{r,j,i} + R_{r,j,n+1} \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}); \\ u_{r,j} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{H}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{r,j,i} + \\ & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{r,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{H}}}_{r,j,i} + \tilde{R}_{r,j,n+1} \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ \tilde{\kappa}_r &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\kappa}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{q}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{q}}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{q}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{q}}_{r,i} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{q}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{q}}_{r,i} + \check{R}_{r,n+1} \quad (r = \overline{1, p}); \\
 \check{\sigma}_r = & \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \check{\sigma}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \check{h}_{r,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \check{\check{h}}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{h}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{h}}_{r,i} + \\
 & + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{h}}_{r,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\check{\check{h}}}_{r,i} + \check{\check{R}}_{r,n+1} \quad (r = \overline{1, p}),
 \end{aligned}$$

де $c_{r,j,i} = c_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, n}$), $u_{r,j,i} = u_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, n}$), $\check{\kappa}_{r,i} = \check{\kappa}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\check{\sigma}_{r,i} = \check{\sigma}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик; $\check{P}_{r,j,i} = \check{P}_{r,j,i}(\check{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\check{H}_{r,j,i} = \check{H}_{r,j,i}(\check{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\check{q}_{r,i} = \check{q}_{r,i}(\check{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$, $\check{h}_{r,i} = \check{h}_{r,i}(\check{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\check{\check{P}}_{r,j,i} = \check{\check{P}}_{r,j,i}(\check{\check{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\check{\check{H}}_{r,j,i} = \check{\check{H}}_{r,j,i}(\check{\check{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, n+1}$), $\check{\check{q}}_{r,i} = \check{\check{q}}_{r,i}(\check{\check{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$, $\check{\check{h}}_{r,i} = \check{\check{h}}_{r,i}(\check{\check{\phi}}_s, \psi, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\varphi = \varphi_{*r}$ ($r = \overline{0, p}$) (поправки на вході, виході і в околі меж шарів фільтру); $\check{P}_{r,j,i} = \check{P}_{r,j,i}(\varphi, \check{\psi}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{H}_{r,j,i} = \check{H}_{r,j,i}(\varphi, \check{\psi}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{q}_{r,i} = \check{q}_{r,i}(\varphi, \check{\psi}, \eta, t)$, $\check{h}_{r,i} = \check{h}_{r,i}(\varphi, \check{\psi}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{P}}_{r,j,i} = \check{\check{P}}_{r,j,i}(\varphi, \check{\check{\psi}}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{H}}_{r,j,i} = \check{\check{H}}_{r,j,i}(\varphi, \check{\check{\psi}}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{q}}_{r,i} = \check{\check{q}}_{r,i}(\varphi, \check{\check{\psi}}, \eta, t)$, $\check{\check{h}}_{r,i} = \check{\check{h}}_{r,i}(\varphi, \check{\check{\psi}}, \eta, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{P}_{r,j,i} = \check{P}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \check{\eta}, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{H}_{r,j,i} = \check{H}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \check{\eta}, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{q}_{r,i} = \check{q}_{r,i}(\varphi, \psi, \check{\eta}, t)$, $\check{h}_{r,i} = \check{h}_{r,i}(\varphi, \psi, \check{\eta}, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{P}}_{r,j,i} = \check{\check{P}}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \check{\check{\eta}}, t)$ ($j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{H}}_{r,j,i} = \check{\check{H}}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \check{\check{\eta}}, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, 2n+1}$), $\check{\check{q}}_{r,i} = \check{\check{q}}_{r,i}(\varphi, \psi, \check{\check{\eta}}, t)$, $\check{\check{h}}_{r,i} = \check{\check{h}}_{r,i}(\varphi, \psi, \check{\check{\eta}}, t)$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічній стінці фільтру і берегах умовного розрізу Γ); $\check{\phi}_r = \frac{\varphi - \varphi_{*r}}{\varepsilon}$ ($r = \overline{0, p-1}$), $\check{\check{\phi}}_r = \frac{\varphi_{*r} - \varphi}{\varepsilon}$ ($r = \overline{1, p}$), $\check{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\check{\check{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\check{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$,

$\check{\check{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги, $R_{r,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$), $\check{R}_{r,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$), $\check{R}_{r,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($r = \overline{1, p}$) – залишкові члени.

Зокрема, для знаходження $c_{r,j,i}$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m_2}$, $i = \overline{0, n}$), $u_{r,j,i}$ ($r = \overline{1, p}$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$, $i = \overline{0, n}$), $\check{\kappa}_{r,i}$, $\check{\sigma}_{r,i}$ ($r = \overline{1, p}$, $i = \overline{0, n}$) одержано формули:

$$c_{r,j,0} = \begin{cases} e^{-\check{\lambda}_{r,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\check{g}_{r,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \check{c}_j^*(\psi, \eta, t - \check{f}_r(\varphi, \psi, \eta))), & t \geq \check{f}_1, \\ e^{-\check{\lambda}_{r,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\check{g}_{r,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \check{c}_{r-1,j,0}^*(\psi, \eta, t - \check{f}_r(\varphi, \psi, \eta))), & t \geq \check{f}_r, \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}); \\ e^{-\check{\lambda}_{r,j,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot (\check{g}_{r,j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) + \check{c}_j^0(\check{f}_r^{-1}(\check{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)), & t < \check{f}_r, \end{cases}$$

$$u_{r,j,0} = \frac{1}{\check{\sigma}_r^0} \cdot \int_0^t \check{\alpha}_{r,j}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{r,j,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \check{u}_{r,j}^0 \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1 + 1, m_2});$$

$$\check{\kappa}_{r,0} = \kappa_r^0, \quad \check{\sigma}_{r,0} = \check{\sigma}_r^0 \quad (r = \overline{1, p});$$

$$c_{r,j,i} = \begin{cases} e^{-\check{\lambda}_{r,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \check{g}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq \check{f}_r, \\ e^{-\check{\lambda}_{r,j,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \check{\check{g}}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t < \check{f}_r, \end{cases} \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{1, m_2}, i = \overline{1, n});$$

$$u_{r,j,i} = \frac{1}{\check{\sigma}_r^0} \cdot \int_0^t \check{g}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (r = \overline{1, p}, j = \overline{m_1 + 1, m_2}, i = \overline{1, n});$$

$$\check{\kappa}_{r,i} = \int_0^t \check{\check{g}}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \check{\sigma}_{r,i} = \int_0^t \check{\check{g}}_{r,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (r = \overline{1, p}, i = \overline{1, n});$$

$$\text{де } \tilde{\lambda}_{r,j,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \kappa_r^0 \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}^*}^{\varphi} \frac{\sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{r,j,k}^{**}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_r(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1, m_1}); \\ \kappa_r^0 \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_{r,j}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_r(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \end{cases}$$

$$\tilde{g}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_{\varphi_{*(r-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{r,j,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_r(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{r,j,1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\tilde{\varphi};$$

$$\tilde{\lambda}_{r,j,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{\sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{r,j,k}^{**}(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t} \quad (j = \overline{1, m_1}); \\ \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_{r,j}(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t} \quad (j = \overline{m_1 + 1, m_2}); \end{cases}$$

$$\tilde{g}_{r,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{g_{r,j,i}(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{f}_r^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} \cdot e^{\tilde{\lambda}_{r,j,2}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t})} d\tilde{t};$$

$$g_{r,j,i} = I(i, 1) \cdot (d_{r,j} \cdot (b_1 \cdot c_{(r,j,i-1)\varphi}'' + b_2 \cdot c_{(r,j,i-1)\psi\psi}'' + b_3 \cdot c_{(r,j,i-1)\eta\eta}'' + b_4 \cdot c_{(r,j,i-1)\psi}' + b_5 \cdot c_{(r,j,i-1)\eta}') -$$

$$- \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{r,l} \cdot c_{(r,j,i-l)t}' - \tilde{\sigma}'_{r,l,t} \cdot c_{r,j,i-l}) + I(m_1, j) \cdot (\sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{r,j,k} \cdot c_{r,j,i-1} - \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{r,k,j} \cdot c_{r,k,i-1}) +$$

$$+ I(j, m_1 + 1) \cdot (\sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{r,j,k} \cdot c_{r,j,i-1} - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} (\tilde{a}_{r,k,j} \cdot c_{r,k,i-1} + \tilde{\beta}_{r,j} \cdot u_{r,j,i-1})) + I(j, m_1 + 1) \cdot \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{a}_{r,k,j}^{**} \cdot c_{r,k,i};$$

$$\tilde{g}_{r,j,i} = \tilde{\alpha}_{r,j} \cdot c_{r,j,i} + I(i, 1) \cdot (d_{r,j}^* \cdot (b_1 \cdot u_{(r,j,i-1)\varphi}'' + b_2 \cdot u_{(r,j,i-1)\psi\psi}'' + b_3 \cdot u_{(r,j,i-1)\eta\eta}'' + b_4 \cdot u_{(r,j,i-1)\psi}' + b_5 \cdot u_{(r,j,i-1)\eta}') +$$

$$+ \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{r,j,k}^* \cdot u_{r,j,i-1} - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{a}_{r,k,j}^* \cdot u_{r,k,i-1} - \tilde{\beta}_{r,j} \cdot u_{r,j,i-1} + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{r,l} \cdot u_{(r,j,i-l)t}' + \tilde{\sigma}'_{r,l,t} \cdot u_{r,j,i-1});$$

$$\tilde{g}_{r,i} = -I(i, 1) \cdot \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{\mu}_{r,k} \cdot u_{r,k,i-1}, \quad \tilde{g}_{r,i} = -I(i, 1) \cdot \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \tilde{\gamma}_{r,k} \cdot u_{r,k,i-1};$$

$\tilde{f}_r = \tilde{f}_r(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_r^0 \cdot \int_{\varphi_{*(r-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_r^0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки

$(x(\varphi_{*(r-1)}^*), \psi, \eta), y(\varphi_{*(r-1)}^*), z(\varphi_{*(r-1)}^*), \psi, \eta) \in G_z^{r-1}$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^r$ вздовж ві-

дповідної лінії течії, \tilde{f}_r^{-1} – функція, обернена відповідно до \tilde{f}_r відносно змінної φ , $I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b; \\ 0, & a < b. \end{cases}$

Висновки. Сформовано математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від багатокомпонентних домішок після застосування коагуляції у швидких багат шарових кусково-однорідних фільтрах конусоподібної форми при додержанні сталої швидкості фільтрації, що враховує зворотний вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на характеристики середовища. За умови, що конвективні складові масоперенесення й адсорбція переважають над вкладом дифузії й десорбції, отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної нелінійної сингулярно-збуреної крайової задачі для модельної області конусоподібної форми, обмеженої двома еквіпотенціальними поверхнями і поверхнею течії та розділеної деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей.

Запропонована модель аналогічно [13, 14] для заданої сталої швидкості фільтрації дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати не лише зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, але й визначити оптимальні варіанти використання коагулянтів і фільтрувальних матеріалів, збільшення тривалості роботи швидких багат шарових конусоподібних фільтрів за рахунок вибору їх форми і висоти шарів з урахуванням граничнодопустимих норм по кожній компоненті багатокомпонентних домішок.

Список літератури

1. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163 с.
2. Cheremisinoff N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies. – Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. – 645 p.
3. Hendricks D. W. Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological. – Boca Raton : CRC Press, 2011. – 883 p.

4. *Quevauviller Ph., Thompson K. C.* Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 188 p.
5. *Бомба А. Я., Сафоник А. П.* Моделювання нелінійно-збурених процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень : монографія. – Рівне : НУВГП, 2017. – 296 с.
6. *Safonyk A. P.* Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2015. – vol. 9. – P. 189 – 192.
7. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
8. *Ives K. J.* Deep-bed water filters // *New developments. Filtr. And Separ* – 1969. – vol. 6. – № 1. – P. 42 – 48.
9. *Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R.* Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application // *Environmental Modelling and Software*. – 2008. – vol. 23. – № 7. – P. 835 – 845.
10. *Maier H. R., Dandy G. C.* Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications // *Environmental Modelling and Software*. – 2000. – vol. 15. – № 1. – P. 101 – 124.
11. *Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T., Hiltunen Y.* Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2011. – vol. 82. – № 3. – P. 450 – 459.
12. *Safonyk A. P.* Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2015. – vol. 9. – P. 189 – 192.
13. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Прогнозування зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень швидких багатосарових фільтрів // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 8 – 15.
14. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Прогнозування оптимального використання фільтруючих матеріалів у швидких багатосарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями // *Журнал обчислювальної та прикладної математики : наук. журн. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка*. – Київ : ТВіМС, 2017. – Вип. 1 (124). – С. 3 – 14.
15. *Klimjuk Ju. Je.* Prediction of changes in the characteristics of filter materials in rapid cone-shaped water-purifying filters // *Innovative solutions in modern science*. – Dubai, 2018 – No. 8 (27). – P. 72 – 84. doi: 10.26886/2414-634X.8(27)2018.5.
16. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія. – Рівне : ТзОВ фірма "Ассоль", 2014. – 273 с.
17. *Рауз Х.* Механика жидкости. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.
18. *Klimjuk Ju. Je.* Modelling of spatial filtration fields for one class of rapid multilayer filters of cone-shaped form with piecewise-homogeneous porous loads // *Proceedings of III International scientific conference «Science : new goals»*. – London : SI Universum, 2017. – P. 4 – 10.

References (transliterated)

1. Orlov V. O. *Vodochysnyi fil'try iz zernystoyu zasypkoyu* [Water-purifying filters with granular filler]. Rivne, NUVHP Publ., 2005. 163 p.
2. Chermisnoff N. P. *Handbook of water and wastewater treatment technologies*. Boston, Butterworth-Heinemann, 2002. 645 p.
3. Hendricks D. W. *Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological*. Boca Raton, CRC Press, 2011. 883 p.
4. *Quevauviller Ph., Thompson K. C.* Analytical methods for drinking water : advances in sampling and analysis. John Wiley & Sons Ltd., 2006. 188 p.
5. *Bomba A. Ya., Safonyk A. P.* *Modelyuvannya neliniynno-zburenykh protsesiv ochyshhennya ridyn vid bagatokomponentnykh zabrudnen' : monografiya* [Modeling of nonlinearly perturbed processes of cleaning liquids from multicomponent contaminants: monograph]. Rivne, NUVHP Publ., 2017. 296 p.
6. *Safonyk A. P.* Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.
7. *Mints D. M.* *Teoreticheskie osnovy tekhnologii ochistki vody* [Theoretical basis of water purification technology]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964. 156 p.
8. *Ives K. J.* Deep-bed water filters. *New developments. Filtr. And Separ*. 1969, vol. 6, no. 1, pp. 42–48.
9. *Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R.* Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application. *Environmental Modelling and Software*. 2008, vol. 23, no. 7, pp. 835–845.
10. *Maier H. R., Dandy G. C.* Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications. *Environmental Modelling and Software*. 2000, vol. 15, no. 1, pp. 101–124.
11. *Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T. and Hiltunen Y.* Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2011, vol. 82, no. 3, pp. 450–459.
12. *Safonyk A. P.* Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.
13. *Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye.* Prognozuvannya zminy kharakterystyk kuskovo-odnorodnykh porystykh zavantazhen' shvydkykh bagatosharovykh fil'triv [Prediction of changes in the characteristics of piecewise homogeneous porous loads of rapid multilayer filters]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 28 (1304), pp. 8–15.
14. *Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye.* Prognozuvannya optymal'nogo vykorystannya fil'truyuchykh materialiv u shvydkykh bagatosharovykh fil'trah iz kuskovo-odnorodnykh porystykh zavantazhennyamy [Prediction of filter materials optimal use in rapid multilayer filters with piecewise homogeneous porous loads]. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational & Applied Mathematics], Kyiv, TViMS Publ., 2017, no. 1 (124), pp. 3–14.
15. *Klimjuk Yu. Ye.* Prediction of changes in the characteristics of filter materials in rapid cone-shaped water-purifying filters. *Innovative solutions in modern science*. Dubai, 2018, no. 8 (27), pp. 72–84. doi: 10.26886/2414-634X.8(27)2018.5
16. *Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye.* *Matematychnye modelyuvannya prostorovykh syngulyarno-zburenykh protsesiv typu fil'tratsiya-konvektsiya-dyfuzya : monografiya* [Mathematical modeling of spatial singularly perturbed processes of filtration-convection-diffusion type: monograph]. Rivne, TzOV firma "Assol" Publ., 2014. 273 p.
17. *Rauz Kh.* *Mekhanika zhidkosti* [Fluid mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1967. 390 p.
18. *Klimjuk Yu. Ye.* Modelling of spatial filtration fields for one class of rapid multilayer filters of cone-shaped form with piecewise-homogeneous porous loads. *Proceedings of III International scientific conference "Science : new goals"*. London : SI Universum, 2017. pp. 4–10.

Надійшло (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych) – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Климюк Юрій Євгенійович (Климюк Юрий Евгениевич, Klymyuk Yuriy Yevheniyovych) – кандидат технічних наук, доцент, Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янука, м. Рівне; тел.: (095) 540-95-40, (067) 279-17-41; e-mail: klimyuk@ukr.net.

УДК 519.6

А. Я. БОМБА, Ю. В. ТУРБАЛ, М. Ю. ТУРБАЛ**МОДИФІКАЦІЯ «ПІРАМІДАЛЬНОГО» МЕТОДУ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ $\mu\lambda$ – ПОХІДНИХ**

У статті вперше введено певні узагальнення класичного поняття похідної диференційовної функції, на основі якого пропонується метод екстраполяції часових рядів. В основі цього методу лежить аналіз розділених різниць. Пропонується процедура модифікації відповідних різниць та знаходження такого їх порядку, для якого вдається знайти в певному розумінні найкраще прогнозне значення. Тоді значення вихідної функції у точці, що лежить за межами інтерполяційного інтервалу, знаходиться на основі знайденого прогнозного значення для розділених різниць за допомогою спеціальної обчислювальної процедури.

Ключові слова: екстраполяція, прогноз, розділені різниці, інтерполяція, часові ряди.

А. Я. БОМБА, Ю. В. ТУРБАЛ, М. Ю. ТУРБАЛ**МОДИФИКАЦИЯ «ПИРАМИДАЛЬНОГО» МЕТОДА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДАННЫХ НА ОСНОВАНИИ $\mu\lambda$ – ПРОИЗВОДНЫХ**

В статье впервые введены определенные обобщения классического понятия производной дифференцируемой функции, на основе которых предлагается метод экстраполяции временных рядов. В основе этого метода лежит анализ разделенных разностей. Предлагается процедура модификации соответствующих разностей и нахождения такого их порядка, для которого удастся найти в определенном смысле лучшее прогнозное значение. Тогда значение исходной функции в точке, лежащей за пределами интерполяционного интервала, находится на основе найденного прогнозного значения для разделенных разностей с помощью специальной вычислительной процедуры.

Ключевые слова: экстраполяция, прогноз, разделенные разности, интерполяция, временные ряды.

A. YA. BOMBA, YU. V. TURBAL, M. YU. TURBAL **$\mu\lambda$ – DERIVATIVE BASED MODIFICATION OF «PYRAMIDAL» TIME SERIES EXTRAPOLATION METHOD**

In this article, for the first time, certain generalizations of the classical derivative of a differentiable function are introduced. The method of extrapolation of time series is proposed on the basis of corresponding generalizations. The method is based on the analysis of separated differences. A procedure is proposed for modifying corresponding differences and determining the order, for which it is possible to find in certain sense the best forecast value. Then the value of the output function at a point that lies outside the interpolation interval is based on the found predictive value for the separated differences using a special computational procedure.

Key words: extrapolation, forecast, separated differences, interpolation, time series.

Вступ. При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникають задачі прогнозування часових рядів. На сьогодні відомими є низка кількісних підходів до прогнозування, що ґрунтуються на побудові прогнозу як функції від попередніх даних. Найбільш поширеними на сьогодні методами короткострокового прогнозування часових рядів є методи екстраполяції. Серед відомих методів екстраполяції можна виділити методи, що ґрунтуються на основі інтерполяційних многочленів (найчастіше використовується *інтерполяційний многочлен Н'ютона другого виду*), узагальнених інтерполяційних многочленів по різних системах *функції Чебишева* (многочлени, експоненти, тригонометричні функції та ін.), методи, що ґрунтуються на основі аналізу тренду, методи екстраполяції на основі *сплайнів* (кубічних, *B* – сплайнів, *кривих Без'є*), методи, що ґрунтуються на основі статистичних підходів [1].

При вивченні часових рядів за умов малих об'ємів даних та побудові прогнозів виникає низка проблем. Так, наприклад, за умов відсутності додаткової інформації часто неможливо зробити висновок про детермінованість чи недетермінованість процесу, що суттєво впливає на побудову його моделі. У випадку детермінованості очевидно, що для будь-якої сукупності точок існує безліч кривих, які через них проходять чи якимось їх наближають, і тому складно стверджувати, що якась одна крива (модель) є саме тим законом, який вичерпно описує явище та дозволить ефективно спрогнозувати його поведінку у майбутньому.

Останніми роками з'явилась низка публікацій, де робиться спроба побудови оптимального в певному розумінні короткострокового прогнозу в деякій точці за точковими даними без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій. Відповідний метод був названий авторами «*пірамідальним*» [2 – 4]. Специфікою цієї методики є те, що при побудові прогнозу використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у скінченних різницях спеціального виду. В даній роботі пропонується узагальнення пірамідального методу, що ґрунтується на новому підході до побудови скінченних різниць.

$\mu\lambda$ – похідні та деякі їх властивості. В основі нашої ідеї узагальнення скінченних різниць лежить наступна модифікація поняття похідної, яку ми назвали $\mu\lambda$ – похідною.

Визначення. $\mu\lambda$ – похідною деякої диференційовної функції $f(x)$ будемо називати границю виду:

$$f^\partial(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta},$$

де $\mu^*(\Delta)$, $\lambda^*(\Delta)$ є розв'язками задачі:

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) \rightarrow \min_{\lambda^*, \mu^*}. \quad (1)$$

Очевидно, що за умови (1)

$$\begin{aligned} \lambda^*(\Delta) &= \left(\int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx), \\ \mu^*(\Delta) &= \left(\int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) \int_{\Omega} f(x) p(dx) / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f(x+\Delta) f(x) p(dx) \right) / \\ &\quad / \left(\int_{\Omega} f(x) p(dx) \right)^2 / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f^2(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, що інтеграл Лебега у визначенні може бути замінений визначеним інтегралом Рімана на деякому скінченному інтервалі $[c, d]$. Окрім того, в деяких задачах умова (1) може бути відсутня, тоді $\mu^*(\Delta)$, $\lambda^*(\Delta)$ є параметрами. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай маємо лінійну функцію $f(x) = ax + b$. При $\mu^*(\Delta) = 1$, $\lambda^*(\Delta) = a\Delta$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді: } \int_c^d (a(x+\Delta) + b - \mu^*(\Delta)(ax+b) - \lambda^*(\Delta))^2 dx &= 0. \text{ Отже, } f^\partial(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a(x+\Delta) + b - ax - b - a\Delta}{\Delta} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 2. Нехай $f(x) = e^x$, $\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) = \int_c^d (e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta))^2 dx$.

При $\mu^*(\Delta) = e^\Delta$, $\lambda^*(\Delta) = 0$. Маємо: $\int_c^d (e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta))^2 dx = 0$. Тоді

$$f^\partial(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Приклад 3. Нехай $f(x) = x^m$.

Тоді, використовуючи співвідношення (2), маємо:

$$\begin{aligned} \mu^*(\Delta) &= 1 + m\Delta C + O(\Delta^2), \quad \lambda^*(\Delta) = \left(\int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx) = \\ &= \left(\int_c^d (x+\Delta)^m dx - (1 + m\Delta C) \int_c^d x^m dx \right) / (d-c) = m\Delta \left(\int_c^d x^{m-1} dx - C \int_c^d x^m dx \right) / (d-c) + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Отже,

$$f^\partial(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta)^m - \mu^*(\Delta)x^m - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = mx^{m-1}(1-Cx) - mC_1,$$

$$C = \left(\int_c^d x^{m-1} dx \int_c^d x^m dx / (d-c) - \int_c^d x^{m-1} x^m dx \right) / \left(\left(\int_c^d x^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d x^{2m} dx \right)$$

$$C_1 = \left(\int_c^d x^{m-1} dx - C \int_c^d x^m dx \right) / (d-c).$$

Розглянуті властивості $\mu\lambda$ – похідної показують, що вона, на відміну від класичної похідної, за наявності умови (1) «обнуляє» значення функцій, що мають порядок експоненційного зростання чи лінійні функції. А тому очевидно, що використання різницевого аналогу такої похідної дозволить суттєво покращити методи прогнозування, які ґрунтуються на використанні скінченних різниць чи певних їх модифікацій. Зокрема, застосування різницевого аналогу $\mu\lambda$ – похідної дозволить покращити пірамідальний метод екстраполяції, що був запропонований у роботах [1–3].

Модифікація «пірамідального» методу екстраполяції. Нехай маємо значення деякої функції f_1, f_2, \dots, f_n , визначені в точках x_1, x_2, \dots, x_n відповідно. Класична задача екстраполяції полягає у побудові оцінки значення цієї функції в точці $x > x_n$.

Подальше узагальнення «пірамідального» методу, описаного в роботах [1 – 4], ґрунтується на застосуванні відповідних $\mu\lambda$ – узагальнень скінченних різниць. Розглянемо середні точки $x_i^c = (x_i + x_{i+1})/2$, а також наступні узагальнення скінченних різниць:

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_i - \lambda_{j-1}}{r_i^j - l_i^j}, \tag{3}$$

де $r_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2}^c, & j = 2k; \\ x_{i+[j/2]+1}, & j = 2k+1; \end{cases}$ $l_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2-1}^c, & j = 2k; \\ x_{i+[j/2]}, & j = 2k+1; \end{cases}$

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_i^c - \lambda_{j-1}}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}, \tag{4}$$

де

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \left(\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \mu_{i-2} \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \mu_{i-1} \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \mu_{i-2} \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2})}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)} - \lambda_{i-2} \right) 2, \tag{5}$$

де $r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, & i = 2k; \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^c, & i = 2k+1; \end{cases}$ $rr_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}^c, & i = 2k; \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor+1}, & i = 2k+1; \end{cases}$ $c_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}^c, & i = 2k; \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, & i = 2k+1; \end{cases}$ $l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, & i = 2k; \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor-1}^c, & i = 2k+1; \end{cases}$

$$ll_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}-1}^c, & i = 2k; \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor-1}, & i = 2k+1; \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1}.$$

						...						
					$\Delta^5 f_1$...	$\tilde{\Delta}^5 f_{n-5}^c$					
				$\Delta^4 f_1$	$\Delta^4 f_1^c$...	$\Delta^4 f_{n-4}$	$\tilde{\Delta}^4 f_{n-4}^c$				
			$\Delta^3 f_1$	$\Delta^3 f_1^c$	$\Delta^3 f_2$...	$\Delta^3 f_{n-4}$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\tilde{\Delta}^3 f_{n-3}^c$			
		$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_1^c$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^2 f_2^c$...	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c$		
	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^1 f_1^c$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^1 f_2^c$	$\Delta^1 f_3$...	$\Delta^1 f_{n-3}$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-1}$		
f_1	f_1^c	f_1^c	f_2^c	f_3	f_3^c	...	f_{n-2}	f_{n-2}^c	f_{n-1}	f_{n-1}^c	f_n	
x_1	x_1^c	x_2	x_2^c	x_3	x_3^c	...	x_{n-2}	x_{n-2}^c	x_{n-1}	x_{n-1}^c	x_n	x_n^c

Рис. 1 – Таблиця модифікованих скінченних різниць.

Значення параметрів μ_{j-1} та λ_{j-1} знаходяться з умови мінімізації відповідних сум квадратів різниць (дискретного аналогу умови (1)) або загалом можуть розглядатись як деякі параметри, що знаходяться з додаткових умов.

Нехай виконується співвідношення:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c. \quad (6)$$

Тоді процедура знаходження невідомого значення функції в точці x_n^c визначається так:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c (\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j) + \lambda_{j-1}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Суть подальших міркувань полягає в тому, щоб визначити такий рядок таблиці модифікованих скінченних різниць (див. рис. 1), при якому співвідношення (6) виконується з мінімальною похибкою. Як було показано в роботі [1], необхідною та достатньою умовою для виконання (6) у випадку $\mu^*(\Delta) = 1, \lambda^*(\Delta) = 0$ є умова, щоб точки $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c)$, $(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c)$, $(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$ лежали на одній прямій. Очевидно, що остання умова виконуватиметься (з точністю, яка відповідає точності наближення другої похідної скінченними різницями), якщо на інтервалі $[l_i, r_i]$ крива, що проходить через відповідні точки, являтиме собою кубічний многочлен. У випадку, коли параметри $\mu^*(\Delta), \lambda^*(\Delta)$ визначаються з умови (1), відповідна необхідна та достатня умова для виконання (6) буде іншою.

Провівши нескладні, але досить громіздкі перетворення, можна показати, що умова (6) записується у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)} \right) - \left(\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(rr_i - r_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} \right) \times \\ & \times \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - \left(\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(l_i - ll_i)} \right) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} = \\ & = (1 - \mu_{i-1}) \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)} \left(\frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2 \right) + \\ & + (1 - \mu_{i-1}) \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(l_i - ll_i)} \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} + \frac{(1 - \mu_{i-2})(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)} \left(\frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2 \right) - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i}^c - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} + \\ & + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}. \quad (8) \end{aligned}$$

Легко бачити, що при $\mu_i = 1, \lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$, останнє співвідношення перетворюється на умову належності одній прямій точок $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c)$, $(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c)$, $(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$, яка розглядалась у роботі [1]. Зауважимо, що співвідношення (7) не може бути використане безпосередньо для побудови прогнозу, бо $\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c$ містить невідоме прогнозне значення. Для побудови конструктивної умови виконання співвідношення (7) розглянемо неперервний аналог (7) та отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} f''(c_i) - f''(r_i) \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - f''(l_i) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} &= (1 - \mu_{i-1}) f''((c_i + l_i)/2) \left(\frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2 \right) + (1 - \mu_{i-1}) f''((l_i + ll_i)/2) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} + \\ & + \frac{(1 - \mu_{i-2})(f(c_i) - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)} \left(\frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2 \right) - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(ll_i) - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Для рівномірної сітки отримуємо диференціальне рівняння з «запізненням» виду:

$$\begin{aligned} f''(x) - f''(x + \Delta) \frac{1}{2} - f''(lx - \Delta) \frac{1}{2} &= -\frac{3}{2} (1 - \mu_{i-1}) f''((x - \Delta)/2) + \frac{1}{2} (1 - \mu_{i-1}) f''(x - 3\Delta/2) - \\ & - \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu_{i-2})(f(x) - \lambda_{i-2})}{\Delta} - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(x - 2\Delta) - \lambda_{i-2}}{2\Delta} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(x - \Delta) - \lambda_{i-2}}{\Delta} + \lambda_{i-1}. \quad (10) \end{aligned}$$

Будемо знаходити його частковий розв'язок у вигляді: $f(x) = a + e^{bx}$. При підстановці у (9) отримуємо систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів:

$$3(\mu_{i-1} - 1) \frac{1 - \mu_{i-2}}{2\Delta} a = 3(\mu_{i-1} - 1) \frac{\lambda_{i-2}}{2\Delta} - \lambda_{i-1},$$

$$b^2 - \frac{1}{2} b^2 e^{b\Delta} - \frac{1}{2} b^2 e^{-b\Delta} = \frac{3}{2} (\mu_{i-1} - 1) b e^{-b\Delta/2} + \frac{1}{2} (1 - \mu_{i-1}) b e^{-3b\Delta/2} - \frac{3}{2} (1 - \mu_{i-2}) / \Delta - \mu_{i-1} (1 - \mu_{i-2}) e^{-2b\Delta} / (2\Delta) +$$

$$+ 2\mu_{i-1} (1 - \mu_{i-2}) e^{-b\Delta} / \Delta.$$

Трансцендентне рівняння для невідомого параметра b має розв'язок, який можна знайти наближено. Наприклад, при $\Delta=1$, $\mu_{i-1}=1.5$, $\mu_{i-2}=6.4$ можемо отримати значення $b=-1.12$. Таким чином, бачимо, що для виконання умови (5) достатньо, щоб точки $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c)$, $(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c)$, $(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$ лежали на кривій, що визначається функцією виду: $f(x) = a + e^{bx}$. Аналогічна умова для класичних різниць, як вже згадувалось вище, була пов'язана з кубічним многочленом.

Отже, можемо запропонувати наступний алгоритм екстраполяції:

1. Будується таблиця модифікованих скінченних різниць.
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках, таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями.
3. Для кожного рядка таблиці скінченних різниць перевіряється умови (5), зокрема, за низкою достатніх умов, та визначається рядок, для якого похибка співвідношення (5) є мінімальною.
4. Обраховується прогнозне значення $\tilde{\Delta}^{i*} f_{n-i*}^c$.
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами (6).

Чисельні результати. Розглянемо приклад застосування описаного вище підходу. Нехай маємо тестову функцію $f(x) = x^6 \sin(x)$, визначену в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3, ..., 11. Аналогічний приклад був розглянутий у роботі [1]. Пірамідальний метод в [1] дозволив отримати прогнозне значення функції, рівне $-2017907,745$, при цьому точне значення $-2024974,077$. Розглянемо зараз модифікацію методу з застосуванням $\mu\lambda$ -похідних. Фрагмент таблиці модифікованих розділених різниць наведено на рис. 2, відповідні значення параметрів – на рис. 3.

7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	
166943,8435	259354,3282	301149,0278	219016,6599	-55242,97922	-544021,1109	-1178876,453	-1771543,65	-2024933,995	-2024974
279154,9363	140108,7662	-128432,8304	-487000,1943	-810101,981	-891724,3434	-498434,6459	528796,955		
426487,2904	129506,3308	-357539,6943	-928773,9162	-1341712,523	-1246968,876	-295156,3383			
407728,6265	-784026,9848	-1058280,247	-984172,8286	-318194,9601	1046556,185				
686826,2732	-650551,6205	-200145,8438	740085,2868	2030729,013					
163138,8812	486680,4293	1390636,907	2158937,604						

Рис. 2 – Фрагмент таблиці модифікованих скінченних різниць.

miu_new	lamb_new
2,017187003	-175716,69
-0,924	0
1	0
1	0
1	0
1	0

Рис. 3 – Значення параметрів для $\mu\lambda$ -різниць.

Як бачимо, заміна класичних різниць $\mu\lambda$ -різницями у першому та другому рядку таблиці розділених різниць дозволяє отримати прогнозне значення в точці 11.5, яке рівне $-2024933,995$ для відповідного тестового прикладу.

Висновки. В роботі вперше введено певні модифікації класичного поняття похідної довільної диференційовної функції, назване $\mu\lambda$ -похідна. Застосування різницевих аналогів $\mu\lambda$ -похідної дозволило отримати модифікацію раніше запропонованого авторами «пірамідального» методу екстраполяції. Ця модифікація має суттєву перевагу у випадках, коли числовий ряд спостережень, для якого буде прогнозоване значення, має експоненційний характер зростання. Чисельні результати показують суттєві переваги запропонованого методу у порівнянні з підходами до екстраполяції, які ґрунтуються на використанні многочленів, зокрема, многочлена Н'ютона другого виду.

Запропонована методика має загальний характер та може бути використана для екстраполяції часових рядів у довільних галузях досліджень, зокрема, при побудові короткострокових прогнозів рядів економічної динаміки.

В подальшому автори бачать перспективу у застосуванні комбінованих підходів, у яких параметри μ та λ у відповідних скінченних різницях є довільними і підбиратимуться так, щоб отримати оптимальне прогнозне значення.

Список літератури

1. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Сьох А. П., Турбал М. Ю.* Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія : «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2017. – Т. 33. – С. 36 – 51.
2. *Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O.* Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series : Physics & Mathematics. – 2017. – V. 8. – P. 112 – 119.
3. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В.* Прогнозирование траекторий уединенных волн деформации в анизотропных упругих телах // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 3. – С. 12 – 22.
4. *Бомба А. Я., Турбал Ю. В.* Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 5. – С. 34 – 43.
5. *Костинский А. С.* О принципах экстраполяции геофизических данных // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 2. – С. 111 – 117.
6. *Levi J. C., Barody I. I.* A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains. – London : Her Majesty's Stationery Office. – 1969. – 29 p.
7. *Chatfield C.* Time-series Forecasting. – Chapman & Hall. – 2001. – 265 p.
8. *Armstrong J. S.* Extrapolation for Time-Series and Cross-Sectional Data. – 2001. – Retrieved from : http://repository.upenn.edu/marketing_papers/148. – Дата звертання : 20 лютого 2019.
9. *Hyndman R. J., Kostenko A. V.* Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models // FORESIGHT. – 2007. – Issue 6. – P. 12 – 15.
10. *Fine T.* Extrapolation When Very Little is Known about the Source // Terrence Fine– School of Electrical Engineering. – CorneU University, Ithaca, New York, 1970. – vol. 16. – issue 4. – pp. 331 – 359.
11. *Шалагинов А. В.* Кубическая сплайн экстраполяция временных рядов // International conference on System Analysis and Information Technologies SAIT 2011 (Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine «KPI», Kyiv, Ukraine, May 23–28, 2011). Киев : НТУУ «КПИ», 2011. – P. 397.
12. *Волков Е. А.* Замечания к приближению функций многочленами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Том 7. – № 6. – С. 1374 – 1375.

References (transliterated)

1. *Bomba A. Ya, Turbal Yu. V., S'okh A. P., Turbal M. Yu.* Metod ekstrapolyatsiyi na osnovi modyfikovanykh rozdilennykh riznyts' [Modified divided differences based extrapolation method]. *Visnyk Kharkiv's'kogo natsional'nogo universytetu im. V. N. Karazina. Seriya : "Matematychnye modelyuvannya. Informatsiyi tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya"* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series : "Mathematical modeling. Informational technologies. Autonomous control systems"]. 2017, vol. 33, pp. 36–51.
2. *Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O.* Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series : Physics & Mathematics.* 2017, vol. 8, pp. 112–119.
3. *Bomba A. Ya, Turbal Yu. V.* Prognozirovanie traektoriy uedinennykh voln deformatsii v anizotropnykh uprugikh telakh [Predicting trajectories of solitary deformation waves in anisotropic elastic bodies]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. 2014, no. 3, pp. 12–22.
4. *Bomba A. Ya, Turbal Yu. V.* Metody analiza dannykh i prognozirovanie traektoriy uedinennykh voln [Methods for data analyzing and predicting trajectories of solitary waves]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics]. 2015, no. 5, pp. 34–43.
5. *Kostinskiy A. S.* O printsipakh ekstrapolyatsii geofizicheskikh dannykh [On geophysical data extrapolation principles]. *Dopovidi Natsionalnoyi Akademiyi Nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2014, no. 2, pp. 111–117.
6. *Levi J. C., Barody I. I.* A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains. London, Her Majesty's Stationery Office, 1969. 29 p.
7. *Chatfield C.* Time-series Forecasting. Chapman & Hall, 2001. 265 p.
8. *Armstrong J. S.* Extrapolation for Time-Series and Cross-Sectional Data. 2001. Retrieved from http://repository.upenn.edu/marketing_papers/148. (accessed 20.02.2019).
9. *Hyndman R. J., Kostenko A. V.* Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models. *FORESIGHT.* 2007, Issue 6, pp. 12–15.
10. *Fine T.* Extrapolation When Very Little is Known about the Source. *Information and Control.* 1970, vol. 16, issue 4, pp. 331–359.
11. *Shalaginov A. V.* Kubicheskaya splayn ekstrapolyatsiya vremennykh ryadov [Cubic spline interpolation of time series]. *International conference on System Analysis and Information Technologies SAIT 2011 (Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine, May 23–28, 2011).* Kyiv, NTUU "KPI", 2011. P. 397.
12. *Volkov E. A.* Zamechaniya k priblizheniyu funktsiy mnogochlenami [Remarks on approximation of functions by polynomials] *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 1967, vol. 7, no. 6, pp. 1374–1375.

Надійшла (received) 08.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych) – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Турбал Юрій Васильович (Турбал Юрий Васильевич, Turbal Yuriy Vasilovich) – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (098) 084-18-80; e-mail: turbaly@gmail.com.

Турбал Маріана Юрійівна (Турбал Мариана Юрьевна, Turbal Mariana Yuriivna) – аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (098) 259-48-86; e-mail: turbal.mariana1@gmail.com.

УДК 519.6

Ю. В. БРАЗЛУК**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С СИЛЬНО СЕГМЕНТИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ**

В настоящей работе метод граничных элементов был применен к решению краевых задач для уравнения Лапласа в плоской области с сильно сегментированной границей. Особое внимание было уделено точности численного решения, которая исследовалась путем численного эксперимента на специально подобранных тестовых задачах, имеющих аналитические решения в квадратурах. Было реализовано два алгоритма метода граничных элементов: традиционный с решением системы линейных алгебраических уравнений методами гауссовского исключения, и итерационный, при этом в итерационном алгоритме использовались функции Грина или их вычислительные аналоги. Результаты работы могут быть использованы при создании специализированного программного обеспечения соответствующего назначения.

Ключевые слова: метод граничных элементов, область сложной геометрической формы, сегментированная граница, уравнение Лапласа, погрешность, тестовая задача, функция Грина.

Ю. В. БРАЗЛУК**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ
ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З СИЛЬНО СЕГМЕНТОВАНОЮ МЕЖЕЮ**

В даній роботі метод граничних елементів було застосовано до розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа у плоских областях з сильно сегментованою межею. Особливу увагу було приділено точності чисельного розв'язку, яка досліджувалася шляхом чисельного експерименту на спеціально підібраних тестових задачах, що мають аналітичні розв'язки у квадратурах. Було реалізовано два алгоритми методу граничних елементів: традиційний з розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами гауссовського виключення, та ітераційний, при цьому в ітераційному алгоритмі використовувалися функції Гріна чи їх обчислювальні аналоги. Результати роботи можуть бути застосовані при створенні спеціалізованого програмного забезпечення відповідного призначення.

Ключові слова: метод граничних елементів, область складної геометричної форми, сегментована межа, рівняння Лапласа, похибка, тестова задача, функція Гріна.

IU. V. BRAZALUK**BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLICATION TO NUMERICAL SOLVING OF LINEAR
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN DOMAINS WITH STRONGLY SEGMENTED BOUNDARY**

One of the most serious problems of modern numerical analysis is boundary-value problem solution in domains of complex geometrical shapes. Such problems are proved especially difficult for the domains with strongly segmented boundary, which means that the boundary is divided into isolated pieces. Such situations are specific for heterogeneous media. In such situations local approximation methods have to deal with the insuperable difficulties such as constructing computational grid and subsequent solving rather sophisticated systems of linear algebraic equations. The methods of global approximations and, first of all, methods of computational potential theory do not have similar difficulties, nevertheless they have to overcome a lot of problems. Boundary element method is applied in the present work to solve boundary-value problems for Laplace equations in plane domain with strongly segmented boundary. Special attention in the work was paid to accuracy of numerical solutions. The accuracy is investigated by a numerical experiment using specially selected test problems, which have the known analytical solutions in quadrature. Two boundary element algorithms are implemented. The first one is the traditional approach with Gauss elimination algorithm for solving linear algebraic equation system. The second one is an iterative approach with possible using of Green's functions or their computational analogs in the iterative procedure. The results obtained in the work can be applied for creating specialized software of corresponding purposes.

Key words: boundary element method, domain of complex geometrical shape, segmented boundary, Laplace equation, error, test problem, Green's function.

Введение. Тенденция усложнения современной техники проявляется, в том числе, и в усложнении геометрических форм составляющих технических устройств, а, следовательно, и в усложнении областей, в которых формулируются задачи, необходимые для расчета и проектирования указанной техники. Именно эта тенденция обуславливает актуальность рассматриваемого направления научных исследований. Действительно, в настоящее время появляется все больше задач, связанных с расчетами скалярных или векторных полей в сплошной среде, которая ослаблена полостями, включениями и другими неоднородностями. Для примера достаточно вспомнить задачу N – тел в гидромеханике и являющуюся естественным обобщением этой задачи проблему многофазного течения, задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого тела с включениями и полостями и являющиеся ее естественными обобщениями проблемы механики композитных материалов. Хотя список релевантных задач отнюдь не исчерпывается приведенными двумя примерами, а включает всю механику гетерогенных сред и охватывает значительные части других технических и естественнонаучных дисциплин, приведенных примеров вполне достаточно, чтобы показать исключительное научное значение рассматриваемого класса задач. Однако результаты, относящиеся к задачам, сформулированным в областях с сильно сегментированной границей, традиционно рассматривались с точки зрения соответствующей предметной области; так, например, решение гидродинамической задачи N – тел анализировалась с точки зрения гидродинамического взаимодействия, а задача о напряженно-деформированном состоянии перфорированной упругой среды трактовалась как неотъемлемая часть исследований механических свойств композитного материала. В отличие от упомянутых выше исследований основным предметом рассмотрения настоящей работы были вычислительные аспекты прямого численного решения линейных краевых задач в областях с сильно сегментированной границей.

© Ю. В. Бразалук, 2019

Очевидно, что для задач, численное решение которых близко к пределам возможностей лучшей вычислительной техники, особое значение приобретает выбор численного метода решения и алгоритмической реализации этого метода. Инструментарий современного численного анализа условно разделяют на две группы методов: традиционные – конечных разностей и конечных элементов, а также их многочисленные модификации, – и альтернативные, к которым относятся самые разнообразные подходы, в том числе и методы вычислительной теории потенциала, а среди них метод граничных элементов – наиболее разработанный и известный из альтернативных методов. Традиционные численные методы являются методами локальной аппроксимации, в то время как среди альтернативных достаточно широко распространены подходы, основанные на глобальной аппроксимации, в том числе и метод граничных элементов. Для областей с сильно сегментированной границей традиционные численные методы локальной аппроксимации испытывают существенные затруднения с построением расчетных сеток, которые оказываются чрезвычайно громоздкими со всеми вытекающими отсюда вычислительными трудностями. Собственно говоря, эта проблема и воспрепятствовала применению традиционных численных методов к рассматриваемому классу задач, сделав таковое применение совершенно неэффективным. В то же время методы локальной аппроксимации, и метод граничных элементов в том числе, подобных трудностей с построением расчетных сеток не испытывают, а усложнение формы областей решения, хотя и создает определенные трудности, но они вполне преодолимы. Последние указанные обстоятельства и обусловили выбор метод граничных элементов в качестве основного вычислительного инструмента настоящей работы.

Анализ последних исследований. Возможности прямого численного решения краевых задач, в областях сложной геометрической формы, в частности в областях с сильно сегментированной границей при произвольной конфигурации перфорирования области, появились относительно недавно, и их появление было обусловлено, в первую очередь, беспрецедентным ростом производительности вычислительной техники и стремительным увеличением ее инсталляционной базы. На предыдущих этапах исследований в данном направлении внимание исследователей было сосредоточено, главным образом, на гетерогенных системах регулярной структуры, например, композитных материалах, с последующей гомогенизацией решений [1 – 5]. Даже в гидродинамике многофазных сред, где не было никаких оснований ожидать регулярной структуры гетерогенной среды, пытались ввести некоторую осредненную регулярность по принципу «частица в ячейке» [6]. Первые работы, в которых методы численного моделирования локальной аппроксимации были применены к определению полей в сильно перфорированных областях, трудно назвать успешными, особенно это утверждение относится к соответствующим задачам вычислительной гидромеханики. Во многом указанные трудности преодолеть не удалось. По этой причине не будем рассматривать здесь вопросы, связанные с применением численного моделирования к краевым задачам в областях с нерегулярной структурой перфорации, если они основаны на применении методов локальной аппроксимации.

С другой стороны, актуальные задачи прикладной гидромеханики и дозвуковой аэродинамики требовали изучения гидродинамического (аэродинамического) взаимодействия тел в потоке. Еще во время, предшествующее эпохе численного моделирования, появились весьма значительные работы, посвященные проблеме гидродинамического взаимодействия [7 – 9], основанные на аналитических и приближенных аналитических подходах. Значительно позже стало ясно, что в рамках максимально упрощенных математических моделей, использованных в работах [7 – 9], к задачам в областях с сильно сегментированной границей могут быть применены альтернативные численные методы глобальной аппроксимации, и, прежде всего, метод дискретных вихрей [10, 11] и метод граничных элементов [12, 13]. Уверенность в преимуществе метода граничных элементов над методом конечных разностей по точности и эффективности численного решения основывается на результатах специально приведенных исследований [14, 15]. С другой стороны, метод дискретных вихрей [10, 11] ориентирован на другие задачи, уступает методу граничных элементов в эффективности [16] и имеет специфические вычислительные проблемы [17], именно поэтому предпочтение в данной работе будет отдано методу граничных элементов.

Непосредственно настоящей работе предшествовали публикации, посвященные гидродинамическому взаимодействию тел в потоке [18], гидродинамическому взаимодействию тел в течении сверхтекучей жидкости [19], общей проблеме N – тел в гидродинамике [20]. При проведении расчетов использовался комплекс программ, реализующих метод граничных элементов, особенности данного комплекса описаны в следующих работах [21 – 24]. Сложность формы области решения в рассматриваемом классе задач и связанные с этим значительные вычислительные трудности несколько камуфлируют проблему точности расчета в релевантных областях, в результате чего в предшествующих работах точности численных расчетов в областях с сильно сегментированной границей не было уделено надлежащего внимания. В настоящей же работе вопрос о точности подобных расчетов был одним из центральных, при этом использовалась методика тестирования граничноэлементного программного обеспечения, описанная в работе [24].

Постановка задачи. Основная задача настоящей работы состоит в том, чтобы на примере плоских краевых задач для уравнения Лапласа разработать методику численного решения задач в областях с сильно сегментированной границей и проанализировать точность полученных численных решений при помощи специально подобранных тестовых задач.

Математическая модель. Как отмечалось выше, настоящая работа ориентирована в первую очередь, на задачи гидромеханики. В случае потенциальных плоских течений обычно применяются два наиболее популярных способа описания поля течения: *задача Дирихле* для уравнения Лапласа относительно функции тока и *задача Неймана* для уравнения Лапласа относительно потенциала скоростей:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\psi|_{\Gamma_i} = c_i, \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = V_i, \quad (4)$$

где ψ – функция тока; φ – потенциал скоростей; x, y – координаты декартовой ортогональной системы координат; c_i – постоянные значения функции тока на непротекаемой границе Γ_i , предполагаемые известными; V_i – известная функция, имеющая физический смысл нормальной скорости на той же границе Γ_i . Если задача формулируется в неограниченной области, то постановки (1), (2) и (3), (4) должны быть дополнены условиями в бесконечно удаленной точке

$$\text{rot } \psi|_{(x,y) \rightarrow \infty} = \vec{V}_\infty, \quad (5)$$

$$\text{grad } \varphi|_{(x,y) \rightarrow \infty} = \vec{V}_\infty, \quad (6)$$

где \vec{V}_∞ – известный вектор. Если же область решения ограничена или полуограничена, то на ее внешних границах должны быть поставлены граничные условия вида (2) или (4).

Дабы избежать путаницы и повторения обозначений, введем искомую функцию u , которая удовлетворяет либо задаче Дирихле для уравнения Лапласа, либо задаче Неймана для того же уравнения, соответственно совпадая с функцией тока или потенциалом скоростей с учетом дополнительных условий однозначности. Очевидно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

$$u|_{\Gamma} = f_D, \quad (8)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_N, \quad (9)$$

где Γ – граница области решения; f_D и f_N – заданные функции. Граница области решения Γ состоит из внешней границы Γ_{out} и внутренних (сегментированных) границ Γ_i , то есть

$$\Gamma = \Gamma_{out} \cup \left(\bigcup_i \Gamma_i \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

при этом

$$\Gamma_{out} \cap \Gamma_i = \emptyset, \quad \forall i, \quad (11)$$

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad \forall i, j < N, \quad i \neq j, \quad (12)$$

это означает, что контуры не пересекаются.

Перейдем от формулировок (7), (8) и (7), (9) к граничным интегральным соотношениям [12, 13]:

$$c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} g(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (13)$$

где точка (x_0, y_0) называется точкой наблюдения (*коллокации*), а точка (x, y) – точка источника. Функция c определяется как

$$c(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in D; \\ 1/2, & (x_0, y_0) \in \Gamma; \\ 0, & (x_0, y_0) \notin D, (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases} \quad (14)$$

$g(x, x_0, y, y_0)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа [12, 13]

$$g(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (15)$$

или соответствующая *функция Грина*.

Следует отметить, что собственно математической моделью в данном случае является граничное интегральное уравнение (сингулярное или регулярное в зависимости от расположения точек коллокации относительно границы Γ), полученное с учетом подстановки граничных условий (8) или (9). Отметим также, что в случае граничного условия (8) сингулярное граничное интегральное уравнение будет уравнением первого рода, а это означает, что корректность его в должной мере не исследована. Для точек коллокации, расположенных вне области решения, и обоих граничных условий (8), (9) получаем регулярное граничное интегральное уравнение первого рода, которое некорректно. Поэтому вопрос об эквивалентности дифференциальных и интегральных формулировок остается открытым, хотя не составляет труда показать, что, если некоторая функция u^* удовлетворяет одной из формулировок, то она удовлетворяет и второй.

Алгоритмы численного расчета. Следуя общей схеме метода граничных элементов [12, 13], разобьем границу области решения Γ , определенную соотношениями (10), произвольным образом на части, которые назовем граничными элементами, при необходимости форма граничных элементов может быть аппроксимирована дугами более простых кривых, в простейшем случае отрезками прямых. Однако регулярный метод граничных элементов (с точками коллокации вне области решения [21] и внутри области решения [22]) вообще не нуждается в аппроксимации граничных элементов, обеспечивая при этом высокую точность решения. Известные (для удобства, но не обязательно) и неизвестные (обязательно) граничные значения функций u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ также аппрок-

симируются специально подобранными пробными функциями. Простоты ради, далее все неизвестные граничные значения на граничных элементах будут аппроксимироваться постоянными, а известные граничные значения либо тоже аппроксимироваться постоянными, либо вообще не будут аппроксимироваться. Тогда интегральное представление

$$c_k u_k = \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{j\Gamma_j} \int g(x, x_k, y, y_k) dS(x, y) - \sum_{j=1}^M u_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial g(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (16)$$

где (x_k, y_k) – точка коллокации, соответствующая k -ому граничному элементу; M – общее число граничных элементов, на которые разделены N или $N+1$ контуров, является системой линейных алгебраических уравнений, поскольку интегралы по заданным граничным элементам от известных функций g и $\frac{\partial g}{\partial n}$ в правой части

(16) принимают численные значения. Перепишем систему (16) в матричном виде:

$$\{cu\} = (H) \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} - (F) \{u\}. \quad (17)$$

Откуда для задачи Дирихле

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = -(H)^{-1} (F^*) \{u\}, \quad (18)$$

и для задачи Неймана

$$\{u\} = (F^*)^{-1} (H) \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}. \quad (19)$$

Однако чаще система уравнений (16) решается *методами гауссовского исключения* или *итерационными методами*, что намного проще, чем строить обратную матрицу больших размеров, что необходимо в (18) и (19).

В процессе решения задачи методом граничных элементов наиболее ресурсоемким и длительным этапом является определение матриц (H) и (F) , поэтому целесообразно один раз вычислив эти матрицы хранить их в дальнейшем в памяти компьютера. Однако в случае сильно сегментированной границы области решения может возникнуть ситуация, когда матрица системы слишком велика для оперативной памяти компьютера, а, следовательно, должна храниться на внешних носителях, обмен с которыми существенно замедляет процесс счета. В таких случаях могут быть использованы безматричные итерационные методы, основанные на схемах вида:

$$u_k^{l+1} = \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{j\Gamma_j}^l \int g(x, x_k, y, y_k) dS(x, y) - \sum_{j=1}^M u_j^l \int_{\Gamma_j} \frac{\partial g(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (20)$$

где верхний индекс указывает на номер итерации. Алгоритмы типа (20) являются полными аналогами итераци-

онных алгоритмов, применяемых в методе граничных элементов, с единственной разницей – элементы матрицы системы линейных алгебраически уравнений в них не хранятся в памяти, а постоянно вычисляются, то есть, каждый коэффициент вычисляется неоднократно. По понятным причинам такие подходы не получили широкого распространения. Однако в настоящей работе подход (20) модифицирован следующим образом: пусть для некоторого контура с номером K известна функция Грина G_K (для определенности предположим, что это функция Грина задачи Дирихле), отметим также, что для каждого граничного элемента (каждой точки коллокации) при записи интегральных соотношений (13) и их дискретных аналогов (16) и (20) могут быть использованы свои ядра потенциалов, стоящих в правой части. Тогда из правой части представления (20) можно выделить интегралы по контуру Γ_K :

$$u_k^{l+1} = - \int_{\Gamma_K} u^l(x, y) \frac{\partial G_K(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y) + \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{j \Gamma_j \notin \Gamma_K}^l \int_{\Gamma_j} G_K(x, x_k, y, y_k) dS(x, y) - \sum_{j=1}^M u_j^l \int_{\Gamma_j \in \Gamma_K} \frac{\partial G_K(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \quad (21)$$

а это означает, что в представлении (21) на каждом шаге итерации краевая задача по выбранному контуру, для которого известна функция Грина, решается не численно методом граничных элементов, а аналитически методом функций Грина, что обеспечивает очевидные преимущества в точности решения. Рассуждения при выводе аналога представления (21) для задачи Неймана совершенно аналогичны. Более того, если даже функция Грина для данного контура неизвестна, то вместо нее можно использовать ее численный аналог, а именно матрицы $-(H)^{-1}(F^*)$ и $(F^*)^{-1}(H)$ из решений (18) и (19), если последние формулы применяются только к рассматриваемому контуру. Указанные дискретные аналоги матриц Грина можно хранить в оперативной памяти компьютера, и это потребует примерно в N раз меньшего объема необходимой памяти по сравнению с хранением всей матрицы системы. Таким образом, расчетные схемы вида (21) дают возможность объединить в одном итерационном процессе численные и аналитические подходы.

Результаты проведенных расчетов. Ограниченный объем настоящей работы не позволяет привести полный спектр полученных результатов, поэтому ограничимся здесь описанием методики тестирования и несколькими иллюстрирующими примерами. Численный эксперимент проводился для трех тестовых функций [24]:

$$u_1(x, y) = (x + y)/2; \quad (22)$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2; \quad (23)$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos y. \quad (24)$$

Выбор тестовых функций (22) – (24) не является принципиальным, а результаты тестирования носят, скорее, эвристический характер. Тем не менее, такие результаты могут послужить основанием для качественных выводов о характере численного алгоритма и выработки практических рекомендаций по его реализации и использованию. Оценка погрешности во всех дальнейших расчетах проводилась на специально выбранном представительском наборе точек, расположенных внутри области решения. Как правило, такие точки выбирались в узлах некоторой сетки, если узлы оказывались внутри одного из внутренних контуров, то они отбрасывались. В выборе набора внутренних точек также заложен определенный произвол, но он позволяет удовлетворить практические требования, выдвигаемые при вычислениях. Вычислялась максимальная и среднеквадратичная погрешность, при этом последняя сглаживала возможные всплески вычислительной ошибки, когда некоторая из точек, в которых контролировалась погрешность, оказывалась вблизи границы области решения. Тестирование в приведенных ниже примерах проводилось в ограниченных областях квадратной или круглой формы, что, впрочем, не является принципиальным ограничением.

Таблица 1 – Результаты тестирования для функции (23) в квадратной области с круглыми включениями (400 граничных элементов на внешнюю границу и по 100 на каждое включение)

	Максимальная погрешность	Среднеквадратичная погрешность	Максимальная внутренняя погрешность	Среднеквадратичная внутренняя погрешность
Без включений	.1209E-4	.6188E-6	.2304E-5	.4000E-7
3 включения	.3166E-3	.1950E-5	.8267E-4	.8774E-6
4 включения	.3875E-3	.3475E-5	.1079E-3	.9072E-6

В табл. 1 приведены значения погрешностей, определенных в результате расчетов, в квадратной области для тестовой функции (23) при наличии 3 и 4 внутренних контуров и без внутренних контуров вообще, для контрольных точек выбиралась регулярная сетка 100 на 100. Согласно статье [24] внутренней погрешностью называются результаты расчета на том же представительском множестве точек и с той же граничной аппроксимаци-

ей, однако без численного решения интегрального уравнения. Как видно из табл. 1, добавление включений в область решения увеличивает погрешность решения, но это увеличение можно назвать «весьма умеренным». В целом же, результаты подтверждают достаточно высокую точность метода граничных элементов. При применении итерационных схем (21) существенного изменения погрешности численного решения не произошло, что было несколько неожиданно для автора.

Помимо приведенных выше тестовых расчетов было проведено несколько единичных численных экспериментов, чтобы оценить погрешность численного решения для большого числа изолированных сегментов границы области решения. В частности, были рассмотрены краевые задачи для тестовых функций (22) и (24) в круглой области, включающей 100, 160 и 200 контуров (дискретизация по 30 граничных элементов на каждое включение), а также в квадратной области для 100 и 225 контуров (при той же дискретизации). Результаты расчетов подтвердили высокую точность и эффективность метода граничных элементов.

Перспективы дальнейших исследований. Приведенные выше расчетные схемы и методики численного анализа свойств алгоритмов имеют совершенно очевидные перспективы дальнейшего развития: а) распространение предложенного подхода на пространственный случай; б) сравнительный анализ влияния различных граничноэлементных аппроксимаций на точность численных решений в областях с сильно сегментированной границей; в) распространение описанных подходов и методик на случаи иных исходных дифференциальных уравнений и, соответственно, граничных интегральных уравнений.

Выводы. Таким образом, в данной работе подтверждена эффективность метода граничных элементов для численного решения краевых задач математической физики в областях с сильно сегментированной границей. Кроме того, в данной статье сформулирован и опробован итерационный алгоритм метода граничных элементов, который позволяет интегрировать в процедуру численного решения известные аналитические решения для частных случаев той же самой краевой задачи в областях простой формы. Наконец, при помощи оригинальной методики численного эксперимента в работе удалось проанализировать влияние усложнения формы границы области (добавления контура) на точность численного решения. Последнее исследование проводилось на относительно небольших группах контуров, для которых изменение погрешности при добавлении еще одного контура было более заметным.

Список литературы

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Гомогенизация дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
2. Marchenko V. A., Khrushlov E. Y. Homogenization of Partial Differential Equations. – Basel: Birkhauser, 2006. – 402 p.
3. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. – 406 p.
4. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
5. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. Ч. 1 – 464 с., Ч. 2. – 360 с.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1966. – 448 с.
8. Костюков А. А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости. – Л.: Судостроение, 1972. – 312 с.
9. Блох Э. Л., Гиневский А. С. О движении системы тел в идеальной жидкости // Труды НТО суд. пром. – 1963. – Вып. 47. – с. 131 – 143.
10. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров П. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 309 с.
11. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
12. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 534 с.
13. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
14. Бевза Э. К., Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Кочубей А. А. Сравнение эффективности метода граничных элементов и метода конечных разностей путем численного эксперимента // Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2002. – № 2 (15). – С. 53 – 56.
15. Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Шульга Р. А. Сравнение эффективности методов конечных разностей и граничных элементов при решении эллиптических краевых задач в кольцевых областях // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2016. – № 3 (58). – С. 325 – 330.
16. Бевза Э. К., Евдокимов Д. В. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Херсон, 2001. – С. 51 – 55.
17. Бразалук Ю. В., Шульга Р. А. Прямые методы дискретных особенностей // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2017. – № 3 (62), т. 1. – С. 31 – 39.
18. Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В. Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках // Вестник Харьковского национального университета. Сер.: «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – Вып. 1. – № 590. – С. 55 – 60.
19. Бразалук Ю. В. Расчет гидродинамического взаимодействия в сверхтекучей жидкости методами вычислительной теории потенциала // Восточно – Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 5/5 (65). – С. 6 – 11.
20. Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Шульга Р. А. Численное исследование гидродинамической проблемы N – тел // Международная научно-техническая конференция «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях – 2016», 26 – 31 мая 2016 г. – Харьков: Харьковский национальный университет имени Н.В. Каразина, 2016. – С. 45 – 48.
21. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регуляризованного метода граничных элементов // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 1999. – Випуск 2. – Том 1. – С. 150 – 156.
22. Евдокимов Д. В. Разработка прямых регуляризованных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения // Восточно – Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – № 2/7 (74). – С. 16 – 25.
23. Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В. Численная реализация обобщенного метода Блоха – Гиневского // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2013. – Вип. 17. – Том 1. – С. 35 – 51.

24. Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями // Вестник Харьковского национального университета. Сер. : «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2005. – № 703. – С. 50 – 66.

References (transliterated)

- Zhikov V. V., Kozlov S. M., Oleynik O. A. *Gomogenizatsiya differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1993. 464 p.
- Marchenko V. A., Khruslov E. Y. *Homogenization of Partial Differential Equations*. Basel, Birkhauser, 2006. 402 p.
- Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980. 406 p.
- Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984. 336 p.
- Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
- Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multi-phase media]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1 – 464 p., Part 2 – 360 p.
- Sedov L. I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of aero- and hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 448 p.
- Kostyukov A. A. *Vzaimodeystvie tel, dvizhushchikhsya v zhidkosti* [Interaction of bodies moving in a fluid]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1972. 312 p.
- Blokh E. L., Ginevskiy A. S. *O dvizhenii sistemy tel v ideal'noy zhidkosti* [On the movement of system of bodies in ideal fluid]. *Trudy NTO Sud. Prom.* [Works of the Scientific and Technical Society of the Shipbuilding Industry]. 1963, issue 47, pp. 131 – 143.
- Belotserkovskiy S. M., Kotovskiy V. N., Nisht M. I., Fedorov P. M. *Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallel'nogo otrivnogo obtekaniya tel* [Mathematical modeling of plane-parallel separated flow past bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 309 p.
- Belotserkovskiy S. M., Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh* [Computational methods in singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 256 p.
- Brebbia K., Telles Zh., Wroubel L. *Metody granichnykh elementov* [Boundary element methods]. Moscow, Mir Publ., 1987. 534 p.
- Benderzhi P., Batterfeld R. *Metod granichnykh elementov v prikladnykh naukakh* [Boundary element method for applied sciences]. Moscow, Mir Publ., 1984. 494 p.
- Bevza E. K., Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Kochubey O. O. Sravnenie effektivnosti metoda granichnykh elementov i metoda konechnykh raznostey putem chislennogo eksperimenta [Comparing the efficiency of boundary element method and finite difference method by numerical experiment]. *Vestnik Khersonskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kherson State Technical University]. 2002, no. 2 (15), pp. 53–56.
- Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Shul'ga R. A. Sravnenie effektivnosti metodov konechnykh raznostey i granichnykh elementov pri reshenii ellipticheskikh kraevykh zadach v kol'tsevykh oblastiakh [Comparing the efficiency of finite difference and boundary element methods when solving elliptic boundary-value problems in ring domains]. *Visnyk Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universitetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2016, no. 3 (58), pp. 325–330.
- Bevza E. K., Yevdokimov D. V. Osobennosti primeneniya kombinirovannogo metoda granichnykh elementov i diskretnykh vikhrey dlya resheniya ploskikh vneshnikh zadach gidrodinamiki [Features of using boundary element and discrete vortex combined method for solving plane exterior problems of hydromechanics]. *Trudy X Mezhdunarodnogo simpoziuma «Metody diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki»* [Proceedings of the X International Symposium “Methods of Discrete Singularities in Mathematical Physics Problems”]. Kherson, 2001. pp. 51–55.
- Brazaluk Iu. V., Shul'ga R. A. Pryamye metody diskretnykh osobennostey [Direct methods of discrete singularities]. *Visnyk Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universitetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2017, no. 3 (62), vol. 1, pp. 31–39.
- Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Primenenie kombinirovannogo metoda granichnykh elementov i diskretnykh vikhrey dlya resheniya nekotorykh zadach gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya v ploskikh potokakh [Application of boundary element and discrete vortices combined method for solving particular problems of hydrodynamic interaction in plain flows]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. : «Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya»* [Bulletin of the Kharkov National University. Series : “Mathematical modeling. Informational technologies. Automated control systems”]. 2003, vol. 1, no. 590, pp. 55–60.
- Brazaluk Iu. V. Raschet gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya v sverkhtekuchey zhidkosti metodami vychislitel'noy teorii potentsiala [Computing hydrodynamic interaction in superfluid by computational potential theory]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of advanced technologies]. 2013, no. 5/5 (65), pp. 6–11.
- Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Shul'ga R. A. Chislennoe issledovanie gidrodinamicheskoy problemy N – tel [Numerical study of the N -body hydrodynamic problem]. *Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Komp'yuternoe modelirovanie v naukoemkikh tekhnologiyakh – 2016», 26 – 31 maya 2016 g.* [International scientific and technical conference “Computer modeling in knowledge-intensive technologies – 2016”. May, 26 – 31, 2016]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy universitet imeni N.V. Karazina Publ., 2016. pp. 45–48.
- Yevdokimov D. V. Ob odnom variante regul'yarnogo metoda granichnykh elementov [On a version of regular boundary element method]. *Visnyk Dnipropetrovskogo universitetu. Mekhanika* [Bulletin of the Dnipropetrovsk University. Mechanics]. 1999, vol. 2, no. 1, pp. 150–156.
- Yevdokimov D. V. Razrabotka pryamykh regul'yarnykh algoritmov vychislitel'noy teorii potentsiala s tochkami kollokatsii vnutri oblasti resheniya [Developing direct regular algorithms of computational potential theory with collocation point inside the solution domain]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of advanced technologies]. 2015, no. 2/7 (74), pp. 16–25.
- Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Chislennaya realizatsiya obobshchennogo metoda Blokh – Ginevskogo [Numerical implementation of Blokh – Ginevskiy method]. *Visnyk Dnipropetrovskogo universitetu. Mekhanika* [Bulletin of the Dnipropetrovsk University. Mechanics]. 2013, vol. 17, no. 1, pp. 35–51.
- Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Sovmestnoe primeneniye metoda malogo parametra i metoda granichnykh elementov dlya chislennogo resheniya ellipticheskikh zadach s malymi vozmushheniyami [Joint application of small parameter method and boundary element method for numerical solution of small perturbation elliptic problems]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. : «Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya»* [Bulletin of the Kharkov National University. Series : “Mathematical modeling. Informational technologies. Automated control systems”]. 2005, no. 703, pp. 50–66.

Поступила (received) 08.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бразалук Юлія Володимирівна (Бразалук Юлия Владимировна, Brazaluk Iuliia Volodymirivna) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро; тел.: (050) 582-71-71; e-mail: brazaluk_jv@ukr.net.

В. А. ВАНИН, Н. М. КРУГОЛ, А. П. ЛАЗУРЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ОБЕСПЕЧЕНИЯ РАБОТЫ КОТЛОАГРЕГАТА ТЭС В ЗАДАЧЕ ПОВЫШЕНИЯ ЕГО ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ

В работе рассматриваются математические модели вспомогательных механизмов ТЭС. Используя табличные и графические представления аэрогидродинамических характеристик серийных вентиляторов и насосов, восстановлены аппроксимирующие их математические модели квазистационарного функционирования с помощью метода наименьших квадратов и законов подобия для центробежных машин. Сформулирована задача нахождения оптимальной частоты питающего напряжения для одного механизма и для группы механизмов собственных нужд ТЭС, которая обеспечивает максимальный КПД функционирования одного или группы агрегатов. Приводятся результаты для типичных последовательно-параллельных соединений механизмов в гидравлических сетях ТЭС.

Ключевые слова: тепловая электрическая станция, групповое управление, гидравлические системы, центробежные механизмы, частотно-регулируемый привод, энергоэффективность.

В. А. ВАНИН, М. М. КРУГОЛ, О. П. ЛАЗУРЕНКО

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОБОТИ КОТЛОАГРЕГАТА ТЕС В ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕННЯ ЙОГО ЕНЕРГОЕФЕКТИВНОСТІ

В роботі розглядаються математичні моделі допоміжних механізмів ТЕС. Використовуючи табличні та графічні представлення аерогідродинамічних характеристик серійних вентиляторів та насосів, відтворені апроксимуючі їх математичні моделі квазистационарного функціонування за допомогою методу найменших квадратів та законів подоби для відцентрових машин. Сформульована задача знаходження оптимальної частоти живильної напруги для одного та групи механізмів власних потреб ТЕС, що забезпечує максимальний КПД функціонування одного або групи агрегатів. Приводяться результати для типових послідовно-паралельних з'єднань механізмів в гідравлічних мережах ТЕС.

Ключові слова: теплова електрична станція, групове керування, гідравлічні системи, відцентрові механізми, частотно-регульований привід, енергоефективність.

V. A. VANIN, M. M. KRUGOL, O. P. LASURENKO

MATHEMATICAL MODELS OF THERMAL POWER PLANT BOILER OPERATION SYSTEMS IN THE PROBLEM OF THE BOILER ENERGY EFFICIENCY IMPROVEMENT

The article deals with the analysis of thermal power plant's auxiliary mechanisms operational modes and construction of their optimal control over the supply voltage frequency. Tabular and graphical characteristics of the fans used in thermal power plants are analyzed. On the basis of the initial data, with application of the least squares method and similarity laws for centrifugal machines, models that describe the quasistationary mode of thermal power plants auxiliary mechanisms operation have been restored. The task to find the optimal frequency of the supply voltage for a single mechanism has been formulated. Besides, a group of mechanisms with similar operational modes has been identified and the task to find the optimal frequency of the supply voltage for this group in a specified mode has been set. The optimal frequency of the supply voltage ensures the mechanism group operation with the maximum average-weighted efficiency. Results for typical serial and parallel connections of the mechanisms in thermal power plant hydraulic network are given.

Key words: thermal power plant, group control, hydraulic systems, centrifugal mechanisms, variable frequency drive, energy efficiency.

Введение. В структуре установленной мощности объединенной энергосистемы Украины 62 % приходится на тепловые электрические станции (ТЭС). При этом выработка электроэнергии на них достигает уровня 40 %. Большинство ТЭС строились более 30 лет назад, и сейчас остро стоят вопросы реконструкции и модернизации основного и вспомогательного оборудования станций с целью повышения их надежности, энергоэффективности и маневренности. Одним из путей повышения энергоэффективного производства электрической энергии на ТЭС может стать уменьшение потерь электроэнергии в системах собственных нужд станций.

Система собственных нужд ТЭС – это комплекс вспомогательного оборудования электростанций, обеспечивающий бесперебойную работу ее основных агрегатов (паровых котлов, турбогенераторов). В большинстве своем это центробежные механизмы – насосы и вентиляторы. Единичная мощность таких агрегатов может достигать 6 МВт, а, следовательно, применение энергоэффективных способов управления ими может дать значительный экономический эффект за счет снижения потребления электроэнергии на собственные нужды.

Предлагаемые сегодня мероприятия по энергосбережению в системах собственных нужд дают значительный экономический эффект при сравнительно коротких сроках окупаемости, но имеют недостаток – необходимые большие капиталовложения, которые не всегда могут найти отечественные предприятия теплоэнергетики. Поэтому идет поиск путей повышения энергоэффективности работы ТЭС. Одним из таких способов может стать применение группового способа регулирования производительности механизмов собственных нужд ТЭС, исследуемый авторами [1, 2, 3].

В данной статье предложен метод нахождения оптимальной частоты питающего напряжения для выделенной группы механизмов собственных нужд ТЭС со схожим режимом работы.

Анализ последних исследований. Анализ режима работы агрегатов собственных нужд маневренных блоков ТЭС можно найти в работах *Л. В. Проданова* и *В. Г. Агапова*. В их работе [4] дается экономическое обоснование применения группового регулирования производительности механизмов СН ТЭС. Также возможность применения одного частного преобразователя для питания группы циркуляционных насосов ТЭС приводится в

работе Ванг Шупинг и Е Джунтао [5].

Другой подход к исследованию группового регулирования агрегатов собственных нужд представлен в работах В. Ф. Сивокобыленко [6], и Л. В. Проданова [7]. В них приводится анализ регулирования величины питающего напряжения для групп механизмов.

Большое количество работ посвящено исследованию индивидуального частотного привода, как основного внедряемого способа повышения энергоэффективности центробежных механизмов ТЭС. Анализ внедрения и описание экономического эффекта при внедрении индивидуального частотного привода можно найти в работе [8].

Постановка задачи. Основными механизмами собственных нужд ТЭС являются питательные насосы, циркуляционные насосы, сетевые насосы, дутьевые и мельничные вентиляторы, дымососы, насосы цеха химической очистки воды и другие. Данные агрегаты обеспечивают работу основного оборудования станции – котлов, турбин, общестанционных нужд. Существует множество схем включения данных агрегатов относительно основного оборудования, наиболее используемые из них указаны на рис. 1. Пример технологической схемы парового энергетического котла показан на рис. 2. На данной технологической схеме условно показаны механизмы собственных нужд, которые могут быть включены параллельно.

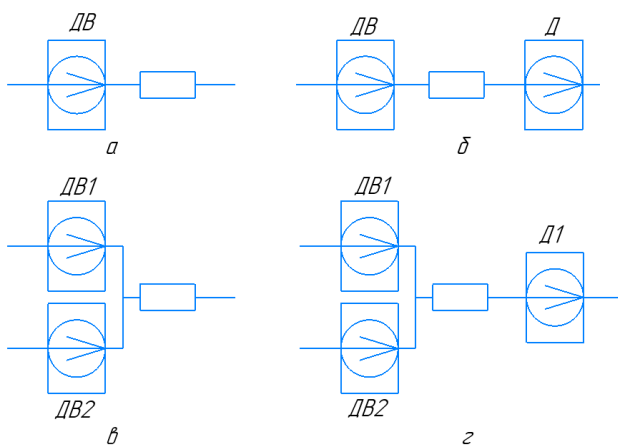


Рис. 1 – Схемы включения вспомогательного оборудования станции: а – работа на сеть; б – последовательное; в – параллельное соединение; г – смешенное соединение.

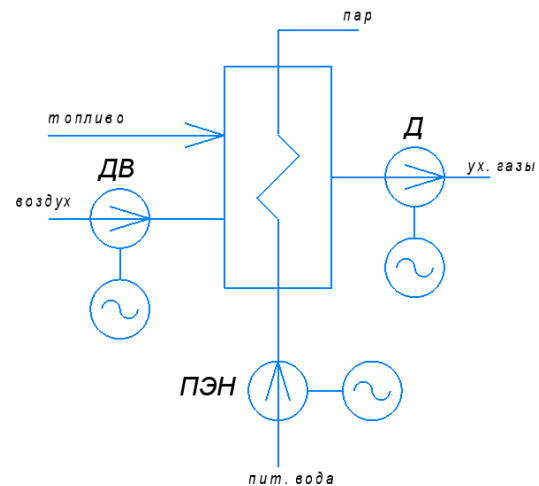


Рис. 2 – Вспомогательное оборудование котла.

Исходя из схем включения вспомогательных механизмов, можно сделать вывод, что их режимы работы взаимосвязаны, а характеристики имеют сходства, следовательно, весьма логичным есть объединение их в группы. Предполагается, что механизмы группы будут питаться от одного преобразователя частоты. Частота питающего напряжения будет находиться исходя из режима работы каждого из механизмов группы по критерию средневзвешенного КПД группы механизмов.

Математическая модель. Рассмотрим работу центробежного механизма на сеть (рис. 3). Система «центробежный механизм – сеть» состоит из двух компонентов – центробежного механизма (насос, вентилятор) и сети (трубопровод, газоход).

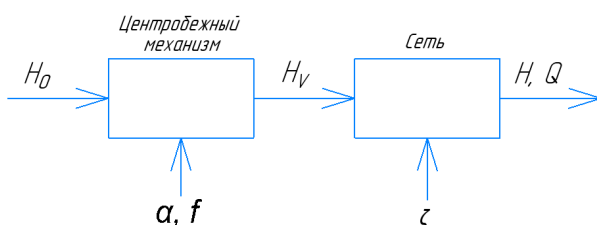


Рис. 3 – Структурная схема модели работы центробежного механизма на сеть.

Состояние центробежного механизма определяется следующими параметрами: напор, развиваемый центробежным механизмом – H , производительность агрегата – Q , скорость вращения рабочего колеса – n , угол открытия направляющего аппарата – α . Параметры, описывающие режим работы центробежного механизма, связаны соотношением:

$$F(\alpha, Q, n, H) = 0.$$

Из этого можно выразить напор, развиваемый центробежным механизмом, как функцию от его производительности, угла открытия направляющего аппарата и скорости вращения рабочего колеса в виде:

$$H = H(Q, \alpha, n). \quad (1)$$

Параметры, описывающие гидравлическую сеть, связаны следующим соотношением:

$$\Phi(Q, \xi, H_n).$$

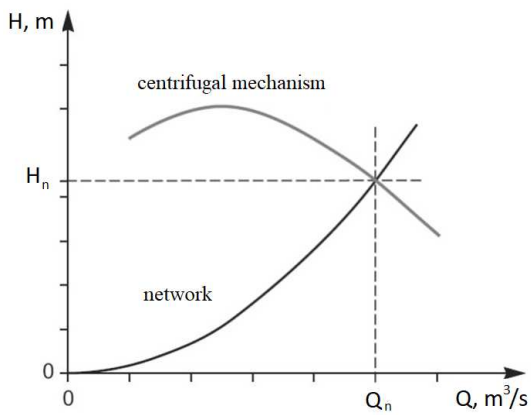


Рис. 4 – Совместная работа центробежного механизма на сеть.

Из (1) и (2) имеем, что согласованное функционирование системы «центробежный механизм – сеть» описывается следующим соотношением:

$$H(Q, \alpha, n) = H_n(Q, \xi).$$

Перепишем его в виде:

$$\Psi(\alpha, Q, n, \xi) = H(Q, \alpha, n) - H_n(Q, \xi) = 0.$$

Задав производительность, которую должен обеспечить центробежный механизм, $Q = Q_0$, и гидравлическое сопротивление сети $\xi = \xi_0$ из

$$\Psi(\alpha, Q_0, n, \xi_0) = 0.$$

найдем множество значений $D(\alpha, n)$, которые будут обеспечивать заданный расход при неизменном гидравлическом сопротивлении сети. Это множество описывается соотношением:

$$\alpha = \alpha(n, Q_0, \xi_0) = \alpha(n).$$

КПД центробежного механизма представим в виде:

$$\eta = \eta(Q, \alpha, n).$$

Необходимо найти оптимальное значение параметра (n), который обеспечивает максимальное КПД функционирования системы. Для этого решается задача:

$$n^* = \arg \max_{n \in [n_{\min}, n_{\max}]} \eta(Q_0, \alpha(n), n).$$

Скорость вращения рабочего колеса механизма связана с частотой питающего напряжения через формулу:

$$n(f) = \frac{60 \cdot f}{p} (1 - s),$$

где f – частота питающего напряжения, Гц; p – количество пар полюсов; s – скольжение.

Следовательно, задачу (7) перепишем в виде

$$\begin{cases} f^* = \arg \max_{f \in [f_{\min}, f_{\max}]} \eta(Q_0, \alpha(n(f)), f); \\ D = \{ F(f) \in R : f \in [f_{\min}, f_{\max}] \}. \end{cases}$$

При питании группы механизмов собственных нужд ТЭС от одного частотного преобразователя критерием оптимальности будет средневзвешенный КПД группы механизмов. Введем его формулой:

$$\eta_{экс} = \frac{\sum P_i \eta_i(\alpha_i(f), Q_i, f)}{\sum P_i}, \quad i = 1 \dots N.$$

Тогда оптимальную частоту группы механизмов будем искать из решения следующей задачи:

$$\begin{cases} f_{zp}^* = \arg \max_{f_{zp} \in D_{zp}} \frac{\sum P_i \eta_i(\alpha_i(f_{zp}), Q_i, f_{zp})}{\sum P_i}; \\ D_i = \{ F_i(f_i) \in R : f_i \in [f_{i,\min}, f_{i,\max}] \}; \quad i = 1 \dots N. \\ D_{zp} \in \bigcap D_i, \end{cases}$$

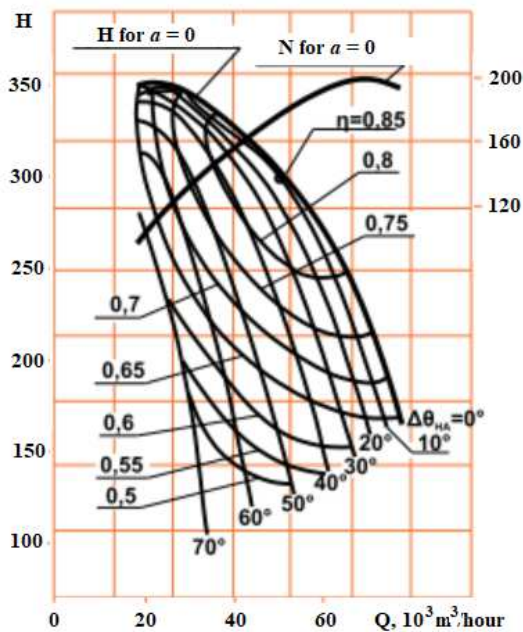


Рис. 5 – Паспортные характеристики дутьевого вентилятора ВДН-17-3.

Построение характеристик механизмов. Для дальнейшего анализа работы вспомогательных механизмов ТЭС необходимо получить зависимости (1) и (6) для каждого из них. Исходными данными будут паспортные характеристики центробежных механизмов в виде графиков зависимостей напоров и КПД механизмов от их производительностей и угла открытия направляющего аппарата. Пример паспортных характеристик для дутьевого вентилятора ВДН-17-3 показан на рис. 5.

По паспортным данным центробежного механизма снимем таблицы значений (a_i, Q_j, H_{ij}) и (a_i, Q_j, η_{ij}) , где $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots M$, для номинальной скорости вращения рабочего колеса механизма n_0 при частоте питающего напряжения $f = f_0$. Применяя метод наименьших квадратов [11] для скорости вращения рабочего колеса n_0 найдем коэффициенты h_i и восстановим выражение (1) в виде:

$$\tilde{H}(\alpha, Q, n(f_0)) = h_0 + h_1\alpha + h_2Q + h_3\alpha Q + h_4\alpha^2 + h_5Q^2, \quad (9)$$

где h_i , $i = 1, \dots, 5$ – коэффициенты, найденные по методу наименьших квадратов.

Согласно законам подобия центробежных механизмов имеют место соотношения [9]:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{n}{n_0}, \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{H}}{H_0} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2. \quad (11)$$

Исходя из соотношений (10), (11), зная значение напора и расхода при частоте питающего напряжения $f = f_0$, можно пересчитать, какие значения расхода и напора механизм будет развивать при другой частоте питающего напряжения:

$$Q = Q_0 \left(\frac{n(f_1)}{n(f_0)}\right), \quad (12)$$

$$\tilde{H} = H_0 \left(\frac{n(f_1)}{n(f_0)}\right)^2, \quad (13)$$

а, следовательно, выполняя математические преобразования выражений (9 – 13), можно восстановить (1) в виде:

$$\tilde{H}(\alpha, Q, f) = \left[h_0 + h_1\alpha + h_2Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + h_3\alpha Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + h_4\alpha^2 + h_5 \left[Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) \right]^2 \right] \left(\frac{n(f)}{n(f_0)}\right)^2. \quad (14)$$

Аналогичным образом восстановим функцию (6) для КПД при $f = f_0$:

$$\tilde{\eta}(\alpha, Q, n(f_0)) = k_0 + k_1\alpha + k_2Q + k_3\alpha Q + k_4\alpha^2 + k_5Q^2.$$

С учетом выражений (10) и (12) зависимость (6) восстановим в виде:

$$\tilde{\eta}(\alpha, Q, f) = k_0 + k_1\alpha + k_2Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + k_3\alpha Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + k_4\alpha^2 + k_5 \left[Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) \right]^2. \quad (15)$$

На рис. 6 и 7 показаны паспортные характеристики, построенные по выражениям (14) и (15).

Нахождение оптимальной частоты для вентилятора ВДН-17-3. Пусть вентилятор ВДН-17-3 работает на сеть с эквивалентным гидравлическим сопротивлением $\xi = \xi_0$. Найдем оптимальную частоту питающего напряжения f^* для случая, когда дутьевой вентилятор развивает производительность $Q = Q_0$.

С учетом (3) и (12) выражение (4) запишем в виде:

$$\left[h_0 + h_1\alpha + h_2Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + h_3\alpha Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) + h_4\alpha^2 + h_5 \left[Q \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)}\right) \right]^2 \right] \left(\frac{n(f)}{n(f_0)}\right)^2 - \xi Q^2 = 0. \quad (16)$$

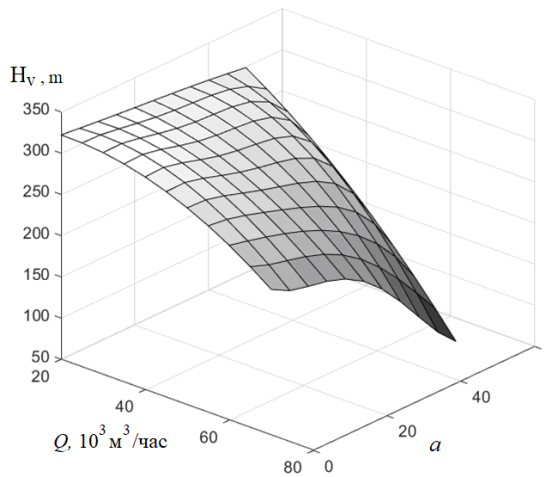


Рис 6 – Восстановленная характеристика напора для дутьевого вентилятора ВДН-17-3.

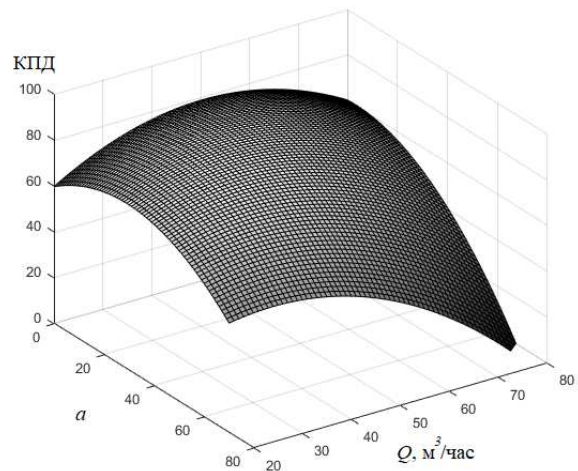


Рис 7 – Восстановленная характеристика КПД для дутьевого вентилятора ВДН-17-3.

Задав значения $\xi = \xi_0$ можно построить график функции $Q = Q(\alpha, f)$, которая соответствует уравнению (16). При задании режима работы центробежного механизма каким-то номинальным расходом $Q = Q_0$, можно построить в этой же системе координат плоскость $Q = Q_0$ (рис. 8). Линия пересечения плоскости $Q = Q_0$ с поверхностью $Q = Q(\alpha, f)$ в параметрическом виде запишется как

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(f); \\ Q = Q_0. \end{cases} \quad (17)$$

Проекция ее на плоскость αOf в виде $\alpha = \alpha(f)$ показана на рис. 9. Данная функция показывает однозначную зависимость угла открытия направляющего аппарата центробежного механизма от частоты питающего напряжения.

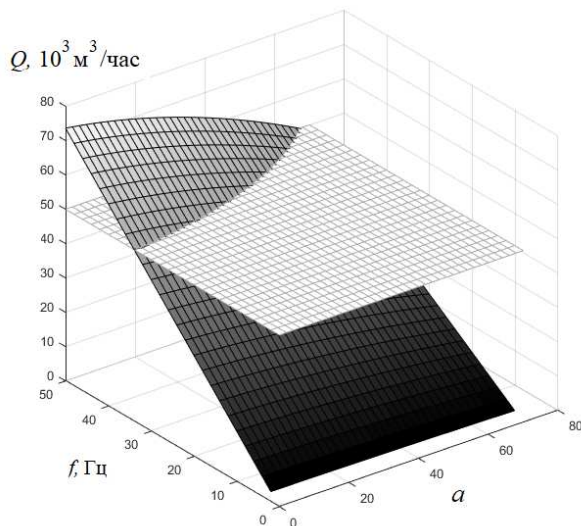


Рис. 8 – Пересечение поверхности $Q = Q(\alpha, f)$ с плоскостью $Q = Q_0$.

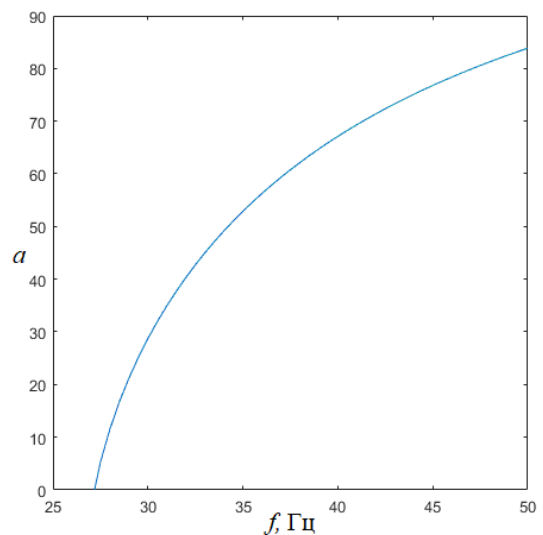


Рис. 9 – Зависимость угла открытия направляющего аппарата от частоты питающего напряжения.

Подставим значения $\alpha = \alpha(f)$ для режима работы центробежного механизма при $\xi = \xi_0$ и $Q = Q_0$ в выражение (15) и получим кривую КПД (рис. 10).

Найдем оптимальную частоту питающего напряжения, решив задачу

$$f^* = \arg \max_{f \in [f_{\min}, f_{\max}]} \left[k_0 + k_1 \alpha(f) + k_2 Q_0 \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)} \right) + h_3 \alpha(f) Q_0 \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)} \right) + k_4 [\alpha(f)]^2 + k_5 \left[Q_0 \cdot \left(\frac{n(f_0)}{n(f)} \right) \right]^2 \right] \quad (18)$$

поиска экстремума функции одной переменной (графическим или аналитическим способом).

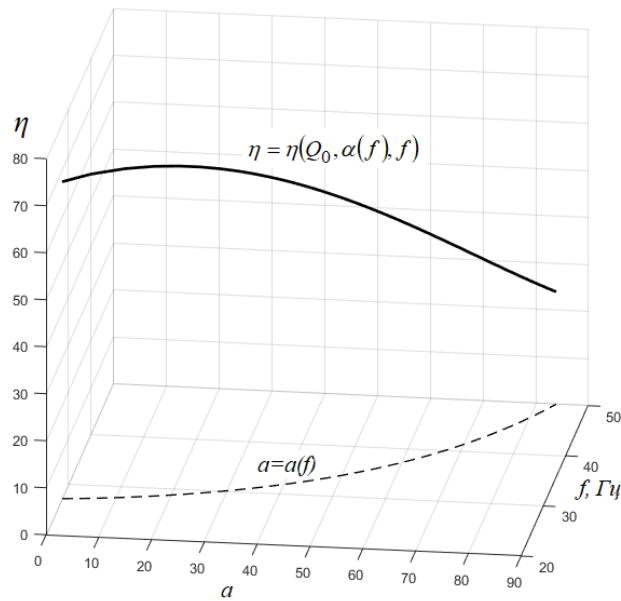


Рис. 10 – КПД системы для режима работы при $\xi = \xi_0$ и $Q = Q_0$.

Нахождение оптимальной частоты для группы вспомогательных механизмов. Рассмотрим работу двух центробежных механизмов (дутьевой вентилятор и дымосос), каждый из которых работает на сеть с эквивалентным гидравлическим сопротивлением при $\xi = \xi_0$ и производительностью $Q = Q_0$. Решим задачи (16 – 18) и построим графики зависимости для КПД обоих механизмов (рис. 11).

Значения КПД механизмов определены в пределах области определения функции (5):

$$D = \left\{ F(f) \in R : f \in [f_{i,\min}, f_0] \right\}, \quad i = 1, 2.$$

При этом зоны определения функций для каждого из механизмов будут не одинаковыми, а следовательно, поиск оптимальной частоты питающего напряжения для группы механизмов будем находить в их общей части значений частот f_1 и f_2 :

$$\begin{cases} D_i = \left\{ F_i(f_i) \in R : f_i \in [f_{i,\min}, f_{i,\max}] \right\}; & i = 1, 2. \\ D_{ep} \in \cap D_i, \end{cases}$$

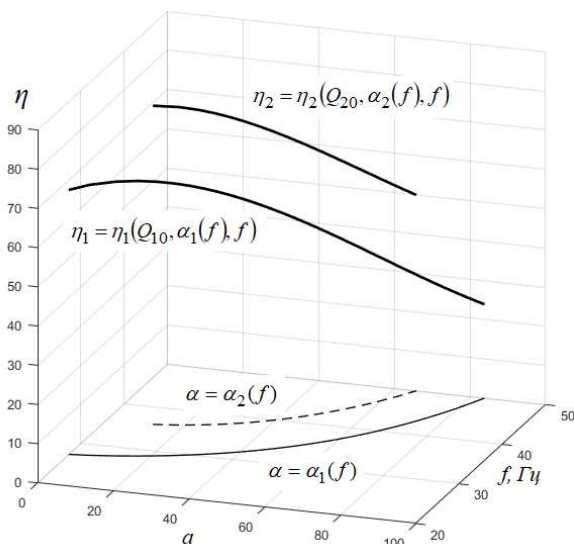


Рис. 11 – КПД механизмов.

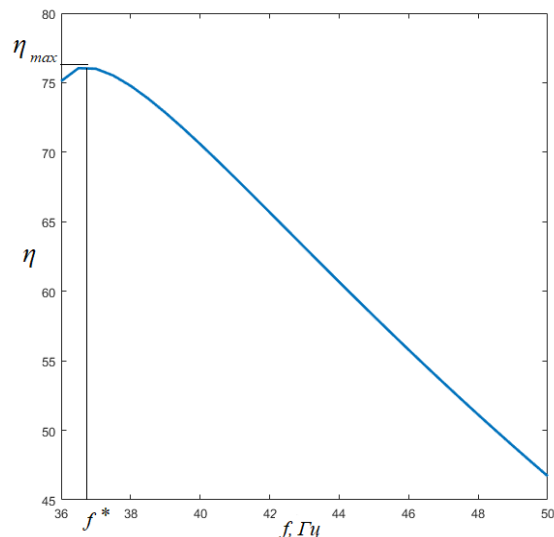


Рис. 12 – Средневзвешенный КПД группы механизмов.

Решим задачу (8) для группы вспомогательных механизмов

$$f^* = \arg \max_{f_{ep} \in D_{ep}} \frac{\sum P_i \eta_i(\alpha_i(f), Q_i, f)}{\sum P_i},$$

где коэффициенты – номинальные мощности электроприводов (либо рассчитаны по формуле [9]):

$$P = \frac{QH}{3600\eta}$$

Средневзвешенный КПД, как функция от частоты питающего напряжения, показан на рис. 12.

Выводы. В статье рассмотрены математические модели центробежных механизмов ТЭС, построенные на основе метода наименьших квадратов и законов подобия для центробежных машин. Показаны наиболее часто встречаемые схемы соединения вспомогательных механизмов в технологических схемах ТЭС.

Разработана математическая модель функционирования системы «центробежный механизм – сеть». Для нее поставлена задача определения оптимальной частоты питающего напряжения, которая обеспечивает максимальный КПД на заданном режиме работы. Также было показано, что угол открытия направляющего аппарата при заданном режиме работы механизма и параметров сети, определяется частотой питающего напряжения.

Также поставлена задача нахождения оптимальной частоты питающего напряжения для группы механизмов собственных нужд, которые питаются от одного частотного преобразователя.

Приведены результаты математического моделирования.

Список литературы

1. Лазуренко А. П., Кругол Н. М. Использование группового регулирования механизмами собственных нужд ТЭС для повышения КПД в летний период // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. : Енергетика: надійність та енергоефективність. – 2014. – № 56(1098). – С. 78 – 82.
2. Ванін В. А., Кругол М. М., Лазуренко О. П. Оптимальне електромеханічне керування гідродинамічними системами // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. Сер. : Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України. – 2018. – № 195. – С. 18 – 20.
3. Лазуренко А. П., Черкашина Г. И., Кругол Н. М. Повышение энергоэффективности работы ТЭС за счет снижения потребления электроэнергии на собственные нужды // Енергетика: економіка, технології, екологія. – 2017. – № 2. – С. 82 – 89.
4. Проданов Л. В., Агапов В. Г. Применение группового частотного регулирования для агрегатов собственных нужд маневренных блоков ТЭС // Енергетика. – 1990. – № 5. – С. 13 – 19.
5. Wang Shuping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinia. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fans and pumps in power plants (CIGRE Sessions 2012, Paris, France, August 26 – 31, 2012). – Режим доступу : https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Pairis%202012/A1/A1_203_2012.pdf. – Дата звертання : 15 лютого 2019 р.
6. Сивокобыленко В. Ф., Павлюков В. А., Талал А. А. Информационно-вычислительная система минимизации расхода электроэнергии на собственные нужды электростанций // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : "Електротехніка і енергетика". – 2000. – № 21. – С. 44 – 47.
7. Проданов Л. В. Определение упрощенного критерия минимальных потерь при регулировании напряжения для заданных групп электродвигателей // Известия высших учебных заведений : Енергетика – 1974. – № 3. – С. 46 – 51.
8. Лазарев Г. Частотно-регулируемый электропривод насосных и вентиляторных установок // Силовая электроника. – 2007. – № 3. – С. 41 – 48.
9. Вахвахов Г. Г. Работа вентиляторов в сети. – М. : Стройиздат, 1975. – 101 с.
10. Рихтер Л. А. Газовоздушные тракты тепловых электростанций. – М. : Энергия, 1969. – 272 с.
11. Горяинов В. Б., Павлов И. В., Цветкова Г. М. Математическая статистика : Учеб. для вузов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.

References (transliterated)

1. Lazurenko A. P., Krugol N. M. Ispol'zovanie gruppovogo regulirovaniya mekhanizmami sobstvennykh nuzhd TEC dlya povysheniya KPD v letniy period [Using thermal power plant own need group regulation mechanism for improving efficiency during summer period]. *Visnik NTU «KhPI»*. Ser. : *Energetyka: nadiynist' ta energoefektyvnist'* [Bulletin of NTU "KhPI". Series : Energy: reliability and efficiency]. 2014, no. 56 (1098), pp. 78–82.
2. Vanin V. A., Krugol M. M., Lazurenko O. P. Optymal'ne elektromekhanichne keruvannya gidrodynamichnyimi systemamy [Optimal electrical and mechanical control of hydrodynamic machines]. *Visnyk Kharkivsk'ogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil'skogo gospodarstva imeni Petra Vasylenka*. Ser. : *Problemy energozabezpechennya ta energozberezhennya v APK Ukrainy* [Bulletin of the P. Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture. Series : Problems of power supply and energy saving in agro-industrial complex of Ukraine]. 2018, no. 195, pp. 18–20.
3. Lazurenko A. P., Cherkashina G. I., Krugol N. M. Povyshenie energoefektivnosti raboty TEC za schet snizheniya potrebleniya elektroenerгии na sobstvennye nuzhdy [Improving thermal power plant efficiency by lowering auxiliary energy consumption]. *Energetyka : ekonomika, tekhnologiyi, ekologiya* [Energetic : economics, technology, ecology]. 2017, no. 2, pp. 82–89.
4. Prodanov L. V., Agapov V. G. Primenenie gruppovogo chastotnogo regulirovaniya dlya agregatov sobstvennykh nuzhd manevrennykh blokov TES [Using group frequency regulation for auxiliary aggregates of thermal power plant maneuverable units]. *Energetika* [Energetic]. 1990, no. 5, pp. 13–19.
5. Wang Shuping, Ye Jiantao, Li Wei, Du Xiaofeng, Chen Zinia. Energy efficiency evaluation investigation on high voltage inverter retrofit for fans and pumps in power plants (CIGRE Sessions 2012, Paris, France, August 26 – 31, 2012). Available at : https://cigreindia.org/CIGRE%20Lib/Cigre%20Pairis%202012/A1/A1_203_2012.pdf (accessed :15.02.19).
6. Sivokobylenko V. F., Pavlyukov V. A., Talal A. A. Informatsionno-vychislitel'naya sistema minimizatsii raskhoda elektroenerгии na sobstvennye nuzhdy elektrostantsiy [Information and computation system for minimizing power plant auxiliary consumption]. *Naukovi pratsi Donets'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu*. Seriya : *Elektrotekhnika i energetyka* [Scientific papers of Donetsk National Technical University. Series : Electrical engineering and energetic]. 2000, no. 21, pp. 44–47.
7. Prodanov L. V. Opredelenie uproshhennogo kriteriya minimal'nykh poter' pri regulirovanii napryazheniya dlya zadannykh grupp elektrodvigatelye [Determining simplified criterion of voltage regulation for given groups of electric motors]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy : Energetika* [Bulletin of Higher Educational Institutions : Energetic]. 1974, no. 3, pp. 46–51.
8. Lazarev G. Chastotno-reguliruemyy elektroprivod nasosnykh i ventilatornykh ustanovok [Variable frequency electric drive of pump and ventilator machines]. *Silovaya elektronika* [Power electronics]. 2007, no. 3, pp. 41–48.
9. Vakhvakhov G. G. *Rabota ventilatorov v seti* [Fan operation in network]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1975. 101 p.
10. Rikhter L. A. *Gazovozdushnye trakty teplovykh elektrostantsiy* [Gas-air tracts of thermal power stations]. Moscow, Energiya Publ., 1969. 272 p.
11. Goryainov V. B., Pavlov G. M., Tsvetkova G. M. *Matematicheskaya statistika : Ucheb. dlya vuzov* [Mathematical statistics : textbook]. Moscow,

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович (Ванин Виктор Антонович, Vanin Viktor Antonovych) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Кругол Микола Михайлович (Кругол Николай Михайлович, Kruhoh Mykola Mykhaaylovych) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: kruhgol@gmail.com.

Лазуренко Олександр Павлович (Лазуренко Александр Павлович, Lasurenko Oleksandr Pavlovych) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-00; e-mail: lazurenkoAP@i.ua.

УДК 519.6

В. А. ВАНИН, С. П. СВЕТЛИЧНЫЙ**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ МЯГКОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ МЕТОДА SPH**

Рассмотрен пример совместного применения программных продуктов ANSYS и LS-DYNA для создания численной модели мягкого тела в случае использования бессеточного метода сглаженных частиц SPH. Используя возможности встроенного в систему ANSYS языка программирования ANSYS Parametric Design Language, реализован алгоритм автоматизированного построения численной модели мягкого тела заданной массы и размеров, которая применяется для численного моделирования фронтального и косого удара.

Ключевые слова: мягкое тело, косой удар, ANSYS Parametric Design Language, бессеточный метод сглаженных частиц, система координат, рабочая плоскость.

В. А. ВАНІН, С. П. СВІТЛИЧНИЙ**ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ПАРАМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ СТВОРЕННЯ ЧИСЕЛЬНОЇ МОДЕЛІ М'ЯКОГО ТІЛА НА ОСНОВІ МЕТОДУ SPH**

Розглянуто приклад спільного застосування програмних продуктів ANSYS і LS-DYNA для створення чисельної моделі м'якого тіла у разі використання безсіткового методу згладжених частинок SPH. Використовуючи можливості вбудованої в систему ANSYS мови програмування ANSYS Parametric Design Language, реалізовано алгоритм автоматизованої побудови чисельної моделі м'якого тіла заданої маси і розмірів, яка застосовується для чисельного моделювання фронтального і косого удару.

Ключові слова: м'яке тіло, косий удар, ANSYS Parametric Design Language, безсітковий метод згладжених частинок, система координат, робоча площина.

V. A. VANIN, S. P. SVETLICHNYI**APPLICATION OF PARAMETRIC MODELING TOOLS FOR CREATION OF NUMERICAL MODEL OF A SOFT BODY USING SPH METHOD**

An example of combined application of ANSYS and LS-DYNA software for creation of numerical model of soft body using meshless smoothed particle hydrodynamics method (SPH) is discussed in the paper. The experience of practical application of the LS-DYNA multipurpose program for solving the problem of numerical simulation of soft body-to-aircraft engine blade contact interaction showed that in the case of using the meshless method of smoothed particles for soft body discretization the process of building a numerical model is not sufficiently automated. A macro containing a set of APDL commands, which allows to create automatically a numerical model of a soft body that contains a set of SPH particles evenly distributed within the volume of a given shape, was developed. The macro allows to determine the dimensions of the soft body of a given density and mass, to define its spatial orientation with respect to the target, as well as to control the distance between SPH particles. Automation of numerical model creation significantly simplifies the process of parametric numerical analysis and reduces the time of model development.

Key words: soft body, oblique impact, ANSYS Parametric Design Language, smoothed-particle hydrodynamics method, coordinate system, working plane.

Введение. В процессе проектирования новых птицестойких лопаток авиационных двигателей, способных выдерживать удар птицы заданной массы без разрушения или повреждений, которые могут существенно сказаться на работоспособности двигателя, необходимо проводить большой объем численных исследований. Применение средств автоматизации при выполнении расчетов позволяет сократить сроки разработки и повысить эффективность процесса численных исследований. В настоящее время в инженерной практике и при проведении научных исследований применяются различные программные комплексы, такие как LS-DYNA, ANSYS, MSC-DYTRAN, Altair Hyper Mesh и др., в которых реализованы различной степени сложности математические модели и численные методы решения. Опыт практического использования многоцелевой программы LS-DYNA для решения задачи численного моделирования контактного взаимодействия мягкого тела с лопаткой авиацион-

ного двигателя показал, что в случае применения бессеточного метода сглаженных частиц для дискретизации мягкого тела процесс построения численной модели недостаточно автоматизирован. Поэтому актуальной практической задачей является задача автоматизации процесса построения численной модели мягкого тела.

Постановка задачи. Данная статья является продолжением работы по численному моделированию контактного взаимодействия мягкого тела с преградой и в ней рассмотрены методологические вопросы, связанные с построением численной модели мягкого тела. Целью работы является сокращение сроков создания численной модели контактного взаимодействия мягкого тела с преградой путем использования возможностей встроенного в систему ANSYS языка программирования ANSYS Parametric Design Language (APDL) [1]. В работе представлены результаты совместного использования программных продуктов ANSYS и LS-DYNA для автоматизации процесса построения численной модели мягкого тела. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. получить функциональные зависимости, связывающие геометрические размеры мягкого тела с его массой и плотностью;

2. разработать и практически реализовать алгоритм построения численной модели мягкого тела.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение и термомеханическое состояние мягкого тела, в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U, \nabla U), \text{ где } U = (\rho, \rho \vec{v}, e, \vec{u})^T, \text{ а } F(U, \nabla U) \text{ – вектор правых частей.}$$

Для преграды система уравнений в векторной форме имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Phi(W, \nabla W, \nabla \nabla W), \text{ где } W = (\rho, \vec{v}, e, \vec{u}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23}, s_{33}).$$

Поведение мягкого тела при ударе описано уравнением состояния:

$$p = C_0 + C_1 \mu + C_2 \mu^2 + C_3 \mu^3.$$

Компоненты тензора напряжений для материала преграды определяются следующими соотношениями:

$$p = K \ln V; s_{ij}^{\nabla} = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{kk} g_{ij}).$$

Для получения единственного решения система уравнений дополнена граничными, контактными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} u = u(x_{\Gamma}^i, t) = 0, X \in \Gamma_1; \sigma_{ij} n_i = 0, X \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3; \\ (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \cdot n_i = 0; (v^+ - v^-) \cdot n_i = 0, \text{ при } x^+ = x^-, X \in \Gamma_4; \\ x(X, 0) = X, \frac{dx}{dt}(X, 0) = v_0, \rho(X, 0) = \rho_0, \end{aligned}$$

где Γ_1 – граница преграды, на которой заданы кинематические граничные условия; Γ_2 и Γ_3 – свободные границы преграды и мягкого тела, на которых заданы силовые граничные условия, в случае отсутствия предварительных напряжений; Γ_4 – общая граница раздела, на которой заданы контактные условия; n – вектор общей нормали к границе раздела сред; ρ_0 и v_0 – плотность и скорость в начальный момент времени.

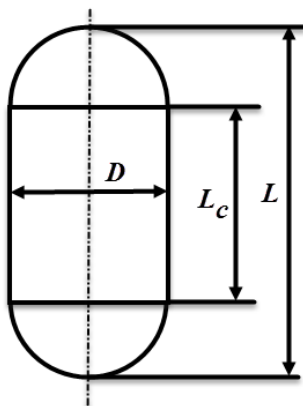


Рис. 1 – Модель мягкого тела.

Далее рассмотрен пошаговый алгоритм построения численной модели мягкого тела, которая применялась при решении задач, описанных в работах [2, 3].

Алгоритм решения задачи. Модель мягкого тела представляет собой цилиндрический объем с закругленными торцами с заданным соотношением длины к диаметру (рис. 1).

Основные размеры модели мягкого тела (длина цилиндрического участка L_c и радиус R) определены из условия равномерного распределения массы со среднестатистическим значением плотности внутри объема:

$$R = \sqrt[3]{\frac{m}{\pi \rho_0 \left[\frac{4}{3} + 2(A-1) \right]}}; L_c = 2R(A-1),$$

где $A = L/D$ – соотношение размеров; m – масса мягкого тела, кг; ρ_0 – плотность мягкого тела, кг/м³.

В случае применения *бессеточного метода сглаженных частиц SPH* численная модель мягкого тела представляет собой дискретный набор подвижных частиц, допускающих произвольную связность между собой. Каждая частица определяется пространственными координатами $x_i(t)$ и массой $m_i(t)$. Для обеспечения корректности аппроксимации и эффективности реализации численного метода функция сглаживания должна удовлетворять ряду требований, среди которых отметим свойство парности, учитывающее симметрию взаимодействия

частиц. Практическая реализация данного свойства заключается в решении задачи о равномерном распределении SPH частиц внутри объема заданной формы. Рассмотрим процедуру автоматического создания SPH частиц для модели в случае косоугольного удара. На рис. 2 показана геометрия и основные размеры модели.

Положение мягкого тела относительно преграды задано двумя параметрами: *offset* – определяет смещение вдоль оси мягкого тела относительно начала глобальной системы координат (CSYS,0) (рис. 3) и *ALP* – угол соударения, то есть угол между лицевой поверхностью преграды и осью симметрии мягкого тела. Значение параметра *offset* выбирается из условия обеспечения зазора между лицевой поверхностью преграды и мягким телом (параметр *gap* = 1 мм).

На рис. 3 показаны положения и ориентация в пространстве осей систем координат, используемых при построении геометрии мягкого тела и преграды, а также для дальнейшей работы по созданию SPH модели мягкого тела.

Первым шагом в реализации алгоритма является построение параллелепипеда с размерами L_c+2R и D (рис. 3), определяющего границы исходной области пространства, в которой равномерно распределены узлы SPH элементов. Отметим, что для построения всех твердотельных примитивов и параллелепипеда в частности используют рабочую плоскость XY, расположенную параллельно осям XY глобальной декартовой системы координат и смещенную относительно нее в направлении Z на величину, равную значению параметра *gap*.

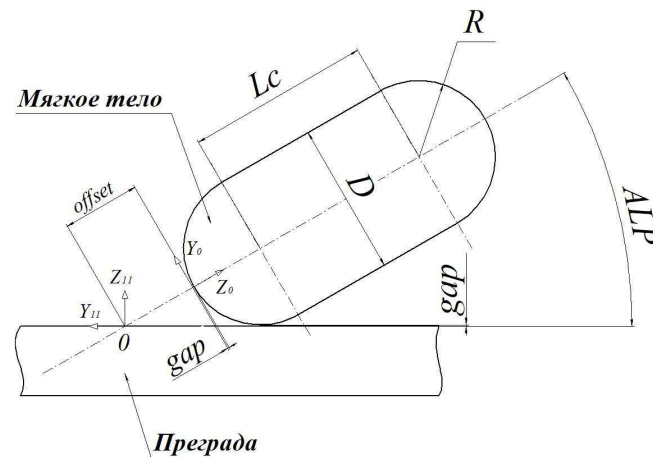


Рис. 2 – Основные размеры модели.

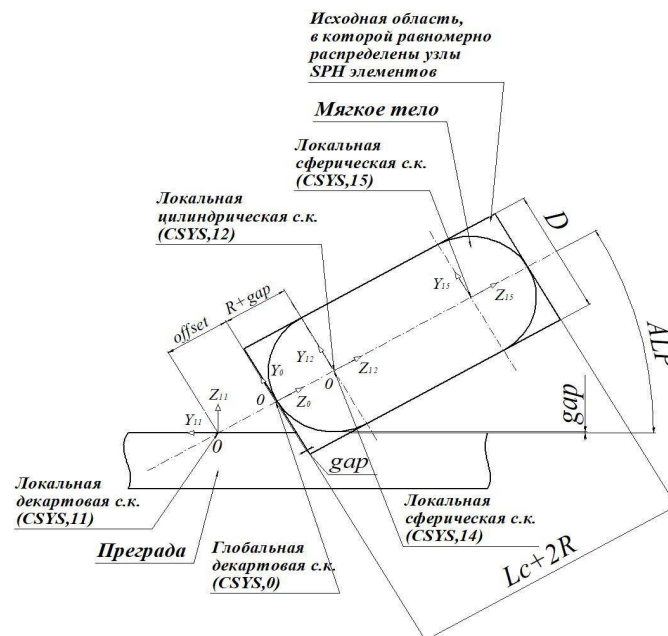


Рис. 3 – Системы координат модели.

Ниже приведен фрагмент программного кода на языке APDL, реализующий описанные действия. В целях удобства каждая командная строка содержит комментарий, поясняющий суть выполняемого действия, а также синтаксис команды с указанием перечня используемых переменных.

/PREP7

***AFUN,deg**

! Размеры мягкого тела, моделирующего птицу

! Вход в препроцессор

! Единицы измерения угловых величин – градусы

L=0.1318	! Длина цилиндрической части мягкого тела, м
R=0.0549	! Радиус мягкого тела, м
gap=1e-3	! Зазор между мягким телом и лицевой поверхностью преграды, м
offset=0.0569	! Смещение, м
ALP=30	! Угол соударения, град.
N_R=20	! Количество элементов в радиальном направлении
N_L=44	! Количество элементов в осевом направлении
! Построение геометрии мягкого тела	
WPOFSS,,,gap	! Смещение рабочей плоскости вдоль оси Z
BLOCK,-R,R,-R,R, 0,L+2*R	! Создание параллелепипеда

Следующим этапом является создание конечно элементной модели путем разбиения исходной геометрии на конечные элементы с одинаковым размером граней. Поскольку в системе ANSYS не реализован бессеточный метод SPH, то для разбиения исходной геометрии мягкого тела используем элемент твердого деформируемого тела **SOLID64** [4]. Для управления процессом дискретизации конечноэлементной сетки используем два параметра: **N_R** и **N_L**. Шаг дискретизации сетки задается путем разбиения выбранных линий на соответствующее количество сегментов. Для выбора линий используем функции логического выбора объектов модели. В качестве критерия выбираем длину линии.

! Построение конечно элементной сетки	
ET,1,SOLID164	! Выбор типа КЭ – SOLID164
! Задание шага дискретизации сетки	
WPCSYS,1,0	
WPROTA,,-90+ALP	! Положение рабочей плоскости совпадает с осями XY глобальной декартовой системы координат
WPOFSS,,, -OFFSET+GAP	! Поворот рабочей плоскости вокруг оси X на указанный угол
CSWPLA,11,0	! Смещение рабочей плоскости вдоль оси Z
	! Создание локальной декартовой системы координат с номером 11, начало координат которой совпадает с текущим положением рабочей плоскости
VSEL,S,LOC,Z,GAP,2*R+L+GAP	! Выбор созданного ранее параллелепипеда. В качестве критерия используем выбор по координате Z , определяющей область пространства, внутри которого расположено выбираемое тело
	! Создание группы с именем BIRD
CM,BIRD,VOLU	! Выбор всех поверхностей, принадлежащих выбранному телу
ASLV,S	! Выбор всех линий, ограничивающих выбранные поверхности тела
LSLA,S	! Выбор линий заданной длины среди выбранного набора линий
LSEL,R,LENGTH,,R	! Задание количества разбиений выбранных линий
LESIZE,ALL,,,N_R/2	
ASLV,S	
LSLA,S	
LSEL,R,LENGTH,,2*R+L	! Выбор линий заданной длины среди выбранного набора линий
LESIZE,ALL,,,N_L	! Задание количества разбиений выбранных линий
CSYS,0	! Активная система координат – глобальная декартовая система координат.
CMSEL,S,BIRD	! Выбор объекта с именем BIRD
VATT,2,,1	! Задание атрибутов: модель материала с номером 2, тип элемента с номером 1
VMESH,ALL	! Построение конечноэлементной сетки

Следующим шагом реализации рассматриваемого алгоритма является получение на основе построенной конечноэлементной сетки набора узлов, которые с равномерным шагом заполняют цилиндрический объем с закругленными в виде сфер торцами (рис. 4).

CDWRITE,db,MESH,cdb	! Запись информации, хранящейся в базе данных, в файл MESH.cdb
finish	! Выход из процессора
/CLEAR,START	! Отчистка базы данных

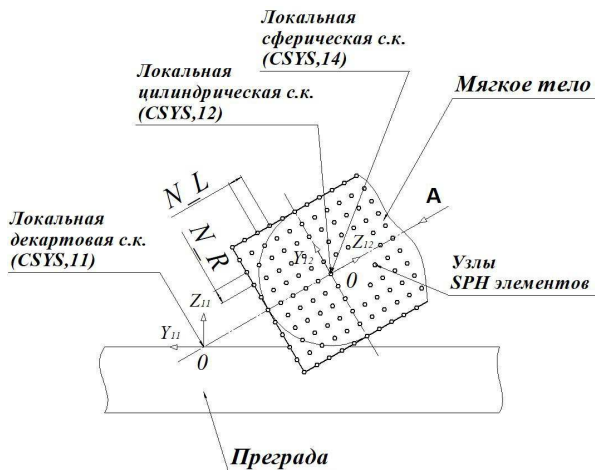
/INPUT,MESH,cdb
ESEL,S,MAT,,2
NSLE,S

/PREP7
EDELE,all
WPCSYS,1,0

WPOFFS,,,GAP+R
CSWPLA,12,1

ALLS
NSLE,S,ALL

NSEL,INVE



! Чтение информации из файла MESH.cdb
! Выбор элементов с номером материала 2
! Выбор узлов, принадлежащих выбранным элементам
! Вход в препроцессор
! Удаление выбранных элементов
! Положения рабочей плоскости совпадает с осями XY глобальной декартовой системы координат
! Смещение рабочей плоскости вдоль оси Z
! Создание местной цилиндрической системы координат с номером 12
! Активизация всех объектов модели
! Выбор всех узлов, принадлежащих выбранным элементам
! Инверсия выбранных узлов

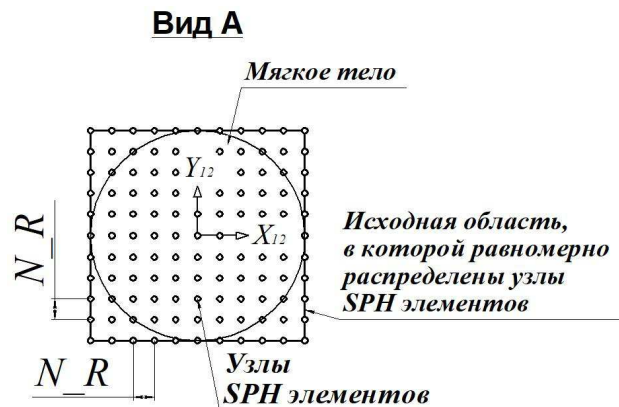


Рис. 4 – Набор узлов для создания SPH элементов.

NSEL,R,LOC,X,,R-R/N_R

NSEL,INVE
NSLE,U,ALL

NDELE,ALL
ALLS
NSLE,S,ALL

NSEL,INVE
CSWPLA,14,2

NSEL,R,LOC,X,0,R

NSEL,INVE
CSYS,0

NSEL,R,LOC,Z,GAP,R+GAP

NSLE,U,ALL
CSYS,12

NSEL,R,LOC,X,0,2*R
NDELE,ALL
ALLS
NSLE,U,ALL
WPOFFS,,,L

! Выбор узлов по координате. Данная команда выбирает все узлы, лежащие внутри цилиндра заданного радиуса
! Инверсия выбранных узлов
! Деактивация выбора узлов, принадлежащих элементам, моделирующим преграду
! Удаление всех активных (выбранных) узлов
! Активизация всех объектов модели
! Выбор всех узлов, принадлежащих элементам, моделирующим преграду
! Инверсия выбранных узлов
! Создание локальной сферической системы координат с номером 14
! Выбор узлов, расположенных внутри сферы заданного радиуса
! Инверсия выбранных узлов
! Активная система координат – глобальная декартовая система координат
! Выбор узлов по координате Z, расположенных в зоне нижнего сферического оголовка
! Активная система координат – локальная цилиндрическая система координат с номером 12
! Выбор узлов по координате X
! Удаление всех активных (выбранных) узлов
! Смещение рабочей плоскости вдоль оси Z

CSWPLA,15,2

NSEL,R,LOC,X,0,R

NSEL,INVE

CSYS,0

NSEL,R,LOC,Z,GAP+L+R,2*R+L+GAP

NSLE,U,ALL

NDELE,ALL

ALLS

NSLE,U,ALL

*GET,NUM_MAX,node,0,num,max

*GET,NUM_Min,node,0,num,min

et,3,166

r,4,1/num_Max

*do,i,num_min,num_max

type,3

real,4

STATUS=NSEL(i)

*IF,STATUS,NE,1,CYCLE

e,i

*enddo

! Удаление одиночных элементов и узлов в верхушках сфер

ESEL,S,TYPE,,3

NSLE,S,ALL

CSYS,0

NSEL,R,LOC,Z,GAP

ESLN,S

EDELE,ALL

NDELE,ALL

ESEL,S,TYPE,,3

NSLE,S,ALL

CSYS,0

NSEL,R,LOC,Z,GAP+L+2*R

ESLN,S

EDELE,ALL

NDELE,ALL

ALLS

NUMCMP,ALL

! Создание локальной сферической системы координат с номером 15

! Выбор узлов, расположенных внутри сферы заданного радиуса

! Удаление всех активных (выбранных) узлов

! Функция, определяющая максимальный номер из набора выбранных узлов

! Функция, определяющая минимальный номер из набора выбранных узлов

! Выбор типа КЭ – 3-D массовый элемент

! Задание реальных констант элемента – масса элемента

! Начало цикла. Параметр i – номер узла

! Определение типа элемента – массовый элемент

! Определение номера реальных констант – 4

! Определение статуса узла: -1 -узел не выбран, 0 - неопределен, 1 - узел выбран

! Проверка условия выбора узла: если узел выбран, то на его месте создаем элемент

! Построение элемента по его узлу

! Конец цикла

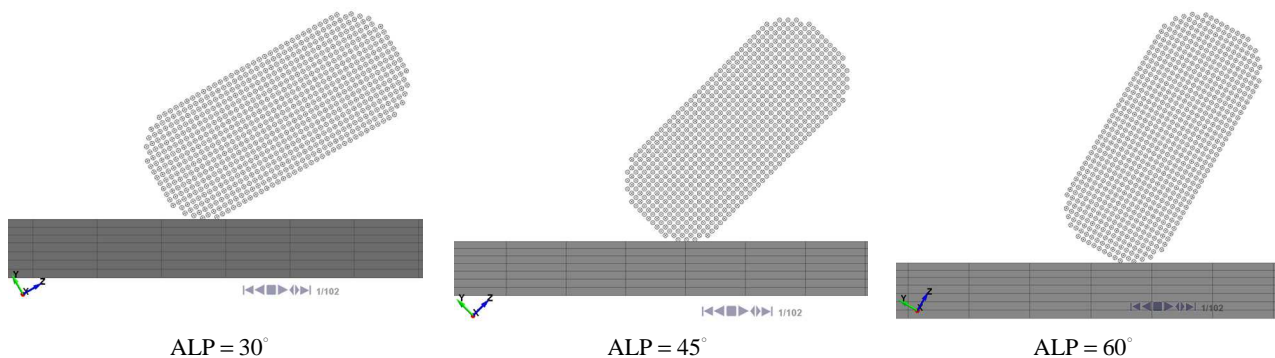


Рис. 5 – Численная модель мягкого тела в случае косоугольного удара, метод SPH.

В результате выполнения описанных выше команд получаем k – файл, который импортируем в систему LS-DYNA, где путем добавления соответствующих карт (*PART, *SECTION, *MAT_ELASTIC, *MAT_NULL, *EOS_LINEAR_POLYNOMIAL, *SET_NODE, *BOUNDARY_SPC, *INITIAL_VELOCITY,

*CONTACT_AUTOMATIC_NODES_TO_SURFACE, *CONTROL_SPH, *CONTROL_TERMINATION) [5], завершаем процесс создания численной модели контактного взаимодействия мягкого тела с преградой.

Результаты численного моделирования. Выполнена апробация работы макроса и построены численные модели мягкого тела, которые применялись для численного исследования контактного взаимодействия мягкого тела с преградой в случаях косоугольного и фронтального удара. На рис. 5 показана модель мягкого тела массой 1,8 кг и плотностью 930 кг/м^3 при различных значениях угла соударения. Длина мягкого тела принята равной 240 мм, а его диаметр 110 мм, при этом соотношение длины к диаметру принято равным 2,2. Количество SPH частиц в модели – 11151. В данном случае в качестве варьируемого параметра выбран угол соударения (параметр ALP).

На рис. 6 показана модель мягкого тела массой 1 кг и плотностью 950 кг/м^3 в случае фронтального удара $ALP = 90^\circ$. Длина мягкого тела принята равной 186 мм, а его диаметр 93 мм, при этом соотношение длины к диаметру принято равным 2.

В данном случае в качестве варьируемого параметра выбран шаг дискретизации по пространственным переменным N_R и N_L .

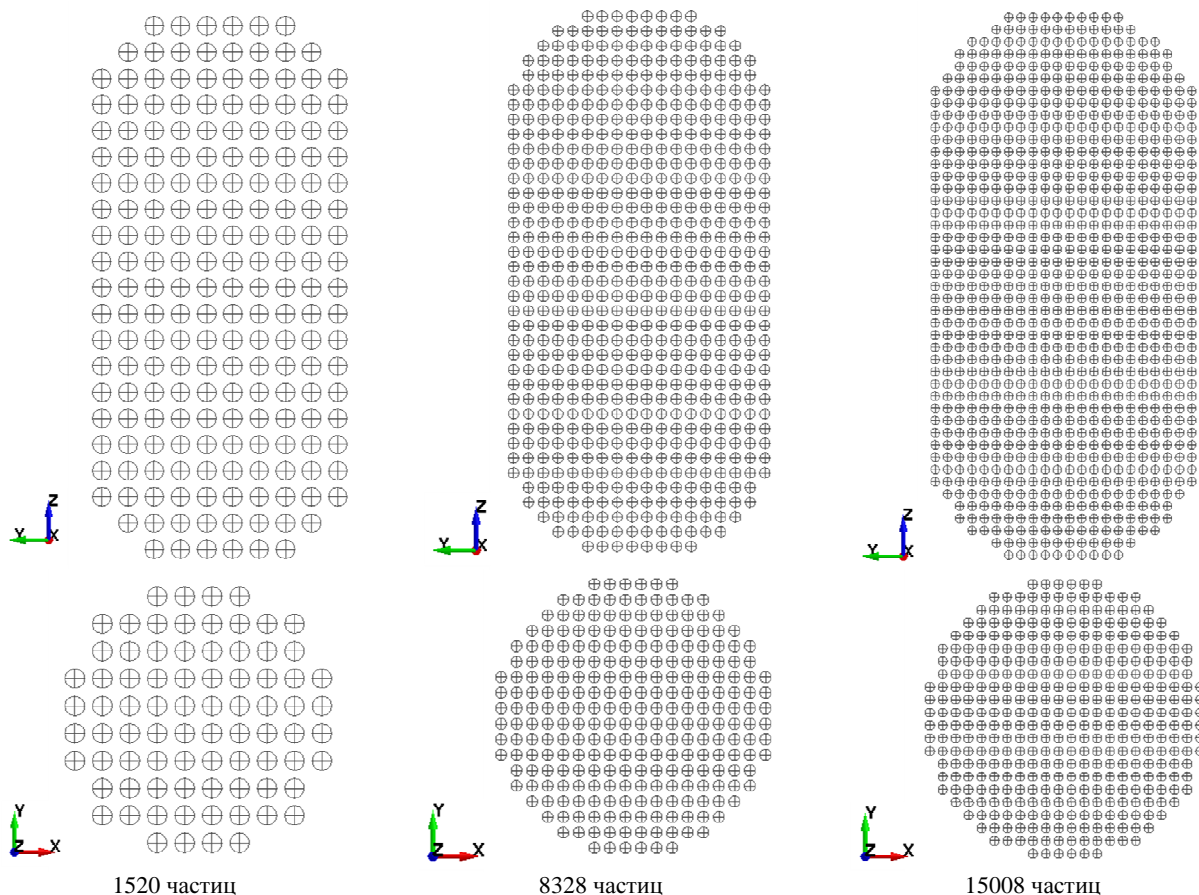


Рис. 6 – Численная модель мягкого тела в случае фронтального удара, метод SPH.

Результаты проведенного тестирования работы макроса показали его корректную работу, что позволило успешно применять созданный макрос при проведении многопараметрических численных исследований. Это в свою очередь позволило существенно облегчить процесс исследований и сократить время их проведения.

Выводы. Таким образом, в данной работе успешно реализован алгоритм автоматизированного построения численной модели мягкого тела в случае применения бессеточного метода сглаженных частиц. Разработан макрос, содержащий набор команд на языке APDL, позволяющий в автоматическом режиме создавать численную модель мягкого тела, состоящую из набора SPH частиц, равномерно распределенных внутри объема заданной формы. Макрос позволяет определять размеры мягкого тела по заданной плотности и массе, задавать его ориентацию в пространстве по отношению к преграде, а также управлять шагом распределения SPH частиц.

Список литературы

1. ANSYS Mechanical APDL User's Guide. Command Reference. Release 15.0 - SAS IP, Inc. – 2013. – 1858 с.
2. Светличный С. П. Анализ деформаций стальной плиты-мишени при ударе мягкого тела // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. Сб. научн. тр. нац. аэрокосмического ун-та им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт». – Х.: ХАИ, 2017. – Вып. 77. – С. 73 – 80.
3. Ванин В. А., Светличный С. П. Численное исследование взаимодействия тушки птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного

методов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – №16 (1188). – С. 5 – 15.

4. LS-DYNA Theory manual. Compiled by J. O. Hallquist. – Livermore Software Technology Corporation, 2006. – 680 p.
5. LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 971. – Livermore : LSTC, 2006. – 2102 c.

References (transliterated)

1. ANSYS Mechanical APDL User's Guide. Command Reference. Release 15.0. SAS IP, Inc., 2013. 1858 p.
2. Svetlichnyy S. P. Analiz deformatsiy stal'noy plity-misheni pri udare myagkogo tela [Analysis of deformation of steel target plate under soft body impact]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannyye tekhnologii.: Sb. nauch. tr. nats. aerokosmicheskogo un-ta im. N. E. Zhukovskogo "Kharkovskiy aviatsionnyy institut"* [Open information and computer integrated technologies. Collection of scientific papers of N. Ye. Zhukovskiy National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute"]. Kharkov, KhAI Publ., 2017, vol. 77, pp. 73–80.
3. Vanin V. A., Svetlichnyy S. P. Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya tushki ptitsy s pregradoy na osnove setochnogo i bessetochnogo metodov [Numerical study of bird carcass to obstacle interaction using grid-based and gridless methods]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 5–15.
4. LS-DYNA Theory manual. Compiled by J. O. Hallquist. Livermore Software Technology Corporation, 2006. 680 p.
5. LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 971. Livermore, LSTC, 2006. 2102 p.

Поступила (received) 12.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович (Ванин Виктор Антонович, Vanin Viktor Antonovych) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: plbvva5652xpi@gmail.com.

Світличний Сергій Петрович (Светличный Сергей Петрович, Svetlichnyy Sergey Petrovich) – старший викладач, Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (099) 632-88-54; e-mail: spp.kharkov@gmail.com.

УДК 539.3

В. О. ВАХНЕНКО

БЛУКАЮЧА ХВИЛЯ В ГОМОКЛІННОМУ ПІДХОДІ

Розглядається гомокліний підхід для знаходження розв'язків рівняння Вахненка-Паркеса. Гомокліна тестова функція дає можливість знайти бризерні розв'язки. Обговорюється питання переходу бризерних розв'язків у блукаючу хвилю. Відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійно фізичних системах, таких як плазма, Бозе-Ейнштейнівський конденсат, нелінійна оптика, гідродинаміка. Дослідження блукаючої хвилі вказує на те, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність. Таким чином, вивчення бризерних хвиль, зокрема блукаючих хвиль, набуває важливого значення з точки зору їх взаємодії з іншими збуреннями, що вже вивчені для рівняння, що аналізується.

Ключові слова: нелінійні еволюційні рівняння, рівняння Вахненка, гомокліний метод, бризер.

В. А. ВАХНЕНКО

БЛУЖДАЮЩАЯ ВОЛНА В ГОМОКЛИННОМ ПОДХОДЕ

Рассматривается гомоклиный подход для нахождения решений уравнения Вахненко-Паркеса. Гомоклиная тестовая функция дает возможность найти бризерные решения. Обсуждается вопрос перехода бризерных решений в блуждающую волну. Известно, что блуждающие волны возникают не только в океане, но также и в нелинейных физических системах, таких как плазма, Бозе-Ейнштейновский конденсат, нелинейная оптика, гидродинамика. Исследования блуждающей волны указывают на то, что она возникает из ниоткуда и исчезает бесследно. Амплитуда таких волн значительно превышает амплитуду известных волн. Решения для блуждающих волн указывают на локализацию волн как в пространстве, так и во времени. Таким образом, изучение бризерных волн, в частности блуждающих волн, приобретает важное значение с точки зрения их взаимодействия с другими возмущениями, что уже изучены для анализируемого уравнения.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, уравнение Вахненко, гомоклиный метод, бризер.

V. O. VAKHNENKO

THE ROGUE WAVE IN A HOMOCLINIC APPROACH

The homoclinic approach is considered to find solutions for the Vakhnenko-Parkes equation. The homoclinic test function enables one to obtain the breather solutions. The transformation of breather solution into rogue wave solution is discussed. It is known that rogue waves arise not only in the ocean, but also in nonlinearly physical systems such as plasma, Bose-Einstein condensate, nonlinear optics, hydrodynamics. The study of the rogue wave indicates that these waves appear from nowhere and disappears without a trace. The amplitude of this wave exceeds the amplitude of the known waves. The solutions for rogue waves point at the localization of waves both in space and in time. These imply their unpredictability. Thus, the study of breather waves, in particular rogue waves, for the Vakhnenko-Parkes equation becomes important with respect to interaction of these waves with other perturbations that have already been studied for the analyzed equation.

Key words: nonlinear evolution equations, the Vakhnenko equation, homoclinic method, breather.

© В. О. Вахненко, 2019

Вступ. Дослідження точних розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь відіграють значну роль у вивченні фізичних явищ. Низка фізичних задач приводить до рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation (VE)):

$$(u_t + uu_x)_x + u = 0, \quad (1)$$

яке однозначно пов'язане з рівнянням Вахненка – Паркеса (the Vakhnenko – Parkes equation (VPE))

$$W_{xxt} + (1 + W_T)W_x = 0 \quad (2)$$

через перетворення незалежних змінних [1 – 5]. Зокрема, для нелінійної оптики рівняння VE було отримано в роботі [4] під час дослідження гранично коротких імпульсів, коли не мають сенсу поняття звичайної і незвичайної хвилі. В той же час в роботі [5] рівняння VE одержано при дослідженні розповсюдження гранично коротких імпульсів в умовах двопробеневого заломлення, яке наведене паралельними електричним і магнітним полями. Розв'язки рівняння VE, в тому числі *періодичні* і *однопетлеві розв'язки*, були отримані в роботі [2]. Також в цій роботі були знайдені *двопетлеві розв'язки*. Важливою особливістю цих розв'язків є те, що вони утримують властивість структурної стійкості, так само, як і *солітонні розв'язки нелінійних рівнянь*, що інтегруються *методом оберненої задачі розсіяння* (ОЗР). Як відомо, визначальна властивість таких нелінійних рівнянь полягає в можливості їх представити у вигляді умови сумісництва перевизначеної системи лінійних рівнянь (*пара Лакса*).

Аналіз останніх досліджень. За допомогою *методу Хіроті*, який тісно пов'язаний з методом ОЗР, з врахуванням змінення незалежних змінних (перехід в інші координати) в [6, 7] побудовані двопетлеві та багатопетлеві розв'язки рівняння VE, які також утримують властивість *солітонів*. Ця властивість явно вказує на інтегрованість VE методом ОЗР. Крім того, інтегрованість рівняння VE була доведена в роботі [8], де було показано, що воно пов'язане з рівнянням Цицгейка [9 – 12], (інколи цитується як *рівняння Додда – Буллафа* [13]). *Перетворення Беклунда* і пара Лакса для рівняння VPE наводяться в [18]. В той же час, так звані *бризерні розв'язки* для рівняння VE були знайдені тільки в роботі [5]. В цій роботі формули (63), (85) – (88) визначають параметрично 1-бризерний розв'язок рівняння VE. Графіки 1-бризерного розв'язку для деяких значень параметрів, які взяті з роботи [5], подані на рис. 1.

Таким чином в [5] доведено, що обмежений 1-бризерний розв'язок рівняння VE являється неоднозначним при довільних значеннях своїх параметрів. Як показало дослідження в роботі [5], умову однозначності задовольняють тільки скінченнозонні розв'язки, що відповідають періодичним стаціонарним розв'язкам скалярної версії VE.

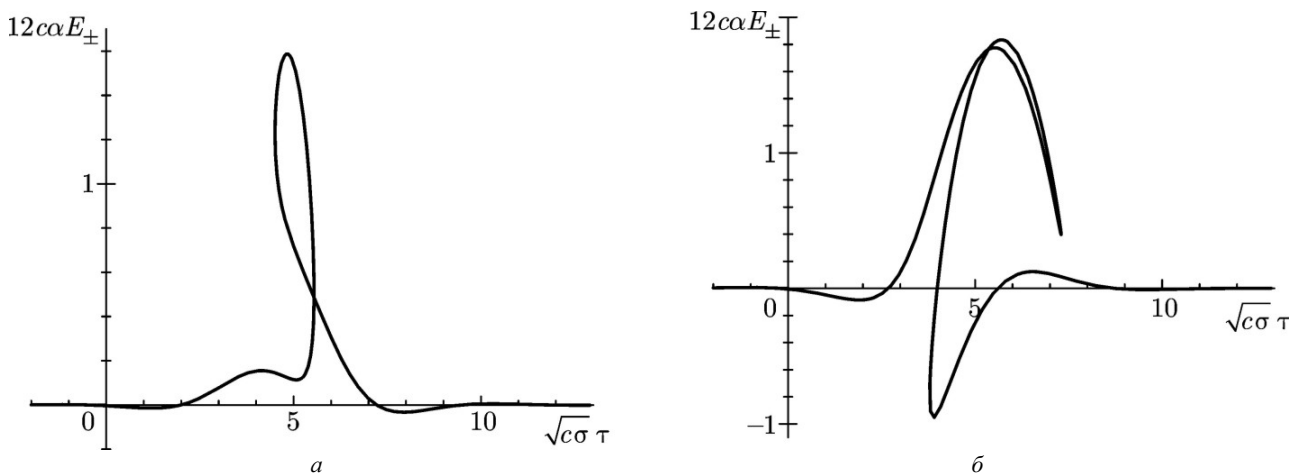


Рис. 1 – Бризерні розв'язки для VE з [5].

Постановка задачі. Звертаємо увагу, що для рівняння VPE (2) досліджено тільки випадок полюсів у зв'язаній (дискретній) частині спектру, а також подібний (в математичному сенсі) сингулярний спектр, що утримує δ – функції у неперервній частині спектру [18 – 21]. Нам вдалося дослідити не тільки прості полюси, якими, як правило, обмежені відомі дослідження, а також полюси другого порядку [22, 23].

Все ж таки, в недавніх дослідженнях [24] знайдені розв'язки для VPE (відмітимо, що не методом ОЗР) не вдається звести до розв'язків, що відповідають дослідженим на цей час спектральним даним. Розглянемо *гомоклінний підхід* [14 – 17] та застосуємо його до VPE.

Результати дослідження. Рівняння VPE (2) потрібно переписати у білінійній формі Хіроті [18]

$$(D_X^3 D_T + D_X^2) f \cdot f = 0 \quad (3)$$

через W , що визначається як $W_X = u$, $W = 6(\ln f)_X$. Білінійний оператор похідної D_X , D_T був запропонований Хіртою

$$D_X^m D_T^n f(X, T) \cdot g(X, T) = \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'} \right)^n \left(f(X, T) g(X', T') \right) \Big|_{X'=X, T'=T}. \quad (4)$$

Виконуються співвідношення

$$\left(D_x^3 D_T\right) f \cdot f = 2(f_{xxx} f - 3f_{xxt} f_x + 3f_{xt} f_{xx} - f_{xxx} f_T), \quad \left(D_x^2\right) f \cdot f = 2(f_{xt} f - f_x f_T). \quad (5)$$

Розв'язуючи початкове рівняння (2) через гомоклінну функцію, яка подається у вигляді

$$f(X, T) = \exp[-p_1(X - w_1 T)] + c_1 \cos[p_2(X + w_2 T)] + c_2 \exp[p_1(X - w_1 T)] \quad (6)$$

можемо отримати співвідношення між p_i, c_i, w_i для $i=1, 2$. Підстановка функції (6) в рівняння (3), враховуючи (5), дає співвідношення, в якому, прирівнявши коефіцієнти при

$$\exp[jp_1(X - w_1 T)], \quad j = -1, 0, +1, \quad \cos[p_2(X + w_2 T)], \quad \sin[p_2(X + w_2 T)]$$

до нуля, отримуємо співвідношення для p_i, c_i, w_i для $i=1, 2$. Якщо визначальними змінними вважати p_1, p_2, c_1 , тоді згідно з [25] маємо функціональні залежності для інших змінних

$$w_1 = w_2 = \left(p_2^2 + p_1^2\right)^{-1}, \quad c_2 = -c_1 \frac{p_2^2(-3p_2^2 + p_1^2)}{4p_1^2(3p_1^2 - p_2^2)}. \quad (7)$$

Таким чином, гомоклінна тестова функція дає можливість знайти розв'язки VPE, зокрема, бризерні розв'язки. На рис. 2 поданий графік бризера.

В граничному випадку наведені розв'язки переходять у блукаючу хвилю (інколи її ще називають як величезна хвиля, *хвиля-вбивця* (rogue wave або huge wave)). Значні зусилля було прикладено, щоб зрозуміти та вивчити природу утаємниченого явища, яким вважається блукаюча хвиля. Зараз відомо, що блукаючі хвилі виникають не тільки в океані, але також і в нелінійно фізичних системах, таких як плазма [26], *Бозе – Ейнштейнівський конденсат* [27], нелінійна оптика [28 – 31], гідродинаміка [32 – 35]. Дослідження блукаючої хвилі вказує, що вона виникає нізвідки та дисипує безслідно [36]. Амплітуда таких хвиль значно перевищує амплітуду відомих хвиль. Розв'язки для блукаючих хвиль вказують на локалізацію хвиль як в просторі, так і в часі. Це зумовлює їх непередбачуваність.

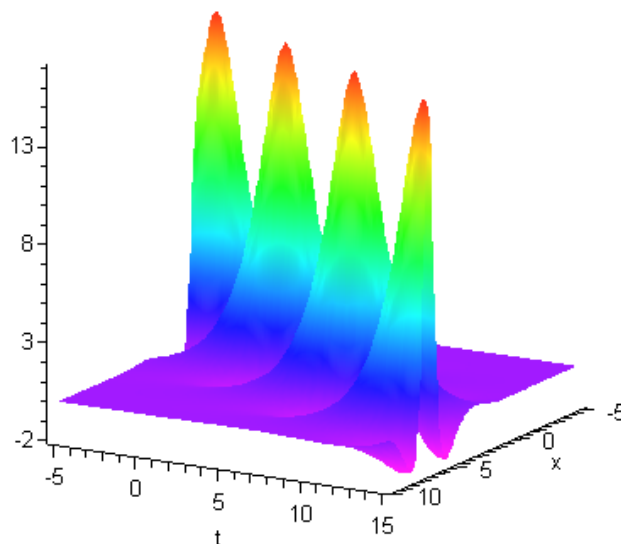


Рис. 2 – Бризерні хвилі для VPE з $p_1 = 0.95, p_2 = 1.23, c_1 = 0.5$.

Розв'язок (6) з (7) не вдається записати у вигляді

$$f = 1 + a_1 \exp(\theta_1) + a_2 \exp(\theta_2) + a_3 \exp(\theta_3) + b_{12} a_1 a_2 \exp(\theta_1 + \theta_2) + b_{23} a_2 a_3 \exp(\theta_2 + \theta_3) + b_{13} a_1 a_3 \exp(\theta_1 + \theta_3) + b_{23} a_2 a_3 \exp(\theta_2 + \theta_3) + b_{12} b_{13} b_{23} a_1 a_2 a_3 \exp(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (8)$$

З $\theta_i = \xi_i X + \frac{1}{\xi_i} T$, a_i – сталі, $b_{ij} = \frac{(a_i - a_j)^2 a_i^2 + a_j^2 - a_i a_j}{(a_i + a_j)^2 a_i^2 + a_j^2 + a_i a_j}$ – однозначні відомі залежності від a_i, ξ_i – величини

зі спектральних даних. Причому для зв'язаного спектру $\text{Im}(\xi_i) = 0$, а для неперервного спектру $\text{Re}(\xi_i) = 0$.

Таким чином, з'ясувалось, що розв'язок для (6), (7) [25] не може бути зведений до спектру тільки полюсів у зв'язаному спектрі та δ – функцій у неперервному спектрі. Саме такі спектри та розв'язки для цих спектрів нами були раніше вивчені [19 – 21].

Тут доречно звернутися до досліджень рівняння KdV. Дослідження, що пов'язані з скінченнозонними розв'язками для KdV, вказують на суттєве розширення класу можливих розв'язків. Для скінченнозонних розв'язків KdV одержано формули через θ – функції Римана [37 – 39].

Тут ми звертаємо увагу на співвідношення (4). Ось в чому ключове твердження: для (2) складна залежність розв'язку від координат та часу можливо може бути подібною до співвідношень для розв'язків KdV, отриманих для скінченнозонних потенціалів.

Скінченнозонні розв'язки пов'язані з рімановими поверхнями, що виникають як важливий атрибут в підході Рімана – Гільберта. В [40] стверджується, що ріманова поверхня відіграє таку ж саму роль для скінченнозонних розв'язків, що і спектр для початкової задачі (мається на увазі спектр в методі ОЗР).

В [41 – 43] розвивається підхід Рімана – Гільберта для VE, який базується на парі Лакса. Цей підхід дав можливість оперувати реальними, в фізичному сенсі, змінними так, що початкові дані є функціями фізичних координат, які еволюціонують з часом. Особливим результатом, отриманим в цих роботах, можна вважати, що в розвинутому підході вдалося отримати довгочасову асимптотику розв'язків задачі Коши.

Висновки. Відкритим залишається питання про встановлення спектру для бризерного розв'язку [5, 24]. З'ясування цього питання дало б можливість проаналізувати гомокліний метод [11], за допомогою якого знайдені бризерні розв'язки, з точки зору ОЗР.

Який з підходів: чи підхід Рімана – Гільберта, пов'язаний з *поверхнею Рімана*, чи, можливо, підхід, в якому потрібно розглядати скінченнозонні потенціали, виявиться більш придатним? З вирішенням цього питання ми пов'яжемо можливості дослідження взаємодії солітонів, бризерів та періодичних хвиль.

Таким чином, зрозуміло, що вивчення бризерних хвиль, зокрема блукаючих хвиль, для рівняння VE (або VPE) набуває важливого значення з точки зору їх взаємодії з іншими збуреннями, які вже вивчені для VE.

Список литературы

1. Hunter J. K. Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations // Lectures in Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 26. – P. 301 – 316.
2. Vakhnenko V. A. Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A : Math.Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 4181 – 4187.
3. Kraenkel R. A., Leblond H., Manna M. A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water // J. Phys. A : Math. Theor. – 2014. – Vol. 47. – No. 2. – P. 025208 (17p).
4. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Extremely short vector solitons under the conditions of conical refraction // JETP Letters. – 2014. – Vol. 99, no. 9. – P.503 – 507.
5. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Nonlinear Propagation of Vector Extremely Short Pulses in a Medium of Symmetric and Asymmetric Molecules // JETP. – 2017. – Vol. 124, no. 2. – P. 213 – 230.
6. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. – 1998. – Vol.11. – P.1457 – 1464.
7. Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O. The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation // Nonlinearity. – 1999. – Vol. 12. – P. 1427 – 1437.
8. Manna M. A., Neveu A. Short-wave dynamics in the Euler equations // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 855 – 861.
9. Tzitzéica G. Sur une nouvelle classe de surfaces // Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris. – 1907. – Vol. 144. – P. 1257 – 1259.
10. Dodd R. K., Bullough R. K. Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations // Proc. Roy. Soc. London. – 1976. – Ser. A 351. – P. 499 – 523.
11. Жибер А. В., Шабам А. Б. Уравнения Клейна – Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – No. 5. – С. 1103 – 1107.
12. Mikhailov, A.V. Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain // JETP Letters. – 1979. – Vol. 30, no. 7. – P. 414 – 418.
13. Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. – London et al.: Academic Press, 1982. – 630 p.
14. Dai Z. D., Jiang M. R., Dai Q. Y., Li S. L. Homoclinic bifurcation for the Boussinesq equation with even constraints // Chin. Phys. Lett. – 2006. – Vol. 23. – No. 5. – P. 1065 – 1067.
15. Dai Z. D., Liu Z. J., Li D. L. Exact periodic solitary-wave solutions for the KdV equation // Chin. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 25. – No. 5. – P. 1531 – 1533.
16. Dai Z. D., Liu J., Zeng X. P., Liu Z. J. Periodic kink-wave and kinky periodic-wave solutions for the Jimbo–Miwa equation // Phys. Lett. A. – 2008. – Vol. 372. – No. 38. – P. 5984 – 5986.
17. Dai Z. D., Song L., Fu H., Zeng X. Exact three wave solutions for the KP equation // Appl. Math. Comput. – 2010. – Vol. 216. – No. 5. – P. 1599 – 1604.
18. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Approach in theory of nonlinear evolution equations : the Vakhnenko–Parkes equation // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 2016. – Article ID 2916582. – 39 p.
19. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Solutions Associated with Discrete and Continuous Spectrums in the Inverse Scattering Method for the Vakhnenko – Parkes Equation // Progr. Theor. Phys. – 2012. – Vol. 127. – No. 4. – P. 593 – 613.
20. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations // JMP. – 2012. – Vol. 53. – No. 6. – P. 063504.
21. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method // Chaos, Solitons and Fractals. – 2012. – Vol. 45. – P. 846 – 852.
22. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The inverse problem for some special spectral data // Chaos, Solitons and Fractals. – 2016. – V. 82. – P. 116 – 124.
23. Вахненко В. О. Простий полюс та полюс другого порядку в оберненій задачі розсіяння // Допов. НАН Укр. – 2017. – № 7. – С. 10 – 17.
24. Mukam S. P. T., Kuetche V. K., Bouetou T. B. Localized waves in a general coupled nonlinear Schrödinger equation // Eur. Phys. J. Plus. – 2017. – Vol. 132. – P. 182 – 188.
25. Abdou M. A., Soliman A. A., Elgarayhi A. New periodic solitary wave solutions for an extended generalization of Vakhnenko equation. // Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences. – 2015. – Vol. 18. – P. 99 – 101.
26. Bailung H., Sharma S. K., Nakamura Y. Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – P. 255005.
27. Bludov Y. V., Konotop V. V., Akhmediev N. Matter rogue waves // Phys. Rev.A. – 2009. – Vol. 80. – P. 033610.
28. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves // Phys. Rev. X. – 2012. – Vol. 2. – P. 011015.
29. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 86. – P. 056601.
30. Lecaplain C., Grellu Ph., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Dissipative Rogue Waves Generated by Chaotic Pulse Bunching in a Mode-Locked Laser // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 233901.
31. Pisarchik A. N., Jaimes-Regueiro R., Sevilla-Escoboza R., Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. // Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – P. 274101.
32. Onorato M., Residori S., Bertolozzo U., Montina A., Arecchi F. T. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts // Phys. Rep. – 2013. – Vol. 528. – P.47.

33. Solli D. R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. Optical rogue waves // *Nature*. – 2007. – Vol. 450. – P. 1054 – 1057.
34. Chabchoub A., Hoffmann N. P., Akhmediev N. Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – Vol. 106. – P. 204502.
35. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre // *Nat. Phys.* – 2010. – Vol. 6. – P. 790 – 795.
36. Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace // *Phys. Lett. A* – 2009. – Vol. 373. – P. 675 – 678.
37. Dubrovin B. A. Theta functions and non-linear equations // *Russian Mathematical Surveys*. – 1981. – Vol.36, no. 2. – P. 11 – 92.
38. Novikov S. P. A Method of Solving the Periodic Problem for the KDV Equation and Its Generalization. *Solitons* / Eds: Bullough R.K., Caudrey P. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. – P. 325 – 338.
39. Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Publisher: Springer, 1984. – 276 p.
40. Newell A. C. *Solitons in mathematics and physics* - Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. – 244 p.
41. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky–Vakhnenko equation: a Riemann–Hilbert approach // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I*, – 2014. – Vol. 352. – P. 189 – 195.
42. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky-Vakhnenko equation by a Riemann-Hilbert approach // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2015. – Vol. 48. – P. 035204.
43. Xu J., Fan E. The initial-boundary value problem for the Ostrovsky-Vakhnenko equation on the half-line // *Math. Phys. Anal. Geom.* – 2016. – Vol. 19. – P. 20.

References (transliterated)

1. Hunter J. K. Numerical solutions of some nonlinear dispersive wave equations. *Lectures in Applied Mathematics*. 1990, vol. 26, pp. 301–316.
2. Vakhnenko V. A. Solitons in a nonlinear model medium. *J. Phys. A : Math.Gen.* 1992, vol. 25, pp. 4181–4187.
3. Kraenkel R. A., Leblond H., Manna M. A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water. *J. Phys. A : Math. Theor.* 2014, vol. 47, no. 2, pp. 025208 (17p).
4. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Extremely short vector solitons under the conditions of conical refraction. *JETP Letters*. 2014, vol. 99, no. 9, pp.503–507.
5. Sazonov S. V., Ustinov N. V. Nonlinear Propagation of Vector Extremely Short Pulses in a Medium of Symmetric and Asymmetric Molecules. *JETP*. 2017, vol. 124, no. 2, pp. 213–230.
6. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*. 1998, vol. 11, pp.1457–1464.
7. Morrison A. J., Parkes E. J., Vakhnenko V. O. The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*. 1999, vol. 12, pp.1427–1437.
8. Manna M. A., Neveu A. Short-wave dynamics in the Euler equations. *Inverse Problems*. 2001, vol. 17, pp. 855–861.
9. Tzitzéica G. Sur une nouvelle classe de surfaces. *Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris*. 1907, vol. 144, pp. 1257–1259.
10. Dodd R. K., Bullough R. K. Bäcklund transformations for the sine-Gordon equations. *Proc. Roy. Soc. London*. 1976, Ser. A 351, pp. 499–523.
11. Zhiber A. V., Shabat A. B. Uravneniya Kleyna – Gordona s netrivial'noy grupпой [The Klein–Gordon equation with nontrivial group]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1979, vol. 247, no. 5, pp.1103–1107.
12. Mikhailov, A.V. Integrability of a two-dimensional generalization of the Toda chain. *JETP Lett.* 1979, vol. 30, no. 7, pp. 414–418.
13. Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D., Morris, H. C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. – London et al.: Academic Press, 1982, 630 p.
14. Dai Z. D., Jiang M. R., Dai Q. Y., Li S. L. Homoclinic bifurcation for the Boussinesq equation with even constraints. *Chin. Phys. Lett.* 2006, vol. 23, no. 5, pp. 1065–1067.
15. Dai Z. D., Liu Z. J., Li D. L. Exact periodic solitary-wave solutions for the KdV equation. *Chin. Phys. Lett.* 2008, vol. 25, no. 5, pp. 1531–1533.
16. Dai Z. D., Liu J., Zeng X. P., Liu Z. J. Periodic kink-wave and kinky periodic-wave solutions for the Jimbo–Miwa equation. *Phys. Lett. A*. 2008, vol. 372, no 38, pp. 5984–5986.
17. Dai Z. D., Song L., Fu H., Zeng X. Exact three wave solutions for the KP equation. *Appl. Math. Comput.* 2010, vol. 216, no. 5, pp. 1599–1604.
18. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Approach in theory of nonlinear evolution equations : the Vakhnenko – Parkes equation. *Advances in Mathematical Physics*. 2016, vol.2016, article ID 2916582, 39 p.
19. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Solutions Associated with Discrete and Continuous Spectrums in the Inverse Scattering Method for the Vakhnenko-Parkes Equation. *Progr. Theor. Phys.* 2012, vol. 127, no. 4, pp. 593–613.
20. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. Special singularity function for continuous part of the spectral data in the associated eigenvalue problem for nonlinear equations. *JMP*. 2012, vol. 53, no6, pp. 063504.
21. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2012, vol. 45, pp. 846–852.
22. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The inverse problem for some special spectral data. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016, vol. 82, pp. 116–124.
23. Vakhnenko V. O. Prostyy polyus ta polyus drugogo poriyadku v obnerneniy zadachi rozsiyannya [A single pole and a double pole in the inverse scattering transform method]. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr* [Reports of the Academy of Science of Ukraine]. 2017, no. 7, pp. 10–17.
24. Mukam S. P. T., Kuetche V. K., Bouetou T. B. Localized waves in a general coupled nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*. 2017, vol. 132: pp. 182–188.
25. Abdou M. A., Soliman A. A., Elgarayhi A. New periodic solitary wave solutions for an extended generalization of Vakhnenko equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*. 2015, vol. 18, pp. 99–101.
26. Bailung H., Sharma S. K., Nakamura Y. Observation of Peregrine Solitons in a Multicomponent Plasma with Negative Ions. *Phys. Rev. Lett.* 2011, vol. 107, pp. 255005.
27. Bludov Y. V., Konotop V. V., Akhmediev N. Matter rogue waves. *Phys. Rev A*. 2009, vol. 80, pp. 033610.
28. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Akhmediev N. Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. *Phys. Rev. X*. 2012, vol. 2, pp. 011015.
29. Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. *Phys. Rev E*. 2012, vol. 86, pp. 056601.
30. Lecaplain C., Grelu Ph., Soto-Crespo, J. M., Akhmediev, N. Dissipative Rogue Waves Generated by Chaotic Pulse Bunching in a Mode-Locked Laser. *Phys. Rev. Lett.* 2012, vol. 108, pp. 233901.
31. Pisarchik A. N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. *Phys. Rev. Lett.* 2011, vol. 107, pp.274101.
32. Onorato M., Residori S., Bortolozzo U., Montina A., Arecchi F. T. Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts. *Phys. Rep.* 2013, vol. 528, pp.47.
33. Solli D. R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. Optical rogue waves. *Nature*. 2007, vol. 450, pp. 1054–1057.
34. Chabchoub A., Hoffmann N. P., Akhmediev N. Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank. *Phys. Rev. Lett.* 2011, vol. 106, pp. 204502.
35. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J. M. Observation of Kuznetsov-Ma soliton dynamics in optical fibre. *Nat. Phys.* 2010, vol. 6, pp. 790 – 795.
36. Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace. *Phys. Lett. A*. 2009, vol. 373, pp. 675–678.
37. Dubrovin B. A. Theta functions and non-linear equations. *Russian Mathematical Surveys*. 1981, vol.36, no. 2, pp. 11 – 92.
38. Novikov S. P. A Method of Solving the Periodic Problem for the KDV Equation and Its Generalization. *Solitons* / Eds: Bullough R.K., Caudrey P.

- Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 1980, pp. 325–338.
39. Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Publisher: Springer. 1984, 276p.
40. Newell A. C. *Solitons in mathematics and physics* - Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985, 244 p.
41. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation : a Riemann – Hilbert approach. *Math. Acad. Sci. Paris Ser. I*. 2014, vol. 352, pp. 189–195.
42. Boutet de Monvel A., Shepelsky D. The Ostrovsky – Vakhnenko equation by a Riemann – Hilbert approach. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2015, vol. 48, pp. 035204.
43. Xu J., Fan E. The initial-boundary value problem for the Ostrovsky-Vakhnenko equation on the half-line. *Math. Phys. Anal. Geom.* 2016, vol. 19, pp. 20.

Надійшла (received) 19.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Вахненко В'ячеслав Олексійович (Вахненко Вячеслав Алексеевич, Vakhnenko Vyacheslav Oleksiyovych) – доктор фізико-математичних наук, головний науковий співробітник, Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Київ; тел.: (063) 428-42-16; e-mail: vakhnenko@ukr.net.

УДК 530.145, 550.344.094

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ДОСЛІДЖЕННЯ КОМПАКТОНІВ В НАПРУЖЕНИХ ЛАНЦЮГАХ КУЛЬ

Проведено чисельне моделювання розповсюдження усамітненої хвилі в однорідних та неоднорідних ланцюгах гранул сферичної форми, котрі перебувають в стані попереднього стиснення. Задача розв'язувалась методом прямих, після зведення рівнянь руху гранул до системи нелінійних рівнянь першого порядку. Для верифікації розв'язку було проведено паралельне експериментальне дослідження розповсюдження солітоноподібної хвилі в ланцюгах сферичних сильно намагнічених гранул. Магнітна взаємодія гранул призводила до попереднього стиснення всього ланцюга і регулювалась в процесі експеримента шляхом перемагнічування гранул, а також використанням гранул двох різних розмірів (в цих випадках попереднє стиснення ланцюгів теж відрізнялось). Наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту і ці результати співставлені з експериментальними даними.

Ключові слова: усамітнені хвилі, нелінійні рівняння, компактон, солітоноподібна хвиля, дискретне середовище.

Д. Б. ВЕНГРОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПАКТОНОВ В НАПРЯЖЁННЫХ ЦЕПЯХ ШАРОВ

Проведено численне моделювання розповсюдження уединенної волни в однородних и неоднородных цепочках гранул сферической формы, которые находятся в состоянии предварительного сжатия. Задача решалась методом прямых, после сведения уравнений движения гранул к системе нелинейных уравнений первого порядка. Для верификации решения было проведено параллельное экспериментальное исследование распространения солитоноподобной волны в цепях сферических сильно намагнитенных гранул. Магнитное взаимодействие гранул приводило к сжатию всей цепи, которое регулировалось в процессе эксперимента путем перемагничивания гранул, а также использованием гранул двух разных размеров (в этих случаях предварительное сжатие цепей тоже отличалось). Приведены результаты работы программы и анализ результатов проведенного вычислительного эксперимента и эти результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

Ключевые слова: уединённые волны, нелинейные уравнения, компактон, солитоноподобная волна, дискретная среда.

D. B. VENGROVICH

INVESTIGATION OF COMPACTONS IN PRESTRESSED CHAINS OF BALLS

A numerical simulation of the propagation of a solitary wave in homogeneous and inhomogeneous chains of spherical granules, which are in a state of pre-compression, has been carried out. The problem was solved by the method of lines, after reducing the equations of motion of the granules to a system of first-order nonlinear equations. To verify the solution, a parallel experimental study of the propagation of a soliton-like wave in spherical chains of strongly magnetized granules was carried out. The magnetic interaction of the granules resulted in the compression of the whole chain, which was regulated during the experiment by reversing the granules, as well as using granules of two different sizes (in these cases the preliminary compression of the chains was also different). The results of the program and the analysis of the results of the computational experiment are presented and these results are compared with the experimental data.

Key words: solitary waves, nonlinear equations, compacton, soliton-like wave, discrete medium.

Вступ. Дослідження присвячене моделюванню поширення *нелінійних збурень* в *дискретному середовищі*, яке проводилось паралельно чисельними методами та в ряді випадків безпосереднім експериментальним вимірюванням. В цьому напрямку така робота проводиться нами в зв'язку з дослідженням поведінки геофізичного середовища, а конкретніше верхніх шарів земної кори, з точки зору не суцільного середовища, а сукупності блоків, елементів, структурованих певним чином. Блоковість та структурованість признана в польовій геофізиці, з іншого боку стає очевидним, що їх врахування привносить в теорію динаміки літосфери широке поле нових можливостей. Сучасні дослідження нелінійних хвиль в природних середовищах актуальні зокрема в області нелінійної геофізики, коли, наприклад, моделюють виникнення та розповсюдження хвилі в околі джерела землетру-

© Д. Б. Венгровиц, 2019

су і цей окіл розглядається не з точки зору теорії суцільного середовища, а як середовище дискретне, складене з окремих блоків. Якщо розглядати такі природні середовища, як *літосферу Землі*, а особливо земну кору, як структуровані, складені з окремих взаємодіючих між собою блоків системи, то виникає бажання змодельовати динаміку таких систем з точки зору розповсюдження в них нелінійних хвиль як в ланцюгах гранул.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 3] на основі підходу до моделювання тектонічних процесів у земній корі з точки зору динаміки контактуючих блоків побудовано теорію тектонічних рухів літосфери, котра добре пояснює широкий спектр таких явищ, як *рифтові процеси* та *субдукція*, *соляна тектоніка* та інші довготривалі рухи *геосередовища*. Було помічено, що в певні моменти на фоні дуже повільних процесів у таких структурованих середовищах відбувається швидка перебудова, основну роль в її перебігу грають хвильові процеси. Так в роботах [2, 11 – 13] було встановлено, що в динаміці земна кора деформується з виникненням напружених ланцюгів блоків, виникає локалізація напружень і розриви, у місцях розривів формуються джерела нелінійних хвиль, котрі потім трансформуються в звичайні сейсмічні хвилі. Тому надалі в рамках розробленої моделі елементної динаміки окремо досліджувалось виникнення та поширення нелінійних хвиль в ланцюгах гранул, поширення звукових хвиль в суцільних середовищах з *гранулоподібними включеннями*, в композитних матеріалах [6, 7, 8].

Постановка задачі. Отже, дослідимо поведінку *солітоноподібної хвилі* в однорідних і неоднорідному ланцюжках пружних куль, що взаємодіють за законом Герца, при цьому знаходячись в стані попереднього стиснення вздовж усього ланцюга, або таке стиснення відсутнє. Ланцюжок в розрахунках складався з 1000 сталевих куль однакового радіусу $r_0 = 2.06$ см, $m_0 = 284.9$ г (в експериментах використовувались ланцюги 40 – 300 куль з різних матеріалів). Наводяться результати чисельного моделювання цих процесів з їх експериментальним підтвердженням.

Як відомо [6, 9], удар кулею по ланцюжку таких же куль викликає поширення в ній солітоноподібної хвилі. Ці хвилі поведуться подібно до класичних солітонів суцільних середовищ – взаємно розсіюються майже пружно зі зсувом фази. Поряд з цим вони мають ряд особливостей, викликаних відсутністю суцільності середовища, в якому вони поширюються. Слід підкреслити, що у випадку ланцюжка куль, має місце нелінійність двох видів. Перша викликана нелінійним законом силової взаємодії. Але, як відомо в механіці, до нелінійної поведінки систем призводить і наявність зазорів, розривів суцільності, тобто зникнення взаємодії між кулями за їх розходження. Таким чином, остання обставина призводить до відмінностей в поведінці солітоноподібних хвиль в такому середовищі від класичних солітонів суцільних середовищ [6], такі хвилі можна вважати *компактонами*.

Математичне моделювання контактної взаємодіючих куль (всі контакти ідентичні) проведене чисельним рішенням системи диференціальних рівнянь:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_j F_{ij}, \quad (1)$$

де *сила Герца*: $F_{ij} = \frac{2\theta}{3} \sqrt{\frac{r}{2}} \varepsilon_{ij}^{3/2}$ і зникає при зникненні контакту; $\theta \equiv \frac{E}{1-\sigma^2}$; $\varepsilon_{ij} = 2r - \left(\sum_{k=1,2} (x_i^k - x_j^k)^2 \right)^{1/2}$; властивості матеріалу ланцюжка (сталь): $\rho = 7.78 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\sigma = 0.29$.

Початковою умовою вважатимемо удар крайньою кулею по ланцюгу з початковою швидкістю:

$$\left. \frac{dx_{1000}}{dt} \right|_{t=0} = V_0. \quad (2)$$

У випадку моделювання стисненого ланцюга куль в початкових умовах фіксувались положення крайніх гранул, а відстані між гранулами зменшувались (тоді удар здійснювала гранула 999):

$$x_{1000} = C_1, \quad x_1 = C_2, \quad x_i - x_{i-1} = 2(1-\varepsilon) \cdot r_0. \quad (3)$$

Неоднорідність вносилася зміною маси одної кулі (як, наприклад, № 150 на рис. 6, *a*, *b* [10]) без зміни їх контактів. Внесення неоднорідності в ланцюг задавалось зміною маси однієї з куль з номером n :

$$m_{x_n} = m_0 \pm \Delta. \quad (4)$$

Система нелінійних диференціальних рівнянь (1 – 3) розв'язана *методом прямих* чисельно з використанням *адаптивного методу* і дотриманням максимальних відносних похибок в результатах до 10^{-13} , в якості верифікації використано співставлення з аналогічними експериментами.

Зазначимо одну особливість експериментального моделювання – для ненапружених ланцюгів хвиля генерувалась ударом граничної кулі зі швидкістю до 1 м/с за допомогою маятникового механізму, тобто швидкість масивної ударяючої кулі точно задавалась її відхиленням у маятнику. В роботах [4] досліджувалось розповсюдження звукових хвиль в ланцюжках сталевих кульок в подібній постановці, де було встановлено, що в експерименті тяжко досягнути значного стиснення ланцюга, втримуючи гранули на одній осі. Тому ми вдалися до

дослідження напружених ланцюгів, складених з магнітних куль, оскільки такі ланцюги стійкі, в той час як при стисненні ланцюгів із сталевих куль вони швидко втрачають стійкість. Напруження в таких ланцюгах створюється силами взаємного тяжіння сильно намагнічених неодимових гранул.

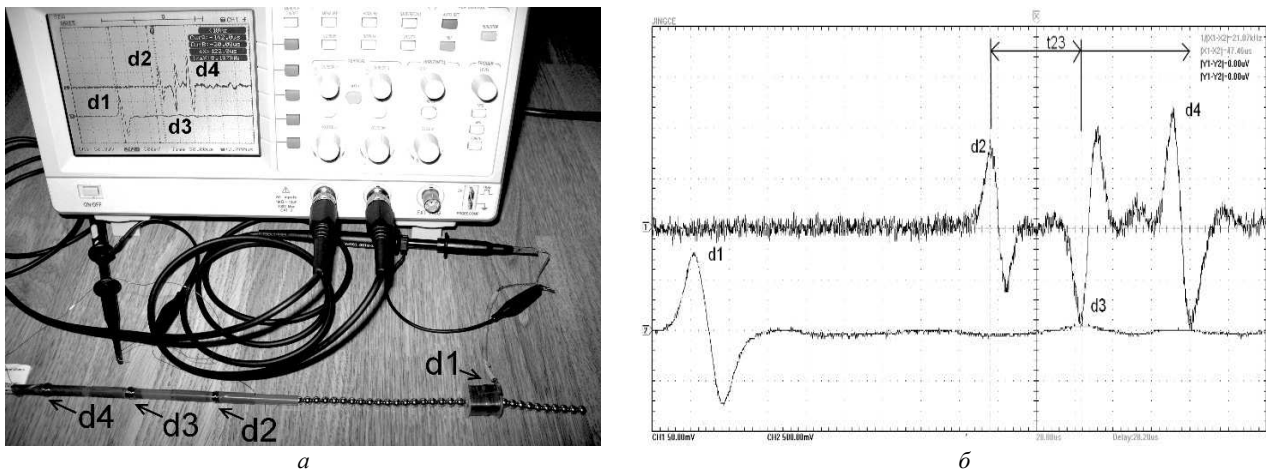


Рис. 1 – Розміщення: *a* – датчиків та *б* – осцилограми 4-х імпульсів, отриманих від удару кулею з відстані 3 см до ланцюга: *d1* – датчик на 1-му каналі та 3 послідовно включені датчики *d2*, *d3*, *d4* на 2-му каналі осцилографа.

На рис. 1 приведено зовнішній вигляд ланцюга магнітних куль, розміщення на ланцюгу датчиків та осцилограми імпульсів від удару однією кулею (що примагнічується до ланцюга справа з боку давача *d1*). В даному випадку датчиками слугують зовнішні котушки. Рух намагнічених гранул всередині них призводить до наведених імпульсів струму, що реєструє осцилограф. Таким чином, ланцюг не зазнає додаткових спотворюючих впливів від розміщення давачів.

Таблиця 1 – властивості магнітних гранул двох наборів

Параметри	Значення
Діаметр гранул №1	5.028 ± 0.002 мм
Діаметр гранул №2.	4.75 ± 0.005 мм
Маси гранул №1	0.49108 ± 0.00038 г
Маси гранул №2	0.3322 ± 0.0006 г
Густина гранул №1	7.3917 ± 0.003 г/см ³
Густина гранул №2	7.401 ± 0.009 г/см ³
Коефіцієнт Пуассона	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$
Модуль Юнга	$E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6$ ГПа
Сплав (Furlani [2001])	NdFeB 37 MGOe з лінійним <i>B</i> – <i>N</i> співвідношенням
Магнітний потік	12.2–12.6 KGs
Коерцитивна сила H_c	>11.0 KOe (950000 A/m)
Температура Кюр'є	310° C робоча температура (макс. 80° C)

У випадку дослідження намагнічених гранул здавалось, що буде складно точно задати швидкість удару магнітною кулею по ланцюгу таких же намагнічених куль через їх невеликий розмір. Виявилось, що це не так, одна намагнічена куля, наближена до ланцюга, притягується до нього та розганяється до однієї швидкості, з дуже високою точністю, коли її рух починається з відстані 3 – 12 см. Щоб проілюструвати це, розв'яжемо задачу магнітостатики, визначивши сили, що діють на намагнічену кулю з боку намагніченого ланцюга куль методом скінчених елементів (застосовано програму FEMM– пакет моделювання взаємодії магнітних матеріалів, відносна точність розрахунків $1 \cdot 10^{-8}$). На рис. 2, *a* приведено осесиметричне розташування неодимових кульок (сплав NdFeB), котрі використовувались в експерименті. Розташовуючи ударяючу кулю на різних відстанях від ланцюга, ми чисельно визначали силу тяжіння F , інтегруючи чисельно розраховані польові величини по об'єму кулі. (рис. 2, *б*) і таким чином отримали інтерпольовану функціональну залежність сили тяжіння гранули від відстані до ланцюга (рис. 2, *в*).

На рис. 2 приведено послідовність розв'язку задачі магнітостатики – обраховано методом скінчених елементів силу, що діє на намагнічену гранулу, яка перебуває на певній відстані x в полі магнітного ланцюга.

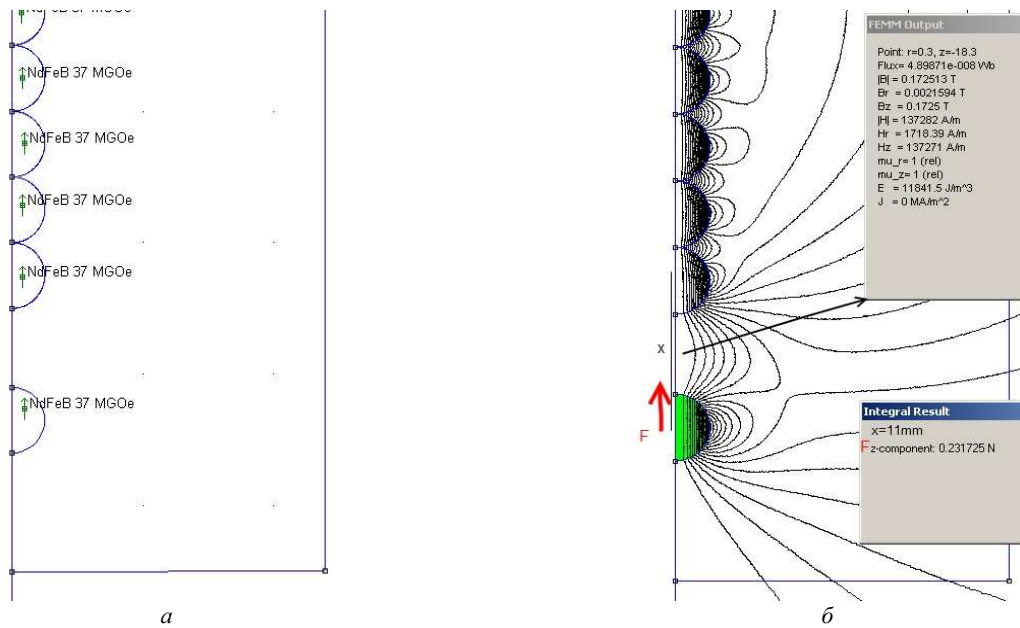
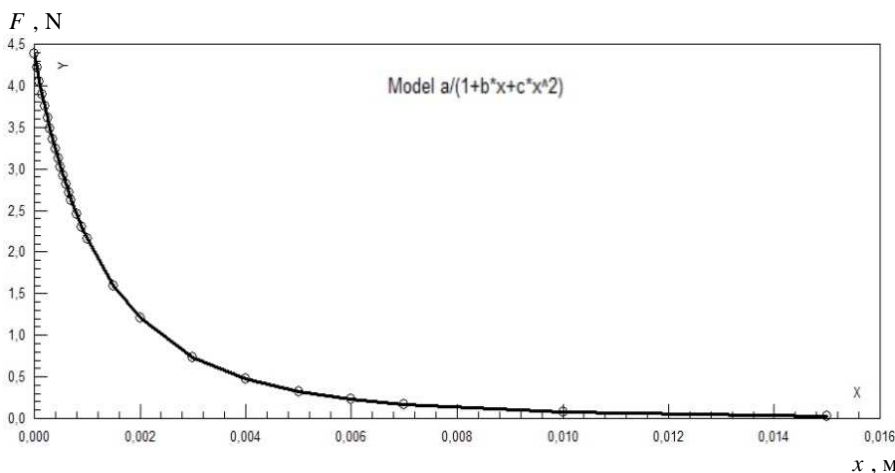


Рис. 2 – Моделювання взаємодії намагнічених сфер методом скінченних елементів:
 а – область моделювання ланцюга неодимових сферичних магнітів в осесиметричній постановці;
 б – величини полів та визначена інтегральна сила F , що діє на одну гранулу на відстані x до ланцюга.



$$\vec{F}_0(x[M]) = Y^{\text{model fit.}} = a / (1 + bx + cx^2), \quad (a = 4,3604, b = 729,5656, c = 306969,87)$$

Рис. 2 – Моделювання взаємодії намагнічених сфер методом скінченних елементів:
 в – сила притягування гранули, що знаходиться на відстані x , м до ланцюга.

$$= 0, x[0] == 15, x'[0] == 0, x, \{t, 0, 1.35\}; \text{Plot[Evaluate}[x[t]/. \%], \{t, 0, 1.35\}, \text{Filling} \rightarrow \text{Axis}]. \quad (5)$$

На рис. 3 приведено розв'язки (5) в пакеті Mathematica 9.0, які показують зростання швидкості ударяючої гранули, що розганяється з різних відстаней. В обох випадках отримано швидкість удару 1 м/с.

Отже, в експериментах, котрі проводились для верифікації розв'язків нелінійних рівнянь, для фіксації хвиль в ланцюгах куль використовувались давачі трьох типів. Для визначення швидкостей хвиль в однорідних ланцюгах сталевих куль достатньо у якості давача використати гранулу ланцюга, розрізавши її та помістивши всередину п'єзокристал, що генерує сигнал при проходженні через нього хвилі стиснення. В експериментах з використанням магнітних куль давачем служить котушка навкруг гранули, де останню генерується імпульс струму при її рухах. В експериментальному дослідженні неоднорідних ланцюгів [10], де генеруються додаткові імпульси складної природи і необхідно виключити можливість внесення додаткових спотворень від датчиків, вимірювалась швидкість руху точки на поверхні кулі в ланцюжку. У цій точці до кулі прикріплювалась тонка пластинка нехтовно малої маси, коливання якої фіксувалися оптичним методом. За цими коливаннями чисельно відновлювалась швидкість руху точки кріплення. (Виявилось [10], що неоднорідність в ненапруженому ланцюгу у вигляді дефекту або межі розділу є джерелом вторинних солітонів, відображених U_i або заломлених D_i , що мають різні швидкості, а іноді, різні часові моменти генерації. Цей результат (рис. 6, а, б) ми приводимо для порівняння з новими даними, отриманими для аналогічних але попередньо напружених ланцюгів).

Приведена на рис. 2, б залежність сили, що діє на гранулу з боку ланцюга, дає можливість обчислити в околі ланцюга інтерполяційну функцію

$$\vec{F}_0(x[M]) = Y^{\text{model fit.}} = a / (1 + bx + cx^2).$$

Цю силу в подальшому використовуємо для розв'язання рівняння динаміки (1) примагнічування кулі № 1: в пакеті Mathematica 9.0, застосувавши команди:

```
NDSolve[{x''[t]+ 8879.84/(1+
+72957x[t]+306968.8 x[t] x[t])=
=0,x[0] ==0.035,x'[0] ==0},x,
{t,0,0.135}];
Plot[Evaluate[x[t]/. \%],{t,0,1.35}];
NDSolve[{x''[t]+905.31/(1+
+0.73x[t]+0.31 x[t] x[t])=
```

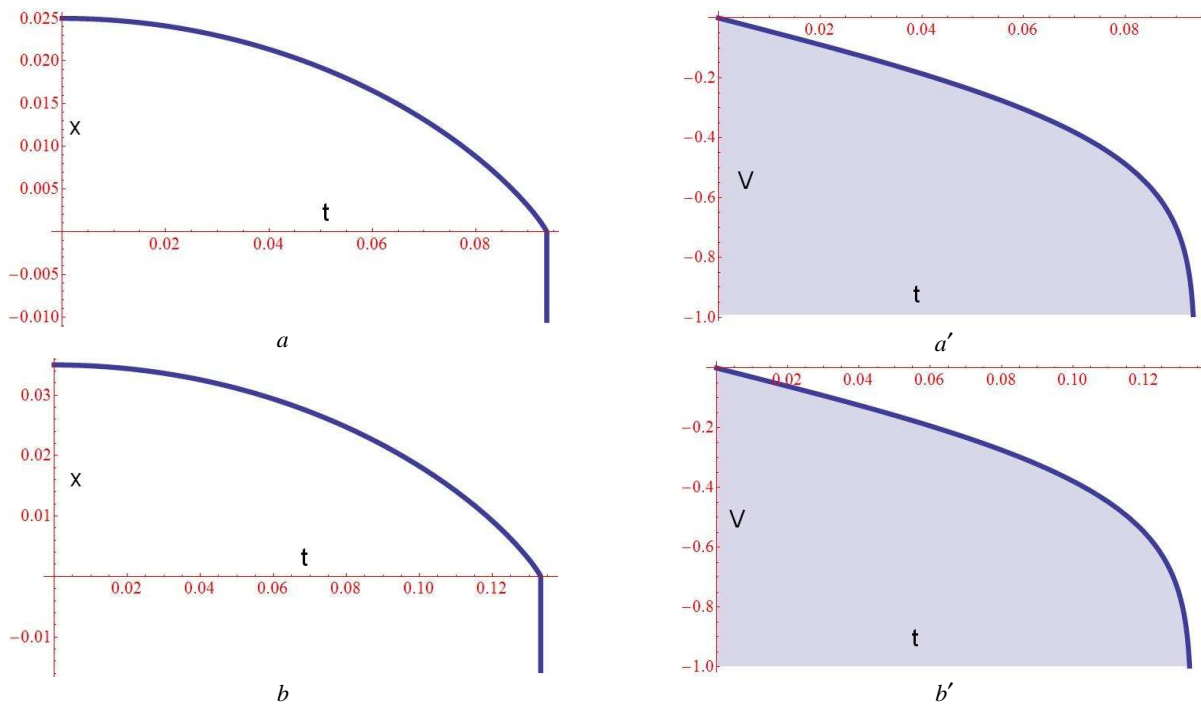



Рис. 3 – Удари гранулами з відстані: $a - 25$ мм; $b - 35$ мм. Час до зіткнення: $a - 0.09$ с; $b - 0.13$ с.
В обох випадках a' та b' – результуюча швидкість удару – 1.0 м/с.

Результати чисельного та експериментального моделювання. Проведене комп'ютерне моделювання на базі системи рівнянь (1 – 3) з необхідними граничними умовами процесу поширення хвилі деформації в структурах, утворених попереднім напруженням модельного блокового середовища. Його експериментальне підтвердження, показало (рис. 4 – 5), що зі збільшенням стиснення ланцюга куль зростає швидкість нелінійної усамітненої хвилі в ньому:

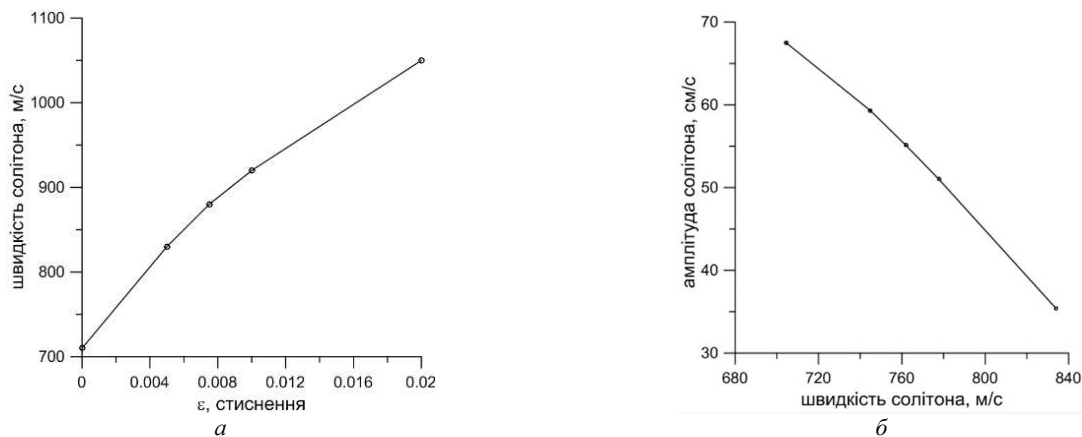


Рис. 4 – Амплітудно-фазові характеристики солітона в попередньо-стисненому ланцюгу сталених куль ($d = 4.12$ см):
 a – зростання фазової швидкості солітона при збільшенні деформації ϵ ланцюга, $V_0 = 1$ м/с;
 b – падіння амплітуди солітона при збільшенні стиснення і фазової швидкості.

Однак неочевидною є залежність фазової швидкості хвилі від її амплітуди - у випадку стиснених ланцюгів швидші хвилі (зі збільшенням стиснення) мають все меншу амплітуду. Для нестиснених ланцюгів, навпаки, хвилі більшої амплітуди мають більшу швидкість [6]. Виявилось, що у випадку стисненого ланцюга в ньому розповсюджується вже не локалізований компактон, а компактон з великим хвостом (рис. 7 – 5, 7), котрий зростає зі збільшенням стиснення, тому амплітуда першої «солітонної» його частини зменшується, перерозподіляючись до хвостової частини. Докладніше прояв такої структури нелінійної хвилі можна проаналізувати, розглянувши проходження солітона через дефект ланцюжка.

Як видно з результатів моделювання (рис. 6), дефект ланцюжка на шляху солітона стає джерелом вторинних солітонів. Розсіювання на такому дефекті в залежності від його маси породжує спектр взаємодіючих вторинних солітоноподібних хвиль (рис. 6, $a - b$) та ще більш складну але якісно схожу картину взаємодіючих солітоноподібних та періодичних хвиль для стиснених ланцюгів (рис. 6, $c - f$).

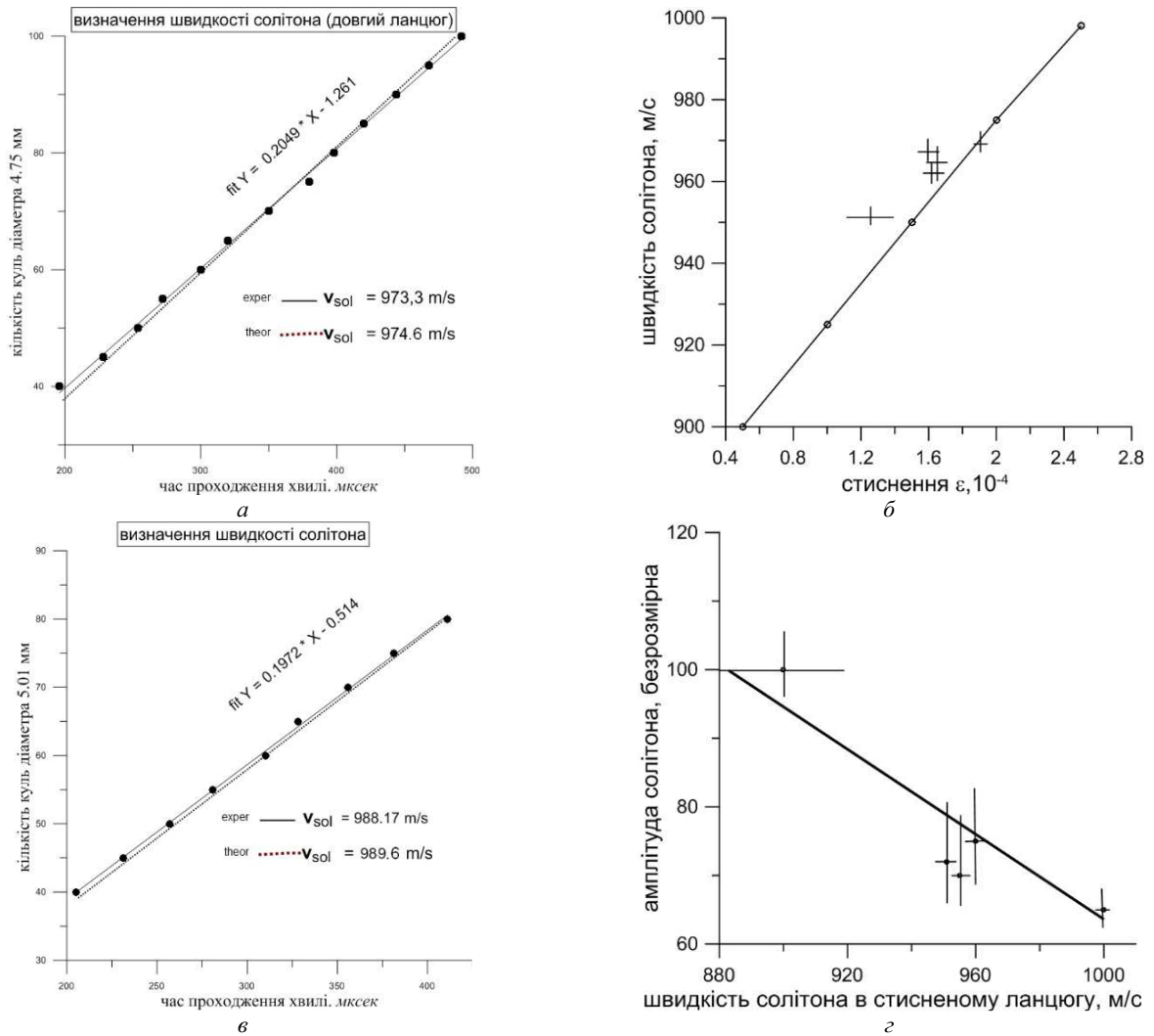


Рис. 5 – Чисельно та експериментально встановлені (по часу проходження імпульсів – *a*, *б*) швидкості солітонів в попередньо-стисненому ланцюгу куль-магнітів: *a* – діаметр куль 0.475 см; *б* – діаметр куль 0.501 см; Експериментально встановлені амплітудно-фазові характеристики солітона в попередньо-стисненому ланцюгу магнітних куль ($d = 4.75$ мм): *в* – суцільна лінія – розрахунок, хрестики – дані з експеримента з похибками; *г* – падіння амплітуди солітона при підвищенні фазової швидкості.

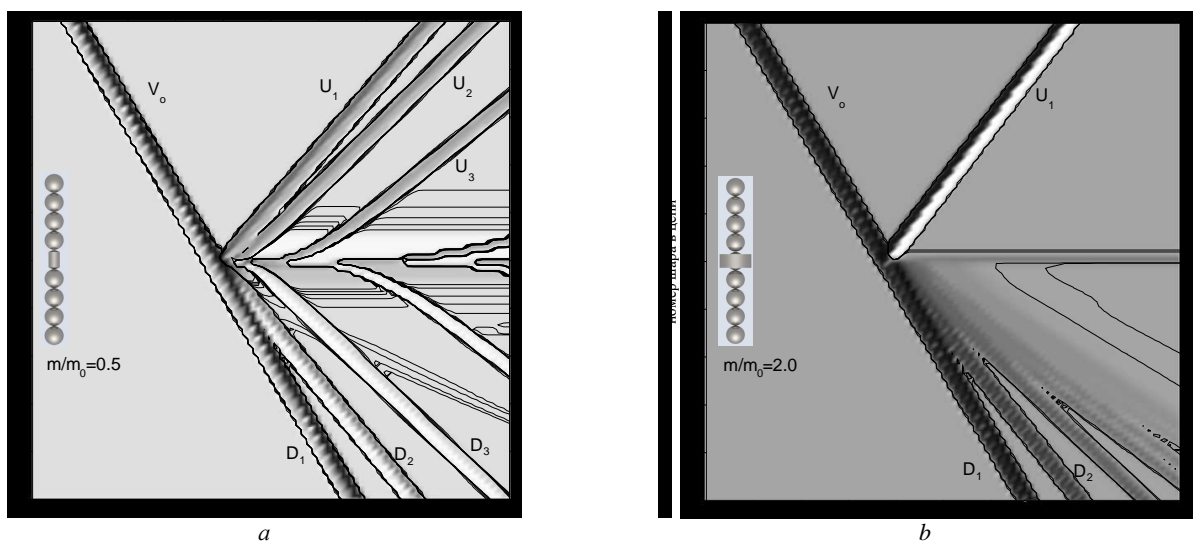


Рис. 6 – Ізолінії масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом (*a*, *б* [10] – куля № 150 має масу m в 2 рази меншу або більшу за інші; *с* – *ф* – куля № 950 має масу m в 5 раз меншу або більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $a - b - \epsilon = 0$.

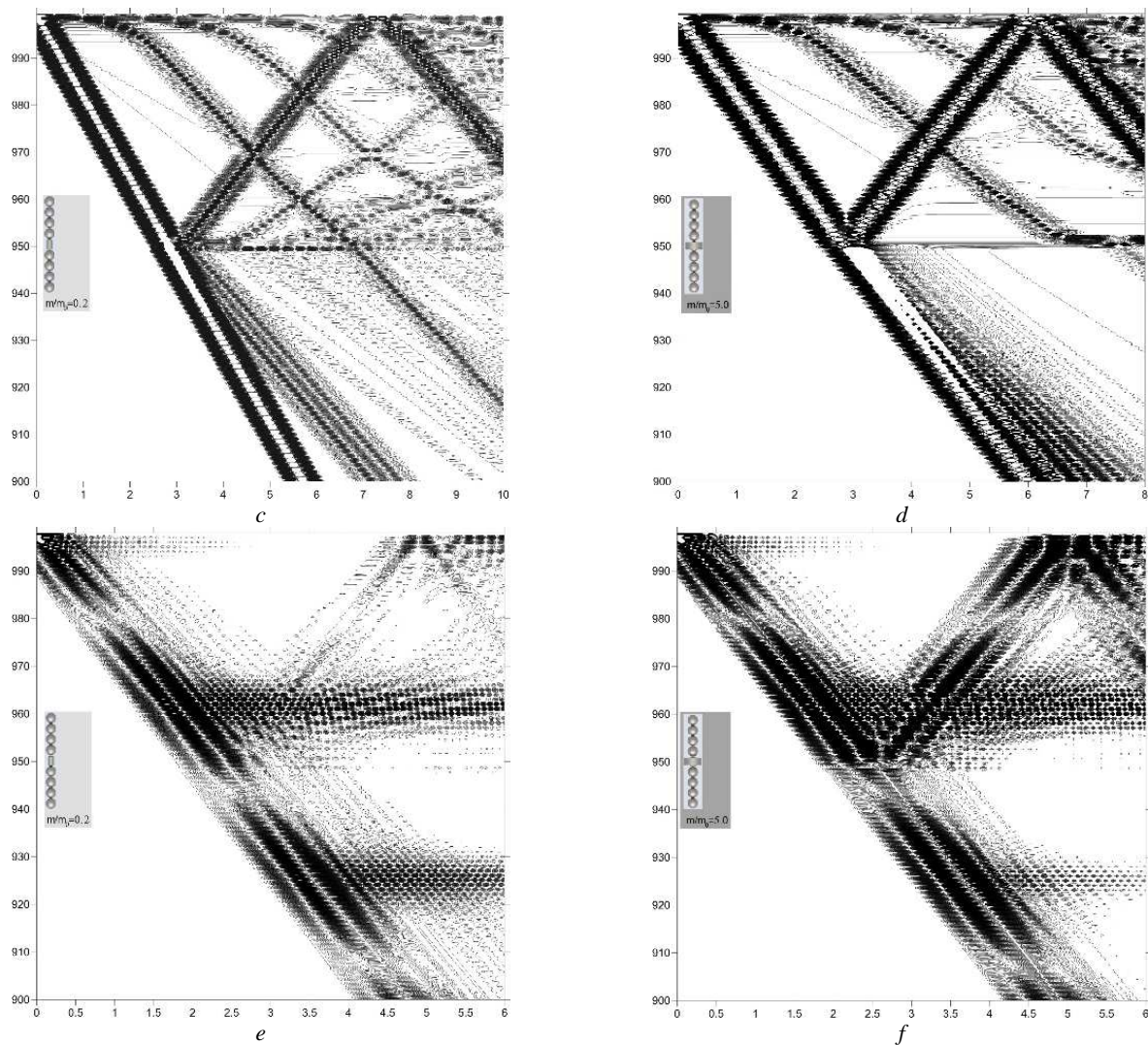


Рис. 6 – Ізолінії масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом (*a, b* [10] – куля № 150 має масу m в 2 рази меншу або більшу за інші; *c – f* – куля № 950 має масу m в 5 раз меншу або більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $c – d – \varepsilon = 0.001$; $e – f – \varepsilon = 0.03$.

На рис. 6 приведені розрахункові значення швидкостей солітонів, породжених дефектом в ланцюжку. Залежно від маси дефекту вихідний солітон V_0 розсіюється на певне число відбитих U_i та прохідних D_i солітонів. Причому деяка їх частина випромінюється дефектом значно пізніше самого акту розсіювання. Таким чином, дискретне середовище навколо неоднорідності є збуджуючим і випромінюючим джерелом. На рис. 7 для стиснутих ланцюгів приведено більш детально імпульси швидкості (позначення c, d, e, f відповідають таким же на рис. 6), що проходять через окремі гранули до та після дефектної гранули № 950.

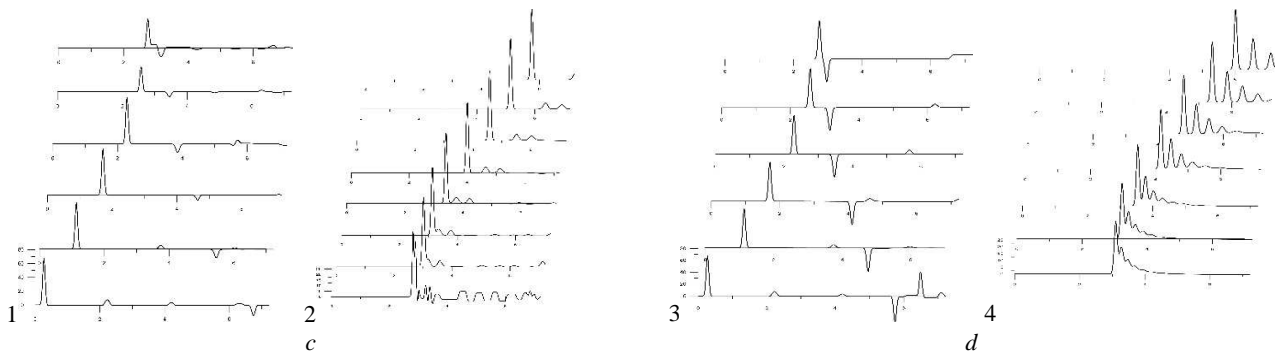


Рис. 7 – Масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом, (*c, e* – дефектна куля № 950 має масу в 5 раз меншу або *d, f* – більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; $c – d – \varepsilon = 0.001$.

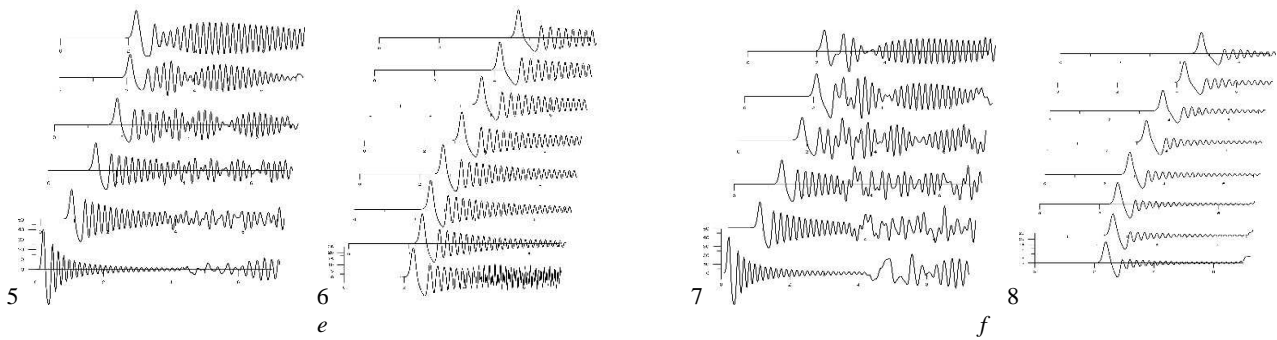


Рис. 7 – Масової швидкості куль в ланцюжку з дефектом, (с, е – дефектна куля № 950 має масу в 5 раз меншу або d, f – більшу); по осях абсцис – час, 10^{-3} с; e – f – $\epsilon = 0.03$; позначки 1, 3, 5, 7 – графіки для куль до дефекту, розміщені знизу вверху для куль – № 995, № 980, № 970, № 960, № 955, № 952; позначки 2, 4, 6, 8 – графіки для куль після дефекту, розміщені знизу вверху для куль – № 950, № 947, № 945, № 940, № 930, № 920, № 910, № 900.

Висновки. Таким чином ми продовжили дослідження розповсюдження нелінійних хвиль особливого класу (компактонів) в одновимірних ланцюгах гранул, котрі перебувають в стані попереднього стиснення. Отримано нові результати, суттєво відмінні від таких для нестиснених ланцюгів. Виявляється, що в даній моделі природним чином виникають збурення, котрі одразу мають солітоноподібні та хвилеподібні властивості. Тому для геофізичного застосування це дає можливість побудувати механізм перетворення інтенсивної нелінійної хвилі поблизу джерела в сейсмічну хвилю.

Список літератури

1. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Poplavskii K. N. A fully dynamic model of continental rifling applied to the syn-rift evolution of sedimentary basins // *Tectonophysics*. – 1996. – V. 268. – P. 211 – 220.
2. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A., Kharitonov O. M. A new geodynamical-thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets Basin // *Tectonophysics*. – 1999. – V. 313. – P. 29 – 40
3. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A. Modeling of the Evolution of Sedimentary Basins Including the Structure of the Natural Medium and Self-Organization Processes // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. – 2001. – Vol. 37. – No. 12. – P. 1004 – 1014.
4. Коробов А. И., Бажкин Ю. А., Ширгина Н. В. Нелинейные упругие свойства модели одномерной гранулированной неконсолидированной структуры // *Акустический журнал*. – 2012. – Т. 58. – № 1. – С. 103 – 111.
5. Венгрович Д. Б., Губар І. М., Шеремет Г. П. Дослідження поля напружень в фотопружних структурних елементах моделей геосередовища // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях». – Ч. 2. – Харьков : Харьковский национальный ун-т им. В.Н. Каразина, 2010. – С. 40 – 42.
6. Венгрович Д. Б. Исследование нелинейных процессов динамики структурированных сред // Диссертация к.ф.-м.н.: 01.04.12 – Киев, 1996. – 144с.
7. Венгрович Д. Б. Особенности солитонов дискретных сред // Тезисы докладов Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложение в естественных науках и информационных технологиях» (17 – 22 апреля 2011 г.). – Харьков : Харьковский национальный ун-т им. Каразина В.Н., 2011. – С. 199.
8. Венгрович Д. Б. Численное моделирование деформации природных композитных материалов // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях» (24 – 27 апреля 2012 г.). – Харьков : Харьковский национальный университет им. Каразина В.Н., 2012. – С. 71 – 72.
9. Nesterenko V. F. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 1983. – V. 24 (5). – P. 733 – 743.
10. Венгрович Д. Б. Взаимодействие солитона с неоднородностями дискретных сред // ДАН НАН Украины. – 2005. – № 4. – С. 100 – 109.
11. Vengrovitch D. B. Tectonic and seismological settings of subduction // 16th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects, 2017 (15-17 May 2017, Kiev, Ukraine). – European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE), 2017. – pp. 314 – 317. DOI: 10.3997/2214-4609.201701858.
12. Vengrovitch D. B. Computer simulation related to salt tectonics in the Dnieper-Donets basin // *Геофизический журнал*. – 2010. – Т. 32. – № 4. – С. 198 – 200.
13. Vengrovitch D. B., Sheremet G. P. Irregularity of lithospheric stress as a result of plates structure // 18th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects, 2019 (13-16 May 2019, Kiev, Ukraine) (to appear).

References (transliterated)

1. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Poplavskii K. N. A fully dynamic model of continental rifling applied to the syn-rift evolution of sedimentary basins. *Tectonophysics*. 1996, vol. 268, pp. 211–220.
2. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A., Kharitonov O. M. A new geodynamical-thermal model of rift evolution, with application to the Dnieper-Donets Basin. *Tectonophysics*. 1999, vol. 313, pp. 29–40
3. Starostenko V. I., Danilenko V. A., Vengrovitch D. B., Kutas R. I., Stovba S. M., Stephenson R. A. Modeling of the Evolution of Sedimentary Basins Including the Structure of the Natural Medium and Self-Organization Processes. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1004–1014.
4. Korobov A. I., Bazhkin Yu. A., Shirgina N. V. Nelineynye uprugie svoystva modeli odnomernoy granulirovannoy nekonsolidirovannoy struktury [Nonlinear elastic properties of one-dimensional granulated non-consolidated structure model]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustic journal]. 2012, vol. 58, no. 1, pp. 103–111.
5. Vengrovich D. B., Gubar I. M., Sheremet G. P. Doslidzhennya polya napruzhen' v fotopruznykh strukturykh elementakh modeley geoseredovishha [Studying stress field of geomedium model photoelastic structural units]. *Trudy nauchno-tehnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Kompyuternoe modelirovanie v naukoymkikh tekhnologiyakh»*. Ch. 2. [Proceedings of the Scientific and Technical Conference with International Participation “Computer Modeling in Knowledge – Intensive Technologies”. Part 2]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. V.N. Karazina Publ., 2010. pp. 40–42.

6. Vengrovich D. B. *Issledovanie nelineynykh protsessov dinamiki strukturirovannykh sred. Dissertatsiya k.f.-m.n.: 01.04.12* [Studying dynamical processes in structured media : Candidate of Physical and Mathematical Sciences Dissertation Paper 01.04.12]. Kiev, 1996. 144 p.
7. Vengrovich D. B. Osobennosti solitonov diskretnkh sred [Features of discrete media solitons]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye problemy matematiki i eyo prilozhenie v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh» (17 – 22 aprelya 2011 g.)* [Proceedings of the International Conference “Contemporary Problems of Mathematics and its Application to Natural Sciences and Informational Technologies” (17 – 22 April, 2011)]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. Karazina V.N. Publ., 2011. p. 199.
8. Vengrovich D. B. Chislennoe modelirovanie deformatsii prirodnykh kompozitnykh materialov [Numerical modeling of deformations of composite natural materials]. *Trudy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Komp'yuternoe modelirovanie v naukoemkikh tekhnologiyakh» (24 – 27 aprelya 2012 g.)* [Proceedings of the Scientific and Technical Conference with International Participation “Computer Modeling in Knowledge – Intensive Technologies” (24 – 27 April, 2012)]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy un-t im. V.N. Karazina Publ., 2012. pp. 71–72.
9. Nesterenko V. F. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1983, vol. 24 (5), pp. 733–743.
10. Vengrovich D. B. Vzaimodeystvie solitona s neodnorodnostyami diskretnykh sred [Interaction of soliton with inhomogeneous discrete media]. *DAN NAN Ukrainy* [Reports of the Academy of Science of Ukraine]. 2005, no. 4, pp. 100–109.
11. Vengrovich D. B. Tectonic and seismological settings of subduction. *16th International Conference Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects* (15-17 May 2017, Kiev, Ukraine). European Association of Geoscientists and Engineers (EAGE), 2017. pp. 314 – 317. DOI: 10.3997/2214-4609.201701858.
12. Vengrovich D. B. Computer simulation related to salt tectonics in the Dnieper-Donets basin. *Geofizicheskiy zhurnal* [Geophysical journal]. 2010, vol. 32, no. 4, pp. 198–200.
13. Vengrovich D. B., Sheremet G. P. Irregularity of lithospheric stress as a result of plates structure. *18th International Conference Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspect (13-16 May 2019, Kiev, Ukraine)* (to appear).

Надійшла (received) 26.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Венгрович Дмитро Богданович (Vengrovich Dmitriy Bogdanovich, Vengrovich Dmitri Bogdanovich) – кандидат фізико-математичних наук, завідувач відділенням геодинаміки вибуху, Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, м. Київ; e-mail: vengrovich@gmail.com.

UDC 519:537.81

P. P. VOROBIYENKO, I. YU. DMITRIEVA

ANALYTIC SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL MAXWELL SYSTEM AND ITS NUMERICAL IMPLEMENTATION

The differential Maxwell equations are solved constructively under the specific requirements in the spatial Cartesian coordinate system. The expressions of the unknown electromagnetic field vector intensities are found explicitly as the solutions of the general wave equation regarding all scalar components of the initially unknown vector field functions. The aforesaid equation is equivalent to the original Maxwell system. The present results are obtained using two new efficient operator analytical methods which application is shown also for the heterogeneous media. The numerical implementation for the particular case of the considered electrodynamic mathematical model is proposed here as well.

Key words: general wave equation, analytic operator methods, constructive solution, mathematical model.

П. П. ВОРОБІЄНКО, І. Ю. ДМИТРИЄВА

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАКСВЕЛЛА ТА ЙОГО ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ

Запропоновано конструктивне розв'язання диференціальних рівнянь Максвелла за певних умов у просторовій декартовій системі координат. Явні вирази шуканих вектор-функцій напруженості електромагнітного поля знайдено як розв'язки загального хвильового рівняння, еквівалентного вихідній максвелловській системі. Дані результати отримано завдяки двох нових ефективних операторних аналітичних методів, застосування яких продемонстровано також для неоднорідних середовищ. Частковий випадок розглянутої математичної моделі електродинаміки реалізовано чисельно.

Ключові слова: загальне хвильове рівняння, аналітичні операторні методи, конструктивне розв'язання, математична модель.

П. П. ВОРОБИЕНКО, И. Ю. ДМИТРИЕВА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Предложено конструктивное решение дифференциальных уравнений Максвелла при определенных условиях в пространственной декартовой системе координат. Явные выражения искомого вектор-функций напряженностей электромагнитного поля найдены как решения общего волнового уравнения, эквивалентного исходной максвелловской системе. Данные результаты получены с помощью двух новых эффективных операторных аналитических методов, применимость которых продемонстрирована также для неоднородных сред. Частный случай рассмотренной математической модели электродинамики реализован численно.

Ключевые слова: общее волновое уравнение, аналитические операторные методы, конструктивное решение, математическая модель.

© P. P. Vorobiyenko, I. YU. Dmitrieva, 2019

Introduction. The majority of current problems connected with the mathematical simulation of the electromagnetic phenomena in the guided structures and space are described by *the systems of partial differential equations* (PDEs). It is natural, because the original fundamental mathematical model in the electromagnetic field theory is represented by *the differential Maxwell system* [1].

The recent years of the computer expansion directed the scientific tendencies to the numerical and approximate study. However, the challenge of search of the new analytic solving techniques for the applied and engineering problems remains urgent till now. Really, the constructive methods enhance the development of the relevant theory; reveal the principal patterns, rules and laws which are formulated as the general statements and theorems.

Moreover, the engineering can not manage without appropriate computations which become essentially simpler dealing with the explicit solutions and exact formulae. The latter often promote faster getting of the required numerical result as well as determination of the calculated functional dependencies.

Therefore, even nowadays the creation and the improvement of the existing analytic procedures for the research of the respective applied problems are prior.

Analysis of recent studies. It is known that each vector function is determined uniquely by its scalar components which usually are *hidden* in some matrix problem.

Pursuing the twofold goal of analytical as well as effective numerical study, it is better to diagonalize at first the original matrix statement. This operation means the reduction of the initial system to the equivalent union of the equations or problems each of which depends on one scalar component of the unknown vector field function only.

Actually, investigation of the aforesaid scalar statements is either well-known, or the development of their solving procedures is incomparably simpler with respect to the aforesaid vector-matrix problem. Hence, the first step of the present challenge implies the creation of the analytic diagonalization technique which will allow getting the explicit results in the electromagnetic field theory and in the research of the corresponding engineering phenomena as well.

The classical diagonalization methods exist in the general algebra [2] and in *the ordinary differential equations* (ODEs) [3] theory. Still, until the recent years the systems of PDEs mathematically describing the electrodynamic processes were diagonalized mostly in the particular cases [4]. In general, the majority of the electrodynamic problems are solved using the approximate numerical methods of the previous century [5].

Nowadays, the practice confirms that the successful study of the electromagnetic field behavior basing only on the approximate numerical algorithms rather often becomes insufficient [6, 7]. Thus, the general necessity in the development of the effective analytic apparatus for this mentioned scientific branch appears again as extremely claimed.

Problem statement. The general detailed operator diagonalization procedure for a system of PDEs was suggested in [8], its preceding algorithmic scheme as the relevant flow-chart was described in [9], and the particular application to a specific engineering version of the differential Maxwell equations was considered in [10].

The aim of the present article concerns the analytic study of the differential Maxwell statement in the Cartesian coordinate system regardless the initial and boundary conditions in terms of a unified wave equation. The latter is derived by the above mentioned diagonalization technique, contains all scalar components of the unknown electromagnetic field vector intensities and is equivalent to the original system of PDEs. The given wave PDE is solved explicitly using the improved version of the integral transform method [11].

The research proposed in the paper generalizes essentially the results from [12] uniting the improved integral transform apparatus [13] and the aforesaid operator diagonalization procedure

Mathematical model. Let the classical differential Maxwell equations as the base mathematical model in the Cartesian coordinate system be given

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \vec{H} = \partial_0 \vec{D} + \vec{i}; \\ \mathbf{rot} \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}; \\ \mathbf{div} \vec{D} = \rho; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \\ \mathbf{div} \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \\ \vec{i} = \sigma \vec{E}. \end{array} \right. \quad (1)$$

In (1): $\vec{E}, \vec{H} = \vec{E}, \vec{H}(x, y, z, t)$ are the unknown electromagnetic field vector intensities with the scalar components $E_i, H_i = E_i, H_i(x, y, z, t)$, ($i = \overline{1, 3}$); $\vec{D}, \vec{B} = \vec{D}, \vec{B}(x, y, z, t)$ describe the electric and magnetic field induction respectively; $\vec{i} = \vec{i}(x, y, z, t)$ and $\rho = \rho(x, y, z, t)$ determine the current (charges) and charge density; $\sigma, \mu = \mu_0 > 0$, $\epsilon = \epsilon_0 > 0$ denote the specific conductivity, relative magnetic and electric permeability of the medium; $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$;

$\mathbf{rot} F_k = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{div} \vec{F}_k = \sum_{i=1}^3 \partial_i F_{ki}$ represent the fundamental field operations, where

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, and $F_{ki} = F_{ki}(x, y, z, t)$ ($k=1, 2; i=\overline{1, 3}$) are the corresponding scalar components of the electromagnetic field vector intensities $\vec{F}_1, \vec{F}_2 = \vec{F}_1, \vec{F}_2(x, y, z, t)$, $\vec{F}_1, \vec{F}_2 = \vec{E}, \vec{H}$.

Writing (1) in the equivalent form

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \vec{H} = \varepsilon \partial_0 \vec{E} + \sigma \vec{E}; \\ \mathbf{rot} \vec{E} = -\mu \partial_0 \vec{H}; \\ \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho; \\ \mu \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon \partial_0 + \sigma) \vec{E} - \mathbf{rot} \vec{H} = 0; \\ \mathbf{rot} \vec{E} + \mu \partial_0 \vec{H} = 0; \\ \text{-----} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon; \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

and using the diagonalization technique from [12] we reduce the first part of (2) to the following system

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{rot}^2 + \partial_0^2) \vec{E} = 0; \\ \mu \partial_0 (\mathbf{rot}^2 + \partial_0^2) \vec{H} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

with the partial differential operator

$$\partial_0^2 = \mu \partial_0 (\varepsilon \partial_0 + \sigma). \quad (4)$$

Further, the identity of the classical field theory $\mathbf{rot}^2 = \mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta$, $\mathbf{grad} F(x, y, z, t) = \partial_1 F \cdot \vec{i} + \partial_2 F \cdot \vec{j} + \partial_3 F \cdot \vec{k}$,

$\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2$ and the second part from (2) applied to (3) give

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_0^2 - \Delta) \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{grad} \rho; \\ \mu \partial_0 (\partial_0^2 - \Delta) \vec{H} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Then, applying the inverse operator $\partial_0^{-1} = \int dt$ to the second equation from (5), which right-hand part is the zero vector, we arrive at the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_0^2 - \Delta) \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{grad} \rho; \\ (\partial_0^2 - \Delta) \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{g}(x, y, z). \end{array} \right. \quad (6)$$

The vector function $\vec{g}(x, y, z)$ from (6) is the integration result mentioned above determined by the physical character of the specific engineering problem statement.

It is clear that (6) represents diagonalization of (1) at the vector field level and can be written as the general vector wave PDE regarding both electromagnetic field intensities \vec{E} and \vec{H} :

$$(\partial_0^2 - \Delta) \vec{F}_k = \vec{f}_k, \quad (k=1, 2); \quad \vec{F}_1 = \vec{E}, \quad \vec{F}_2 = \vec{H}; \quad \vec{f}_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{grad} \rho, \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\mu} \vec{g}(x, y, z). \quad (7)$$

Simultaneously, it is easy to notice that (7) can be rewritten in its scalar form including all components of \vec{E} and \vec{H} :

$$(\partial_0^2 - \Delta) F_{ki} = f_{ki}, \quad (k=1, 2; i=\overline{1, 3}), \quad (8)$$

where

$$F_{1i} = \{E_i\}_{i=1}^3, \quad F_{2i} = \{H_i\}_{i=1}^3; \quad f_{1i} = -\frac{1}{\varepsilon} \partial_i \rho, \quad f_{2i} = \frac{1}{\mu} g_i(x, y, z), \quad (i=\overline{1, 3}); \quad \mathbf{grad} \rho = \begin{bmatrix} \partial_1 \rho(x, y, z, t) \\ \partial_2 \rho(x, y, z, t) \\ \partial_3 \rho(x, y, z, t) \end{bmatrix},$$

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \\ g_3(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

The explicit solution of (8), (9) and the formulations of the corresponding boundary problems describing investigated electrodynamic phenomena are simpler even in comparison with (7), not mentioning (1) where both the statements and the constructive results are almost unobservable.

Summarizing the ideas of the present paragraph we conclude that the original mathematical model (1) of the elec-

tromagnetic field behaviour is reduced to equivalent form (8), (9) which is easier to deal with. Hence, the exact study of (8), (9) presented below solves (1) explicitly as well.

Main analytic results. The explicit solution of (8), (9) is obtained using the improved method of integral transforms [11] on all spatial variables (x, y, z) but the time argument t , which is accepted as the main one. To simplify the further computation, the following table of symbols is proposed here: the new notations for the spatial variables from \mathbf{R}_3 are $x = x_1, y = x_2, z = x_3$; $K_i = K_i(x_i, p_i)$ stands for the kernel of the i -th integral transform on the argument x_i with the parameter p_i ; and the direct integral operator transform is determined by the formula

$$S_i = \int_{a_i}^{b_i} K_i(x_i, p_i) dx_i,$$

where a_i, b_i are the initial and the endpoint respectively of the open integration contour $L_i, (i = \overline{1, 3})$. The values of a_i, b_i can be either finite or infinite real, or complex [11]. To analyze the influence of the integral transform on $\Delta F = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 F$ the spatial coordinates are rewritten in the form $(x, y, z) = \{x_i, (i = \overline{1, 3})\}$, which makes the function look as follows: $F = F(x, y, z, t) = F(x_i, (i = \overline{1, 3}); t)$.

The application of the i -th integral transform to ΔF followed by double integration by parts gives

$$\int_{a_i}^{b_i} (\partial_i^2 F) K_i(x_i, p_i) dx_i = (K_i(\partial_i F) - (\partial_i K_i) F)|_{x_i=a_i}^{b_i} + \int_{a_i}^{b_i} (\partial_i^2 K_i) F dx_i = s_i(p_i, x_\nu, (\nu \neq i; \nu = \overline{1, 3}); t) + \eta_i(p_i) {}_i F_{tr}, (i = \overline{1, 3}), \tag{10}$$

where

$$s_i = s_i(p_i, x_\nu, (\nu \neq i; \nu = \overline{1, 3}); t) = (K_i(\partial_i F) - (\partial_i K_i) F)|_{x_i=a_i}^{b_i} = s_i(p_i, x_\nu, x_l, t), (\nu, l \neq i; l > \nu), \tag{11}$$

and the right or the left inferior index «tr» everywhere in this paper stands for conversion of the respective transform. Though in general $i, \nu, l = \overline{1, 3}$, two last inequalities in (11) imply that ν, l take on only two values from the possible three. Moreover, the second item $\eta_i(p_i) {}_i F_{tr}$ in the right-hand part of (10) has the factor $\eta_i(p_i)$ dependent only on the parameter p_i of the i -th integral transform. This item results from the operation $\partial_i^2 K_i, (i = \overline{1, 3})$.

Further, the *incomplete* i -th transform of F on the argument $x_i - {}_i F_{tr}$ and the corresponding *complete* one on all spatial variables $(x, y, z) = (x_i, i = \overline{1, 3}) - F_{tr}$ are determined by the following formulae:

$${}_i F_{tr} = {}_i F_{tr}(p_i, x_\nu, (\nu \neq i; \nu = \overline{1, 3}); t) = \int_{a_i}^{b_i} F(x_i, (i = \overline{1, 3}); t) K_i(x_i, p_i) dx_i = \int_{a_i}^{b_i} F K_i dx_i, (i = \overline{1, 3}); \tag{12}$$

$$F_{tr} = F_{tr}(p_i, (i = \overline{1, 3}); t) = F_{tr}(p, t) = \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^3 \int_{a_\nu}^{b_\nu} K_\nu dx_\nu \right) {}_i F_{tr} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_\nu}^{b_\nu} K_\nu(x_\nu, p_\nu) K_l(x_l, p_l) {}_i F_{tr}(p_i, x_\nu, x_l, t) dx_\nu dx_l; p = \bigcup_{i=1}^3 p_i = (p_1, p_2, p_3), (i = \overline{1, 3}), \tag{13}$$

where the conditions for ν, l are the same as in (11).

Problem (8), (9) is solved using the technique from [12, 13] developed in [11], but regardless of the specific boundary and initial conditions. Application of the required integral transforms (12), (13) to the spatial variables $(x, y, z) = (x_i, i = \overline{1, 3})$ reduces the original general wave PDE (8), (9) to the ODE of the second order regarding transforms dependent on the time argument t

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{d}{dt} - \frac{\Delta_{tr}}{\mu \varepsilon} \right) {}_{tr} F_{ki} = {}_{tr} f_{ki}^*, (k = 1, 2; i = \overline{1, 3}). \tag{14}$$

In (14),

$$\Delta_{tr} = \Delta_{tr}(p) = \sum_{i=1}^3 \eta_i(p_i); {}_{tr} f_{ki}^* = {}_{tr} f_{ki} + \sum_{i=1}^3 \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^3 \int_{a_\nu}^{b_\nu} K_\nu dx_\nu \right) s_i; {}_{tr} \tilde{f}_{ki} = \frac{{}_{tr} f_{ki}}{\mu \varepsilon}; (i = \overline{1, 3}; k = 1, 2), \tag{15}$$

the symbols in (15) are either introduced in (10) – (13) or described at the beginning of the present paragraph, and

$$\left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^3 \int_{a_\nu}^{b_\nu} K_\nu dx_\nu \right) s_i = \int_{a_l}^{b_l} \int_{a_\nu}^{b_\nu} K_\nu(x_\nu, p_\nu) K_l(x_l, p_l) s_i(p_i, x_\nu, x_l, t) dx_\nu dx_l, \quad (\nu, l \neq i; l > \nu; i, \nu, l = \overline{1, 3}).$$

The general solution for (14), (15)

$${}_{tr}F_{ki} = {}_{tr}F_{ki}(t, p) = C_1(t, p) \exp(\omega_1 t) + C_2(t, p) \exp(\omega_2 t) \quad (16)$$

is sought by the method of variation of constants [3], where the unknown functions $C_j(t) = C_j(t, p)$, ($j = 1, 2$) represent the solution of the system

$$\begin{cases} C_1' \exp(\omega_1 t) + C_2' \exp(\omega_2 t) = 0; \\ C_1' \omega_1 \exp(\omega_1 t) + C_2' \omega_2 \exp(\omega_2 t) = {}_{tr}f_{ki}^*; \end{cases} \quad C_j' = \frac{\partial C_j}{\partial t}, \quad (j = 1, 2),$$

and looks like

$$C_{1,2}(t, p) = \pm \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \int \exp(-\omega_{1,2} t) {}_{tr}f_{ki}^*(t, p) dt + C_{1,2}^*(p). \quad (17)$$

In (17), the unknown functions $C_{1,2}^*(p)$ are found from the corresponding transformed initial conditions of the specific boundary value problem, which is the mathematical simulation of the studied physical or engineering phenomenon.

It should be noted, that in (16), (17)

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} \pm \sqrt{D} \right) \quad (18)$$

are the roots of the performance (characteristic) equation $\omega^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon} \omega - \frac{\Delta_{tr}}{\varepsilon \mu} = 0$ with the discriminant

$$D = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{4\Delta_{tr}}{\varepsilon \mu}. \quad (19)$$

The substitution of (17) for (16) gives the required general explicit solution of (14)

$${}_{tr}F_{ki} = {}_{tr}F_{ki}(t, p) = \sum_{j=1}^2 C_j(t, p) \exp(\omega_j t) = \sum_{j=1}^2 \exp(\omega_j t) \left(\frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{D}} \int \exp(-\omega_j t) {}_{tr}f_{ki}(t, p) dt + C_j^*(p) \right), \quad (20)$$

where ω_j , ($j = 1, 2$) and D are determined in (18), (19). The direct check confirms that (20) undoubtedly represents the general solution of (14).

The further inversion of the original inverse transform regarding (20) gives the function

$$F_{ki} = F_{ki}(x, y, z, t) = \prod_{l=1}^3 S_l^{-1} {}_{tr}F_{ki}, \quad (k = 1, 2; i = \overline{1, 3}), \quad (21)$$

where S_l^{-1} , ($l = \overline{1, 3}$) are the integral transforms inverse to the initially used one, and ${}_{tr}F_{ki}$ is from (20).

Hence, the required explicit solution (21) of the general scalar wave PDE (8), (9) is obtained and describes all scalar components of the electromagnetic field vector intensities. Formulae (20), (21) can be effectively used when the mathematical modeling for the engineering / physical problem statement is specified and the appropriate exact analytic result is sought for.

Heterogeneous media. It is known that when studying the real electrodynamic engineering problems in heterogeneous media it is often acceptable to consider the coefficients σ, ε, μ in the relevant systems of PDEs as piece-wise constant functions, where ε, μ can be also negative [14, 15]. Such structures are very important in the metamaterials which are used for the construction of the absolutely new types of antennae, filters, etc. However, the necessary condition of the electrodynamic equations states that the electromagnetic wave propagation is possible only in those media where $\text{sgn } \varepsilon = \text{sgn } \mu$. In such cases, the reverse waves appear and the parameters of the medium become controlled owing to the magnetic field modification [14, 15].

Therefore, turning back to (1), (2), the electromagnetic field parameters σ, ε, μ represent now the piece-wise constant functions regarding the spatial coordinates (x, y, z)

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \mu \end{bmatrix} (x, y, z) = \sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l \sigma \\ {}_l \varepsilon \\ {}_l \mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_l V), \quad (22)$$

where: $\delta(x, y, z; {}_lV) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in {}_lV; \\ 0, & (x, y, z) \in V \setminus {}_lV, \end{cases}$ ($l = \overline{1, m}$) is the Kronecker symbol; $V = \bigcup_{l=1}^m {}_lV$ is the finite union of various media ${}_lV = {}_lV(x, y, z)$; ${}_lV \cap {}_\nu V = \emptyset$, $l \neq \nu$, ($l, \nu = \overline{1, m}$), and each of them has its own special field characters ${}_l\sigma, {}_l\varepsilon, {}_l\mu = \text{const}$. In terms of (22), the scalar action of the partial differential operators from (1), (2) looks like

$$\begin{aligned} \partial_j \begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \mu \end{bmatrix} F_{ki}(x, y, z, t) &= \partial_j \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) F_{ki}(x, y, z, t) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) \partial_j F_{ki}(x, y, z, t), \quad (k = 1, 2; i = \overline{1, 3}; j = \overline{0, 3}). \end{aligned} \tag{23}$$

Dealing with the vector field function which is formed by its scalar components, (23) is applied sequentially to each scalar summand in the expression

$$\vec{F}_k(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^3 F_{ki}(x, y, z, t) \vec{e}_i; \quad \vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}; \quad (k = 1, 2).$$

Namely,

$$\begin{aligned} \partial_j \begin{bmatrix} \sigma \\ \varepsilon \\ \mu \end{bmatrix} \vec{F}_k(x, y, z, t) &= \partial_j \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) \vec{F}_k(x, y, z, t) = \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) \partial_j \vec{F}_k(x, y, z, t) = \\ &= \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) \partial_j \left(\sum_{i=1}^3 F_{ki}(x, y, z, t) \vec{e}_i \right) = \left(\sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} {}_l\sigma \\ {}_l\varepsilon \\ {}_l\mu \end{bmatrix} \delta(x, y, z; {}_lV) \right) \left(\sum_{i=1}^3 \partial_j F_{ki}(x, y, z, t) \vec{e}_i \right). \end{aligned} \tag{24}$$

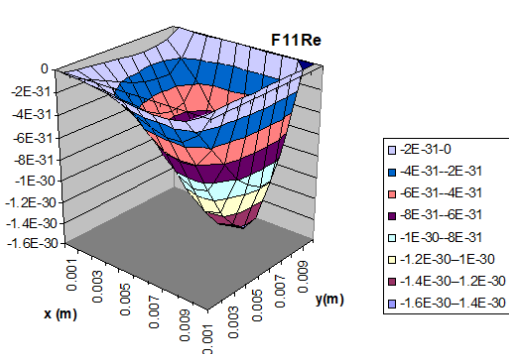


Fig. 1 – The real part of the first scalar component of the electric vector intensity.

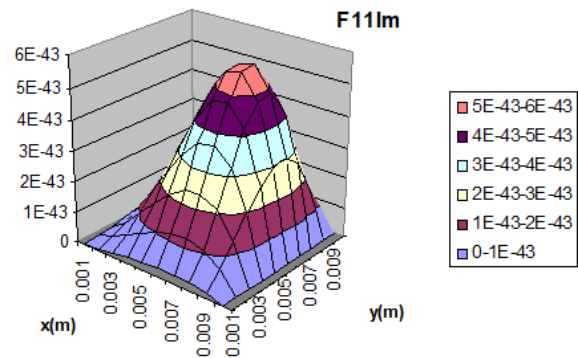


Fig. 2 – The imaginary part of the first scalar component of the electric vector intensity.

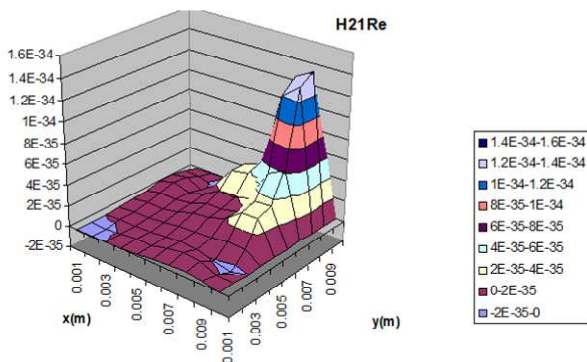


Fig. 3 – The real part of the first scalar component of the magnetic vector intensity.

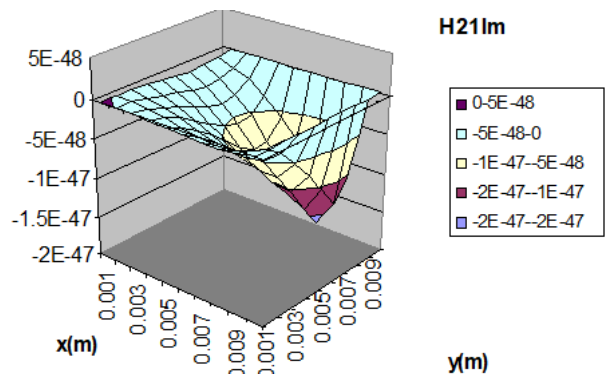


Fig. 4 – The imaginary part of the first scalar component of the magnetic vector intensity.

It is obvious that the final action of the partial differential operators (24) remain here the same, as for the homogeneous medium, accurate within the complete operation result regarding all considered media's bodies, where each of them has its own features ${}_l\sigma, {}_l\varepsilon, {}_l\mu = \text{const}$. Mathematically it means the correctness of the diagonalization operator

procedure [8, 9] for the PDEs systems with the piece-wise constant coefficients. The last fact gives possibility using the method [8, 9], [12] in the heterogeneous electromagnetic field media as well.

Partial numerical implementation. The particular case of the constructive results from this article was realized partially for (1), (2) when the electromagnetic field vector intensities were assumed to be harmonic in the time argument t , i.e. $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \exp(i\omega t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z) \exp(i\omega t)$, where $i = \sqrt{-1}$, and ω was the vibration frequency.

Several frames of the computer simulation for the specific engineering problem regarding study of the spatial rectangular resonator are shown in Figs. 1 – 4 below.

Conclusions. The generalized operator diagonalization procedure evoked by the Gauss algebraic method was applied here to the analytic investigation of the finite dimensional systems of PDEs representing the original mathematical models in the electromagnetic field theory. The proposed apparatus allowed reducing the relevant differential Maxwell equations in the Cartesian coordinate system to the general wave PDEs regarding all scalar components of the electromagnetic field vector intensities.

The aforesaid technique gives opportunity to obtain the required unified scalar equations regardless the specific boundary and initial conditions. The last fact essentially simplifies the mathematical simulation in terms of the corresponding boundary value problem whose explicit solution is got here by the generalization of the integral transform method.

Future research concerns the complete numerical implementation and computer modeling for the various types of the engineering problem mentioned in the preceding paragraph. The heterogeneous media will be considered as well.

Bibliography

1. Maxwell J. Clerk *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1st ed. Vol. 1. – Oxford : Clarendon Press, 1873. – 455 p.
2. Kurosh A. G. *Lectures on General Algebra*. Transl. from the Russian ed. (Moscow, 1960) by K. A. Hirsch. – NY : Chelsey Publishing Company, 1963. – 335 p.
3. Dr. von Kamke E. *Differentialgleichungen : Lösungsmethoden und Lösungen*. Band I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Verbesserte Auflage. – Leipzig : Springer Verlag, 1959. – 642 p.
4. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. – NY : Pergamon Press Ltd., 1963. – 777 p.
5. Mitra R. *Computer Techniques for Electromagnetics*, 1st ed. Intl. Series of Monographs in Electrical Engineering. – Oxford – NY – Toronto – Sydney – Braunschweig : Pergamon Press, 1973. – 416 p.
6. Eds. Goras L., Mitra S. Proc. of the 12th IEEE Intl. Scient. Symp. on Signals, Circuits and Systems (ISSCS 2015); July 9 – 10, 2015, «Gheorghe Asachi» TU of Iasi, Romania. – Iasi : «Gheorghe Asachi» TU; Danvers : IEEE, 2015. – 444 p. – Режим доступу : <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=7180553>. – Дата звертання : 14 березня 2019.
7. Eds. Nazarchuk Z. T., Nosich A. I. Proc. of the 16th IEEE Intl. Scient. Conf. on the Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET'16); July 5 – 7, 2016, I. Franko Lviv National Univ., Ukraine. – Kharkiv : IRE NASU; Danvers : IEEE, 2014. – 432 p.
8. Dmitrieva I. The diagonalization procedure for the finite dimensional differential operator system over the m-dimensional complex space // *Mathematica (Cluj)*. – 2012. – Tome 54(77). – Numero Special. – P. 60 – 67.
9. Dmitrieva I. Operator diagonalization procedure and its numerical realization in the framework of technical electrodynamics // Proc. of the Intl. Scient. Conf. on Econophysics and Complexity (ENEC2010). – Bucharest : Victor Publishing House, 2010. – Vol. 3. – P. 291 – 300.
10. Dmitrieva I. On the constructive solution of n-dimensional differential operator equations' system and its application to the classical Maxwell theory // Proc. of the 6th Congress of Romanian Math. – Bucharest : Editura Academiei Romane, 2009. – Vol. 1. Scientific Contributions. – P. 241 – 246.
11. Tranter C. J. *Integral Transforms in Mathematical Physics*. – London : Methuen and Co. Ltd.; NY : Wiley and Sons, Inc., 1951. – 119 p.
12. Vorobiyenko P., Dmitrieva I. Comparative analysis in study of classical differential Maxwell system for the slow-guided structures // *Hyperion Intl. J. of Econophysics*. – 2015. – Vol. 8. – Is. 2. – P. 333 – 348.
13. Dmitrieva I. Yu. Detailed explicit solution of the electrodynamic wave equations // *Odes'kyi Politechnichniy Universitet PRATSI*. – 2015. – Is. – 2 (46). – P. 145 – 154.
14. Caloz C., Itoh T. *Electromagnetic Metamaterials : Transmission Line Theory and Microwave Applications. The Engineering Approach*. – NJ : John Wiley and Sons Inc., 2006. – 364 p.
15. Marques R., Martin F., Sorolla M. *Metamaterials with Negative Parameters: Theory, Design and Microwave Applications*. – NJ : John Wiley and Sons Inc., 2008. – 315 p.

References (transliterated)

1. Maxwell J. Clerk *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1st ed. Vol. 1. Oxford, Clarendon Press, 1873. 455 p.
2. Kurosh A. G. *Lectures on General Algebra*. Transl. from the Russian ed. (Moscow, 1960) by K. A. Hirsch. NY, Chelsey Publishing Company, 1963. 335 p.
3. Dr. von Kamke E. *Differentialgleichungen : Lösungsmethoden und Lösungen*. Band I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Verbesserte Auflage. Leipzig, Springer Verlag, 1959. 642 p.
4. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. NY, Pergamon Press Ltd., 1963. 777 p.
5. Mitra R. *Computer Techniques for Electromagnetics*, 1st ed. Intl. Series of Monographs in Electrical Engineering. Oxford – NY – Toronto – Sydney – Braunschweig, Pergamon Press, 1973. 416 p.
6. Eds. Goras L., Mitra S. Proc. of the 12th IEEE Intl. Scient. Symp. on Signals, Circuits and Systems (ISSCS 2015); July 9 – 10, 2015, «Gheorghe Asachi» TU of Iasi, Romania. – Iasi : «Gheorghe Asachi» TU; Danvers, IEEE, 2015. 444 p. Available at : <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=7180553>. (accessed 14.03.2019)
7. Eds. Nazarchuk Z. T., Nosich A. I. Proc. of the 16th IEEE Intl. Scient. Conf. on the Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET'16); July 5 – 7, 2016, I. Franko Lviv National Univ., Ukraine. – Kharkiv, IRE NASU; Danvers, IEEE, 2014. 432 p.
8. Dmitrieva I. The diagonalization procedure for the finite dimensional differential operator system over the m-dimensional complex space. *Mathematica (Cluj)*. 2012, Tome 54(77), Numero Special, pp. 60–67.
9. Dmitrieva I. Operator diagonalization procedure and its numerical realization in the framework of technical electrodynamics. *Proc. of the Intl. Scient. Conf. on Econophysics and Complexity (ENEC2010)*. Bucharest, Victor Publishing House, 2010, vol. 3, pp. 291–300.
10. Dmitrieva I. On the constructive solution of n-dimensional differential operator equations' system and its application to the classical Maxwell theory. *Proc. of the 6th Congress of Romanian Math*. Bucharest, Editura Academiei Romane, 2009, vol. 1, Scientific Contributions, pp. 241–246.

11. Tranter C. J. *Integral Transforms in Mathematical Physics*. London, Methuen and Co. Ltd., NY, Wiley and Sons, Inc., 1951. 119 p.
12. Vorobiyenko P., Dmitrieva I. Comparative analysis in study of classical differential Maxwell system for the slow-guided structures. *Hyperion Intl. J. of Econophysics*. 2015, vol. 8, is. 2, pp. 333–348.
13. Dmitrieva I. Yu. Detailed explicit solution of the electrodynamic wave equations. *Odes'kyi Politechnichniy Universitet PRATSI*. 2015, is. 2 (46), pp. 145–154.
14. Caloz C., Itoh T. *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications. The Engineering Approach*. NJ, John Wiley and Sons Inc., 2006. 364 p.
15. Marques R., Martin F., Sorolla M. *Metamaterials with Negative Parameters: Theory, Design and Microwave Applications*. NJ, John Wiley and Sons Inc., 2008. 315 p.

Received (ноступила) 16.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воробієнко Петро Петрович (Воробийенко Петр Петрович, Vorobiyenko Peter Petrovich) – доктор технічних наук, професор, ректор, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, м. Одеса; тел.: (050) 183-53-65; e-mail: vorobiyenko@onat.edu.ua.

Дмитрієва Ірина Юрївна (Дмитриева Ирина Юрьевна, Dmitrieva Irina Yuriyevna) – доктор технічних наук, доцент, зав. кафедрою вищої математики, Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова, м. Одеса; тел.: (066) 075-03-50; e-mail: dmitrievairina2017@gmail.com.

УДК 532.526;542

Г. А. ВОРОПАЕВ, А. А. БАСКОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕХОДА В ТРУБАХ СО СПИРАЛЬНЫМ ГОФРИРОВАНИЕМ

Проведено пряме численне моделювання неізотермічного течення на початкових ділянках гладкої труби і труби з гофрованими вставками різної геометрії при перехідних числах Рейнольдса. Проаналізовано виникнення та розвиток коливальних процесів в гладкій трубі і трубах з гофрованими вставками. Ісследовані особливості структури вихрового руху та зміни гідродинамічних параметрів в гофрованих вставках різної геометрії. Визначено ступінь впливу кута нахилу гофрування до осі труби на гідродинамічні процеси в сліді після гофрованої вставки.

Ключевые слова: течення в трубі, перехідні числа Рейнольдса, вихрові возмущення, неізотермічний потік, пряме і виточе гофрування, частинне гофрування.

Г. О. ВОРОПАЄВ, О. О. БАСКОВА

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПЕРЕХОДУ В ТРУБАХ ІЗ СПИРАЛЬНИМ ГОФРУВАННЯМ

Проведено пряме численне моделювання неізотермічної течії на початкових ділянках гладкої труби і труби з гофрованими вставками різної геометрії при перехідних числах Рейнольдса. Проаналізовано виникнення та розвиток коливальних процесів в гладкій трубі і трубах з гофрованими вставками. Досліджені особливості структури вихрового руху та зміни гідродинамічних параметрів в гофрованих вставках різної геометрії. Визначено ступінь впливу кута нахилу гофрування до осі труби на гідродинамічні процеси в сліді після гофрованої вставки.

Ключові слова: течія в трубі, перехідні числа Рейнольдса, вихрові збурення, неізотермічний потік, пряме та виточе гофрування, часткове гофрування.

Г. А. ВОРОПАЕВ, А. А. БАСКОВА

MODELING OF TRANSITION PROCESS IN TUBES WITH SPIRAL CORRUGATION

A direct numerical simulation of non-isothermal flow in the initial sections of a smooth pipe and a pipe with corrugated inserts of various geometry at transitional Reynolds numbers was carried out. The formation and development of a three-dimensional unsteady flow structure in a smooth tube and tubes with corrugated inserts were analyzed. The structure of the flow and the nature of changes in the hydrodynamic parameters inside the corrugated insert were investigated. The influence of corrugation geometry on the flow mixing and the nature of hydrodynamic parameters distribution in the flow after the corrugated insert were analyzed. An increase in hydraulic losses of up to 9% in tubes with corrugated inserts compared to a smooth tube was observed and its dependence on the geometry of corrugation was studied.

Key words: flow in a tube, transitional Reynolds numbers, vortex disturbances, non-isothermal flow, straight and spiral corrugation, partial corrugation.

Введение. Общеизвестно, что термогидравлические характеристики внутренних течений при *переходных числах Рейнольдса* определяются *режимом течения (ламинарный или турбулентный)*, формирующимся в устройствах в зависимости от условий на входе, качества и вида геометрии поверхности, а также изменяемости физических параметров текущей среды. В протяженных устройствах при изменении проходных сечений режим течения может непредсказуемо меняться, что приводит к резкому изменению термо-гидравлических характеристик теплообменных устройств.

Вместе с тем, теоретический классический анализ течения в трубах постоянного диаметра не дает пороговых чисел Рейнольдса потери устойчивости течения, в отличие от устойчивости пограничных слоев, где теоретический линейный анализ потери устойчивости качественно и количественно подтверждается экспериментом.

© Г. А. Воропаев, А. А. Баскова, 2019

Возникновение волновых возмущений в стационарных ламинарных безотрывных потоках происходит или может происходить вследствие развития бесконечно малых возмущений, которые всегда существуют в потоке. Процесс их развития и трансформация в регулярные или хаотичные вихревые системы может происходить по разным сценариям, которые определяются сочетанием параметров потока и их величиной [1, 2]. На начальном участке, когда толщина пограничного слоя существенно меньше радиуса трубы, можно воспользоваться результатами анализа устойчивости на пластине, где выделяют три этапа перехода. Первый этап достаточно хорошо описывается *двумерной теорией устойчивости волн Толлмина – Шлихтинга*. Число Рейнольдса, рассчитанное по длине от входа, для протяженности этого этапа не превышает 19000 [1]. Вторым этапом – этапом *конечных амплитуд возмущений скорости и давления*, где наблюдается сильное влияние трехмерности, исключаяющей двумерный подход, который характеризуется диапазоном чисел Рейнольдса, рассчитанных по размеру энергосодержащих вихрей, достигающих значений 6580 [2]. На этой стадии доминирующие структуры появляются либо в виде симметричных *подковообразных / лямбда- / шпичечных вихрей*, либо *квазипродольных вихрей* [3]. Эти вихревые образования нестабильны и разрушаются, способствуя переходу к третьему этапу, который характеризуется зарождением *турбулентных пятен* и последующим объединением этих пятен.

Таким образом, если переход наступает раньше, чем толщина пограничного слоя на поверхности трубы становится сопоставимой с радиусом трубы, говорить об устойчивости асимптотического параболического профиля не имеет смысла и можно рассматривать турбулентный режим с начального участка. Однако протяженность начальных участков для неизотермических потоков может составлять сотни диаметров и погрешность в определении термогидравлических характеристик становится неприемлемой.

Поэтому очень большой диапазон чисел Рейнольдса, выпадающий из области практического применения, требует дополнительных исследований для конкретных видов начальных участков, в которых возникают и формируются крупномасштабные возмущения, определяющие интегральные характеристики внутренних течений.

Анализ последних исследований. Переходные процессы в плоском канале и трубе [4] разделяют по характерному безразмерному параметру $t^* = tU_b / R$, где t – время; U_b – средняя скорость; R – радиус трубы, на три этапа.

Начальный этап, наблюдаемый до $t^* \leq 21$, характеризуется формированием тонкого пограничного слоя и единичных вихревых возмущений внутри него. Ядро потока остается невозмущенным. На этом этапе при числах Рейнольдса меньше 2000 конечные возмущения, внесенные в поток, затухают [5]. Более того, в работе [6] доказывают существование **критических** значений амплитуд начальных возмущений, необходимых для начала переходных процессов. С увеличением числа Рейнольдса критические значения амплитуд начальных возмущений уменьшаются.

На переходном этапе ($21 < t^* < 42$) существующие в потоке возмущения растут и формируют турбулентные пятна. Эти пятна распространяются по всей области течения и объединяются друг с другом. Течение становится полностью турбулентным при $t^* \geq 42$.

До $t^* = 30$ в трубе и плоском канале процессы перехода протекают одинаково. При $t^* > 30$ сравнение, проводимое путем оценивания как мгновенных, так и усредненных по ансамблю статистических значений гидродинамических характеристик, показало, что основные отличия проявляются в ядре потока, где разница в гидродинамических параметрах достигает до 20 % [4]. В трубе турбулизация основного потока происходит быстрее из-за более сильного перемешивания, так как пространство по периметру сужается по направлению к центру.

Бифуркационный процесс перехода в потоке в работе [7] анализируется на основании введенного, следуя *идеи Ландау*, функционала, позволяющего отслеживать изменение возмущений определенного масштаба в зависимости от числа Рейнольдса, но, в отличие от *энергетического функционала Ландау*, критическое число Рейнольдса не постулируется, а определяется на основании *теории перколяции*. Пространственно-временной процесс появления турбулентных пятен в ламинарном потоке, образованных возмущениями различных масштабов, представляется *этапом бистабильности*, когда могут сосуществовать зоны соответствующие турбулентности и зоны регулярных многомасштабных дискретных возмущений.

Энергоэффективность при переходном режиме течения и существенной *неизотермичности потока* в трубах связывают с низкочастотными собственными возмущениями потока, которые видоизменяются гофрированной поверхностью трубы и приводят к существенному возрастанию теплоотдачи (до 3 раз) при соответствующем возрастании гидравлических потерь [8, 9].

Учитывая сказанное выше, задача определения условия формирования *асимптотического профиля* и его устойчивости на начальном участке трубы при изменяемой геометрии поверхности и неизотермичности потока остается актуальной.

Постановка задачи. Исследуется влияние частичного гофрирования теплообменной поверхности на переходные процессы в трубе. Рассматривается начальный участок трубы с диаметром $d = 70$ мм, длиной $45d$ с гофрированной вставкой длиной $4,3d$. Длина волны гофра $\lambda_{\text{гоф}} = 20$ мм, амплитуда $a = 3$ мм, угол наклона гофра к оси трубы $\beta = 70^\circ; 80^\circ; 90^\circ$ (рис. 1, а). Угол наклона гофрирования задается количеством заходов, так

при $\beta = 80^\circ$ шаг винтового гофрирования составлял $2\lambda_{гоф}$, при $\beta = 70^\circ - 4\lambda_{гоф}$. Для оценки степени влияния закрутки потока на переходные процессы и энергоэффективность результаты сопоставляются с прямым гофром с длиной волны $\lambda_{гоф}$ ($\beta = 90^\circ$). Площадь поверхности трубы с гофрированной стенкой больше площади гладкой трубы не более чем на 5%. Параметры потока на входе: $Re = 5300$ ($U_0 = 0,1$ м/с), $Pr_f = 2,93$; на стенке число Прандтля составляет $Pr_w = 9,52$.



Рис. 1 – Геометрия трубы: а – геометрические параметры гофрирования; б – фрагмент расчетной сетки.

Задача исследования состоит в определении влияния *типа гофрирования (прямое, витое)* и угла наклона гофрирования на переходные процессы и энергоэффективность трубы.

Математическая модель. Для проведения математического моделирования течения на начальном участке частично гофрированной трубы выбран метод прямого численного моделирования. Математическая модель течения вязкой несжимаемой жидкости состоит из системы нестационарных трехмерных уравнений, записанных в декартовой системе координат:

– уравнения движения Навье – Стокса:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right),$$

где $i, j = 1, \dots, 3$; ρ – плотность среды;

– уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0;$$

– уравнение энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\mu}{2c_p \rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, представлен полиномиальной функцией [10]; a – коэффициент теплопроводности; c_p – теплоемкость.

Для конвективных членов уравнений модели выбрана схема дискретизации второго порядка точности, которая позволяет получить более точный результат в случае сложных течений.

В качестве схемы интерполяции уравнения коррекции давления также установлена *схема второго порядка (Second Order Scheme)*.

В качестве алгоритма связи полей давления и скорости был выбран *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE)* с коэффициентами релаксации для давления – 0,3, для момента – 0,7, для энергии и плотности – 1. С учетом достаточно мелкой сетки и небольшого шага по времени данный метод вполне удовлетворяет условиям исследования.

Фрагмент расчётной сетки приведен на рис. 1, б. Построена сетка смешанного типа: структурированная область вблизи стенок на входном и выходном патрубках и неструктурированная в ядре потока и гофрированной вставке. Наименьший размер ячеек у стенки трубы, значение параметра $h^+ = (\tau / \rho)^{0,5} - \Delta r / \nu$ (τ – напряжение трения, ν – кинематическая вязкость, Δr – шаг сетки) меньше 0,4, что позволяло достоверно описывать процессы в *пристеночной области*. Количество ячеек 5,2 млн. Шаг по времени подобран таким образом, чтобы значение *числа Куранта* не превышало 2.

При проведении расчетов контролировался процесс сходимости решения путем наблюдения за величиной невязок в ходе итерирования. Задавались абсолютные критерии сходимости, по которым невязки каждого уравнения на каждой итерации сравнивались с заданным минимальным значением 0,001.

Результаты математического моделирования. Численный эксперимент в гладкой трубе в *осесимметричной постановке*, результаты которого представлены в [10], показал *затухание осцилляций* в потоке при чис-

лах Рейнольдса меньших 2000. В потоках при $Re \geq 2300$ на некотором расстоянии от входа фиксируется появление низкочастотных осцилляций. В неизотермичных потоках воды при холодной стенке трубы это расстояние уменьшается. Так при числе Рейнольдса $Re \geq 5300$ и $\Delta T = 50^\circ$ это расстояние составляет $12d$.

В настоящей работе представляются результаты трехмерного численного моделирования развития возмущений в неизотермичных потоках в трубах с гофрированными вставками различной геометрии при таких же значениях числа Рейнольдса и температурного напора, что и в [10].

Для физических параметров потока превышение уровня осцилляций порогового значения амплитуды в 5 % от среднего значения считается точкой потери устойчивости. Расстояние от входа до этой точки составляет $11d$, что коррелирует с двумерной постановкой задачи. Формирующиеся упорядоченные синусоидальные колебания, распространяясь вниз по потоку, увеличиваются по амплитуде, что показано на примере развития возмущений напряжения трения на поверхности труб (рис. 2). При этом на начальном этапе длины волн практически не меняются и составляют $\lambda = (0,55 \dots 0,65)d$. Безразмерная фазовая скорость этих возмущений относительно местной максимальной скорости U изменяется в диапазоне $C_\phi / U = 0,5 \dots 0,56$. По мере продвижения вниз по течению характер колебаний меняется. Упорядоченные синусоидальные колебания на расстоянии от входа порядка $15d$ скачкообразно переходят в нерегулярные. Хаотизация этого переходного процесса происходит на фоне существенного возрастания масштабов возмущений, что показано на примере изменения характера распределения значений напряжения трения на участке между $15d$ и $21d$.

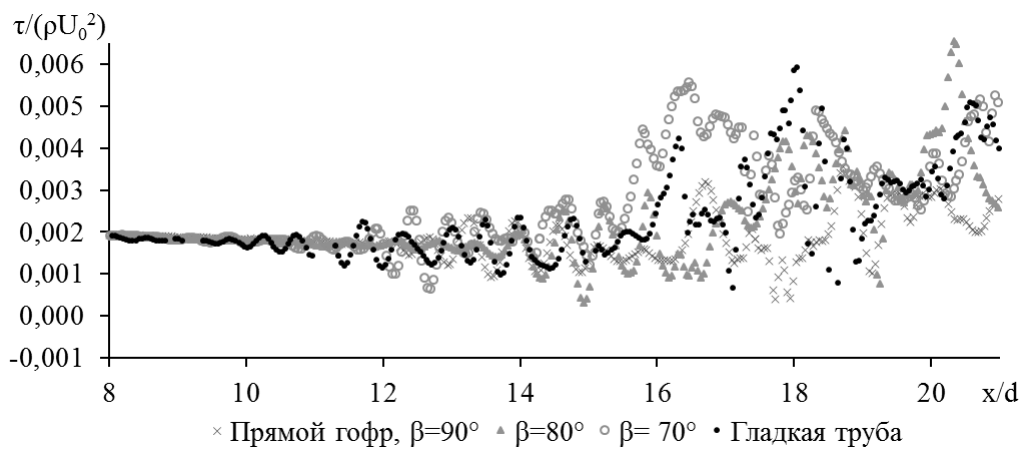


Рис. 2 – Значение напряжения трения τ_x на входном патрубке.

В область гофрированной вставки набегают возмущенный поток с длинами волн, двукратно превышающими длину волн гофров. Внутри гофрированной вставки происходит наложение собственных длинноволновых возмущений потока и относительно коротковолновых возмущений, генерируемых гофрированием, что приводит к существенным изменениям напряжения трения (рис. 3).

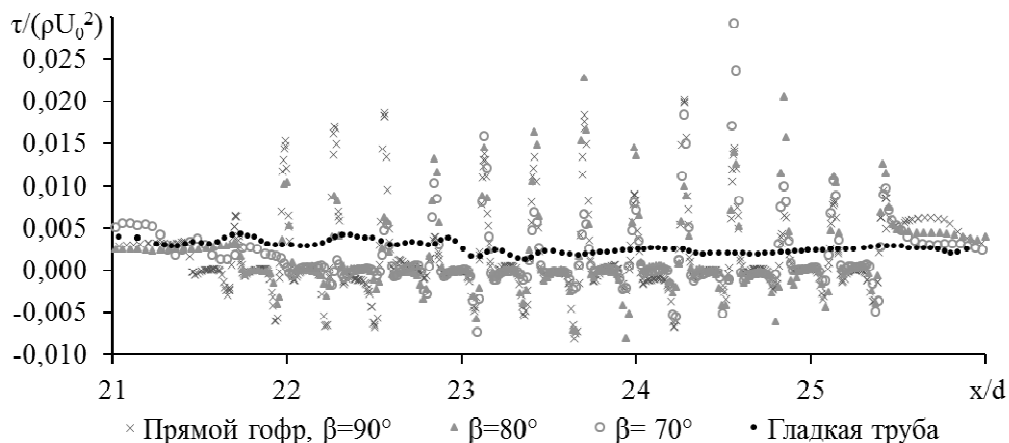


Рис. 3 – Напряжение трения τ_x на гофрированной вставке.

Изменения физических параметров в углублениях гофров обусловлены коротковолновыми возмущениями. Внутри гофров формируется сложная вихревая система (рис. 4) изменяющаяся от гофра к гофру. В начале гофрированной вставки внутри первых углублений формируются моновихревые структуры, интенсивность которых увеличивается при движении вниз по потоку. По мере развития возмущений увеличиваются значения физиче-

ских параметров на гребнях гофров (рис. 3). В конце гофрированной вставки в углублениях формируются *несимметричные многовихревые структуры*, прижатые к наветренной стороне гофра. Вместе с тем разница осредненного значения напряжения трения по длине гофрированной вставки, по сравнению с аналогичным участком гладкой трубы, не превышает 20 %.

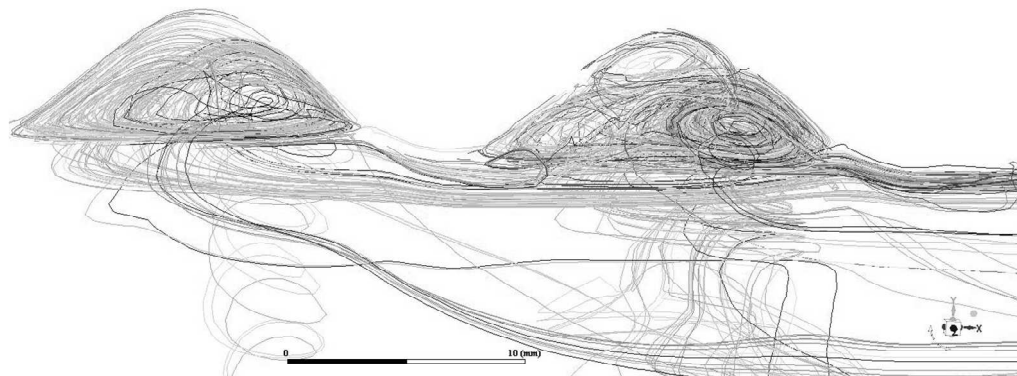


Рис. 4 – Вихревая структура в углублении гофрированной вставки при $\beta = 80^\circ$.

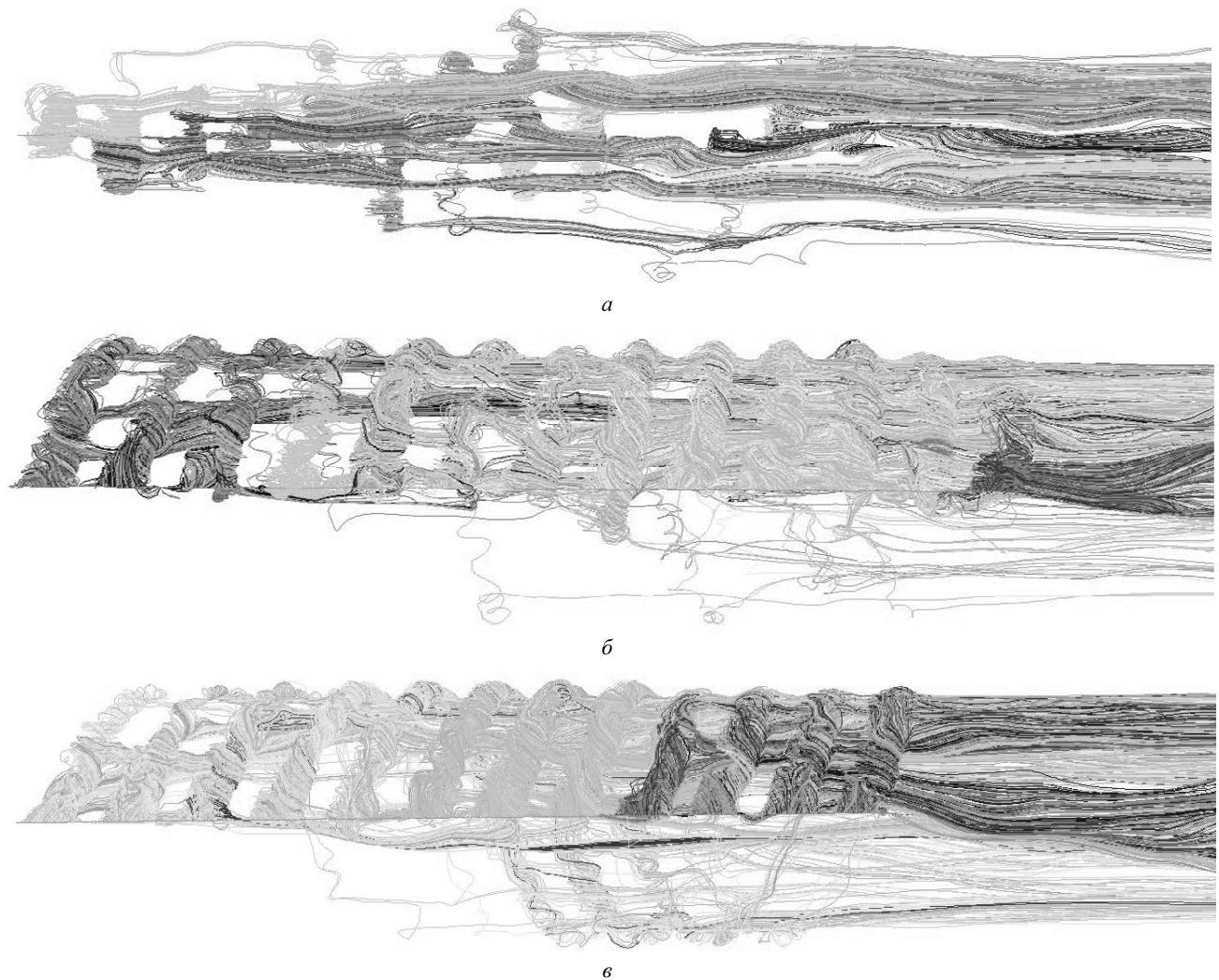


Рис. 5 – Треки меченых частиц на участках гофрированных вставок и в следе за ними: а – $\beta = 90^\circ$; б – $\beta = 80^\circ$; в – $\beta = 70^\circ$.

С уменьшением угла β устойчивость вихревого движения внутри углублений гофров увеличивается, что показывают траектории меченых частиц, представленные на рис. 5. Частица, попадая в углубление гофра, отклоняется от движения вдоль оси трубы. Становясь частью вихревого образования одновременно с движением по линии, образующей гофра, она вовлечена во вращательное движение внутри углубления. При прямом гофрировании частицы, попадая в углубление и совершая вихревые движения внутри него, практически не теряют

своего сечения, переходя в следующее углубление гофра. Частица, покинувшая углубление гофра, быстро уносится основным течением, способствуя *массообмену* между углублением и ядром потока, а также другими углублениями, куда частица попадает с большей энергией. При витом типе гофрирования частица покидает углубление на большем расстоянии от места попадания в углубление, и в каждом последующем гофре это расстояние увеличивается, но при этом снижается интенсивность теплообмена из-за менее интенсивного массообмена с ядром потока. Покидая гофрированную вставку, возмущения трансформируются в длинноволновые нерегулярные образования с изменяемыми длинами волн и резко возрастающими амплитудами, фазовая скорость которых стремится к местной максимальной скорости потока.

Значения перепада давления возрастает с увеличением угла β и при прямом гофрировании ($\beta = 90^\circ$) превышает перепад давления в гладкой трубе при данном числе Рейнольдса и разнице температур на 10 %.

Перспективы дальнейших исследований. Для более детального изучения влияния угла β на процессы перехода в трубах с гофрированными вставками целесообразно провести исследования в более широком диапазоне углов наклона гофрирования к оси трубы. Целесообразно изучить и влияние длины углубления гофра на процессы перехода.

Выводы. Полученные результаты численного моделирования возникновения и развития возмущений в трубе при переходных числах Рейнольдса в неизотермическом потоке подтверждают трехэтапность перехода с изменением структуры возмущений от регулярных длинноволновых возмущений, аналогичных волне Толлмина – Шлихтинга, но с конечной амплитудой, к многочастотной структуре возмущений с изменяемыми длинами волн и фазовыми скоростями их распространения, с вырождением высокочастотных составляющих, что приводит к образованию прослоек, аналогичных *турбулентным пятнам Эммонса*. Гофрированная поверхность, генерирующая вихревые возмущения в соответствии с длиной волны гофра, изменяет структуру возмущений основного потока, навязывая ему масштабы возмущений гофрированной поверхности, что способствует затягиванию переходных процессов, но, сохраняя крупномасштабные вихревые структуры, что приводит к существенному увеличению тепловых потоков.

Список литературы

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D. The three-dimensional nature of boundary-layer transition // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1962. – Vol. 12. – P. 1 – 34.
2. Ovchinnikov V., Meelan M. Choudhari, Ugo Piomelli. Numerical simulations of boundary-layer bypass transition due to high-amplitude free-stream turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2008. – Vol. 613. – P. 135 – 169.
3. Cossu C., Pujals G., Depardon S. Optimal transient growth and very large-scale structures in turbulent boundary layers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2009. – Vol. 619. – P. 79 – 94.
4. He K., Seddighi M., He S. DNS study of a pipe flow following a step increase in flow rate // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. – 2016. – Vol. 57. – P. 130 – 141.
5. Avila M., Willis A. P., Hof B. On the transient nature of localized pipe flow turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2010. – Vol. 289. – P. 83 – 114.
6. Darbyshire A. G., Mullin T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – Vol. 646. – P. 127 – 136.
7. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2016. – Vol. 803. – P. 1 – 79.
8. Vicente P. G., Garc A., Viedma A. Experimental investigation on heat transfer and frictional characteristics of spirally corrugated tubes in turbulent flow at different Prandtl numbers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2004. – Vol. 47. – P. 671 – 681.
9. Hærvig J., Condra T., Sørensen K. Numerical Investigation of Single-phase Fully Developed Heat Transfer and Pressure Loss in Spirally Corrugated Tubes // *Proceedings of the 56th SIMS*. – Linköping, Sweden, 2015. – P. 391 – 397.
10. Баскова А. А., Воронаев Г. А. Структура вихревого неизотермического течения на начальном участке трубы при переходных числах Рейнольдса // *Гидродинамика и акустика*. – 2018. – Т. 1 (91). – № 2. – С. 117 – 131.

References (transliterated)

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D. The three-dimensional nature of boundary-layer transition. *Journal of Fluid Mechanics*. 1962, vol. 12, pp. 1–34.
2. Ovchinnikov V., Meelan M. Choudhari, Ugo Piomelli. Numerical simulations of boundary-layer bypass transition due to high-amplitude free-stream turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2008, vol. 613, pp. 135–169.
3. Cossu C., Pujals G., Depardon S. Optimal transient growth and very large-scale structures in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*. 2009, vol. 619, pp. 79–94.
4. He K., Seddighi M., He S. DNS study of a pipe flow following a step increase in flow rate. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2016, vol. 57, pp. 130–141.
5. Avila M., Willis A. P., Hof B. On the transient nature of localized pipe flow turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010, vol. 289, pp. 83–114.
6. Darbyshire A. G., Mullin T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995, vol. 646, pp. 127–136.
7. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016, vol. 803, pp. 1–79.
8. Vicente P. G., Garc A., Viedma A. Experimental investigation on heat transfer and frictional characteristics of spirally corrugated tubes in turbulent flow at different Prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004, vol. 47, pp. 671–681.
9. Hærvig J., Condra T., Sørensen K. Numerical Investigation of Single-phase Fully Developed Heat Transfer and Pressure Loss in Spirally Corrugated Tubes. *Proceedings of the 56th SIMS*. Linköping, Sweden, 2015, pp. 391–397.
10. Baskova A. A., Voropaev G. A. Struktura vikhrevogo neizotermicheskogo techeniya na nachal'nom uchastke truby pri perekhodnykh chislakh Reynol'dsa [Structure of vortex nonisothermal flow in the initial section of a pipe at transient Reynolds numbers]. *Gidrodinamika i akustika* [Hydrodynamics and Acoustics]. 2018, vol. 1 (91), no. 2, pp. 117–131.

Поступила (received) 16.03.2019

Воропаєв Геннадій Олександрович (Voropaiev Gennadii Aleksandrovich) – доктор фізико-математичних наук, професор Інститут гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: +38(044)371–65–17; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Баскова Олександра Олександрівна (Baskova Aleksandra Aleksandrovna) – магістр, провідний інженер, Інститут гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: (068) 198-93-75; e-mail: BaskAleksandra@gmail.com.

УДК 532.526.517

Г. О. ВОРОПАЄВ, Н. Ф. ДИМИТРИЄВА

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИХОРОВИХ ТЕЧІЙ В НАПІВЦИЛІНДРИЧНОМУ ЗАГЛИБЛЕННІ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІДКРИТИХ ПАКЕТІВ SALOME, OPENFOAM, PARAVIEW

Чисельними методами з використанням високопродуктивних обчислювальних технологій досліджено нестационарну тривимірну структуру течії в напівциліндричному заглибленні. Обговорюються закономірності формування і розподілу системи вихорів, що виникають в заглибленні залежно від числа Рейнольдса, розмірів і повороту до потоку. Показано, що велику роль грають бічні стінки, що формують складну систему, що руйнує головний трансверсальний вихор та сприяє його викидам.

Ключові слова: напівциліндричне заглиблення, генератор вихорів, керування примежовим шаром, чисельне моделювання.

Г. А. ВОРОПАЕВ, Н. Ф. ДИМИТРИЄВА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОЛУЦИЛИНДРИЧЕСКОМ УГЛУБЛЕНИИ С ПОМОЩЬЮ ОТКРЫТЫХ ПАКЕТОВ SALOME, OPENFOAM, PARAVIEW

Численными методами с использованием высокопроизводительных вычислительных технологий исследована нестационарная трехмерная структура течения в полуцилиндрическом углублении. Обсуждаются закономерности формирования и распределения системы вихрей, возникающих в углублении в зависимости от числа Рейнольдса, размеров и поворота к потоку. Показано, что важную роль играют боковые стенки, формирующие сложную систему, которая разрушает главный трансверсальный вихрь и способствует его выбросам.

Ключевые слова: полуцилиндрическое углубление, генератор вихрей, управление пограничным слоем, численное моделирование.

G. A. VOROPAIEV, N. F. DIMITRIEVA

NUMERICAL SIMULATION OF VORTEX FLOWS IN A SEMI-CYLINDRICAL DIMPLE USING SALOME, OPENFOAM, PARAVIEW OPEN SOURCE PACKAGES

Transient 3D flow structure in a semi-cylindrical dimple is investigated by numerical methods using high-performance computing technologies. Patterns of formation and distribution of the system of vortices that occur in the dimples depending on the Reynolds number, size and rotation to the flow are discussed. It is shown that the side walls forming a complex system of vortices play an important role. The wall destroys the main transversal vortex and contributes to its emissions into the external flow. The proposed method of numerical simulation has shown its effectiveness in a wide range of parameters of the problem and is consistent with experimental data.

Key words: semi-cylindrical dimple, vortex generator, flow control, numerical simulation.

Вступ. Керування примежовим шаром генерацією вихорів нав'язує турбулентній течії детерміновану вихрову структуру заданого масштабу та інтенсивності, яка може призводити до зменшення швидкості наростання товщини примежового шару вниз за течією та підтримувати енергетичний баланс між *пульсаційним полем* і *осередненою течією*. Під час відриву вихорів з гострих кромek *вихорогенераторів*, в примежовий шар обтічного тіла або в відривну течію генеруються досить стійкі поздовжні вихори [1, 2]. Характерні масштаби цих вихрових структур, їх інтенсивність визначають кількісні значення величин аерогідродинамічного опору рухомих тіл.

Аналіз попередніх досліджень. Проблема вивчення вихрових структур у турбулентному примежовому шарі на поверхні з геометричними неоднорідностями, умов їх виникнення і розвитку залишається актуальною і на сьогодні, не дивлячись на те, що цій проблемі вже присвячено величезну кількість експериментальних і теоретичних досліджень. За допомогою використання заглиблень, що нанесені на обтічну поверхню, є можливість значно підвищити ефективність багатьох інженерно-технічних систем. При цьому використовується багато чинників складного механізму утворення вихорів всередині заглиблень, їх масштабна різноманітність і особливості викиду назовні із обтічних лунок. Використання груп ідентичних заглиблень часто дають суттєвий вииграш у збереженні питомої енергії, а також для досягнення кращих якостей обтічних поверхонь [3].

Підвищена зацікавленість до використання сферичних заглиблень в якості інтенсифікаторів теплообміну та елементів керування примежовим шаром пов'язана головним чином з тим, що спортивне знаряддя, наприклад, м'яч для гри у гольф, яке має на своїй поверхні лунки, мають тенденцію пролітати більшу відстань [4]. Також елементи організованої шорсткості мають: м'ячі для гри в баскетбол, волейбол, футбол, які називають швидкісними м'ячами.

Нанесення заглиблень на обтічну поверхню дає можливість зменшити акустичний шум, що утворюють пропелери двигунів літаків. Досліди показали [5], що рівень шуму пропелера з лунками майже у два рази нижче за традиційний за рахунок зменшення зони відриву на кормовій стороні профілю.

Надзвичайно добре вивчені заглиблення у вигляді сферичних сегментів – як одиночних, так і їх ансамблів. У роботі [6] зібрано інформацію про режими обтікання одиночних заглиблень у вигляді сферичних сегментів різної конфігурації. Взаємодія вихорів, що генеруються системою заглиблень на плоскій поверхні, представляє собою не хаотичну групу вихорів, а самоорганізовані вихрові структури, які взаємно координують свою поведінку. Специфічна вихрова структура, тривимірна і нестационарна завихреність, мала висота вихорів над поверхнею із заглибленнями дає високий рівень теплообміну та відносно низькі втрати тиску.

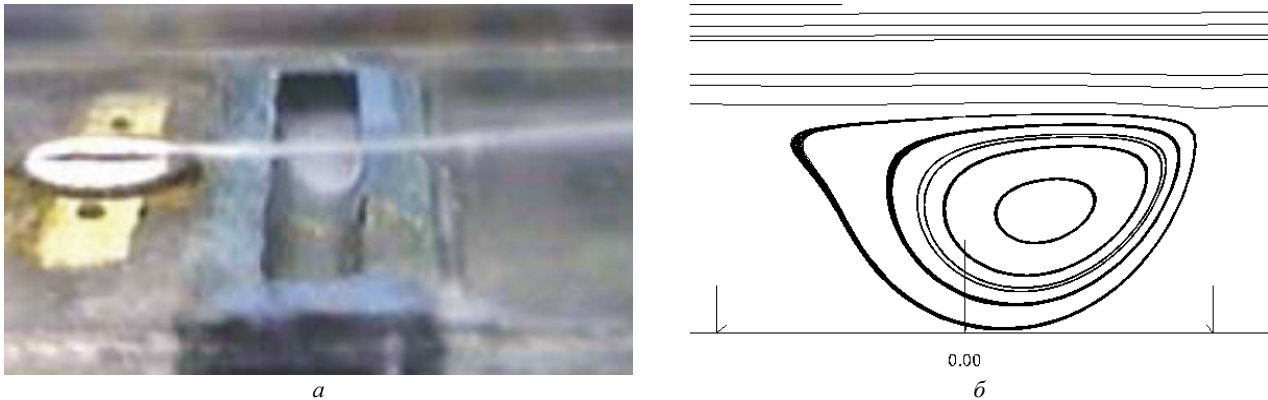


Рис. 1 – Візуалізація вихрової структури в напівциліндричному заглибленні ($Re = 10^3$):
а – експериментальні дані; б – результати розрахунків.

В останні роки зроблено багато дослідів з метою визначення оптимальної конфігурації лункової поверхні. Так, у роботах [7, 8] було проведено чисельне моделювання з визначення особливостей теплопереносу на лункових поверхнях семи різних форм лунок. Знайдено, що найбільша теплофізична ефективність і найбільша вихрова інтенсивність спостерігаються на нахилених циліндричних лунках. У роботі [9] експериментально досліджувався переніс тепла у прямокутному каналі, в якому зроблено *V*-подібні лунки. Результати показали, що запропонована форма більш ефективна за визначених умов, ніж традиційні виступи або сферичні лунки.

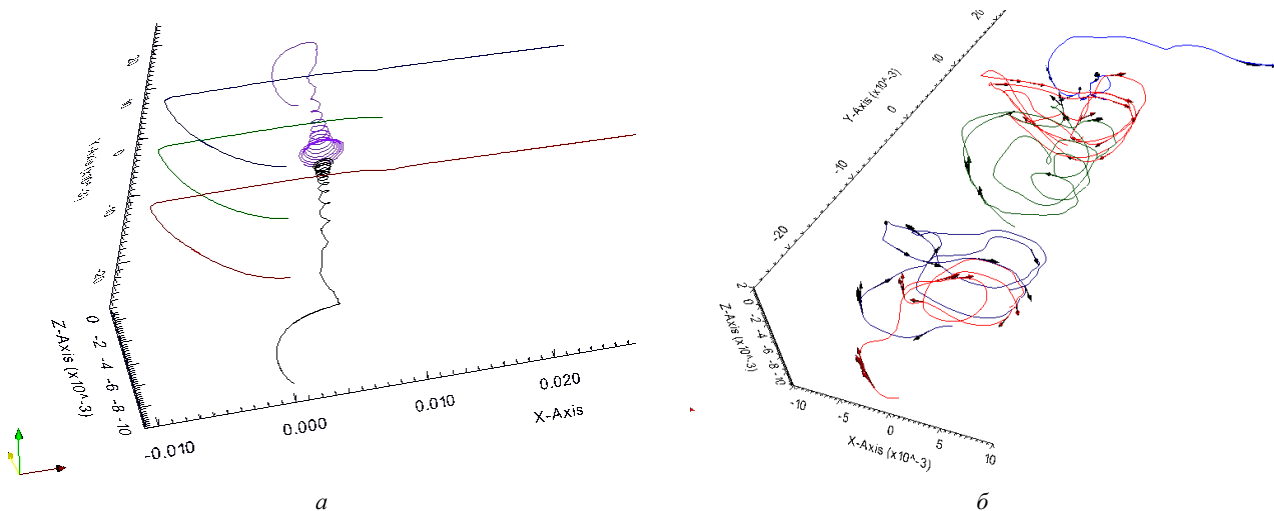


Рис. 2 – Лінії току при швидкості обтікання: а – $Re = 2 \cdot 10^3$; б – $Re = 1,6 \cdot 10^4$.

Основне призначення методу керування потоком генераторами вихорів в примежовому шарі полягає у мінімізації енергії на подолання опору форми, яку необхідно трансформувати в енергію вихрових структур, що змінюють структуру турбулентності в примежовому шарі. Тому більш глибоке вивчення формування та розподілу вихрових структур, а також пошук найефективніших форм лункових поверхонь є актуальною науково-технічною проблемою.

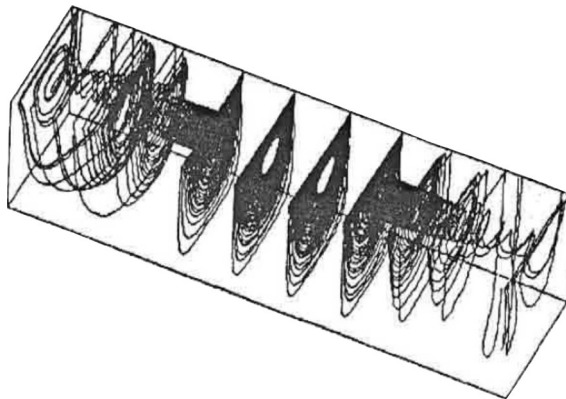
В даній роботі чисельними методами досліджуються закономірності формування тривимірних вихрових систем в напівциліндричному заглибленні, що виконує функцію генератора вихорів в турбулентній течії.

Постановка задачі та метод розв'язку. В якості математичної моделі обрано стандартну систему рівнянь руху нестисливої рідини, що вміщує рівняння Нав'є – Стокса та нерозривності:

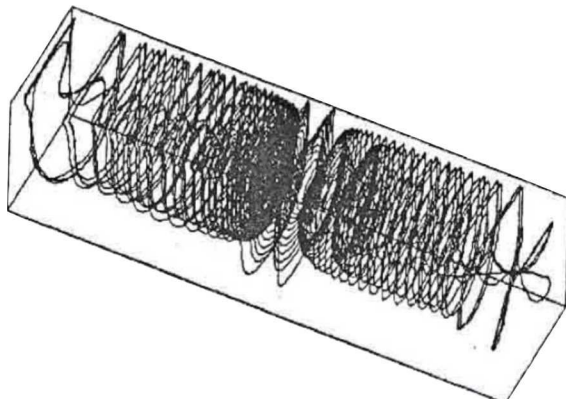
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

де u_i – компонента швидкості, індекс $i = x, y, z$; p – тиск; ρ – щільність; ν – в'язкість. На стінках задавалася умова прилипання, на вході – швидкість зовнішнього потоку U_0 .

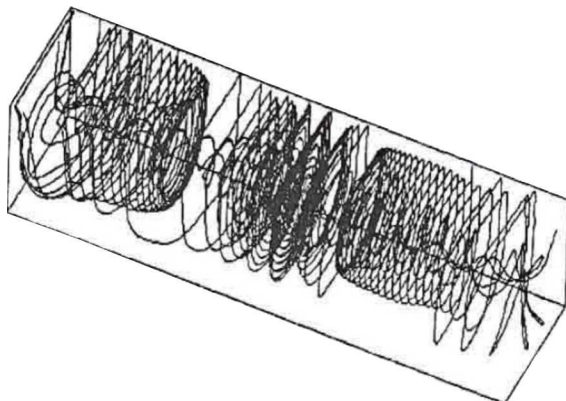
В якості методу дослідження запропоновано метод комп'ютерного моделювання з використанням відкритих програмних пакетів *OpenFOAM*, *SALOME*, *ParaView* [10]. Чисельне моделювання системи рівнянь руху в пакеті *OpenFOAM* проводиться методом кінцевих об'ємів в декартовій системі координат [11]. Інтеграл по контрольному об'єму зводяться до поверхневого методом Гаусса, а значення функції на поверхні комірки інтерполюється із значень функції в центроїдах сусідніх комірок. Робочою мовою коду є об'єктно-орієнтована мова програмування C++.



a



б



в

Рис. 3 – Вихрові структури: а – $Re = 10^2$; б – $Re = 4 \cdot 10^2$; в – $Re = 10^3$.

При невеликих числах Рейнольдса формується *трансверсальна завихореність* практично по всьому об'єму лунки, крім невеличких зон поблизу бокових стінок. Абсолютні значення поздовжньої та вертикальної на порядок менше трансверсальної. В діапазоні чисел Рейнольдса $Re = U_0 d / \nu = 10^2 \div 10^3$ течія зберігає *стійкий лами-*

Для чисельного розв'язку задачі обтікання пластини з лункою запропоновано використовувати стандартну чисельну модель *rimpleFOAM*, що реалізує нестационарні рівняння Нав'є – Стокса для нестисливої рідини (1). В якості об'єкту дослідження була використана геометрія робочої області експериментального стенду роботи [12]. Розрахункова область являє собою паралелепіпед, на дні якого впоперек зовнішній течії розташована лунка напівциліндричної форми діаметром 2 см і довжиною 8 см.

У відкритому графічному пакеті *SALOME* було побудовано блочно-структуровану розрахункову сітку, що узгоджена з границями. Умови адекватного врахування дрібномасштабних елементів вихрової течії накладає суттєві обмеження на мінімальний шаг у просторі поблизу обтічної поверхні та всередині каверни. В той самий час розрахункова область повинна бути достатньо великою, щоб врахувати крупномасштабні структурні елементи течії, що виходять за межі турбулентного примежового шару. Це призводить до збільшення кількості вузлів розрахункової сітки, що суттєво вповільнює швидкість чисельних розрахунків і спонукає дослідника до використання високоточних обчислювальних систем. Для економного використання розрахункових ресурсів запропоновано згущення сітки в напрямку до лунки. В двовимірній постановці було використано розрахункову сітку із загальною кількістю комірок $2,2 \cdot 10^5$, а для тривимірної задачі – $4,5 \cdot 10^5$.

Візуалізація результатів розрахунків, проведених із застосуванням відкритого пакету *OpenFOAM*, виконувалася з використанням відкритого графічного інтерфейсу *ParaView*. Пакет був розроблений з метою аналізу дуже великих об'ємів інформації з використанням розподілених обчислювальних ресурсів пам'яті і може працювати як на кластерах для аналізу даних терапорядку, так і на персональних комп'ютерах для порівняно менших об'ємів.

Результати розрахунків. Результати розрахунку в тривимірній постановці показали, що лінії току всередині лунки замкнуті так само, як і у двовимірній стаціонарній задачі (рис. 1). Всередині лунки формується циркуляційна зона, яка утворюється взаємодією рідини в лунці та шару зсуву, що якісно узгоджується з експериментальними даними [12].

нарний стаціонарний режим. Центр головного вихору зміщується від центру заглиблення до задньої стінки. При цьому збільшується інтенсивність викидів рідини в зовнішню частину потоку.

На рис. 2 наведені миттєві лінії току при значеннях чисел Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^3$ та $Re = 1,6 \cdot 10^4$. Контрольні точки, з яких беруть початок лінії току, розташовано на дні лунки по всій довжині. Видно, що при невеликих числах Рейнольдса та відношенні геометричних розмірів лунки $l/d = 2,5$ тривимірність проявляється тільки безпосередньо біля бокових стінок лунки (рис. 2, а). З ростом швидкості зовнішнього потоку завихореність стає суттєво тривимірною та нестаціонарною (рис. 2, б).

Візуалізація в лабораторних умовах течій в канаві, що розташована впоперек основному потоку, показала суттєву тривимірність когерентних вихрових структур, які формуються у напівциліндричному заглибленні [1].

На рис. 3 показано схему руху просторових *струменево-вихрових структур*. Виявлено, що викид вихрових систем має місце у середній частині заглиблення і поблизу його бокових стінок. Вихровий рух у цьому заглибленні складається з двох симетричних частин або комірок, об'єднаних у серединному перерізі заглиблення у вигляді спіралей, котрі розкручуються. Тому потік, який циркулює в траншеї, можна поділити на квазидвовимірний зворотно-циркуляційний потік в серединній частині і складний за своїм характером рух рідини в периферійних, прилеглих до бічних стінок зонах.

Аналіз результатів візуалізації [1] дозволив знайти характерні області формування і розвитку вихрових систем усередині заглиблення і над пластиною. Поблизу дна заглиблення зареєстровано появу поздовжньої швидкості зворотного напрямку, що обумовлено циркуляцією течії у заглибленні. Розмір великомасштабної вихрової структури зменшується під час зростання швидкості потоку, у цьому разі він зміщується ближче до дна і до кормової стінки заглиблення. Крім великомасштабного вихору усередині заглиблення формуються дрібномасштабні вихори, головним чином біля переднього відривного краю заглиблення та у місці ударної взаємодії вихрових систем шару змішування з кормовою стінкою заглиблення.

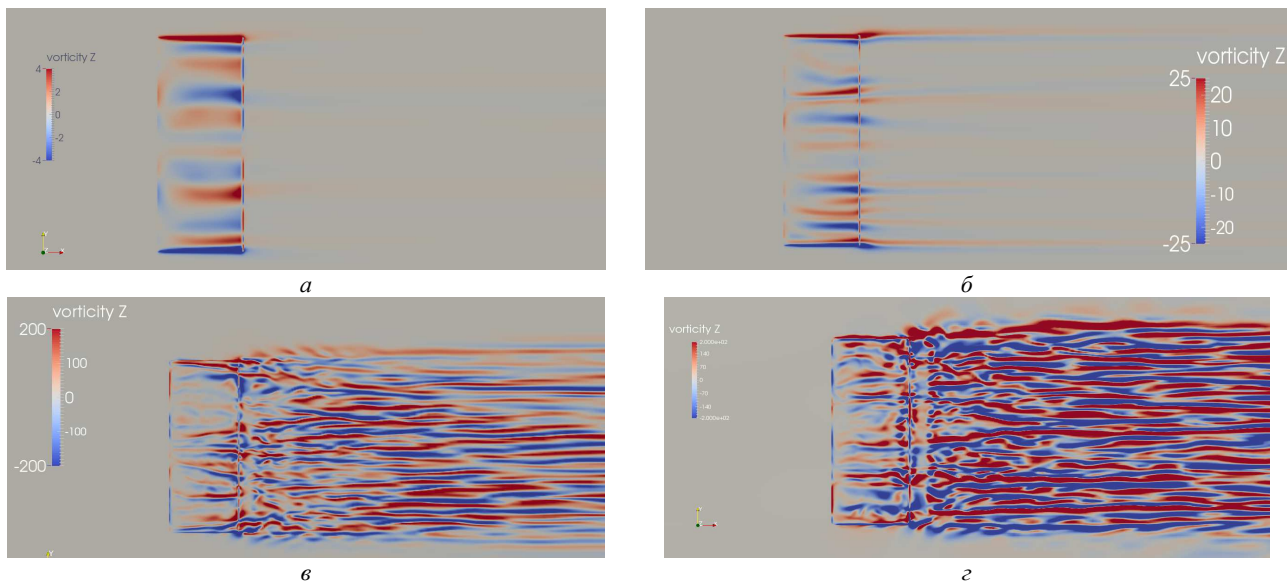


Рис. 4 – Вертикальна компонента завихореності в горизонтальній площині $z = 0$:

$$a - U_0 = 0,1 \text{ м/с}; \text{ б} - U_0 = 0,5 \text{ м/с}; \text{ в} - U_0 = 1,2 \text{ м/с}; \text{ г} - U_0 = 2,0 \text{ м/с}.$$

З ростом швидкості зовнішнього потоку завихореність стає суттєво тривимірною та нестаціонарною. На рис. 4 наведено миттєві поля вертикальної компоненти завихореності в горизонтальній площині $z = 0$ залежно від швидкості обтікання. З ростом числах Рейнольдса абсолютні значення компонент завихореності збільшуються як всередині лунки, так і в сліді, формуючи протяжні знакозмінні структури. Вплив бокових стінок стає суттєвим, порушуючи рівномірну та паралельну структуру ліній току (рис. 4, в, г). Спостерігається складна нестаціонарна картина, що супроводжується періодичними викидами із лунки.

За малих швидкостей обтікання вихори виносяться із бокових сторін заглиблення парами. Над ними формуються компенсаційні вихрові системи. Вертикальні розміри вихорів зберігаються довго вниз за потоком, хоча їхня інтенсивність падає за рахунок сил тертя. З ростом швидкості обтікання тривимірна знакозмінна система вихорів, що формується всередині заглиблення, впливає на структуру вихрового сліду. Крім інтенсивних викидів з бокових сторін в ближньому сліді чітко виявлено знакозмінні структури по всій товщині канавки, які швидко затухають вниз за потоком. Великі градієнти швидкості, що мають місце поблизу стінки, викривлюють форму вихорів, суттєво зменшуючи їх вертикальні розміри.

На рис. 5 наведено криві еволюції тиску в контрольній точці (8;0;0) мм залежно від швидкості обтікання. При невеликих числах Рейнольдса $Re < 10^4$ спостерігаються в початковий момент затухаючі осциляції з виходом на стійкий стаціонарний режим (рис. 5, а, б).

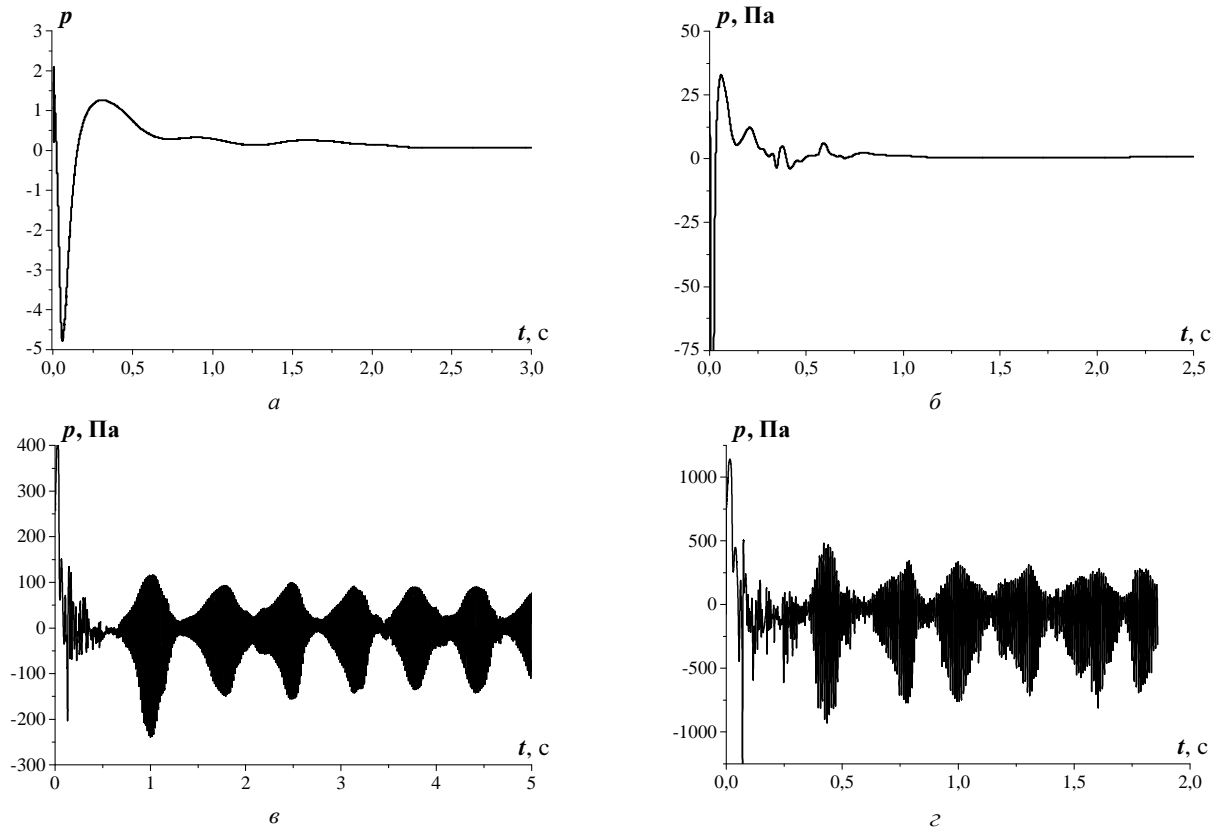


Рис. 5 – Залежність тиску від часу в контрольній точці при швидкості обтікання:
 $a - U_0 = 0,1$ м/с; $б - U_0 = 0,5$ м/с; $в - U_0 = 1,2$ м/с; $г - U_0 = 2,0$ м/с.

З подальшим збільшенням швидкості потоку формується хвильовий спектр (рис. 5, г), в якому виділяються дві характерні частоти ω_1 і ω_2 . Низька частота ω_1 характеризує макромасштабний процес, а саме період викидів із лунки. Момент викиду відповідає максимальній амплітуді коливань. Висока частота ω_2 характеризує внутрішні процеси маленьких масштабів, що визначаються в'язкістю рідини та швидкістю зовнішньої течії U_0^2/ν .

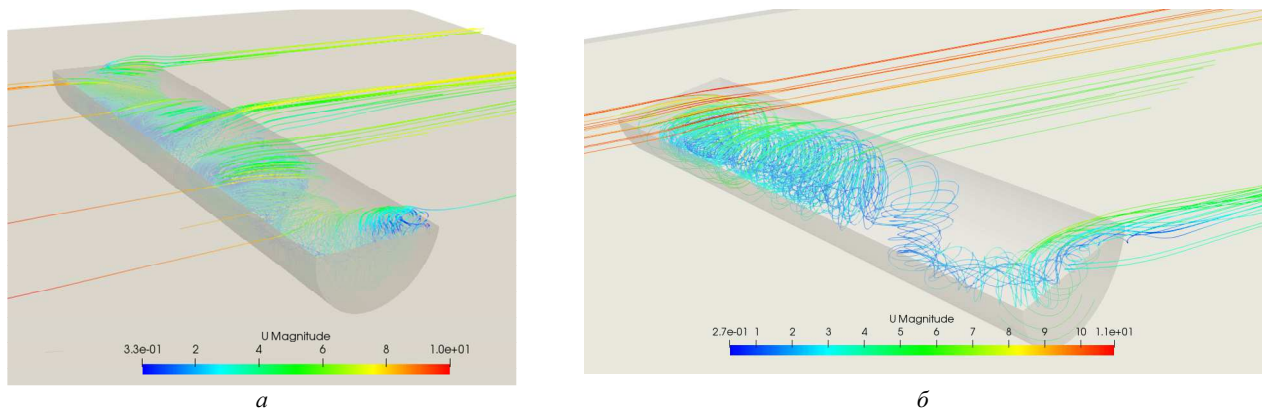


Рис. 6 – Миттєві траєкторії частинок за різних кутів повороту напівциліндричного заглиблення до основного потоку
 $(Re = 2 \cdot 10^5)$: $a - \alpha = 0^\circ$; $б - \alpha = 60^\circ$.

На формування тривимірної вихрової структури суттєво впливає співвідношення розмірів заглиблення, зокрема, поперечного та поздовжнього l/d . При зменшенні довжини напівциліндричного заглиблення вихори стають тривимірними за менших швидкостей основного потоку. Вплив бокових стінок стає суттєвим, порушуючи рівномірну та паралельну структуру ліній току. Викиди із заглиблення спостерігаються не тільки в сліді, а і з бокових сторін. Зі збільшенням швидкості основного потоку порушується симетрія течії вже на вході в заглиблення та інтенсифікація турбулентної структури.

При повороті лунки до основного потоку порушується плоскопаралельність течії та її симетрія, з'являються вихори в кутових точках (рис. 6). При повороті на кут $\alpha = 60^\circ$ з частини заглиблення, яке знаходиться далі від вхідної площини, можна спостерігати викид рідини в основний потік; за траєкторіями мічених частинок

прослідковується збурення, яке поширюється вниз за потоком.

Поворот заглиблення відносно напрямку основного потоку практично не впливає на вертикальні розміри вихрових структур. Проте, порушення симетрії течії впливає на перерозподіл енергії всередині заглиблення та в сліді за ним. Таким чином, на відміну від симетричної канавки, поздовжній єдиний вихор акумулюється всередині та виноситься із задньої гострої кромки, довго зберігаючи свою інтенсивність.

Аналіз поля тиску показав, що всередині заглиблення формується підковоподібний вихор, який викривлюється та виноситься в слід. З ростом числа Рейнольдса частота і інтенсивність викидів зростає за залежністю, що наведена на рис. 4. При повороті заглиблення зона пониженого тиску, де формується найінтенсивніший викид вихору із лунки, спостерігається в сліді безпосередньо за задньою гострою кромкою (рис. 7).

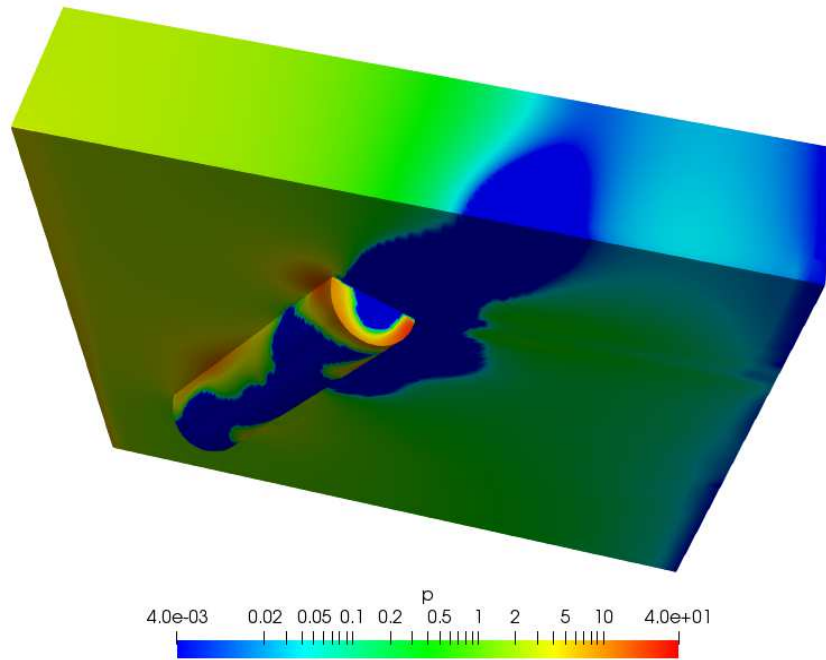


Рис. 7 – Миттєве поле тиску для $U_0 = 1$, $\alpha = 60^\circ$.

Висновки. Досліджено нестационарну тривимірну структуру вихрових систем, що генеруються напівциліндричною поперечною канавкою, залежно від швидкості течії та повороту заглиблення. Запропоновано комп'ютерну модель розв'язку турбулентної течії нестисливої рідини у відкритому пакету OpenFOAM, що показала свою ефективність.

Еволюція та просторовий розподіл різних фізичних величин відповідає експериментальним даним. Потік, який циркулює в канавці, можна поділити на квазидвовимірний зворотно-циркуляційний потік в серединній частині і складний за своїм характером рух рідини в периферійних, прилеглих до бічних стінок зонах.

За відносно низьких чисел Рейнольдса $Re < 10^3$ спостерігається глобальний трансверсальний вихор в канавці, що є стійким і стаціонарним. Зі збільшенням числа Рейнольдса система вихорів стає суттєво тривимірною та нестационарною. Велику роль в цьому процесі грають бічні стінки, що формують складну систему тривимірних вихорів, що руйнує головний трансверсальний вихор та сприяє його викидам із канавки.

З поворотом заглиблення на 60° до потоку структура течії стає більш регулярною, викиди рідини із заглиблення відбуваються переважно у «хвості», зникає їх періодичність.

Список літератури

1. Турик В. Н., Воскобойник В. А., Воскобойник А. В. Управление структурой течения внутри полуцилиндрического углубления // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. : Машинобудування. – 2016. – Т. 78. – № 3. – С. 112 – 123.
2. Халатов А. А. Теплообмен и гидродинамика около поверхностных углублений (лунок). – К. : ИТТФ НАНУ, 2005. – 76 с.
3. Voskoboinick V. A., Turick V. N., Voskoboinyk O. A., Voskoboinick A. V., Tereshchenko I. A. Influence of the deep spherical dimple on the pressure field under the turbulent boundary layer // in Advances in Computer Science for Engineering and Education. Ed. Z. Hu, S. Petoukhov, I. Dychka, M. He. – 2019. – Vol. 754. – P. 23 – 32.
4. Choi J., Jeon W.-P., Choi H. Mechanism of drag reduction by dimples on a sphere // Physics of Fluids. – 2006. – Vol. 18. – no. 4. – id. 041702 (4 p.).
5. Meseguer-Garrido F., De. Vicente J., Valero E., Theofilis V. On linear instability mechanisms in incompressible open cavity flow // Journal of Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 752. – P. 219 – 236.
6. Коваленко Г. В., Халатов А. А. Границы режимов течения в углублениях на плоской поверхности, имеющих форму сферических сегментов // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 10(82). – № 1. – С. 23 – 32.
7. Гортышов Ю. Ф., Попов И. А., Олимпов В. В., Щелчков А. В., Каськов С. И. Теплогидравлическая эффективность перспективных способов интенсификации теплоотдачи в каналах теплообменного оборудования. – Казань : Центр инновационных технологий. – 2009. – 531 с.
8. Najm H. N., Ghoniem A. F. Numerical simulation of the convective instability in a dump combustor // AIAA J. – 1991. – Vol. 29. – № 6. – P. 911

– 919.

9. Jordan C. N., Wright L. M. Heat transfer enhancement in a rectangular (AR = 3:1) channel with V-shaped dimples // *J. Turbomach.* – 2013. – Vol. 135. – № 1. – id. 011028 (10 p.).
10. Калугин В. Т., Крапошин М. В., Стрижак С. В., Юскин А. В. Возможности открытого пакета OpenFOAM для решения задач аэрогидромеханики и теплообмена // Труды РНКТ-5 (Москва 25 – 29 октября 2010 г.). – М.: Изд. дом МЭИ. – 2010. – Т. 1. – С. 85 – 88.
11. Димитрієва Н. Ф. Методика розрахунку вихрової течії біля лунки у відкритому пакеті OpenFOAM // Комп'ютерна гідромеханіка : тези п'ятої міжнар. науково-практичної конф. (Київ 29 – 30 вересня 2016 р.). – Київ : ІГМ НАНУ, 2016. – С. 29 – 30.
12. Воскобойник А. В. Пассивное управление формированием вихревых структур внутри полусилиндрического углубления // Вісник Донецького національного університету. Сер. А : Природничі науки. – 2009. – Т. 1. – С. 173 – 182.

References (transliterated)

1. Turick V. N., Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. V. Upravlenie strukturoy techeniya vnutri polutsilindricheskogo uglubleniya [Controlling flow structure inside semi-cylindrical dimples]. *Naukovi visti NTUU "KPI". Ser. : Mashynobuduvannya* [Bulletin of the National Technical University of Ukraine "KPI". Series : Mechanical engineering]. 2016, vol. 78, no. 3, pp. 112–123.
2. Khalatov A. A. *Teploobmen i gidrodinamika okolo poverkhnostnykh uglublenii (lunok)* [Heat transfer and fluid mechanics over surface indentations (dimples)]. Kyiv, ITTF NANU Publ., 2005. 76 p.
3. Voskoboinick V. A., Turick V. N., Voskoboinick O. A., Voskoboinick A. V., Tereshhenko I. A. Influence of the deep spherical dimple on the pressure field under the turbulent boundary layer. In *Advances in Computer Science for Engineering and Education*. Ed. Z. Hu, S. Petoukhov, I. Dychka, M. He. 2019, vol. 754, pp. 23–32.
4. Choi J., Jeon W.-P., Choi H. Mechanism of drag reduction by dimples on a sphere. *Phys. Fluids*. 2006, vol. 18, no. 4, id. 041702 (4 p.).
5. Meseguer-Garrido F., De. Vicente J., Valero E., Theofilis V. On linear instability mechanisms in incompressible open cavity flow. *J. Fluid Mech.* 2014, vol. 752, pp. 219–236.
6. Kovalenko G. V., Khalatov A. A. Granitsy rezhimov techeniya v uglubleniyakh na ploskoy poverkhnosti, imeyushchikh formu sfericheskikh segmentov [Boundaries of flow regimes in cavities on flat surface having the shape of spherical segments]. *Applied hydromechanics*. 2008, vol. 10(82), no. 1, pp. 23–32.
7. Gortyshov Yu. F., Popov I. A., Olimpiev V. V., Shhelchkov A. V., Kaskov S. I. *Teplogidravlicheskaya effektivnost' perspektivnykh sposobov intensivatsii teploobmeha v kanalakh teploobmennogo oborudovaniya* [Thermal-hydraulic efficiency of promising ways to intensify heat transfer in heat exchange equipment channels]. Kazan, Tsentri innovatsionnykh tekhnologiy Publ., 2009. 531 p.
8. Najm H. N., Ghoniem A. F. Numerical simulation of the convective instability in a dump combustor. *AIAA J.* 1991, vol. 29, no. 6, pp. 911–919.
9. Jordan C. N., Wright L. M. Heat transfer enhancement in a rectangular (AR = 3:1) channel with V-shaped dimples. *J. Turbomach.* 2013, vol. 135, no. 1, id. 011028 (10 p.).
10. Kalugin V. T., Kraposhin M. V., Strizhak S. V., Yuskin A. V. *Vozmozhnosti otkrytogo paketa OpenFOAM dlya resheniya zadach aerogidromekhaniki i teploobmena* [Possibility of OpenFOAM open package to solve aerohydraulic and heat transfer problems]. *Trudy RPKT-5* [Proc. of the Fifth Russian National Conference on Heat Transfer, Moscow, October 25 – 29, 2010]. 2010, vol. 1, pp. 85–88.
11. Dimitrieva N. F. *Metodyka rozrakhunku vykhrovoyi techiiy bilya lunky u vidkrytomu paketi OpenFOAM* [Method of calculating the eddy flow at the dimple in the OpenFOAM open package]. *Komp'yuterna gidromekhanika : tezy p'yatoyi mizhnar. naukovo-praktychnoyi konf.* [Computer hydromechanics : Proceedings of the 5-th International Scientific and Practical Conference, Kyiv, September 29 – 30, 2016]. Kyiv, IGM NANU Publ., 2016, pp. 29–30.
12. Voskoboinick A. V. *Passivnoe upravlenie formirovaniem vikhrevykh struktur vnutri polutsilindricheskogo uglubleniya* [Passive control of the formation of vortex structures inside a semi-cylindrical cavity]. *Visnyk Donets'kogo natsional'nogo universytetu. Ser. A : Pryrodnychi nauky* [Bulletin of the Donetsk National University. Series A : Natural Sciences]. 2009, vol. 1, pp. 173–182.

Надійшла (received) 16.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропаєв Геннадій Олександрович (Voropaev Gennadii Aleksandrovich) – член-кореспондент Національної академії наук України, доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-18; e-mail: voropaiev@hydromech.com.ua.

Димитрієва Наталія Федорівна (Dimitrieva Natalia Fedorovna) – кандидат фізико-математичних наук, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-18; e-mail: dimitrieva@nas.gov.ua.

УДК 532.517:532.5.032

Г. А. ВОРОПАЕВ, Я. В. ЗАГУМЕННЫЙ**УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОБТЕКАЕМОГО КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ КРЫЛА**

Предложен метод численного моделирования обтекаемых колеблющихся тел на основе прямого численного решения классической системы нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса и неразрывности для несжимаемой вязкой среды с использованием библиотек динамических расчетных сеток и программ собственной разработки пакета OpenFOAM. Представлены результаты расчетов обтекания колеблющихся профилей разной конструкции, включая стандартный крыловой профиль NACA0009 и две его модификации с дополнительным тонким хвостовиком с фиксированной и движущейся кромкой. Определяются их пропульсивные характеристики и структура вихревого следа в зависимости от угла отклонения и частоты колебания. Результаты численного моделирования показали возможность в рамках единой формулировки получать гидродинамические характеристики тонких подвижных и неподвижных профилей, определять локальные отрывы и величины генерируемой завихренности, а также показали зависимость структуры вихревого следа от геометрии профиля и частоты его колебания. Показано, что колеблющийся упругий профиль обладает меньшим сопротивлением по сравнению со стандартным жестким крылом.

Ключевые слова: обтекание тела, вихревой след, колеблющийся крыловой профиль, коэффициент сопротивления, пропульсивная сила, численное моделирование, OpenFOAM.

© Г. А. Воропаев, Я. В. Загуменный, 2019

Г. О. ВОРОПАЄВ, Я. В. ЗАГУМЕННИЙ
КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОБТІЧНОГО КОЛИВНОГО КРИЛА

Запропоновано метод чисельного моделювання обтічних коливних тіл на основі прямого чисельного розв'язання класичної системи нестационарних тривимірних рівнянь Нав'є – Стокса і нерозривності для нестисливого в'язкого середовища з використанням бібліотек динамічних розрахункових сіток і програм власної розробки пакету OpenFOAM. Представлені результати розрахунків обтікання коливних профілів різної конструкції, включаючи стандартний криловий профіль NACA0009 і дві його модифікації з додатковим тонким хвостовиком з фіксованою і рухомою крайкою. Визначаються їх пропульсивні характеристики і структура вихрового сліду в залежності від кута відхилення та частоти коливання. Результати чисельного моделювання показали можливість в рамках єдиного формулювання отримувати гідродинамічні характеристики тонких рухомих і нерухомих профілів, визначати локальні відриви і величини генерованої завихреності, а також показали залежність структури вихрового сліду від геометрії профілю і частоти його коливань. Показано, що коливний пружний профіль має менший опір у порівнянні зі стандартним жорстким крилом.

Ключові слова: обтікання тіла, вихровий слід, коливний криловий профіль, коефіцієнт опору, пропульсивна сила, чисельне моделювання, OpenFOAM.

G. A. VOROPAEV, Y. V. ZAGUMENNYI
CONTROL OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF AN OSCILLATING WING IN THE ONCOMING FREE STREAM

A method for numerical simulation of oscillating bodies in an oncoming free stream is proposed on the basis of direct numerical solution of the classical system of unsteady 3D Navier – Stokes and continuity equations for an incompressible viscous medium using dynamic computational mesh libraries and program codes of own development in the frame of the OpenFOAM utility. Computation results are presented on flows around oscillating profiles with different designs, including the standard airfoil NACA0009, and its two modifications with an extra thin tail with fixed and moving edges. Their propulsive characteristics and the vortex wake structure are studied as functions of deviation angle and oscillation frequency. The numerical results show capability of obtaining the hydrodynamic characteristics of thin moving and fixed profiles in the frame of a single problem formulation and determining local separations and generated vorticity magnitudes. The results obtained demonstrate, as well, the functional dependence of the vortex wake structure on the profile geometry and oscillation frequency. It is shown that the oscillating elastic wing profile has a lower drag as compared to the standard rigid one.

Key words: flow past a body, vortex wake, oscillating wing profile, drag coefficient, propulsive force, numerical simulation, OpenFOAM.

Введение. Исходя из утверждения, основанного на экспериментальных фактах, что при достаточно больших не универсальных числах Рейнольдса стационарное обтекание твердых тел невозможно, проблема точного определения гидродинамических характеристик обтекаемых тел должна быть связана не только с нестационарностью граничных условий, но и с возникающей нестационарностью потока вследствие потери устойчивости течения. И, несмотря на существование развитой теории крыла в нестационарном потоке [1], но построенной для профилей, обтекаемых идеальной жидкостью, на основании гипотез генерации распределенных особенностей по поверхности обтекаемых колеблющихся профилей, остается много нерешенных задач. Отдельную существенную нишу в этой области аэромеханики занимает панельный метод и метод дискретных вихрей [2], объединенный с теорией пограничного слоя, позволившие сформулировать и решать задачи определения гидродинамических характеристик профилей при их нестационарном движении. Обширный обзор результатов работ на основании этих теорий представлен в монографии [3]. Однако проблемы формирования завихренности в нестационарном пограничном слое, его точки отрыва существенно снижают достоверность необходимой исходной информации для этого метода, и поэтому результаты, полученные с помощью таких методов, не всегда соответствуют данным экспериментальных исследований [4].

С развитием вычислительной техники и численных методов решения нестационарных уравнений Навье – Стокса появилась возможность прямого определения пропульсивных характеристик колеблющихся профилей и структуры вихревого следа при мигрирующей точке отрыва, вязком взаимодействии вихрей в ближнем следе в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса [5, 6].

В настоящей работе представлены результаты DNS моделирования колеблющихся профилей разной конструкции. Определяются их пропульсивные характеристики и структура вихревого следа в зависимости от угла отклонения и частоты колебания.

Постановка задачи. Для определения структуры и динамики течения при обтекании колеблющегося тела используется классическая система нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса и уравнение неразрывности для несжимаемой вязкой среды:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{U} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (U, V, W)$; P , ρ , ν , U_0 – компоненты вектора скорости, давление, плотность, кинематическая вязкость жидкости и скорость набегающего потока, соответственно.

Изучается возмущенное течение жидкости при вынужденных колебаниях обтекаемого тела в соответствии с задаваемым законом движения. На большом расстоянии от обтекаемого тела задаются граничные условия невозмущенного набегающего потока, а непосредственно на самой поверхности – условия прилипания:

$$\mathbf{U}|_{x,y \rightarrow \pm\infty} = \{U_0, 0, 0\}, \quad \mathbf{U}|_S = \left\{ \frac{\partial \xi_x}{\partial t}, \frac{\partial \xi_y}{\partial t}, \frac{\partial \xi_z}{\partial t} \right\}, \quad (2)$$

где $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ – вектор перемещения поверхности обтекаемого тела.

В качестве обтекаемого тела рассмотрен симметричный крыловой профиль NACA 0009, а также его геомет-

рические модификации с дополнительным тонким хвостовым элементом, задняя кромка которого может быть как жестко закрепленной, так и свободно движущейся по определенному закону. Обтекаемое тело совершает периодические вращательно-колебательные движения в плоскости XOY , которые могут быть выражены следующими аналитическими соотношениями:

$$\xi_x = x_0 \cdot \cos(\alpha(t)) - y_0 \cdot \sin(\alpha(t)), \quad \xi_y = y_0 \cdot \cos(\alpha(t)) + x_0 \cdot \sin(\alpha(t)), \quad \xi_z = 0, \quad (3)$$

где $\alpha(t) = \alpha_{\max} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ – мгновенный угол атаки профиля; f – частота его колебаний; (x_0, y_0, z_0) – координаты точек поверхности профиля в исходном горизонтальном положении. В случае жесткого закрепления задней кромки хвостовика $\alpha(t) = 0$ реализуется гладкое непрерывное соединение зафиксированной точки с телом колеблющегося профиля на основе параболической аппроксимации. Свободное колебание хвостовика реализуется путем задания некоторой фазовой задержки $\varphi_0(x)$ относительно общего закона колебаний тела: $\alpha(t) = \alpha_{\max} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t - \varphi_0(x))$. Схема рассматриваемой задачи приведена на рис. 1 с указанием всех основных геометрических параметров профиля, которые в данной работе принимались равными следующим значениям: $L = 0.12$ м, $L_c = 0.012$ м, $L_t = 0.02$ м.

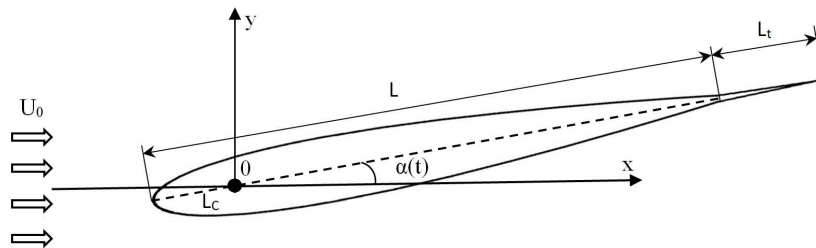


Рис. 1 – Геометрия задачи.

Традиционно периодический процесс вихреобразования около обтекаемых тел характеризуется числами Струхала ($Sh = f \cdot L / U_0$) и Рейнольдса: ($Re = U_0 \cdot L / \nu$) – безразмерными параметрами, связывающими скорость набегающего потока жидкости, длину хорды крыла, частоту колебаний и кинематический коэффициент вязкости. Исследуемые параметры задачи соответствуют числу Рейнольдса: $Re = 60000$ ($U_0 = 0.5$ м/с) и диапазону изменения числа Струхала: $Sh = 0 \div 1.8$ (размерная частота колебаний варьировалась в диапазоне: $f = 0 \div 7.5$ Гц).

Численное моделирование. Численное моделирование течений жидкостей в условиях, когда обтекаемое тело совершает вынужденные нестационарные движения в потоке, практически невозможно реализовать на базе статических расчетных сеток. Поэтому для численного решения уравнений (1) с граничными условиями (2) был разработан алгоритм расчета с использованием библиотек динамических расчетных сеток и программ собственной разработки в рамках открытого пакета *OpenFOAM* на основе прямого численного решения классической системы нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса и неразрывности для несжимаемой среды с граничными условиями прилипания на поверхности и невозмущенного потока на бесконечности [7].

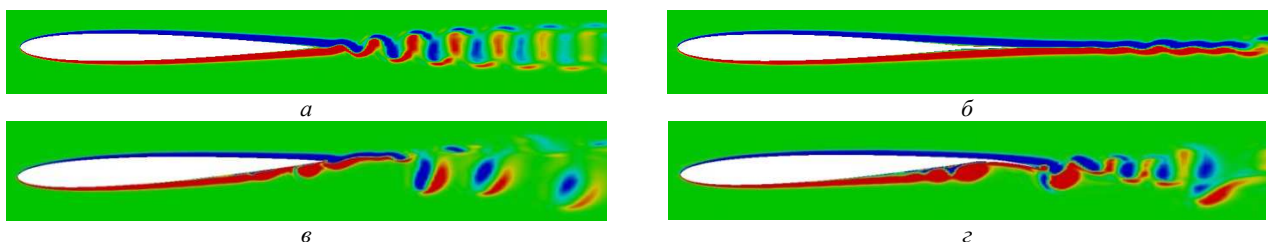


Рис. 2 – Вихревая структура течения при обтекании неподвижного крылового профиля NACA0009 (а, в) и его модификация с дополнительным хвостовиком (б, г): а, б – $\alpha = 0^\circ$; в, г – $\alpha = 3^\circ$; $Re = 60000$.

Среди ряда разработанных библиотек динамических расчетных сеток, которые позволяют определять положения узлов расчетной сетки на новом временном слое при изменении положения тела в пространстве, наиболее точным и эффективным оказался метод, основанный на численном решении уравнения Лапласа для компонент перемещения узлов сетки. Данный метод построения динамических расчетных сеток позволяет проводить расчеты обтекания тел, колеблющихся в потоке жидкости в соответствии с более сложными нестационарными законами, в частности, с учетом фазовой задержки колебаний на определенной части поверхности тела относительно общего закона движения либо в случае, когда закон колебаний определяется в процессе вычислений путем учета взаимного влияния характеристик возмущенного течения и деформирующейся поверхности обтекаемого тела.

Решение результирующей системы линейных алгебраических уравнений проводится с наперед устанавливаемой точностью с помощью *итерационных солверов* PCG и PBiCG, реализующих методы сопряженных градиентов для симметричных и асимметричных матриц, соответственно, и задаваемым количеством внутренних и внешних итераций процедуры PIMPLE, связывающей поля скорости и давления. Для *интерполяции конвективных членов* применяется TVD схема с ограничителем, обеспечивающая минимальную численную диффузию и отсутствие *осцилляций решения*. Для дискретизации производной по времени используется неявная трехточечная несимметричная схема второго порядка с разностями назад, которая обеспечивает хорошее разрешение физического процесса во времени.

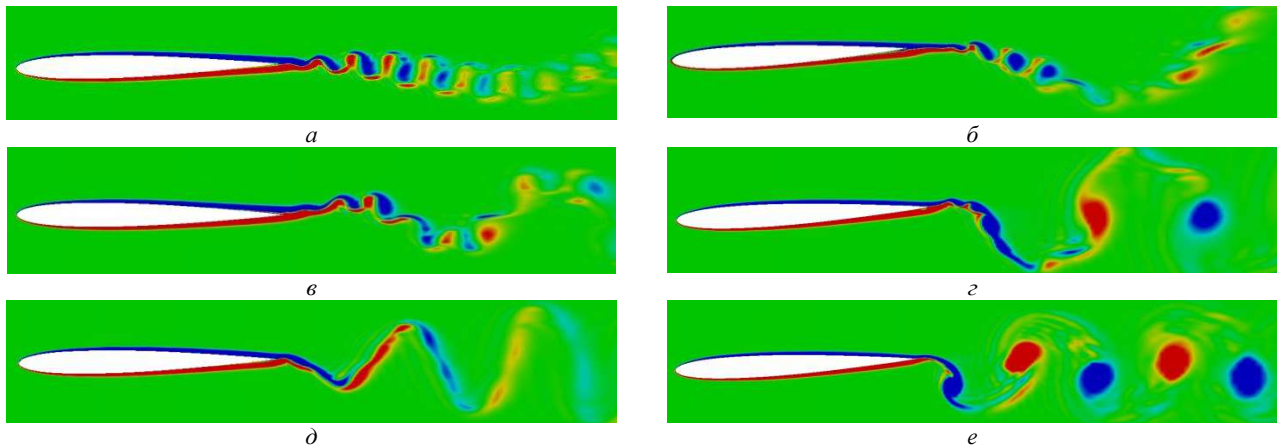


Рис. 3 – Вихревая структура течения при обтекании колеблющегося крылового профиля NACA0009 с острой задней кромкой: $a, в, д - \alpha = 1^\circ$; $б, з, е - \alpha = 3^\circ$; $Sh = 0.6$ ($a, б$), $Sh = 1.2$ ($в, з$), $Sh = 1.8$ ($д, е$).

Расчеты поставленных задач проводились в параллельном режиме с применением *метода декомпозиции расчетной области* на многоядерных персональных компьютерах и кластерных системах. Обработка и визуализация результатов расчетов выполнялась с использованием *графического интерфейса ParaView* и *пакета прикладных программ Origin*.

Результаты расчетов. Численный расчет обтекания симметричного крылового профиля малого относительного утолщения NACA0009 под нулевым углом атаки демонстрирует классические результаты формирования вихревого следа, распространяющегося вниз по потоку с безразмерной фазовой скоростью 0.2 – 0.3 с максимальными значениями *безразмерной завихренности в вихрях* ± 20 (рис. 2, a). Добавление конструктивного элемента в форме тонкого хвостовика приводит к стабилизации *спутного течения*, которое в данном случае принимает вид двух слабо возмущенных полос противоположных знаков завихренности, вследствие плавного схода с задней кромки *сдвиговых слоев*, формирующихся на поверхности профиля под действием вязкости жидкости (рис. 2, $б$). В обоих случаях пограничный слой на профиле остается невозмущенным в отличие от случая *крыловых профилей* большего относительного утолщения, когда даже при нулевом угле атаки происходит нарастание возмущений завихренности и давления в пограничном слое за *миделем профиля*, что проявляется в формировании *локальных отрывов* в пограничном слое [8].

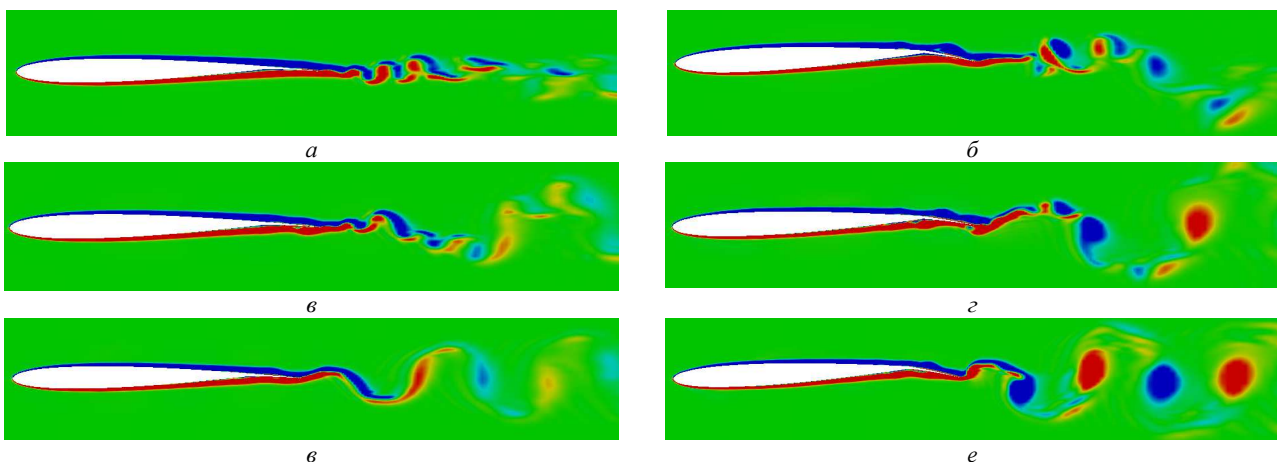


Рис. 4 – Вихревая структура течения при обтекании колеблющегося модифицированного крылового профиля NACA0009 с дополнительным хвостовым элементом с фиксированной задней кромкой:
 $a, в, д - \alpha = 1^\circ$; $б, з, е - \alpha = 3^\circ$; $Sh = 0.6$ ($a, б$), $Sh = 1.2$ ($в, з$), $Sh = 1.8$ ($д, е$).

При обтекании рассматриваемых моделей неподвижных крыловых профилей под углом атаки $\alpha = 3^\circ$ по-

граничный слой на наветренной стороне остается невозмущенным под действием стабилизирующего влияния набегающего потока, в то время как на подветренной стороне возникают зоны локального отрыва течения, в которых поочередно формируются вихревые структуры положительного знака безразмерной завихренности с интенсивностью свыше 60. На задней кромки профиля эти вихри взаимодействуют со сходящим с наветренной стороны сдвиговым слоем, формируя возмущенный след в виде перемещающейся вниз по потоку со скоростью порядка $0.85U_0$ цепочки пар дискретных вихрей с противоположными знаками завихренности (рис. 2, в). При обтекании конструкции профиля с фиксированной кромкой хвостовика (рис. 2, з) вихревые структуры на подветренной стороне профиля имеют большие масштабы, а структура следа принимает менее регулярный характер, вследствие более сложного характера нестационарного вихревого взаимодействия.

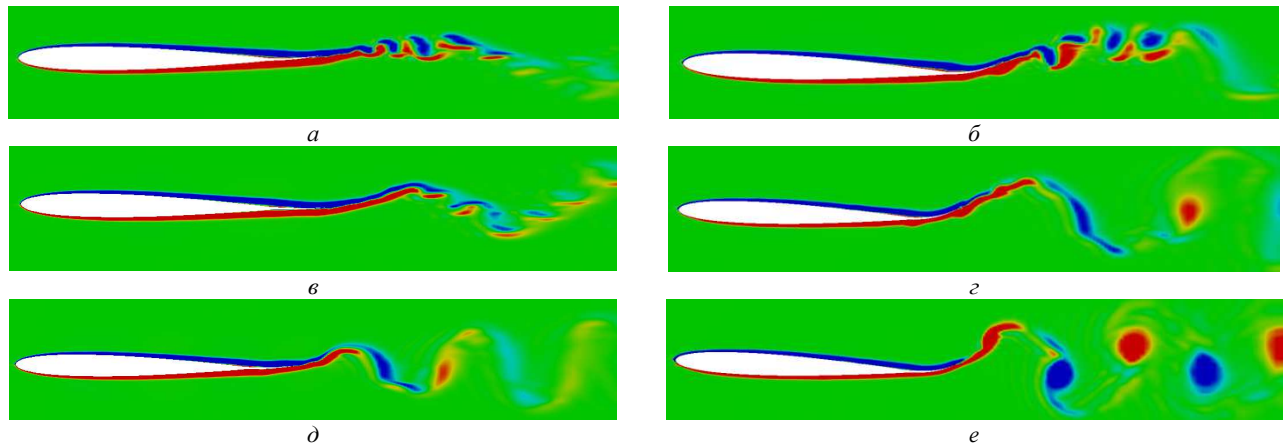


Рис. 5 – Вихревая структура течения при обтекании колеблющегося модифицированного крылового профиля NASA0009 с дополнительным хвостовым элементом со свободной задней кромкой:
 $a, в, д - \alpha = 1^\circ$; $б, з, е - \alpha = 3^\circ$; $Sh = 0.6$ ($a, б$), $Sh = 1.2$ ($в, д$), $Sh = 1.8$ ($е, е$).

При совершении периодических вращательно-колебательных движениях крылового профиля картина течения в спутном следе существенно меняется. При малых частотах и амплитудах колебания крыла частично сохраняется характер вихревого следа, подобного структуре течения при обтекании неподвижного профиля, однако при больших частотах и амплитудах колебаний происходит полное вырождение собственных возмущений пограничного слоя и структура вихревого следа определяется параметрами задаваемого колебания профиля. На рис. 3 – 5 представлены картины поля завихренности в зависимости от частоты и амплитуды колебаний для трех рассматриваемых конструкций колеблющегося крыла: стандартного профиля NASA0009 и двух его модификаций с тонким хвостовиком с зафиксированной и колеблющейся с некоторой фазовой задержкой задней кромкой.

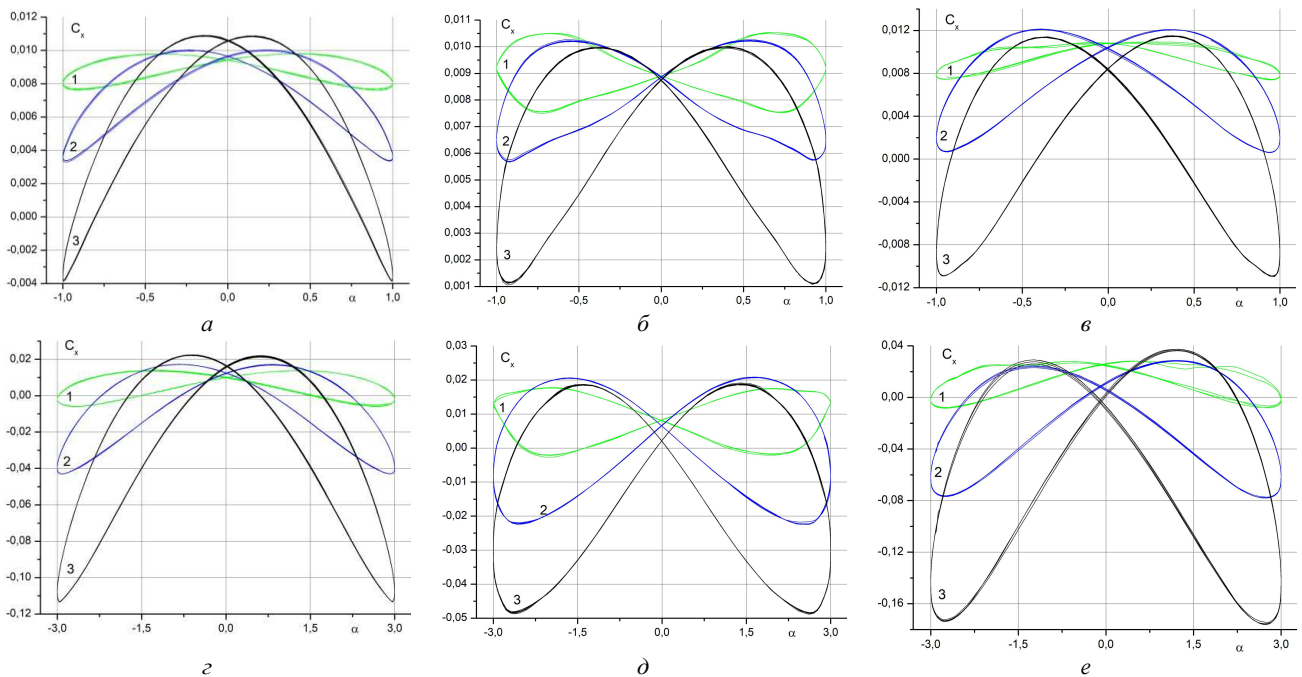


Рис. 5 – Интегральный коэффициент сопротивления как функция мгновенного значения угла атаки колеблющегося жесткого профиля NASA0009 ($a, з$) и его модификаций с фиксированной ($б, д$) и свободной ($в, е$) задней кромкой: $a, б, в - \alpha = 1^\circ$; $з, д, е - \alpha = 3^\circ$; $Sh = 0.6$ (1); $Sh = 1.2$ (2); $Sh = 1.8$ (3).

Во всех рассмотренных случаях конструкции колеблющегося крыла просматривается общая тенденция трансформации структуры следного течения с изменением значений амплитуды и частоты колебаний. Так, при фиксированной амплитуде $\alpha = 1^\circ$ увеличение частоты колебаний приводит к постепенному вырождению собственных возмущений в следе и формированию волнообразной вихревой пелены, а при амплитуде колебаний $\alpha = 3^\circ$ в следе формируются компактные вихревые структуры с чередующимся знаком завихренности. Во всех случаях формирующиеся возмущения переносятся вниз по потоку со скоростью близкой к скорости набегающего потока, а расстояние между соседними характерными структурными элементами следа определяется частотой вынужденных колебаний профиля: $s = U_0/f$. При колебательном движении профиля вверх формируются вихревые возмущения преимущественно с положительным знаком завихренности, а при движении вниз – наоборот, с отрицательным.

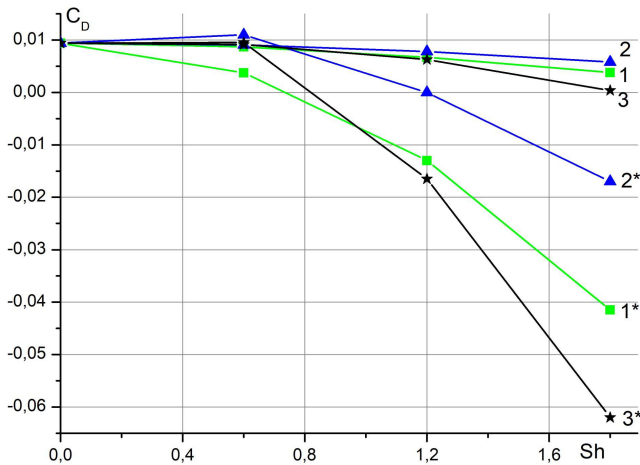


Рис. 6 – Интегральные значения коэффициента сопротивления в зависимости от числа Струхала для: 1 – стандартного профиля NASA0009; 2, 3 – модифицированного с фиксированной и подвижной кромкой; 1* – 3* – $\alpha = 1^\circ$; 1** – 3** – $\alpha = 3^\circ$.

Зависимости коэффициента сопротивления от мгновенного значения угла атаки рассмотренных колеблющихся профилей для различных амплитуд и частот колебаний представлены на рис. 5. Приведенные кривые показывают, что при малых частотах колебания в случае движения профиля в сторону увеличения угла наблюдается менее четкая пропорциональность коэффициента сопротивления мгновенному углу атаки по сравнению со случаем, когда профиль совершает колебания от максимального угла отклонения. При увеличении частоты колебаний профиля из нейтрального положения в сторону увеличения мгновенного угла атаки максимум коэффициента сопротивления фиксируется намного ранее, чем профиль достигает максимального угла отклонения, а затем резко падает, достигая минимального значения в области максимальных значений мгновенного угла атаки. При последующем движении профиля в сторону нейтрального положения коэффициент сопротивления возрастает, то есть проявляются гистерезисные явления. При наибольших значениях амплитуды и частоты колебаний кривые находятся преимущественно в области отрицательных значений, что говорит о работе крыла в пропульсивном режиме.

На рис. 6 приведены значения коэффициента сопротивления, проинтегрированные по периоду вынужденных колебаний, в зависимости от частоты для различных геометрических модификаций колеблющегося профиля. Приведенные результаты показывают, что сопротивление снижается с увеличением частоты и амплитуды вынужденных колебаний крыла, а при значениях числа Струхала и угловой амплитуды колебаний: $Sh = 1,8$ и $\alpha = 3^\circ$ интегральные значения коэффициента сопротивления принимают отрицательный знак для всех рассмотренных конструкций крыла, то есть, в этом случае, генерируется пропульсивная сила, способная продвигать колеблющееся тело вверх по потоку. При этом наибольшая пропульсивная сила формируется на крыловом профиле с гибкой задней кромкой, наименьшая – в случае жестко зафиксированной кромкой профиля.

Выводы. Результаты численного моделирования показали возможность в рамках вязкого подхода без привлечения гипотез получать гидродинамические характеристики тонких подвижных и неподвижных профилей, определять локальные отрывы и величины генерируемой завихренности. Получены зависимости структуры вихревого следа от геометрии профиля и частоты его колебания, а также пороговое число Струхала, начиная с которого для тонких профилей динамические характеристики профиля не зависят от структуры вихреобразования в пограничном слое на поверхности профиля. Показано, что колеблющийся упругий профиль обладает меньшим сопротивлением по сравнению со стандартным жестким профилем.

Список литературы

1. Голубев В. В. Труды по аэродинамике. – М. – Л. : Гостехиздат, 1957. – 980 с.
2. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. – М. : Наука, 1971. – 768 с.
3. Довгий С. А. Аэрогидродинамика движущихся крыльев. – Киев : Издательство «Юстон», 2016. – 276 с.
4. Воропаев Г. А., Зайнер-Гундерсен Д., Коробов В. И. Гидродинамические характеристики колеблющегося крыла // Прикладная гидромеханика. – 2015. – Т. 17. – № 3. – С. 3–9.
5. Young J., Lai J., Platzer M. A review of progress and challenges in flapping foil power generation // Prog. Aerosp. Sci. – 2014. – v. 67. – P. 2–28.
6. Kaya M., Elfarra M. CFD based optimization of oscillatory wing motion for maximum energy harvesting from wind // Int. J. Renewable Energy Research. – 2018. – v. 8. – no. 1. – P. 540–551.
7. Jasak H. OpenFOAM : open source CFD in research and industry // Int. J. Naval Architecture and Ocean Engineering. – 2009. – v. 1. – no. 2. – P. 89–94.
8. Voropaev G. A., Zagumennyi Ya. V., Shkvar Ye. A. Vortex formation on an oscillating wing // Proc. 8-th Int. Conf. on Vortex Flows Dynamics. – Xi'an, China, 2018. – P. 25–26.

References (transliterated)

1. Golubev V. V. *Trudy po aerodinamike* [Proceedings on aerodynamics]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1957. 980 p.
2. Belotserkovskiy S. M., Skripach B. K., Tabachnikov V. G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [Wing in an unsteady gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 768 p.
3. Dovgiy S. A. *Aerogidrodinamika dvizhushhikhsya kryl'ev* [Aerohydrodynamics of moving wings]. Kiev, Izdatel'stvo «Yuston» Publ., 2016. 276 p.
4. Voropaev G. A., Zayner-Gundersen D., Korobov V. I. *Gidrodinamicheskie kharakteristiki koleblyushhegosya kryla* [Hydrodynamic characteristics of an oscillating wing]. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied hydromechanics]. 2015, vol. 17, no. 3, pp. 3–9.
5. Young J., Lai J., Platzer M. A review of progress and challenges in flapping foil power generation. *Prog. Aerosp. Sci.* 2014, vol. 67, pp. 2–28.
6. Kaya M., Elfarra M. CFD based optimization of oscillatory wing motion for maximum energy harvesting from wind. *Int. J. Renewable Energy Research.* 2018, vol. 8, no. 1, pp. 540–551.
7. Jasak H. OpenFOAM : open source CFD in research and industry. *Int. J. Naval Architecture and Ocean Engineering.* 2009, vol. 1, no. 2, pp. 89–94.
8. Voropaev G. A., Zagumennyi Ya. V., Shkvar Ye. A. Vortex formation on an oscillating wing. *Proc. 8-th Int. Conf. on Vortex Flows Dynamics.* Xi'an, China, 2018. pp. 25–26.

Поступила (received) 18.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропаєв Генадій Олександрович (Voropaev Genadi Olexandrovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кор. НАНУ, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (044) 371-65-17; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Загумений Ярослав Вікторович (Zagumennyi Yaroslav Viktorovich) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-18; e-mail: zagumennyi@gmail.com.

УДК 532.526

Г. А. ВОРОПАЕВ, Н. В. РОЗУМНЮК**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Представлены результаты численного моделирования трехмерного нестационарного турбулентного течения над поверхностью с системой парных лунок в широком диапазоне чисел Рейнольдса. На основании полученных численных результатов определены требования к луночному рельефу, генерирующему парные квазистойчивые продольные вихри в заданном диапазоне чисел Рейнольдса. Определено влияние геометрических параметров лунок и числа Рейнольдса на динамические характеристики обтекаемой поверхности. Показано стабилизирующее влияние продольных вихревых образований на характеристики турбулентного пограничного слоя в следе за системой лунок.

Ключевые слова: турбулентный пограничный слой, парные лунки, продольные вихри, гидродинамические потери.

Г. О. ВОРОПАЄВ, Н. В. РОЗУМНЮК**МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ НА СТРУКТУРОВАНІЙ ПОВЕРХНІ**

Представлено результати чисельного моделювання тривимірного нестационарного турбулентного потоку над поверхнею з системою парних лунок в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. На основі одержаних чисельних результатів визначено вимоги до луночного рельєфу, який генерує парні квазістійкі поздовжні вихори в заданому діапазоні чисел Рейнольдса. Визначено вплив геометричних параметрів лунок та числа Рейнольдса на динамічні характеристики обтічної поверхні. Показано стабілізуючий вплив поздовжніх вихрових утворень на характеристики турбулентного прилежового шару в сліді за системою лунок.

Ключові слова: турбулентний прилежовий шар, парні лунки, поздовжні вихори, гідродинамічні втрати.

© Г. А. Воропаев, Н. В. Розумнюк, 2019

G. A. VOROPAIEV, N. V. ROZUMNYUK

MODELING OF NON-STATIONARY BOUNDARY LAYER OVER A STRUCTURED SURFACE

The results of numerical modeling of 3D unsteady turbulent flow over a surface with a system of paired dimples are presented in a range of Reynolds numbers. On the basis of the numerical results the required parameters of dimples capable of generating quasi-steady longitudinal vortices in the given Reynolds numbers range are determined. The effect of dimples' shape and Reynolds number on the dynamic characteristics of the surface are identified. The stabilizing influence of longitudinal vortical structures of the boundary layer in the wake streamwise is shown.

Key words: turbulent boundary layer, pairs of dimples, longitudinal vortices, hydrodynamic losses.

Введение. Задачи управления потоками для уменьшения сопротивления, увеличения подъемной силы, предотвращения отрыва потока от поверхности и т.д., как правило, связаны с управлением характеристиками пограничных слоев, формирующихся на поверхности тел, которое может осуществляться активными или пассивными методами [1]. Активные методы управления подразумевают дополнительные энергетические затраты для целенаправленного изменения характеристик течения в процессе эксплуатации обтекаемого объекта.

Пассивные методы, такие как *LEBU*, *риблеты*, *луночные рельефы*, не требуют дополнительных затрат, а требуемые изменения параметров обтекания достигаются за счет заранее внесенных модификаций формы/конструкции поверхности.

Характерные масштабы вихревых структур, генерированных обтекаемой поверхностью, их интенсивность в значительной степени определяют количественные значения величин аэрогидродинамического сопротивления движущихся тел. На изменение этих характеристик направлены различные методы управления [2, 3]. Так, *LEBU* разрушает структуру крупных поперечных вихрей, которые формируются во внешней части турбулентного пограничного слоя, а *риблеты*, наоборот, влияют на структуру мелких пристенных продольных вихрей, повышая их устойчивость. В противоположность идеологии *LEBU*, когда в пограничном слое разрушаются большие вихри, существует идеология генерации вихрей для изменения вихревой структуры турбулентного пограничного слоя при помощи разнообразных генераторов вихрей, создающих в пристенной области вихри разной ориентации и интенсивности.

Управлению вихревой структурой потока вблизи поверхности для усиления тепло- и массообмена за счет вихревого перемешивания посвящено большое количество современных исследований. Однако усиление теплообмена практически всегда сопровождается увеличением сопротивления, поэтому для таких приложений важной задачей является минимизация гидродинамических и гидравлических потерь.

Анализ последних исследований. В настоящее время уже общепризнано, что детерминированные продольные вихревые структуры определенных масштабов способны регуляризовать структуру турбулентности пограничного слоя, аккумулируя *энергию трансверсальной завихренности в продольную*, и снижать сопротивление трения, но предотвращая отрыв. Поэтому задача генерации устойчивых продольных вихревых структур масштабов, согласованных с характеристиками пограничного слоя, с минимальными затратами, приобрела самостоятельное значение.

Подавляющее большинство работ рассматривают симметричные (полусферические, каплеобразные, и т.п.) одиночные лунки и их массивы в различных компоновках, которые хаотизируют течение и предотвращают образование крупномасштабных когерентных структур [4]. В полусферических лунках возникает режим нерегулярной генерации и выброса вихрей по ширине лунки. Внесение несимметрии в форму лунки или ее расположение в трансверсальном направлении позволяет генерировать одиночный продольный вихрь в ее следе [5] с определенным направлением вращения. Это дает возможность создавать регулярные продольные вихревые структуры на структурированной поверхности, основным элементом которой являются пары удлиненных лунок обусловленной формы и размеров, расположенные под определенным углом друг к другу [6, 7]. В этом случае за лунками возникает пара устойчивых продольных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях.

В данной работе исследуется возникновение и развитие вихревых структур, генерированных системой лунок, и их влияние на параметры турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности в зависимости от относительной глубины лунки при разных *числах Рейнольдса*.

Постановка задачи. Численно исследуется вязкое течение несжимаемой жидкости на поверхности плоской пластины с парами лунок, расположенных под углом к направлению основного потока. Решается стандартная система уравнений неразрывности, уравнений Рейнольдса, с применением модели переноса напряжений для моделирования турбулентности, *используется пакет FLUENT*.

Расчетная область представляет собой параллелепипед, в основании которого лежит пластина с лунками. Лунки образованы следующим способом. Тело, состоящее из цилиндрической средней части и полусфер такого же диаметра на торцах, вдавливаются на нужную глубину в плоскость.

В области строится ортогональная расчетная сетка, которая имеет сильное сгущение в вертикальном направлении возле поверхности пластины, в горизонтальном направлении – в окрестности лунок и их следе, внутри лунок сетка конформна с их поверхностью. Общее количество расчетных узлов во всей области достигало 8 млн., их пространственное размещение варьировалось для достижения удовлетворительного сравнения с известными теоретическими и экспериментальными данными для обтекания пластины при соответствующих параметрах потока.

Расчетная область имеет длину 1.5 м, высоту 0.2 м, лунки располагаются на расстоянии 0.5 м от входной границы области.

На входе ставились условия равномерного потока, на боковых гранях – условия симметрии потока, на верхней границе – скользящая стенка.

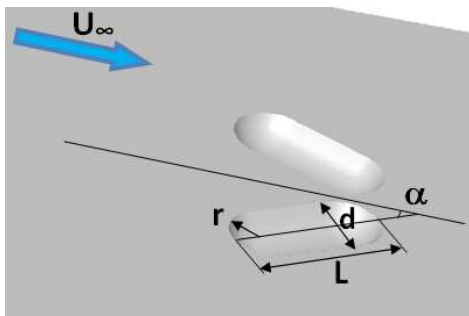


Рис. 1 – Схема расположения лунок на плоской поверхности.

При обтекании пластины потоком воды при температуре 300 К со скоростью $1 \div 3$ м/с число Рейнольдса по длине пластины до начала лунок равно $5 \cdot 10^5 \div 1.5 \cdot 10^6$, течение считается турбулентным с заданным уровнем турбулентности 1 %.

В данной работе представлены результаты расчета течения при следующих параметрах лунок: длина $L = 49$ мм, ширина $d = 12$ мм, минимальное расстояние между лунками 6 мм (рис. 1). Лунки в парах развернуты в сторону набегающего потока под углом $\alpha = 30^\circ$. Рассматривались два типа лунок с разным отношением глубины цилиндрической части к ширине: лунка А ($h/d = 0.64$) и лунка В ($h/d = 0.53$). В рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса толщина пограничного слоя перед лунками составляла $\sim 10 \div 12$ мм, то есть

глубины лунок составляли примерно половину толщины пограничного слоя.

Результаты моделирования. Моделирование выполнялось в нестационарном режиме, анализировались параметры течения после установления квазипериодического режима с малыми амплитудами колебаний в лунках и их следе, зависящими от типа лунки и скорости потока. Основные структуры течения в районе лунок представлены на рисунках для скорости потока 3 м/с; их можно описать следующим образом.

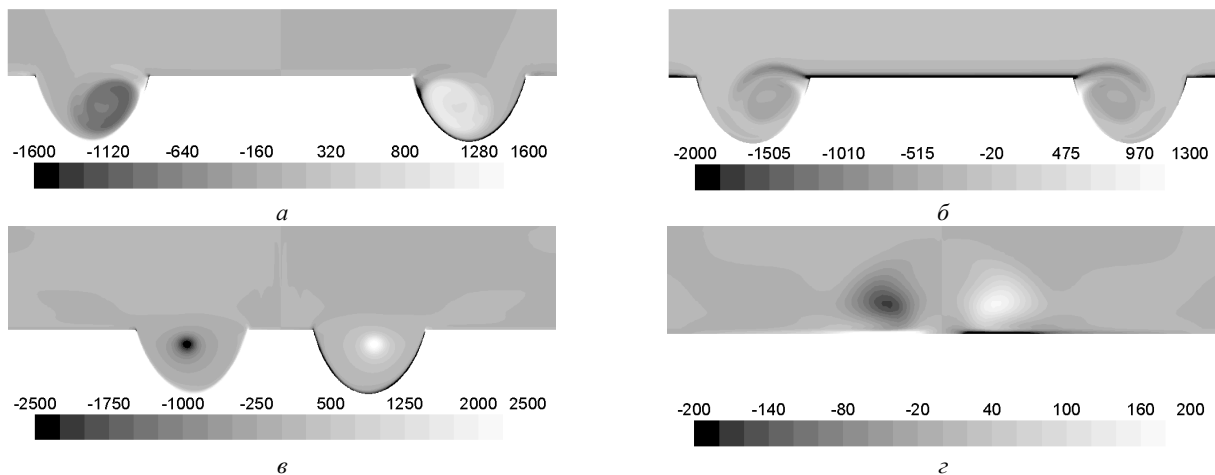


Рис. 2 – Компоненты завихренности в поперечных сечениях лунки А: а – продольная и б – трансверсальная при $x = 1$ см; в – продольная при $x = 3$ см; г – продольная в следе за лунками, $x = 8$ см.

Набегающий на лунки пограничный слой отрывается с кромок лунок, образуя сдвиговый слой, который хорошо видно по значениям трансверсальной и продольной завихренности в поперечных сечениях лунок, представленных на рис. 2, а, б и рис. 3, а, б. Под сдвиговым слоем возле передней полусферической стенки лунки формируется вихрь. Как можно видеть по линиям растекания на поверхности лунки на рис. 4, а и рис. 5, а, фокус вихря на поверхности лунки смещен к подветренной боковой стороне и верхней кромке лунки, где нормаль к поверхности лунки почти перпендикулярна направлению внешнего потока.

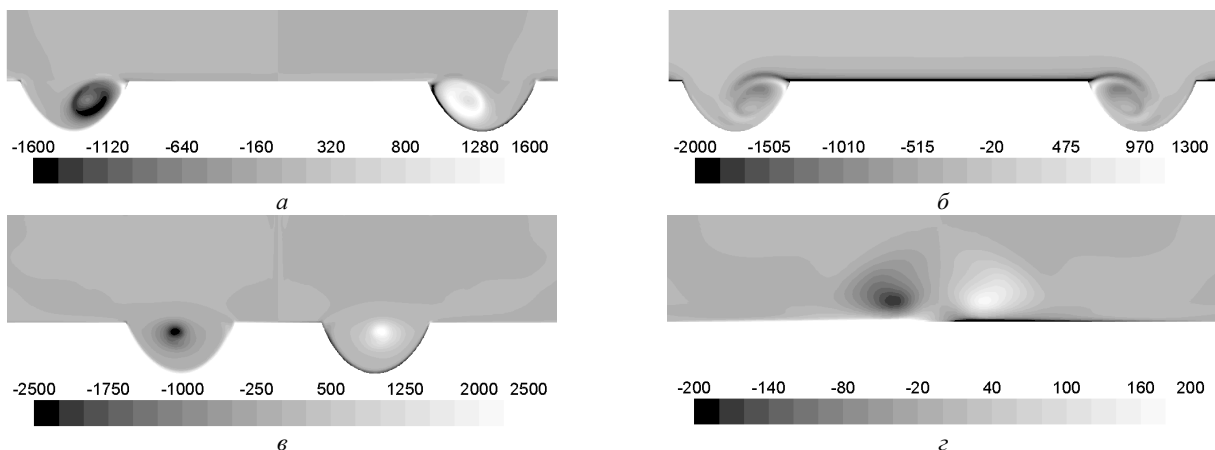


Рис. 3 – Компоненты завихренности в поперечных сечениях лунки В: а – продольная и б – трансверсальная при $x = 1$ см; в – продольная при $x = 3$ см; г – продольная в следе за лунками, $x = 8$ см.

Траектории меченых частиц, выпущенных в носовой части лунки (рис. 4, б, рис. 5, б) показывают, что далее вихрь опускается глубже в лунку и повторяет форму подветренной стенки лунки.

По изолиниям давления на поверхности лунки (рис. 6) видно, что в ее передней части давление понижается; продольная компонента трения (рис. 7) становится отрицательной на всей полусферической части, где возникает зона возвратного течения.

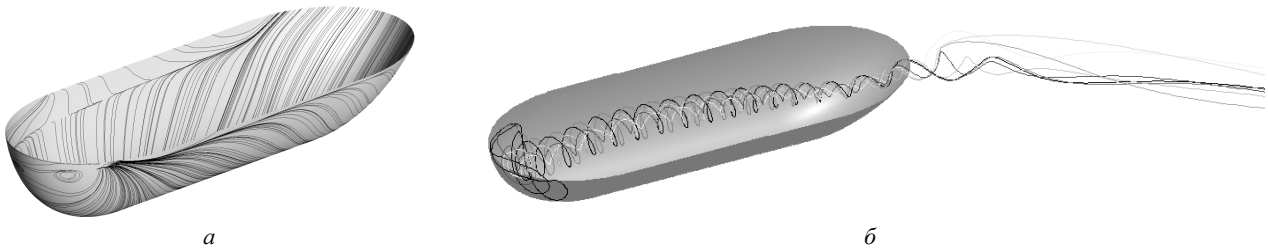


Рис. 4 – а – Линии растекания по поверхности; б – траектории меченых частиц в лунке А (течение слева направо).

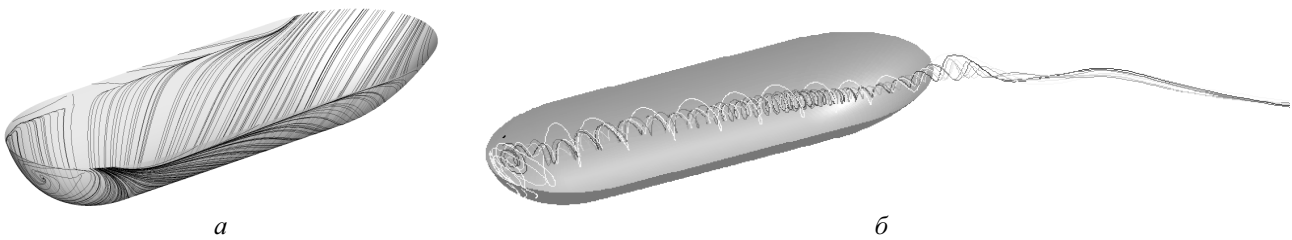


Рис. 5 – а – Линии растекания по поверхности; б – траектории меченых частиц в лунке В (течение слева направо).

При переходе от передней сферической к цилиндрической части лунки, вихрь изгибается и выстраивается вдоль подветренной стенки. Поперечный размер вихря определяется глубиной лунки (рис. 2, а, рис. 3, а), в лунке А ($h/d = 0.64$) он, соответственно, больше, а максимальная величина завихренности выше в лунке В ($h/d = 0.53$). В лунке А ось вихря находится глубже.

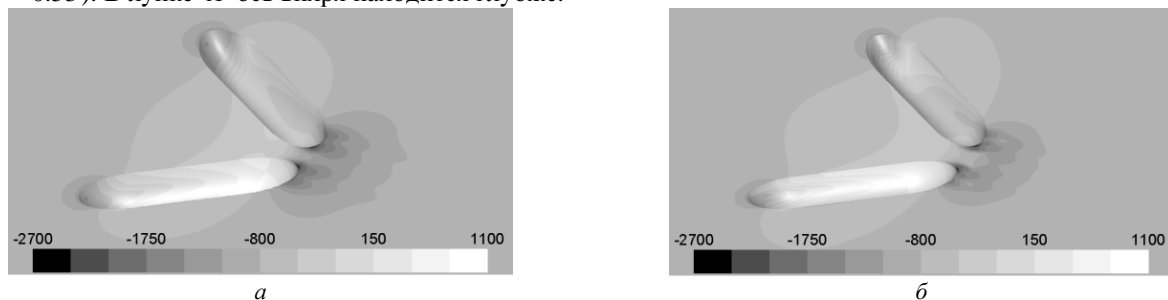


Рис. 6 – Давление на поверхности в районе лунок: а – лунки А; б – лунки В (течение слева направо).

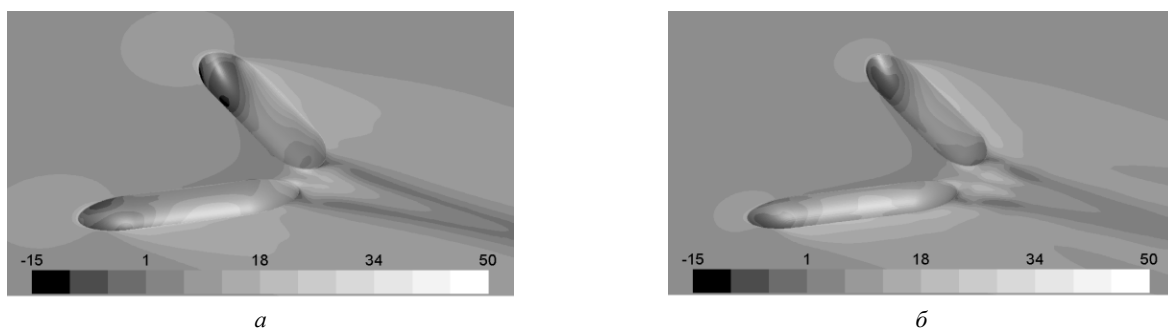


Рис. 7 – Продольное трение на поверхности в районе лунок: а – лунки А; б – лунки В (течение слева направо).

Сдвиговый слой оттесняется вверх периферией вихря и переносится к наветренной стенке лунки, где он взаимодействует с кромкой лунки, часть его захватывается вихревым движением и уносится внутрь лунки, а часть уходит вниз по течению, формируя пограничный слой на пластине. Поэтому на подветренной стенке трение меньше, чем на пластине перед лункой, а на наветренной стенке лунки трение повышается (рис. 7). Давление возле острых кромок лунок выше, чем в глубине лунки, и везде растет в направлении к кормовой части (рис. 6).

Траектории меченых частиц формируют спирали, идущие вдоль оси симметрии лунки (рис. 4, б, рис. 5, б). Перемещаясь вдоль лунки, радиусы спиралей уменьшаются, расстояние между витками и диаметр ядра умень-

шается, а максимальная завихренность увеличивается. Сложная форма ядра вихря, наблюдаемая в передней части лунки, преобразуется в продольный цилиндрический вихрь с максимальной завихренностью в центре (рис. 2, в, рис. 3, в). В лунке *A* это происходит раньше, чем в более мелкой лунке *B*.

Ближе к кормовой части пары лунок давление на подветренных стенках лунок становится выше, чем на наветренных стенках, и постепенно оттесняет продольные вихри от внутренних стенок к внешним, что можно видеть и по траекториям меченых частиц (рис. 4, б, рис. 5, б), и по изолиниям продольной завихренности в поперечных сечениях лунок (рис. 2, 3). Перед кормовой полусферической частью лунки давление возрастает на дне лунки (рис. 6), продольный вихрь выталкивается вверх. Таким образом, из лунок вихри выходят возле внешних участков кормовой стенки. Между ними образуются вторичные вихри противоположных знаков завихренности, которые быстро затухают на небольшом расстоянии вниз по потоку.

За кормовыми кромками можно видеть зоны микроотрыва с отрицательным трением там, где продольные вихри выходят из лунок (рис. 7). Следы этих вихрей в виде полосок уменьшенного трения наблюдаются и вниз по потоку. Между этими полосками на небольшом расстоянии за лунками, где в потоке образуются вторичные вихри между основными вихрями, трение повышается до места сближения основных вихрей и слияния их следов в один на расстоянии, равном длине лунки. Сформировавшаяся пара продольных вихрей занимает всю толщину пограничного слоя и хорошо различима на расстоянии до десяти длин лунок, хотя максимальная завихренность падает на два порядка по сравнению с максимальной завихренностью в лунке.

Максимальные величины давления и трения достигаются на узком верхнем участке наветренной стенки возле кромки (рис. 7, а), где стенка расположена вертикально. В глубокой лунке *A* эти значения выше, чем в лунке *B*, и как следствие, уменьшение глубины лунки *B* значительно уменьшило гидродинамические потери, при этом максимальная завихренность в центрах продольных вихрей в двух лунках практически одинакова и в кормовых частях лунок, и в следе за ними (рис. 2, з, рис. 3, з).

На поверхности пластины перед носиками и вокруг полусферических входных стенок лунок давление падает, а вокруг цилиндрических частей увеличивается, особенно на сужающемся участке между лунками (рис. 5). За кормовой кромкой давление резко падает и ниже по течению наблюдается пятно пониженного давления. Продольная компонента трения (рис. 7) увеличивается перед носиками лунок, а также за наветренными стенками лунок, где формируется новый пограничный слой, и понижается между лунками ближе к кормовым частям, где присутствие лунок и генерированных ими вихрей оттесняет внешний поток от поверхности лунок, уменьшая нормальный градиент скорости. Таким образом, глубокие лунки больше деформируют поле течения на пластине по сравнению с мелкой лункой.

Таким образом, оба типа лунок генерируют практически одинаковые по размерам и интенсивности продольные вихри в пограничном слое за ними, но воздействие на интегральные характеристики обтекаемой поверхности при наличии таких лунок существенно разное. В табл. 1 приведены величины компонентов сопротивления за счет формы (давления) и трения, и общее сопротивление одной лунки. Как можно видеть, сопротивление давления намного выше сопротивления трения, поскольку оба типа лунок являются относительно глубокими и увеличивают сопротивление этого участка по сравнению с аналогичным участком плоской поверхности. Но обе компоненты сопротивления значительно меньше у более мелкой лунки *B*, а ее общее сопротивление в 1.6 раза меньше, чем у лунки *A*.

Таблица 1 – Сопротивление одной лунки [N]

	F_1 (давление)	F_1 (трение)	F
Лунка <i>A</i>	0.0833	0.0091	0.0924
Лунка <i>B</i>	0.0502	0.0064	0.0566

Влияние нестационарности проявляется в том, что в лунках происходят небольшие периодические отклонения размещения вихря в лунке, которые приводят к пульсированию зоны микроотрыва на кормовых кромках и продольных вихрей непосредственно за лунками. В исследованном диапазоне скоростей эти колебания практически неразличимы в лунке *A*, где большая глубина стабилизирует вихрь. В более мелкой лунке *B* вихрь менее устойчив, осцилляции ядра вихря заметны не только в кормовой части лунки, но и выше. Амплитуды этих осцилляций увеличиваются при увеличении скорости потока.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными исследования влияния на гидродинамический характеристики пары лунок, взаимосвязи глубины лунки и угла ее отклонения от направления потока.

Выводы. На основании проведенного исследования можно утверждать, что в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса и геометрических параметров пары лунок возможно оптимизировать глубину лунки для создания системы продольных вихрей определенных размеров и интенсивности при минимальном изменении гидродинамического сопротивления обтекаемой поверхности.

Список литературы

1. *Gad-el-Hak M.* Flow Control : Passive, Active, and Reactive Flow Management. – Cambridge, UK : Cambridge Univ. Press, 2000. – 421 p.
2. *Cattafesta L. N., Sheplak M.* Actuators for active flow control // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2011. – Vol. 43. – P. 247 – 272.
3. *Alfredsson P. H., Orlu R.* Large-Eddy BreakUp devices – a 40 years perspective from a Stockholm Horizon // Flow Turbulence Combust. – 2018. – Vol. 100. – No. 4. – P. 877 – 888.

4. Turnow J., Kornev N., Zhdanov V., Hassel E. Flow structures and heat transfer on dimples in a staggered arrangement // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2012. – Vol. 35. – P. 168 – 175.
5. Isaev S. A., Schelchkov A. V., Leontiev A. I., Gortyshov Yu. F., Baranov P. A., Popov I. A. Vortex heat transfer enhancement in the narrow plane-parallel channel with the oval-trench dimple of fixed depth and spot area // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2017. – № 109. – P. 40 – 62.
6. Isaev S., Voropaev G., Grinchenko V., Sudakov A., Voskoboinick V., Rozumnyuk N. Drag reduction of lifting surfaces at the use of oval dimples as vortex generators // Abstract of the European Drag Reduction and Flow Control Meeting “EDRFCM 2010” 2–4 September, 2010. – Kyiv, Ukraine, 2010. – P. 32 – 33.
7. Ворopaев Г. А., Розумнюк Н. В. Формирование квазистойчивых продольных вихревых структур в пристенных течениях на структурированных поверхностях // Комп'ютерна гідромеханіка : тези шостої міжнар. науково-практичної конф. 26 – 27 вересня 2018 р. – Київ : ІГМ НАНУ, 2018. – С. 18 – 19.

References (transliterated)

1. Gad-el-Hak M. *Flow Control : Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 2000. 421 p.
2. Cattafesta L. N., Sheplak M. Actuators for active flow control. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011, vol. 43, pp. 247–272.
3. Alfredsson P. H., Orlu R. Large-Eddy BreakUp devices – a 40 years perspective from a Stockholm Horizon. *Flow Turbulence Combust.* 2018, vol. 100, no. 4, pp. 877–888.
4. Turnow J., Kornev N., Zhdanov V., Hassel E. Flow structures and heat transfer on dimples in a staggered arrangement. *International Journal of Heat and Fluid Flow.* 2012, vol. 35, pp. 168–175.
5. Isaev S. A., Schelchkov A. V., Leontiev A. I., Gortyshov Yu. F., Baranov P. A., Popov I. A. Vortex heat transfer enhancement in the narrow plane-parallel channel with the oval-trench dimple of fixed depth and spot area. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2017, no. 109, pp. 40–62.
6. Isaev S., Voropaev G., Grinchenko V., Sudakov A., Voskoboinick V., Rozumnyuk N. Drag reduction of lifting surfaces at the use of oval dimples as vortex generators. *Abstract of the European Drag Reduction and Flow Control Meeting “EDRFCM 2010” 2–4 September, 2010.* Kyiv, Ukraine, 2010. pp. 32–33.
7. Voropaev G. A., Rozumnyuk N. V. Formirovanie kvaziustoychivyykh prodol'nykh vikhrevyykh struktur v pristenochnykh techeniyakh na strukturirovannykh poverkhnostyakh [Development of quasi-stable longitudinal vortex structures in the near-wall flows over structured surfaces]. *Komp'yuterna gidromekhanika : tezy shostoyi mizhnar. naukovo-praktychnoyi konf. 26–27 veresnya 2018 r.* [Computer hydromechanics : Proceedings of the 6-th International Scientific and Practical Conference, Kyiv, September 26 – 27, 2018]. Kyiv, IGM NANU Publ., 2018. pp. 18–19.

Поступила (received) 16.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ворopaев Геннадій Олександрович (Voropaev Gennadii Aleksanrovich, Voropaiev Gennadii Oleksanrovic)

– доктор фізико-математичних наук, професор, заступник директора, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; (044) 371-65-18; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Розумнюк Наталія Вячеславівна (Rozumnyuk Nataliya Vyacheslavivna)

– кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-39; e-mail: nrozumnyuk@yahoo.com.

УДК 532.5:534.7

В. А. ВОСКОБОЙНИК, А. А. ВОСКОБОЙНИК, В. Н. ТУРИК, А. В. ВОСКОБОЙНИК**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР ПАРОЙ ОВАЛЬНЫХ ЛУНОК**

Приведены результаты физического моделирования генерации устойчивых противоположно вращающихся вихревых структур парой наклоненных к направлению потока овалных лунок. Проведены визуальные и инструментальные исследования, а также статистический анализ полей пульсаций давления вихревого течения, образованного парой овалных лунок на гидравлически гладкой плоской поверхности. Определены особенности генерации противоположно вращающихся вихревых структур лунками и их гидродинамические характеристики. Установлены места зарождения, формирования и развития вихревых структур в зависимости от режимов течения, а также области выброса вихрей в пограничный слой. Получены интегральные и спектральные характеристики пульсаций пристеночного давления на обтекаемой поверхности лунок и пластины. Определены частоты вращения вихревых структур и их выбросов наружу из наклоненных овалных лунок.

Ключевые слова: овальная лунка, вихревая структура, визуализация течения, пульсации скорости и давления, статистический анализ.

В. А. ВОСКОБОЙНИК, О. А. ВОСКОБОЙНИК, В. М. ТУРИК, А. В. ВОСКОБОЙНИК**МОДЕЛЮВАННЯ ГЕНЕРАЦІЇ ВИХРОВИХ СТРУКТУР ПАРОЮ ОВАЛЬНИХ ЛУНОК**

Наведено результати фізичного моделювання генерації стійких протилежно обертових вихрових структур парою нахилених до напрямку течії овалних лунок. Проведено візуальні і інструментальні дослідження, а також статистичний аналіз полів пульсацій тиску вихрової течії, яка була утворена парою овалних лунок на гідралічно гладкій плоскій поверхні. Визначено особливості генерації протилежно обертових вихрових структур лунками та їх гідродинамічні характеристики. Установлено місця зародження, формування і розвитку вихрових структур в залежності від режимів течії, а також області викидів вихорів у прилежний шар. Отримано інтегральні та спектральні характеристики пульсацій пристінного тиску на обтічній поверхні лунок і пластины. Визначені частоти обертання вихрових структур та їх викидів назовні з нахилених овалних лунок.

Ключові слова: овальна лунка, вихрова структура, візуалізація течії, пульсації швидкості та тиску, статистичний аналіз.

© В. А. Воскобойник, А. А. Воскобойник, В. Н. Турик, А. В. Воскобойник, 2019

V. A. VOSKOBOINICK, O. A. VOSKOBOINICK, V. N. TURICK, A. V. VOSKOBOINICK
 MODELING OF VORTEX STRUCTURE GENERATION BY PAIR OF OVAL DIMPLES

The results of physical modeling of the generation of stable counter-rotating vortex structures by a pair of oval dimples, that are inclined to the flow direction, are given. Visual and instrumental studies, as well as statistical analysis of the velocity and pressure fluctuation fields of the vortex flow, were made. The vortex flow was created by a pair of the oval dimples on a hydraulically smooth flat surface. The features of generating the counter-rotating vortex structures by the dimples and their hydrodynamic characteristics were determined. The places of origin, formation, and development of vortex structures, as well as the area of the ejection of vortices into the boundary layer depending on the flow regimes were established. The integral and spectral characteristics of the velocity and wall pressure fluctuations on the streamlined surface of the dimples and plates were obtained. The rotation frequencies of the vortex structures and the ejection frequencies of the vortices outside the inclined oval dimples were determined.

Key words: oval dimple, vortex structure, flow visualization, velocity and pressure fluctuation, statistical analysis.

Введение. В последние годы в научной литературе и практической деятельности человечества большое внимание уделено *управлению течением* и, в частности, *пограничным слоем* с целью снижения сопротивления обтекаемых тел, гидродинамических шумов и вибраций обтекаемой поверхности, а также увеличения тепло- и массопереноса, ускорения процессов перемешивания различных жидкостей и компонентов, наполняющих их. Среди методов управления необходимо отметить активные (использующие дополнительную энергию) и пассивные, к которым необходимо отнести луночные поверхности [1 – 3]. Нанесение лунок различной конфигурации и размеров на гладкую обтекаемую поверхность приводит к формированию дополнительных вихревых структур и струйных течений, которые взаимодействуют с окружающим течением, изменяя его структуру и гидродинамические характеристики.

Минимум энергетических потерь, связанных с минимизацией сопротивления трения и формы, является одним из важных факторов, определяющих эффективность движения тел с заданной скоростью. При соответствующих условиях обтекания углублений внутри них образуются крупномасштабные когерентные вихревые структуры, которые генерируют интенсивные пульсации скорости, давления, температуры, завихренности и других параметров турбулентности, что используется в средствах управления пограничным слоем. В зависимости от режима течения, геометрических параметров и формы лунок внутри последних генерируются вихревые структуры различных масштабов, направлений движения, частот вращения и осцилляций, как в пространстве, так и во времени. Отрыв пограничного слоя с переднего края углубления и неустойчивость течения в сдвиговом слое, который образуется при этом, генерируют внутри углублений вихревые структуры. Эти вихревые структуры, взаимодействуя между собой и с обтекаемой поверхностью, при определенных условиях, выбрасываются наружу из углубления, изменяя структуру пограничного слоя и интегральные характеристики тел обтекания, процесс теплообмена и смешивания, качество аэродинамических профилей и т. д. [4 – 6].

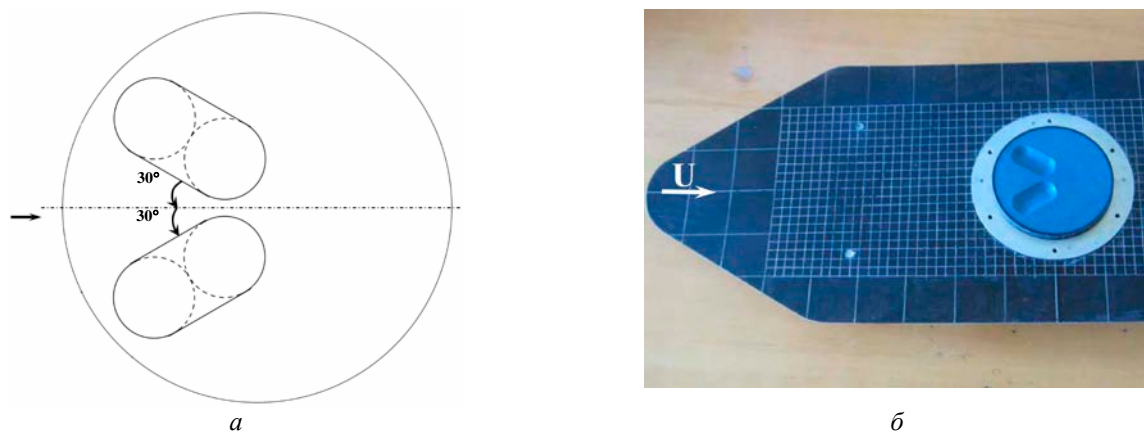


Рис. 1 – Геометрия и расположение пары овальных лунок на пластине: а – схема; б – фотография.

Генерация искусственных вихревых структур с заданно заданными параметрами является основной задачей управления пограничным слоем. Такие вихревые структуры, к которым относятся продольно противоположно вращающиеся вихревые пары, позволяют реализовать энергосберегающие технологии и улучшить экологию окружающей среды. Известно [7 – 9], что противоположно вращающиеся вихревые пары или струйки, зарождающиеся в пристеночной области пограничного слоя, поднимаясь над обтекаемой поверхностью, стабилизируют вихреобразование в пограничном слое. Генерируя вихревые пары определенного масштаба и разделения, снижают сопротивление трения обтекаемой поверхности, устраняют либо сужают области отрыва пограничного слоя, уменьшают шум и вибрации тел обтекания [1, 10, 11].

Целью данной работы является моделирование генерации устойчивых вихревых структур в виде пары противоположно вращающихся вихрей системой овальных лунок на гидравлически гладкой поверхности и определение их особенностей формирования и развития, кинематических и динамических характеристик.

Постановка задачи, программа и методика исследований. Задачу генерации устойчивых вихревых структур заданной конфигурации и масштабов было предложено выполнить посредством физического моделирования. Для этого на гидравлически гладкой обтекаемой поверхности были сделаны две пары овальных лунок, которые располагались на некотором расстоянии друг от друга и находились под противоположными углами

относительно направления потока. Внутри лунок генерировались вихревые структуры, которые выбрасывались наружу из них в пограничный слой в виде продольных противоположно вращающихся вихрей.

Эксперименты проводились в гидродинамическом лотке с открытой поверхностью воды длиной 16 м, шириной 1 м и глубиной 0.4 м. Над дном лотка (на высоте 0.1 м) устанавливалась гидравлически гладкая пластина длиной 2 м и шириной 0.5 м. В центре пластины были сделаны две овальные лунки в виде двух сферических сегментов диаметром $d = 0.025\text{ м}$, которые соединялись цилиндрической вставкой (рис. 1). Длина каждой лунки была в два раза больше ширины, а ее глубина составляла $0.22d$. Две лунки находились под углом $+30^\circ$ и -30° градусов относительно направления течения, раздвинутые друг относительно друга в носовой части, а их кормовые части располагались на удалении $0.2d$.



Рис. 2 – Пьезокерамические датчики пульсаций давления: а – датчики и усилители; б – расположение.

Сначала проводилась визуализация течения с помощью контрастных водорастворимых покрытий и подачи цветных чернил и красок. Затем в характерных местах зарождения и эволюции вихревых структур проводились измерения кинематических и динамических характеристик пограничного слоя и вихревого течения. Для этого использовалась группа миниатюрных датчиков скорости и давления. Пленочные одно и двухкомпонентные *термоанемометры* фирмы *Диза* (Дания) с помощью хорошо обтекаемых державок и координатных приспособлений вводились в исследуемые объемы жидкости. *Пьезокерамические датчики пульсаций давления* (рис. 2) и *пьезорезистивные датчики давления*, установленные заподлицо с обтекаемой поверхностью и не возмущающие поток, измеряли поле пристеночного давления. Электрические сигналы датчиков через соответствующие усилители, фильтры и 16-канальный аналогово-цифровой преобразователь поступали на персональный компьютер, где они регистрировались, обрабатывались и анализировались по соответствующим алгоритмам и программам с привлечением аппарата теории вероятности и математической статистики [12, 13].

Результаты исследований. Результаты визуальных исследований показали, что для ламинарного режима течения ($Re_d < 1000$) внутри овальных лунок не наблюдалось вихревого движения. С увеличением скорости потока обнаружено формирование неинтенсивных вихревых структур, которые скручивались и медленно колебались внутри лунок (рис. 3). В передней сферической части лунок формировалось циркуляционное течение, ко-

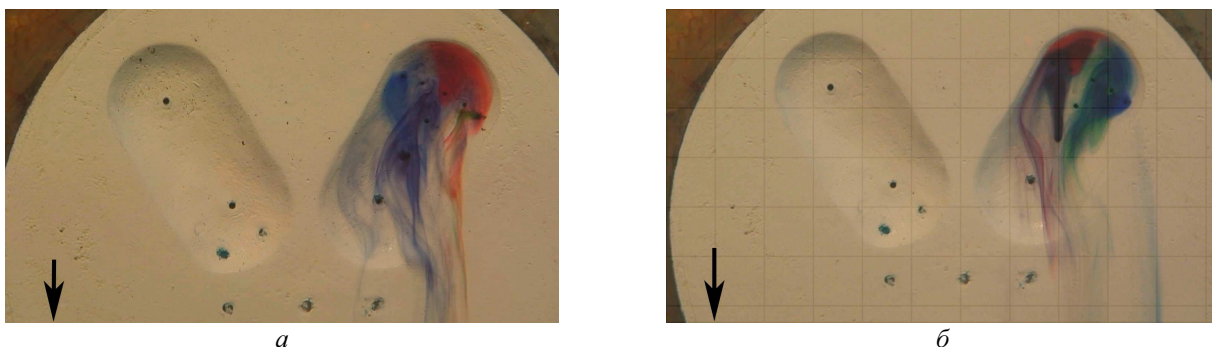


Рис. 3 – Формирование вихревого течения внутри лунки: а – для $Re_d = 3500$; б – для $Re_d = 5500$.

торое перерождалось в вертикальный или наклонный вихрь, ось которого изгибалась по направлению течения [14]. Вихрь, перемещаясь вдоль лунок, принимал вид спиралевидной вихревой структуры, которая, увеличивая скорость закручивания и уменьшая свой поперечный масштаб, выбрасывалась наружу из лунки над ее кормовой частью (рис. 3, а). Спиралевидный вихрь сохранял свою конфигурацию при выходе из лунки и проходил в виде устойчивого продольного вихря достаточно большое расстояние (около 3 – 5 длин лунок). В результате системной овальных лунок генерировались пары противоположно вращающихся продольных вихрей. Для турбулент-

ного режима течения ($Re_d > 5000$) внутри овальных лунок формировались спиралевидные вихри, которые с увеличением скорости прижимались к передним сферическим частям лунок (рис. 3, б). Эти вихри, достигая масштабов лунок, выбрасывались наружу из овальных лунок, нарушая структуру пограничного слоя. Выброшенный спиралевидный вихрь, прижимаясь к поверхности обтекаемой пластины, проходил расстояние около $5d$, а затем разрывался на части и выносился в пограничный слой пластины, где прекращал свое существование как когерентная продольная вихревая структура.

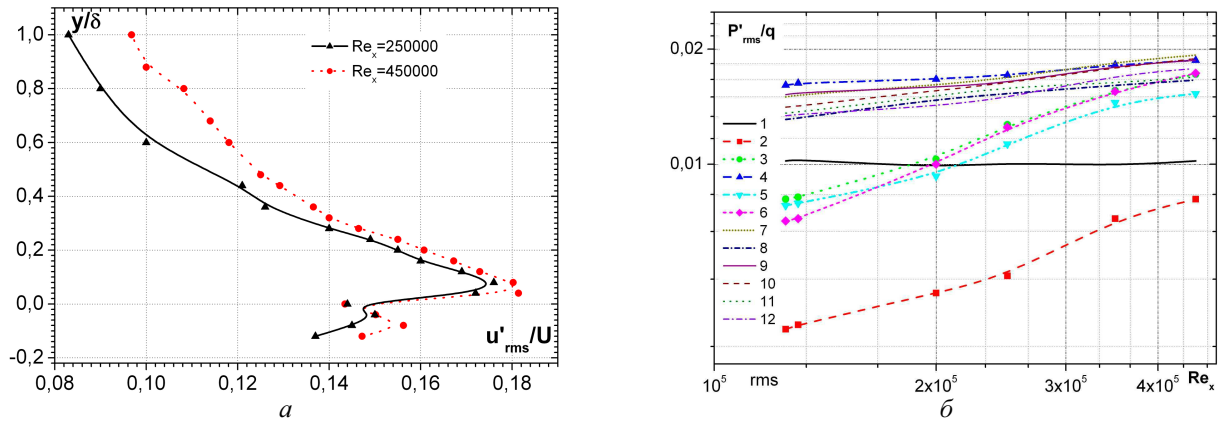


Рис. 4 – Среднеквадратичные значения пульсаций: а – скорости; б – давления.

Профиль пульсаций продольной скорости имел максимальные значения на уровне обтекаемой поверхности пластины, а также на границе сдвигового слоя, который формировался над отверстиями овальных лунок (рис. 4, а). Интенсивность поля пульсаций пристеночного давления была максимальной в области взаимодействия вихревых структур сдвигового слоя и выбрасываемых крупномасштабных вихревых структур с кормовой стенкой овальных лунок (рис. 4, б). На этом рисунке номера кривых соответствуют номерам датчиков пульсаций пристеночного давления, которые изображены на рис. 2, б. Наименьшая интенсивность пульсаций пристеночного давления имела место на дне овальной лунки в ее передней по потоку сферической части. С приближением к придонной части овальных лунок спектральные уровни пульсаций продольной скорости увеличивались, особенно в области низких частот. Максимальные уровни пульсаций скорости наблюдались на глубине $(0.08 - 0.1)d$.

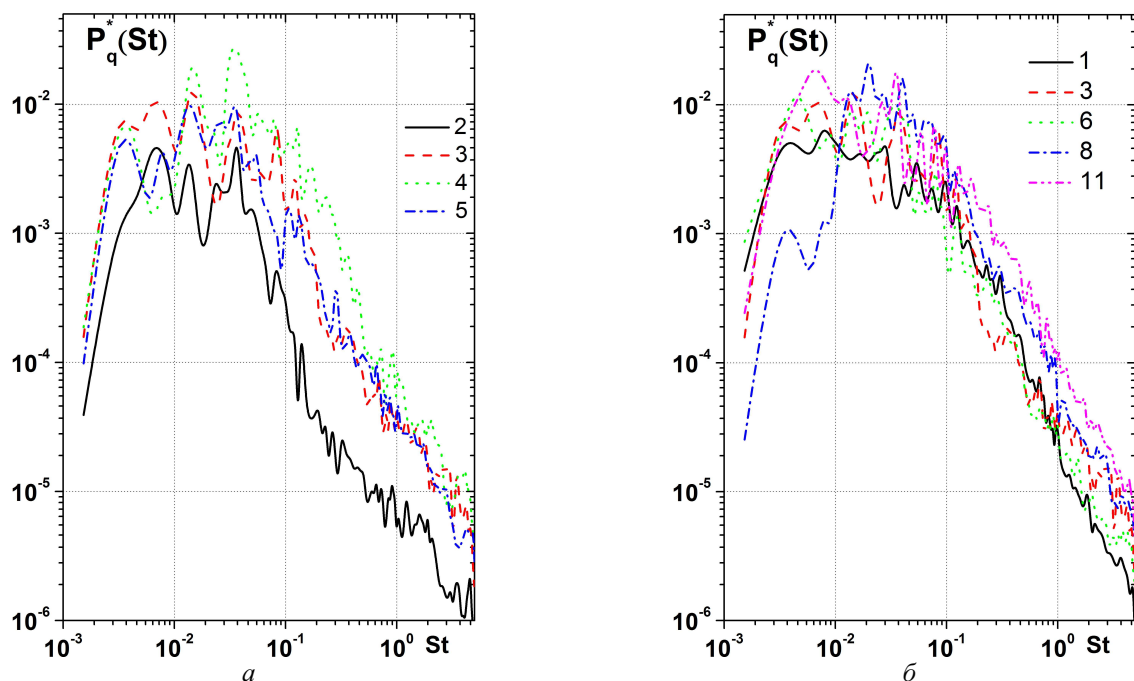


Рис. 5 – Спектральные плотности мощности пульсаций давления: а – внутри лунки; б – между ними.

Применяя алгоритм быстрого преобразования Фурье и весовую функцию Ханнинга, как рекомендуется в работе [13], был проведен спектральный анализ пульсаций пристеночного давления на обтекаемой поверхности лунок и измерительной пластины. В спектрах поля пульсаций пристеночного давления (рис. 5) и первых моментах спектральных плотностей мощности пульсаций пристеночного давления (рис. 6) появлялись характерные

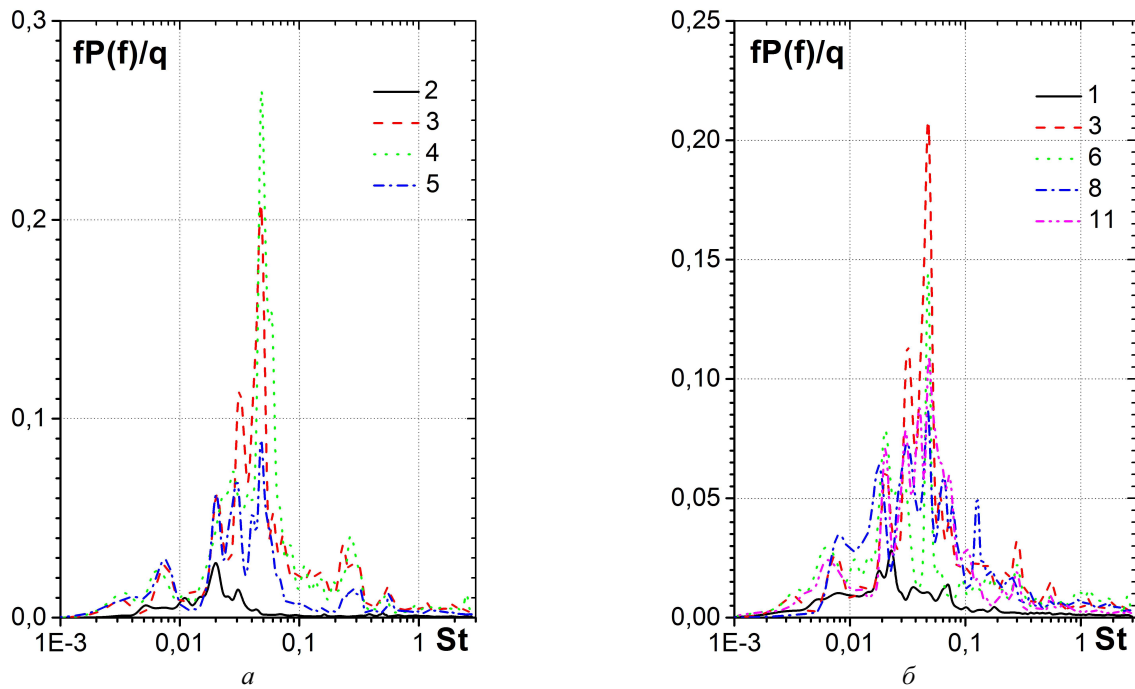


Рис. 6 – Первые моменты спектральных плотностей мощности пульсаций давления: a – внутри лунки; b – между ними.

особенности в виде дискретных пиков. Они соответствовали частотам, которые наблюдались в спектрах скорости [3, 14, 15]. В спектральных зависимостях наблюдались тональные подъемы на частотах выбросов крупномасштабных вихревых структур наружу из лунок, которым соответствовало число Струхала $St = 0.05$, на частотах вращения циркуляционного течения, которое формировалось внутри лунок ($St = 0.13$) и на частотах автоколебаний вихревых структур сдвигового слоя ($St = 0.48$). Так, при удалении до $2d$ от лунок наблюдались тональные подъемы в спектрах пульсаций пристеночного давления, которые отвечали частотам выбросов крупномасштабных вихрей и частотам колебаний вихревого движения внутри лунок, как в срединном сечении системы лунок, так и позади их кормовых сферических частей. С удалением от системы овальных лунок более $5d$ интенсивность тональных колебаний, характерных для вихревого движения внутри лунок, уменьшалась, а пограничный слой постепенно восстанавливался.

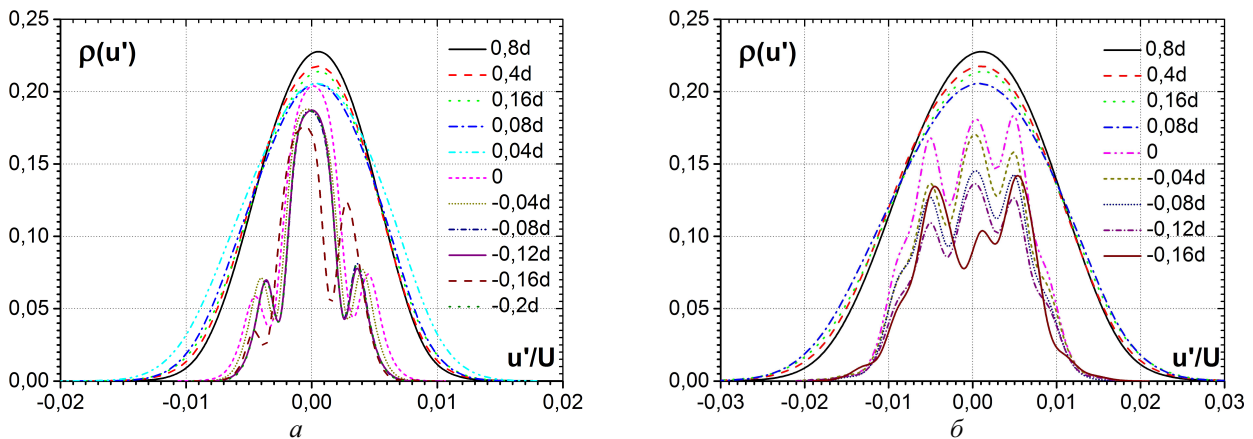


Рис. 7 – Функции плотности вероятности пульсаций скорости в срединном сечении лунки: a – для скорости потока 0.25 м/с; b – для скорости потока 0.45 м/с.

Плотности вероятностей появления пульсаций продольной скорости для турбулентного течения над овальными лунками и перед ними имели колоколообразный вид (рис. 7) с коэффициентами асимметрии и эксцесса близкими по значениям к гауссовскому случайному процессу. На этом рисунке кривые обозначены значениями расстояний от поверхности пластины относительно диаметра лунки. Внутри лунки наблюдалось взаимодействие случайного процесса с гармоничным процессом и функции плотности вероятностей приобрели двугорбый вид. При этом третий и четвертый статистические моменты поля пульсаций скорости существенно изменились и стали не нулевыми. Это обусловлено тем, что на мелкомасштабные вихревые структуры, которые генерируют пульсации скорости малой амплитуды, значительное влияние оказывали крупномасштабные вихри и интенсивное колебательное движение.

Выводы. Результаты экспериментальных исследований и статистической обработки данных показали, что для определенных условий течения, формы и расположения пары овальных лунок внутри последних формируются вихревые структуры, которые выбрасываются наружу из лунок в пограничный слой над плоской пластиной и формируют пары противоположно вращающихся вихревых структур.

Визуализация течения показала особенности формирования вихревого течения внутри лунок и взаимодействия его с пограничным слоем. Обнаружено, что для ламинарного режима течения внутри лунок не наблюдалось вихревого течения. С увеличением скорости обтекания или чисел Рейнольдса, рассчитанных по диаметру лунки, более 5000 (переходной и турбулентный режим течения) внутри лунок формируются вихревые структуры, которые, выбрасываясь из каждой овальной лунки, формируют противоположно вращающиеся вихри. Эти вихри, перемещаясь вниз по потоку от лунок, взаимодействуют с вихревыми структурами пограничного слоя пластины. На удалении более 5 диаметров лунок эти продольные вихри разрушались и теряли свою когерентность.

Измерения поля скорости и давления над и на обтекаемых поверхностях позволили зарегистрировать кинематические и динамические характеристики вихревого течения и пограничного слоя. Установлены места зарождения вихревых структур для различных режимов течения, их частоты вращения и колебаний, а также выбросов наружу из лунок. Показаны области взаимодействия пар противоположно вращающихся вихревых структур с пограничным слоем и их протяженность. В профилях пульсаций скорости над и внутри овальной лунки наблюдались максимальные значения на уровне обтекаемой поверхности, а также на границе сдвигового слоя.

Список литературы

1. Gad-el-Hak M. Flow control. Passive, active, and reactive flow management. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. – 421 p.
2. Kornilov V. I. Reduction of turbulent friction by active and passive methods (review) // Thermophysics and Aeromechanics. – 2005. – Vol. 12. – № 2. – P. 175 – 196.
3. Voskoboinick V. A., Voskoboynik O. A., Voskobijnyk A. V. Flow control by vortex cavity generator // Proc. VIII-th World Congress “Aviation in the XXI-st Century”. – Kyiv : NAU, 2018. – P. 1.1.14 – 1.1.18.
4. Гортышов Ю. Ф., Попов И. А., Олимпиев В. В., Шелчков А. В., Каськов С. И. Теплогидравлическая эффективность перспективных способов интенсификации теплоотдачи в каналах теплообменного оборудования. – Казань : Центр инновационных технологий, 2009. – 531 с.
5. Халатов А. А. Теплообмен и гидродинамика около поверхностных углублений (лунок). – Киев : ИТТФ НАНУ, 2005. – 76 с.
6. Voropayev G. A., Voskoboinick V. A., Rozumnyuk N. V., Voskoboinick A. V. Vortical flow features in a hemispherical cavity on a flat plate. // Proc. VI-th Intern. Sympos. Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP – 6. June 22 – 24, 2009. – Seoul, 2009. – P. 563 – 568.
7. Rowley C. W., Dawson S. T. M. Model reduction for flow analysis and control // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2017. – Vol. 49. – P. 387 – 417.
8. Ortega J. M., Bristol R. L., Savas O. Experimental study of the instability of unequal-strength counter-rotating vortex pairs // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 474. – P. 35 – 84.
9. Leweke T., Le Dizès S., Williamson C. H. K. Dynamics and instabilities of vortex pairs // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2016. – Vol. 48. – P. 507 – 541.
10. Blackwelder R. F. Some notes on drag reduction in the near-wall region // Lecture Notes in Physics. – Springer, 1998. – Vol. 54. – P. 155 – 198.
11. Isaev S., Voropaiev G., Grinchenko V., Sudakov A., Voskoboinick V., Rozumnyuk N. Drag reduction of lifting surfaces at the use of oval dimples as vortex generators // Abstract of the European Drag Reduction and Flow Control Meeting “EDRFCM 2010”. – Kyiv, Ukraine, 2010. – P. 32 – 33.
12. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements // Flow Turbulence Combust. – 2013. – Vol. 90. – № 4. – P. 709 – 722.
13. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М. : Мир, 1989. – 540 с.
14. Voskoboinick V., Voskoboinick A., Stepanovitch V. Generation of vortex structures by pair oval dimples on flat plate. Proc. European Drag Reduction and Flow Control Meeting – EDRFCM 2015, March 23 – 26, 2015. – Cambridge, UK, 2015. – P. 43 – 44.
15. Voskoboinick V. A., Turick V. N., Voskoboynik O. A., Voskoboinick A. V., Tereshchenko I. A. Influence of the deep spherical dimple on the pressure field under the turbulent boundary layer // In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education. ICCSEEA 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, 2019. – Vol 754. – P. 23 – 32.

References (transliterated)

1. Gad-el-Hak M. Flow control. Passive, active, and reactive flow management. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 2000. 421 p.
2. Kornilov V. I. Reduction of turbulent friction by active and passive methods (review). Thermophysics and Aeromechanics. 2005, vol. 12, no. 2, pp. 175–196.
3. Voskoboinick V. A., Voskoboynik O. A., Voskobijnyk A. V. Flow control by vortex cavity generator. Proc. VIII-th World Congress “Aviation in the XXI-st Century”. Kyiv, NAU Publ., 2018, pp. 1.1.14–1.1.18.
4. Gortyschov Yu. F., Popov I. A., Olimpiev V. V., Shchelchikov A. V., Kas'kov S. I. Teplogidravlicheskaya effektivnost' perspektivnykh sposobov intensifikatsii teplotdachi v kanalakh teploobmennogo oborudovaniya [Thermohydraulic efficiency of prospective methods for intensifying heat transfer in the heat exchange equipment channels]. Kazan', Centr innovation tekhnologiy Publ., 2009. 531 p.
5. Khalatov A. A. Teploobmen i gidrodinamika okolo poverkhnostnykh uglubleniy (lunok) [Heat exchange and hydrodynamics of near-surface cavities (dimples)]. Kyiv, ITTF NASU Publ., 2005. 76 p.
6. Voropayev G. A., Voskoboinick V. A., Rozumnyuk N. V., Voskoboinick A. V. Vortical flow features in a hemispherical cavity on a flat plate. Proc. VI-th Intern. Sympos. Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP – 6. June 22 – 24, 2009. Seoul, 2009. pp. 563–568.
7. Rowley C. W., Dawson S. T. M. Model reduction for flow analysis and control. Annu. Rev. Fluid Mech. 2017, vol. 49, pp. 387–417.
8. Ortega J. M., Bristol R. L., Savas O. Experimental study of the instability of unequal-strength counter-rotating vortex pairs. J. Fluid Mech. 2003, vol. 474, pp. 35–84.
9. Leweke T., Le Dizès S., Williamson C. H. K. Dynamics and instabilities of vortex pairs. Annu. Rev. Fluid Mech. 2016, vol. 48, pp. 507–541.

10. Blackwelder R. F. Some notes on drag reduction in the near-wall region. *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1998, vol. 54, pp. 155–198.
11. Isaev S., Voropaev G., Grinchenko V., Sudakov A., Voskoboinick V., Rozumnyuk N. Drag reduction of lifting surfaces at the use of oval dimples as vortex generators. *Abstract of the European Drag Reduction and Flow Control Meeting "EDRFCM 2010"*. Kyiv, Ukraine, 2010. pp. 32–33.
12. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements. *Flow Turbulence Combust.* 2013, vol. 90, no. 4, pp. 709–722.
13. Bendat J., Pirsol A. *Prikladnoy analiz sluchaynykh dannykh* [Applied analysis of random data]. Moscow, Mir Publ., 1989. 540 p.
14. Voskoboinick V., Voskoboinick A., Stepanovitch V. Generation of vortex structures by pair oval dimples on flat plate. *Proc. European Drag Reduction and Flow Control Meeting – EDRFCM 2015, March 23–26, 2015*. Cambridge, UK, 2015, pp. 43–44.
15. Voskoboinick V. A., Turick V. N., Voskoboinyck O. A., Voskoboinick A. V., Tereshchenko I. A. Influence of the deep spherical dimple on the pressure field under the turbulent boundary layer. In: *Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education. ICCSEEA 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, Cham., 2019, vol 754, pp. 23–32.

Поступила (received) 26.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воскобійник Володимир Анатолійович (Воскобойник Владимир Анатольевич, Voskoboinick Vladimir Anatolievich) – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Воскобойник Олександр Анатолійович (Воскобойник Александр Анатольевич, Voskoboinick Oleksandr Anatoliyovych) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Турик Володимир Миколайович (Турик Владимир Николаевич, Turick Vladimir Nikolaevich) – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУУ Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, професор кафедри, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: turick46@gmail.com.

Воскобійник Андрій Володимирович (Воскобойник Андрей Владимирович, Voskoboinick Andrew Vladimirovich) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

УДК 532.5

А. А. ГУРЖИЙ, О. И. КОРДАС, Е. И. НИКИФОРОВИЧ, Д. И. ЧЕРНИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЙ НА МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается задача о двумерной адвекции поверхностного загрязнения морскими течениями со сложной геометрией береговой линии в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Задача решена с использованием численного метода дискретных особенностей, адаптированного к задачам адвекции жидкости. Обсуждается иллюстрационный пример эволюции загрязнения в Днепровско – Бугском лимане. Показано, что действие ветра приводит к значительным изменениям в движении загрязнения, к заметному замедлению скорости движения загрязнения и его смещению в поперечном направлении по отношению к основному потоку.

Ключевые слова: задача адвекции, 2D потенциальное течение, метод дискретных особенностей, поверхностное загрязнение.

О. А. ГУРЖИЙ, О. І. КОРДАС, Є. І. НІКІФОРОВИЧ, Д. І. ЧЕРНИЙ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПРИ СКЛАДАННІ КОРОТКОСТРОКОВОГО ПРОГНОЗУ ПОШИРЕННЯ ЗАБРУДНЕНЬ НА МОРСЬКІЙ ПОВЕРХНІ

Розглядається задача про двовірну адвекцію поверхневого забруднення морськими течіями зі складною геометрією берегової лінії в наближенні ідеальної нестисливої рідини. Задача розв'язана з використанням чисельного методу дискретних особливостей, адаптованого до задач адвекції рідини. Обговорюється ілюстративний приклад еволюції забруднення в Дніпровсько – Бугському лимані. Показано, що дія вітру призводить до значних змін в русі забруднення, до помітного уповільнення швидкості руху забруднення і його зміщення в поперечному напрямку по відношенню до основного потоку.

Ключові слова: задача адвекції, 2D потенційна течія, метод дискретних особливостей, поверхневе забруднення.

А. А. GOURJI, O. I. KORDAS, E. I. NIKIFOROVICH, D. I. CHERNIY APPLICATION OF THE METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES IN SHORT-TERM FORECASTING OF POLLUTION PROPAGATION ON THE SEA SURFACE

The paper deals with the two-dimensional advection problem of surface pollution by sea currents with complex coastline geometry in the approximation of an ideal incompressible fluid. The problem was solved using the numerical method of discrete singularities adapted to the advection problems of fluids. An illustrative example of the evolution of pollution in the Dnieper – Bug estuary is discussed in the report. It is shown that the effect of the wind leads to significant changes in the movement of pollution, to a noticeable slowing of the pollution movement, and its displacement in the transverse direction with respect to the main flow.

Key words: advection problem, 2D potential flow, method of discrete singularities, surface pollution.

© А. А. Гуржий, О. И. Кордас, Е. И. Никифорович, Д. И. Черний, 2019

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 8 (1333) 2019.

Введение. В условиях нарастающей опасности техногенных катастроф одной из важных задач экологической безопасности государства является мониторинг и поддержание экологической системы [1]. Человеческий фактор, а в некоторых случаях и неблагоприятные погодные условия, приводят к существенному повышению рисков аварий на транспорте, которые могут сопровождаться загрязнением окружающей среды. Для поддержания экологической системы во многих странах мира сегодня сформированы центры мониторинга и контроля экологической обстановки на море, в задачу которых входят выработка решений по локализации и действий по ликвидации последствий аварий в шельфовой зоне морей [1, 2].

Анализ последних исследований. Сегодня в мире существует много центров по ликвидации последствий экологических аварий, которые используют различные моделирующие системы. Для составления прогноза распространения поверхностного загрязнения такие системы включают в себя мониторинговые системы параметров ветра и течений, химические и физические параметры морской среды [3]. Эти данные через спутниковую связь передаются в национальные вычислительные центры для составления прогноза. Некоторые подробности моделирующих систем, созданные за последние десятилетия, можно найти в работе [4].

Распространение загрязнений по морской поверхности представляет собой сложное явление, которое включает различные физические и химические процессы, которые вызваны морскими течениями, приливами и дрейфом под действием ветра, диффузией частиц загрязнений, механическим растеканием углеводородов, испарением и оседанием различными компонент нефти, эмульгированием и испарением [5]. Учет этих эффектов значительно улучшает качество прогноза и открывает определенные возможности составления долгосрочных прогнозов распространения поверхностных загрязнений на водной поверхности. В этом случае необходимо проводить объемные вычисления с использованием различных комбинированных методов, опираясь на широкую базу имеющейся и текущей информации [4].

Экологическая безопасность на планете зависит не только от экологической обстановки передовых стран, но и от экологических условий в странах, в которых разработка, приобретение или кооперация в использовании комплексных моделирующих систем встречает ряд трудностей, в первую очередь по финансовым причинам. Поэтому возникает острая необходимость создания простых, мобильных систем краткосрочного прогнозирования распространения загрязнений в прибрежной зоне таких стран, которые могут формировать краткосрочные прогнозы на персональных компьютерах умеренной производительности для заинтересованных национальных служб. Основным требованием к таким прикладным системам является доступность исходной информации, достоверность прогнозирования и умеренный объем вычислений, который может быть реализован в режиме, опережающим реальное время.

Постановка задачи. Основной задачей моделирующей системы для составления краткосрочного прогноза является расчет эволюции распространения поверхностного загрязнения в рассматриваемой акватории для принятия службами береговой охраны последовательности действий по локализации и ликвидации последствий экологической аварии. Точность составления прогноза должна быть в пределах визуального и локационного мониторинга на судах специального назначения.

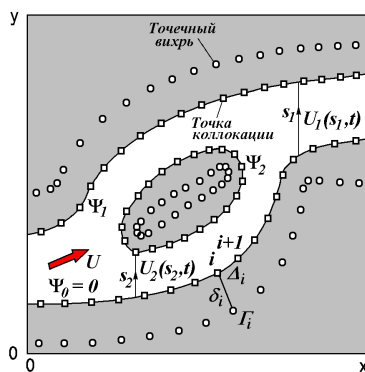


Рис. 1 – Пример геометрии задачи.

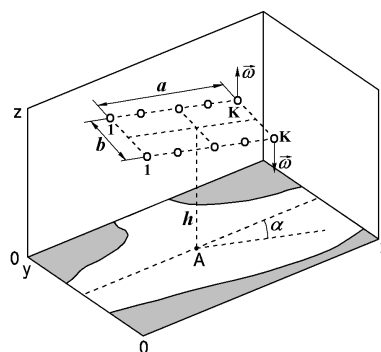


Рис. 2 – Система вихревых над расчетной областью.



Рис. 3 – Схема Днепро-Бугского Лимана.

Целью настоящих исследований является формирование математической модели процесса переноса выделенной жидкости поверхностными течениями на водной поверхности с учетом сложной геометрии береговой линии, влияния силы и направления ветра. Необходимо выявить основные свойства и закономерности процесса переноса поверхностного загрязнения в акватории дельты речных систем.

Математическая модель. Анализ литературных данных [3, 6, 7] показывает, что в течение первых нескольких дней химические взаимодействия большинства видов загрязнений с водной средой не приводят к появлению существенного смещения в локации загрязнения. Поэтому, при составлении математической модели процесса распространения загрязнения химические превращения можно не учитывать. В этом случае можно

считать [8], что определяющими факторами в процессе переноса поверхностного загрязнения являются *нелинейный конвективный перенос* и *ветровая нагрузка*. Анализ масштабов физических процессов [7, 8] показывает, что такое допущение оказывается оправданным только на малых временных интервалах в масштабах рассматриваемых задач, в течение которых диффузионные эффекты еще не успели проявить свое заметное влияние.

Условие равенства скорости движения отдельной пассивной жидкой частицы скорости течения в точке, в которой она расположена, приводит к уравнению движения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

При этом *нелинейность движения жидкости* сосредоточена в правой части уравнения, описывающего движение *лагранжевой жидкой частицы* в *эйлеровом поле скорости*. Это уравнение позволяет начально-краевую задачу переноса выделенной жидкости поверхностным течением свести к решению двух отдельных задач: двумерной гидродинамической задачи течения жидкости в расчетной области и задачи переноса системы выделенных частиц в рассматриваемом течении. Определение правой части уравнения (1) представляет собой отдельную, независимую гидродинамическую задачу. Во многих случаях именно эта задача связана с большими объемами вычислений и требует наибольших вычислительных ресурсов.

Для решения гидродинамической задачи в модели применен метод дискретных особенностей [9]. Основная идея метода связана с аналогией, которая существует между потенциальным и циркуляционным движением идеальной несжимаемой жидкости. Введение в систему определенных граничных условий на безграничной плоскости вдоль произвольной линии, совпадающей с границей течения, приводит к системе интегральных сингулярных уравнений. Это эквивалентно введению в численную схему решения гидродинамической задачи системы точечных вихрей [10, 11], интенсивность которых определяется граничными условиями.

Рассмотрим двумерное потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости внутри канала, ограниченного непроницаемыми границами сложной геометрии (рис. 1). Метод дискретных особенностей, адаптированный к задачам адвекции [10], позволяет определить распределение функции тока $\Psi(x, y, t)$ течения для заданной геометрии канала и профиля скорости $U_i(s_i, t)$ течения (где s_i – линия, соединяющая границы течения). Необходимо определить распределение двумерного поля скорости $U[U(x, y, t), V(x, y, t)]$ поверхностного течения жидкости.

Гидродинамическая задача решается в терминах функции тока $\Psi(x, y, t)$. Поскольку линия тока постоянного значения представляет собой кривую, вдоль которой нормальная компонента скорости равна нулю, то граничные условия на ограничивающих поверхностях канала можно записать в виде равенства значений функции тока на границе течения.

Для пространственной фиксации линии тока, совпадающей с границей канала, метод дискретных особенностей предусматривает введение в расчетную схему системы *точек коллокаций* и *фиксированных точечных вихрей* (рис. 1). Точки коллокаций располагаются вдоль границ на некотором расстоянии Δ_i ($i = 1, \dots, N$, где N – общее число точек коллокаций в рассматриваемой системе) друг относительно друга, которое определяет точность дискретизации границ канала.

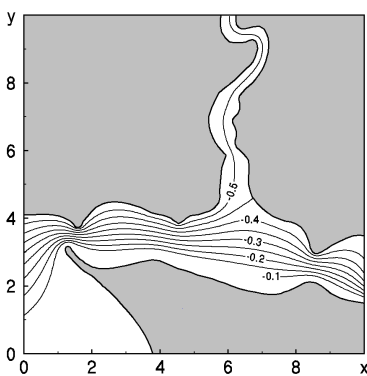


Рис. 4 – Распределение функции тока в Днепроовско – Бугском лимане при отсутствии ветра.

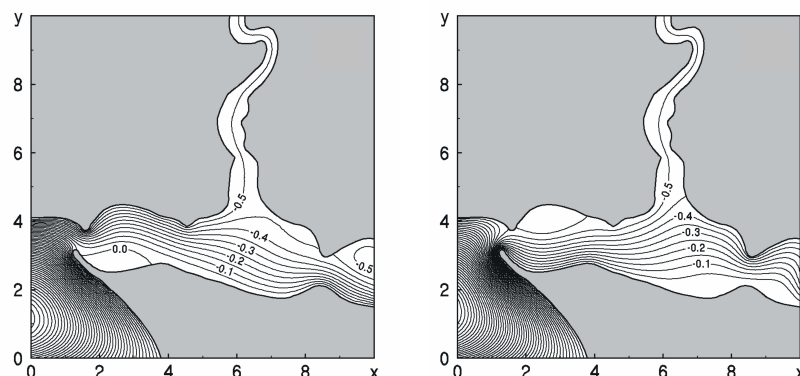


Рис. 5 – Распределение функции тока умеренного ветра в Днепроовско – Бугском лимане при: а – $\alpha = 90^\circ$ (северный ветер); б – $\alpha = 270^\circ$ (южный ветер).

Значения функции тока и проекции поля скорости, наведенные системой N точечных вихрей с интенсивностями Γ_i , расположенными в точках с координатами (x_i, y_i) , определяются выражением [12]:

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln \left[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right], \quad U(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2)$$

которое представляет собой сумму вкладов каждого точечного вихря в рассматриваемую точку течения.

Условие равенства значений функции тока в точках коллокаций на каждой границе рассматриваемого течения позволяет сформировать систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей Γ_i системы фиксированных точечных вихрей:

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] = -4\pi\Psi(x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Метод дискретных особенностей решения гидродинамической задачи позволяет принять во внимание вклад ветровой компоненты скорости на поверхности течения. Для этого над расчетной областью, над некоторой базовой точкой A можно разместить систему вихревых элементов (рис. 2). Она состоит из K вихревых элементов одинаковой интенсивности Γ в глубине рисунка и слоя вихревых элементов с интенсивностью $-\Gamma$ в передней части рисунка. Интенсивность вихревых элементов будет определять величину модуля скорости поверхностного течения, наведенного ветром, а α – угол между осью системы вихревых элементов и направлением оси Ox . Некоторые подробности можно найти в [11].

Поставленную математическую задачу удобно обезразмерить на L_0 – характерный геометрический масштаб задачи и T_0 – характерный временной масштаб. В этом случае безразмерные величины задачи принимают следующие значения:

$$(x^*, y^*, z^*) = \frac{(x, y, z)}{L_0}, \quad t^* = \frac{t}{T_0}, \quad (U^*, V^*) = \frac{(U, V)}{L_0} T_0, \quad (\Gamma^*, \Psi^*) = \frac{(\Gamma, \Psi)}{L_0^2} T_0. \quad (4)$$

В дальнейшем звездочки при обезразмеренных величинах будут опущены. Поставленная математическая задача будет решена в безразмерном виде.

Результаты численного моделирования. В качестве примера составления прогноза рассмотрим возможный случай выброса поверхностного загрязнения в Днепро-Бугском лимане. Схема залива показана на рис. 3, который выполнен в масштабе $L_0 = 5.0$ км. В качестве временного масштаба выбираем значение $T_0 = 1.0$ час.

Река Днепр представляет собой одну из полноводных рек восточной Европы со среднегодовым расходом $1700 \text{ м}^3/\text{с}$ в устье реки [13]. Средняя скорость течения в устье реки составляет $0.6 \dots 0.7$ м/с при ширине устья порядка $4.0 \dots 5.0$ км. Река Южный Буг – одна из больших рек Украины со средним расходом воды порядка $160 \text{ м}^3/\text{с}$ в устье со средней скоростью течения $0.4 \dots 0.5$ м/с. Днепро-Бугский лиман представляет собой водоем длиной порядка $35 \dots 40$ км и шириной порядка $5 \dots 10$ км. В восточную часть лимана впадает р. Днепр (в южную часть лимана, со стороны Крымского полуострова), а в среднюю часть (со стороны континентальной Украины) впадает р. Южный Буг. Выход Днепро-Бугского лимана в Черное море представляет собой узкий пролив, образованный выступом (со стороны г. Очаков) и Кинбурнской косой (со стороны полуострова Крым).

Распределение функции тока в Днепро-Бугском лимане в штиль (при отсутствии ветра) показано на рис. 4, на котором нанесено семейство линий тока с эквидистантным шагом $\Delta\Psi = 0.05$. Видно, что интенсивный водный поток р. Днепр занимает южную часть лимана, а воды р. Южный Буг протекают в северной его части. Течение внутри Днепро-Бугского лимана обладает сепаратриссой, разделяющей водные потоки рек. Поскольку жидкость при стационарном течении не пересекает линии тока, сепаратрисса показывает в какую область лимана может занять загрязнение, попавшее в начальный момент в воды р. Днепр или р. Южный Буг.

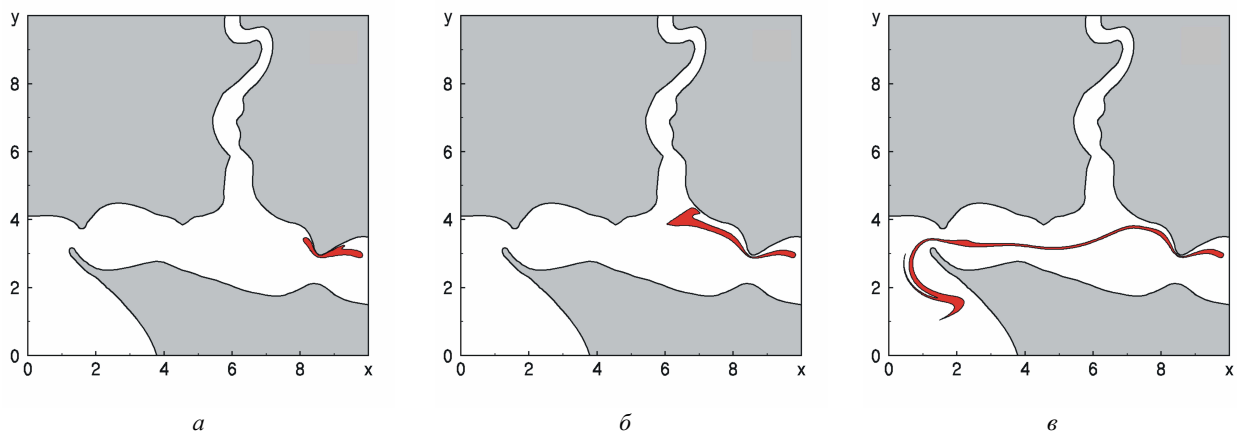


Рис. 6 – Распространение поверхностного загрязнения в Днепро-Бугском лимане под действием ветра:
 $a - t = 6$; $b - t = 20$; $v - t = 50$.

Наличие ветра меняет структуру поверхностного течения в Днепро-Бугском лимане. На рис. 5, выполненном в аналогичном стиле с рис. 4, показано распределение поля функции тока при ветре силой

$U_B = 15.0$ м/с в (4 балла по шкале Бофорта). В случае северного ветра $\alpha = 90^\circ$ сепаратрисса, разделяющая воды р. Днепр и р. Южный Буг, смещается в сторону устья р. Днепр (рис. 5, а). Интересно отметить, что северный ветер способствует образованию циркуляционных зон. Например, в устье р. Днепр действие сильного течения (вдоль крымского побережья) и северного ветра сформировали циркуляционную зону, в которой жидкость движется по замкнутым траекториям. Характерной особенностью этого течения является существенно низкие скорости поверхностного течения по сравнению со скоростью течения р. Днепр. Второй отличительной особенностью поверхностного течения в Днепровско – Бугском лимане является образование циркуляционной зоны на восточном побережье Кинбурнской косы. Исследования показывают, что образование этой циркуляционной зоны течения вызвано не только влиянием ветра, но и геометрией косы.

Анализ численных результатов показывает, что действие южного ветра ($\alpha = 270^\circ$) умеренной силы приводит к общему смещению вод р. Днепр в северном направлении (рис. 5, б). При этом сепаратрисса, разделяющая воды рек, не смещается далеко против течения р. Южный Буг по сравнению со случаем на рис. 5, а. Геометрия береговой линии Днепровско – Бугского лимана около г. Очаков приводит к формированию достаточно большой циркуляционной зоны вдоль побережья континентальной Украины.

Теперь рассмотрим процесс распространения поверхностного загрязнения в акватории Днепровско – Бугского лимана. Пусть в начальный момент загрязнение поступает на водную поверхность в точке ($x_c = 9.75$, $y_c = 2.95$), занимает круг радиуса $R_c = 0.2$ и поступает с постоянной скоростью. Предположим, что прогноз и направление силы ветра имеют динамику, характерную при прохождении атмосферного циклона. В начальный момент времени дул северный ветер умеренной силы. По истечении 10 часов ветер сменил направление на западный, а сила ветра уменьшилась до слабого. Пусть в дальнейшем сила ветра снова увеличивается до умеренных значений, а направление ветра меняется на южный. Предположим, что на финальном временном отрезке сила ветра остается в пределах умеренного, а направление ветра снова меняется на западный.

Поскольку в начальный момент времени имел место умеренный северный ветер, пятно загрязнения попало в циркуляционную зону (рис. 5, а) и стало смещаться в сторону левого берега р. Днепр. Пятно, под действием основного течения двигается вдоль правобережного выступа в дельте р. Днепр. Рис. 6, а иллюстрирует положение загрязнения под действием уменьшающегося по силе ветра и постепенной смене направления на западный.

На рис. 6, б показано положение загрязнения в момент времени $t = 20.0$, при котором передняя часть области загрязнения начала свое движение вдоль сепаратриссы. Отметим, что большая часть загрязнения по-прежнему находится около левой береговой линии р. Днепр, в северо-восточной части лимана. В дальнейшем сила ветра достигает значений, соответствующих умеренному ветру, а направление ветра меняется на северное. В этом случае, в устье Днепровско – Бугского лимана, около побережья континентальной Украины, начинает формироваться циркуляционная зона рис. 5, б, которая смещает основной водный поток лимана в сторону Крымского полуострова. Такое смещение отражается на распределении загрязнения на водной поверхности. На рис. 6, в показано положение выделенной жидкости в момент $t = 50.0$. Видно, что ветровая нагрузка способна смещать поверхностное загрязнение на большие расстояния в масштабах Днепровско – Бугского лимана. Отметим, что хвостовая часть загрязнения, расположенная около входа в лиман со стороны р. Днепр, тоже смещается в южном направлении под действием ветра. Загрязнение охватило большую часть поверхности Днепровско – Бугского лимана, начиная от левого берега устья р. Днепр до вод, прилегающих к Кинбурнской косе полуострова Крым.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными проведение адаптации математической модели распространения поверхностного загрязнения на случай открытых плоских течений в поле скорости крупномасштабных вихревых структур и в течениях, которые развиваются в шельфовой зоне мирового океана.

Выводы. В работе рассмотрена задача о двумерной адвекции пассивной примеси поверхностными течениями в устьях речных системах со сложной геометрией береговой линии и с учетом ветровой нагрузки. Численное решение задачи основано на методе дискретных особенностей, адаптированном к задачам адвекции жидкости. Составление краткосрочного прогноза начинается с оцифровки береговой линии. Условие стационарности и непротекания жидкости через береговые линии расчетной области требует выполнения условия равенства значений функции тока в точках коллокации, принадлежащих каждой береговой линии в рассматриваемом течении.

В рассматриваемой модели движение отдельной жидкой частицы (маркер) описывается в лагранжевом представлении системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задача Коши) с соответствующими начальными условиями. Система маркеров, расставленная в начальный момент на границе загрязнения, позволяет описать эволюцию границы с течением времени на расчетной области.

Исследования показали, что сложная геометрия Днепровско – Бугского лимана и умеренный ветер различного направления существенно меняют процесс эволюции поверхностного загрязнения в Днепровско – Бугском лимане. Часть загрязнения может существенно снизить собственную скорость, попав в область с циркуляционным движением. Это, в свою очередь, приводит к тому, что часть загрязнения достигает побережья лимана. Смена направления ветра может привести к заметному смещению выделенной жидкости в поперечном направлении лимана. Другими словами, действие ветра существенно увеличивает площадь загрязнения акватории Днепровско – Бугского лимана.

Список литературы

1. Mee L. Between the Devil and the Deep Blue Sea : The coastal zone in an Era of globalization // *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. – 2012. – Vol. 96. – P. 1 – 8.
2. Castanedo S., Juanes J. A., Medina R. Oil spill vulnerability assessment integrating physical, biological and socio-economical aspects : Application to the Cantabrian coast (Bay of Biscay, Spain) // *Journal of Environmental Management*. – 2009. – Vol. 91. – N. 1. – P. 149 – 159.
3. Pollani A., Triantafyllou G., Petihakis G. The Poseidon operational tools for the prediction of floating pollutant transport // *Marine Pollution Bulletin*. – 2001. – Vol. 43. – N. 7. – P. 270 – 278.
4. Berry A., Dabrowski T., Lyons K. The oil spill model OILTRANS and its application to the Celtic Sea // *Marine Pollution Bulletin*. – 2012. – Vol. 64. – N. 11. – P. 2489 – 2501
5. Lehr W. J., Simecek-Beatty D. The relation of langmuir circulation process to the standard oil spill spreading, dispersion, and transport algorithms // *Spill Scien. Tech. Bull.* – 2000. – Vol. 6. – N. 3/4. – P. 247 – 253.
6. Carracedo P., Torres-Lopez S., Barreiro M. Improvement of pollutant drift forecast system applied to the Prestige oil spills in Galicia Coast (NW of Spain) : Development of an operational system // *Marine Pollution Bulletin*. – 2001. – Vol. 53. – N. 5. – P. 350 – 360.
7. De Dominis M., Bruciaferri D., Gerin R. A multi-model assessment of the impact of currents, waves and wind in modelling surface drifters and opi spill // *Deep-Sea Research : Topical Studies in Oceanography*. – 2016. – Vol. 133. – P. 21 – 38.
8. Mancho A. M., Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets : Theoretical and computational issues // *Physics Reports*. – 2006. – Vol. 437. – N. 3. – P. 55 – 124.
9. Довгий С. О., Лифанов І. К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. – К. : Наукова думка, 2004. – 510 с.
10. Гуржій А. А., Черний Д. І. Адаптований метод дискретних особливостей к задаче адвекції пасивної примеси морськими теченнями // *Прикладна гидромеханіка*. – 2009. – Т. 11. – N. 2. – С. 30 – 39.
11. Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., Cherniy D. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents : The Lagrangian approach // *Journal of Environmental Accounting and Management*. – 2017. – Vol. 5. – N. 2. – P. 87 – 104.
12. Вилля Г. Теория вихрей. – М., Л. : Гостехиздат, 1936. – 266с.
13. Митьковская Р. Я. Эволюция побережья морского устья рек Днепр и Южный Буг // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря*. – 2009. – N. 20. – С. 63 – 77.

References (transliterated)

1. Mee L. Between the Devil and the Deep Blue Sea: The coastal zone in an Era of globalization. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*. 2012, vol. 96, pp. 1–8.
2. Castanedo S., Juanes J. A., Medina R. Oil spill vulnerability assessment integrating physical, biological and socio-economical aspects : Application to the Cantabrian coast (Bay of Biscay, Spain). *Journal of Environmental Management*. 2009, vol. 91, no. 1, pp. 149–159.
3. Pollani A., Triantafyllou G., Petihakis G. The Poseidon operational tools for the prediction of floating pollutant transport. *Marine Pollution Bulletin*. 2001, vol. 43, no. 7, pp. 270–278.
4. Berry A., Dabrowski T., Lyons K. The oil spill model OILTRANS and its application to the Celtic Sea. *Marine Pollution Bulletin*. 2012, vol. 64, no. 11, pp. 2489–2501.
5. Lehr W. J., Simecek-Beatty D. The relation of langmuir circulation process to the standard oil spill spreading, dispersion, and transport algorithms. *Spill Scien. Tech. Bull.* 2000, vol. 6, no. 3/4, pp. 247–253.
6. Carracedo P., Torres-Lopez S., Barreiro M. Improvement of pollutant drift forecast system applied to the Prestige oil spills in Galicia Coast (NW of Spain) : Development of an operational system. *Marine Pollution Bulletin*. 2001, vol. 53, no. 5, pp. 350–360.
7. De Dominis M., Bruciaferri D., Gerin R. A multi-model assessment of the impact of currents, waves and wind in modelling surface drifters and opi spill. *Deep-Sea Research : Topical Studies in Oceanography*. 2016, vol. 133, pp. 21–38.
8. Mancho A. M., Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets : Theoretical and computational issues. *Physics Reports*. 2006, vol. 437, no. 3, pp. 55–124.
9. Dovgyi S. O., Lifanov I. K. *Metod ssyngulyarnykh integral'nykh rivnan'.* *Teoriya ta zastosuvannya* [Methods of singular integral equations. Theory and application]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2004. 510 p.
10. Gourjii A. A., Cherniy D. I. Adaptirovannyi metod diskretnykh osobennostey k zadache advektivno pasivnoi primesy morskimy techeniyam [Method of discrete singularities adapted to the problem of passive admixture advection by sea currents]. *Pikladnaya gidromekhanika* [Applied hydromechanics]. 2009, vol. 11, no. 2, pp. 30–39.
11. Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., Cherniy D. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach. *Journal of Environmental Accounting and Management*. 2017, vol. 5, no. 2, pp. 87–104.
12. Villya G. *Teoria vihrey* [Vortex theory]. – Moscow, Leningrad, Gostehizdat Publ., 1936. 266 p.
13. Minkovskaya R. Ya. *Evolutsiya poberezhya morskogo ustya rek Dnepr i Yuzhny Bug* [Evolution of the rivers Dnieper and Southern Bug sea estuary coast]. *Ekologicheskaya bezopasnost probrezhnoi i shelfovoi zon moray* [Ecological security of coastal and shelf sea zones]. 2009, no. 20, pp. 63–77.

Поступила (received) 27.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гуржій Олександр Андрійович (Гуржій Олександр Андреевич, Gourjii Alexandre Andreevich) – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор, Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: (044) 406-83-30; e-mail: a.gourjii@gmail.com.

Кордас Ольга Ігорівна (Кордас Ольга Игоревна, Kordas Olga Igorivna) – кандидат технічних наук, доцент, Королівський технологічний інститут, м. Стокгольм; тел.: (+46040) 879-60-00; e-mail: olga@kth.se.

Никифорович Євген Іванович (Никифорович Евгений Иванович, Nikiforovich Eugene Ivanovich) – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 456-43-13; e-mail: eugnik@gmail.com.

Черній Дмитро Іванович (Черний Дмитрий Иванович, Cherniy Dmytro Ivanovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: dmytro.cherniy@gmail.com.

УДК 532.5.031:004.942

С. О. ДОВГИЙ, О. М. БУЛАНЧУК, Г. Г. БУЛАНЧУК**КОМП'ЮТЕРНА ПРОГРАМА ПО МОДЕЛЮВАННЮ АЕРОДИНАМІКИ МІСЬКИХ РАЙОНІВ
МЕТОДОМ ДИСКРЕТНИХ ВИХОРИВ**

Розглядається інтерактивна комп'ютерна програма для моделювання аеродинаміки міських районів, розроблена на базі методу дискретних вихорів. Вона дозволяє швидко провести розрахунки аераційної ситуації в житловому районі для плоского або просторового випадку. Користувач може задати різний напрямок вітру, джерела забруднення, різну конфігурацію забудови та розміщення паркових зон. Програма дозволяє досліджувати рух вихорів, поле швидкостей, зони комфортності та розповсюдження домішок. Може бути використана для пошуку оптимальної конфігурації забудови.

Ключові слова: інтерактивна комп'ютерна програма, метод дискретних вихорів, моделювання аерації житлових районів, моделювання паркових зон, розповсюдження домішок, зони комфортності.

С. А. ДОВГИЙ, О. Н. БУЛАНЧУК, Г. Г. БУЛАНЧУК**КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ АЭРОДИНАМИКИ ГОРОДСКИХ
РАЙОНОВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ**

Рассматривается интерактивная компьютерная программа для моделирования аэродинамики городских районов, разработанная на базе метода дискретных вихрей. Она позволяет быстро провести расчеты аэрационной ситуации в жилом районе для плоского или пространственного случая. Пользователь может задать различное направление ветра, источники загрязнения, различную конфигурацию застройки и размещения парковых зон. Программа позволяет исследовать движение вихрей, поле скоростей, зоны комфортности и распространение примесей. Может быть использована для поиска оптимальной конфигурации застройки.

Ключевые слова: интерактивная компьютерная программа, метод дискретных вихрей, моделирование аэрации жилых районов, моделирование парковых зон, распространение примесей, зоны комфортности.

S. O. DOVGIY, O. M. BULANCHUK, G. G. BULANCHUK**COMPUTER PROGRAM FOR SIMULATION OF URBAN AREAS AERODYNAMICS BY DISCRETE
VORTICES METHOD**

The article describes an interactive computer program for simulation of urban areas aerodynamics by using the discrete vortices method. When calculating flow past buildings dynamic arrays of structures were created and each structure stored information about control points and connected vortices, namely their coordinates and intensity. To simulate free vortices, a dynamic three-dimensional array of structures was created, where information about the vortex sheets was stored. This program enables us to quickly calculate aeration situations in a residential area for two or three-dimensional cases. The user can specify various wind directions, pollution sources, various configurations of the building, and locations of parklands. The program allows us to study the motion of vortices, the velocity field, the comfort zone, and spreading of pollutants. It can be used for searching for optimal configurations of urban development.

Key words: interactive computer program, discrete vortices method, simulation of urban areas aeration, simulation of park areas, distribution of impurities, comfort zone.

Вступ. На сьогодні відбувається суттєве збільшення міських територій при обмежених площах, придатних для будівництва. Це змушує вдосконалювати системи управління такими територіями. При цьому необхідно забезпечити, щоб умови проживання населення принаймні не погіршувались. Це підвищує вимоги до технологій оптимальної забудови територій. Такі технології можуть бути розроблені на базі сучасного комп'ютерного моделювання процесів, що відбуваються в міських районах. Роботи по дослідженню екосистеми міста базуються переважно на моделюванні за допомогою прикладних пакетів, таких як *ANSYS*, *Xflow*, *COMSOL* [1, 2]. Такі пакети дають досить детальну картину течії, але їх важко використовувати для швидкого пошуку оптимальної конфігурації забудови і, крім того, вони ще досить складні для користувача. Тому актуальним є створення простого спеціалізованого програмного продукту, що дозволяє швидко провести дослідження і визначити оптимальний вибір місця будівництва, розміщення і форми будинків, розташування паркових зон та спрогнозувати місця накопичення шкідливих викидів. Для моделювання вітрової ситуації в міському районі добре зарекомендував себе метод дискретних вихорів [3 – 7], який базується на моделі ідеальної рідини і дає можливість швидкого перебору різних варіантів забудови. У даній роботі пропонується інтерактивна комп'ютерна програма «Комфортне місто» по моделюванню аеродинаміки міських районів, розроблена на базі методу дискретних вихорів. Вона дає можливість оперативно оцінити вітрову ситуацію, визначити зони комфортності і дискомфорту, провести пошукові розрахунки для знаходження оптимального розміщення будинків та паркових зон. Програма реалізує моделювання як для плоского, так і для просторового випадку. Код створено на мові програмування *Fortran 90*.

Обчислювальні алгоритми програми «Комфортне місто». Розрахункові алгоритми, закладені в роботу програми, базуються на методі дискретних вихорів. Застосування даного методу до моделювання аеродинаміки міського району описане, наприклад, у роботах [3, 6]. При обтіканні системи будинків використовувалась така модель даних. Створювались динамічні масиви структур і кожна структура зберігала координати вершин будинку. Кожному будинку в цьому масиві відповідав певний індекс. Окрім цього, для кожного будинку задавались тривимірні масиви даних, що зберігали інформацію про контрольні точки та приєднані вихори: їх координати та інтенсивність. Індексом цих масивів були: номер будинку, номер ребра і номер точки на ребрі.

© С. О. Довгий, О. М. Буланчук, Г. Г. Буланчук, 2019

Для моделювання вільних вихорів створювався динамічний тривимірний масив структур, де зберігалась інформація про вихрову пелену. Цей масив зберігав координати вільних вихорів та їх інтенсивності. Масив таких структур зберігав інформацію для усієї системи вільних вихорів, яка генерувалась об'єктом. Будинки моделювалися багатокутниками (полігонами). Швидкість системи вихорів розраховувалась як сума швидкостей від кожної пелени. Точки відриву для кожного будинку визначалися автоматично з урахуванням напрямку обходу контуру та умов опуклості чи не опуклості багатокутника та відповідного кута на цьому багатокутнику. Якщо по напрямку обходу в даній вершині полігону векторний добуток мав певний знак, то там задавалась точка відриву, якщо протилежний, то точка відриву була відсутня. Процес дискретизації по часу зумовлює можливість потрапляння вихору всередину полігону (будинку). Для визначення потрапляння вихору всередину будинку проводилась триангуляція кожного будинку так званим *методом відсікання вух* [8] і створювалися структури даних із номерами вершин, що утворювали трикутники. Далі шляхом перебору трикутників визначалось потрапляння точки в один із трикутників (алгоритм потрапляння точки в опуклий полігон). Щоб не перебирати всі вихори і всі будинки, для кожного будинку вводилась область у вигляді більшого полігону і аналізувались лише вихори, що знаходились у даній області. При перетині відрізком полігону робився перерахунок траєкторії вихору за методом дзеркального відбиття. Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) використовувались дві підпрограми – *DECOMP* та *SOLVE*, які реалізують *метод Гауса* для розв'язування СЛАР із частковим вибором ведучого елемента [9]. Для тривимірного випадку дана схема була розширена аналогічним чином.

Графічний інтерфейс програми для двовимірного випадку. При запуску програми відображається головне меню програми, панель інструментів та система 2D-координат. Основні параметри розрахункової частини програми (крок по простору, крок по часу, максимальний час розрахунку, кут між напрямком вітру та віссю OX) користувач може задати інтерактивно за допомогою пункту меню: *Розрахунок, Зміна параметрів задачі* (рис. 1). Напрямок вітру (стрілка) може також повертатись користувачем за допомогою миші. Слід відмітити, що в даному моделюванні напрямок вітру приймається однаковим для всього поля і не змінюється з часом. Змоделювати новий будинок ми можемо за допомогою панелі інструментів і миші або за допомогою кнопки меню: *Задати геометрію*. Зміна положення і розмірів будинку, а також його видалення проводиться за допомогою миші. При наведенні миші на будинок, він стає *активним*, тобто готовим до перетворення. При цьому в кутах будинку з'являються кружечки, за допомогою яких будинок повертається, а на сторонах будинку – квадрати, за допомогою яких будинок розтягується або стискається. Передбачена можливість перемістити будинок у нове положення. Не рекомендується робити будинок занадто тонким, оскільки, в силу особливостей чисельного алгоритму програма видасть помилку. Можна також деформувати будинок, для цього треба відключити пункт меню: *Обертання будинку*. Після цього будинок не може обертатись, а деформацію можна реалізувати за допомогою миші, навівши її на кут будинку, розтягнути або стиснути будинок у певному напрямку.

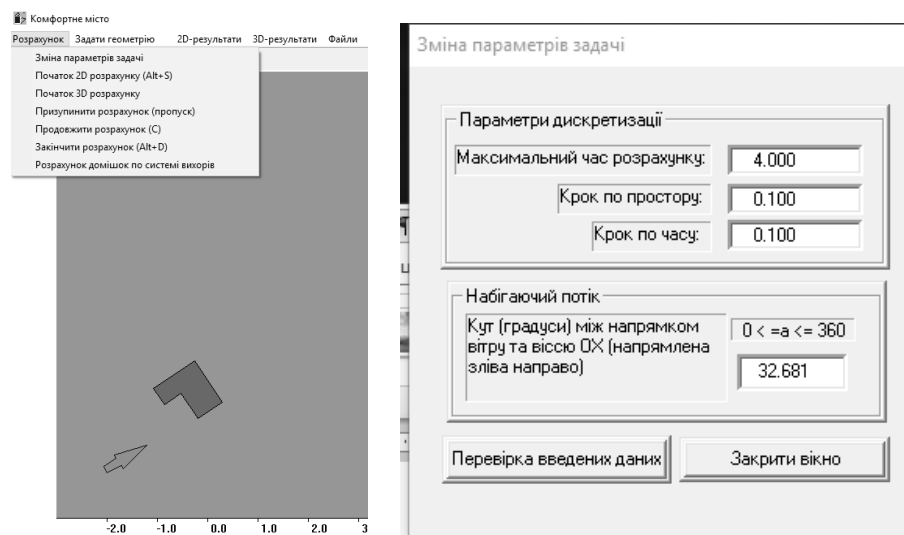


Рис. 1 – Задання параметрів розрахунку.

Джерело забруднення може бути задане за допомогою головного меню або панелі інструментів. Програма передбачає можливість збільшити його, навівши мишку на границю області круга і розтягнувши її. Можна задати декілька джерел аналогічним чином. Вони зафарбовуються в різний колір (рис. 2). Передбачена можливість задати властивості викиду за допомогою правої кнопки миші. За допомогою додаткового меню, що з'явиться (рис. 2), можна вибрати тип викиду (одноразовий чи неперервний), початок викиду, кінець викиду, висоту викиду (для просторового випадку), форму хмари (круг, квадрат, точка), кількість частинок уздовж кожного напрямку.

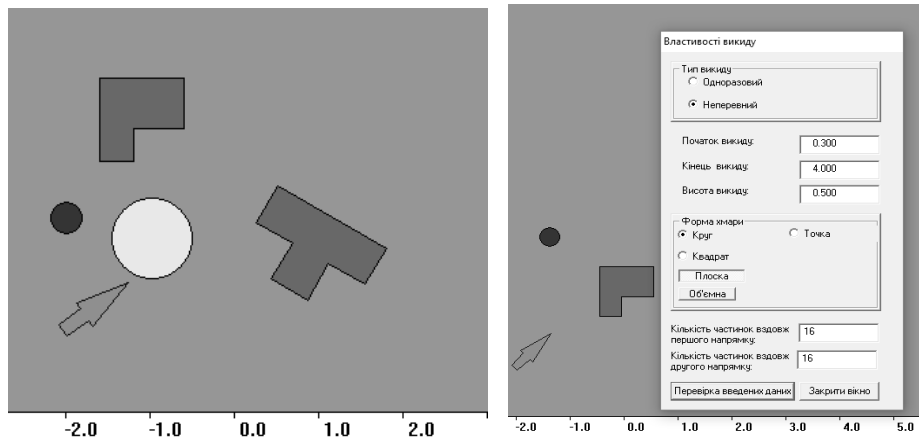


Рис. 2 – Графічний інтерфейс для моделювання джерел забруднення.

Дана програма дозволяє моделювати вплив на вітрову ситуацію паркових зон. Деревя моделюються наближено за допомогою шестикутників. З кожного кута відбувається відрив вихорів. Реалізується дане моделювання за допомогою пункту меню: *Посадити дерево* (рис. 3).

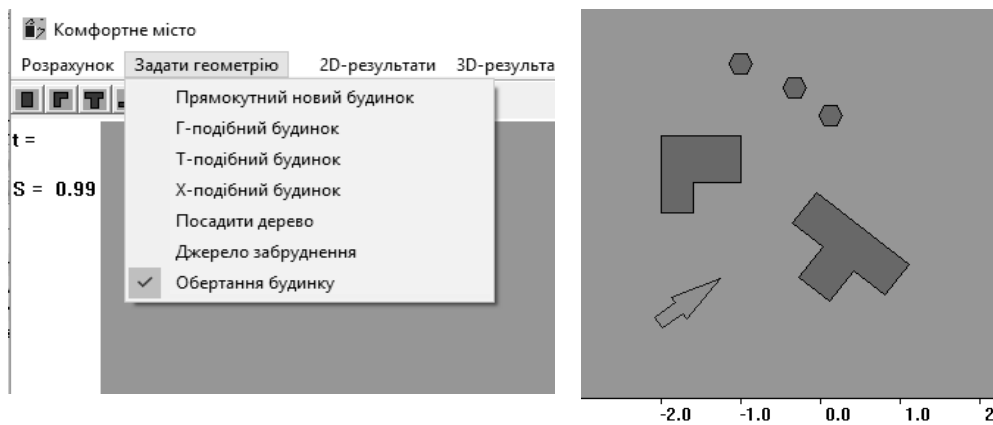


Рис. 3 – Графічний інтерфейс для моделювання паркових зон.

Відображення результатів моделювання для плоского випадку. Відображення результатів розрахунку для плоского випадку (*Поле швидкостей*, *Рух вихорів*, *Діаграма швидкості*, *Аераційні зони*, *Діаграма тиску*, *Розподіл тиску* (на будинку), *Графік коефіцієнта нормальної сили*) встановлюється за допомогою пункту меню *2D-результати* (рис. 4). Наприклад, на рис. 4 представлено поле швидкостей і картина вихорів, які будуть відображені при виборі двох пунктів меню: *Поле швидкостей* і *Рух вихорів*.

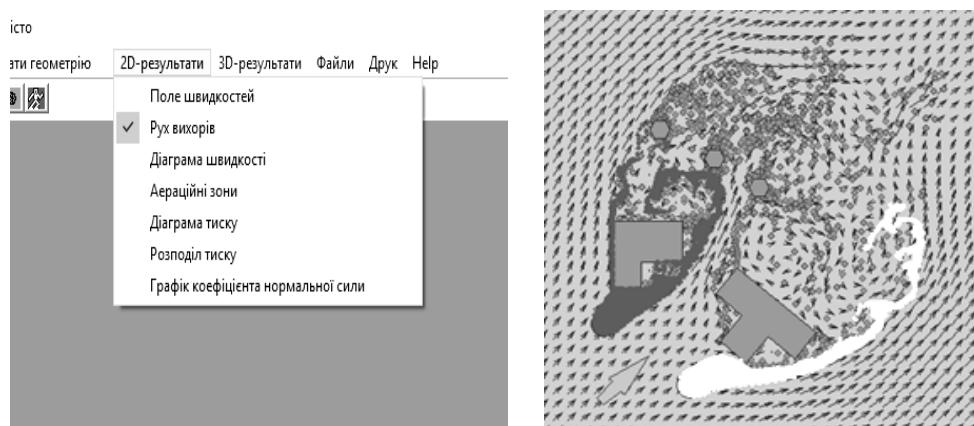


Рис. 4 – Відображення результатів для плоского випадку.

На рис. 5 зображено приклад розрахунку аераційних зон (зона застою, зона комфорту, зона прискорення і зона дискомфорту) та діаграма швидкості біля двох будинків.

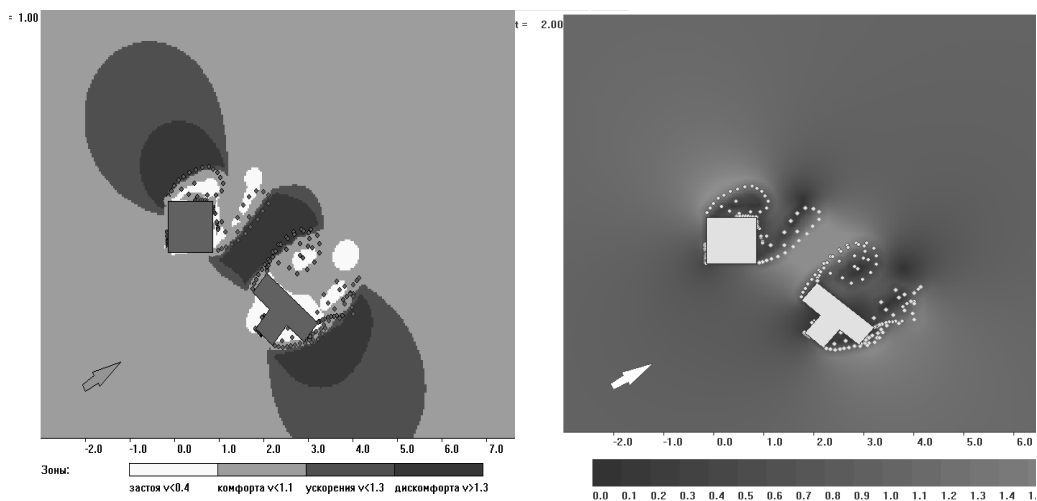


Рис. 5 – Аераційні зони та діаграма швидкості біля двох будинків.

Графічний інтерфейс для просторового випадку. Перед запуском 3D-розрахунку можна задати просторовий вигляд конфігурації будинків за допомогою пункту головного меню: *3D-результати*, *3D Вигляд*. При цьому за допомогою миші можна налаштувати зображення так, щоб зручно було аналізувати результати: збільшити або зменшити (за допомогою коліщата миші, повернути (права кнопка миші)).

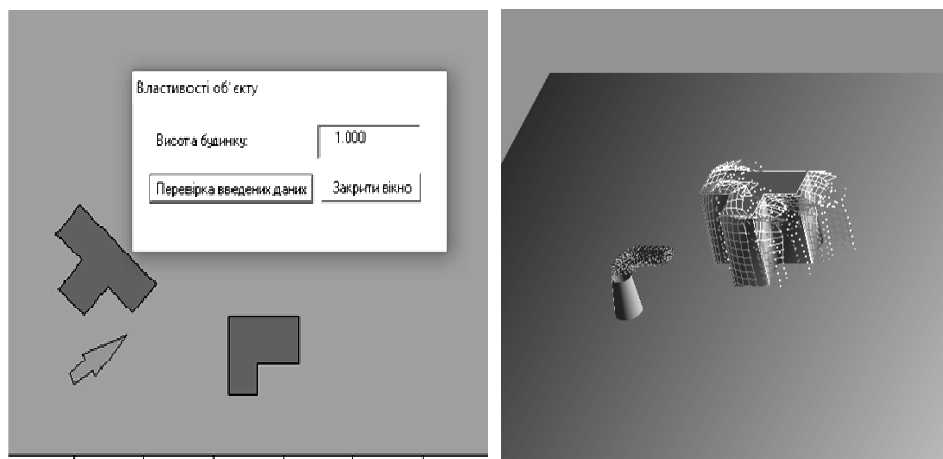


Рис. 6 – Просторовий вигляд конфігурації будинків і зміна висоти будинку.

Пункт меню *Початок 3D розрахунку* запускає програму розрахунку для просторового випадку. Якщо на екрані був 2D-вигляд, то з'явиться 3D-вигляд конфігурації будинків і будуть відображатися результати розрахунку: вихрові пелени і рух домішок (рис. 6). За замовчуванням висоти будинків дорівнюють одиниці. Змінити висоту конкретного будинку можна за допомогою правої кнопки миші в 2D-вигляді перед початком розрахунку. З'являється додаткове меню, за допомогою якого можна задати висоту будинку (рис. 6).

У пункті меню *Параметри зображення* можна вибрати результати, які будуть відображатись: *Дахи будинків*, *Пелени* і *Домішки*. Зауважимо, що опція з можливістю не відображати дахи будинків була передбачена тому, що в окремих випадках це допомагає краще побачити структуру пелени. Рух пелени автоматично записується у файл, який потім може бути відтворений по закінченню розрахунків. Запис у файл координат пелени і координат частинок відбувається за допомогою пунктів меню: *3D-результати*, *Вибрати файл пелени* і *Вибрати файл частинок*. Повернутись до 2D-вигляду можна, знявши мітку в пункті меню *3D-вигляд*. Після проведення розрахунків рух пелени або рух частинок може бути відтворений за допомогою пункту меню: *Рух пелени із файлу* або *Рух частинок із файлу*.

Поле швидкостей для просторового випадку можна проаналізувати в горизонтальних або вертикальних перерізах. Для цього в пункті меню *3D-результати* вибрати *Поле швидкостей*, *Горизонтальне (Вертикальне)*. Переріз, у якому відображається поле швидкостей, змінюється за допомогою коліщата миші. На рис. 7 показано

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 8 (1333) 2019.

приклад розрахунку горизонтального та вертикального поля швидкостей та картини розповсюдження димішок біля будинку. Параметри викиду задаються за допомогою правої кнопки миші аналогічно плоскому випадку, але з можливістю задати висоту викиду (висоту труби на рис. 7).

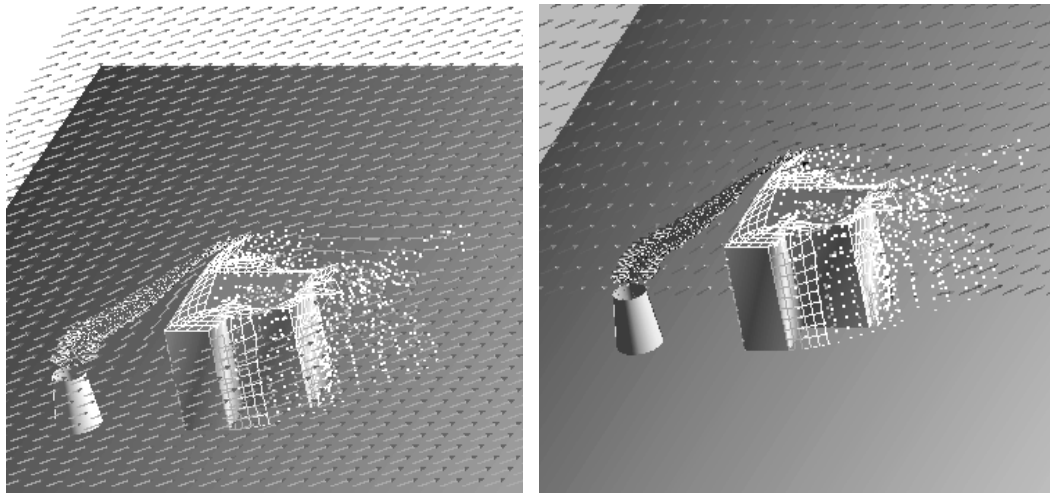


Рис. 7 – Картина розповсюдження димішок та поле швидкостей біля Г-подібного будинку: а – у горизонтальному перерізі; б – у вертикальному перерізі.

Висновки. Розроблена спеціалізована інтерактивна комп'ютерна програма, що дозволяє швидко проводити моделювання аеродинаміки міських районів, робити пошукові розрахунки для оптимального розміщення будинків і їх форми, місць найкращого розташування паркових зон. Дозволяє досліджувати зміну екологічної ситуації та умов комфортності при плануванні нових забудов та модернізації старих. Може бути використана в проєктній практиці для швидкого перебору різних варіантів забудови і розміщення паркових зон. Наприклад, за результатами такого моделювання можна запропонувати варіанти розміщення зон відпочинку, дитячих площадок тощо.

Список літератури

1. Ширококов В. В. Xflow – новий програмний комплекс для моделювання фізичних процесів, зв'язаних з гідрогазодинамікою і тепломасообменом // CADmaster. Машиностроение. – № 5 (60). – 2011. – С. 64 – 67.
2. Вальгер С. А., Федоров А. В., Федорова Н. Н. Моделирование несжимаемых турбулентных течений в окрестности плохообтекаемых тел с использованием ПК ANSYS Fluent // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18. – № 5. – С. 27 – 40.
3. Гутников В. А., Кирякин В. Ю., Лифанов И. К., Сетуха А. В. Математическое моделирование аэродинамики городской застройки. – М. : Пасья, 2002. – 244 с.
4. Лифанов И. К. Рекомендации по оценке аэрации территории в жилой застройке. – Москва : МАКС Пресс, 2006. – 160 с.
5. Довгий С. О., Буланчук Г. Г. Математичне моделювання аеродинаміки міських забудов // Вісник Сумського державного університету. – 2003. – № 12 (58). – С. 72 – 76.
6. Довгий С. О., Буланчук Г. Г., Буланчук О. М. Вихрові течії ідеальної рідини. Класичні моделі та метод дискретних вихорів.– Київ : Інститут обдарованої дитини, 2016. – 341 с.
7. Головенко А. Д., Довгий С. А., Клименкова И. А., Черный Д. И. Моделирование аэродинамики полей при прогнозировании нестационарных процессов в массивах разновысотной застройки // Вісник Харківського національного університету. – 2010. – № 890. – С. 37 – 46.
8. ElGindy H., Everett H., Toussaint G. T. Slicing an ear using prune-and-search. Pattern Recognition Letters. – 1993. – 14 (9). – P. 719 – 722. doi:10.1016/0167-8655(93)90141-y.
9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моурер К. Машинные методы математических вычислений. – М. : Мир, 1980. – 280с.

References (transliterated)

1. Shirobokov V. V. Xflow – novyy programnyy kompleks dlya modelirovaniya fizicheskikh protsessov, svyazannykh s gidrogazodinamikoy i teplomassoobmenom [Xflow – a new software package for modeling physical processes related to fluid dynamics and heat and mass transfer]. CAD-master. Mashinostroenie [CADmaster. Mechanical engineering]. 2011, № 5 (60), pp. 64–67.
2. Val'ger S. A., Fedorov A. V., Fedorova N. N. Modelirovanie neszhimaemykh turbulentykh techeniy v okrestnosti plokhooobtekaemykh tel s ispol'zovaniem ПК ANSYS Fluent [Simulation of Incompressible Turbulent Flows in the Neighborhood of Poorly Streaming Bodies Using ANSYS Fluent]. Vychislitel'nye tekhnologii [Computational Technologies]. 2013, vol. 18, no. 5, pp. 27–40.
3. Gutnikov V. A., Kiryakin V. Yu., Lifanov I. K., Setukha A. V. Matematicheskoe modelirovanie aerodinamiki gorodskoy zastroyki [Mathematical modeling of urban aerodynamics]. Moscow, Pas'va Publ., 2002. 244 p.
4. Lifanov I. K. Rekomendatsii po otsenke aeratsii territorii v zhiloy zastroyke [Recommendations for assessing aeration of residential territory]. Moscow, MAKS Press Publ., 2006. 160 p.
5. Dovgiiy S. O., Bulanchuk G. G. Matematychno modelyuvannya aeyrodynamiky mis'kykh zabudov [Mathematical Modeling of Aerodynamics of City Building]. Visnyk Sums'kogo derzhavnogo universytetu [Bulletin of the Sumy State University]. 2003, no. 2 (58), pp. 72–76.
6. Dovgiiy S. O., Bulanchuk G. G., Bulanchuk O. M. Vykrovni techiyi ideal'noyi ridyny. Klyasychni modeli ta metod dyskretnykh vykhoriv [Ideal fluid vortex flows. Classical models and discrete vortices method]. Kyiv, Instytut obdarovanoyi dytyny Publ., 2016. 341 p.
7. Golovenko D., Dovgy S. A., Klimenkova I. A., Cherniy D. I. Modelirovanie aeyrodynamiky poley pri prognozirovanii nestatsionarnykh protsessov

v massivakh raznovysotnoy zastroyki [Modeling aerodynamics of fields when forecasting non-stationary processes in arrays of multi-height buildings]. *Visnyk Kharkivsk'ogo natsional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kharkiv National University]. 2010, no. 890, pp. 37–46.

8. ElGindy H., Everett H., Toussaint G. T. Slicing an ear using prune-and-search. *Pattern Recognition Letters*. 1993, no. 14 (9), pp. 719–722. doi: 10.1016/0167-8655(93)90141-y.
9. Forsyth J., Malcolm J., Mowler C. *Mashinnye metody matematicheskikh vychisleniy* [Machine methods for mathematical calculations]. Moscow, Mir Publ., 1980. 280 p.

Надійшла (received) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Довгий Станіслав Олексійович (Довгий Станислав Алексеевич, Dovgiy Stanislav Oleksiyovych) – академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, президент, Національний центр «Мала академія наук України», м. Київ; тел.: (044) 489-55-99; e-mail: man@man.gov.ua.

Буланчук Олег Миколайович (Буланчук Олег Николаевич, Bulanchuk Oleg Mycolayovych) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний центр «Мала академія наук України», м. Київ; тел.: (096) 347-56-60; e-mail: obulan65@gmail.com.

Буланчук Галина Григорівна (Буланчук Галина Григорьевна, Bulanchuk Galina Grigorivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 201-83-08; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

УДК 519.63+533.6

С. В. ЖУЧЕНКО

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРМОГАЗОДИНАМИКИ КАССЕТЫ ТВЭЛОВ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

В статье рассматриваются некоторые результаты вычислительных экспериментов, проведенных автором с помощью авторской программы ПЭВМ. Анализируются успешные и аварийные результаты, возникшие при численном моделировании газодинамики как в активной зоне, так и в коллекторах кассеты из 4 и 8 тепловыделяющих элементов.

Ключевые слова: кассета тепловыделяющих элементов, распределительный и сборный коллекторы, гелиевый теплоноситель, турбулентные течения, возвратные потоки, аварийная ситуация.

С. В. ЖУЧЕНКО

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОГАЗОДИНАМІКИ КАСЕТИ ТВЕЛІВ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРУ НА ШВИДКИХ НЕЙТРОНАХ

У статті розглядаються деякі результати обчислювальних експериментів, проведених автором за допомогою авторської програми ПЕОМ. Аналізуються успішні і аварійні результати, що виникли при чисельному моделюванні газодинаміки як в активній зоні, так і в колекторах касети з 4 і 8 тепловиділяючих елементів.

Ключові слова: касета тепловиділяючих елементів, розподільний і збірний колектори, гелієвий теплоносій, турбулентні течії, поворотні потоки, аварійна ситуація.

S. V. ZHUCHENKO

RESULTS OF COMPUTER MODELING OF TERMOGAS DYNAMICS OF FAST-NEUTRON NUCLEAR REACTOR FUEL SLUG

The paper presents the results of computational experiments obtained by an authorial program for designing gas dynamics, which takes place in the active zone of fast-neutron nuclear reactor with helium coolant-moderator and its adjoining collectors. The Generation IV International Forum refers the reactors of such type to the 4-th generation nuclear energy systems. Using helium as coolant-moderator in such reactors is extremely perspective, but implementation of such a project faces many difficulties. The methods and algorithm for joint solving of gas dynamic problem in the fuel elements and their adjoining collectors were developed in the author's recent paper published in the Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, series: "Mathematics, Applied Mathematics, and Mechanics", 2018, vol. 88. In the present paper an example of successful numerical modeling of gas dynamic process in a fuel slug consisting of 4 active zones is proposed. In particular, the plots of changes in time of consumption rate of both cool and heated coolant-moderator at the entrance and exit of the fuel slug are given. The dependence on time of temperature changes at the fuel element exit is also plotted. The plots of isobar distribution in the fuel elements at specific times as well as the trajectories of free vortices in the collectors are shown. At the end of the paper the results of a computational experiment resulting in an emergency situation in a fuel slug consisting of 8 fuel elements and its causes are discussed.

Key words: fuel slug, distribution and collection header, helium coolant-moderator, turbulent flows, reversing flow, emergency situation.

Введение. В докладе проводятся результаты вычислительных экспериментов, проведенных с помощью авторской компьютерной программы, моделирующей процессы газодинамики, происходящие в активной зоне ядерного реактора на быстрых нейтронах с гелиевым теплоносителем и в примыкающих к ней коллекторах. В 2001 г. по предложению Министерства энергетики США была создана программа по развитию инновационных ядерных реакторов 4-го поколения, которая приобрела международный статус, объединив 10 стран в рамках Международного форума создания реакторов 4-го поколения GIF-IV (*Generation IV International Forum*). К реакторам 4 поколения были отнесены и реакторы на быстрых нейтронах с газовым теплоносителем (*гелий*), с замк-

© С. В. Жученко, 2019

нутым топливным циклом (GFR). В сравнении с CO_2 газом, который в настоящее время используется в качестве теплоносителя в активной зоне, гелий имеет существенные преимущества. Гелий инертен и даже при очень высокой температуре не вступает в химические соединения, не агрессивен по отношению к карбидам, в форме которых возможно использование ядерного горючего в реакторах на быстрых нейтронах. В сравнении с жидкометаллическим теплоносителем гелий упрощает эксплуатацию АЭС на быстрых нейтронах, удешевляет оборудование такой АЭС, ускоряет ее строительство. Теплофизические свойства гелия позволяют получать в активной зоне, особенно при давлении 30,0 МПа, существенно большие теплосъемы, чем при углекислоте. Поэтому гелий рассматривается в настоящее время как возможный теплоноситель для реакторов на быстрых нейтронах, хотя в сравнении с жидкометаллическим теплоносителем интенсивность теплосъема в реакторе на гелии относительно невелика. Поэтому использование гелия в качестве теплоносителя в реакторах подобного типа весьма перспективно, но сопряжено с большими трудностями, которые возникают при реализации такого проекта. В докладе предлагается схема такой кассеты из нескольких таких активных зон, объединённых распределительным и сборным коллекторами. Её конструкция изображена на рис. 1. В докладе представлен пример успешного моделирования процессов газодинамики в кассете из 4-х активных зон (в дальнейшем будем их называть *тепловыделяющими элементами* или *твэлами*). В заключении приведён пример, моделирующий аварийную ситуацию в кассете из 8 твэлов, анализируются причины её возникновения.

Анализ последних исследований. В Советском Союзе разработкой подобных реакторов занимались ещё с 1975 по 1985 годы. Разработкой тепловыделяющих сборок, в частности, занимались в Харьковском физико-техническом институте. Кафедра математической физики в ММФ ХНУ им. В. Н. Каразина под руководством проф. Щербины В. А. тоже принимала участие в этих исследованиях. Однако, после этого по многим причинам, в том числе и из-за сложности и дороговизны работ, исследования прекратились. И только последние годы интерес к этим исследованиям возобновляется. Автор статьи возвратился к этим исследованиям, начиная с 2014 года [2].

Постановка задачи. В качестве экспериментального образца рассматривалась численная модель малогабаритного ядерного реактора на быстрых нейтронах с кассетой из 4 твэлов. Поперечное сечение одного такого твэла вместе с сечениями коллекторов показано на рис. 2. Их размеры равны: $R_0 = 28$, $R_1 = 68$, $R_2 = 90$, $H_{r_0} = 10$, $H_{r_1} = 30$, $H_{c_0} = 40$, $H_{c_1} = 20$, $L = 50$ (мм). В вычислительных экспериментах ставилась задача смоделировать режим газодинамики такой кассеты от момента, когда теплоноситель ещё холоден всюду, до момента, когда в сборном коллекторе он нагрет полностью. В распределительный коллектор подавался холодный газ гелий при температуре 573 К и давлении 20.15 МПа, а на выходе из сборного коллектора газ был под давлением 20.0 МПа. Перепад давлений в течение всего эксперимента полагался постоянным. В начальный момент времени газ всюду предполагался холодным.

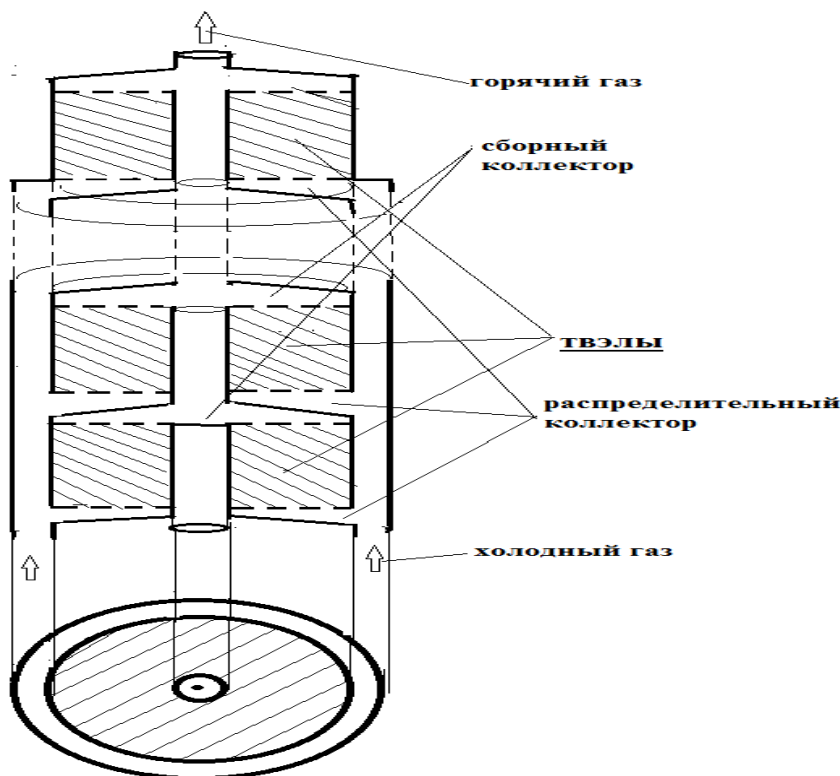


Рис. 1 – Кассета из тепловыделяющих элементов.

Математическая модель. Метод и алгоритм решения подобной задачи представлен автором в своей недавней статье [1].

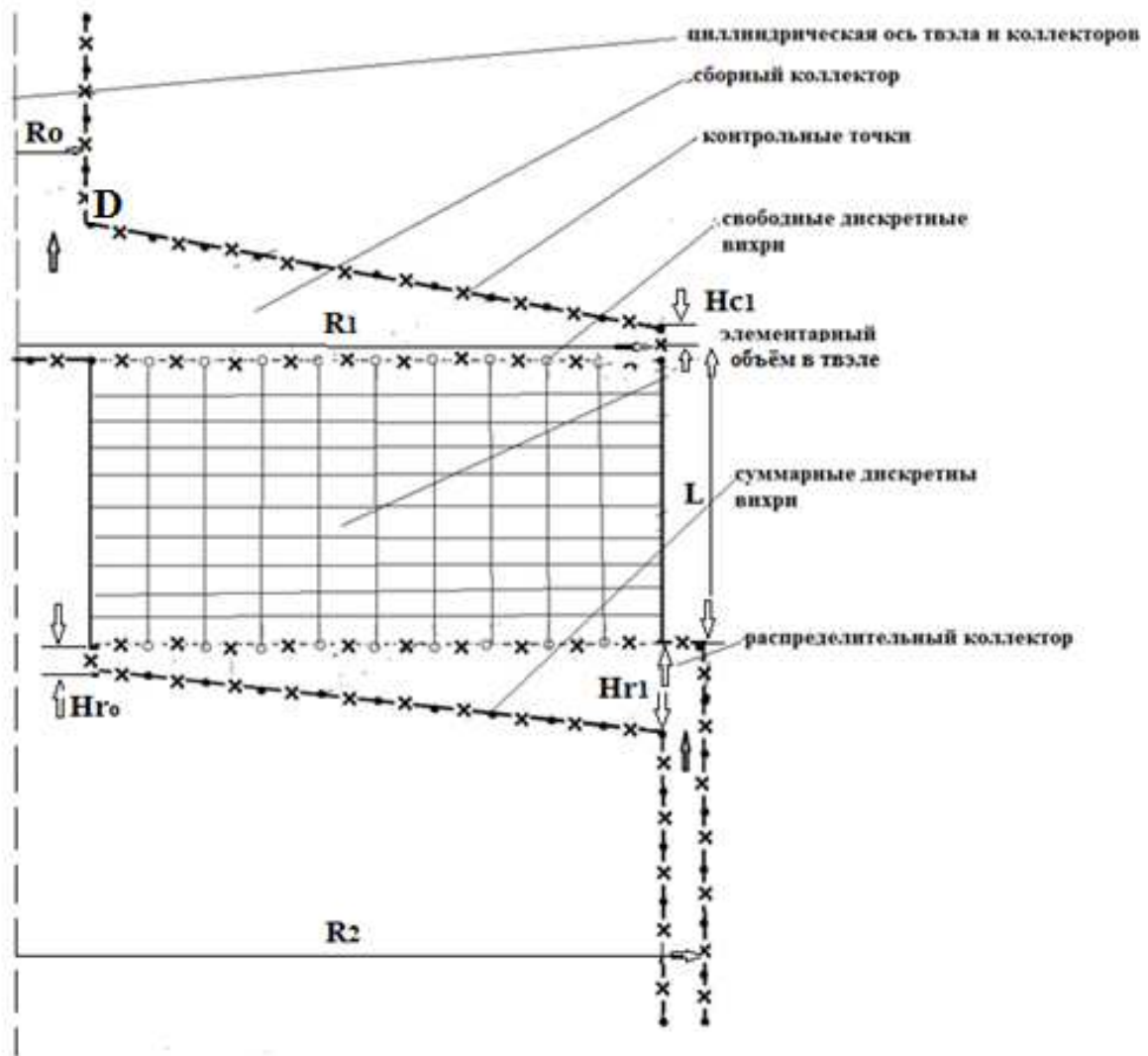


Рис. 2 – Пример разбиения аксиального сечения твэла на элементарные объёмы, а также положение дискретных вихрей и контрольных точек в коллекторах.

Результаты работы программы. Удалось провести удачные эксперименты для кассет из четырёх подобных твэлов. На рис. 3 представлены графики массового расхода на входе и выходе из каждого твэла в зависимости от времени. Последний график на этом рисунке показывает рост температуры на выходе из твэлов, то есть на их границе со сборным коллектором. Резкие всплески на кривых расхода указывают на приостановки или кратковременные обратные течения в твэлах и коллекторах. С ростом времени их количество возрастает и они вызваны ростом турбулентности потока в коллекторах. На этих рисунках особенно хорошо заметно, что с начала итерационного процесса и до ~ 0.04 с массовый расход теплоносителя на выходе из всех твэлов в кассетах больше, чем на входе в них. Объясняется это явление тем, что именно на этом интервале времени в твэлах происходит активный рост температуры теплоносителя, и газ в результате расширяется.

Графики температуры в сборном коллекторе на его границах с твэлами в начале процесса полностью совпадают до времени ~ 0.04 с, а далее они разъединяются, но идут тесным пучком, и их значения изменяются возле средних температур, которые равны ~ 1125 , ~ 1060 , ~ 1104 и ~ 1114 К, соответственно.

На рис. 4 изображены *изобары* и *траектории свободных вихрей* в кассете из 4 твэлов на 0.036, 0.1 и 0.18 с итерационного процесса, соответственно. Поскольку с увеличением числа твэлов в кассете растёт количество свободных вихрей в сборном коллекторе, и со временем большинство из них окажется на выходе из него, то именно в этой зоне турбулентность потока максимальная. В начале процесса, то есть на 0.036 с (на рис. 4 это первые два графика) свободных вихрей мало и от этого турбулентность потока развита слабо, поэтому *изобары*, в среднем, расположены менее густо (изобары в нашем случае – это границы тёмных и светлых полос на 1, 3 и 5 графиках рис. 4). С течением времени, то есть на 0.1 и 0.18 с, вихрей становится больше, турбулентность потока растёт, а отсюда в среднем изобары располагаются гуще, а, следовательно, возрастает градиент давления.

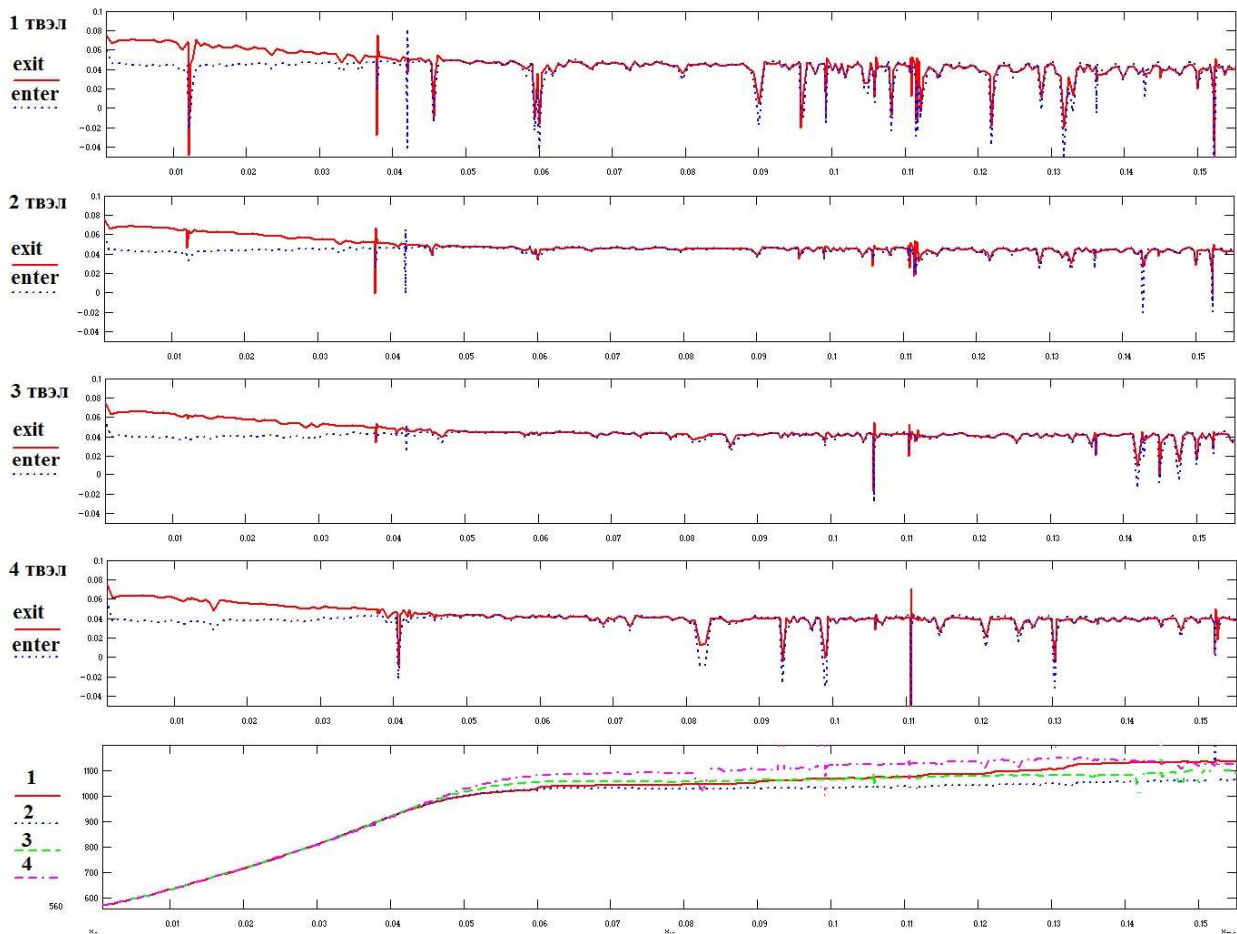


Рис. 3 – Зависимость от времени массового расхода в твэлах и температуры в сборном коллекторе для кассеты из четырёх твэлов при $R_0 = 28$ мм.

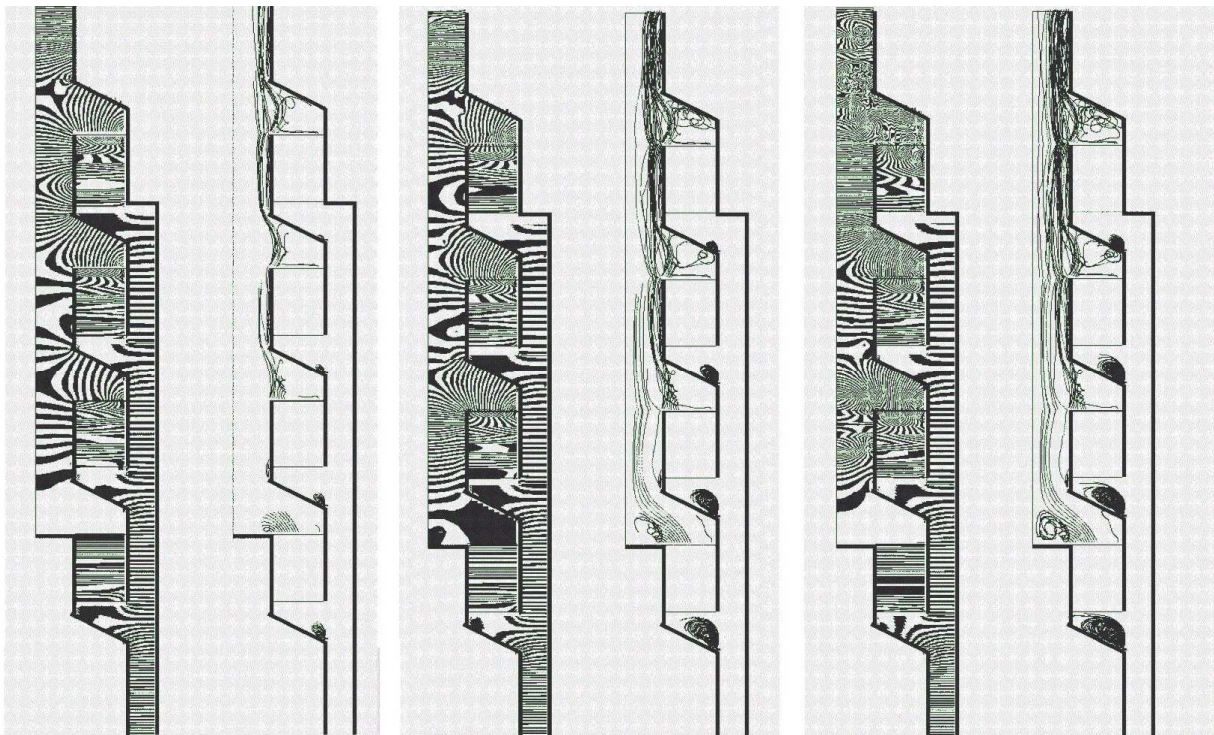


Рис. 4 – Изобары и траектории вихрей в кассете из 4 твэлов при $R_0 = 28$ мм.

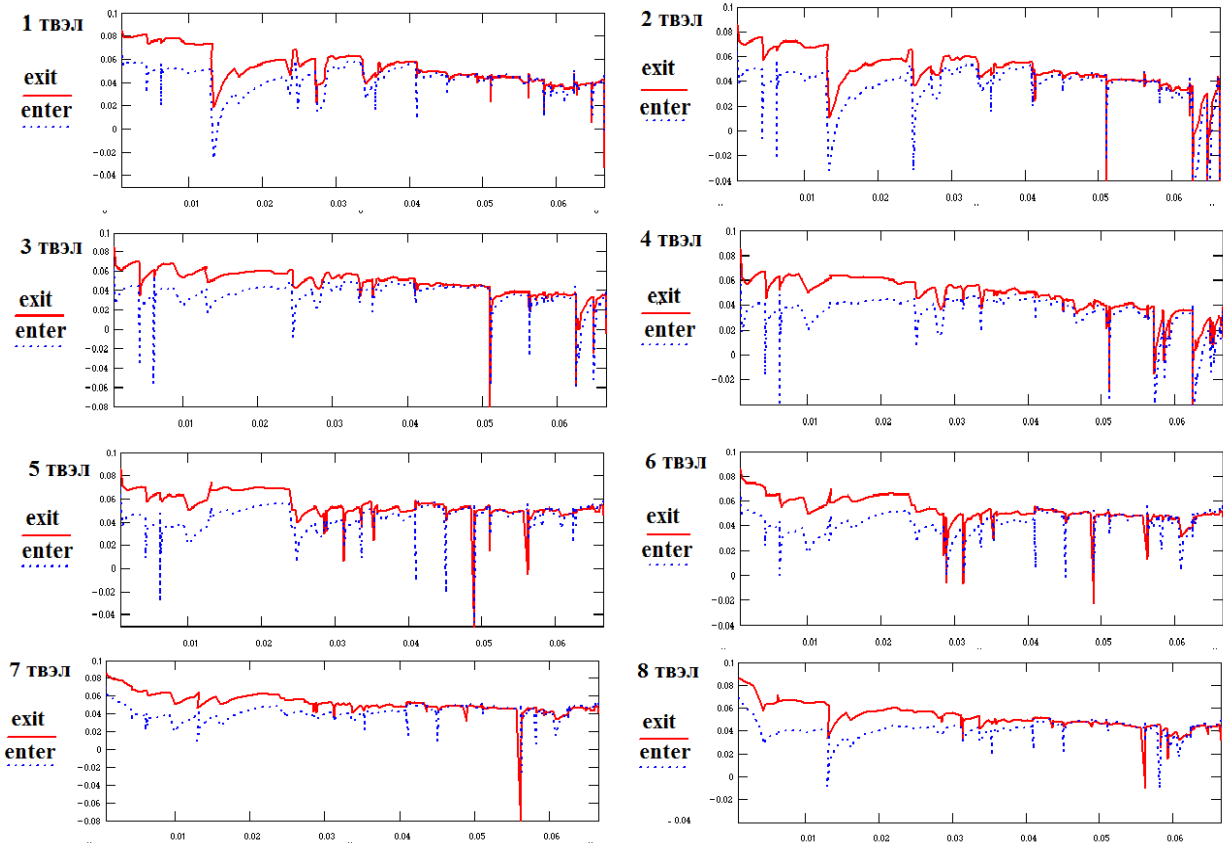


Рис. 5 – Зависимость от времени массового расхода в твэлах для кассеты из 8 твэлов.

В используемой вычислительной модели поток теплоносителя в распределительном коллекторе возмущён несильно, поскольку в окрестности каждого твэла свободные вихри сходят только с одного острого угла. От этого изобары, особенно в кольцевой части коллектора, размещены однородно и со временем в основном меняется только их густота. Возвратные течения на границе распределительного коллектора и твэла в основном возникают синхронно с подобными течениями на границе сборного коллектора с твэлом, и причиной их появления, очевидно, являются турбулентные явления в сборном коллекторе. И лишь в отдельные моменты времени, когда ось абсцисс пересекает только пунктирная линия, отвечающая за массовый расход теплоносителя на входе в твэл, в то время как сплошная линия графика, которая отвечает за расход на выходе из твэла, меняется мало, можно уверенно считать, что причиной возвратного течения на границе распределительного коллектора и твэла в этом случае являются турбулентные течения в распределительном коллекторе. Например, на рис. 3 можно отметить несколько таких моментов. Основной причиной возвратных течений в кассете, очевидно, является турбулентное течение в сборном коллекторе и, особенно на выходе из него, где свободных вихрей больше всего и особенно велика скорость нагретого газа. Так, в кассете из 4 твэлов на 0.18 с итерационного процесса в сборном коллекторе в зонах 1, 2, 3 и 4 твэлов в построении решения принимают участие 436, 587, 872 и 931 свободных вихрей, а в цилиндрических частях этих зон средняя скорость теплоносителя соответственно равнялась 1.86, 3.85, 5.83, 7.79 м/с.

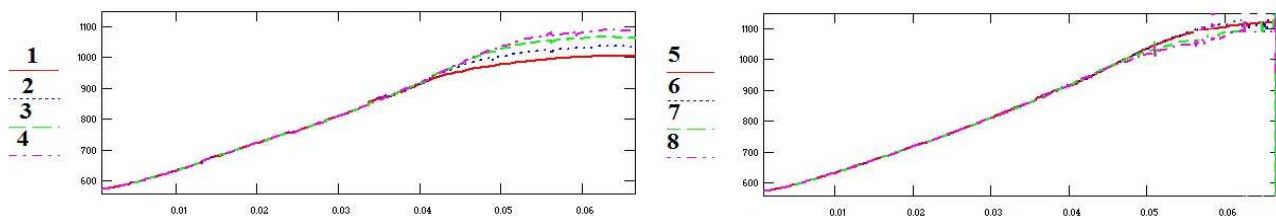


Рис. 6 – Зависимость от времени температуры на выходе из твэлов для кассеты из 8 твэлов.

Напомним, что давление газа здесь равно ~ 20 МПа. Траектории свободных вихрей, что изображены на последнем сечении рис. 4, плотно заполняют почти весь сборный коллектор и это позволяет надеяться, что к этому времени, то есть на 0.18 с итерационного процесса, может чуть раньше или чуть позже, в сборном коллекторе образуется динамическое равновесие, когда количество вихрей, покинувших область решения, будет приблизительно равно количеству вновь образованных. Поскольку в сборном коллекторе рост температуры прекратился

и стабилизировалось количество свободных вихрей, то можно считать, что в дальнейшем в гидродинамике кассеты заметных изменений не будет и вычисления можно прекратить.

Теперь несколько слов о распределении давления теплоносителя в твэлах для всех рассмотренных в статье кассет. На рис. 4 изображены изобары этого давления в кассете из 4 твэлов. На всех графиках, представленных там, видно, что наилучшим образом давление устанавливается в первом твэле кассеты. Именно там изобары размещены перпендикулярно основному направлению течения в твэле, то есть перпендикулярно цилиндрической оси кассеты. Отсюда понятно, что и осреднённое течение теплоносителя в этих твэлах с большой точностью совпадает с основным. В других твэлах распределение давления теплоносителя сильно отличается от идеального и, особенно, в зоне их границы со сборным коллектором. Вдоль этой границы давление в сборном коллекторе сильно меняется, а это искажает распределение давления в твэле. Отсюда неравномерность нагрева теплоносителя на выходе из этих твэлов по радиусу, то есть по поперечному сечению, имеет место. Так если в кассете из 4-х твэлов для 0.018 с процесса на выходе из первого твэла эта разница нагрева теплоносителя по радиусу не превышает 5 градусов, то на выходе из 4-го твэла в тупиковой зоне сборного коллектора температура теплоносителя равняется 1078 К, а затем с уменьшением радиуса она монотонно растёт до температуры 1224 К при радиусе равном R_0 .

В заключении приведу неудачный пример вычислительного эксперимента над кассетой из 8 твэлов таких же размеров, что в предыдущем эксперименте. На рис. 5 представлены графики изменения во времени массового расхода на входе и выходе каждого из 8-ми твэлов. Кратковременных возвратных течений здесь гораздо больше, чем в кассете из 4 твэлов и их интенсивность тоже растёт со временем с возрастанием количества свободных вихрей и, особенно, в сборном коллекторе. Рост температуры на границах всех твэлов со сборным коллектором представлен на рис. 6 и до 0.04 с происходит монотонно и одинаково, а после этого графики температур на первых 4-х твэлах разветвляются и вскоре рост температуры на выходе из них стабилизируется возле своих средних значений. Рост температуры на границах остальных твэлов со сборным коллектором продолжается дольше и, хотя и здесь рост температуры падает, но не прекращается полностью. А на 0.065 с итерационный процесс в твэлах становится расходящимся и происходит аварийная ситуация. Причиной этой аварийной ситуации, видимо, явилось неоднородное распределение расхода теплоносителя в последних двух твэлах. В результате распределение температур в этих твэлах установилось крайне неоднородное. Так на выходе из 7 твэла в тупиковой зоне сборного коллектора температура теплоносителя равнялась 1047 К, с уменьшением радиуса она монотонно росла до 1673 К. Причём основной рост температуры происходит на последних двух шагах по радиусу (всего использовалась сеть из 20 шагов по радиусу). Аналогично на 8 твэле температура возрастает от 1050 К до 1548 К. Проводились вычислительные эксперименты с кассетами из 8 твэлов других размеров и при других исходных данных. Аварийные ситуации возникали не только в твэлах, но и в коллекторах. Удачных вычислений пока не удалось провести.

Выводы. В докладе представлены вычислительные эксперименты, использующие авторскую программу ЭВМ, моделирующую процессы газодинамики в кассете ядерного реактора на быстрых нейтронах. Вычислительные эксперименты показали большую зависимость распределения давления, а с ним и коэффициентов сопротивления, от степени завихрённости газового потока в коллекторах. Особенно велика эта завихрённость, то есть турбулентность потока, на выходе из сборного коллектора, где образуется наибольшая скорость нагретого теплоносителя и куда устремляются все свободные вихри, возникшие во всём коллекторе. Именно из-за турбулентности потока, прежде всего в этой зоне, случайным образом меняется сопротивление потоку и в результате расход теплоносителя меняется не регулярно, а иногда возникают и обратные течения, которые в крайних случаях могут являться причинами аварийных ситуаций.

Обращаясь к достоверности получаемых результатов, следует сказать, что наибольшие опасения на этот счёт относятся к коллекторам. Геометрия течения теплоносителя в коллекторах довольно сложная и кроме того в сборном коллекторе происходит смешение потоков различной температуры. Всё это сильно влияет на устойчивость осреднённого турбулентного течения. Поэтому достоверность этих результатов может подтвердить только натурный эксперимент.

В настоящем исследовании удалось получить компьютерное решение двумерной нестационарной задачи теплогазодинамики для кассеты из 4-х тепловыделяющих элементов и примыкающих к ним распределительного и сборного коллекторов. Для кассеты из 8-и твэлов решение провести не удалось.

Список литературы

1. Жученко С. В. Чисельне моделювання термодинаміки ядерного реактора на швидких нейтронах // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2018. – Том 88. – С. 58 – 83.
2. Zhuchenko S. V. Numerical Simulation of Gas Dynamics and Heat Exchange Tasks in Fuel Assemblies of the Nuclear Reactors // Sixth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences; Albena (Bulgaria); 26 June – 1 July 2014. AIP Conference Proceedings. – 2014. – Vol. 1629(1). – pp. 135 – 145. DOI : 10.1063/1.4902267.

References (transliterated)

1. Zhuchenko S. V. Chysel'ne modelyuvannya termodynamiky yadernogo reaktora na shvydkykh neytronakh [Numerical modeling of thermodynamics of fast-neutron nuclear reactor]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya : Matematyka, prykladna ma-*

tematyka i mekhanika [Bulleting of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series : Mathematics, applied mathematics, and mechanics]. 2018, vol. 88, pp. 58–83.

2. Zhuchenko S. V. Numerical Simulation of Gas Dynamics and Heat Exchange Tasks in Fuel Assemblies of the Nuclear Reactors. *Sixth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences; Albena (Bulgaria); 26 June – 1 July 2014. AIP Conference Proceedings*. 2014, vol. 1629(1), pp. 135 – 145. DOI : 10.1063/1.4902267.

Поступила (received) 26.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Жученко Станіслав Володимирович (Жученко Станислав Владимирович, Zhuchenko Stanislav Volodymyrovych) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 364-47-08; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net.

УДК 532.5

В. А. КАТАН

ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СМЫСЛЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ ПО АДАМАРУ ДЛЯ УДАРНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОМЕХАНИКИ

Предлагается новый подход для определения положения зон отрыва жидкости от поверхности тела (одной или нескольких) с использованием трансцендентных уравнений с сингулярными интегралами в смысле конечной части по Адамару, полученных вследствие вариационного принципа Огазо. Общая постановка ударной плоской задачи для тела любого профиля конформным отображением приводится к смешанной задаче Келдыша-Седова и ее решение представляется в виде квадратур.

Ключевые слова: ударное взаимодействие жидкости с твердым телом, отрыв потока, сингулярные интегралы в смысле конечной части по Адамару.

В. О. КАТАН

ЗАСТОСУВАННЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛІВ В СЕНСІ СКІНЧЕНОЇ ЧАСТИНИ ЗА АДАМАРОМ ДЛЯ УДАРНИХ ЗАДАЧ ГІДРОМЕХАНИКИ

Запропоновано новий підхід до визначення положення зон відриву рідини від поверхні тіла (одної або декількох) за допомогою трансцендентних рівнянь із сингулярними інтегралами в сенсі скінченної частини за Адамаром, отриманих в результаті застосування варіаційного принципу Огазо. Загальну постановку ударної плоскої задачі для тіла будь-якого профілю конформним відображенням зведено до мішаної задачі Келдиша-Седова та її розв'язок подано у виді квадратур.

Ключові слова: ударна взаємодія рідини з твердим тілом, відрив потоку, сингулярні інтегралі в сенсі скінченної частини за Адамаром.

V. A. KATAN

USING SINGULAR INTEGRALS IN THE SENSE OF HADAMARD FINITE PART FOR WATER ENTRY PROBLEMS OF GYDROMECHANICS

A new approach for determining the location of separation areas of liquid from the surface of a body (one or more) using transcendental equations with singular integrals in the sense of the Hadamard finite part, derived by applying the Ogazo principle, is proposed. The formulation of two-dimensional water entry problem for a body with any profile is reduced to a Keldysh–Sedov boundary value problem using conformal mapping and its solution is obtained in the form of quadrature.

Key words: impact fluid interaction with solids, flow separation, singular integrals in the sense of the Hadamard finite part.

Введение. Мгновенный характер протекания удара является основной особенностью задач ударного взаимодействия тел с жидкостью со свободной границей, что классифицирует их как задачи математической физики и теории функций, допускающие аналитические решения. Кроме того, полное исследование решений указанных задач является предельным случаем при рассмотрении неустановившихся течений, и характеристики ударных течений могут быть предельными для аналогичных характеристик, зависящих от времени [1 – 4]. Следует отметить, что ударная задача гидромеханики сводится к нелинейной смешанной задаче теории потенциала с неизвестной заранее границей раздела областей с различными типами граничных условий. Для решения поставленной задачи существуют множество методов, из которых наиболее распространенными являются методы разделения переменных для конфигураций с границами в виде координатных поверхностей некоторой криволинейной системы координат, методы теории функций комплексного переменного для решения плоских задач, методы разложения в ряды различной природы (степенные, асимптотические и другие), метод граничных интегральных уравнений, метод вариационных неравенств и другие. Основным принципиальным вопросом, с точки зрения теоретической гидродинамики, является вопрос формирования отрывных зон и их расположения на поверхности тела в зависимости от геометрических и кинематических характеристик. Результаты теоретических исследований получают практическое воплощение в расчетах и оценке значений динамических характеристик – коэффициентов присоединенных масс и моментов, а также распределения импульсивного давления по поверхности тела.

© В. А. Катан, 2019

Постановка задачи. Пусть твердое цилиндрическое тело произвольного сечения плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся первоначально в покое, и пусть система импульсивных сил такова, что возникшее течение является плоскопараллельным.

Рассмотрим любую плоскость поперечного сечения тела и примем ее за координатную плоскость декартовой системы xOy , представленную на рис. 1. Ось Oy направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а ось Ox расположим в плоскости свободной поверхности. Для простоты будем рассматривать случай, когда жидкость занимает всю полуплоскость $y \geq 0$. В общем случае жидкость может быть ограничена плоскостью $y = h$ (слой жидкости толщиной h), по оси Ox жидкость может быть или неограниченной, или ограниченной некоторыми «бортами» (бассейн конечного размера). Контур тела, находящийся в жидкости, обозначим через $L = BCD$. Действие ударного импульса предполагается таким, что тело

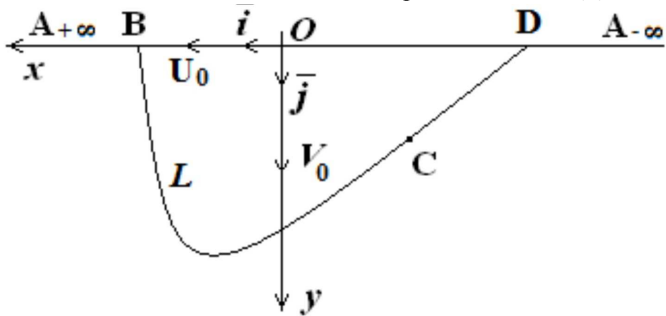


Рис. 1 – Схема к постановке плоской задачи.

$$\vec{V} = (U_0 - \omega_z y)\vec{i} + (V_0 + \omega_z x)\vec{j} \quad (1)$$

и тогда задача сводится к определению мгновенного поля скоростей жидкости, вызванного ударом контура L со скоростью (1).

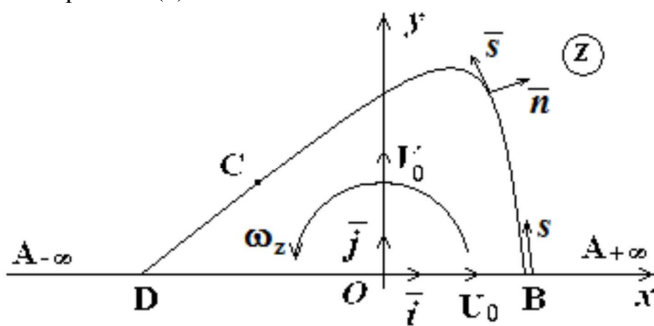


Рис. 2 – Схема к постановке краевой задачи для комплексного потенциала.

заранее неизвестным положением крайней точки зоны отрыва C .

Следовательно, условие безотрывности распространяется только на дугу границы тела CB и имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{CB} = n_x U_0 + n_y V_0 + \omega_z (x n_y - y n_x), \quad (3)$$

где $\vec{n}(n_x, n_y)$ – единичный вектор нормали к контуру CB , направленной внутрь области течения.

В зоне отрыва – на участке DC – выполняется условие

$$\phi|_{DC} = 0. \quad (4)$$

На свободной границе – участках $A_\infty D$ и BA_∞ – выполняется также условие

$$\phi = 0. \quad (5)$$

Согласно известным результатам [4 – 5], граничное условие (3) на участке CB представим через функцию тока

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2). \quad (6)$$

Введем в области течения комплексной плоскости $z = x + iy$ характеристическую функцию

$$\chi = -iw = \psi - i\phi, \quad (7)$$

для которой получим смешанную задачу Келдыша-Седова в следующем виде:

– на участке границы CB задана действительная часть характеристической функции

после удара получает положительную компоненту скорости вдоль оси Oy V_0 , некоторую компоненту скорости вдоль оси Ox U_0 и угловую скорость вращения ω_z вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy . С целью упрощения постановки предположим, что $\omega_z > 0$, поскольку знак угловой скорости существенен для правильного моделирования положения зоны отрыва.

Таким образом, в результате удара элементы поверхности тела приобретают скорость:

Возникшее в результате удара течение жидкости является потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (2)$$

где $z = x + iy$ – комплексное переменное; $\phi(x, y)$ – потенциал течения; $\psi(x, y)$ – функция тока.

Сформулируем граничную задачу для комплексного потенциала $w(z)$ в плоскости комплексного переменного z (рис. 2) в предположении, что на контуре тела L в результате удара возникает один сплошной участок отрыва DC с

$$\operatorname{Re} \chi|_{CB} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2), \quad (8)$$

– на участках границы $A_{-\infty}D$, DC , $BA_{+\infty}$ известна мнимая часть характеристической функции

$$\operatorname{Im} \chi|_{A_{-\infty}D} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{DC} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{EA_{+\infty}} = 0. \quad (9)$$

Математическая модель. С помощью аналитической функции $z = F(t)$ область течения конформно отображаем в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $t = \xi + i\eta$ так, чтобы граница области $A_{-\infty}DCBA_{+\infty}$ перешла в действительную ось, причем точка A перешла в бесконечность, точка B – в точку $\xi_B = 1$, точка D – в точку $\xi_D = -1$, и предположим соответствие точки $\xi_C = -q$ для неизвестной точки C (рис. 3).

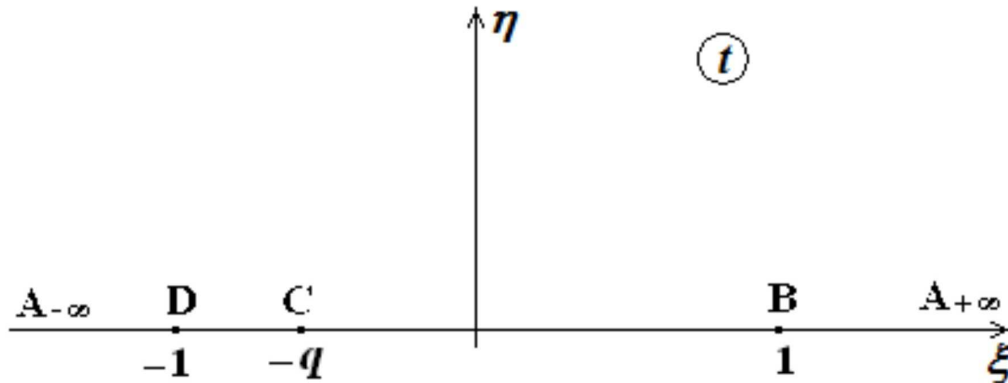


Рис. 3 – Комплексная плоскость $t = \xi + i\eta$.

В таком случае для искомой функции

$$\chi(F(t)) \equiv \Theta(t) = \psi - i\varphi$$

в верхней полуплоскости комплексной плоскости t получим задачу Келдыша – Седова со следующими граничными условиями:

– на участке границы CB $(-q, 1)$ задана действительная часть искомой функции:

$$\operatorname{Re} \Theta|_{CB} \equiv \Pi(\xi) = \left[U_0 v(\xi) - V_0 u(\xi) - \frac{\omega_z}{2} (u^2(\xi) + v^2(\xi)) \right], \quad (10)$$

где

$$u(\xi) = \operatorname{Re} F(\xi), \quad v(\xi) = \operatorname{Im} F(\xi),$$

– на участках границы $A_{-\infty}D$ $(-\infty, -1)$, DC $(-1, -q)$ и $BA_{+\infty}$ $(1, +\infty)$ известна мнимая часть искомой функции, равная нулю:

$$\operatorname{Im} \Theta|_{A_{-\infty}D} = 0, \operatorname{Im} \Theta|_{DC} = 0, \operatorname{Im} \Theta|_{BA_{+\infty}} = 0. \quad (11)$$

Для решения полученной смешанной задачи, следуя Мухелишвили [6], составим функцию граничных условий

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D'(-q, 1); \\ ig(\xi), & \xi \in D''(-\infty, -1) \cup (-1, -q) \cup (1, +\infty), \end{cases}$$

где $f(\xi) = \Pi(\xi)$, $\xi \in (-q, 1)$ (D'); $g(\xi) = 0$, $\begin{cases} \xi \in (-\infty, -q), \\ \xi \in (1, +\infty). \end{cases}$ (D'').

Отметим, что данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью CB и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, следовательно, параметрами задачи являются $a_1 = -q$ и $b_1 = 1$. И далее вводим функции [6]

$$R(t) = (t - a_1)(t - b_1) = (t + q)(t - 1) \text{ и } Z(t) = \sqrt{R(t)}, \quad (12)$$

причем ветвь $\sqrt{R(t)}$ на оси ξ принимает положительное значение при $\xi > 1$.

Таким образом, с учетом выражений для функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(t) = -i \int_{-q}^1 \frac{\Pi(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)} \xi-t} d\xi. \quad (13)$$

Подынтегральную функцию $\Pi(\xi)$ представим в виде соотношения с явно выделенными в качестве множителей компонентами поступательной и угловой скоростей:

$$\Pi(\xi) = U_0 \Pi_1(\xi) + V_0 \Pi_2(\xi) + \omega_z \Pi_3(\xi), \quad (14)$$

где $\Pi_1(\xi) = v(\xi)$, $\Pi_2(\xi) = -u(\xi)$, $\Pi_3(\xi) = -\frac{1}{2}(u^2(\xi) + v^2(\xi))$.

В результате получаем следующее представление искомой функции для решения поставленной задачи

$$\Theta(t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(t+q)(t-1)} (U_0 J_1(t) + V_0 J_2(t) + \omega_z J_3(t)), \quad (15)$$

где

$$J_k(t) = \int_{-q}^1 \frac{\Pi_k(\xi)}{\sqrt{(\xi+q)(1-\xi)} \xi-t} d\xi, \quad k = \overline{1,3}. \quad (16)$$

Обобщим полученную математическую модель поставленной задачи: если известно конформное отображение $z = F(t)$ области течения на верхнюю полуплоскость переменного t , то общее решение задачи об ударе (с одной зоной отрыва) представляется в явном виде в форме квадратур (15), (16) и содержит один неизвестный числовой параметр q , который определяет положение крайней точки C области отрыва DC .

Определение местоположения точки отрыва жидкости от гладкого контура. Предлагаемый автором способ определения параметра q основан на приложении принципа Огазо к общему решению, полученному в виде квадратур (15), (16).

Если известен потенциал $\varphi(t)$ на гладком участке безотрывного обтекания контура как функция $t = \xi + i0$, $\xi \in (-q, 1)$, то согласно принципу Огазо, в точке $\xi = -q$ должно выполняться условие

$$\lim_{\xi \rightarrow -q+0} \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial q} = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) как раз и является уравнением для определения параметра q .

Для определения функции $\varphi(\xi)$ в выражении (15) уже выполнен переход из верхней полуплоскости t в точку ξ_0 , принадлежащую отрезку CB ($-q < \xi_0 < 1$) с учетом формулы Племеля – Сохоцкого [6], для предельных значений интегралов $J_k^+(\xi_0)$. Далее приходим к следующим формулам для функции тока и потенциала течения на участке безотрывного обтекания поверхности тела (в плоскости t):

$$\psi(\xi_0) = U_0 \Pi_1(\xi_0) + V_0 \Pi_2(\xi_0) + \omega_z \Pi_3(\xi_0) \quad (18)$$

и

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)} (U_0 J_1(\xi_0) + V_0 J_2(\xi_0) + \omega_z J_3(\xi_0)). \quad (19)$$

Тогда для вычисления производной $\frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q}$ запишем следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial q}(\xi_0) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-\xi_0}{\xi_0+q}} (U_0 J_1(\xi_0) + V_0 J_2(\xi_0) + \omega_z J_3(\xi_0)) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0+q)(1-\xi_0)} \left(U_0 \frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q} + V_0 \frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q} + \omega_z \frac{\partial J_3(\xi_0)}{\partial q} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

В предельном переходе $\xi_0 \rightarrow -q+0$ из интегралов в смысле Коши $J_k(\xi_0)$, $k = \overline{1,3}$ получаем особые интегралы вида

$$J_k(-q) = \int_{-q}^1 \frac{\Pi_k(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi+q)^3(1-\xi)}}, \quad k = \overline{1,3}, \quad (21)$$

которые при $\xi = -q$ имеют неинтегрируемую особенность порядка $(\xi+q)^{-3/2}$, из-за чего их следует понимать в

смысле конечной части по Адамару [7 – 8].

Аналогичным образом для производных от интегралов $J_k(\xi_0)$, $k = \overline{1,3}$

$$\frac{\partial J_k(\xi_0)}{\partial q}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{22}$$

в указанном предельном переходе $\xi_0 \rightarrow -q+0$ получим особые интегралы с более высокой особенностью в точке $\xi = -q$ (порядка $(\xi + q)^{-5/2}$), значения которых также следует рассматривать в смысле конечной части по Адамару.

Отметим, что в смысле конечной части по Адамару интегралы (21) и (22) при $\xi_0 \rightarrow -q+0$ имеют вполне определенные конечные значения, благодаря чему условие Огазо приводит к следующему уравнению для вычисления параметра q , определяющего местоположение граничной точки области отрыва:

$$U_0 J_1(-q) + V_0 J_2(-q) + \omega_z J_3(-q) = 0, \tag{23}$$

где все интегралы $J_k(-q)$, $k = \overline{1,3}$, понимаются в смысле конечной части.

Для вычисления интегралов в смысле конечной части по Адамару следуем алгоритму [7 – 8]:

$$\int_a^x \frac{A(y) dy}{(x-y)^{3/2}} = \int_a^x \frac{A(y) - A(x)}{(x-y)^{3/2}} dy - \frac{2}{\sqrt{x-a}} A(x). \tag{24}$$

Согласно соотношению (24) получим выражение для конечных частей интегралов $J_k(-q)$

$$J_k(-q) = \tilde{J}_k(-q) - 2 \frac{\Pi_k(-q)}{1+q}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{J}_k(-q) = \int_{-1}^q \frac{\left(\frac{\Pi_k(-y)}{\sqrt{1+y}} - \frac{\Pi_k(-q)}{\sqrt{1+q}} \right) dy}{\sqrt{(q-y)^3}}.$$

С помощью замены $y = -\cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi$ и $t = \cos \varphi$ в выражениях (25) окончательно запишем

$$\tilde{J}_k(-q) = \frac{2}{1+q} \int_0^1 \frac{\left[\Pi_k(t^2 - q(1-t^2)) - \Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2} \right] dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} \equiv \frac{2}{1+q} \tilde{\tilde{J}}_k(-q), \quad k = \overline{1,3}.$$

Отметим, что в каждом из последних интегралов имеется интегрируемая особая точка при $t = 1$ и устранимая особая точка при $t = 0$. Поэтому для вычисления $\tilde{\tilde{J}}_k(-q)$ выделим особые точки малыми окрестностями размера ε :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{J}}_k(-q) &= \int_0^1 \frac{\left(\Pi_k(t^2 - q(1-t^2)) - \Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2} \right) dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{\left(\Pi_k(t^2 - q(1-t^2)) - \Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2} \right) dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\left(\Pi_k(t^2 - q(1-t^2)) - \Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2} \right) dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} + \\ &+ \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{\left(\Pi_k(t^2 - q(1-t^2)) - \Pi_k(-q)\sqrt{1-t^2} \right) dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}}, \quad k = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{26}$$

и в этом случае интеграл $\tilde{\tilde{J}}_k(-q)$ будем понимать как предел суммы последних трех интегралов при условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$. Причем первый и третий интегралы вычисляются непосредственно путем разложения подынтегральных функций в окрестности особых точек $t = 0$ и $t = 1$; вторые интегралы вычисляются численно для значений $k = \overline{1,3}$.

Таким образом, следуя указанной процедуре, все интегралы $J_k(-q)$, $k = \overline{1,3}$ рассчитываются для любого наперед заданного значения q (из априорно известного множества значений q), и тогда условие (23) рассматривается как трансцендентное уравнение, определяющее значение параметра q через значения кинематических

параметров U_0, V_0, ω_z .

Вследствие вышеизложенного, уравнение (23) представим в виде

$$J_1(-q) + S J_2(-q) + Q \frac{1}{L} J_3(-q) = 0, \quad (27)$$

где $S = \frac{V_0}{U_0}$ и $Q = \frac{\omega_z L}{U_0}$ – два безразмерных кинематических параметра; L – некоторый характерный размер тела. Далее преобразуем соотношение (27) в явную зависимость параметра Q от параметров S и q :

$$Q = -\frac{L}{J_3(-q)} (J_1(-q) + S J_2(-q)). \quad (28)$$

Таким образом, при заданных значениях величины q (во всем физически возможном диапазоне) по формуле (28) получаем зависимость $Q(q)$ для некоторого набора значений параметра S ; далее по полученным данным строим *аппроксимационные зависимости*, удобные для реализации в инженерной практике в виде наглядных графических зависимостей.

По описанному выше алгоритму выполнены расчеты положения и размера зоны отрыва для различной ориентации пластинки относительно свободной поверхности. Для отдельных случаев ориентации пластинки проведены сравнения результатов с результатами аналитического решения, которые показали их хорошее совпадение [5].

Выводы. Решение ударной задачи гидромеханики получено согласно авторскому алгоритму: по известной аналитической функции $z = F(t)$, реализующей конформное отображение области течения на верхнюю полу-плоскость вспомогательной плоскости комплексной переменной t , получено решение задачи об ударном взаимодействии цилиндрического тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, для произвольного набора кинематических параметров в условиях образования одной зоны отрыва с заранее неизвестным параметром q , определяющим положение зоны отрыва; определен неизвестный параметр q . При этом интегралы, которые входят в полученные формулы, следует понимать в смысле конечной части по Адамару.

Список литературы

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
2. Короткин А. И. Присоединенные массы судна. – Л.: Судостроение, 1986. – 312 с.
3. Коробкин А. А. Соударение жидких и твердых масс. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1997. – 200 с.
4. Норкин М. В. Смешанные задачи гидродинамического удара. – Ростов-на-Дону: Изд. ЦВВР, 2007. – 136 с.
5. Катан В. А. Об одном способе определения положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости // Вісник ДНУ. Серія: «Механіка». – 2014. – № 5/22. – Вип. 18. – Том 1. – С. 63–71.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
8. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков, ХНУ, 2002. – 92 с.

References (transliterated)

1. Grigolyuk E. I., Gorshkov A. G. *Vzaimodeystvie uprugikh konstruksiy s zhidkostyu (udar i pogruzhenie)* [Interaction of elastic structures with fluid (impact and immersion)]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1976. 200 p.
2. Korotkin A. I. *Prisoedinennye massy sudna* [Added masses of a ship]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1986. 312 p.
3. Korobkin A. A. *Soudarenie zhidkikh i tverdykh mass* [Impact of liquid and solid masses]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 1997. 200 p.
4. Norkin M. V. *Smeshamye zadachi gidrodinamicheskogo udara* [Mixed problem of hydrodynamic impact]. Rostov-na-Donu, Izd. TsVVR Publ., 2007. 136 p.
5. Katan V. A. Ob odnom sposobe opredeleniya polozheniya zony otryva techeniya pri udarnom vzaimodeystvii tverdogo tela i zhidkosti [On a method for determining location of flow separation area under impact interaction of solid and fluid]. *Visnyk DNU. Seriya: "Mekhanika"* [Bulletin of Dnipro National University. Series: "Mechanics"]. 2014, no. 5/22, issue 18, vol. 1, pp. 63–71.
6. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p.
7. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chasnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Cauchy problem for hyperbolic type linear partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
8. Gandel' J. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Uchebnoe posobie* [Introduction to the methods of computation of singular and hyper-singular integrals. Textbook]. Kharkov, KhNU Publ., 2002. 92 p.

Поступила (received) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Катан Володимир Олександрович (Катан Владимир Александрович, Katan Vladimir Alexandrovich) – кандидат фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро; тел.: (067) 710-66-37; e-mail: vlad_aleks@i.ua.

В. Ю. КИЛИННИК, О. В. ТИШКОВЕЦЬ, Д. В. КРЮТЧЕНКО, Ю. В. НАУМЕНКО

КОЛИВАННЯ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНО-КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПІД ДІЄЮ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЗБУДЖЕННЯ

Досліджено коливання ідеальної нестисливої рідини в оболонках обертання, які складаються з циліндричної та конічної частин. Оболонка піддана дії вертикального збудження. Вважається, що рідина в оболонці є ідеальною та нестисливою. Припускається, що рух рідини є потенціальним. В цих умовах існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини як функція потенціалу швидкостей знаходиться за допомогою рівняння Бернуллі. Задача визначення тиску на стінки оболонки зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Числовий розв'язок цього рівняння отриманий методом дискретних особливостей.

Ключові слова: складені оболонки обертання, ідеальна нестислива рідина, метод граничних елементів, метод дискретних особливостей, частоти і форми коливань.

В. Ю. КИЛИННИК, Е. В. ТИШКОВЕЦ, Д. В. КРЮТЧЕНКО, Ю. В. НАУМЕНКО

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКО-КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Исследованы колебания идеальной несжимаемой жидкости в оболочках вращения, которые состоят из цилиндрических и конических частей. Оболочка подвержена действию вертикального возбуждения. Считается, что жидкость идеальная и несжимаемая. Предполагается, что движение жидкости является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Давление жидкости как функция потенциала скоростей находится с помощью интеграла Бернулли. Задача определения давления жидкости на стенку оболочки сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Численное решение этого уравнения получено методом дискретных особенностей.

Ключевые слова: составные оболочки вращения, идеальная несжимаемая жидкость, метод граничных элементов, метод дискретных особенностей, частоты и формы колебаний.

V. YU. KYLYNNYK, YE. V. TISHKOVETZ, D. V. KRIUTCHENKO, YU. V. NAUMENKO

FLUID VIBRATIONS IN CYLINDRICAL-CONICAL SHELL UNDER VERTICAL EXCITATION

Vibrations of an ideal incompressible fluid in shells of revolution are under consideration. These shells of revolution include cylindrical and conical parts. It is assumed that the shell is subjected to vertical excitations. The liquid in the shells is supposed to be an ideal and incompressible one. The fluid flow in the shell is irrotational. So, there exists the velocity potential that satisfies the Laplace equation. The non-penetration conditions are applied to the wetted surfaces of the shell, and on the free surface the kinematic and dynamic conditions are considered. The liquid pressure as the function of the velocity potential is found using the Bernoulli equation. The problem of determining the fluid pressure is reduced to solving a singular integral equation. The numerical solution of this equation is obtained by the method of discrete singularities. The method of calculating the free and forced oscillations of the fluid in the shells of revolution is developed.

Key words: compound shells of revolution, ideal incompressible fluid, method of boundary elements, method of discrete singularities, frequencies and modes of vibrations.

Вступ. Герметичні оболонкові конструкції для зберігання і транспортування рідини є предметом інтенсивних наукових досліджень. Ці оболонкові конструкції використовують як корпуси енергетичних установок, насосів, колони випарних апаратів нафтохранилища, тощо. Велика кількість різних типів задач стосовно міцності та коливань оболонкових конструкцій була розглянута в останні десятиріччя.

Аналіз останніх досліджень. Проблема інтенсивних плескань рідини в резервуарах, ємностях, паливних баках знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників. Огляд наукових праць, присвячених проблемам плескання рідини в циліндричних, конічних, сферичних резервуарах, надано в роботах *R. A. Ibrahim* [1, 2]. Але оболонкам, що складаються з циліндричних і конічних частин, в науковій літературі приділено менше уваги, незважаючи на те, що такі тонкостінні конструкції широко використовуються в різних галузях техніки. Огляд досліджень по цій темі [2, 3] показує, що на динамічні характеристики резервуарів значно впливають плескання рідини та коливання пружних стінок. Вільні і вимушені коливання циліндричних резервуарів з рідиною розглянуті в роботах [4 – 7]. Відзначимо, що в більшості досліджень не враховується вплив сили тяжіння, що викликає плескання.

Постановка задачі. У цій роботі розглянуто задачу про коливання рідини в складеній оболонці обертання, що має циліндричну та конічну частину. Позначимо змочену частину поверхні оболонки S_1 , а вільну поверхню S_0 . Припустимо, що декартова система координат $Oxuz$ пов'язана з оболонкою, вільна поверхня збігається з площиною $z = H = H_1 + H_2$. в стані спокою (рис. 1).

Вважаємо, що H_1 – це довжина циліндричної частини, а H_2 – висота конічної частини, R_1, R_2 – радіуси нижньої та верхньої частин оболонки, рис. 1.

Для моделювання області, зайнятої рідким середовищем, розроблено математичну модель, засновану на наступних гіпотезах: рідина є нестисливою і нев'язкою, рух рідини безвихровий, розглядаються лише малі ко-

ливання (лінійна теорія). Тому можна ввести скалярний потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини $p = p(x, y, z, t)$, що діє на змоченій поверхні, отримано з лінеаризованого рівняння Бернуллі для потенціального потоку

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_z(t)z \right), \quad (1)$$

де g – гравітаційне прискорення; z – вертикальна координата точки в рідині; ρ_l – густина рідини; p_0 – атмосферний тиск; $a_z(t) = a_0 \cos \omega t$ – вертикальне прискорення сили, що збуджує; a_0 – амплітуда вимушеного впливу; ω – частота сили, що збуджує.

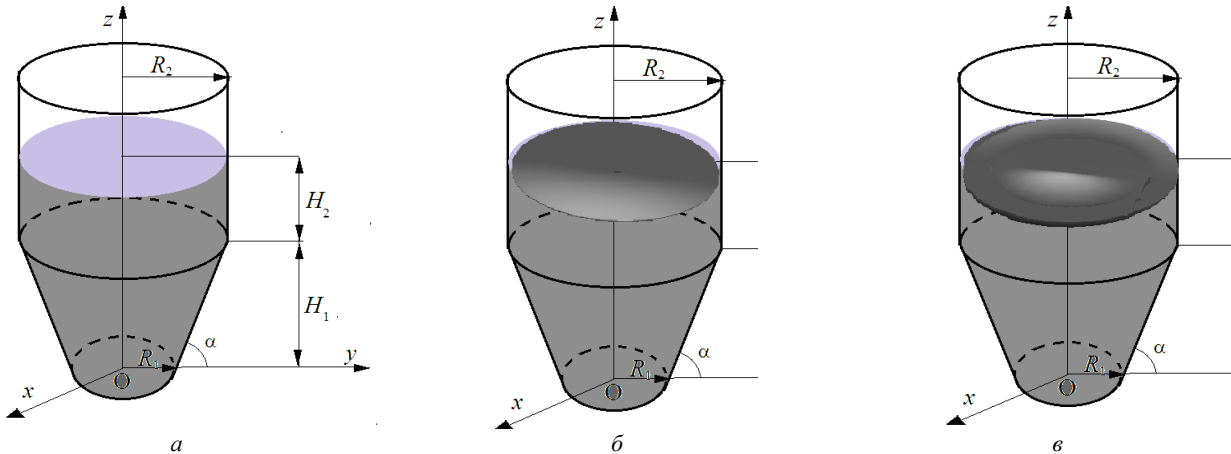


Рис. 1 – Оболонки обертання з рідиною і форми коливань вільної поверхні: а – форми коливань вільної поверхні при $\omega = 0$ Гц; б – форми коливань вільної поверхні при $\omega = 7.019$ Гц; в – форми коливань вільної поверхні при $\omega = 10.18$ Гц.

Зауважимо, що припущення відносно потенціальності потоку є цілком природним, оскільки згідно з теоремою Кельвіна, якщо рух ідеальної нестисливої рідини був потенціальним в початковий момент часу, він залишатиметься потенційним протягом усього наступного періоду руху.

Розглянемо спочатку задачу про вільні коливання оболонки. Сформулюємо граничні умови для розв'язання рівняння Лапласа. На змочених поверхнях оболонки ставимо граничну умову непротікання [8]. На вільній поверхні рідини повинні бути задоволені наступні граничні умови:

$$p - p_0|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

де \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні S_0 . Функція ζ тут описує форму і положення вільної поверхні.

Перша з цих умов є динамічною і полягає в тому, що тиск на поверхні рідини дорівнює атмосферному, друга умова є кінематичною. Її зміст в тому, що точки, які знаходились на вільній поверхні в початковий момент руху, залишаються на ній у всі наступні моменти часу. При цьому рівняння Бернуллі набуває вигляду:

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) = 0.$$

Зробивши перетворення в зазначених граничних умовах, аналогічні [8], для знаходження потенціалу швидкостей в задачі вільних коливань рідини маємо наступну крайову задачу:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_{S_0} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0. \quad (2)$$

Тут \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до розглянутої поверхні.

Для виконання умов розв'язності крайової задачі необхідно також задовольнити умову Неймана [8]:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0.$$

Таким чином, сформульована мішана крайова задача для рівняння Лапласа.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглянемо потенціал Φ у вигляді ряду:

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \quad (3)$$

Тут функції φ_k є розв'язками крайової задачі (2), яка згідно з [3, 8] зводиться до проблеми власних значень.

Щоб визначити функції φ_k , використовуємо метод граничних елементів в прямому формулюванні. Запишемо основне інтегральне співвідношення в формі [9]

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS,$$

де $S = S_1 \cup S_0$; точки P і P_0 належать поверхні S . Через $|P-P_0|$ позначимо декартову відстань між точками P і P_0 . Функція Φ , яка визначена на поверхні S_1 , являє собою тиск на змоченій поверхні, а функція $q = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}$, що визначена на S_0 , – це потік. З використанням граничних умов

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} + \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{S_0} = 0$$

та припущення, що $\Phi(t, x, y, z) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z, t)$, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь у формі [7, 11]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0; \\ -\iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases}$$

Тут φ_0 – значення потенціалу на поверхні S_0 , φ – значення потенціалу на поверхні S_1 . Числовий розв'язок отриманої системи сингулярних інтегральних рівнянь здійснено методом дискретних особливостей. В [6] показано, що ядра інтегральних рівнянь містять повні еліптичні інтеграли 1-го і 2-го роду. Оскільки еліптичний інтеграл 2-го роду є регулярною функцією, то для його обчислення використовується *стандартна квадратурна формула Гаусса*. Для еліптичного інтеграла 1-го роду застосовується підхід, заснований на характеристичних властивостях середнього арифметичного-геометричного значення AGM (a, b), [12 – 13]. Зовнішні інтеграли мають логарифмічну особливість. Для їх обчислення застосовані спеціальні квадратурні формули Гауса [9]. Розроблений метод був застосований далі для аналізу вільних та вимушених коливань оболонкових конструкцій.

Переходимо до розв'язання задачі про вимушені коливання. Розглянемо *рівняння Бернуллі* (1) на вільній поверхні. Потенціал швидкостей зобразимо у вигляді (2), а функцію, яка описує положення вільної поверхні, запишемо таким чином:

$$\zeta = \sum_{k=1}^m d_k(t) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4)$$

Тут функції φ_k є формами вільних коливань рідини в жорсткому резервуарі. Їх отримано при розв'язанні крайової задачі (2). Підставимо вирази (3) і (4) в інтеграл Бернуллі (1), враховуючи, що

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\chi_{\alpha k}^2}{g} \varphi_{\alpha k} \Big|_{S_0} \quad (5)$$

та отримаємо співвідношення

$$\sum_{k=1}^M d_k \varphi_k + \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k \chi_k^2 \left(1 + \frac{a_x(t)}{g} \right) = 0. \quad (6)$$

Тут значення χ_k є частотами вільних коливань рідини в жорсткому резервуарі. Зауважимо, що згідно з [7, 10] розглядаємо частоти та форми коливань рідини, що відповідають окремим гармонікам, а саме, вважаємо, що потенціал швидкостей та функція, що описує рівень підйому вільної поверхні, подаються в такій засіб

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \dot{d}_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z), \quad \zeta = \frac{1}{g} \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \quad (7)$$

В рівності (7) хвильове число α характеризує номер гармоніки, або кількість вузлових діаметрів [7, 10].

Надалі нас будуть цікавити значення $\alpha = 0$, що визначає осесиметричні коливання рідини в жорсткому резервуарі, а також $\alpha = 1$, що відповідає антисиметричним коливанням.

Знайдемо скалярний добуток рівності (6) на функції $\varphi_l (l = \overline{1, M})$ і скористаємося ортогональністю власних форм. Отримуємо *незв'язану систему диференціальних рівнянь 2-го порядку типу Мат'є*:

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0; \quad \ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{0k} = 0; \quad F_{1k} = \frac{(\rho, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}; \quad k = \overline{1, M},$$

$$a_z(t) = a_1 \cos(\omega t), \quad a_x(t) = a_2 \cos(\omega t). \quad (8)$$

Для отримання однозначного розв'язку системи (8) треба задати початкові умови.

Чисельний аналіз і обговорення результатів. Спочатку розглянемо задачу про власні осесиметричні коливання циліндричної оболонки з розмірами $R = 1$ м, $H = 1$ м. При цьому вважалось, що $\alpha = 0$. Ці дані, а саме частоти та форми вільних коливань, необхідні для подальшого розв'язання задачі про вимушені коливання.

В табл. 1 наведено порівняння результатів, отриманих запропонованим методом граничних елементів, з аналітичним розв'язком [1].

Таблиця 1 – Частотний параметр осесиметричних коливань

Метод	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
МГЕ	3.815	7.019	10.180	13.333	16.480
Аналітичний метод [1]	3.815	7.016	10.173	13.324	16.470

Під частотним параметром згідно з [1,7] розуміємо таку величину χ^2 / g . В таблиці наведені значення частотного параметру для 5 перших форм коливань при $\alpha = 0$.

При виконанні цього розрахунку було використано 150 елементів вздовж меридіану оболонки та 75 елементів вздовж радіусу вільної поверхні. Застосовувались граничні елементи зі сталою апроксимацією густини. Це відповідає ідеології методу дискретних особливостей [11]. Результати, що наведені в табл. 1, свідчать про добру узгодженість чисельного та аналітичного розрахунків та доводять вірогідність запропонованого методу.

На рис. 1 наведені форми власних антисиметричних коливань рідини, а саме $\alpha = 1$, $n = 1$, та $\alpha = 1$, $n = 2$.

Аналогічно роботі [12] розглянемо вільні осесиметричні коливання циліндрично-конічних оболонок при перевантаженнях. Результати наведені в табл. 2. При цьому вважалось, що $\alpha = 0$.

Таблиця 2 – Частоти осесиметричних коливань при перевантаженнях

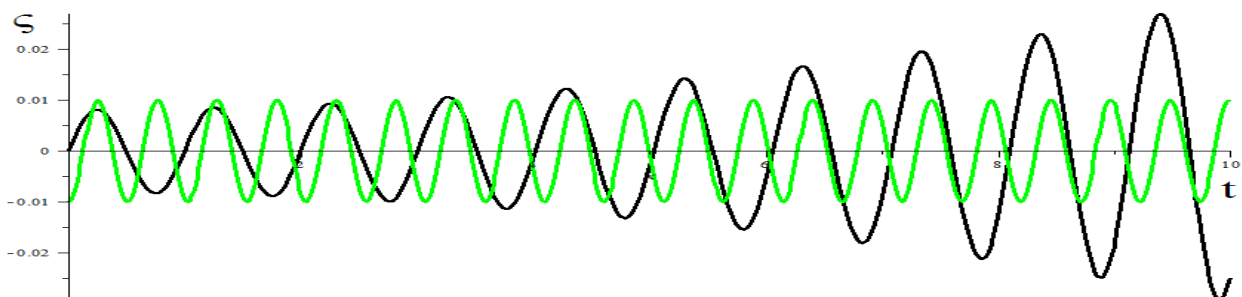
a	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
1	6.13	8.37	9.45	10.24	10.88	11.42	11.89
2	8.67	11.84	13.37	14.48	15.38	16.14	16.81
3	10.61	14.50	16.37	17.74	18.87	19.77	20.59
7	16.21	22.15	25.01	27.10	28.78	30.20	31.45

В табл. 2 параметр a означає величину перевантаження, n – номер форми. Тобто, дані отримані при таких значеннях гравітаційного прискорення $ag : g, 2g, 3g, 7g$. Бачимо зростання частот зі збільшенням параметра перевантаження.

Далі розглянемо вимушені коливання циліндрично-конічної оболонки, частково заповненої рідиною. Вимушені коливання розглянуті для $a = 0$. Початкові умови для розв'язання диференціального рівняння 2-го порядку обираються наступним чином:

$$d_{1k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{11}(0) = 0.05, \quad \dot{d}_{1k}(0) = 0, \quad k = \overline{2, M}, \quad d_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}.$$

Розглянуто вертикальне збудження $a_z(t) = a_0 \cos \omega t$ з параметрами $a_0 = 0.1$, $\omega = 12.26$. Ця частота є подвійною частотою власних осесиметричних коливань. На рис. 2 (а, б, в, г) показані зміни в часі форми вільної поверхні при різних значеннях перевантаження $a = 1, 2, 3, 7$, відповідно.



а

Рис. 2 – Амплітуди вимушених коливань рідини в кінцічному резервуарі: а – перевантаження $a = 1$.

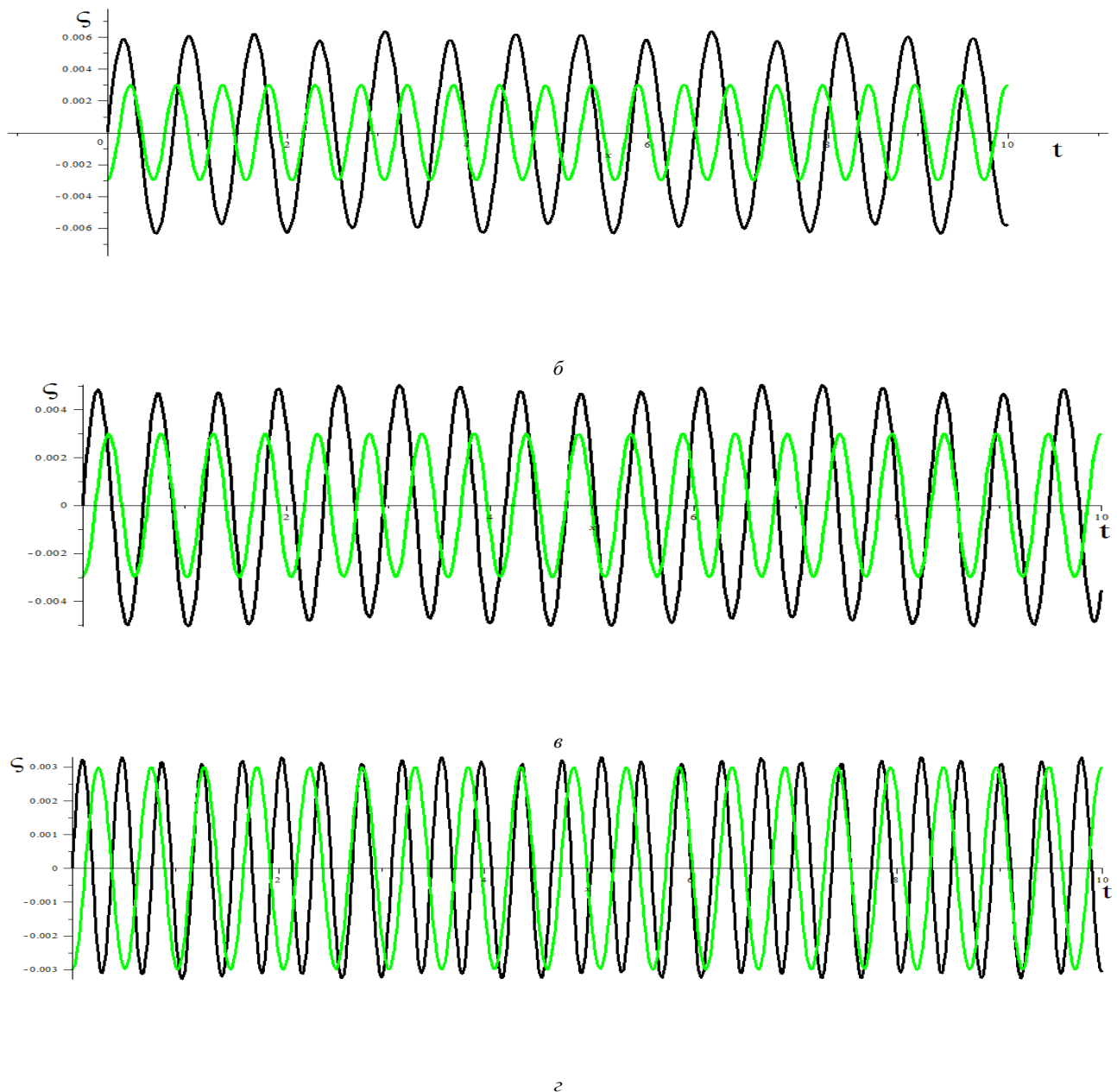


Рис. 2 – Амплітуди вимушених коливань рідини в кінцічному резервуарі: б – перевантаження $a = 2$;
в – перевантаження $a = 3$; з – перевантаження $a = 7$.

При $a = 1$ (рис. 2, а) спостерігається явище параметричного резонансу, яке полягає в необмеженому зростанні амплітуди коливання вільної поверхні. Зауважимо, що при зростанні параметру перевантаження коливання рідини в резервуарі мають стійкий гармонічний характер (рис. 2, б, в, з).

Висновки. Розроблено метод розрахунку вільних і вимушених коливань рідини в оболонках обертання, заснований на використанні методу граничних інтегральних рівнянь та розкладенні в ряд Фур'є. Розв'язання інтегральних рівнянь здійснено за допомогою методу дискретних особливостей. Аналіз результатів довів, що при збільшенні параметру перевантаження явище параметричного резонансу не спостерігається. Надалі передбачається розглянути спільну дію вертикальних і горизонтальних збуджень.

Список літератури

1. Ibrahim R. A., Pilipchuck V. N., Ikeda T. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54. – No. 2. – P. 133 – 199.
2. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics // Cambridge University Press. – New York, 2005. – 948 p.
3. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles // Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. – 2016. – V. 1. – No. 1. – P. 14 – 27.

4. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2016. – № 67. – P. 13 – 25.
5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. – 2018. – № 6(6). – P. 976 – 988.
6. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.
7. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles // *J. Modern Technology & Engineering*. – 2018. – Vol. 3. – No. 1. – P. 15 – 52.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load // *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. – 2011. – Vol. 52. – P. 285 – 296.
9. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. – Springer-Verlag : Berlin and New York, 1984. – 478 p.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. – 2017. – Vol. 5(3). – P. 317 – 328.
11. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating // *Problems, Differ. Equ.* – 2003. – № 39:9. – pp. 1295 – 1307.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss // *L'Enseignement Mathématique*. – 1984. – t. 30. – P. 275 – 330.
13. Кьльннык В. Ю., Гнетько В. И., Науменко Ю. В., Розова Л. В. Численное моделирование колебаний жидкости в составных оболочках вращения при перегрузках // *Прикладні питання математичного моделювання*. – 2018. – № 1. – С. 115 – 121.

References (transliterated)

1. Ibrahim R. A., Pilipchuck V. N., Ikeda T. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*. 2001, vol. 54, no. 2, pp. 133–199.
2. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005, 948 p.
3. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016, vol. 1, no. 1, pp. 14–27.
4. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016, vol. 67, pp. 13–25.
5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6(6), pp. 976–988.
6. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
7. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumenko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. 2018, vol. 3, no. 1, pp. 15–52.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011, vol. 52, pp. 285–296.
9. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984, 478 p.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017, vol. 5(3), pp. 317–328.
11. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating. *Problems, Differ. Equ.* 2003, vol. 39:9, pp. 1295–1307.
12. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique*. 1984, no. 30, pp. 275–330.
13. Kylynnik V. Yu., Gnitko V. I., Naumenko Yu. V., Rozova L. V. Численное моделирование колебаний жидкости в составных оболочках вращения при перегрузках [Numerical simulation of liquid vibration in composite shells of revolution under overloads]. *Прикладні питання математичного моделювання* [Applied problems of mathematical modeling]. 2018, no. 1, pp. 115–121.

Надійшла (received) 07.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Килинник Влада Юрійвна (Килинник Влада Юрьевна, Кулундук Vlada Yurievna) – бакалавр, студентка, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, м. Харків; e-mail: vladakylynnik@gmail.com.

Тишковець Олена В'ячеславівна (Тишковец Елена Вячеславовна, Tishkovetz Yelena Viacheslavna) – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; e-mail: yelena.tishkovets@gmail.com.

Крютченко Денис Володимирович (Крютченко Денис Владимирович, Kriutchenko Denys Vladimirovich) – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; тел.: (093) 288-67-53; e-mail: wollydenis@gmail.com.

Науменко Юрій Віталійович (Науменко Юрий Виталиевич, Naumenko Yury Vyatalievich) – магістр, аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; e-mail: strelea@ukr.net.

Д. В. КРЮТЧЕНКО, В. І. ГНІТЬКО, Ю. С. ШУВАЛОВА

МЕТОД ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА КОЛИВАНЬ РЕЗЕРВУАРІВ З РІДИНОЮ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ТА ВЕРТИКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Запропоновано методи дослідження коливання рідини в жорстких резервуарах з перегородками. Запропоновано чисельний метод моделювання зовнішнього впливу на резервуари для зберігання рідини. Вважається, що рідина є нестисливою та ідеальною, а її рух, викликаний дією зовнішнього навантаження, є безвихровим. У цих умовах існує потенціал швидкостей, який задовольняє рівнянню Лапласа. Сформульована мішана крайова задача для визначення потенціалу швидкостей. Це є основою для отримання власних форм вільних коливань рідини в циліндричних резервуарах, які розглядаються як базисні функції для вивчення вимушених коливань рідини в циліндричній ємності з перегородками. Розглянуто вимушені коливання, викликані гармонічними, імпульсними і сейсмічними навантаженнями, та досліджено їх вплив на рівень підйому вільної поверхні.

Ключові слова: циліндричний резервуар, перегородка, вільні і вимушені коливання, плескання.

Д. В. КРЮТЧЕНКО, В. И. ГНИТЬКО, Ю. С. ШУВАЛОВА

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ РЕЗЕРВУАРОВ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКАХ

Изучены колебания жидкости в жестких резервуарах с перегородками. Предложен численный метод моделирования внешнего воздействия на резервуары для хранения жидкости. Предполагается, что жидкость является несжимаемой и идеальной, а ее движение, вызванное действием внешней нагрузки, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Сформулирована смешанная краевая задача для определения потенциала скоростей. Решение этой задачи служит основой для получения собственных форм свободных колебаний жидкости в цилиндрических резервуарах, которые рассматриваются как базисные функции для изучения вынужденных колебаний жидкости в цилиндрической емкости с перегородками. Рассмотрены вынужденные колебания, вызванные гармоническими, импульсными и сейсмическими нагрузками, и исследовано их влияние на уровень подъема свободной поверхности.

Ключевые слова: цилиндрический резервуар, перегородка, свободные и вынужденные колебания, плескания.

D. V. KRIUTCHENKO, V. I. GNITKO, JU. S. SHUVALOVA

METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES FOR PROBLEMS OF ANALYSIS OF VIBRATIONS OF LIQUID FILLED TANKS UNDER HORIZONTAL AND VERTICAL LOAD

In this paper, we propose methods for solving the fluid vibration problems in rigid tanks with partitions. The numerical method for modelling the external influence upon liquid storage tanks is proposed. It is assumed that the liquid is incompressible and ideal one, and its motion, caused by the action of external loading, is vortex-free. In these conditions, there exists a velocity potential that satisfies the Laplace equation. The mixed boundary value problem is formulated for determining the velocity potential. This is the base to obtain the eigenforms of free liquid vibrations in the cylindrical tanks, which are considered as basic functions for studying the forced liquid vibrations in a rigid baffled cylindrical tank. The mixed boundary value problem is solved by method of potential theory. The liquid pressure is obtained from the system of singular integral equations. It is solved numerical by the method of discrete singularities. The lateral excitations caused by harmonic, impulse, and seismic loadings are considered and their influence on the free surface elevation is examined.

Key words: cylindrical tank, baffle, free and forced vibrations, sloshing.

Вступ. Плескання є явищем, пов'язаним з інтенсивним рухом рідини в частково заповнених резервуарах. Це явище може призвести до негативних наслідків, викликаних дією раптово прикладених навантажень (землетруси, падіння літаків тощо). Інтенсивне розплескування рідини, як правило, викликається зовнішніми горизонтальними та вертикальними збудженнями контейнерів. Інтенсивний рух рідини всередині резервуара супроводжується виплескуванням наповнювача, що може призвести до небезпечних впливів на навколишнє середовище. Для зменшення амплітуди коливання були запропоновані та досліджені різні засоби, наприклад, встановлення перегородок [1 – 4]. Більшість наукових робіт обмежувалося вивченням горизонтальних перегородок у резервуарах. У роботі [3] запропоновано підхід до аналізу впливу конічних перегородок на частоти коливань рідини. В роботах [1, 3] було виявлено, що форма перегородки та її розташування є значущими при проектуванні резервуарів з оптимальними параметрами з урахуванням геометричних і силових обмежень. У цих роботах розглядалися баки з перегородками, частково заповнені рідиною.

Постановка задачі. У даній роботі були розглянуті проблеми вільних та вимушених коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з радіусом R і з двома вертикальними перегородками. Схема резервуара наведена на рис. 1, б. Нехай S_1 є змоченою поверхнею оболонки, а S_0 – вільною поверхнею рідини. Для порівняння результатів розглянемо також циліндричний резервуар без перегородок, рис. 1, а. Це необхідно для з'ясування впливу перегородок на зміну рівня вільної поверхні при вимушених коливаннях. Розглядаються горизонтальні та вертикальні збудження, викликані періодичними навантаженнями. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, викликаний зовнішніми навантаженнями, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей Φ , що задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини на поверхні резервуара визначається за допомогою лінеаризованого інтегралу Коши – Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_z(t) + g)z + a_x(t)x \right]. \quad (1)$$

Тут g – прискорення вільного падіння, $a_z(t)$, $a_x(t)$ – вертикальне та горизонтальне прискорення, ρ_l – густина рідини, p_0 – атмосферний тиск. На змоченій поверхні оболонки задається умова *непротікання*:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0.$$

На вільній поверхні рідини задаються *кінематична* та *динамічна умови* у вигляді:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0,$$

де ζ – функція, що описує форму вільної поверхні рідини.

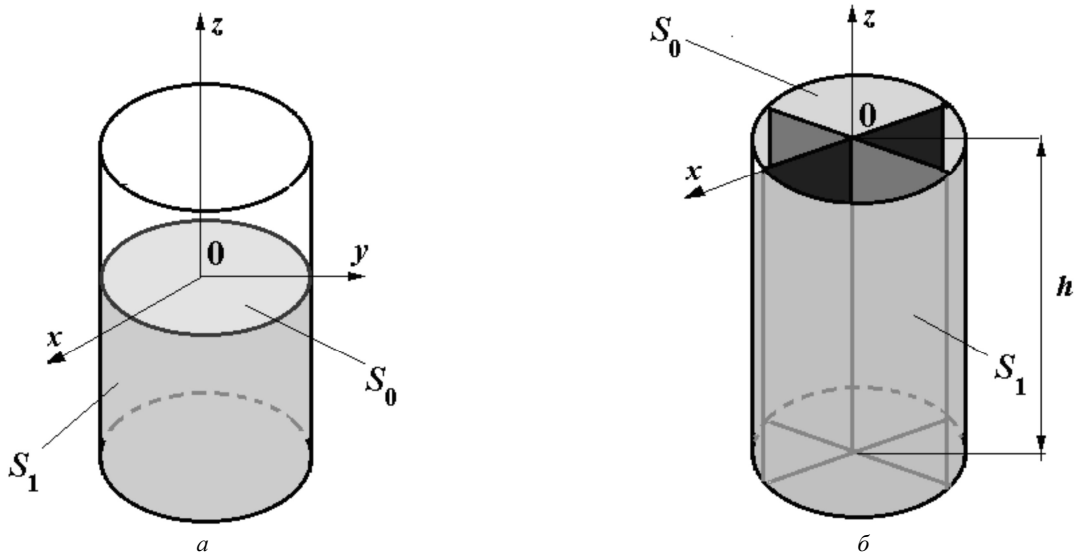


Рис. 1 – Циліндричні резервуари з рідиною: *a* – без перегородок; *б* – з двома вертикальними перегородками.

Використовуємо підхід, запропонований в [5] та заснований на використанні методу сингулярних інтегральних рівнянь та наступних розкладень:

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z), \quad \zeta = \frac{1}{g} \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \quad (2)$$

Тут α – це номер гармоніки, а k – номер форми коливань рідини, що відповідає даному значенню α . Для функцій $\varphi_{\alpha k}$ розглядаються наступні крайові задачі:

$$\nabla^2 \varphi_{\alpha k} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0; \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial t} + g \zeta = 0. \quad (4)$$

Продиференціюємо друге рівняння у співвідношеннях (4) по t та підставимо вираз для ζ'_t з першої рівності в (4).

Тут і далі припускаємо, що $\varphi_{\alpha k}(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_{\alpha k}(x, y, z)$. Далі ми отримуємо послідовність задач на власні значення з такими крайовими умовами на вільній поверхні для кожної $\varphi_{\alpha k}$:

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha k}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_{\alpha k}^2}{g} \varphi_{\alpha k}. \quad (5)$$

Тут власні частоти це $\lambda_{\alpha k} = \chi_{\alpha k}^2 / g$.

Власні частоти коливань рідини в оболонці визначаються з (3), (4) таким чином

$$-\omega_{\alpha k}^2 \varphi_{\alpha k}(x, y, H) + \chi_{\alpha k}^2 \varphi_{\alpha k}(x, y, H) = 0 \Rightarrow \omega_{\alpha k}^2 = \chi_{\alpha k}^2; \quad \omega_{\alpha k} = \sqrt{\lambda_{\alpha k} g}.$$

Ефективна чисельна процедура для розв'язання проблеми власних значень з використанням методу граничних елементів запропонована в [5].

Для визначення функцій $\varphi_{\alpha k}$, будемо використовувати метод граничних елементів в прямому формулю-

ванні, запропонований *C. Brebbia* в [6]. Нехтуючи індексом αk , ми можемо записати основне співвідношення у формі

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS, \quad (6)$$

де $S = S_1 \cup S_0$; точки P і P_0 належать поверхні S . Як $|P-P_0|$ ми позначимо декартову відстань між точками P і P_0 . Функція φ , визначена на поверхні S_1 , є тиском на змоченій поверхні, та функція q , визначена на S_0 , є потоком $q = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$.

З використанням граничних умов (4) приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь у формі, отриманій в [7, 8]:

$$\begin{cases} 2\pi\varphi_1 + \iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0 = 0; \\ -\iint_{S_1} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_0 + \frac{\chi_k^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS_0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тут для зручності ми позначаємо через φ_0 значення потенціалу на вільній поверхні, як φ_1 – значення потенціалу на стінках оболонки.

Варто зазначити, що маємо два види ядер в інтегральних операторах, яки наведені вище в (7). А саме, маємо:

$$A(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS; \quad B(S, \sigma)\psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P-P_0|} dS; \quad P_0 \in \sigma. \quad (8)$$

В формулах (8) поверхні S та σ можуть бути різними або однаковими. Якщо поверхня S співпадає з поверхнею σ , то інтеграли в (8) сингулярні, і при їх чисельному визначенні необхідно приймати до уваги наявність цієї інтегрованої особливості. Вирази під знаком інтегралу тут є істотно неоднорідними, і стандартні квадратури втрачають точність.

Як і в [7, 8] ми замінимо декартову систему координат (x, y, z) на циліндричну (r, θ, z) , інтегруємо по z та θ , приймаючи до уваги, що

$$|P-P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2 - 2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)}.$$

Тут r , θ і r_0 , θ_0 радіуси-вектори і окружні координати точок P та P_0 .

Далі використовуємо циліндричну систему координат і зобразимо невідомі функції у вигляді рядів Фур'є по окружній координаті

$$\psi(r, z, \theta) = \psi(r, z) \cos \alpha \theta; \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

Отримаємо інтегральні оператори в наступній формі

$$\iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS = \int_{\Gamma} \psi(P) \Theta(P, P_0) d\Gamma; \quad \iint_S \psi \frac{1}{|P-P_0|} dS = \int_{\Gamma} \psi(P) \Phi(P, P_0) d\Gamma; \quad P_0 \in \sigma. \quad (10)$$

Тут Γ твірна поверхні S , ядра $\Theta(P, P_0)$ та $\Phi(P, P_0)$ визначаються в такий спосіб:

$$\Theta(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} \mathbf{E}_m(k) - \mathbf{F}_m(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} \mathbf{E}_m(k) n_z \right\}; \quad \Phi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \mathbf{F}_m(k).$$

Тут n_r, n_z – компоненти одиничної нормалі \mathbf{n} до поверхні. Вище наведено такі позначення

$$\mathbf{E}_m(k) = (-1)^m (1-4m^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2m\theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad \mathbf{F}_m(k) = (-1)^m \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2m\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (11)$$

$$a = r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2, \quad b = 2rr_0; \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Припускаючи, що $m=0$ у співвідношеннях (11), ми отримуємо стандартні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Задача визначення амплітуди коливань рідини зводиться до такої системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0; \quad \ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{0k} = 0; \quad F_{1k} = \frac{(\rho, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}; \quad k = \overline{1, M}, \\ a_z(t) = a_1 \cos(\omega t), \quad a_x(t) = a_2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (12)$$

До цієї системи додаються початкові умови:

$$d_{1k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{11}(0) = 0.05, \quad \dot{d}_k(0) = 0, \quad k = \overline{2, M}, \quad d_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad \dot{d}_{0k}(0) = 0, \quad k = \overline{1, M}.$$

За допомогою методу, розробленого в [9], отримані власні форми коливань рідини, їх значення наведені в табл. 1. Тут БП – це оболонка без перегородок, ВП – з вертикальними перегородками.

Таблиця 1 – Частоти коливань рідини в оболонці

α	Тип оболонки	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0	БП	6.1248	8.2919	9.98475	11.4295
	ВП	6.1248	8.2919	9.98475	11.4295
1	БП	4.1424	7.2286	9.14726	10.7120
	ВП	5.4582	8.1067	9.87918	12.6574

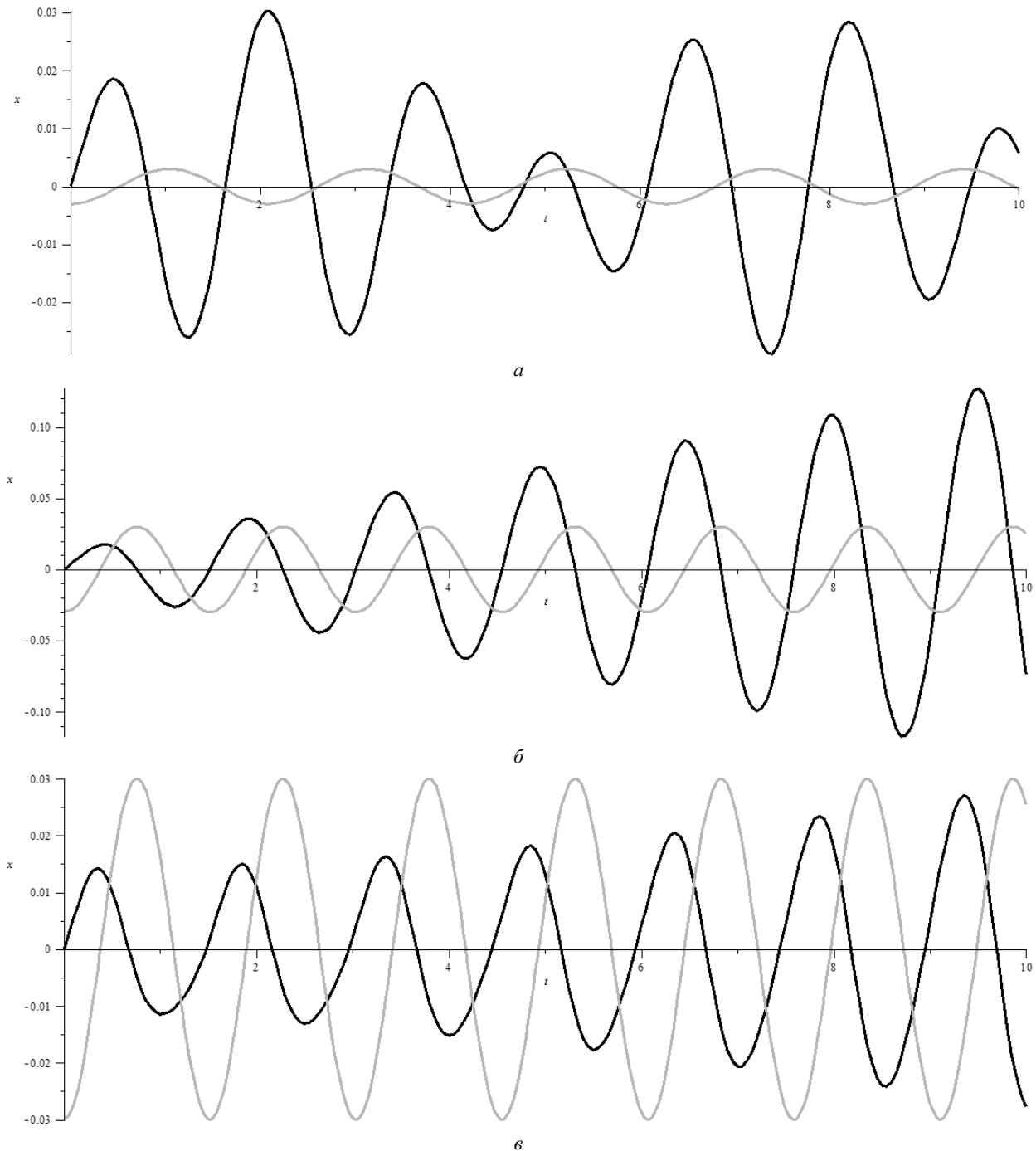


Рис. 2 – Зміна рівня вільної поверхні у циліндричних резервуарах без перегородок:
 $a - \omega = 3$ Гц; $b - \omega = 4.14$ Гц; $v - \omega = 8.28$ Гц.

Систему (12) розв'язано при таких параметрах: $a - \omega = 3$ Гц; $b - \omega = 4.14$ Гц; $c - \omega = 8.28$ Гц. Дані розрахунків наведені на рис. 2. Тут сірими лініями зображені графіки функції $a_x(t) = a_2 \cos(\omega t)$. Чорними лініями зображені графіки зміни рівня вільної поверхні рідини. При $\omega = 8.28$ Гц спостерігається явище параметричного резонансу, яке полягає у необмеженому зростанні амплітуди коливань вільної поверхні.

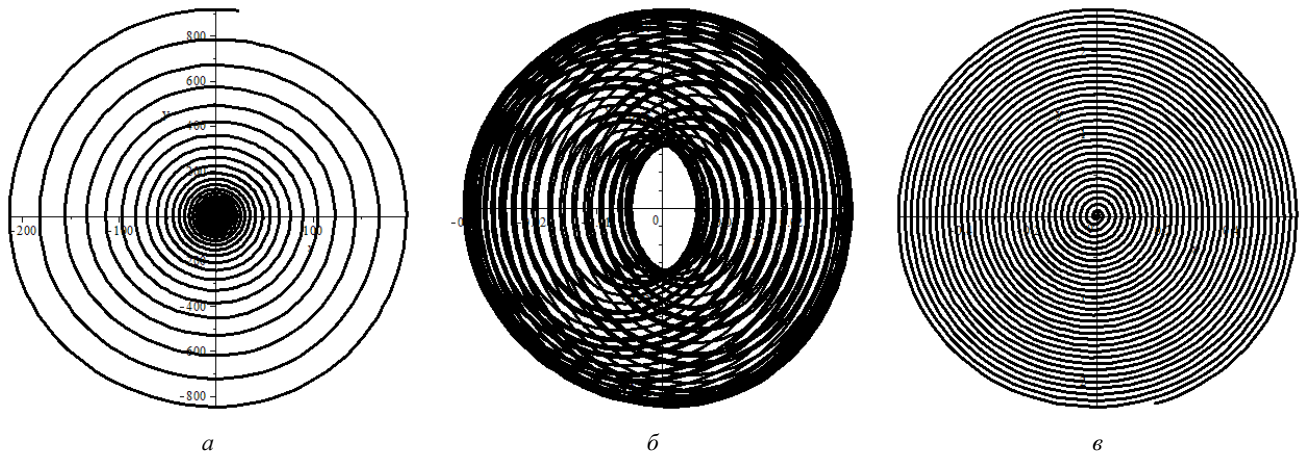


Рис. 3 – Фазові портрети: а – $\omega = 4.14$ Гц; б – $\omega = 3$ Гц; в – $\omega = 8.28$ Гц.

На рис. 3 зображені фазові портрети руху рідини, які відповідають таким частотам коливань: $a - \omega = 4.14$ Гц; $b - \omega = 3$ Гц; $c - \omega = 8.28$ Гц. Коли $\omega = 4.14$ Гц, маємо збігання з першою частотою антисиметричних коливань, при $\omega = 3$ Гц маємо відстроювання від резонансних частот, при $\omega = 8.28$ Гц відбувається параметричний резонанс. Рис. 3, а відповідає зростанню амплітуди коливань, викликаному прикладеним горизонтальним навантаженням, рис. 3, в відповідає параметричному резонансу, що відбувається при подвійній першій частоті. Таким чином, розроблений метод дозволяє надати рекомендації щодо відстроювання від небажаних резонансних частот.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому передбачається розглянути коливання рідини в резервуарах з перегородками при сумісній дії вертикального та горизонтального навантажень з урахуванням нелінійних чинників та пружності стінок.

Висновки. Для чисельного аналізу взаємодії системи «оболонка-рідина» для резервуара з перегородками розроблено чисельний метод на основі методу граничних елементів. Досліджено поведінку рідини в циліндричних резервуарах без перегородок і з вертикальними перегородками. Установка вертикальних перегородок змінює спектр резонансних частот в бік височастотних коливань. Це дозволить визначити небажані частоти збудження на стадії проектування баків і запобігти втраті стабільності. Запропонований підхід дозволяє проводити чисельне моделювання резервуарів з перегородками різних форм для зберігання рідини замість проведення коштовних натурних експериментів.

Список літератури

1. Gnıtko V., Degtyariov K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2018. – V. 6. – No. 6. – P. 976 – 988.
2. Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing Frequencies in Truncated Conical Tanks // Engineering Computations. – 2008. – Vol. 25. – No. 6. – P. 518 – 540.
3. Gnıtko V., Naumenko Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – No. 22 (4). – P. 867 – 881.
4. Gnıtko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles // Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences. – 2016. – V. 1(1). – P. 14 – 27.
5. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnıtko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.
6. Brebbia C.A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary Element Techniques. – Springer-Verlag : Berlin and New York, 1984. – 478 p.
7. Gnıtko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load // Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2011. – Vol. 52. – P. 285 – 296.
8. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnıtko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.

9. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations // Journal of Mathematics and Statistical Science. – 2019. – Vol. 5. – P. 31 – 41 (ISSN 2411-2518).

References (transliterated)

1. Gnitko V., Degtyariv K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6, no. 6, pp. 976–988.
2. Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing Frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. 2008, vol. 25, no. 6, pp. 518–540.
3. Gnitko V., Naumenko Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017, no. 22 (4), pp. 867–881.
4. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016, vol. 1 (1), pp. 14–27.
5. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
6. Brebbia C.A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984. 478 p.
7. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011, vol. 52, pp. 285–296.
8. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
9. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019, vol. 5, pp. 31–41 (ISSN 2411-2518).

Надійшла (received) 28.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Крютченко Денис Володимирович (Крютченко Денис Владимирович, Kriutchenko Denys Vladimirovich) – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; тел.: (093) 288-67-53; e-mail: wollydenis@gmail.com.

Гнітько Василь Іванович (Гнітько Василий Иванович, Gnitko Vasil Ivanovych) – старший науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, м. Харків; тел.: (050) 180-83-18; e-mail: wollydenis@gmail.com.

Шувалова Юлія Сергіївна (Шувалова Юлия Сергеевна, Shuvalova Julia Sergeevna) – доцент, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (093) 288-67-53; e-mail: wollydenis@gmail.com.

UDC 517.9

К. М. МАЛАШ, А. Я. БОМБА

SPATIAL GENERALIZATION OF THE EXPLOSION PROCESS MATHEMATICAL MODEL USING QUASICONFORMAL MAPPINGS METHODS

The mathematical model of the explosive process impact on the environment developed on the basis of the classical fluid theory which defines the borders of crater, the compressed and unperturbed sections of the soil created as an explosion result is generalized for the case of a three-dimensional medium. The algorithm of the corresponding boundary value problem numerical solving by quasiconformal mappings numerical methods and a step-wise parameterization of the characteristics of the environment and process and its program realization are presented. Numerical experiments were performed on the basis of the developed algorithm and the obtained results were analyzed.

Key words: explosion processes, quasiconformal mappings, three-dimensional medium, mathematical modeling, inverse problems.

К. М. МАЛАШ, А. Я. БОМБА

ПРОСТОРОВЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ВИБУХУ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Математична модель впливу вибухового процесу на середовище, розроблена на основі класичної рідинної теорії, що визначає межі утворених у досліджуваному середовищі внаслідок дії вибуху вирвів, впресованої та незбуреної ділянок ґрунту на основі апріорно відомих вибухової сили та розміру і форми заряду і початкового розподілу коефіцієнта проникності досліджуваного середовища та його критичних значень, узагальнена на випадок трьохвимірному простору. На базі розробленої математичної моделі створено алгоритм числового розв'язування відповідної крайової задачі з використанням числових методів квазіконформних відображень та поетапної параметризації характеристик досліджуваного середовища і вибухового процесу та описана його програмна реалізація. На основі розробленого алгоритму проведено ряд числових експериментів та проаналізовано отримані результати.

Ключові слова вибухові процеси, квазіконформні відображення, трьохвимірне середовище, математичне моделювання, обернені задачі.

© К. М. Malash, A. YA. Bomba, 2019

Е. Н. МАЛАШ, А. Я. БОМБА

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗРЫВА МЕТОДАМИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Математическая модель влияния взрывного процесса на среду, разработанная на основе классической жидкостной теории, определяющая границы образованных в результате взрыва воронок, впященных и невозмущенного участков почвы, обобщена на случай трехмерной среды. Приведены алгоритм численного решения соответствующей краевой задачи с использованием численных методов квазиконформных отображений и поэтапной параметризации характеристик среды и процесса и его программная реализация. На основе разработанного алгоритма проведены численные эксперименты и проанализированы полученные результаты.

Ключевые слова: взрывные процессы, квазиконформные отображения, трехмерная среда, математическое моделирование, обратные задачи.

Introduction. Society is increasingly using the earth's crust upper layers at the present stage of its development. Underground transport systems are being created, semi-underground or underground structures are being built, minerals are extracted from hard-to-reach places.

Common thing to all the types of work mentioned above is the need for creating the large cavities, which is fairly expensive and costly in time. Therefore, the issues of developing new methods of creating large cavities in the environment, particularly the soil, and improving the existing ones are very relevant today. One of the most perspective ways of developing such methods is by using the explosive processes which leads to a significant acceleration and cheapening of the execution work. In addition to the areas described above explosive processes are widely used in providing the materials with necessary engineering properties and testing their strength under the adverse external factors influence [1].

There are several mathematical models used to study explosive processes nowadays, among which should be mentioned elastic, solid-liquid, liquid, and others [1]. A series of works is devoted to the development of the explosion process mathematical model based on a liquid theory, particularly, the model problem of studying the explosive process impact on an anisotropic medium which aims to determine the boundaries of the formed crater, the pressed and unperturbed zones of the soil is solved in [2]; the external boundary of the studied area is further determined in [3]; the optimal explosive power and the bookmark location, which is necessary to obtain the maximum possible crater size, are determined in [4].

This article deals with the generalization of the explosive process mathematical model, which is considered in the papers described above, for the three-dimensional medium.

Problem statement. The investigated part of the medium (soil) in which the charge of a given form with a constant quasipotential on it is placed is modeled as a two-bounded spatial domain, bounded by the two closed smooth surfaces: $S^* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$ (the investigated domain external boundary) and $S_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ (the charge boundary) (Fig. 1). The particles' motion process caused by an explosion is described using the motion equation $\bar{v} = k \text{ grad } \varphi$ and the continuity equation $\text{div } \bar{v} = 0$, where $\bar{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ is the particle velocity, $\varphi =$

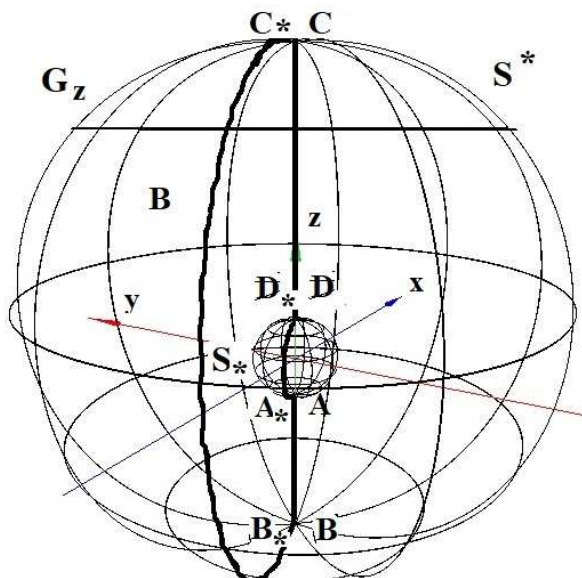


Fig. 1 – Schematic representation of the studied area.

$= \varphi(x, y, z) = -P / \rho$ is the quasipotential of formed field,

ρ is the medium (soil) density, $P = \int_0^{t_0} p dt$ is the pressure

pulse, $k = k(| \text{ grad } \varphi |) = k(I)$ is the medium permeability coefficient which characterizes the ability of its particles to break off [5]. The potential on the studied domain contours is considered to be known a priori $\varphi|_{S_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{S^*} = \varphi^*$,

$-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$. The explosion process is modeled taking into account the mutual influence of the potential

gradient $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$ and the value of the medium permeability coefficient $k = k(I)$. Clarification of the last one is carried out according to the following formula:

$k = k_0 + \frac{1}{2} \beta (I - I^*) ((I - I^0) + |I - I^0|)$, where the parameter β is determined based on the experimental data,

I^0, I^* – are the critical gradient values, which characterize the delay and separation of particles (we determine the boundaries of the crater, the pressed and unperturbed sections of the soil in which the explosion occurred on their basis).

Fig. 2 shows the section of the investigated area, where area 1 is the crater, 2 is the pressed zone and the 3 is the unperturbed one. A line in which the value of the potential gradient $I = I^*$ separates the crater and the pressed soil zones, $I = I^0$ separates the pressed and unperturbed ones.

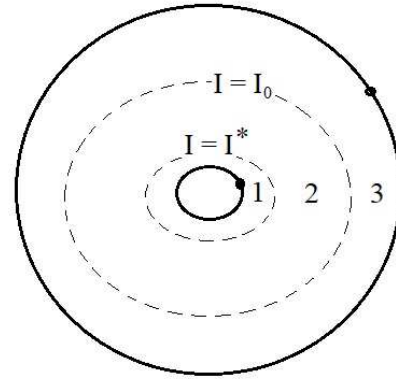


Fig. 2 – Schematic representation of investigated domain cross-section.

Mathematical model. We introduce a couple of functions $\psi = \psi(x, y, z)$ and $\eta = \eta(x, y, z)$ spatially complex conjugate with function $\varphi = \varphi(x, y, z)$ and such that the condition $k \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \text{ grad } \eta$ is fulfilled. We make a conditional incision Γ with the shores $ABCD$ and $A_*B_*C_*D_*$ along one of the flow surfaces in the studied region G_z thereby reducing it to a single-connected domain [6]. We obtain the problem on a quasi-conformal mapping $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y, z) +$

$+i\psi(x, y, z) + j\eta(x, y, z)$ domain $G_z^0 = G_z / \Gamma$ to the corresponding complex quasipotential region $G_\omega = \{\omega = \varphi + +i\psi + j\eta : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ with unknown parameters Q_* and Q^* :

$$\begin{cases} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z}; \\ k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{cases} \quad (x, y, z) \in G_z^0; \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$\varphi|_{S^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^0} = \varphi^*, \quad \psi|_{ABCD} = 0, \quad \psi|_{A_*B_*C_*D_*} = Q_*, \quad \eta|_{ABCD} = 0, \quad \eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*, \quad Q_*Q^* = Q. \quad (2)$$

We turn to the inverse boundary value problem on the quasiconformal mapping $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi, \eta) + iy(\varphi, \psi, \eta) + jz(\varphi, \psi, \eta)$ of the quasicomplex potential domain G_ω to the physical region G_z^0 to find the real $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ and imaginary $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ parts of the equation of the flow line characteristic function [7]. In this case, the conditions of the Cauchy-Riemann type acquire the form

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = k \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right); \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = k \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right); \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = k \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right); \end{cases} \quad (\varphi, \psi, \eta) \in G_\omega. \quad (3)$$

The equation of the boundary surfaces of the domain:

$$f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0; \quad f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0; \quad 0 < \psi < Q_*, \quad 0 < \eta < Q^*. \quad (4)$$

The conditions of "gluing" on a conditional cut:

$$\begin{aligned} x(\varphi, 0, \eta) &= x(\varphi, Q_*, \eta), \quad y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \quad z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta); \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} \frac{\partial z}{\partial \psi} = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} \frac{\partial z}{\partial \psi}; \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \eta < Q^*. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x(\varphi, \psi, 0) &= x(\varphi, \psi, Q^*), \quad y(\varphi, \psi, 0) = y(\varphi, \psi, Q^*), \quad z(\varphi, \psi, 0) = z(\varphi, \psi, Q^*); \\ \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \lim_{\eta \rightarrow Q^*-0} \frac{\partial z}{\partial \eta}; \\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q_*. \end{aligned} \quad (6)$$

must also be fulfilled along with the conditions of quasiorthogonality at the boundaries of the domain

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial f^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial f^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial f^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial f^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{\partial f^*}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f^*}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial f^*}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Numerical solving algorithm. The algorithm for the problem numerical solving is constructed (similar to [7]) in the following way. We construct an equable orthogonal grid $G_\omega = \{(\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, i = \overline{0, n+1}; \psi_j = j\Delta\psi, j = \overline{0, m+1}; \eta_k = k\Delta\eta, k = \overline{0, l+1}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n+1}; \Delta\psi = \frac{Q_*}{m+1}; \Delta\eta = \frac{Q}{l+1}; \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi\Delta\eta}; n, m, l \in N\}$ in domain. The system of equations (3) is approximated by the following difference equations using a "cross" type calculation scheme:

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4}k_{i,j,k} \gamma ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})); \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4}k_{i,j,k} \gamma ((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})); \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4}k_{i,j,k} \gamma ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})); \\ i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (8)$$

where $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ are the coordinates of the node grid G_z , $k_{i,j,k}$ is the value of the coefficient k for the corresponding node (this value is specified at each iteration step). The nodes that are placed at the conditional section are determined as follows (automatically ensuring the implementation of the "gluing" conditions (5) – (6)):

$$\begin{cases} x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} = x_{i-1,0,k} + \frac{1}{4}k_{i,0,k} \gamma ((y_{i,1,k} - y_{i,m,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1}) - (y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,m,k})); \\ y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} = y_{i-1,0,k} + \frac{1}{4}k_{i,0,k} \gamma ((x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(z_{i,1,k} - z_{i,m,k}) - (x_{i,1,k} - x_{i,m,k})(z_{i,0,k+1} - z_{i,0,k-1})); \\ z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} = z_{i-1,0,k} + \frac{1}{4}k_{i,0,k} \gamma ((x_{i,1,k} - x_{i,m,k})(y_{i,0,k+1} - y_{i,0,k-1}) - (x_{i,0,k+1} - x_{i,0,k-1})(y_{i,1,k} - y_{i,m,k})); \\ i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_{i,j,0} = x_{i,j,l+1} = x_{i-1,j,0} + \frac{1}{4}k_{i,j,0} \gamma ((y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,l}) - (y_{i,j,1} - y_{i,j,l})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0})); \\ y_{i,j,0} = y_{i,j,l+1} = y_{i-1,j,0} + \frac{1}{4}k_{i,j,0} \gamma ((x_{i,j,1} - x_{i,j,l})(z_{i,j+1,0} - z_{i,j-1,0}) - (x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(z_{i,j,1} - z_{i,j,l})); \\ z_{i,j,0} = z_{i,j,l+1} = z_{i-1,j,0} + \frac{1}{4}k_{i,j,0} \gamma ((x_{i,j+1,0} - x_{i,j-1,0})(y_{i,j,1} - y_{i,j,l}) - (x_{i,j,1} - x_{i,j,l})(y_{i,j+1,0} - y_{i,j-1,0})). \\ i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (10)$$

Equations (4) defining the boundaries of the investigated area are approximated as follows:

$$\begin{aligned} f^*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0; \quad f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0; \\ j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

The conditions of the surface orthogonality of the flow and of the equipotential surfaces on the boundaries of the investigated physical region (7) are replaced by the following difference equations [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{\partial x} (x_{1,j,k} - x_{0,j,k})^{-1} &= \frac{\partial f^*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{\partial y} (y_{1,j,k} - y_{0,j,k})^{-1} = \\ &= \frac{\partial f^*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{\partial z} (z_{1,j,k} - z_{0,j,k})^{-1}; \\ \frac{\partial f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{\partial x} (x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k})^{-1} &= \frac{\partial f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{\partial y} (y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k})^{-1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f^* (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{\partial z} (z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k})^{-1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \quad (12)$$

The quasiconformal invariant γ value is determined iteratively in the calculation process on the basis of the condition of "similarity in the small" elementary parallelepipeds of the domains G_ω and G_z^0 :

$$\gamma = \frac{k_{i,j,k}}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4(\sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2}) / \\ & / ((\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2}) \times \\ & \times (\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2}). \end{aligned} \quad (14)$$

$$k_{i,j,k} = k_{0i,j,k} + \frac{1}{2} \beta (I_{i,j,k} - I^*) \left((I_{i,j,k} - I^0) + |I_{i,j,k} - I^0| \right), \quad (15)$$

Q , Q_* and Q^* are determined by formulas

$$Q = \frac{\Delta \varphi}{\gamma} (m+1)(l+1), \quad Q_* = \sqrt{\frac{Q}{\tilde{\gamma}}}, \quad Q^* = \sqrt{Q \tilde{\gamma}},$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = & \frac{k_{i,j,k}}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k}; \\ \tilde{\gamma}_{i,j,k} = & 4(\sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2}) / \\ & / ((\sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2}). \end{aligned}$$

The numerical implementation algorithm is carried out by means of a stepwise parameterization of the quasicon-

formal invariant magnitude γ , the value of the permeability coefficient and the boundary and internal node coordinates of the region (the corresponding algorithm for the two-dimensional medium is described in detail in [6]).

Conclusions. The mathematical model of the explosion process, developed on the basis of the liquid one, is generalized to the spatial case. A number of numerical experiments were carried out on the basis of the developed algorithm that confirmed the feasibility of using the developed spatial model for solving a class of problems studying the explosion processes caused by the convex form charge (limited by a closed smooth surface). The results of distribution of the crater, pressed and unperturbed soil sections formed as a result of a charge burst, which has the form of a substantially elongated ellipsoid, in the plane $z = 0$ of the studied area coincided with the results of calculations for the corresponding plane problem solved for the region which contours coincide with the intersections of the plane $z = 0$ and the surfaces S_* and S^* .

The perspective of the research is modeling the explosion processes, caused by two or more charges, a cord (cylindrical) charge, taking into account the presence of essentially heterogeneous parts of the environment (for example, the foundations of structures), identifying the external boundary of the investigated area.

Bibliography

1. *Кравець В. Г., Коробійчук В. В., Бойко В. В.* Фізичні процеси прикладної геодинаміки вибуху: монографія. – Житомир : ЖСТУ, 2015. – 408 с.
2. *Бомба А. Я., Малаш К. М.* Моделювання процесу вибуху в анізотропному середовищі методами квазіконформних відображень // Вісник Кременчуцького національного університету. – Кременчук, 2017. – Вип. 4 (105). – С. 28 – 33.
3. *Bomba A., Malash K.* Modelling of explosive processes in anisotropic media where boundary of the influence region is identified // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Технічні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2018. – Вип. 18. – С. 5 – 17.
4. *Bomba A., Safonyk A., Malash K.* Optimization of controlled explosion processes parameters using complex analysis methods // Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Środowiska. – IAPGOŚ, 2019. – Nr. 9(1). – P. 29– 32.
5. *Булаватский В. М., Лучко И. А.* Некоторые обратные задачи импульсно-гидродинамической теории взрыва на выброс. Исследования по крайевым задачам гидродинамики и теплофизики. – Киев, 1979. – С. 53 – 64.
6. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія : монографія. – Рівне : ТЗОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.
7. *Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошчак С. В.* Методи комплексного аналізу : монографія. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.

References (transliterated)

1. *Kravets V. G., Korobychuk V. V., and Boiko V. V.* *Phyzichni protsesy prykladnoyi geodynamiky vybukhu* [Physical processes of applied geodynamics of an explosion: monograph], Zhytomyr, ZSTU Publ., 2015. 408 p.
2. *Bomba A. Ya., Malash K. M.* *Modelyuvannya protsesu vybukhu v anizotropnomu seredovyshhi metodamy kvazikonformnykh vidobrazhen'* [Modeling the explosion process in anisotropic medium by quasiconformal mappings methods]. *Visnyk Kremenchuts'kogo Natsional'nogo Universytetu* [Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University]. Kremenchuk, 2017, no. 4 (105), pp. 28–33.
3. *Bomba A., Malash K.* *Modelling of explosive processes in anisotropic media where boundary of the influence region is identified.* *Matematychna ta kompiuterna modelivannya. Ser.: Technichni nauky : zbyrnyk naukovykh prats'* [Mathematical And Computer Modeling. Ser.: Technical Sciences : collection of scientific papers]. Kamianets-Podilskii, Kamianets-Podilskii National University, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, 2018, no. 18, pp. 5–17.
4. *Bomba A., Safonyk A., Malash K.* *Optimization of controlled explosion processes parameters using complex analysis methods.* *Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Środowiska* [Information Technology, Automation, Measurements in the Economy and Environmental Protection]. IAPGOŚ, 2019, no. 9(1), pp. 29–32.
5. *Bulavatskii V. M., Luchko I. A.,* *Nekotorye obratnye zadachi impul'sno- gidrodinamicheskoy teorii vzryva na vybros* [Some inverse problems of the pulsed-hydrodynamic theory of explosion on the discharge]. *Issledovaniia po kraievym zadacham hidrodynamiky i teplofizyky* [Investigations on boundary value problems of hydrodynamics and thermophysics]. Kiev, 1979, pp. 53–64.
6. *Bomba A. Ya., Klymiuk Yu. Ye.* *Matematychna modelivannya prostorovykh syngulyarno-zburenykh protsesiv typu fil'tratsiya-konvektsiya- dyfuziia : monografiya* [Mathematical modeling of spatial singularly perturbed processes of filtration-convection-diffusion type : monograph]. Rivne, Assol' Publ., 2014. 273 p.
7. *Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Prigornitskii D. O., Yaroshchak S. V.* *Metody kompleksnogo analizu : monografiya* [Methods of complex analysis: monograph]. Rivne, NUVGP Publ., 2013. 415 p.

Received (надійшла) 05.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Малаш Катерина Миколаївна (Малаш Екатерина Николаевна, Malash Kateryna Mykolaiivna) – аспірант, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (068) 037-50-73; e-mail: katemalash@gmail.com.

Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych) – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

УДК 539.3

Р. П. МОСКАЛЕНКО, Р. Г. ПАЛЬЧИКОВ, О. О. СТРЕЛЬНИКОВА**МЕТОД ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ ВІЛЬНИХ ТА ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТЕЙ ГІДРОТУРБІН ПРИ ВЗАЄМОДІЇ З РІДИНОЮ**

Проведено аналіз коливань лопатей з урахуванням впливу приєднаних мас рідини. Вважається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух, індукований вібраціями лопатей, є безвихровим. В цих умовах швидкість рідини має потенціал, який задовольняє рівнянню Лапласа. Тиск рідини на поверхні лопаті знаходиться з рівняння Бернуллі. Для визначення потенціалу швидкостей сформульовано крайову задачу. Її розв'язок отримано шляхом використання методів теорії потенціалу. Отримано гіперсингулярне граничне інтегральне рівняння, яке розв'язано методом дискретних особливостей.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, гідропружна взаємодія, проєкційний метод, вільні та вимушені коливання.

Р. П. МОСКАЛЕНКО, Р. Г. ПАЛЬЧИКОВ, Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА**МЕТОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ ГИДРОТУРБИНЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖИДКОСТЬЮ**

Дан анализ колебаний лопастей с учетом влияния присоединенных масс жидкости. Предполагается, что жидкость является идеальной, несжимаемой, а ее движение, вызванное колебаниями лопастей, безвихревое. В этих условиях существует потенциал скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Давление жидкости находится из уравнения Бернулли. Для определения потенциала скоростей сформулирована краевая задача. Ее решение осуществляется с использованием методов теории потенциала. Получено разрешающее гиперсингулярное граничное уравнение. Его численное решение осуществлено методом дискретных особенностей.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, гидроупругое взаимодействие, проекционный метод, свободные и вынужденные колебания.

R. P. MOSKALENKO, R. G. PALCHIKOV, E. A. STRELNIKOVA**METHOD OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR PROBLEMS OF FREE AND FORCED VIBRATIONS OF TURBINE BLADES INTERACTING WITH LIQUID**

The paper presents an analysis of thin blade vibrations considering effects of liquid added masses. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one. Its flow, induced by blade vibrations, is vortex-free. In these conditions, there is the velocity potential that satisfies the Laplace equation. The liquid pressure as function of the velocity potential is derived from Bernoulli's equation. To determine the velocity potential, the boundary value problem is formulated. It is solved using the potential theory methods. For evaluating the velocity potential and liquid pressure, the hypersingular boundary integral equation is obtained. The coupled discrete singularity and projection methods are applied for its numerical solution. The application of the projection method requires numerical calculation of fourfold integrals. The inner integrals here are singular. So, for their numerical treatment, the method of discrete singularities is used. The effective numerical procedures to estimate the fourfold integrals are elaborated. The free and forced vibrations of model blades are considered.

Key words: hypersingular integral equation, liquid-structure interaction, projection method, free and forced vibrations.

Вступ. Методи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь широко застосовуються в математичних і прикладних дослідженнях: при розв'язанні крайових задач теорії тріщин, задач дифракції електромагнітних хвиль на провідних екранах, задач циркуляційного і безциркуляційного обтікання тонких профілів і поверхонь. В роботі [1] досліджено коливання кришок гідротурбін при взаємодії з рідиною, в [2, 3] вивчені вільні коливання посудин тиску, в [4] розглянуті великі амплітуди зовнішнього впливу, що призводять до появи хаотичного характеру коливань, в [5] розглянуто випадок дії сейсмічного навантаження; в [6] метод гіперсингулярних рівнянь застосовано до розрахунків власних і вимушених коливань елементів гідротурбінного обладнання при взаємодії з рідиною. Такі дослідження мають значну прикладну цінність, оскільки дають змогу надати рекомендації щодо відстроювання елементів конструкцій від небажаних резонансних частот. Відзначимо, що лопать в воді є розривом суцільності середовища, що дозволяє звести задачі дослідження гідропружних коливань пластин і оболонок до гіперсингулярних інтегральних рівнянь. В цій роботі запропоновано новий варіант числового розв'язання гіперсингулярних рівнянь в задачах вільних та вимушених коливань пластин, що моделюють лопаті гідротурбіни, при взаємодії з рідиною.

Формулювання задачі і математична модель. Моделюємо лопать тонкою пластиною, рівняння руху якої має вигляд

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P, \quad (1)$$

де P – тиск рідини на пластину; D – циліндрична жорсткість; h – товщина пластини, ρ_1 – густина матеріалу пластини; w – нормальне переміщення. Циліндричну жорсткість обчислюємо за формулою:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

© Р. П. Москаленко, Р. Г. Пальчиков, О. О. Стрельнікова, 2019

де E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Вважається, що рідина ідеальна та нестислива, а її рух є безвихровим. Рух рідини вивчається в тривимірному формулюванні методами теорії потенціалу. Передбачається, що вільні вихори не утворюються і не сходять з несучої поверхні. В таких умовах існує потенціал швидкостей $\mathbf{v}(x, y, z, t) = \text{grad } \Phi(x, y, z, t)$, що задовольняє всюди поза пластиною рівнянню Лапласа, а на лицьових поверхнях пластини S – умові непротікання:

$$(\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2)$$

де \mathbf{n} – зовнішня одинична нормаль до поверхні пластини. Для визначення тиску рідини на змочені поверхні застосуємо інтеграл Коші – Лагранжа:

$$P = -\rho_2 \left[\frac{\partial \Phi^+(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^-(x, y, z, t)}{\partial t} \right], \quad (3)$$

де ρ_2 – густина рідини.

Таким чином, треба визначити функції $w(x, y, t)$, $\Phi(x, y, z, t)$, що задовольняють рівнянню (1), рівнянню Лапласа, умовам непротікання (2), закріплення пластини й згасання збуреної швидкості рідини на нескінченності. Розглянемо задачу про малі гармонічні коливання пружної лопати в рідині. Зобразимо шукані функції у вигляді $w(x, y, t) = \exp(i\Omega t)w(x, y)$, $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\Omega t)\Psi(x, y, z)$, де Ω – частота, а w – власна форма коливань пластини в рідині. Зобразимо функцію $\Psi(x, y, z)$ як потенціал подвійного шару з невідомою густиною $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi. \quad (4)$$

Оскільки $\Psi^+ - \Psi^- = \Gamma$, то перепад тиску є пропорційним щільності потенціалу Γ . Обчислюючи нормальну похідну потенціалу подвійного шару (4) і підставляючи отриманий вираз в граничні умови (2), приходимо до гіперсингулярного граничного інтегрального рівняння

$$\mathbf{N}\Gamma = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi = i\Omega w. \quad (5)$$

Згідно з [1], зобразимо невідоме переміщення в вигляді $w = \sum_{k=1}^N c_k w_k$, де w_k є формами коливань елемента конструкції у повітрі. Нехай функції $\Gamma_k(\xi)$ є розв'язками гіперсингулярного рівняння (5) з правими частинами w_k . Позначимо $\Gamma_k(\mathbf{x}) = H(w_k)$, де H – обернений оператор до інтегрального оператора в (5), приходимо до проблеми власних значень:

$$c_j \Omega_j^2 = \Omega^2 \sum_{k=1}^N c_k [\delta_{kj} + (H(w_k) \cdot w_j)]. \quad (6)$$

Тут $P_{kj} = (H(w_k) \cdot w_j)$ є матрицею приєднаних мас рідини.

Одновимірне гіперсингулярне рівняння. Спочатку наведемо порівняння аналітичного та числового розв'язків одновимірного гіперсингулярного рівняння. Як модельну, розглянемо задачу розв'язання одновимірного рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dL = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L \quad (7)$$

з інтегралом в сенсі скінченної частини за Адамаром [7]. Для кола L маємо:

$$\mathbf{x} = (R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0); \quad \xi = (R \cos \varphi, R \sin \varphi); \quad \mathbf{n}_x = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0); \quad \mathbf{n}_\xi = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Тоді (7) набуває вигляду

$$(\mathbf{A}\Gamma)(\varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_\alpha^\beta \Gamma(\varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \varphi_0)/2} = f(\varphi_0). \quad (8)$$

В [7] доведено, що $\mathbf{A}: \cos k\varphi \mapsto -k \cos k\varphi_0$; $\mathbf{A}: \sin k\varphi \mapsto -k \sin k\varphi_0$; $k = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 1, а показано праву частину рівняння (8), визначену за формулою $f(\varphi_0) = 8 \cos(8\varphi_0) + 9 \sin(9\varphi_0)$. Аналітичний (цифра 1) і числовий (цифра 2, сірі крапки) розв'язки подані на рис. 1, б. Аналітичний розв'язок знайдено за формулою $\Gamma(\varphi) = -\cos(8\varphi) - \sin(9\varphi) + 1$. Числовий розв'язок отримано з використанням методу дискретних особливостей (140 точок колокації).

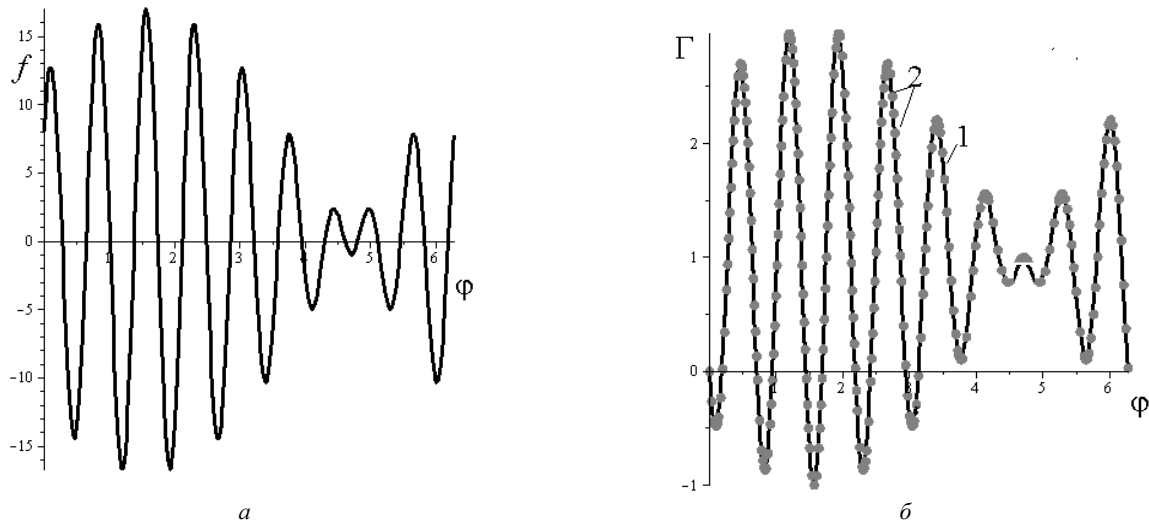


Рис. 1 – Права частина та розв'язки рівняння (8): а – права частина рівняння (8), визначена за формулою $f(\varphi_0) = 8\cos(8\varphi_0) + 9\sin(9\varphi_0)$; б – розв'язки: 1 – аналітичний, 2 – цифровий.

З аналізу поведінки правої частини рівняння (8) та його розв'язку можна висловити припущення, що оператор \mathbf{A} є подібним до одиничного. Це надало ідею побудови методу розв'язання двовимірного гіперсингулярного рівняння.

Проекційний метод розв'язання двовимірного гіперсингулярного рівняння. Зобразимо розв'язок гіперсингулярного рівняння (6) у вигляді $\Gamma_k = \sum_{l=1}^N d_k w_l$, де w_k є формами коливань пластини в вакуумі. Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, без врахування множника $i\Omega$:

$$\sum_{i=1}^{N_1} d_i^k a_{ij} = b_j^k, \quad a_{ij} = \iint_S N w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy, \quad b_j^k = \iint_S w_k(x, y) w_j(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Форми коливань прямокутної пластини мають вигляд

$$w_k(x, y) = w_{lm}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}. \quad (10)$$

Елементи матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) є чотирикратними інтегралами, що мають слабкі особливості. Елементи матриці перетворено до вигляду, зручного для чисельної реалізації [8]. Позначимо

$$\Omega_i = \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{h} = \iint_S \frac{\Omega_i}{r} dS.$$

Розглянемо елемент матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь в (9), маємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_j(x_0, y_0) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_0} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{rot}(\Gamma_j \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{grad}(\Gamma_j \times \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS. \quad (11)$$

Скористуємося рівностями $\Gamma_i \text{rot } \mathbf{h} = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{h}$, $\Gamma_i \text{grad } \Phi = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad } \Gamma_i \times \mathbf{h}$.

До першого доданку в правій частині рівності (11) застосуємо формулу Стокса. Внаслідок того, що функції $\Gamma_i(x, y)$ дорівнюють нулю на границі області, встановлюємо, що цей доданок дорівнює нулю. Другий доданок перетворимо, використовуючи формулу для подвійного векторного добутку і вираз для \mathbf{h} . Після перетворень отримаємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \iint_S \frac{(\text{grad } \Gamma_i, \text{grad } \Gamma_j)}{r} dS dS_0, \quad \Gamma_i = \Gamma_i(x, y); \quad \Gamma_j = \Gamma_j(x_0, y_0).$$

Для обчислення внутрішніх інтегралів використовуємо метод дискретних особливостей [7].

Числовий аналіз частот та форм вільних гідропружних коливань пластини. Розглянуто коливання квадратної пластини зі стороною a і товщиною h (геометричні параметри і механічні властивості взяті з роботи [9]). Вивчалися коливання в повітрі та з урахуванням приєднаних мас рідини. Визначив розв'язок рівняння (5), обчислюємо частоти Ω коливань пластини в рідині, а за коефіцієнтами c_k знаходимо власні форми коливань.

На рис. 2 зображені форми коливань (10) при $k=1(l=1, m=1)$, $k=4(l=2, m=2)$ та отримані чисельно за допомогою проекційного методу значення $\Gamma_k(x, y)$, які зображені лініями рівня.

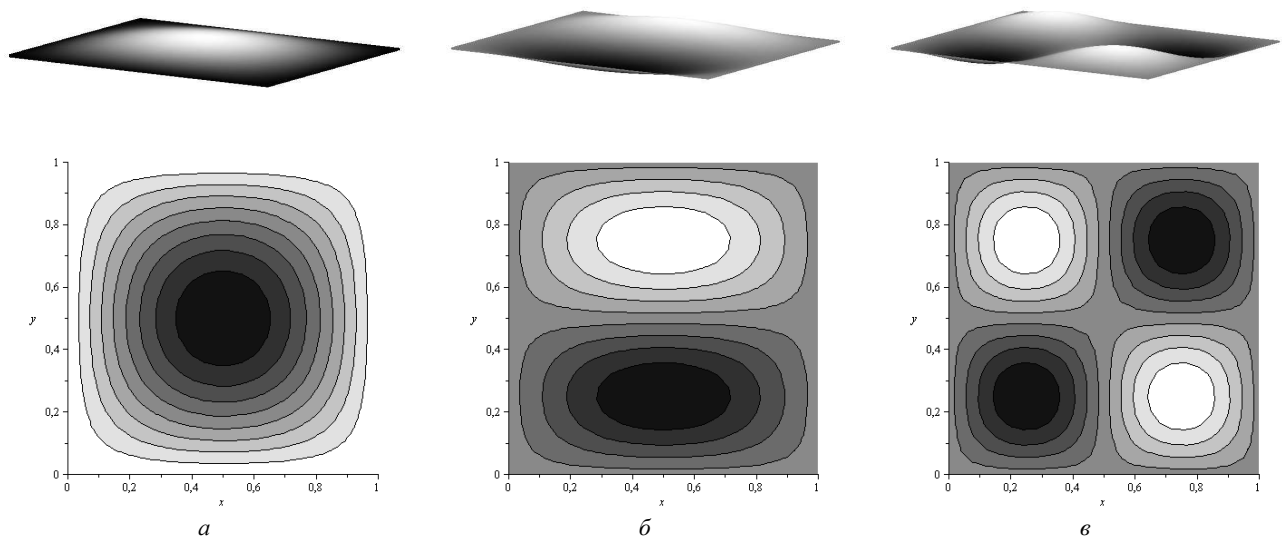


Рис. 2 – Форми коливань та щільності потенціалу: a – при $k=1(l=1, m=1)$; $б$ – при $k=4(l=2, m=2)$; $в$ – за допомогою проєкційного методу значення $\Gamma_k(x, y)$.

Бачимо схожий характер поведінки функцій $w_k(x, y)$ та $\Gamma_k(x, y)$. Надалі використовуємо отримані власні форми як базисні функції для розв'язання задач про вимушені коливання тонких пластин з урахуванням приєднаних мас рідини.

У табл. 1 наведені значення частот коливань цієї пластин в повітрі і в воді і проведено порівняння з теоретичними і експериментальними даними з роботи [9].

Таблиця 1 – Безрозмірний частотний параметр для квадратної пластинки

n	в повітрі			з урахуванням приєднаних мас рідини		
	експеримент [9]	теорія [9]	МСЭ [10]	експеримент [9]	теорія [9]	МДО
1	3.43	3.49	3.49	1.475	1.59	1.434
2	8.32	8.55	8.547	4.500	4.70	4.241
3	20.55	21.36	21.33	10.05	10.7	10.00

Безрозмірний частотний параметр обчислюється за формулою:

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D}}.$$

Отримані результати свідчать, що метод дискретних особливостей може бути успішно застосований для дослідження вільних гідропружних коливаннях лопатей.

Числовий аналіз вимушених коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини. Розглянуто квадратну сталеву пластинку з розмірами $a=0.3$ м, $h=0.003$ м, та з механічними характеристиками: $E=2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu=0.3$, $\rho_1=7800$ кг/м³. При цьому отримуємо такі власні значення частот коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i \sqrt{D}}{2\pi a^2 \sqrt{\rho_1 h}}, \quad i=1, 2, 3,$$

а саме: $\omega_1=12.3$ Гц, $\omega_2=36.90$ Гц, $\omega_3=86.97$ Гц. Як доведено в [2, 3], за відомими власними частотами та формами коливань можна побудувати систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для дослідження вимушених коливань. Припустимо, що пластинка, що занурена в рідину, знаходиться під дією вертикального гармонічного збудження [1, 3]:

$$Z(t) = b_0 \cos \omega t.$$

Вважаємо, що форми власних коливань пластинки, обчислені з урахуванням приєднаних мас рідини, утворюють базисну систему для дослідження вимушених коливань [1, 10]. В [2, 6] доведено, що вказані власні форми $\{W_k\}_{k=1}^M$ є ортогональними. Тоді, враховуючи розкладення переміщень пластинки за цими базисними функ-

ціями, маємо таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^M [\ddot{d}_k(t) + \omega_k^2 d_k(t)] W_k(x, y) = b_0 \cos \omega t. \quad (12)$$

Після виконання операції скалярного добутку на функції $W_j(x, y)$ співвідношення (11) перетворюється на систему диференціальних рівнянь, розв'язок якої отримано за допомогою методу Рунге – Кутта 4–5 порядку при $b_0 = 0.1$ за такими початковими умовами:

$$d_1(0) = d_2(0) = d_3(0) = 0, \quad \dot{d}_1(0) = \dot{d}_2(0) = \dot{d}_3(0) = 0.02.$$

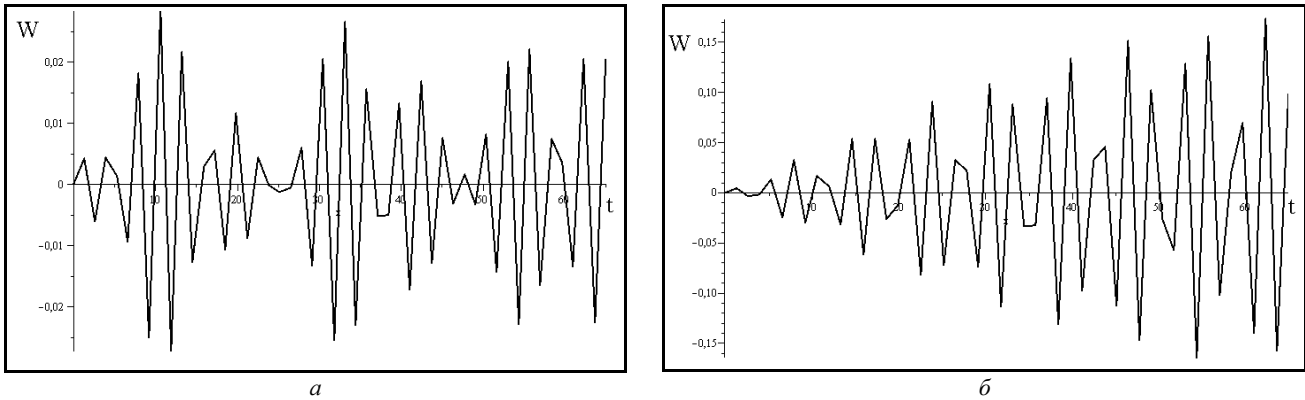


Рис. 3 – Амплітуди коливань пластинки за умови вертикального збудження: а – $\omega = 12$ Гц; б – $\omega = 12.4$ Гц.

На рис. 3, а та рис. 3, б зображені амплітуди коливань пластинки при частотах збудження, рівних $\omega = 12$ Гц та $\omega = 12.4$ Гц відповідно, протягом 65 секунд. Частота $\omega = 12.4$ Гц є близькою до частоти власних коливань $\omega = 12.44$ Гц, при цьому спостерігається зростання амплітуди коливань.

Перспективи подальших досліджень. У подальшому передбачається узагальнити запропонований метод розрахунку власних та вимушених коливань для дослідження частот та форм коливань лопатей робочих коліс поворотно-лопатевих та радіально-осьових гідротурбін з урахуванням приєднаних мас рідини.

Висновки. В роботі запропоновано метод розв'язання задач щодо власних та вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням приєднаних мас рідини. Задачу визначення тиску, що діє на елемент конструкції, зведено до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок цього рівняння здійснено проєкційним методом. Отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів в розкладі невідомої густини потенціалу подвійного шару. Для знаходження елементів матриці проєкційного методу використано метод дискретних особливостей.

Список літератури

1. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers // Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). – 2015. – Vol. 1. – No 1. – P. 45 – 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
2. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2010. – Vol. 50. – P. 203 – 211.
3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – 2018. – Vol. 6(6). – P. 976 – 988.
4. Веремейко И. С., Кантор Б. Я., Науменко В. В. Расчет гидроупругих колебаний рабочих колес радиально-осевых гидротурбин // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – Т. 12. – № 9. – С. 58 – 68.
5. Avramov K. V., Strelnikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow // Nonlinear Dynamics. – 2012. – No. 70. – P. 1335 – 1354.
6. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load // Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2011. – Vol. 52. – P. 285 – 296.
7. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков : Изд. Харьк. национального ун-та им. В. Н. Каразина, 2000. – 92 с.
8. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе // Доп. НАН України. – 2001. – №3. – С. 27 – 31.
9. Muthuveerappan G., Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water // Journal of Sound and Vibration. – 1978. – Vol. 61. – Issue 3. – P. 467 – 470.
10. Гачин Е. В., Ржевская И. Е., Стрельникова Е. А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью // Вісник Харківського національного університету. – 2009. – № 847. – С. 79 – 86.

References (transliterated)

1. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015, vol. 1, no. 1, pp. 45–50, DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
2. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of*

- XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010, vol. 50, pp. 203–211.
3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018, vol. 6(6), pp. 976–988.
 4. Veremeenko I. S., Kantor B. Ya., Naumenko V. V. Raschet gidrouprugikh kolebaniy rabochikh radial'no-osevykh gidroturbin [Computation of hydroelastic vibrations of radial-axial turbine impeller]. *Vestnik NTU "KhPI"* [Bulletin of NTU "KhPI"]. 2002, vol. 12, no. 9, pp. 58–68.
 5. Avramov K. V., Strelnikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012, no. 70, pp. 1335–1354.
 6. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011, vol. 52, pp. 285–296.
 7. Gandel' Yu. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the computational methods of singular and hypersingular integrals]. Kharkov, Izd. Hark. natsional'nogo un-ta im. V. N. Karazina, 2000. 92 p.
 8. Strel'nikova E. A. Gipersingulyarnye integral'nye uravneniya v dvumernykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya Laplasy i uravneniy Lamе [Hypersingular integral equations in the two dimensional boundary value problems for the Laplace and Lamе equations]. *Dop. NAN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2001, no. 3, pp. 27–31.
 9. Muthuveerappan G., Ganesan N., Veluswami M. A. Vibration of square cantilever plate immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*. 1978, vol. 61, issue 3, pp. 467–470.
 10. Ganchin E. V., Rzhetskaya I. E., Strel'nikova E. A. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik lopastey rabochikh koles povorotno-lopastnykh gidroturbin pri vzaimodeystvii s zhidkostyu [Study of dynamical characteristics of Kaplan turbine impeller blades interacting with liquid]. *Visnik Kharkivskogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of the Kharkiv National University]. 2009, no. 847, pp. 79–86.

Надійшла (received) 23.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Москаленко Роман Павлович (Москаленко Роман Павлович, Moskalenko Roman Pavlovich) – аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 598-76-82; e-mail: rimancamomile@gmail.com.

Пальчиков Роман Георгиевич (Пальчиков Роман Георгиевич, Palchikov Roman Georgievich) – аспірант, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com.

Стрельникова Олена Олександрівна (Стрельникова Елена Александровна, Strelnikova Elena Alexandrovna) – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного, м. Харків; тел.: (050) 519-31-05; e-mail: elena15@gmx.com.

УДК 519.6

А. О. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК**МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ПЕРЕШКОД МЕТОДОМ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА ПРИ ВЕЛИКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

Розглядається застосування кінетичного підходу до моделювання динаміки в'язкої рідини. Запропоновано метод регуляризації для отримання стійких та фізичних розв'язків при великих числах Рейнольдса до 20000. В основі методу регуляризації закладена медіана фільтрація, що ефективно згладжує аномальні пульсації. Верифікація методу проведена на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра. Проведені чисельні експерименти із моделювання течії довкола профілю Nasa 0012 під різними кутами атаки.

Ключові слова: в'язка рідина, рівняння Больцмана, регуляризація, круговий циліндр, профіль Nasa 0012.

А. А. ОСТАПЕНКО, Г. Г. БУЛАНЧУК**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЙ ПРЕПЯТСТВИЙ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

Рассматривается применение кинетического подхода к моделированию динамики вязкой жидкости. Предложен метод регуляризации для получения устойчивых и физических решений при больших числах Рейнольдса до 20000. В основе метода регуляризации заложена медиана фильтрация, которая эффективно сглаживает аномальные пульсации. Верификация метода проведена на классической тестовой задаче обтекании кругового цилиндра. Проведены численные эксперименты по моделированию течения около профиля Nasa 0012 под разными углами атаки.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Больцмана, регуляризация, круговой цилиндр, профиль Nasa 0012.

А. А. OSTAPENKO, G. G. BULANCHUK**SIMULATION OF THE FLOW OVER OBSTACLES WITH THE LATTICE BOLTZMANN METHOD AT LARGE REYNOLDS NUMBERS**

The application of the kinetic approach for the viscous fluid flow modeling is considered. A regularization method is proposed for obtaining stable and physical numerical solutions at large Reynolds numbers up to 20,000. The basis of the regularization method is the median filtration that effectively smoothes abnormal ripples and, at the same time, preserves the boundaries of sharp transitions and the structure of the flow. The verification of the method was carried out on the classical test task of the flow around circular cylinder at the Reynolds numbers from 500 to 20000. Numerous experiments were conducted to simulate the flow around the profile of Nasa 0012 at different angles of attack. The results of numerical solutions, namely,

© А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук, 2019

the distribution diagram of the velocity magnitude, streamlines, hydrodynamic coefficients, are presented.

Key words: viscous flow, Boltzmann equation, regularization, circular cylinder, Nasa 0012 profile.

Вступ. Метод ґраткових рівнянь Больцмана або LBM (від. англ. Lattice Boltzmann Method) – метод обчислювальної гідродинаміки, розроблений італійськими вченими G. R. McNamara, F. Higuera та S. Succi у 90-х роках, як розвиток клітинно-автоматної гідродинаміки [1, 2]. Ідея методу аналогічна ідеї методу крупних частинок, розробленого Білоцерковським та Давидовим у 1965 році [3]. Обчислювальна область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, комірки якої трактуються як крупні частинки. Однак за методом LBM динаміка таких частинок описується не рівняннями Ейлера або Нав'є – Стокса, а кінетичним рівнянням Больцмана. Характеристики крупних частинок є усередненими характеристиками всієї сукупності мікроскопічних частинок в цій комірці і описуються статистично за допомогою функції розподілу частинок за координатами та швидкостями.

Аналіз останніх досліджень. Останнім часом метод ґраткових рівнянь Больцмана набуває значного поширення, особливо серед європейських вчених. На сьогодні область застосування методу вже включає моделювання багатофазних і багатокомпонентних течій, мікротечій, течій із вільними границями, течій у пористих середовищах, моделювання теплопереносу [4 – 6]. Однак, незважаючи на зростаючу популярність, ще існують такі проблеми як:

- значний час розрахунків, що істотно збільшується зі зростанням числа Рейнольдса [7];
- умовна стійкість чисельної схеми [8].

Ці проблеми ускладнюють отримання чисельних розв'язків для течій із помірними числами Рейнольдса $Re \sim 10^2$ та унеможливають моделювання при великих числах $Re > 10^3$. Для їх часткового усунення при малих числах Рейнольдса ($Re \sim 10$) використовують, наприклад, схеми із декількома параметрами релаксації в інтегралі зіткнень частинок або неявні схеми [9]. Проте ці проблеми до кінця не розв'язані і визначають актуальність теми статті, а також її наукове і практичне значення.

Постановка задачі. Постановка задачі для моделювання течій в'язкої ізотермічної нестисливої рідини за відсутності зовнішніх сил складається із рівняння руху Нав'є – Стокса, рівняння нерозривності, відповідних початкових та граничних умов:

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{r}, t) + \nu \Delta \vec{u}(\vec{r}, t); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0; \quad (2)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \Big|_{t=t_0} = \vec{u}(\vec{r}, t_0); \quad (3)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in L} = 0; \quad (4)$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \Big|_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} = \vec{u}_\infty, \quad (5)$$

де \vec{u} – вектор швидкості рідини; \vec{r} – радіус-вектор точки простору; ρ – густина; p – тиск; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; t_0 – початковий момент часу; L – контур обтічного тіла.

Рівняння (1) та (2), початкові та граничні умови (3) – (5) описують динаміку рідини на макроскопічному рівні абстракції. Розкривається сутність мезоскопічного рівня абстракції в описі рідини [8, 10]. Суцільне середовище розбивається на деякі малі області, що складаються з великої кількості частинок. Кожна така мала область розглядається як крупна частинка, характеристики якої відповідають усередненим характеристикам усієї сукупності. Такі великі частинки описуються статистично за допомогою апарату кінетичної теорії газів через функцію розподілу частинок за координатами і швидкостями $f(\vec{r}, \vec{u}, t)$, що є розв'язком рівняння Больцмана [11]. Тому на мезоскопічному рівні абстракції динаміка рідини моделюється кінетичним рівнянням Больцмана таким чином, щоб на макроскопічному рівні виконувалися рівняння (1) – (5) [8, 10, 11].

Математична та чисельна модель. Математична модель складається із рівняння Больцмана (6), у якому інтеграл зіткнення частинок замінюється наближенням Бхатнагара – Гросса – Крука (7), що будується за законами збереження маси, імпульсу та енергії [10 – 13]:

$$\partial_t f + \vec{v} \partial_x f + \frac{\vec{F}}{m} \partial_v f = \int |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) d\sigma d\vec{v}_2; \quad (6)$$

$$I_{coll} = \int |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) d\sigma d\vec{v}_2 \approx \frac{f^{eq} - f}{\tau}. \quad (7)$$

Чисельна модель – система ґраткових рівнянь (8), отримується шляхом дискретизації математичної моделі (6) – (7) із урахуванням відсутності зовнішніх сил $\vec{F} \equiv 0$:

$$\underbrace{f_k(\vec{r} + \vec{V}_k \Delta t, t + \Delta t)}_{\text{переміщення}} = \underbrace{f_k(\vec{r}, t) - \frac{1}{\tau} [f_k(\vec{r}, t) - f_k^{eq}(\vec{r}, t)]}_{\text{зіткнення}}; \quad (8)$$

де $f_k(\vec{r}, t)$ – дискретна функція розподілу частинок за швидкостями; \vec{V}_k – дискретний набір швидкостей частинок; Δt – крок за часом; τ – безрозмірний параметр релаксації; $f_k^{eq}(\vec{r}, t)$ – дискретне наближення локальної рівноважної функції розподілу Максвелла – Больцмана.

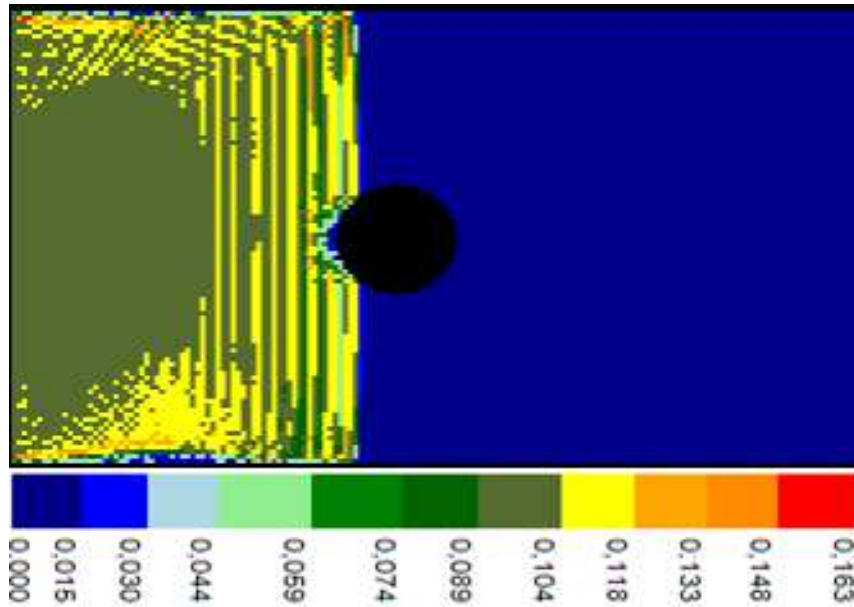


Рис. 1 – Пульсації у полі швидкостей ($Re = 1000$).

Обґрунтування того, що метод ґраткових рівнянь Больцмана може застосовуватись для моделювання в'язких течій викладено в роботі [14]. Показано, що в ході розкладу рівнянь (8) за методом Чепмена – Енського можна отримати рівняння Нав'є – Стокса та рівняння нерозривності для нестисливої ізотермічної рідини (9) та формули, що пов'язують макроскопічні та ґраткові параметри (10) – (13).

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} + o(\Delta t) + o(M_p^2); \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 + o(\Delta t) + o(M_p). \quad (9)$$

Кінематична в'язкість рідини:

$$\nu = c_s^2 \Delta t (\tau - 0,5). \quad (10)$$

Швидкість звуку в комірни:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (11)$$

ґраткова швидкість частинок:

$$c = \frac{d}{\Delta t}, \quad (12)$$

де d – розмір комірки розрахункової області.

ґраткове число Маха:

$$M_p = \frac{U_{\max}}{c_s}, \quad (13)$$

де U_{\max} – максимальна швидкість рідини в області.

Стійкість чисельної схеми методу LBM досліджувалась аналітично в роботах [10, 14, 15]. В цих роботах доведено, що метод є умовно стійким за параметром релаксації та значеннями швидкості, та збігається до рівнянь Нав'є – Стокса та нерозривності при малих величинах кроку по часу та ґраткового числа Маха (13). Нестійкість чисельного розв'язку може бути викликана одним із факторів:

- збільшення ґраткового числа Маха. Кінетичне рівняння Больцмана апроксимує рівняння Нав'є – Стокса тільки за малими числами Маха $M_p < 0,3$;

- зменшення параметра релаксації. «Безпечним» значенням (за *S. Succi*) є $\tau = 1$. Зменшення τ викликає нестійкість: частинки скупчуються у деяких комірках, що приводить до виникнення пульсацій у полі швидкостей (рис. 1);

- збільшення швидкості. Чисельна модель передбачає моделювання течій лише за малими швидкостями $U_{\max} < c_s$;

• зростання числа Рейнольдса. Із збільшенням числа Рейнольдса $Re > 10^3$ течії стають турбулентними (згідно досліджень *Г. Шліхтинга, Л. Г. Лойцянского*).

Макроскопічні параметри рідини: густина, швидкість та тиск визначаються як моменти функції розподілу відповідно до формул [8, 10, 12]:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{k=0}^8 f_k(\vec{r}, t); \quad \vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \sum_{k=0}^8 \vec{V}_k f_k(\vec{r}, t); \quad p(\vec{r}, t) = c_s^2 \rho(\vec{r}, t). \quad (14)$$



Рис. 2 – Згладжування розв'язку.

Аналогічно методу частинок у *комірках Харлоу* та методу крупних частинок Білоцерковського та Давидова, система граткових рівнянь Больцмана розщеплюється за *методом Яненко* – розщеплення за фізичними процесами [4]. Таким чином, один крок по часу розкладається на три етапи:

1 Етап. Переміщення частинок за рахунок переносу значень функції розподілу частинок у відповідних до вибраної моделі напрямках. В роботі використовується двовимірна дев'ятишвидкісна модель (D2Q9).

2 Етап. Отримання нових значень функції розподілу в результаті зіткнення частинок.

3 Етап. Перехід від мезоскопічного опису рідини через функцію розподілу частинок до макроскопічних параметрів, таких як густина, швидкість та тиск.

Для розв'язку задач із великими числами Рейнольдса запропоновано метод регуляризації чисельного розв'язку. Методи регуляризації застосовуються при виникненні пульсацій різного походження при розв'язку рівнянь переносу, теплопровідності, рівняння Больцмана для моделювання газової динаміки та плазми.

Для моделювання течії в'язкої рідини була використана схема за аналогом *згладження А. Л. Чудова* [17]. Метод заснований на корекції значення функції в точці простору відповідно до сусідніх значень. В основі такої корекції лежить медіанна фільтрація:

$$u_x(i, j) = \text{med}(u_x(i, j-2), u_x(i, j-1), u_x(i, j), u_x(i, j+1), u_x(i, j+2)). \quad (15)$$

Особливістю медіанного фільтра є нелінійність: після згладження зберігаються різкі границі областей розв'язку, і в той же час ефективно пригнічуються некорельовані або слабкорельовані перешкоди, зменшуються аномальні викиди та згладжуються пульсації (рис. 2). Після згладження поля швидкостей, функції розподілу частинок перераховуються за локальною рівноважною функцією *розподілу Максвелла – Больцмана*.

Результати моделювання. Схема згладжування протестована на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра в діапазоні чисел Рейнольдса $500 < Re < 20000$. Порівняння діаграм швидкостей для $Re = 500$ у момент часу $t = 2,5$ показано на рис. 3.

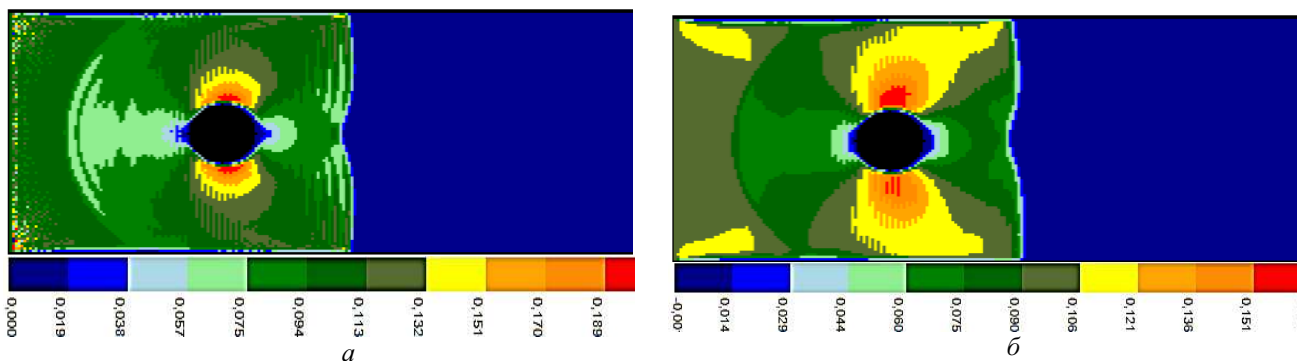


Рис. 3 – Порівняння діаграм модуля швидкості: а – без згладження; б – із згладженням.

На рис. 3, а видно початок збурень – подальший чисельний розв'язок розбігається. Стійкий розв'язок із згладженням (рис. 4, а) порівнюється із розв'язком, що був отриманий методом скінченних елементів (рис. 4, б).

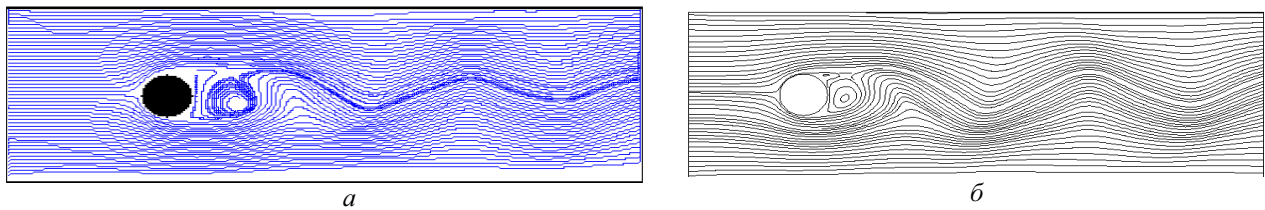


Рис. 4 – Порівняння ліній течії при $Re = 500$, $t = 50$: *a* – метод LBM зі згладженням; *б* – метод FEM.

Аналогічні порівняння проведено для інших чисел Рейнольдса з діапазону $500 < Re < 20000$ (рис. 5).

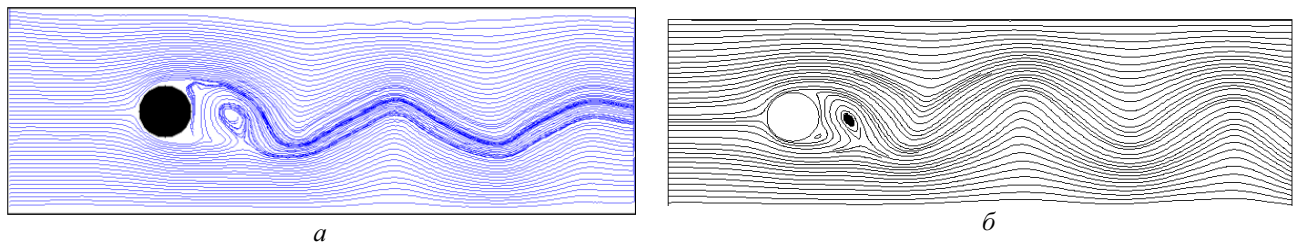


Рис. 5 – Порівняння ліній течії при $Re = 20000$, $t = 50$: *a* – метод LBM зі згладженням; *б* – метод FEM.

В роботі отримані чисельні розв'язки задачі про обтікання кругового циліндра із застосуванням запропонованого методу регуляризації. Проведено порівняння результатів моделювання, що були отримані методом ґраткових рівнянь Больцмана зі згладженням та методом скінченних елементів, а саме: діаграм модуля швидкості, ліній течії, коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили (рис. 6) порівнювалися із результатами інших відомих чисельних експериментів. Порівняння розв'язків показало добру відповідність результатів моделювання у діапазоні чисел Рейнольдса $500 < Re < 20000$.

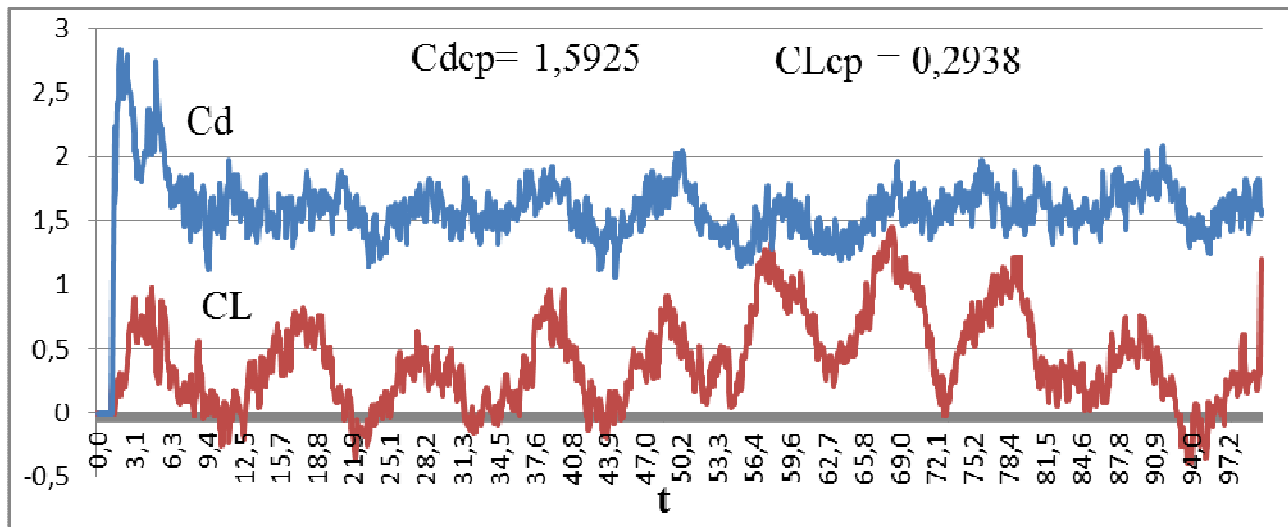


Рис. 6 – Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили з часом, а також їх середні значення при $Re = 20000$.

Проведено моделювання обтікання профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки течією в'язкої рідини із числом Рейнольдса $Re = 1000$. Досліджувався вплив кута атаки на динаміку течії, на значення коефіцієнтів лобового опору і підйомної сили крила (рис. 7).

Проведені чисельні експерименти свідчать про зростання гідродинамічних коефіцієнтів та утворення вихорів за профілем при збільшенні кута атаки. Чисельні розв'язки поставленої задачі із кутами атаки більше $\alpha > 30^\circ$ є нестійкими і потребують подальшого вивчення.

Перспективи подальших досліджень. Однією із переваг методу ґраткових рівнянь Больцмана є можливість застосувати до алгоритму технології паралельних обчислень. В роботі вже була використана технологія OpenMP для розпаралелювання обчислень на центральному процесорі. Подальшого вивчення потребує застосування технології CUDA, що потенційно може збільшити швидкість розрахунків від 10 до 100 разів.

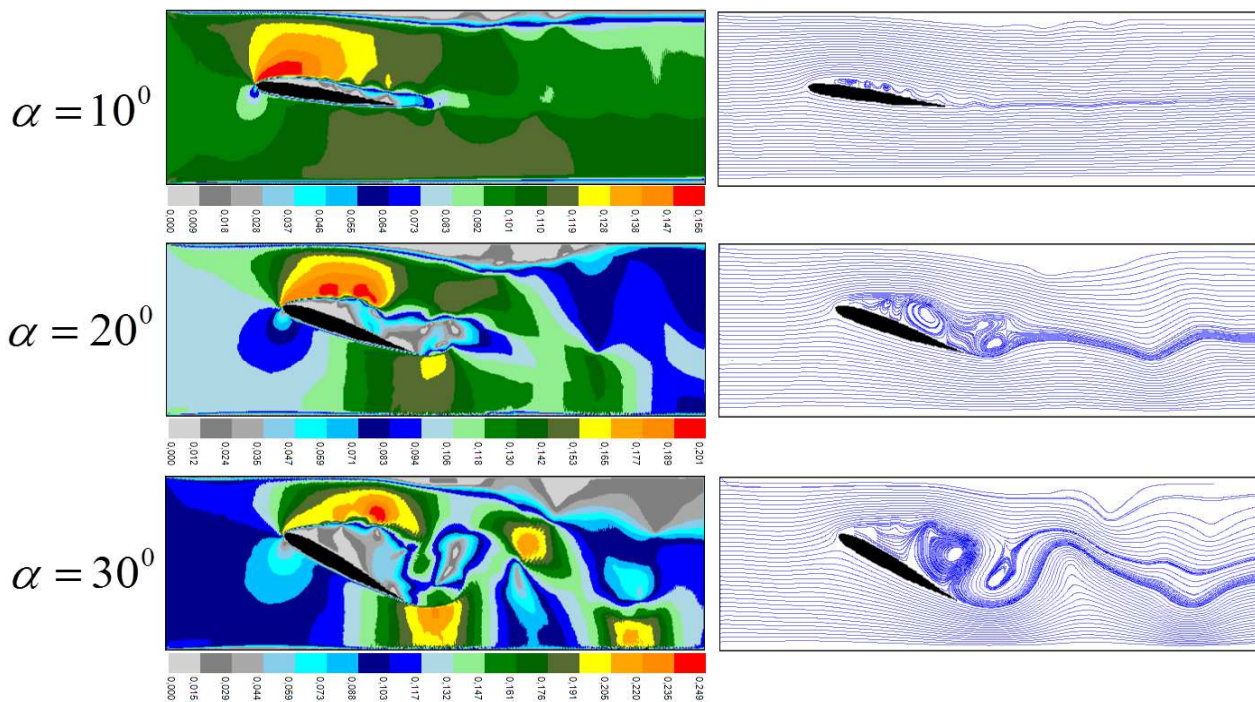


Рис. 7 – Зміна характеру течії за умови збільшення кута α атаки профілю Nasa 0012.

Висновки. В роботі розглянуті можливості методу ґраткових рівнянь Больцмана для моделювання течій в'язкої рідини. Запропонований та протестований метод регуляризації чисельних розв'язків для отримання стійких та фізичних результатів при великих числах Рейнольдса до 20000. В основу метода закладена медіана фільтрація, що ефективно згладжує аномальні пульсації i , при цьому, залишає без змін структуру течії. Тестування методу проводилося на класичній задачі про обтікання кругового циліндра і показало добру відповідність результатів моделювання із результатами, що були отримані методом скінченних елементів у пакеті Comsol Multiphysics. Досліджена течія в'язкої рідини довкола профілю Nasa 0012 під різними кутами атаки. Показано утворення вихорів за крилом із зростанням кута атаки.

Список літератури

1. Succi S., Benzi R., Higuera F. The lattice Boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics // *Physica D*. – 1991. – 47 – P. 219 – 230.
2. Menamara G. R., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // *Rev. Letter*. – 1988. – Vol. 61. – P. 23 – 32.
3. Белоцерковский О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 392 с.
4. Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A. Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2014. – Vol. 67. – № 2. – P. 331 – 339.
6. Couranec E. Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls. – Trondheim : Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. – 39 p.
7. Grazyna K. The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method // *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*. – 2006. – № 11. – P. 23 – 30.
8. Куперштох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – № 13. – С. 130 – 138.
9. Sucop M. Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers. – Miami : Springer, 2006. – 171 p.
10. Rettinger C. Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times. – Erlanger : Friedrich-Alexander University of Erlanger-Nurnberg, 2013. – 38 p.
11. Wolf-Gladrow D. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction. – Bremerhaven : Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. – 273 p.
12. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. – Oxford University Press, 2001. – 288 p.
13. Лятин И. И. Введение в теорию кинетических уравнений: Учебное пособие. – Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2003. – 205 с.
14. Mussa M. Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method // *Applied Mathematics*. – 2008. – Vol. 13. – P. 236 – 240.
15. He X. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation // *Journal of statistical physics*. – 1997. – Vol. 88. – P. 927 – 944.
16. Skordos P. Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method // *Physical review E*. – 1993. – 48(6). – P. 4823 – 4842.
17. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло и массообмена. – М. : Наука, 1984. – 288 с.

References (transliterated)

1. Succi S., Benzi R., Higuera F. The lattice Boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics. *Physica D*. 1991, no. 47, pp. 219–230.
2. Menamara G. R., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Rev. Letter*. 1988, vol. 61, pp. 23–32.

3. Belocerkovskiy O. M. *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Large particles method in gas dynamics]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1982. 392 p.
4. Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A. Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model. *Computers and Mathematics with Applications*. 2014, vol. 67, no. 2, pp. 331–339.
6. Coupance E. *Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls*. – Trondheim, Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. 39 p.
7. Grazyna K. The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method. *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*. 2006, no. 11, pp. 23–30.
8. Kupershtokh A. L. Triokhmernoie modelirovanie dvukhphaznykh system tipa zhudkost'-par metodom reshotochnykh uravneniy Boltz'mana na GPU [Three dimensional modeling of the two phase fluid-steam systems with the lattice Boltzmann method on GPU]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Numerical methods and programming]. 2012, no. 13, pp. 130–138.
9. Sucop M. *Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Miami, Springer, 2006. 171 p.
10. Rettinger C. *Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times*. Erlanger : Friedrich-Alexander-University of Erlanger-Nurnberg, 2013. 38 p.
11. Wolf-Gladrow D. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction*. Bremerhaven, Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. 273 p.
12. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001. 288 p.
13. Liapin I. I. *Vvedenie v teoriyu kineticheskikh uravneniy* [Introduction to the theory of kinetic equations]. Ekaterinburg, UGTU-UI Publ., 2003. 205 p.
14. Mussa M. Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method. *Applied Mathematics*. 2008, vol. 13, pp. 236–240.
15. He X. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation. *Journal of statistical physics*. 1997, vol. 88, pp. 927–944.
16. Skordos P. Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physical review E*. 1993, no. 48(6), pp. 4823–4842.
17. Paskonov B. M., Poleszhaev V. I., Chudov L. A. *Chislennoie modelirovanie protsesov teplo i masoobmena* [Numerical modeling of the heat and mass transfer processes]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 288 p.

Надійшла (received) 18.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Остапенко Артем Олексійович (Остапенко Артём Алексеевич, Ostapenko Artem Alekseevich) – асистент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 176-98-24; e-mail: ostapt5@gmail.com.

Буланчук Галина Григорівна (Буланчук Галина Григорьевна, Bulanchuk Galina Grigorievna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 201-83-08; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

УДК 519.6, 539.3

Б. Е. ПАНЧЕНКО

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА И С НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ИНДЕКСОМ С УЧЕТОМ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ СЛАУ

Путем сведения к двум разным типам систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) численно исследуется краевая задача математической физики для бесконечной упругой изотропной области, содержащей неподвижное включение с поперечным сечением произвольной формы, находящееся под воздействием плоских гармонических стационарных волн. Задача решается с использованием систем СИУ 1-го и 2-го рода (но с неопределяемым индексом). С использованием кластерных высокоточных вычислительных схем исследуется зависимость числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от волнового числа. Наряду с исследовательскими задачами, разработанные методы и алгоритмы могут использоваться для подготовки специалистов в области «дата майнинга».

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, индекс уравнения, число обусловленности СЛАУ, численный эксперимент, дифракция плоских волн, неподвижное включение (защемленное отверстие).

Б. Є. ПАНЧЕНКО

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ ТА З НЕВИЗНАЧАЄМИМ ІНДЕКСОМ З УРАХІВАННЯМ ЧИСЛА ОБУМОВЛЕНОСТІ СЛАУ

Шляхом зведення до двох різних типів систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) проведено чисельне дослідження крайової задачі математичної фізики для нескінченного пружного ізотропного середовища, що містить нерухоме включення з поперечним перерізом довільної форми, яке знаходиться під впливом плоских гармонічних стаціонарних хвиль. Задачу розв'язано з використанням систем СІР 1-го та 2-го роду (але з невизначасим індексом). Завдяки кластерним високоточним обчисленням досліджено залежність числа обумовленості СЛАУ від хвильового числа. Окрім дослідницьких задач, розроблені методи і алгоритми можуть використовуватися для підготовки фахівців в галузі «дата майнінга».

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, індекс рівняння, число обумовленості СЛАУ, чисельний експеримент, дифракція плоских хвиль, нерухоме включення (затиснений отвір).

© Б. Е. Панченко, 2019

B. E. PANCHENKO

ON THE NUMERICAL INVESTIGATION OF SYSTEMS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND AND WITH AN INDEFINABLE INDEX WITH REGARD TO THE SLAE CONDITION NUMBER

The numerical investigation of boundary-value problems of mathematical physics for an elastic isotropic medium that contains a rigid inclusion with an arbitrary contour and under the influence of plane harmonic stationary waves is carried out by reducing systems of singular integral equations (SIE) to two different types. The problem is solved by using systems of SIE of the 1st and 2nd kind (with an indefinable index). Cluster high-precision computational schemes are used to investigate the dependence of the condition number of a system of linear algebraic equations (SLAE) on the wavenumber. Alongside the research problems, the developed methods and algorithms can be used for training qualified professionals in the field of «data mining».

Key words: singular integral equations, equation index, SLAE condition number, numerical experiment, diffraction of plane waves, rigid inclusion (clamped cavity).

Введение. Современное состояние вычислительной техники позволяет проводить высокоточную верификацию математических моделей. Например, при решении краевых задач математической физики [1 – 8] или иных технологических проблем [9] синтезируются модели, позволяющие с той или иной степенью точности численно исследовать необходимые характеристики. Применение аналитико-численных решений, таких, как метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ), многократно использованный разными авторами [10 – 12], позволяет прогнозировать устойчивый результат. Тем не менее, решение каждой конкретной краевой задачи требует всестороннего численного исследования полученных характеристик и особенно – показателей самой модели, ее обусловленности и устойчивости [13, 14]. Могут возникать ситуации, когда получаемые системы СИУ не обладают приемлемыми свойствами [15]. Например, СИУ 1-го рода или даже с неопределяемым индексом [12], которые изучены мало.

Постановка задачи. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси OZ неподвижный цилиндр [15, 16], поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. В качестве внешнего воздействия на неоднородность будем рассматривать набегающую из бесконечности монохроматическую волну расширения – сжатия (P – случай):

$$U_0 = 0; V_0 = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\gamma_1 y - i\omega t}\}; \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}; c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1)$$

или волну сдвига (SV – случай):

$$U_0 = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\gamma_2 y - i\omega t}\}; V_0 = 0; \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}; c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь τ – амплитуда падающей волны, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн, ω – частота колебаний, t – время, λ и μ – постоянные Ляме, ρ – плотность среды, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

При взаимодействии волны с неоднородностью возникают отраженные волны двух типов (продольные и поперечные), причем другие типы волн не образуются. Пусть $u = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\omega t} U_1(x, y)\}$ и $v = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\omega t} V_1(x, y)\}$ – смещения отраженного поля. Тогда общее поле амплитуд перемещений соответствует сумме:

$$U = U_0 + U_1, \quad V = V_0 + V_1. \quad (3)$$

Предполагается, что поперечное сечение отражателя описывается гладкой замкнутой кривой L , в точках которой удовлетворяются граничные условия. В случае неподвижного включения (отверстия с защемленным контуром) они имеют вид [2, 3]:

$$U|_L = V|_L = 0. \quad (4)$$

В случае установившихся волновых колебаний изотропной среды (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$) амплитудные значения отраженных волн перемещений удовлетворяют соотношениям:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U = 0; \quad \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V = 0. \quad (5)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений U и V формулами:

$$\tau_x + \tau_y = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right); \quad \tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy} = -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z};$$

$$\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy} = -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \quad (6)$$

Следуя методике решения краевых задач, впервые примененной для описанной постановки в [17], построим систему СИУ 1-го рода. Пусть L – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy})e^{-i\varphi_0}; \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{-i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy})e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью OX .

На границе тела представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений τ_{s_0} , τ_{n_0} , $\tau_{n_0s_0}$, которые будем находить по формулам:

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0; \quad \tau_{n_0s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0; \quad \tau_{s_0} = (\tau_x + \tau_y) - \tau_{n_0}. \quad (8)$$

Будем строить интегральные представления амплитуд перемещений U_1 и V_1 так, чтобы они автоматически удовлетворяли уравнениям движения (5) и условиям излучения на бесконечности, то есть, чтобы они представляли собой расходящиеся волны. Следуя [17], представим U_1 и V_1 в виде потенциалов типа простого слоя:

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \int_L \{f_1(s)G_{11}(s, s_0) + f_2G_{12}(s, s_0)\} ds; \quad V_1(x, y) = \int_L \{f_1(s)G_{21}(s, s_0) + f_2G_{22}(s, s_0)\} ds; \\ z &= x + iy; \quad \zeta = \xi + i\eta \in L. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $f_1(s)$ и $f_2(s)$ – неизвестные функции, G_{mn} – компоненты матрицы Грина ($m, n = 1, 2$), удовлетворяющие соотношениям [17]:

$$\begin{aligned} G_{11} + iG_{21} &= d \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right); \quad G_{11} - iG_{21} = \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}; \\ G_{12} + iG_{22} &= \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}; \quad G_{12} - iG_{22} = d \left(\frac{k}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}; \quad k = 3 - 4\nu; \quad c = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2; \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}; \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2},$$

здесь $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода j -го порядка.

Анализ формул (10) показывает, что функции $G_{11} - iG_{21}$ и $G_{12} + iG_{22}$ непрерывны в нуле, а функции $G_{11} + iG_{21}$ и $G_{12} - iG_{22}$ обладают логарифмической особенностью:

$$G_{11} + iG_{21} = G_{12} - iG_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi} \ln r + \dots$$

По этой причине подстановка представлений (9) в граничные условия (4) сводит краевую задачу к системе двух СИУ с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна.

С целью получения системы СИУ с ядром типа Коши [10 – 12] представления (9) дифференцировались по дуговой координате s_0 . Имеем

$$\left. \frac{d(U + iV)}{ds_0} \right|_L = \left. \frac{d(U - iV)}{ds_0} \right|_L = 0; \quad \left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{-i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}; \quad \bar{z} = x - iy. \quad (11)$$

Вычисление необходимых для (11) производных дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (G_{11} + iG_{21}) &= -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{-i\alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{11} - iG_{21}) = \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{-i\alpha}; \\ \frac{\partial}{\partial z} (G_{12} + iG_{22}) &= \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{i\alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{12} - iG_{22}) = -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно показать, что ядро Φ_{11} , определенное в (10), является непрерывным, а ядро Φ_{31} – сингулярно ($\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}$, где F_{31} – непрерывно).

Подставляя (12) в граничные условия (11), приходим к системе СИУ 1-го рода [15, 17]:

$$\int_L f_1(s)B_{11}(s, s_0) + f_2B_{12}(s, s_0) ds = N_1(s_0); \quad \int_L f_1(s)B_{21}(s, s_0) + f_2B_{22}(s, s_0) ds = N_2(s_0); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -d \left[\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right]; \\ B_{12} &= d \left[\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + \frac{1}{8} \left(F_{31} e^{i(\varphi_0 + \alpha)} - F_{33} e^{i(3\alpha - \varphi_0)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$B_{21} = d \left[\frac{1}{4\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha-\varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{8} (F_{31} e^{-i(\varphi_0+\alpha)} - F_{33} e^{-i(3\alpha-\varphi_0)}) \right];$$

$$B_{22} = -d \left[\frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left(\frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right];$$

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r_0} + F_{31}; \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r_0} + F_{33}; \quad \zeta_0 - \zeta = r e^{i\alpha}; \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0};$$

$$N_1(s_0) = -N_2(s_0) = -\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } P\text{-случае};$$

$$N_1(s_0) = N_2(s_0) = i\gamma_2 \tau e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } SV\text{-случае}.$$

Переменные d, k, c и Φ_{kj} заданы выше.

Необходимые дополнительные условия для разрешимости сингулярных интегральных уравнений 1-го рода (13) вытекают из равенства нулю смещений на L в некоторой фиксированной точке s_* или из равенства нулю средних смещений на L [10, 11]. В последнем случае имеем (l – длина контура L)

$$\frac{1}{l} \iint_{LL} \{f_1(s)L_{11}(s, s_0) + f_2 L_{12}(s, s_0)\} ds ds_0 = A_1; \quad \frac{1}{l} \iint_{LL} \{f_1(s)L_{21}(s, s_0) + f_2 L_{22}(s, s_0)\} ds ds_0 = A_2; \quad (14)$$

$$L_{11} = G_{11} + iG_{21}; \quad L_{12} = G_{12} + iG_{22}; \quad L_{21} = G_{11} - iG_{21}; \quad L_{22} = G_{12} - iG_{22};$$

$$A_1 = -A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_1 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } P\text{-случае};$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_2 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } SV\text{-случае}.$$

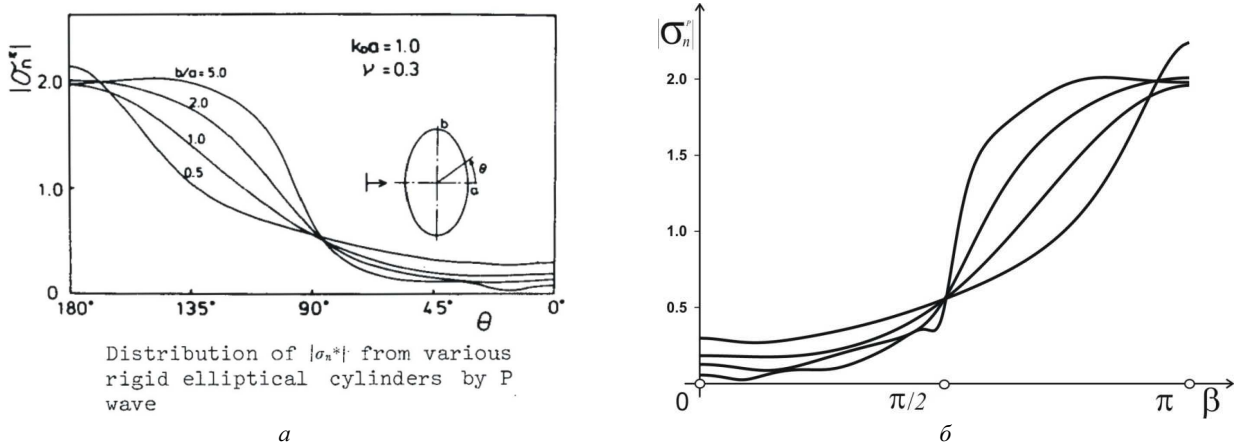


Рис. 1 – Сравнение результатов: a – цитата из работы [3]; b – результаты численной реализации системы СИУ-1.

В работе [15] применялось дополнительное условие как в одной точке контура [10, 11], так и интегральное. Результаты получены стабильные, но разные. Этот факт отличается от выводов работ [10, 11]. Данный результат говорит не о точности вычислительной схемы, а о том, что разные типы дополнительного условия определяют разные математические модели, соответствующие разным задачам.

Исследование достоверности модели. Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод, теоретически обоснованный в работах [10, 11] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Для исследования достоверности полученной модели рассматривалось пространство, содержащее цилиндрическое неподвижное включение эллиптического поперечного сечения, аналогичное описанному в работе [3]:

$$\xi = a \cos \beta; \quad \eta = b \sin \beta; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений как в [3]:

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}| / P; \quad \sigma_{ns} = |\tau_{n_0 s_0}| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений $\tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (8), P – максимальное значение напряжения в падающей волне, равно $\gamma_1 \tau (\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P -волны (1) и $\gamma_2 \tau \mu$ – в случае излучения SV -волны (2).

На рис. 1 приведены графики распределения амплитудных значений напряжения $|\sigma_n|$ вдоль контура единичной неоднородности, находящейся под воздействием гармонической P – волны. Рис. 1, *a* цитирован из [3] вместе с подписью. А графики, приведенные на рис. 1, *б* получены описанной моделью с использованием системы СИУ 1-го рода. Для иллюстрации достоверности графики приведены в зеркальном виде.

На рис. 2 приведены графики распределения амплитудных значений напряжения $|\tau_{ns}|$ вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической SV – волны. Рис. 2, *a* цитирован из [3] вместе с подписью. Графики, приведенные на рис. 2, *б* получены в работе.

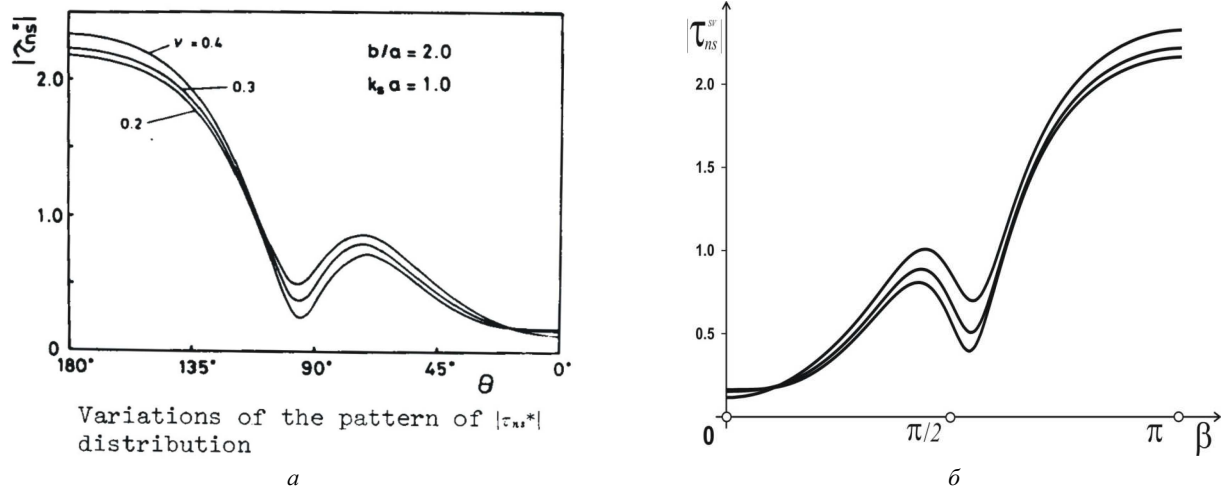


Рис. 2 – Сравнение результатов
a – цитата из работы [3]; *б* – результаты численной реализации системы СИУ-1.

На рис. 3 приведены графики распределения амплитудных значений соответствующий контурных напряжения $|\tau_{ns}|$ для P – волны и $|\sigma_n|$ для SV – волны, которые получены в настоящей работе и дополняют коллекцию графиков работы [3]. Тут кривые 1, 2 и 3 рис. 3, *a* соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$ при $b/a = 2$ и $\gamma_1 a = 1$. А кривые 1, 2, 3 и 4 рис. 3, *б* соответствуют значениям параметра $b/a = 5; 2; 1; 0.5$ при $\nu = 0.3$ и $\gamma_2 a = 1.0$.

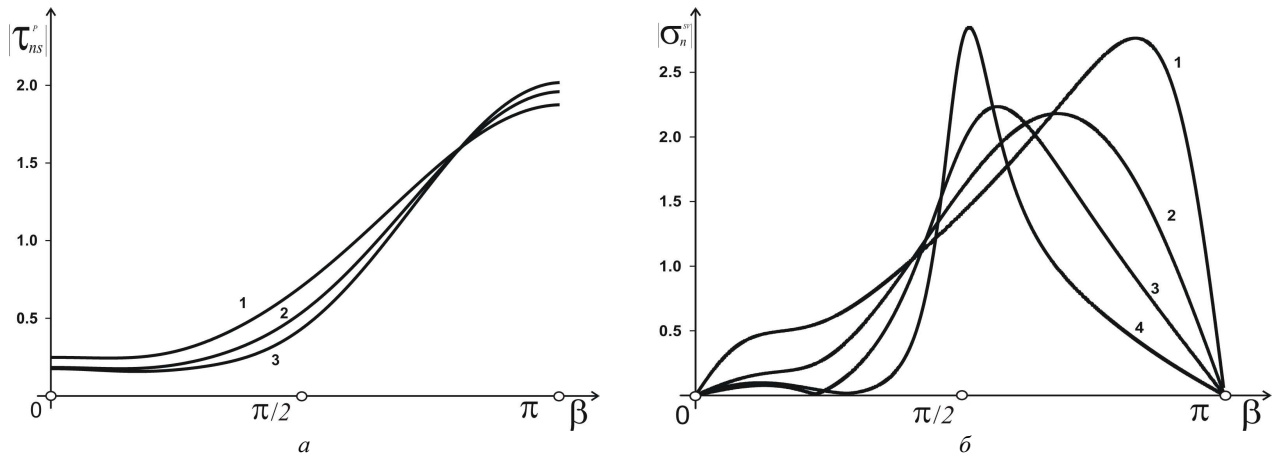


Рис. 3 – Контурные напряжения, полученные в настоящей работе: *a* – кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$ при $b/a = 2$ и $\gamma_1 a = 1$; *б* – кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям параметра $b/a = 5; 2; 1; 0.5$ при $\nu = 0.3$ и $\gamma_2 a = 1.0$.

Однако, при дальнейшем исследовании полученной модели в соответствии с вычислительной схемой, предложенной в [15, 16], обнаружено разрушение решения. После 9-го знака после запятой сходимость результата отсутствует. При этом, начиная с размерности $N = 1500$ число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) колеблется между 8-м и 11-м порядком, что и объясняет разрушение. При этом, как указано выше, отсутствует критерий однозначного выбора типа дополнительного условия. Начиная со второго знака после запятой и до 9-го знака решения устойчивы, но различны.

Вычисления проводились с использованием кластера Института кибернетики НАН Украины имени академика Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 8 (1333) 2019.

мика В. М. Глушкова СКІТ-3 и библиотек МРІ, поддерживающих работу приложения в распараллеленном режиме. При использовании 51 узла время вычислений искомым характеристик СЛАУ размерности $N = 30000$ составляет около 3 часов.

Верификация решения. В [15] для верификации полученных результатов решение поставленной задачи сводилось к иному типу уравнений – к системе СИУ 2-го рода. Для получения уравнений применен метод разрешающих функций, описанный в [18].

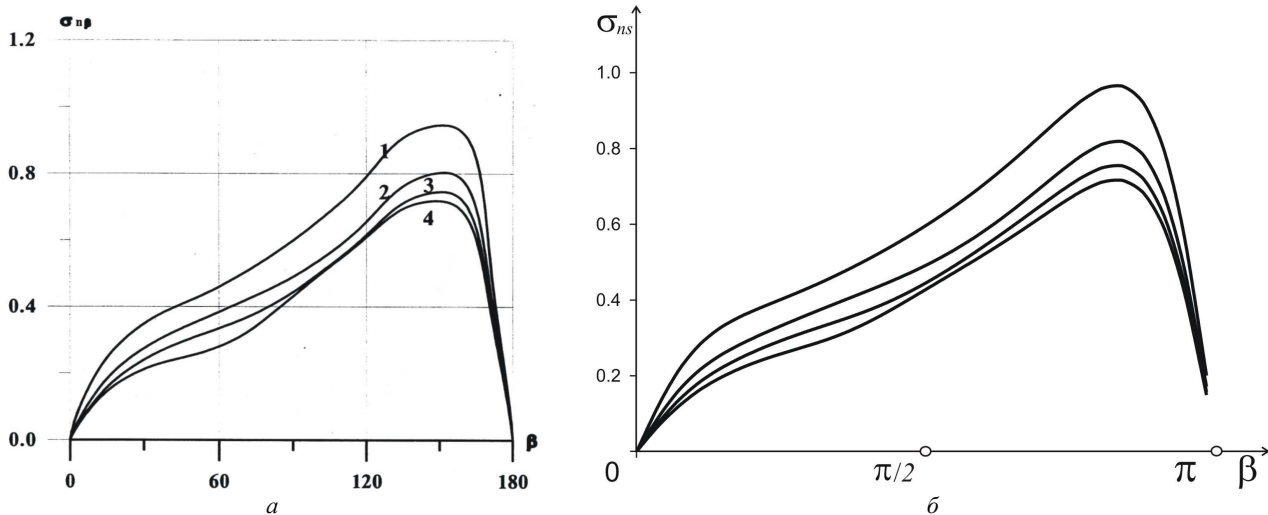


Рис. 4 – Сравнение результатов: а – цитата из работы [19]; б – результаты численной реализации системы СИУ-2.

В виде потенциалов типа простого слоя выберем функции, которые автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца:

$$\Phi(z) = \int_L P_1(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds; \quad \Psi(z) = \int_L P_2(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds. \quad (16)$$

Тогда в соответствии с подходом [18] искомые перемещения могут быть выражены следующими формулами:

$$U = \partial_1 \Phi(z) + \partial_2 \Psi(z); \quad V = \partial_2 \Phi(z) - \partial_1 \Psi(z),$$

где обозначены операторы $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

Имеем итоговые дифференциальные представления в виде:

$$U = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Phi(z) + i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Psi(z); \quad V = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Phi(z) - \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Psi(z). \quad (17)$$

Тогда интегральные представления для компонент перемещений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} U + iV &= 2 \int_L P_p^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds - 2i \int_L P_s^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds; \\ U - iV &= 2 \int_L P_p^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds + 2i \int_L P_s^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя известные [15 – 19] формулы для производных от функций Ханкеля

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

после выделения особенности $H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1^*(\gamma r)$ и перехода на контур с применением формул Сохоцкого – Племеля [10 – 12], получаем завершающий вид системы СИУ 2-го рода. Тут ϕ_0 – угол положительной нормали к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью OX , $re^{i\alpha} = \zeta - \zeta_0$ и $ds = -ie^{-i\phi} d\zeta = ie^{i\phi} d\bar{\zeta}$. Иные переменные аналогичны переменным вышеописанной модели СИУ 1-го рода.

$$\begin{aligned} -2if_1(\zeta)e^{i\phi_0} - 2f_2(\zeta)e^{i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\zeta)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds + i\gamma_2 \int_L f_2(\zeta)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds &= U_0 + iV_0; \\ -2if_1(\zeta)e^{-i\phi_0} + 2f_2(\zeta)e^{-i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\zeta)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds - i\gamma_2 \int_L f_2(\zeta)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds &= U_0 - iV_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что для получения решения в напряжениях искомые плотности удовлетворяли интегро-дифференциальные представления, что существенно повысило потребность в объеме вычислительных ресурсов для достижения необходимой точности вычислительного эксперимента. Результат проверки достоверности этой модели приведен на следующих рисунках.

На рис. 4 и 5 приведены графики распределения амплитудных значений указанных на рисунках напряжений $|\sigma_{ns}|$ и $|\sigma_n|$ вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической Р или SV-волны соответственно. Рис. 4, а и 5, а цитирован из [19]. Графики, приведенные на рис. 4, б и 5, б получены в работе.

Как и в [19], на рис. 4 кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям $\gamma_1 a = 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$, при $b/a = 2$ и $\nu = 0.3$. А на рис. 5 кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2, 0.3$ и 0.4 при $b/a = 2$ и $\gamma_2 a = 1$.

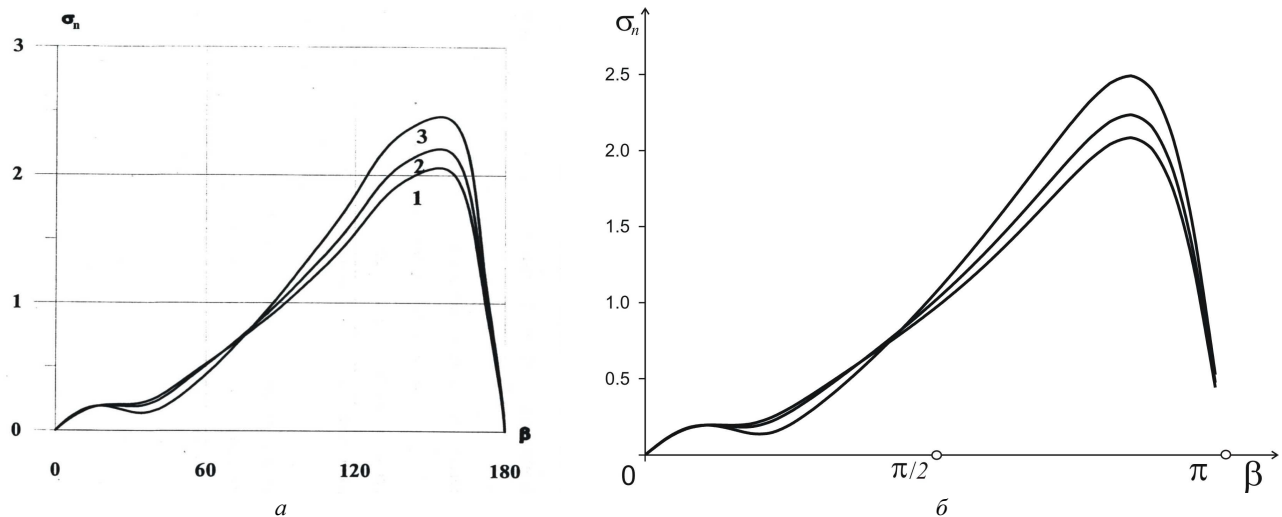


Рис. 5 – Сравнение результатов: а – цитата из работы [19]; б – результаты численной реализации системы СИУ-2.

Сравнение значений искомых величин (перемещений и контурных напряжений) двух приведенных моделей показало совпадение значений перемещений (в области вблизи неоднородности) до 7-го знака после запятой, а напряжений – до 4-го знака после запятой. При этом система СИУ 1-го рода обуславливалась с использованием интегрального дополнительного условия.

Однако повышение точности вычислений и для данной модели оказалось невозможным. Анализ полученной системы СИУ 2-го рода показал, что суммы коэффициентов характеристической системы [12] равны нулю, что не позволяет определить ее индекс.

Для определения индекса системы СИУ 2-го рода имеем выражение [12]

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} [\ln \det(\frac{D}{S})]_L = \frac{1}{2\pi i} [\arg \frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}]_L,$$

где матрицы сумм и разностей $S = A+B$ и $D = A-B$ определяются из характеристической системы уравнений

$$[12] K_0 f = A(\zeta_0)P(\zeta_0) + \frac{B(\zeta_0)}{\pi i} \int \frac{P(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Для любого из уравнений системы (19) имеем $K_0 f = -iP_1(\zeta)e^{i\phi_0} + \frac{i}{\pi i} \int_L P_1(\zeta) \frac{e^{i\phi} d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$. Тогда очевидно, что

$S_{1,2} = -ie^{i\phi_0} + ie^{i\phi_0}$. Таким образом, данная система не может быть отнесена к «нормальному» типу [12] – ее индекс неопределим. Можно предположить, что этот факт является одной из причин того, что при дальнейшем повышении точности вычислений решение также разрушается.

Число обусловленности СЛАУ системы (19) (для плотностей в перемещениях), начиная с размерности $N = 1500$, также имеет 11-й порядок. Но при этом еще и все определители СЛАУ для всех исследуемых параметров близки к нулю, что дает возможность получать лишь неустойчивые решения. Для системы СИУ 1-го рода это исключено наличием дополнительного условия.

Таким образом, для высокоточной верификации модели данная система СИУ 2-го рода неприемлема. Но важно то, что это решение позволило однозначно выбрать тип дополнительного условия.

Исследование числа обусловленности. Для проведения численного исследования числа обусловленности СЛАУ для модели СИУ 1-го рода (с интегральным дополнительным условием) использовалась вычислительная схема [15, 16]. Анализ значительного объема литературных источников позволяет заключить, что исследования числа обусловленности СЛАУ, получаемой в процессе численной реализации систем СИУ, практически не проводились. В [20] (одной из немногочисленных работ на эту тему) предложен метод прогнозирования числа обу-

словленности систем СИУ. Однако система СИУ 1-го рода тут не рассмотрена. Экспериментальные исследования могут заполнить этот пробел.

На рис. 6, *a* приведена зависимость числа обусловленности C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\chi_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с включением эллиптической формы, где $a/b = 5/1$. Видно, что на исследуемом отрезке изменения $\chi_1 a = \{0; 8\}$ число обусловленности C_P является осциллирующей функцией, число резких изменений которой растет с ростом волнового числа. Причем, существует некоторое волновое число ($\chi_1 a = 1,9699172$), при котором модель теряет обусловленность лавинообразно – вплоть до числа $C_P = 10^{+11} - 10^{+12}$. На графике форма пика показана отдельно.

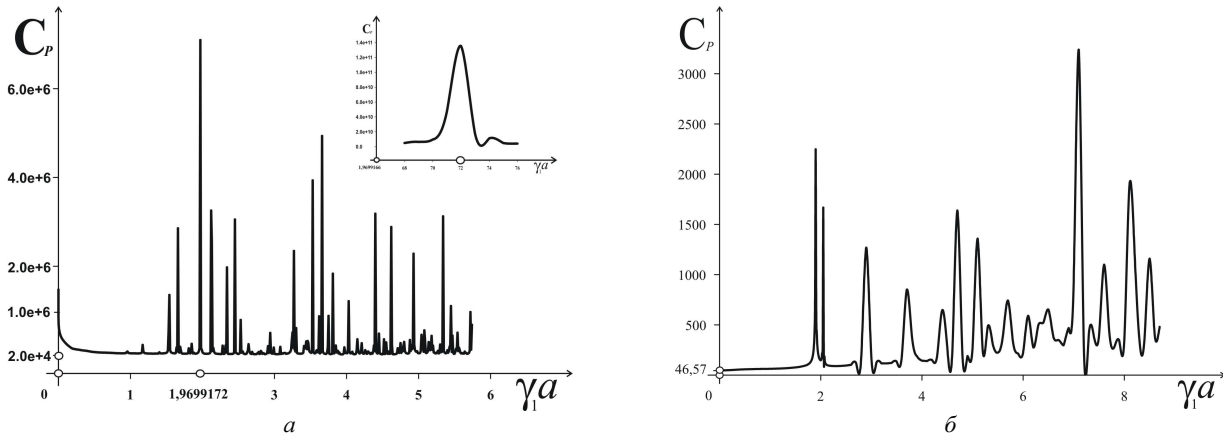


Рис. 6 – Зависимость числа обусловленности СЛАУ от волнового числа: *a* – зависимость C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\chi_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с включением эллиптической формы, где $a/b = 5/1$; *b* – зависимость C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\chi_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с круговым отверстием со свободным от сил контуром [16].

Для сравнения на рис. 6, *b* приведена зависимость числа обусловленности C_P матрицы СЛАУ от волнового числа $\chi_1 a$ для P -волны, взаимодействующей с круговым отверстием со свободным от сил контуром [16]. Данная зависимость совпадает с важным выводом работы [1] о хорошей вычислительной устойчивости моделей для значений волновых чисел, близких к нулю, и о заметном ухудшении устойчивости для волнового числа $\chi_1 a > 2$.

Как видно из графиков, характер соответствующих зависимостей для модели о взаимодействии P -волны с неподвижным включением полностью противоположен зависимости для отверстия со свободным контуром. При этом значение числа обусловленности на исследуемом интервале $\chi_1 a$ для свободного отверстия не является критичным, чего нельзя сказать о модели дифракции на неподвижном включении.

Результаты исследований соответствующих функций для SV -волн имеют схожие свойства. Поэтому тут не приводятся.

Выводы. Известно [21], что задачи, приводящие к математическим моделям с плохой обусловленностью, рассматриваются как некорректно поставленные. В [22] рассмотрена ситуация потери *сплошности модели*. В исследованной задаче также обнаружены неизвестные ранее эффекты потери обусловленности при определенном значении волнового числа. Возникает естественная гипотеза о потере сплошности модели для постановки рассмотренной тут задачи.

Как видно, результаты исследований дифракции плоских волн на отверстии, свободном от сил, принципиально отличаются от аналогичных результатов для *дифракции плоских волн* на отверстии, контур которого заземлен (неподвижном включении). Вероятно, причина в том, что возбуждающая нагрузка, передаваемая из бесконечности на контур отражателя, и краевые условия, сформулированы для перемещений, что в предельном статическом случае лишено смысла – контур заземлен.

Несмотря на то, что теоретически исследование СИУ с неопределяемым индексом не представляется возможным [12], численные эксперименты показали, что такие модели «могут работать» и потому имеют смысл – они являются приемлемым дополнением, верифицирующим иные способы решения.

Для задачи дифракции упругих волн на гладких препятствиях кластерные (параллельные) алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики исследуемых полей. Это важно, так как позволяет получать величины максимумов контурных напряжений (а также координаты локации этих максимумов) с повышенной точностью.

Описанная методика расширенного численного исследования краевых задач математической физики позволяет проводить высокоточный аудит самих моделей. Кластерные вычисления с использованием библиотек безошибочной арифметики позволяют исследовать вопрос о реальной поточечной сходимости применяемых ме-

тодов. Из сравнения, например, числа обусловленности СЛАУ изложенных тут дифракционных задач следует, что фактическая поточечная сходимость теоретически хорошо изученных решений показывает неожиданные свойства. Тенденция роста числа обусловленности СЛАУ для систем СИУ 1-го рода, моделирующей дифракционную задачу на отражателе с заземленным контуром, может оказаться критичной, когда на 17-м или 20-м знаке после запятой баланс между машинной точностью, числом обусловленности СЛАУ и дальнейшим приростом точности будет исчерпан.

В таком «расширенном» понимании даже известные и исследованные краевые задачи математической физики приобретают новую ценность – это эффективный полигон для подготовки профессионалов в области численной обработки данных.

Список литературы

1. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – К. : Наукова думка, 2012. – 204 с.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – К. : Наукова думка, 1978. – 307 с.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of Steady Stress Waves by Arbitrary Shaped Discontinuities in Elastic Medium // Bulletin of JSME. – 1980. – Vol. 23. – № 178. – pp. 493 – 500. DOI: 10.1299/jsme1958.23.493.
4. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. – Philadelphia: SIAM. 2013. – 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
5. Jain D. L., Kanwal R. P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusions // J. Appl. Phys. – 1979. V. 50. – No. 6. – pp. 4067 – 4109. DOI: 10.1063/1.326489.
6. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – V. 67, issue 6. – P. 1904 – 1913. DOI: 10.1121/1.384455.
7. Mow C. C., Pao Y.-H. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. – New York, Rand-report, 1971. – 681 p.
8. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids. // Applied Mechanics. – 1983. – № 50. – pp. 1152 – 1164. DOI: 10.1115/1.3167197.
9. Aleksander M. B., Balaban S. M., Karpinski M., Rajba S. A., Chyzh V. M. Information Security Environment in Wireless Sensor Networks. – Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University. – 2016. – 224 p. – ISBN: 978-966-305-054-6.
10. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К. : Наук. думка, 1984. – 344 с.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 513 с.
13. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD – компьютера «Инпарком». – К. : Наукова думка, 2007. – 220с.
14. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В., Чистякова Т. В., Яковлев М. Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – К. : Наукова думка, 2008. – 247 с.
15. Панченко Б. Е., Ковалев Ю. Д., Сайко И. Н. О численном исследовании систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом // Труды 5й Международной конференции НРС-УА.– Киев, 2018. – С. 111 – 114.
16. Панченко Б. Е., Сайко И. Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 5. – С. 139 – 148.
17. Панченко Б. Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях : дисс. на соиск. к.ф.-м.н. – Сумы, 1996. – 125 с.
18. Фильшинский Л. А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в R3 // Теорет. и прикл. механика. – Харьков : Основа, 1990. – Вып. 21. – С. 13 – 20.
19. Назаренко А. М., Ложкин А. М., Панченко Б. Е. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Донецьк : Вісник ДонНУ. Сер. А : Природничі науки. – 2006. – №1. – С. 143 – 147.
20. Шешко М. А., Шуляев Д. С., Расолько Г. А., Мастяница В. С. К вопросу обусловленности матрицы линейной алгебраической системы, возникающей при аппроксимации сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши // Дифференц. Уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 9. – С. 1278 – 1285.
21. Калиткин Н. Н. Численные методы. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
22. Селезов И. Т. Развитие и приложение метода Коши – Пуассона в эластодинамике слоя и уравнение Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – № 3. – С. 106 – 115.

References (transliterated)

1. Selezov I. T., Krivonos Y. G. *Metematische metody v zadachakh rasprostraneniya i difraktsii voln* [Mathematical methods in problems of wave propagation and diffraction]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 204 p.
2. Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. *Difraktsiya uprugikh voln* [Diffraction of elastic waves]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 307 p.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of Steady Stress Waves by Arbitrary Shaped Discontinuities in Elastic Medium. *Bulletin of the JSME*. 1980, vol. 23, no. 178, pp. 493–500 DOI: 10.1299/jsme1958.23.493.
4. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
5. Jain D. L., Kanwal R. P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusions. *J. Appl. Phys.* 1979, vol. 50, no. 6, pp. 4067–4109. DOI: 10.1063/1.326489.
6. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980, v. 67, issue 6, pp. 1904–1913. DOI: 10.1121/1.384455.
7. Mow C. C., Pao Y.-H. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration*. New York, Rand-report, 1971. 681 p.
8. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids. *J. Applied Mechanics*. 1983, vol. 50, pp. 1152–1164. DOI: 10.1115/1.3167197.
9. Aleksander M. B., Balaban S. M., Karpinski M., Rajba S. A., Chyzh V. M. *Information Security Environment in Wireless Sensor Networks*. Ternopil, Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University. 2016. 224 p. ISBN: 978-966-305-054-6.
10. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, TOO Yanus Publ., 1995. 520 p.
11. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1984. 344 p.
12. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya 3-e izd.* [Singular integral equations. 3d ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p.
13. Khimich A. N., Molchanov I. N., Popov A. V. *Chislennoe programnoe obespechenie intelektual'nogo MIMD-kompyutera "Inparkom"* [Numerical software of intellectual Inparkom MIMD computer]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 220 p.
14. Khimich A. N., Molchanov I. N., Popov A. V., Chistyakova T. V., Yakovlev M. F. *Parallelnyye algoritmy resheniya zadach vychislitel'noy matematiki* [Parallel algorithms for solving problems of computational mathematics]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2008. 247 p.
15. Panchenko B. E., Kovalev Y. D., Sayko I. N. O chislennom issledovanii system singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda i s neopre-

- delyaemykh indeksom [On a numerical study of systems of singular integral equations of the first kind and with an undeterminable index]. *Trudu 5y Megdunarodnoy konferentsii HPC-UA* [Proceedings of the 5-th International Conference HPC-UA]. Kyiv, 2018. pp. 111–114.
16. Panchenko B. E., Sayko I. N. Vysokotochnye maksimal'nye napryazheniya v zadache o vzaimodeystvii uprugikh voln s sistemoy tsylindricheskikh polostey v usloviyakh ploskoy deformatsii [High-precision maximum stresses in the problem of the interaction of elastic waves with a system of cylindrical cavities under plane strain conditions]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2015, vol. 5, pp. 139–148.
 17. Panchenko B. E. *Reshenie dvumernykh zadach difraktsii uprugikh voln na tsylindricheskikh neodnorodnostyakh: diss. na soiskan. k.f.-m.n.* [Solving two-dimensional problems of diffraction of elastic waves on cylindrical heterogeneities. Thesis of the Candidate of Physical and Mathematical Science dissertation]. Sumy, 1996. 125 p.
 18. Fil'shtinskiy L. A. Periodicheskie resheniya teorii uprugosti dlya tsylindra v R³ [Periodic solutions of the theory of elasticity for a cylinder in R³]. *Teoretich. i prikl. Mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. Kharkov, Osнова Publ., 1990, vol. 21, pp. 13–20.
 19. Nazarenko A. M., Lozhkin A. M., Panchenko B. E. Difraktsiya voln ploskoy deformatsii na zhestkom tsylindricheskom vkluchenii proizvol'nogo poperechnogo secheniya [Diffraction of plane strain waves on a rigid cylindrical inclusion of an arbitrary cross section]. *Donets'k : Visnyk DonNU. Ser. A : Pryrodnychi nauky* [Donetsk : Bulletin of the Donetsk National University. Series A : Natural science]. 2006, no. 1, pp. 143–147.
 20. Sheshko M. A., Shulyaev D. S., Rasolko G. A., Mastyanitsa V. S. K voprosu obuslovlennosti matritsy lineynoy algebraicheskoy sistemy, vozni-kayushey pri aproksimatsii singulyarnogo integral'nogo uravneniya s yadrom Koshi [On the question of the conditionality of the matrix of a linear algebraic system arising from the approximation of a singular integral equation with a Cauchy kernel]. *Diferenc. Uravneniya* [Differential equations]. 1999, vol. 35, no. 9, pp. 1278–1285.
 21. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Sankt – P'eterburg, BHV-Peterburg Publ., 2011. 592 p.
 22. Selezov I. T. Razvitiye i prilozhenie metoda Koshi – Puassona v elastodinamike sloya i uravnenie Timoshenko [Development and application of the Cauchy-Poisson method in elastodynamics of a layer and Timoshenko's equation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2018, no. 3, pp. 106–115.

Поступила (received) 16.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Панченко Борис Євгенійович (Панченко Борис Евгеньевич, Panchenko Borys Evgenijovich) – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор, Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова, м. Одеса, Інститут кібернетики НАН України ім. В.М. Глушкова, старший науковий співробітник, м. Київ; тел.: (067) 449-39-70; e-mail: pr-bob@ukr.net.

УДК 517.968

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

На основе метода дискретных особенностей построена дискретная математическая модель гиперсингулярного интегрального уравнения на стандартном интервале $(-1, 1)$ и на системе интервалов. Доказана однозначная разрешимость дискретной модели и дана оценка скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению гиперсингулярного интегрального уравнения при некоторых предположениях гладкости.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

Т. С. ПОЛЯНСЬКА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОГО ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

На основі методу дискретних особливостей побудована дискретна математична модель гіперсингулярного інтегрального рівняння на стандартному інтервалі $(-1, 1)$ і на системі інтервалів. Доведено однозначна розв'язність дискретної моделі і дана оцінка швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння при деяких припущеннях гладкості.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей.

Т. S. POLYANSKAYA

DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION

A discrete mathematical model of a hypersingular integral equation on the standard interval $(-1, 1)$ and on a system of intervals is constructed based on the method of discrete singularities. The unique solvability of the model is proved and the convergence rate of the solution of the discrete problem to the exact solution of the hypersingular integral equation is estimated under some smoothness assumptions.

Key words: hypersingular integral equation, method of discrete singularities.

Введение. На базе гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{(x_0 - x)^2} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x_0 - x} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x_0 - x| u(x) \sqrt{1 - x^2} dx +$$

© Т. С. Полянская, 2019

$$+\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x_0, x)u(x)\sqrt{1-x^2} dx = f(x_0), \quad |x_0| < 1 \quad (1)$$

была построена математическая модель электромагнитного поля в *коаксиальном гиротроне* для случая *ТМ волн* (*Transverse Magnetic Waves*). Это уравнение возникает также в теории проволочных антенн. При исследовании математической модели гиротрона с несколькими резонаторами различной ширины и глубины возникает необходимость численного решения ГСИУ на системе интервалов.

Численное решение ГСИУ на интервале $(-1, 1)$. Рассмотрим уравнение (1) относительно неизвестной функции $u(x)$, которое предполагается однозначно разрешимым. Здесь первый интеграл понимается в смысле *конечной части по Адамару*, а второй интеграл – в смысле *главного значения по Коши*; a и b – заданные константы. Построение численного метода приближенного решения уравнения (1) и его обоснование проводятся в предположении, что $f(x_0) \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$, а $K(x_0, x) \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, где $C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$ – класс функций, производная которых удовлетворяет *условию Гельдера* с показателем $\alpha > 0$.

Введём операторы:

$$(Au)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{(x_0-x)^2} \sqrt{1-x^2} dx; \quad (\Gamma u)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{(x_0-x)} \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(Bu)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x_0-x| u(x) \sqrt{1-x^2} dx; \quad (Ku)(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x_0, x)u(x)\sqrt{1-x^2} dx.$$

С помощью этих обозначений уравнение (1) можно записать в операторном виде:

$$Au + a\Gamma u + bBu + Ku = f. \quad (2)$$

Имеют место соотношения [2, 3]:

$$A: U_{n-1}(x) \rightarrow nU_{n-1}(x_0);$$

$$\Gamma: U_{n-1}(x) \rightarrow T_n(x_0),$$

где $U_{n-1}(x)$ – многочлен *Чебышева второго рода степени $(n-1)$* , а $T_n(x)$ – многочлен *Чебышева первого рода степени n* . Оператор B переводит полиномы степени $(n-2)$ в полиномы степени n . То есть оператор A сохраняет степень полинома, а операторы Γ и B повышают её. Это следует учитывать при дискретизации уравнения (2). Произведём регуляризацию операторов Γ и B так, чтобы регуляризованные операторы переводили полиномы степени $(n-2)$ в полиномы степени $(n-2)$. Для этого положим [1, 3]:

$$(\Gamma_{n-2}u_{n-2})(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u_{n-2}(x) \left(\frac{1}{x_0-x} - U_{n-2}(x)T_{n-1}(x_0) \right) \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(B_{n-2}u_{n-2})(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|x_0-x| + \frac{2T_{n-1}(x)T_{n-1}(x_0)}{n-1} + \frac{2T_n(x)T_n(x_0)}{n} \right) u_{n-2}(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Обозначим $(P_{n-2}v)(x)$ – *интерполяционный полином Лагранжа* функции $v(x)$ с узлами интерполирования

$x_j^n = \cos \frac{j}{n} \pi$, $j = 1, \dots, n-1$, которые являются нулями многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(x)$.

В соответствии с методом дискретных особенностей, приближенное решение уравнения (1) ищем в виде интерполяционного полинома Лагранжа $u_{n-2}(x) \equiv (P_{n-2}u)(x)$ из уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{n-2}(x)}{(x_0-x)^2} \sqrt{1-x^2} dx + \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 u_{n-2}(x) \left(\frac{1}{x_0-x} - 2U_{n-2}(x)T_{n-1}(x_0) \right) \sqrt{1-x^2} dx +$$

$$+ \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|x_0-x| + \frac{2T_{n-1}(x)T_{n-1}(x_0)}{n-1} + \frac{2T_n(x)T_n(x_0)}{n} \right) u_{n-2}(x) \sqrt{1-x^2} dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (P_{n-2}K)(x_0, x)u_{n-2}(x)\sqrt{1-x^2} dx = (P_{n-2}f)(x_0), \quad |x_0| < 1, \quad (3)$$

которое может быть записано в операторном виде:

$$Au_{n-2} + a\Gamma_{n-2}u_{n-2} + bB_{n-2}u_{n-2} + K_{n-2}u_{n-2} = f_{n-2}, \quad (4)$$

где

$$(K_{n-2}u_{n-2})(x_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (P_{n-2,x_0} P_{n-2,x} K)(x_0, x) u_{n-2}(x) \sqrt{1-x^2} dx, \quad f_{n-2}(x_0) = (P_{n-2}f)(x_0).$$

Подставляя в уравнение (3) вместо x_0 значения $x_k^n = \cos \frac{k}{n} \pi, k = 1, \dots, n-1$, получаем систему, состоящую из $(n-1)$ уравнений. Применим для вычисления интегралов в этой системе точные квадратурные формулы интерполяционного типа [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{n-2}(x)}{(x_k^n - x)^2} \sqrt{1-x^2} dx &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) \frac{(1-(-1)^{j+k})(1-(x_j^n)^2)}{n(x_k^n - x_j^n)^2} - u_{n-2}(x_k^n) \frac{n}{2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) I_{jkn}^{(1)} - u_{n-2}(x_k^n) \frac{n}{2}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{n-2}(x)}{(x_k^n - x)} \sqrt{1-x^2} dx &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) \frac{(1-(-1)^{j+k})(1-(x_j^n)^2)}{n(x_k^n - x_j^n)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) I_{jkn}^{(2)}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x_k^n - x| u_{n-2}(x) \sqrt{1-x^2} dx &= \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) \frac{((x_j^n)^2 - 1)}{n} \left[\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(x_j^n)}{m} T_m(x_k^n) + \frac{(-1)^{j+k}}{2n} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) I_{jkn}^{(3)}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x_k^n, x) u_{n-2}(x) \sqrt{1-x^2} dx &= \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) \frac{(1-(x_j^n)^2)}{n} K(x_k^n, x_j^n) = \sum_j^{n-1} u_{n-2}(x_j^n) I_{jkn}^{(4)}. \end{aligned}$$

В результате получаем эквивалентную уравнению (3) систему линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах интерполирования:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (J_{jkn}^{(1)} + J_{jkn}^{(2)} + J_{jkn}^{(3)} + J_{jkn}^{(4)}) u_{n-2}(x_j^n) = f(x_k^n), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} J_{jkn}^{(1)} &= \begin{cases} I_{jkn}^{(1)}, & j \neq k; \\ -\frac{n}{2}, & j = k; \end{cases} & J_{jkn}^{(2)} &= \begin{cases} I_{jkn}^{(2)} + \frac{2}{n} (-1)^{j+k} (1-(x_j^n)^2), & j \neq k; \\ 0, & j = k; \end{cases} \\ J_{jkn}^{(3)} &= I_{jkn}^{(3)} + \frac{(1-(x_j^n)^2)}{n} \left(\frac{2(-1)^{k+j}}{n-1} + \frac{2T_n(x_j^n)T_n(x_k^n)}{n} \right), & J_{jkn}^{(4)} &= I_{jkn}^{(4)}. \end{aligned}$$

Отметим, что число уравнений полученной системы равно числу неизвестных.

Однозначная разрешимость системы (5) эквивалентна однозначной разрешимости уравнения (3) и, соответственно, уравнения (4). Доказательство однозначной разрешимости удобнее проводить для операторного уравнения (4).

Введем *гильбертовы пространства*, в которых действуют рассматриваемые операторы. Пусть L^I – гильбертово пространство функций со скалярным произведением:

$$(u, v)^I = \int_{-1}^1 u(x) \bar{v}(x) \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 (u(x) \sqrt{1-x^2})' (\bar{v}(x) \sqrt{1-x^2})' dx;$$

L^{II} – гильбертово пространство функций со скалярным произведением:

$$(u, v)^{II} = \int_{-1}^1 u(x) \bar{v}(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Π_{n-2}^I и Π_{n-2}^{II} – пространства полиномов степени не выше $(n-2)$, являющиеся подпространствами гильбертовых пространств L^I и L^{II} , соответственно.

Операторы A и Γ вполне непрерывны в паре пространств (L^I, L^{II}) , следовательно, и оператор $A + a\Gamma$ вполне непрерывен в этой же паре пространств. А отсюда и из однозначной разрешимости уравнения (1) следует непрерывная обратимость оператора $A + a\Gamma + bB + K$ в паре пространств (L^I, L^{II}) . Оператор $A + a\Gamma_{n-2} + bB_{n-2} + K_{n-2}$ действует в паре пространств $(\Pi_{n-2}^I, \Pi_{n-2}^{II})$.

Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (4) и оценки скорости сходимости приближенного решения к точному нам нужны следующие неравенства, которые получаем, пользуясь теоремами Джексона

и свойствами интерполяционных полиномов [1, 5]:

$$\begin{aligned} \|f - f_{n-2}\|_{L^II} &\leq \frac{F}{n^{1+\alpha}}; \quad \|\Gamma - \Gamma_{n-2}\|_{\Pi_{n-2}^I \rightarrow L^II} \leq \frac{C^{(1)}}{n}; \quad \|B - B_{n-2}\|_{\Pi_{n-2}^I \rightarrow L^II} \leq \frac{C^{(2)}}{n^2}; \\ \|K - K_{n-2}\|_{\Pi_{n-2}^I \rightarrow L^II} &\leq \frac{C(K)}{n^{1+\alpha}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $n > 3$; $F, C^{(1)}, C^{(2)}, C(K)$ – константы, не зависящие от n .

Из неравенств (6) следует оценка:

$$\|(A + a\Gamma_{n-2} + bB_{n-2} + K_{n-2})u_{n-2} - (A + a\Gamma + bB + K)u_{n-2}\|_{L^II} \leq \left(\frac{C^{(1)}}{n} + \frac{C^{(2)}}{n^2} + \frac{C(K)}{n^{1+\alpha}} \right) \|u_{n-2}\|_{L^I} \leq \frac{D}{n} \|u_{n-2}\|_{L^I}, \quad (7)$$

где D – константа, не зависящая от n .

Далее воспользуемся следующим результатом [4]:

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{Y} \subset Y$ – их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим два уравнения: точное

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

и приближённое

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y} \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y}),$$

где K и \tilde{K} – линейные операторы; $K: X \rightarrow Y$, $\tilde{K}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$. Тогда, если выполнены условия:

а) оператор K непрерывно обратим в паре пространств (X, Y) ;

$$\text{б) } p = \|K^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \|K - \tilde{K}\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}} < 1,$$

то приближённое уравнение имеет единственное решение $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ при любой правой части $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, причём, если $x^* \in X$ – точное решение уравнения $Kx = y$ и $\delta = \|y - \tilde{y}\|_Y$, то

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Y \rightarrow X} (1-p)^{-1} [\delta - p\|y\|_Y].$$

Отсюда, пользуясь неравенствами (6) и (7), окончательно получаем следующий результат.

Теорема 1. При всех $n \geq D \| (A + a\Gamma + bB + K)^{-1} \|_{L^II \rightarrow L^I}$ уравнение (4) имеет единственное решение. Кроме того, имеет место оценка скорости сходимости приближенного решения к точному:

$$\|u_{n-2} - u\|_{L^I} = \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Численное решение ГСИУ на системе интервалов. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_S \frac{v(t)}{(t_0 - t)^2} dt + \frac{a}{\pi} \int_S \frac{v(t)}{t_0 - t} dt + \frac{b}{\pi} \int_S v(t) \ln|t_0 - t| dt + \frac{1}{\pi} \int_S Q(t_0, t) v(t) dt = g(t_0), \quad t_0 \in S, \quad (8)$$

относительно неизвестной функции $v(t)$.

Здесь $S = \bigcup_{k=1}^m (\alpha_k, \beta_k)$, $-\infty < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_m < \beta_m < +\infty$, $g(t_0) \in C_S^{1,\alpha}$, $Q(t_0, t) \in C_S^{1,\alpha}$ по каждой из перемен-

ных равномерно относительно другой переменной, a и b – заданные константы. Уравнение (8) предполагается однозначно разрешимым.

Обозначим:

$$v(t)|_{t \in (\alpha_j, \beta_j)} = \sqrt{(t - \alpha_j)(\beta_j - t)} w_j(t), \quad g(t_0)|_{t_0 \in (\alpha_i, \beta_i)} = g_i(t_0), \quad Q(t_0, t)|_{t_0 \in (\alpha_i, \beta_i)} = Q_{ij}(t_0, t), \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Обозначим также $\varphi_k(x) = \frac{1}{2}[(\beta_k - \alpha_k)x + \alpha_k + \beta_k]$, и произведем замену переменных:

$$t_0 = \varphi_i(x_0), t_0 \in (\alpha_i, \beta_i), -1 < x_0 < 1; \quad t = \varphi_j(x), t \in (\alpha_j, \beta_j), -1 < x < 1.$$

Обозначая $u_j(x) = w_j(\varphi_j(x))$, $f_i(x_0) = g_i(\varphi_i(x_0))$ и производя очевидные преобразования, получаем следующую систему ГСИУ относительно неизвестных функций $u_i(x)$, $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(x)}{(x_0 - x)^2} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{a_i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(x)}{x_0 - x} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{b_i}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x_0 - x| u_i(x) \sqrt{1 - x^2} dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 K_{ij}(x_0, x) u_j(x) \sqrt{1 - x^2} dx = f_i(x_0), |x_0| < 1, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $f_i(x_0) \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$, а $K_{ij}(x_0, x) \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, $i, j = 1, \dots, m$.

Эту систему можно записать в виде операторного уравнения

$$\bar{A}\bar{u} + \bar{a}\bar{\Gamma}\bar{u} + \bar{b}\bar{B}\bar{u} + \bar{K}\bar{u} = \bar{f} \quad (10)$$

относительно неизвестной вектор-функции $\bar{u}(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^m$. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} (\bar{A}\bar{u})(x_0) = \{(Au_i)(x_0)\}_{i=1}^m; \quad (\bar{a}\bar{\Gamma}\bar{u})(x_0) = \{a_i(\Gamma u_i)(x_0)\}_{i=1}^m; \quad (\bar{b}\bar{B}\bar{u})(x_0) = \{b_i(Bu_i)(x_0)\}_{i=1}^m; \\ (\bar{K}\bar{u})(x_0) = \left\{ \left(\sum_{j=1}^m K_{ij} u_j \right) (x_0) \right\}_{i=1}^m; \quad \bar{f}(x_0) = \{f_i(x_0)\}_{i=1}^m. \end{aligned}$$

Однозначная разрешимость уравнения (8) эквивалентна однозначной разрешимости системы (9) и, следовательно, уравнения (10).

Приближенное решение $\bar{u}_{\bar{n}}(x) = \{u_{in_i-2}(x)\}_{i=1}^m$, $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, уравнения (10) ищется из операторного уравнения

$$\bar{A}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{b}\bar{B}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{K}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}} = \bar{f}_{\bar{n}}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} (\bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}})(x_0) = \{a_i(\Gamma_{n_i-2} u_{in_i-2})(x_0)\}_{i=1}^m; \quad (\bar{b}\bar{B}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}})(x_0) = \{b_i(B_{n_i-2} u_{in_i-2})(x_0)\}_{i=1}^m; \\ (\bar{K}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}})(x_0) = \left\{ \left(\sum_{j=1}^m K_{ijn_i-2n_j-2} u_{jn_j-2} \right) (x_0) \right\}_{i=1}^m; \quad \bar{f}_{\bar{n}}(x_0) = \{f_{in_i-2}(x_0)\}_{i=1}^m. \end{aligned}$$

Операторное уравнение (11) эквивалентно следующей системе ГСИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_{in_i-2}(x)}{(x_0 - x)^2} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{a_i}{\pi} \int_{-1}^1 u_{in_i-2}(x) \left(\frac{1}{x_0 - x} - 2U_{n_i-2}(x)T_{n_i-1}(x_0) \right) \sqrt{1 - x^2} dx + \\ + \frac{b_i}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|x_0 - x| + \frac{2T_{n_i-1}(x)T_{n_i-1}(x_0)}{n_i - 1} + \frac{2T_{n_i}(x)T_{n_i}(x_0)}{n_i} \right) u_{in_i-2}(x) \sqrt{1 - x^2} dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 (P_{n_i-2x_0} P_{n_i-2x} K_{ij})(x_0, x) u_{jn_j-2}(x) \sqrt{1 - x^2} dx = (P_{n_i-2} f)(x_0), |x_0| < 1, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в i -е уравнение системы (12) вместо x_0 значения $x_k^{n_i} = \cos \frac{k}{n_i} \pi$, $k = 1, \dots, n_i - 1$, $i = 1, \dots, m$, по-

лучаем систему, состоящую из $\sum_{i=1}^m n_i - m$ уравнений. Вычисляя в этой системе интегралы с помощью квадратурных формул, получаем, так же, как в случае одного ГСИУ, систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную системе (12). Пользуясь оценками (6), легко доказать, что при $n = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\} > 3$ имеет место неравенство

$$\|(\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}} + \bar{b}\bar{B}_{\bar{n}} + \bar{K}_{\bar{n}})\bar{u}_{\bar{n}} - (\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K})\bar{u}_{\bar{n}}\|_{\bar{L}^n} \leq \frac{M}{n} \|\bar{u}_{\bar{n}}\|_{\bar{L}^n}, \quad (13)$$

где M – константа, не зависящая от n .

Здесь \bar{L}^I и \bar{L}^{II} – гильбертовы пространства вектор-функций со скалярными произведениями

$$(\bar{u}, \bar{v})^I = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)^I \quad \text{и} \quad (\bar{u}, \bar{v})^{II} = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)^{II}, \quad \text{соответственно.}$$

Из неравенства (13) следует

Теорема 2. При всех \bar{n} таких, что $n \geq M \|(\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K})^{-1}\|_{\bar{L}^{II} \rightarrow \bar{L}^I}$, система (12) имеет единственное

решение. Кроме того, имеет место оценка скорости сходимости приближенного решения к точному:

$$\|\bar{u}_{\bar{n}} - \bar{u}\|_{\bar{L}^I} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Перспективы дальнейших исследований. Пользуясь приведенными результатами, можно рассмотреть численное решение методом дискретных особенностей гиперсингулярных интегральных уравнений, содержащих произведения одномерных гиперсингулярных интегральных операторов как рассмотренного вида, так и операторов

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}},$$

действующих в пространстве тригонометрических полиномов.

Выводы. Подробно рассмотрено численное решение методом дискретных особенностей гиперсингулярного интегрального уравнения на интервале $(-1, 1)$ и на системе интервалов. Построены системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующие эти уравнения. Доказано, что, при некоторых предположениях гладкости ядер регулярных частей и правых частей этих гиперсингулярных интегральных уравнений, каждая из построенных систем линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, даны оценки скорости сходимости приближенных решений к точным в среднем.

Список литературы

1. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
2. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков – Херсон, 2001. – 92 с.
3. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 9. – С. 1256 – 1262.
4. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – М. – Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.

References (transliterated)

1. Gandel' Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. Part II]. Kharkov, 1992. 145 p.
2. Gandel' Y. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part I]. Kharkov – Kherson, 2001. 92 p.
3. Gandel' Y. V., Kononenko A. S. Obosnovanie chislennoogo resheniya odnogo gipersingulyarnogo integral'nogo uravneniya [Justification of the numerical solution of a single hypersingular integral equation]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1256 – 1262.
4. Gabdulkaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. Kazan, Izd. Kazansk. un-ta Publ., 1980. 231 p.
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow – Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688 p.

Поступила (received) 17.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Поляньська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

УДК 004:57:616-07

О. Г. РУДНИЦЬКИЙ, М. О. РУДНИЦЬКА, Л. В. ТКАЧЕНКО**ФРАКТАЛЬНА ТА МОРФОЛОГІЧНА ОБРОБКА У ФАЗОВО-КОНТРАСТНІЙ МАГНІТО-РЕЗОНАНСНІЙ АНГІОГРАФІЇ**

Магнітно-резонансна томографія (МРТ) – це метод відображення внутрішньої структури матеріальних об'єктів, заснований на явищі ядерного магнітного резонансу і широко застосовуваний у задачах медичної діагностики. Переваги МРТ перед рентгівівською комп'ютерною томографією складаються з можливості отримання необов'язково паралельних перерізів, з більш високою роздільною здатністю, та у відсутності шкідливого жорсткого променевого впливу на пацієнтів і обслуговуючий персонал. У цій роботі ми представляємо технології сегментації та шумоподавлення, розроблені для 3D MRT-зображень, що базуються на методах фрактальної фільтрації та математичної морфології.

Ключові слова: 3D-сегментація, фрактальна розмірність, математична морфологія.

А. Г. РУДНИЦЬКИЙ, М. А. РУДНИЦЬКА, Л. В. ТКАЧЕНКО**ФРАКТАЛЬНАЯ И МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА В ФАЗОВО-КОНТРАСТНОЙ МАГНИТО-РЕЗОНАНСНОЙ АНГИОГРАФИИ**

Магнитно-резонансная томография (МРТ) – это метод отображения внутренней структуры материальных объектов, основанный на явлении ядерного магнитного резонанса и широко применяемый в задачах медицинской диагностики. Преимущества МРТ перед рентгеновской компьютерной томографией состоят из возможности получения необязательно параллельных сечений, с более высоким разрешением, и в отсутствии вредного жесткого лучевого воздействия на пациентов и персонал. В этой работе мы представляем технологию сегментации и шумоподавления, разработанную для 3D MRT-изображений, которая базируется на методах фрактальной фильтрации и математической морфологии.

Ключевые слова: 3D-сегментация, фрактальная размерность, математическая морфология.

A. G. RUDNITSKII, M. A. RUDNYTSKA, L. V. TKACHENKO**FRactal and Morphological Processing for Phase Contrast MRI Image of the Aortic Lumen**

Magnetic resonance imaging (MRI) is a method of displaying the internal structure of material objects, based on the phenomenon of nuclear magnetic resonance and widely used in the tasks of medical diagnostics. Advantages of MRI before X-ray computed tomography include the possibility of obtaining optionally parallel cross sections, with higher resolution, and in the absence of harmful rigid radiation effects on patients and attendants. In this work, we present segmentation and noise reduction technologies developed for 3D MRT images based on fractal filtration and mathematical morphology.

Key words: 3D segmentation, fractal dimension, mathematical morphology.

Вступ. Бурхливе вдосконалення інформаційних технологій та стрімкий розвиток сучасної апаратної бази, що відбуваються останнім часом, призвели до значного покращення у сфері медичної візуалізації. Досягнення у комп'ютерній томографії, ультразвукових дослідженнях, позитронно-емісійній та магнітно-резонансній томографії успішно використовуються для діагностики багатьох видів захворювань та вибору найбільш ефективної терапії. Ці методи розглядаються як найточніші форми візуалізації, доступні для раннього виявлення та діагностики різних захворювань. Проте, наявність шуму та розмиття у зображенні органів, різноманіття тканин та біологічних форм, робить аналіз медичних образів досить складним завданням. Присутність маскуючих структур призводить до накладання зображень різних органів одне на одне і значно підвищує ймовірність постановки невірної діагнозу. Крім того, простий аналіз двовимірних томографічних зображень тривимірних органів також може бути причиною помилкових висновків. Класичний приклад – конус. Навіть для цього простого тривимірного об'єкта поперечний переріз може бути параболою, колом, еліпсом, однією або двома лініями чи однією точкою. А саме з такими видами зображень – двовимірними перерізами або проекціями органів – лікарі зазвичай мають справу. Позбавитись від цих недоліків дозволяє тривимірна візуалізація, знешумлення та сегментація.

Існує декілька розповсюджених технологій для отримання 3D-зображень. Найвідоміша з них базується на отриманні серії поперечних перетинів предмета дослідження і наступної реконструкції з цих перетинів тривимірного зображення.

У пропонованій роботі для 3D знешумлення та сегментації фазового контрастного МРТ-зображення про аорти, були використані відносно нові методи – фрактальна теорія та математико-морфологічний підхід. Використання цих методів створило цікавий та потужний інструмент для комплексної обробки досліджуваного тривимірного об'єкту.

Сегментація. Сегментація зображення – це процес його розкладання на декілька однорідних неперекриваючих одна одну областей, об'єднання яких є цілим зображенням. При цьому ступінь деталізації розкладання образу залежить від поставленої проблеми. Сегментація є одним з найскладніших завдань будь-якого аналізу образів, оскільки тут на вхід системи подається зображення, а на виході процесу отримують властивості та атрибути, які вилучаються з інформаційного змісту образу. У медичному контексті сегментація – це пошук набору пікселів у зображенні, згрупованих таким чином, щоб вони представляли один і той же тип тканини, сформували єдину, фізіологічно однорідну область. Саме такий напрям досліджень є перспективним на практиці, наприклад,

© О. Г. Рудницький, М. О. Рудницький, Л. В. Ткаченко, 2019

для дослідження конкретного органу людини. Для того, щоб відрізнити об'єкти у зображенні, використовується цілий ряд різноманітних особливостей образу: яскравість, межі, конкретні форми, текстури, контраст, градієнти і т.п.

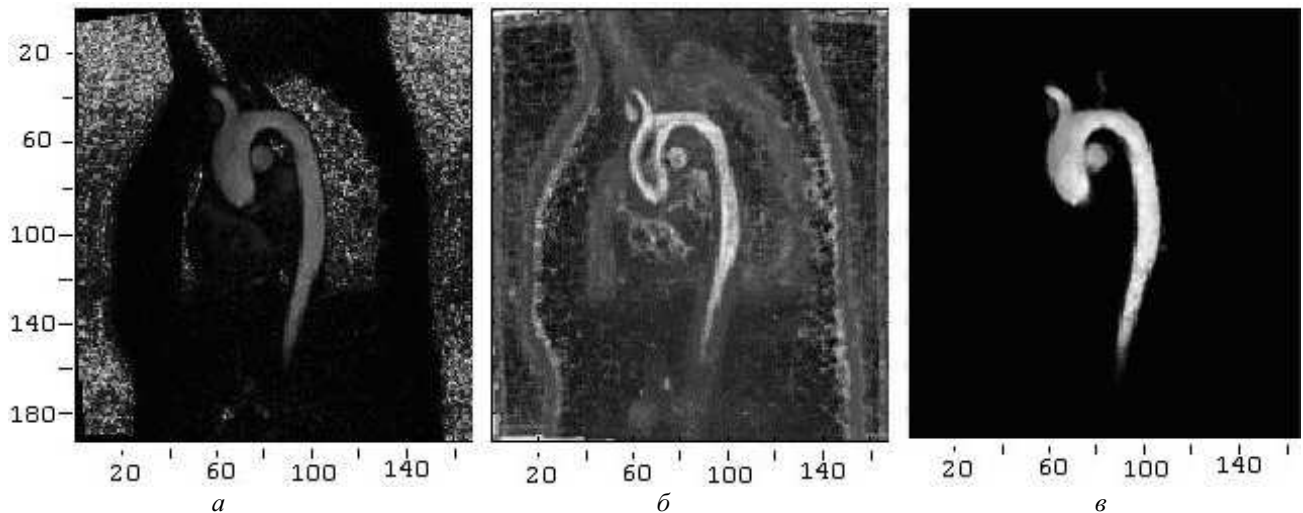


Рис. 1. – Фрактальна сегментація 14-го перерізу $192 \times 168 \times 28$ 3D МРТ образу аорти (усі вісі у пікселях): *a* – оригінальне зображення; *б* – зображення у просторі фрактальних розмірностей; *в* – остаточне сегментоване зображення аорти.

Але часто у практиці медичної візуалізації виникають проблеми, які цими методами розв'язуються не досить задовільно. Так, наприклад, на рис. 1, *a* представлено 14-й перетин тривимірного МРТ-зображення аорти, розміром $192 \times 168 \times 28$ пікселів. На цьому 2D зображенні представлені також інші органи (легені поруч із центральною частиною аорти, елементи кишковика у нижній частині образу) і шум (яскраві області у лівій та правій частинах зображення). У деяких областях зображення ці накладені паразитні структури мають інтенсивність навіть вищу, ніж область інтересу (аорта). Тому, у цій ситуації, звичайні методи, засновані на аналізі інтенсивностей або градієнтів, не дозволять здійснити якісну сегментацію зображення. З іншого боку, очевидно, що структура та текстура різних органів на зображенні суттєво відрізняються для різних областей образу. Тому здається розумним використати саме ці особливості. Для цього були застосовані такі, відносно сучасні інструменти аналізу образів, як методи, засновані на фрактальному аналізі та морфологічній обробці зображень.

Фрактальна сегментація. Термін "фрактал" був вперше використаний *Бенуа Мандельбротом* (Benoit Mandelbrot), математиком, який народився у Варшаві (1924 р) і працював у Франції та США [1, 2]. Походить цей термін від латинського fractare – ламати, дробити (fractus – розчленований, розбитий; англ. fractal – дробовий). Згідно з визначенням Б. Мандельброта, фракталом називається множина, розмірність *Хаусдорфа* – *Безиковича* якої строго більше її топологічної розмірності.

Б. Мандельброт дає також інше визначення: фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь, наперед визначеному сенсі, подібні цілому. Він використовував цей термін для опису складної геометрії об'єктів у природі. Ця, революційна свого часу теорія, сьогодні широко застосовується у багатьох сферах, починаючи з молекулярної фізики і біохімії й до великомасштабної структури Всесвіту, і допомагає у розробці нових концептуальних інструментів та ідей.

Остаточного визначення фракталу не існує й дотепер, але можна стверджувати, що однією з найбільш універсальних характеристик фрактальних об'єктів є фрактальна розмірність (FD).

Фрактальна розмірність компактного метричного простору X – це число FD , таке, що якщо $N(r)$ – це мінімальне число відкритих множин (*сфер*) діаметру не більше ніж r , які покривають X , тоді $N(r)$ пропорційне r^{-FD} при $r \rightarrow 0$. Тобто

$$FD \equiv - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln N}{\ln r}.$$

Загалом, фрактальна розмірність є узагальненням евклідової розмірності, і може виступати як міра складності об'єкту. Тому у теорії обробки сигналів і зображень цю величину часто застосовують у якості кількісного дескриптору для ідентифікації особливостей різних компонентів і тканин з відмінними морфологічними ознаками та функціональними особливостями. Зрозуміло, що саме такого роду задачі часто виникають при аналізі та обробці різноманітних медичних зображень (МРТ, комп'ютерна томографія, ультразвукові дослідження).

Так, наприклад, на зображенні, показаному на рис. 1, *a*, ми бачимо, що аорта є *більш евклідовим* об'єктом, ніж фракталоподібні легені або шум, тому можна припустити, що для аналізу та обробки зображення такого типу саме фрактальний підхід може виявитися більш ефективним, ніж, наприклад, підхід, заснований на аналізі інтенсивностей.

Для перевірки цього припущення ми спочатку трансформували МРТ-зображення з простору інтенсивностей у простір фрактальних розмірностей FD . Реалізація цього перетворення була досягнута шляхом застосування алгоритму диференціального підрахунку боксів [4] на різних масштабах. Це дозволило виявити області з різною текстурою біологічних тканин та ізолювати зашумлені області зображення.

Обчислювати фрактальну розмірність можна багатьма методами: визначити Хаусдорфову розмірність, застосувати метод підрахунку боксів чи обрахувати ємнісну розмірність [3 – 6]. У нашому випадку був застосований алгоритм диференціального підрахунку боксів на різних масштабах, який показав високу ефективність при підрахунку фрактальних розмірностей значних за розмірами зображень [4].

Згідно цього підходу, напівтонове зображення із шкалою градації сірого представляється як поверхня у тривимірному просторі. При цьому оригінальне зображення $I(x, y)$ розміру $M \times N$ пікселів трансформується у FD образ з допомогою застосування скануючого нелінійного ядра $w(s, t)$ розміру $m \times n$, яке виконує пошук різностей між пікселями з найвищою (p_{\max}) та найменшою (p_{\min}) інтенсивностями. Невід’ємні змінні a і b визначають центр ядра для пікселя p_{xy} у оригінальному зображенні. Ядро розраховується згідно співвідношення

$$w(s, t) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \text{floor} \left[\frac{p_{\max}(s, t) - p_{\min}(s, t)}{r} \right] + 1,$$

де $r = 2, 3, \dots, j$, $a = \text{ceil} \left(\frac{m-1}{2} \right)$, $b = \text{ceil} \left(\frac{n-1}{2} \right)$. Тоді необхідне число боксів, потрібних для того, щоб повністю покрити образ розраховується як:

$$N_d(x, y, d) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) I(x+s, y+t) (j/r)^2,$$

де $d = 1, 2, \dots, j-1$. Остаточню, фрактальну розмірність FD визначають як нахил лінійної регресії у подвійному логарифмічному масштабі змінних $N_d(x, y, d)$ і r [4].

Результат цієї процедури показаний на рис. 1, б. На рисунку ясно видно, що перехід від простору інтенсивностей у простір фрактальних розмірностей дозволив досить якісно виявити об’єкти з різною структурною складністю. Тепер, до цього зображення вже можна застосовувати *традиційні методи сегментації*. Зокрема, якщо до зображення на рис. 1, б застосувати *порогову обробку за алгоритмом Отцу*, то на виході отримаємо бажаний результат – зображення аорти (рис. 1, в), очищене як від зображення легеневої тканини, що оточує цю аорту, так і від апаратних шумів, які в оригінальному зображенні мають досить велику інтенсивність і займають значну площу.

Після застосування цього алгоритму до кожного перерізу, остаточно було отримане очищене тривимірне зображення аорти (рис. 3, а).

Морфологічна сегментація. Термін «морфологія» походить від давньогрецької «*μορφή*» – «форма» та «*λογος*» – «доктрина», «слово». Тобто морфологія, це наука, що вивчає форми і паттерни, їх взаєморозташування та співвідношення до цілого (Gestalt). При цьому у якості предмету вивчення можуть виступати фізичні об’єкти (як, наприклад, у геології, астрономії, біології), соціальні об’єкти (організації та соціальні системи), ментальні об’єкти (лінгвістичні форми, концепції чи системи ідей).

Математична морфологія (ММ) – галузь математики, яка базується на теорії множин, топології та випадкових функціях. У контексті обробки зображень математична морфологія є інструментом для вилучення визначених компонентів зображення, корисних для представлення та опису форми об’єктів (границь, остовів, опуклих чи вгнутих оболонки). Історично, математична морфологія почалася як методика для вивчення випадкових множин із застосуванням у гірничодобувальній промисловості [7]. У даний час, вона використовується для відокремлення, модифікації та об’єднання структур зображення [7 – 9]. Ця методика обробки зображень полягає у порівнянні об’єктів, що аналізуються (зображення), з іншим об’єктом відомої форми, що називається структуруючим елементом. Змінюючи структуруючий елемент, ми можемо вилучати різні типи інформації з сигналу. Структуруючий елемент може характеризуватися формою, шириною та висотою. Результат обробки морфологічних зображень залежить від розміру та вмісту структуруючого елементу, а також від використовуваної морфологічної операції.

Базовими операціями у ММ є *морфологічна дилатація* та *ерозія*. Усі інші методи та алгоритми аналізу та обробки у ММ є їхніми комбінаціями.

Морфологічне нарощування (дилатація) зображення $f(x)$ з градацією сірого на множині X структурним елементом B визначається, як максимальне значення оригінального образу у околі, визначеному структурним елементом у точці x ,

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x+b).$$

Морфологічна ерозія зображення $f(x)$ – операція обернена до попередньої і визначається виразом:

$$[\varepsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x+b).$$

Морфологічне розмикання (*open*) $\gamma_B(f)$ образу $f(x)$ структуруючим елементом B визначається як морфологічне нарощування образу після його ерозії структуруючим елементом B :

$$\gamma_B(f) = \delta_B[\varepsilon_B(f)].$$

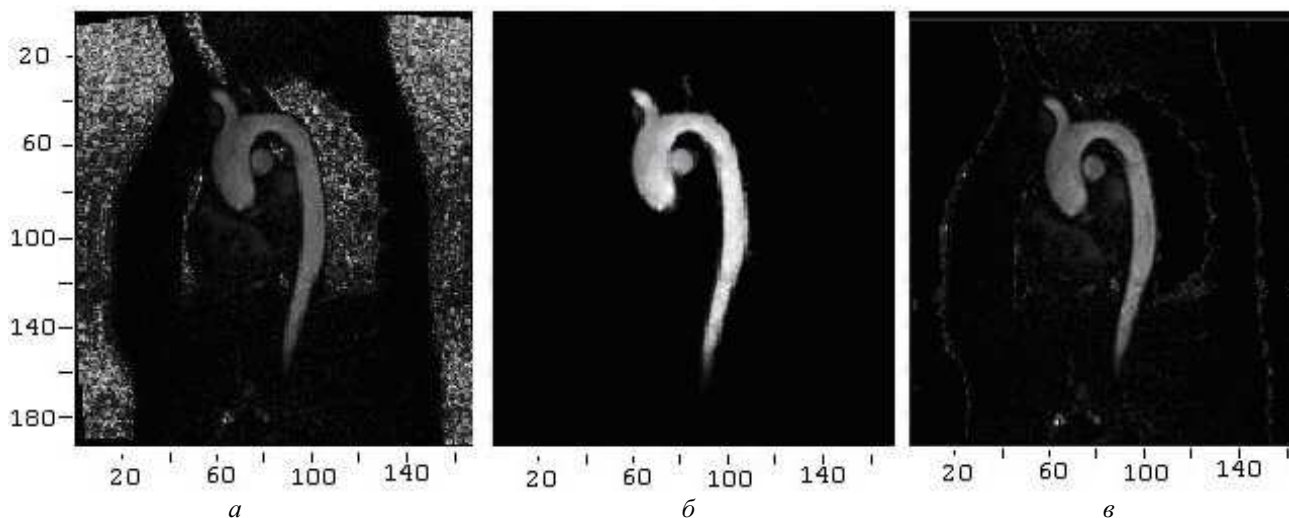


Рис. 2. – Сегментація 14-го перерізу $192 \times 168 \times 28$ 3D MPT образу аорти (усі вісі у пікселях): *a* – оригінальне зображення; *б* – результат фрактальної сегментації; *в* – результат морфологічної сегментації.

У загальному випадку розмикання згладжує контури об'єкта, обриває вузькі перешийки та ліквідує виступи з невеликими розмірами.

Морфологічне замикання (*close*) $\varphi_B(f)$ образу $f(x)$ структуруючим елементом B є оберненою операцією до попередньої і визначається як морфологічна діляція образу $f(x)$ із структуруючим елементом B до якого застосована ерозія із структуруючим елементом B :

$$\varphi_B(f) = \varepsilon_B[\delta_B(f)].$$

Замикання також проявляє тенденцію до згладжування контурів, але, на відміну від розмикання, у загальному випадку воно заповнює вузькі розриви та довгі поглиблення малої ширини, а також ліквідує невеликі отвори і заповнює проміжки контуру.

При розробці нашого алгоритму ми виходили з ряду характеристик, властивих досліджуваному тривимірному образу: повітропроводи у легенях є кусковолінійними формами і можуть бути представлені у 2D випадку як зв'язані лінійні сегменти, а у 3D випадку – як пов'язані між собою циліндри, що формують деревоподібну структуру. Інші органи та маскуючі фактори (альвеоли чи шум) можуть бути представлені як сфери різного діаметру. Нагадаємо, що метою обробки у нашому випадку є стінки аорти. Виходячи із зазначеного, у нашому сегментуючому алгоритмі застосовуються два типи структуруючих елементів: циліндри різного радіусу, вісь яких може змінювати свій напрям у просторі, та сфери з різними радіусами. Радіуси циліндрів і сфер змінювались послідовно від одного пікселя до 7. При цьому були реалізовані такі морфологічні операції, як мінімізуюче морфологічне відкриття та морфологічна реконструкція діляцією.

Нагадаємо, що при морфологічній реконструкції застосовується два образи – так званий маркер f та маска g . Ці образи мають бути однакової розмірності і задовольняти умові $f \leq g$.

Морфологічне відкриття образу з циліндричним структуруючим елементом B , довжини L радіусу r видаляє циліндричні форми у тривимірному образі, якщо структуруючий елемент і форма у образі взаємно ортогональні. Таке видалення еквівалентне заміні відповідних форм локальним оточуючим фоном. Отже, для деревоподібної структури (геометрична модель легенів) існує циліндрична форма з принаймні одним напрямком і одним радіусом, яка співпадає з «гілкою» цієї структури і може бути видалена відповідно підібраним структуруючим елементом та замінена локальним фоном. Таким чином, послідовно видаляючи з оригінального образу спочатку шумову складову (структуруючий елемент – сфери змінного радіусу), а потім – елементи легеневої тканини (структуруючий елемент – змінні за напрямом та радіусом циліндри), що оточує аорту, було отримане тривимірне відфільтроване та сегментоване зображення аорти. Зауважимо, що на відміну від першого методу, коли послідовно сегментувався кожен двовимірний переріз і лише потім формувався тривимірний образ, морфологічний підхід дозволяє працювати одразу безпосередньо з тривимірним образом, що більш фізично зумовлено і повинно давати якісніші результати.

На рис. 2 та рис. 3, б надано результати порівняння роботи запропонованих алгоритмів відповідно у двовимірному та тривимірному представленні. У верхній частині рисунку представлено результат фрактального підходу до сегментації аналізованого MPT-образу, а у нижній частині – вихід алгоритму, заснованого на методах математичної морфології.

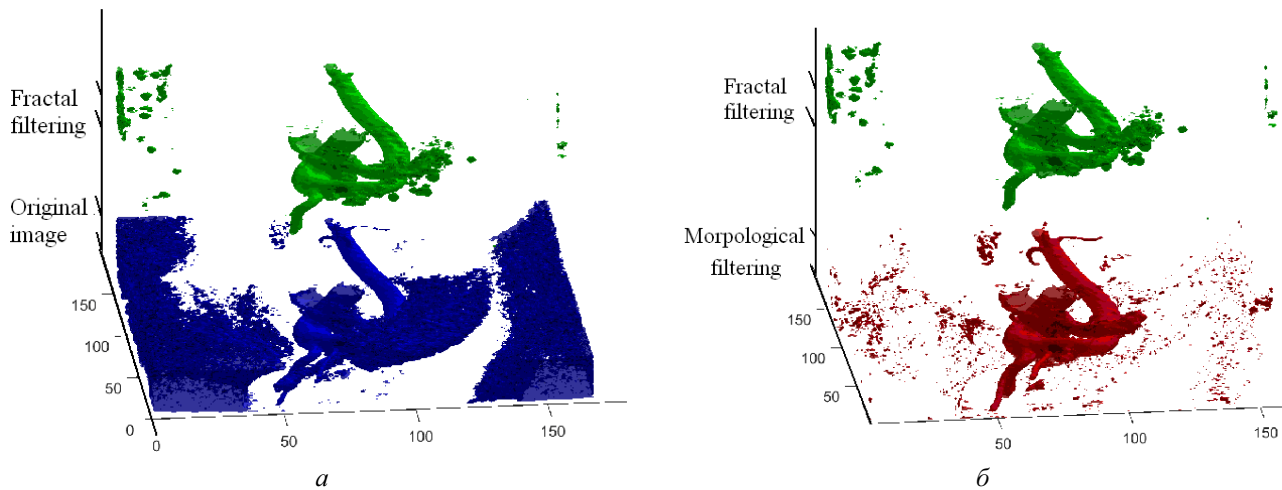


Рис. 3 – Знешумлення та сегментація $192 \times 168 \times 28$ 3D МРТ образу аорти (усі вісі у пікселях):
 а – оригінальний образ (нижнє зображення), та результат фрактальної фільтрації та сегментації;
 б – порівняння фрактальної (верхнє зображення) та морфологічної сегментації.

Висновки. Сучасні технології МРТ не тільки дають можливість неінвазивно (без втручання) візуалізувати внутрішні органи людини, але й досліджувати роботу цих органів – вимірювати швидкість кровотоку, току спинно-мозкової рідини, визначати рівень дифузії у тканинах, бачити активацію кори головного мозку при функціонуванні органів, за які відповідає досліджувана ділянка мозку. МРТ дослідження особливо актуальні у ситуаціях, коли пацієнтам потрібно багаторазово проходити дослідження і тому при застосуванні комп'ютерної томографії вони можуть отримати завелике радіологічне навантаження. У запропонованій роботі представлені алгоритми сегментації та покращення якості тривимірного зображення просвіту аорти у фазово-контрастній магніто-резонансній ангіографії. Отримані результати демонструють високу ефективність розроблених алгоритмів, які базуються на методах фрактального аналізу та математичної морфології. Показано, що розроблені програми обробки зображень здатні якісно відокремлювати область інтересу від складного фону з шумом та з маскуючими структурами.

Зокрема, було виявлено, що однією з переваг фрактального аналізу у порівнянні з «класичним» аналізом сигналу є спосіб обробки неоднорідностей. А саме – при застосуванні фрактальних методів аналізу інформація вилучається безпосередньо з усього об'єкту – глобально. Отже, така сегментація не призводить до деградації вихідного зображення: взаємозв'язок між пікселями залишається незмінним. Таким чином, деталі зображення повністю зберігаються, що особливо важливо при постановці діагнозу та моніторингу захворювання.

З іншого боку, використання методів математичної морфології дозволяє більш точно виявляти дрібні деталі і демонструє високу ефективність з точки зору витрат комп'ютерного часу. Такі особливості, зокрема, забезпечили можливість не тільки виконати тривимірну обробку зображення, але й реалізувати якісну й швидку чотири-тривимірну сегментацію і отримати анімацію роботи легенів і аорти у часі.

Таким чином, обидва способи показали свою ефективність, а вибір конкретного підходу залежатиме від потреб практики. Запропоновані авторами підходи є досить універсальними для обробки МРТ-зображень грудної клітини і дозволяють синтезувати аналогічні алгоритми для вельми широкого діапазону задач обробки та розпізнавання образів.

У подальшому планується розробити об'єктивні методи оцінки якості знешумлення та сегментації досліджуваних тривимірних об'єктів з метою порівняння цих методів між собою, та з суб'єктивними оцінками експертів.

Подяки. Автори висловлюють подяку за підтримку представлених досліджень бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКБК 6541230) і фінансування ЄС проекту EUMLS (EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences) – grant agreement PIRSES-GA-2011-295164-EUMLS, та лабораторії біомеханіки кафедри електроніки, інформації та біоінженерії Політехнічного університету Мілана.

Список літератури

1. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals // Flammarion, 4 edition. – 1995. – 220 p. – ISBN: 2-08-081301-3.
2. Mandelbrot B. B. Fractal Geometry of Nature. // San-Francisco : W. H. Freeman and Co. – 1982. – 460 p.
3. Chen S. S., Keller J. M., Crownover R. M. On the calculation of fractal features from images // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 1993. – vol. 15. – № 10. – P. 1087 – 1090.
4. Sarkar N., Chaudhur B. B. An Efficient Differential Box-counting Approach to Compute Fractal Dimension of Image // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. – 1994. – vol. 24. – № 1. – P. 115 – 120.
5. Traina C. J., Traina A., Wu L., Faloutsos C. Fast feature selection using fractal dimension // in Proc. 15th Braz. Symp. Databases. – 2000. – pp. 158 – 171.
6. Omar S. Al-Kadi, Watson D. Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images // IEEE Trans. Biomed. Eng. – Jul. 2008. – vol. 55. – № 7. – P. 1822 – 1830.
7. Matheron G. Random sets and integral geometry // New York : John Wiley & Sons, – 1975. – 261 p.

8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology // IEEE Trans. PAMI. – 1987. – vol. 9. – №. 4. – P. 532 – 550.
9. Heijmans H. J. A. M. Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement. – Boston : Academic Press, MA, 1994. – 520 p.

References (transliterated)

1. Mandelbrot B. B. *Les Objets Fractals*. Flammarion, 4 edition. 1995. 220 p. ISBN: 2-08-081301-3.
2. Mandelbrot B. B. *Fractal Geometry of Nature*. San-Francisco, W. H. Freeman and Co. 1982. 460 p.
3. Chen S. S., Keller J. M., Crownover R. M. On the calculation of fractal features from images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1993, vol. 15, no. 10, pp. 1087–1090.
4. Sarkar N., Chaudhur B. B. An Efficient Differential Box-counting Approach to Compute Fractal Dimension of Image. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*. 1994, vol. 24, no. 1, pp. 115–120.
5. Traina C. J., Traina A., Wu L., Faloutsos C. Fast feature selection using fractal dimension. in *Proc. 15th Braz. Symp. Databases*. 2000, pp. 158–171.
6. Omar S. Al-Kadi, Watson D. Texture analysis of aggressive and nonaggressive lung tumor CE CT images. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 2008, vol. 55, no. 7, pp. 1822–1830.
7. Matheron G. *Random sets and integral geometry*. New York, John Wiley & Sons Publ., 1975. 261 p.
8. Haralick R. M., Sternberg S. R., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Trans. PAMI*. 1987, vol. 9, no. 4, pp. 532–550.
9. Heijmans H. J. A. M. *Morphological image operators. Advances in electronics and electron physics, supplement*. Boston, Academic Press, MA Publ., 1994. 520 p.

Надійшла (received) 29.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Рудницький Олександр Геннадійович (Рудницкий Александр Геннадиевич, Rudnitskii Alexandr Gennadiievich) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-50; e-mail: a.rudnitskii@gmail.com.

Рудницька Марія Олександрівна (Рудницкая Мария Александровна, Rudnytska Maria Alexandrovna) – провідний інженер, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-53; e-mail: misteria_z@bigmir.net.

Ткаченко Людмила Володимирівна (Ткаченко Людмила Владимировна, Tkachenko Ludmila Vlalimirovna) – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (066) 450-79-11; e-mail: lusia.tkch@gmail.com.

УДК 628.337:66.087.5

А. П. САФОНИК, О. В. ПРИСЯЖНЮК, В. А. ПАСІЧНИК**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИЩЕННЯ СТИЧНИХ ВОД МЕТОДОМ ЕЛЕКТРОКОАГУЛЯЦІЇ В НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ**

Проаналізовано проблеми моделювання процесу очищення води в електрокоагуляційній камері в неізотермічних умовах. Визначено основні параметри для розрахунку тепло- та масопереносу в електрокоагуляторі. Побудовано математичну модель, що описує закономірності протікання процесів в електрокоагуляційній установці із уточненням оптимальних параметрів. Знайдено розв'язки відповідної модельної задачі з використанням асимптотичного наближення розв'язку відповідної крайової задачі та наведені результати комп'ютерного експерименту.

Ключові слова: математичне моделювання, електрокоагуляція, електрофлотация, температурний режим.

А. П. САФОНИК, Е. В. ПРИСЯЖНЮК, А. В. ПАСЕЧНИК**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОКОАГУЛЯЦИИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Проанализированы проблемы моделирования процесса очистки воды в электрокоагуляционной камере в неизоотермических условиях. Определены основные параметры для расчета тепло- и массопереноса в электрокоагуляторе. Построена математическая модель, описывающая закономерности протекания процессов в электрокоагуляционной установке с уточнением оптимальных параметров. Найдено решение соответствующей модельной задачи с использованием асимптотического приближения решения соответствующей краевой задачи и приведены результаты компьютерного эксперимента.

Ключевые слова: математическое моделирование, электрокоагуляция, электрофлотация, температурный режим.

А. Р. САФОНЬК, О. В. ПРЬСЯЖНЬУК, В. А. ПАСИЧНЬУК**MODELING OF PROCESS OF WASTEWATER TREATMENT BY ELECTROCOAGULATION IN NON-ISOTHERMAL CONDITIONS**

The problems of modeling the process of water treatment in an electrocoagulation chamber in nonisothermal conditions are analyzed. The basic parameters for calculating the mass and heat transfer in the electrocoagulator are determined. The mathematical model describing the patterns of process flow in the electrocoagulation installation with the specification of the optimal parameters of the process is constructed. The solutions of the corresponding model problem are found using the asymptotic approximation of the solution of the corresponding boundary value problem and the results of the computer experiment are given. In this case study, the effect of current strength on the concentration of the target component at the exit from the

© А. П. Сафоник, О. В. Присяжнюк, В. А. Пасічник, 2019

reactor is determined using the developed mathematical model. The influence of the electrode heat emission rate on the efficiency of purification process is tested.

Key words: mathematical modeling, electrocoagulation, electroflotation, temperature regime.

Вступ. Збереження водних ресурсів є одним з найбільших викликів 21-го століття. Серед найбільших загроз: швидка урбанізація, індустріалізація та глобальна зміна клімату у бік потепління. В даний час доступ до безпечної питної води обмежений, забруднення води може серйозно вплинути на водні екосистеми та доступність прісної води. Таким чином, існує потреба у розробці ефективних технологій та підходів для очищення та управління стічними водами, для підтримки якості та поліпшення кількості у великих масштабах, забезпечуючи при цьому охорону навколишнього середовища та сталий розвиток, наприклад, міські, промислові та сільськогосподарські відходи. Електрохімічні процеси (електроліз та електрокоагуляція) успішно використовуються для видалення забруднюючих речовин у різних промислових стічних водах [1]. Механізми видалення, що відбуваються в процесі електролізу, зазвичай включають окислення, відновлення, розкладання, тоді як механізми в процесі електрокоагуляції включають коагуляцію, адсорбцію, осадження і флотацію [1 – 3].

На сьогодні велика кількість наукових досліджень присвячена моделюванню електрокоагуляційної очистки стічних вод [1 – 3, 9 – 13]. Проте запропоновані математичні моделі переважно не описують кінетику процесу всередині електрокоагулятора, або не враховують ряд технологічних параметрів, наприклад температуру води, силу струму тощо. Крім того, врахування співвідношення між величинами параметрів, які характеризують певні складові процесу, зокрема домінування конвективних та масообмінних складових над дифузійними, приводить до ускладнення математичної моделі процесу сингулярностями, породженими малими параметрами.

Аналіз останніх досліджень. Електрокоагуляція є дешевим процесом і ефективним методом очищення води і стічних вод. Він був успішно випробуваний для очищення питної води [1], текстильних стічних вод [2, 6, 7, 9], промислових стічних вод [4]. Він також використовувався для видалення фенолу і поверхнево-активних речовин з промислових стічних вод. В [1, 2] здійснено огляд підходів до моделювання електрохімічних установок з акцентом на такі питання, як теоретичне розуміння механізмів електрокоагуляції, моделювання на основі обчислювальної гідродинаміки та техніко-економічна оптимізація процесу. В роботах [9 – 12] досліджували процес електрофлотації в електрокоагуляторі з використанням математичного моделювання на основі обчислювальної гідродинаміки. Авторами також було досліджено вплив різних параметрів, зокрема матеріалу електродів, геометричних характеристик електрокоагулятора, щільності струму тощо на ефективність процесу електрокоагуляції. В [13] адаптована феноменологічна математична модель процесу електрокоагуляції для дослідження впливу сили струму на якість очищення стічних вод та запропоновані засоби імітаційного моделювання для оцінки динамічних характеристик процесів, що відбуваються в електрокоагуляторі. Актуальним завданням залишається адаптація математичної моделі електрокоагуляційної обробки, яка враховує процес утворення шламу заліза із розчину електроліту, вплив технічних характеристик на кінетику процесу в електрокоагуляторі, а також дослідження впливу параметрів на ефективність утворення шламу.

Постановка задачі. Розчин електроліту надходить в камеру електрокоагулятора, проходячи через міжелектродний простір, вода насичується бульбашками газу і відбувається спливання бульбашок з частинками коагулянту. Розрахунок установки зводиться до визначення загального обсягу електродного відділення, а також необхідних конструктивних і електричних параметрів.

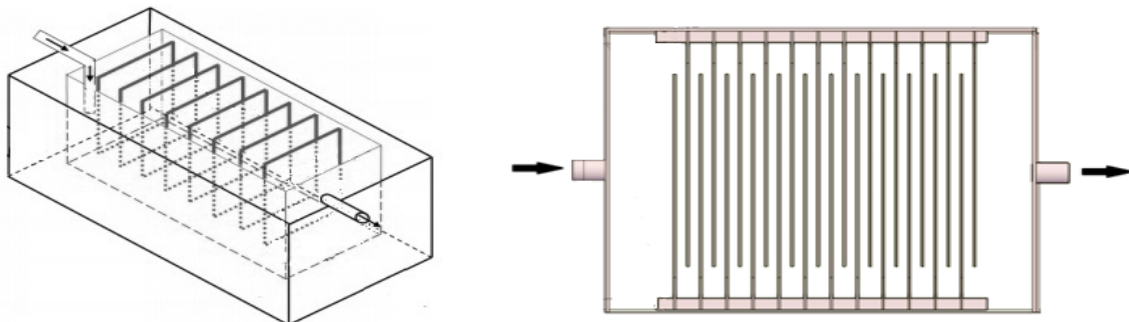


Рис. 1 – Схематичне представлення камери електрокоагулятора.

Камера електрокоагулятора складається з дванадцяти пар залізних пластин розміром 75×83.5 см і товщиною 0.3 см. Відстань між електродами між кожними двома пластинами становить 2.3 см. Відстань від стінки камери до першого та останнього електрода становить 25 см, відстань між бічною стінкою і електродами, а також від нижнього краю електродних пластин до дна та від верхнього краю до верху камери – по 10 см, відповідно геометричні розміри електрокоагуляційної камери: довжина – 1.1 м, ширина – 0.95 м, висота – 1.035 м, об'єм камери – 1.08 м^3 . Об'ємна витрата становить $6 \text{ м}^3/\text{год}$.

Питома витрата електроенергії в камері розраховується за формулою:

$$E_n = \frac{W}{Q},$$

де $W = I \cdot U \cdot N \cdot n_k$ – потужність (кВт); $I = i \cdot S_e$ – сила струму в установці (А); U – напруга (В); N – кількість секцій в установці; n_k – кількість пластин; S_e – активна поверхня електродів (м^2); i – густина струму ($\text{А}/\text{м}^2$).

Активна поверхня знаходиться за формулою:

$$S = S_e \cdot n,$$

де S_e – площа однієї пластини; n – кількість пластин.

У загальному випадку критерій оптимізації має вигляд:

$$Z = \max(P \cdot \bar{C} - K - P_e \cdot E). \quad (1)$$

Тут P – вартість сировини, \bar{C} – кількість коагулянту, вилученого на виході з установки, K – річні капітальні та інші, пов'язані з ними витрати, E – щорічне споживання енергії установкою для отримання коагулянту, розраховується як добуток питомої витрати електроенергії на кількість відпрацьованих годин, P_e – вартість одиниці енергії. Очевидно, більш наочно з економічної точки зору використовувати річне споживання електроенергії і вартість продукції в критерії (1). Для розрахунку максимального значення цільової функції необхідно розрахувати концентрацію утвореного коагулянту.

Математична модель. Моделювання процесів виконано на основі рівнянь, що описують рух нестисливої рідини між електродами. Зміну концентрації C двовалентного заліза опишемо за допомогою рівняння перенесення [4]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + S(C), \quad (2)$$

де $D = \bar{D} + D_{turb}$ – сумарний коефіцієнт дифузії; \bar{D} – коефіцієнт молекулярної дифузії; D_{turb} – коефіцієнт турбулентної дифузії, що залежить від турбулентного числа Шмідта Sc_T (згідно моделі Кейса – Кроуфорда [5]).

Ефективність утворення флоків (коагулянту) значною мірою залежить від розміру утворених бульбашок [10]. Електрофлотация виробляє велику кількість тонкодисперсних газових бульбашок, розмір яких коливається від 5 до 90 мкм залежно від стану електролізу. Швидкість флотаційної складової процесу кількісно описується наступним чином [12]:

$$S(C) = \left(\eta \frac{3R_g T I}{8F d_b A_s P} \right) C, \quad (3)$$

де R_g – газова константа; P – це атмосферний тиск; A_s – площа поперечного перерізу камери та η – ефективність накопичення однією бульбашкою – визначається як частка забруднюючої речовини на шляху бульбашки, які фактично налипають на бульбашку. В [12] також запропоновано числові вирази для розрахунку η .

Для ізотермічної течії нестисливої рідини [8]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y T)}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_V}{c\rho}, \quad (4)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності ($\text{м}^2/\text{с}$); λ – теплопровідність електроліту ($\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{с}$); q_V – інтенсивність внутрішніх джерел теплоти ($\text{Вт}/\text{м}^3$); c – теплоємність ($\text{Дж}/\text{кг}$); ρ – густина ($\text{кг}/\text{м}^3$). Кількість теплоти, що виділяється під час електродного нагрівання рідини в електроліті, пропорційна силі струму, часові його проходження і падінню напруги $q_V = I \cdot U \cdot t$, де U – прикладена напруга (В); I – сила струму (А).

Таким чином, для знаходження розподілів концентрації коагулянту C та температури T в електрокоагуляторі отримано систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_x C)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y C)}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \left(\eta \frac{3R_g T I}{8F d_b A_s P} \right) C; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y T)}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{I U t}{c\rho}; \end{cases} \quad (5)$$

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y);$$

$$C(0, y, t) = C_*(y, t), \quad T(0, y, t) = T_*(y, t), \quad C(L, y, t) = C^*(y, t), \quad T(L, y, t) = T^*(y, t);$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=y^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\alpha(T(x, 0, t) - T_*^*), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y^*} = -\alpha(T(x, y^*, t) - T_*^*). \quad (6)$$

У рівняннях системи (5) невідомою величиною є швидкість руху рідини. Тому для визначення розподілу температури та концентрації коагулянту в потоці рідини необхідно попередньо розв'язати гідродинамічну задачу, тобто визначити розподіл швидкостей у потоці рідини [5, 6]. Одним із ефективних шляхів розв'язання відповідних задач у випадку переважання конвективних складових процесу над дифузійними при фільтрації водних розчинів в модельних областях, обмежених еквіпотенціальними або квазіеквіпотенціальними лініями та лініями

течії, є: поетапна фіксація характеристик і складових процесу та середовища; розв'язання задач фільтрації з використанням конформних або квазіконформних відображень області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу на фізичну область; перехід у рівняннях конвективної дифузії і граничних та початкових умовах від фізичних змінних до координат області комплексного потенціалу або квазіпотенціалу, що значно спрощує їх запис і забезпечує можливість проведення автономних досліджень, розпаралелювання обчислень. Врахувавши, що задача на знаходження поля швидкостей є розв'язаною [14], зокрема, обчислено поле швидкостей u і ряд інших величин, наприклад фільтраційну витрату, та, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ у системі (5) та умовах (6), отримано відповідну дифузійну задачу [14, 15], розв'язок якої з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$, де ε – малий параметр, що характеризує переважання конвективної та масообмінної складової процесу масоперенесення ($D = \varepsilon d$, $|v| > v_* \gg \delta$), шукатимемо у вигляді асимптотичних рядів [14]:

$$C(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i C_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{C}_i(\xi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} C_i(\varphi, \zeta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \bar{C}_i(\varphi, \phi, t) + R_C(\varphi, \psi, t, \varepsilon); \quad (7)$$

$$T(\varphi, \psi, t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i T_i(\varphi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{T}_i(\xi, \psi, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} T_i(\varphi, \zeta, t) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \bar{T}_i(\varphi, \phi, t) + R_T(\varphi, \psi, t, \varepsilon), \quad (8)$$

де R_C, R_T – залишкові члени розкладів; $C_i(\varphi, \psi, t)$, $T_i(\varphi, \psi, t)$ – регулярні частини асимптотики; $\bar{C}_i(\xi, \psi, t)$, $\bar{T}_i(\xi, \psi, t)$ – функції типу примежового шару на виході фільтраційного потоку із області; $C_i(\varphi, \zeta, t)$, $T_i(\varphi, \zeta, t)$, $\bar{C}_i(\varphi, \phi, t)$, $\bar{T}_i(\varphi, \phi, t)$ – функції типу примежового шару в околах бокових стінок електрокоагулятора; $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\zeta = y \cdot \varepsilon^{-1/2}$, $\phi = (y^* - y) \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Вирази для регулярних частин асимптотики знайдені в результаті застосування процедури підстановки рядів (7) – (8), привірення коефіцієнтів при однакових степенях малого параметра і розв'язання відповідних задач:

$$C_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} e^{\varphi_*} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\varphi, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t)}{v(\bar{\varphi}, \psi)} d\bar{x} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{h_i(\varphi, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\varphi, \psi) + t)}{v(\bar{\varphi}, \psi)} e^{-\int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_i(\bar{\varphi}, \psi, f(\bar{\varphi}, \psi) - f(\bar{\varphi}, \psi) + t)}{v(\bar{\varphi}, \psi)} d\bar{\varphi}} d\bar{\varphi}, & t > f(\varphi, \psi); \\ e^0 \int_0^t \frac{g_i(f^{-1}(\bar{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \bar{t}) d\bar{t}}{\int_0^{\bar{t}} h_i(f^{-1}(\bar{t} + f(\varphi, \psi) - t, \psi), \bar{t}) e^{-\int_0^{\bar{t}} g_i(f^{-1}(\bar{t} + f(x) - t, \psi), \bar{t}) d\bar{t}}} d\bar{t}, & t \leq f(\varphi, \psi), i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

$$T_i(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} \int_0^t \bar{T}_i(f^{-1}(\bar{t} - t + f(\varphi, \psi), \psi), \bar{t}) d\bar{t} + \tau_{*i}^*(\varphi, \psi), & t \leq f(\varphi, \psi); \\ \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\bar{T}_i(\bar{\varphi}, f(\bar{\varphi}, \psi) + t - f(\varphi, \psi))}{v(\bar{\varphi}, \psi)} d\bar{\varphi} + \tau_i^*(\varphi, \psi), & t > f(\varphi, \psi), i = \overline{0, n}, \end{cases}$$

$$f(\varphi, \psi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{v(\bar{\varphi}, \psi)}; \quad \bar{T}_0(\varphi, \psi, t) = \frac{I \cdot U \cdot t}{c \rho}; \quad \tau_0^*(\varphi, \psi) = T^*(f^{-1}(f(\varphi, \psi) - t, \psi)); \quad \tau_{*0}^*(\varphi, \psi) = T_0(t - f(\varphi, \psi), \psi);$$

$$\bar{T}_i(\varphi, \psi, t) = \bar{d}_T \left(\frac{\partial^2 T_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_{i-1}}{\partial \psi^2} \right); \quad \bar{d}_T = \frac{a \lambda_m}{\delta \lambda}; \quad \tau_i^*(\varphi, \psi) = \tau_{*i}^*(\varphi, \psi) = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad g_i(\varphi, \psi, t) = \eta \frac{3R_g I T_i(\varphi, \psi, t)}{8F d_b A_s P};$$

$$h_i(\varphi, \psi, t) = \bar{d}_{iC} \left(\frac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C_{i-1}}{\partial \psi^2} \right); \quad \bar{d}_{iC} - \text{відомі функції, які є сумою добутків членів ряду (7) – (8), їх частинних}$$

похідних, а також коефіцієнти при i -тих степенях малого параметра у розкладі відповідних функцій $d(L - \xi \delta, \psi, t)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = L$. Функції типу примежового шару знаходимо аналогічно до [14, 15].

Результати комп'ютерного моделювання. Комп'ютерне моделювання проводилось при таких значеннях вхідних даних: $U = 24$ В, $T_*^* = 294$ К, $\eta = 0.8$, $c = 3.31 \cdot 10^3$ Дж/кг, $\rho = 1060$ кг/м³, $\lambda = 0,2$ Вт/м·с, $\lambda_m = 0.39$ Вт/м·с, $a = 1.39 \cdot 10^{-8}$ м²/с, $R_g = 8.31$ Дж/(моль·К), $F = 9.65 \cdot 10^4$ Кл/моль, $I = 70$ А, $A_s = 15$ м², $d_b = 1.5 \cdot 10^{-6}$ м, $D = 10^{-9}$ м²/с.

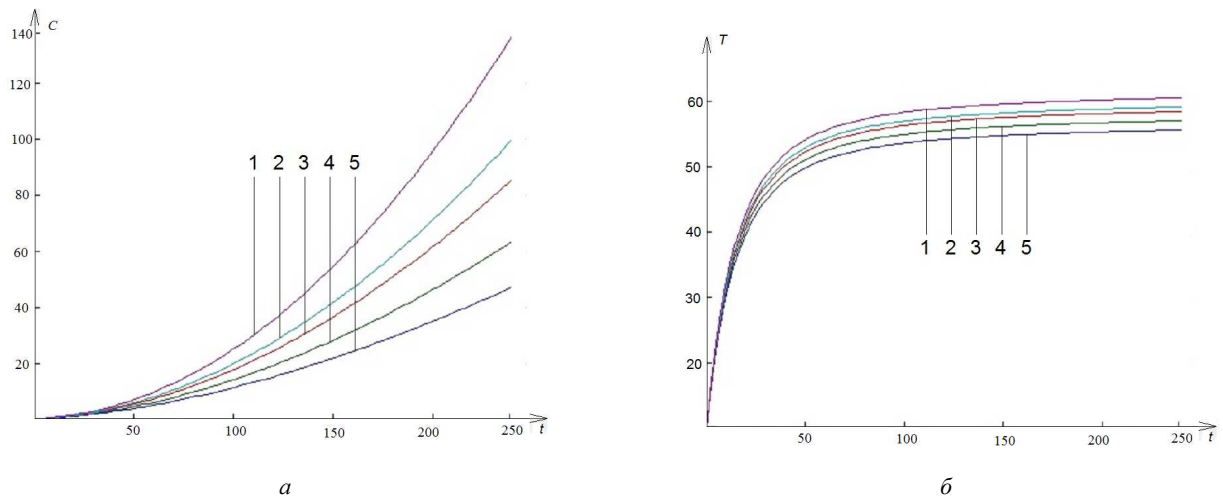


Рис. 2 – Зміна розрахункових величин при силі струму (1 – 72 А; 2 – 70 А; 3 – 69 А; 4 – 67 А; 5 – 65 А) з часом на виході з електрокоагулятора: *a* – концентрація заліза; *б* – температура.

За розробленою методикою було розраховано зміну концентрації заліза при силі струму 1 – 72 А; 2 – 70 А; 3 – 69 А; 4 – 67 А; 5 – 65 А (рис. 2) та зміну відповідної температури води з часом на виході з електрокоагулятора (рис. 2). Як видно із отриманих графіків, ефективність утворення коагулянту (заліза) значною мірою залежить від температури води, яка прогривається до оптимального значення близько 40 хв.

Розподіл концентрації в електрокоагуляторі в моменти часу $t = 60$ хв, 120 хв, 180 хв та 240 хв наведено відповідно на рис. 3. Аналіз розподілу концентрації заліза всередині ректора дозволяє спрогнозувати різні гідродинамічні явища, такі як внутрішня рециркуляція і мертві зони, які впливають на формування коагулянту.

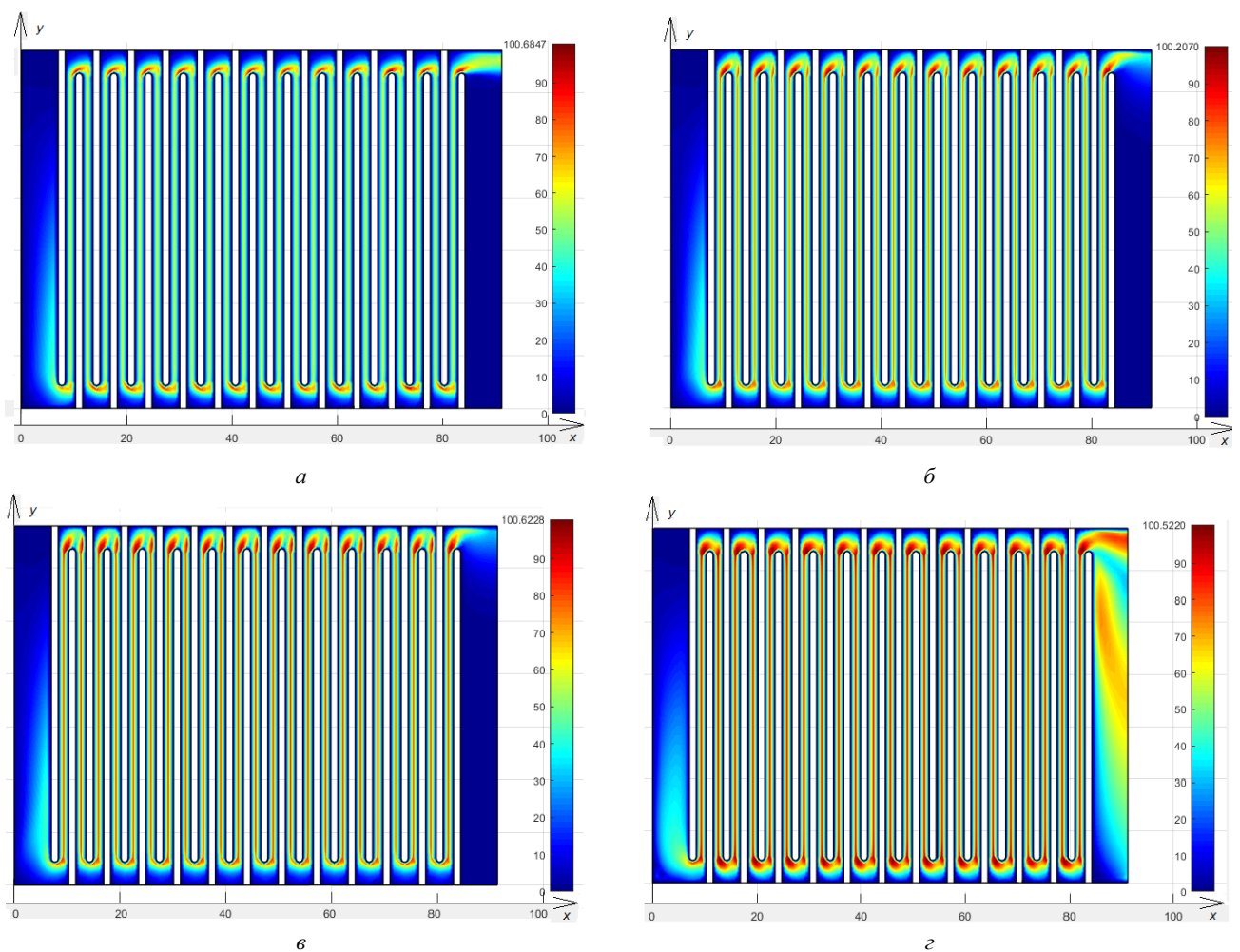


Рис. 3 – Розподіл концентрації коагулянту в електрокоагуляторі в моменти часу: *a* – 60 хв; *б* – 120 хв; *в* – 180 хв; *г* – 240 хв.

Висновки. Розроблені підходи до математичного моделювання та оптимізації дозволяють обрати доцільні конструктивні показники електрокоагуляційної установки, дослідити закономірності протікання процесів тепло- та масообміну. Знайдено розв'язок відповідної модельної задачі з використанням асимптотичного наближення розв'язку відповідної крайової задачі та наведені результати розрахунків розподілу концентрації заліза та температури води в електрокоагуляторі. Запропонована методологія розрахунку розподілу концентрації може бути використана як основа для експериментально-теоретичних досліджень автоматизації процесу утворення коагулянту методом електрокоагуляції.

Список літератури

1. Hakizimana J., Gourich B., Chafi M., Stiriba Y., Vial C., Drogui P., Naja J. Electrocoagulation process in water treatment : A review of electrocoagulation modeling approaches // *Desalination*. – 2017. – vol. 404. – P. 1 – 21.
2. Khandegar V., Saroha A. K. Electrocoagulation for the treatment of textile industry effluent-A Review // *J. Environ. Manag.* – 2013. – 128, 949.
3. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. – New York, USA : Pearson Education, 2007. – 503 p.
4. Sandoval M., Rosalba F., Walsh F. C., Nava J. L., Ponce de León C. Computational fluid dynamics simulations of single-phase flow in a filter-press flow reactor having a stack of three cells // *Electrochim. Acta*. – 2016. – vol. 216. – pp. 490 – 498.
5. Enciso R., Padilla L., Ojeda C., Delgadillo J., Rodriguez I. Computational fluid dynamics characterization of a rotating cylinder electrochemical reactor using an RANS-RNG turbulence model // *Int. J. Electrochem. Sci.* – 2012. – vol. 7. – P. 12181 – 12192.
6. Mehmet K., Orhan T. C., Mahmut B. Treatment of textile wastewaters by electrocoagulation using iron and aluminum electrodes // *Journal of Hazardous Materials B*. – 2003. – vol. 100. – pp. 163 – 178.
7. Dalvand Arash. Dye removal, energy consumption and operating cost of electrocoagulation of textile wastewater as a clean process // *CLEAN–Soil, Air, Water*. – 2011. – vol. 39. – pp. 665 – 672.
8. Кулінченко В. Р., Ткаченко С. Й. Теплопередача з елементами масообміну (теорія і практика процесу). – Київ : Фенікс, 2014. – 917 с.
9. Naje A. S., Chelliapan S., Zakaria Z., Ajeel M. A., Alaba P. A. A review of electrocoagulation technology for the treatment of textile wastewater // *Rev. Chem. Eng.* – 2017. – № 33. – P. 263 – 292.
10. Alam R., Shang J. Electrochemical model of electro-flotation // *Journal of Water Process Engineering*. – 2016. –vol. 12. – pp. 78 – 88.
11. Chen X., Chen G. “Electroflotation”, in Comninellis C., Chen G. (ed.) *Electrochemistry for the Environment*. – Springer Science+Business Media, LLC, 2010. – pp. 263 – 279.
12. Fukui Y., Yuu S. Collection of submicron particles in electro-flotation // *Chemical Engineering Science*. – 1980. –35 (5). – pp. 1097 – 1105.
13. Safonyk A., Bomba A., Tarhoni I. Modeling and automation of the electrocoagulation process in water treatment // *Advances in Intelligent Systems and Computing III*. – 2019. – pp. 451 – 463.
14. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. – Рівне : О. Зень, 2017. – 291 с.
15. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2015. – Vol. 9. – P. 189 – 192.

References (transliterated)

1. Hakizimana J., Gourich B., Chafi M., Stiriba Y., Vial C., Drogui P., Naja J. Electrocoagulation process in water treatment : A review of electrocoagulation modeling approaches. *Desalination*. 2017, vol. 404, pp. 1–21.
2. Khandegar V., Saroha A. K. Electrocoagulation for the treatment of textile industry effluent. *J. Environ. Manag.* 2013, no. 128, 949 p.
3. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. New York, USA, Pearson Education, 2007. 503 p.
4. Sandoval M., Rosalba F., Walsh F. C., Nava J. L., Ponce de León C. Computational fluid dynamics simulations of single-phase flow in a filter-press flow reactor having a stack of three cells. *Electrochim. Acta*. 2016, no. 216, pp. 490–498.
5. Enciso R., Padilla L., Ojeda C., Delgadillo J., Rodriguez I. Computational fluid dynamics characterization of a rotating cylinder electrochemical reactor using an RANS-RNG turbulence model. *Int. J. Electrochem. Sci.* 2012, no. 7, pp. 12181–12192.
6. Mehmet K., Orhan T. C., Mahmut B. Treatment of textile wastewaters by electrocoagulation using iron and aluminum electrodes. *Journal of Hazardous Materials*. 2003, vol. 100, pp. 163–178.
7. Dalvand Arash. Dye removal, energy consumption and operating cost of electrocoagulation of textile wastewater as a clean process. *CLEAN–Soil, Air, Water*. 2011, vol. 39, pp. 665–672.
8. Kulichenko V. R., Tkachenko S. I. *Teplotperedacha z elementamy masoobminu (teoriya i praktyka protsesu)* [Heat transfer with elements of mass transfer (theory and practice of the process)]. Kyiv, Feniks Publ., 2014. 917 p.
9. Naje A. S., Chelliapan S., Zakaria Z., Ajeel M. A., Alaba P. A. A review of electrocoagulation technology for the treatment of textile wastewater. *Rev. Chem. Eng.* 2017, vol. 33, pp. 263–292.
10. Alam R., Shang J. Electrochemical model of electro-flotation. *Journal of Water Process Engineering*. 2016, vol. 12, pp. 78–88.
11. Chen X., Chen G. “Electroflotation”, in Comninellis C., Chen G. (ed.) *Electrochemistry for the Environment*. Springer Science+Business Media, LLC. 2010. pp. 263–279. (глава в книге)
12. Fukui Y., Yuu S. Collection of submicron particles in electro-flotation. *Chemical Engineering Science*. 1980, vol. 35(5), pp. 1097–1105.
13. Safonyk A., Bomba A., Tarhoni I. Modeling and automation of the electrocoagulation process in water treatment. *Advances in Intelligent Systems and Computing III*. 2019, pp. 451–463.
14. Bomba A. Ya., Prisyazhnyuk I. M., Prisyazhnyuk O. V. *Metody teorii zburen' prognovannya protsesiv teplomasoperenesennya v porystykh ta mikroporystykh seredovyshhakh* [Methods of perturbation theory for predicting heat and mass transfer processes in porous and microporous media]. Rivne, O. Zen' Publ., 2017. 291 p.
15. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.

Надійшла (received) 19.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сафоник Андрій Петрович (Сафоник Андрей Петрович, Safonyk Andrii Petrovych) – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (096) 799-99-13; e-mail: safonik@ukr.net.

Присяжнюк Олена Вікторівна (Присяжнюк Елена Викторовна, Prysiazhniuk Olena Victorivna) – кандидат технічних наук, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (067) 125-93-04; e-mail: lenapris@ukr.net.

Пасічник Василь Андрійович (Пасечник Василий Андреевич, Pasichnyk Vasyl Andreevych) – аспірант, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (099) 161-33-96; e-mail: xend777@gmail.com.

УДК 519.6

А. В. СОХАЦЬКИЙ

МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ НЕСУЧИХ СИСТЕМ ПОБЛИЗУ ЗЕМЛІ

Розглядається задача математичного моделювання аеродинаміки транспортних апаратів поблизу землі. Моделювання аеродинаміки несучих систем є надзвичайно актуальною проблемою при проектуванні транспортних апаратів. Це обумовлено складністю опису фізичних процесів реальних турбулентних течій з однієї сторони та необхідністю забезпечення відповідних критеріїв стійкості та керованості транспортним апаратом з іншої. В зв'язку з цим розробка математичних моделей для прогнозування динаміки турбулентних течій навколо транспортних апаратів є невідкладною необхідністю. В роботі розглядаються підходи до моделювання аеродинаміки несучих систем на основі в'язкої та ідеальної рідини. Розроблено комплекс програмного забезпечення для моделювання аеродинаміки транспортних апаратів з використанням осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса та методів дискретних особливостей. Приводяться результати розрахунків та перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: аеродинаміка транспортних апаратів, числове моделювання, метод дискретних вихорів, рівняння Нав'є – Стокса, моделі турбулентності.

А. В. СОХАЦЬКИЙ

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ЗЕМЛИ

Рассматривается задача математического моделирования аэродинамики транспортных аппаратов вблизи земли. Моделирование аэродинамики несущих систем является чрезвычайно актуальной проблемой при проектировании транспортных аппаратов. Это обусловлено сложностью описания физических процессов реальных турбулентных течений с одной стороны и необходимостью обеспечения соответствующих критериев стойкости и управляемости транспортным аппаратом с другой. В этой связи разработка математических моделей для прогнозирования динамики турбулентных течений вокруг транспортных аппаратов является неотложной необходимостью. В работе рассматриваются подходы к моделированию аэродинамики несущих систем на основе вязкой и идеальной жидкости. Разработан комплекс программного обеспечения для моделирования аэродинамики транспортных аппаратов с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса и методов дискретных особенностей. Приводятся результаты расчетов и перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: аэродинамика транспортных аппаратов, численное моделирование, метод дискретных вихрей, уравнения Навье – Стокса, модели турбулентности.

A. V. SOKHATSKY

MODELING AERODYNAMICS OF BEARING SYSTEMS IN THE NEAR-GROUND REGION

In the paper mathematical modeling of aerodynamics of transport vehicle in the near-ground region is considered. Modeling aerodynamics of bearing systems is an extremely relevant issue when planning a transport vehicle. It is caused by complication of description of physical processes of real turbulent flows on the one hand and necessity of providing corresponding criteria of stability and controllability of transport vehicles from the other. In this connection the development of mathematical models for predicting dynamics of turbulent flows round transport vehicles is an urgent necessity. In the paper the approaches to modeling bearing system aerodynamics based on viscous and ideal fluid are presented. The complex of software for modeling transport vehicle aerodynamics using Reynolds – averaged Navier – Stokes equation and method of discrete singularities is developed. The results of calculations and prospect of further research are discussed.

Key words: aerodynamics of transport vehicles, numerical simulation, method of discrete vortices, Navier – Stokes equations, model of turbulence.

Вступ. Визначення аеродинамічних характеристик несучих систем літальних апаратів і на сьогодні є надзвичайно актуальною проблемою. Це обумовлено складністю фізичних процесів, що протікають навколо поверхні літальних апаратів. Окрім цього, природа турбулентних течій, механізм її дії на літальні апарати вивчені не на достатньому рівні. На сьогодні відсутня загальна теорія опису цих фізичних процесів. Створення методів їх математичного моделювання є задачею майбутнього. Особливо важливим є розробка математичних моделей динаміки вихорових течій. [1 – 4].

Аналіз останніх досліджень. Механізм турбулентних течій є недостатньо вивченим, що вносить певні труднощі в розробку методів їх математичного моделювання. В зв'язку з цим фізичні дослідження та розробка математичних моделей для прогнозування динаміки турбулентних течій навколо літальних апаратів потребує інтенсивного розвитку. Для моделювання течій навколо літальних апаратів найбільш поширеними є підходи, основані на моделях ідеальної та в'язкої рідини. Застосування моделі ідеальної рідини в основному базується на використанні рівнянь Ейлера та методу дискретних особливостей в різноманітних концепціях. Класифікація сучасних підходів до математичного моделювання в'язких турбулентних течій представлена на рис. 1 [1]. Для моделювання турбулентних течій найбільш поширеними є наступні підходи [1 – 3]:

- пряме числове моделювання (Direct Numerical Simulation – DNS);
- метод великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES);
- осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є – Стокса. (Reynolds-Averaged Navier – Stokes – RANS).

Найбільш достовірним вважається пряме числове моделювання (DNS). При використанні методу DNS розрізняються усі масштаби турбулентності. Це дозволяє розрахувати амплітудно-частотні та середні характеристики потоку шляхом осереднення за достатньо довгим інтервалом часу. Використання DNS вимагає застосування потужних обчислювальних ресурсів. Передбачається, що широке використання DNS для розв'язування практичних задач стане можливим в кінці нинішнього століття.

Моделювання великих вихорів (LES) займає проміжне становище поміж прямим числовим моделюванням та осередненими рівняннями Нав'є – Стокса. В LES поле течії розділяється на рух великих та дрібних вихорів. Великі вихори розраховуються. Дрібномасштабна турбулентність вважається ізотропною і має універсальний характер. В порівнянні з DNS, метод LES потребує набагато менших ресурсів електронно-обчислювальних машин. Кількість вузлів для LES складає біля 5 % кількості вузлів, необхідних при використанні DNS.

В сучасних методах обчислювальної аеродинаміки застосування моделей в'язкої рідини ґрунтується на використанні осереднених за Рейнольдсом рівняннях Нав'є – Стокса. (Reynolds-Averaged Navier – Stokes – RANS).

На сьогодні найбільш поширеним підходом для моделювання турбулентних течій залишається напівемпірична теорія турбулентності. Напівемпіричні моделі турбулентності розроблені для розрахунку стаціонарних і слабо стаціонарних течій. Їх калібрування обмежується вибором емпіричних констант для тонких зсувних шарів. Напівемпірична теорія турбулентності застосовується при розв'язуванні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса. RANS дозволяє відтворювати тільки середні значення скалярних та векторних параметрів течії. Застосування RANS визначається рівнем замикання осереднених рівнянь. Питання замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса вирішують, виходячи з поставленої конкретної задачі, потрібної точності розв'язування, ресурсів ЕОМ, часових затрат, обмежень.

Досвід застосування методу нестационарних рівнянь Нав'є – Стокса (Unsteady Reynolds-Averaged Navier – Stokes – URANS) виявив цілий ряд протиріч. Намагання обґрунтувати правомірність URANS непереконливі, оскільки традиційні моделі турбулентності калібруються за осередненими за часом характеристиками течії. Моделювання зовнішнього обтікання зі значними відривними зонами, де характерні квазіперіодичні режими течії, методом URANS вдається якісно описати фізичний процес та отримати відповідні фізичному експерименту кількісні параметри течії. В багатьох інших випадках результати розрахунків методом URANS не дають достатньо придатні результати [1]. Залишаються відкритими питання меж його використання.

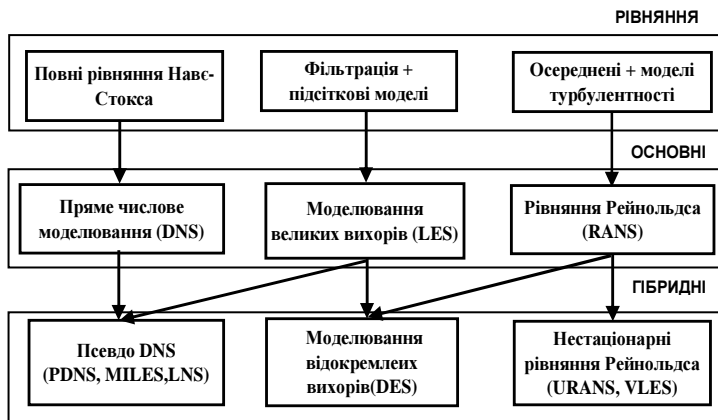


Рис. 1 – Класифікація методів моделювання турбулентних течій.

Постановка задачі. Розроблено методику, алгоритми та програмне забезпечення моделювання течії в'язкого стисливого газу на основі розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса. Розрахункова область навколо транспортного апарата є складною, тому необхідно використовувати криволінійну систему координат. Система рівнянь Нав'є – Стокса в формі Рейнольдса для довільної криволінійної системи координат запишеться

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} = \hat{H}, \quad (1)$$

де \hat{Q} – вектор невідомих змінних; $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ – вектори нев'язких потоків; $\hat{E}_v = \xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v$, $\hat{F}_v = \eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v$, $\hat{G}_v = \zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v$ – вектори в'язких потоків; $\hat{H} = 1/j H$ – вектор джерельних членів.

Вектори $\hat{Q}, \hat{E}, \hat{F}, \hat{G}, E_v, F_v, G_v$ визначаються наступними співвідношеннями

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U u + \xi_x p \\ \rho U v + \xi_y p \\ \rho U w + \xi_z p \\ (E_t + p)U - \xi_t p \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (E_t + p)V - \eta_t p \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (E_t + p)W - \zeta_t p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$E_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix}, \quad F_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix}, \quad G_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ – метричні коефіцієнти; $J = \partial(\xi, \eta, \zeta)/\partial(x, y, z)$ – якобіан перетворення координат; $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненти тензора напружень та q_x, q_y, q_z – компоненти вектора теплових потоків. $E_t = \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right]$.

В системі рівнянь (1) n – компонентні вектори $\hat{Q}, \hat{E}_i, \hat{F}_i, \hat{G}_i, \hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$ мають відповідний вигляд в залежності від моделі турбулентності. Для замикання системи рівнянь в роботі використано модель турбулентності *Спаларта – Алмараса* [5] в реалізації відокремлених вихорів (DES). Розроблено алгоритми та комплекс програм розв'язування задач аеродинаміки на основі використання методу DES.

Успіх в розвитку вихорової динаміки рідини та газу дозволяє використовувати числові методи, в основу яких покладена концепція методу дискретних вихорів. За своєю ідеологією метод дискретних вихорів добре пристосований до сучасної обчислювальної техніки і дозволяє проводити широкі числові експерименти. Його універсальність: за допомогою єдиного підходу дозволяє вирішувати задачі від найпростіших лінійних плоских до просторових нелінійних. Його реалізація ґрунтується на тому, що *крайова задача математичної фізики* зводиться до сингулярних інтегральних рівнянь. В аеродинаміці дуже зручно представляти обтічну поверхню вихровим шаром в силу її фізичної наочності. За допомогою методу дискретних вихорів ця *задача Неймана для рівнянь Лапласа* зводиться по суті до числового розв'язання деякого граничного сингулярного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \sum_{i=1}^2 \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g_i(M, t) d\sigma_{i,M} = f(M_0, t), \quad (2)$$

де $f(M_0, t)$ – функція потенціалу подвійного шару; σ_i – i -я вихорова поверхня; $g_i(M, t)$ – густина потенціалу подвійного шару.

Задача буде повністю розв'язана, якщо для визначення тиску в точках шуканої поверхні σ_i буде здиференційований *інтеграл Коші – Лагранжа*:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{\bar{V}^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3)$$

Застосовуючи метод накладення потоків, незбуреного поступального потоку і потоку, індукованого вихоровою системою крила, представимо потенціал швидкості в вигляді суми потенціалу поступального незбуреного потоку та потенціалу вихорової системи крила.

Потенціал вихорової системи крила визначимо як суму потенціалів приєднаних та вільних вихорових рамок. Здиференціював за напрямком нормалі до поверхні крила, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих циркуляцій приєднаних вихорових рамок:

$$\sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{\nu=1}^M \Gamma_{\mu\nu} w_{\mu\nu}^{ik} + \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{r=1}^P \Gamma_{\mu r}^I w_{\mu r}^{ik} + \sum_{r=1}^{2P} \sum_{\nu=1}^P \Gamma_{\nu r}^{II} w_{\nu r}^{ik} + \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{r=1}^P \Gamma_{\mu r}^{III} w_{\mu r}^{ik} + U_0 \sin \alpha = 0; \quad k = 1, 2, \dots, 2N; \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (4)$$

де $\Gamma = \Gamma_r / V_0 b_0$ – безрозмірна циркуляція вихорової рамки; $\Gamma_{\mu r}^I, \Gamma_{\nu r}^{II}, \Gamma_{\mu r}^{III}$ – безрозмірні циркуляції вільних вихорових рамок в i -й контрольній точці k -ї панелі; $w_{\mu\nu}^{ik}, w_{\nu r}^{ik}, w_{\mu r}^{ik}$ – швидкості, індуковані вихоровою рамкою, що складається з вихорових відрізків одиничної інтенсивності; α – місцевий кут атаки k -го перерізу; U_0 – швидкість незбуреного набігаючого потоку.

Умова Чаплигіна – Жуковського формулюється як прямування до нуля інтенсивності вихорової рамки при її наближенні до крайки крила. Як показали розрахунки, воно виконується. Для моделювання наявності поверхні шляхової структури вводилась дзеркально відображена вихорова система [3, 4]. Аеродинамічні навантаження

розраховувалися за допомогою інтеграла Коші – Лагранжа (3).

Заміняємо тонку несучу поверхню безперервно розподіленим вихоривим шаром, що складається із приєднаних та вільних дискретних вихорів. Різницю потенціалів виражаємо через циркуляцію Γ_i .

Числовий метод. Для розв'язування системи рівнянь (3) використано методу контрольного об'єму. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають в тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини Q в контрольному об'ємі V , обмеженому поверхнею $S = \sum S_k$ з зовнішньою нормаллю \vec{n}

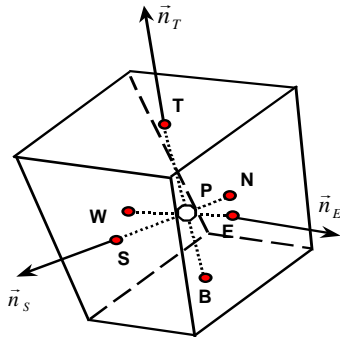


Рис. 2 – Контрольний об'єм.

(рис. 2). Інтегруючи рівняння (1) по контрольному об'єму отримуємо:

$$\iiint_{\Delta V} \left[\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} - H \right] dV = 0. \quad (5)$$

Застосовуючи до рівняння (6) теорему про середнє і Остроградського – Гаусса, одержимо:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta V} \iint_S \left[(\hat{E} - \hat{E}_v) n_x + (\hat{F} - \hat{F}_v) n_y + (\hat{G} - \hat{G}_v) n_z \right] dS + \tilde{H}, \quad (6)$$

де S – поверхня навколо контрольного об'єму ΔV ; \vec{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S .

Верхній знак $[\sim]$ означає середнє значення шуканої функції за об'ємом:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} f dV. \quad (7)$$

Для проведення числового розв'язування вихідних рівнянь виконано їх лінеаризацію. Для розрахунку вектора конвективного потоку в рівнянні (3) застосовується метод розщеплення Ван-Ліра [6]. Для одержання неявного алгоритму система нелінійних вихідних рівнянь лінеаризується за допомогою рознесення векторів потоків в ряд Тейлора.

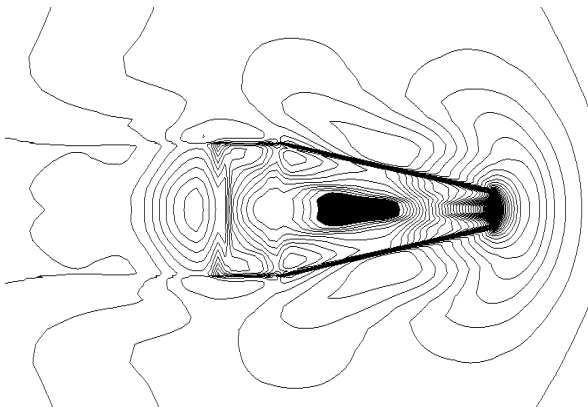


Рис. 3 – Ізобари в площині XOZ.

Результати досліджень з використанням DES. Виконано дослідження аеродинаміки транспортного апарата типу несуче крило малого видовження, що рухається поблизу шляхової структури. Форма в плані транспортного апарата представляє собою несуче крило у вигляді рівнобедреної трапеції з малим розмахом. Розмах по передній крайці дорівнює $l_{per} = 0.5$, по задній – $l_{zad.} = 2.0$. Носова та кормова частина мають клиноподібні форми. Днище є плоским. Довжина корпусу транспортного апарата складає $l_{корп.} = 5.0$. Розрахункова область розбита на два блоки. Сітка блоку № 1 має H – подібну форму у поздовжній та у поперечній площині. Сітка блоку № 2 також має H – подібну форму у поздовжній та у поперечній площинах. Блоки розрахункової області охоплюють транспортний апарат з

верхньої частини (блок № 1) та з нижньої частини (блок № 2). Відстань від поверхні плоскої шляхової структури до площини корпусу складає $h = 0.2$ максимальної висоти міделя транспортного апарата. Розрахунки проведені для чисел Рейнольдса $Re = 10^6$ та Маха $M = 0.4$.

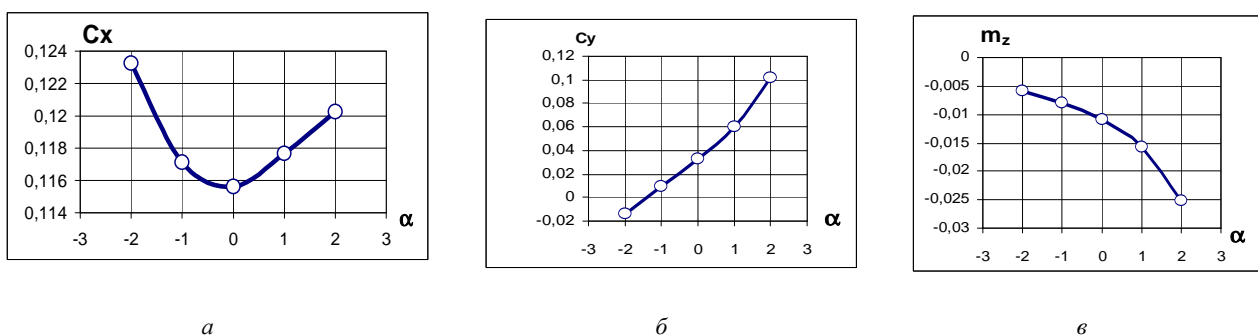


Рис. 4 – Аеродинамічні характеристики транспортного апарата: а – C_x ; б – C_y ; в – m_z .

Розрахунки показали, що форма носової частини транспортного апарата сприяє формуванню зона найбільшого тиску на верхній частині клиноподібного носика (рис. 3). Такий розподіл тиску сприяє появі пікірувального моменту. Під днищем транспортного апарата, в поздовжньому напрямку, під дією шляхової структури зміна тиску незначна. На верхній частині корпусу транспортного апарата зміна тиску більш інтенсивна, що сприяє появі підйімальної сили. В результаті виникає підймальна сила, яка намагається утримувати транспортний апарат над шляховою структурою.

Розраховано аеродинамічні характеристики для режимів руху з кутами тангажа $\vartheta = -2^\circ$, $\vartheta = -1^\circ$, $\vartheta = 0^\circ$, $\vartheta = 1^\circ$, $\vartheta = 2^\circ$. Отримані значення аеродинамічних характеристик $c_x(\vartheta)$, $c_y(\vartheta)$, $m_z(\vartheta)$ наведено на рис. 4.

Проведені розрахунки показали, що мінімальний лобовий опір характерний для $\vartheta = 0^\circ$. Розрахунки показали, що транспортний апарат є статично стійким.

Проведено аналіз динаміки зміни коефіцієнта аеродинамічного опору літального апарата на кінцевому етапі числового розрахунку. Поведінка коефіцієнта лобового опору, як функції від часу, підтверджує збіжність розрахункового процесу.

Результати досліджень з використанням методу дискретних вихорів. Для перевірки працездатності програмного забезпечення виконано тестові числові розв'язування ряду плоских та просторових задач в рамках моделі в'язкого та ідеального газу.

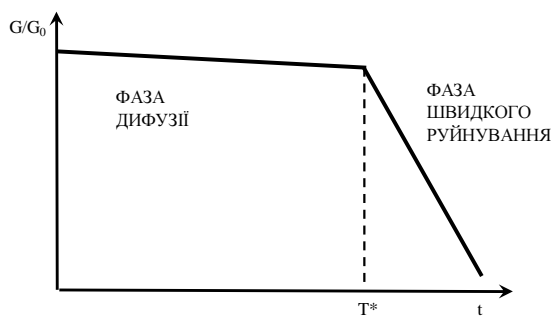


Рис. 5 – Фази руйнування просторового вихору в сліді.

Експериментальні дослідження показують, що процес розпаду вихору сліду складається з двох фаз [7]: дифузії та швидкого руйнування (рис. 5). Час дифузійного розпаду розраховується за співвідношенням [7]:

$$T^* = \min(T_{link}, 8t_0) \quad (8)$$

де T_{link} – час дотику вихорів; $t_0 = 2\pi b^2/G_0$; b – відстань поміж вихорами сліду.

Тому вихоровий слід моделювався з урахуванням дифузії та швидкого руйнування. Проведено дослідження аеродинамічних характеристик крила складної геометрії з позитивною стрілоподібністю. Крило складається з двох частин: центроплану та консолей. Геометрію крила показано на рис. 6, а.

Стрілоподібність центроплану крила по передній крайці складає $\chi = 70^\circ$. Коренева хорда має розмір $b_{коренева} = 3$. Розмах крила складає $l = 2$. Кінцівки крила мають нульову стрілоподібність.

Стрілоподібність центроплану крила по передній крайці складає $\chi = 70^\circ$. Коренева хорда має розмір $b_{коренева} = 3$. Розмах крила складає $l = 2$. Кінцівки крила мають нульову стрілоподібність.

Розраховувалися аеродинамічні характеристики для кутів атаки в діапазоні від $\alpha = 0$ до $\alpha = 18^\circ$ для наступних відносних відстаней до поверхні шляхової структури: $h = \infty$; $h = 0,75$; $h = 1,0$; $h = 1,25$; $h = 1,5$; $h = 1,75$; $h = 2,0$; $h = 2,25$; $h = 2,5$; $h = 2,75$; $h = 3,0$ (рис. 6).

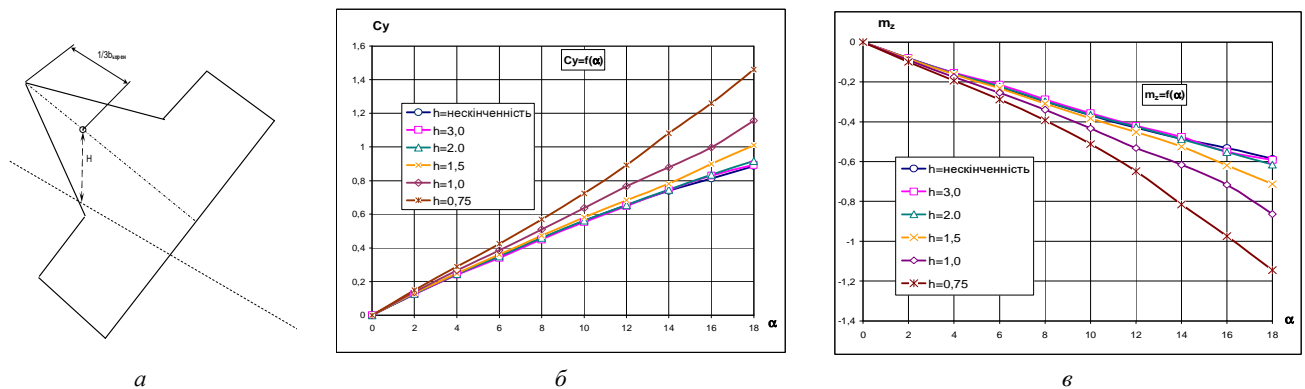


Рис. 6 – Залежність аеродинамічних характеристик від кута атаки поблизу землі для складної геометрії з нульовою стрілоподібністю консолей поблизу поверхні шляхової структури $\lambda = 2$: а – форма крила в плані; б – C_y ; в – m_z .

Відстань від крила до поверхні шляхової структури вимірювалася не від задньої крайки, а від точки, розміщеної на кореневій хорді, рівній її третій частині від передньої крайки, як показано на рис. 6, а. Вибір цієї точки пов'язаний з тим, що рух крила поблизу поверхні шляхової структури має складний характер. Його можна розкласти на ряд складових: як рух центра ваги і обертання навколо центра ваги. Тому при своєму русі відносно поверхні шляхової структури координати положення, як транспортного засобу так і крила відраховувати потрібно відносно положення центра ваги. Кутів положення крила також зручніше вимірювати відносно центра ваги.

Результати досліджень показують, що наближення крила до землі приводить до зростання несучих властивостей. При цьому пікіруючий момент крила зростає.

Перспективи подальших досліджень. На сьогодні відсутня універсальна модель опису турбулентних течій. Необхідно проводити пошук шляхів створення більш досконалих моделей турбулентності. Для цього потрібні проведення більш точних експериментальних та числових досліджень.

Висновки. В роботі приведена постановка та розв'язок задачі розрахунку обтікання літального апарату на основі розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є – Стокса та шляхом використання методу дискретних вихорів. Отримано розподілені та інтегральні аеродинамічні характеристики. Методи дискретних вихорів дозволяють отримати придатні результати з набагато меншими затратами часу на розробку програмного забезпечення та проведення відповідних розрахунків. Слід відмітити, що використання складних методів приводить до значних часових затрат. В такому випадку вибір варіантів компоновочних схем транспортного апарату дещо ускладнюється. В зв'язки з цим рекомендується проводити дослідження з використанням методів різної форми складності.

Список літератури

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М. : Физматлит, 2008. – 368с.
2. Гиневский А. С., Желанников А. И. Вихревые следы самолетов. – М. : Физматлит, 2008. – 172с.
3. Сохацький А. В. Теоретичні основи створення аеродинамічних компоновуваль перспективних швидкісних транспортних апаратів : дис. доктора технічних наук : 05.07.01. – Дніпропетровськ, 2010. – 364с.
4. Сохацький А. В. Застосування сингулярних інтегральних рівнянь для чисельного моделювання аеродинаміки несучих систем транспортних засобів // Вісник Академії митної служби України. – Дніпропетровськ : АМСУ, 2006. – № 3 (27). – С. 81 – 88.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA paper. – 1992. – Vol. 0439. – 21 p.
6. Van Leer B. Flux–vector splitting for the Euler equations // Lecture Notes in Phys. – 1982. – V. 170. – P. 507 – 512.
7. Gerz T., Holzäpfel F., Darracq D. Aircraft wake vortices // WakeNet Position Paper. – 2001. – 43 p.

References (transliterated)

1. Volkov K. N., Emelyanov V. N. *Modelirovaniye krupnykh vikhrey v raschetakh turbulentnykh techeniy* [Modeling of large vortices in turbulent flow computations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 368 p.
2. Ginevskiy A. S., Zhelannikov A. I. *Vikhrevye sledy samoletov* [Vortex traces of aircrafts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 172 p.
3. Sokhats'kiy A. V. *Teoretichni osnovy stvorenniya aerodinamichnykh komponuvan' perspektivnykh shvydkisnykh transportnykh aparativ : dys. doktora tekhnichnykh nauk : 05.07.01* [Theoretical basis for creating aerodynamic layouts of perspective high-speed transport vehicles: thesis of the Doctor's dissertation, spec. : 05.07.01]. Dnipropetrovsk, 2010. 364 p.
4. Sokhats'kiy A. V. *Zastosuvannya syngulyarnykh integral'nykh rivnyan' dlya chysel'nogo modelyuvannya aerodynamiky nesuchykh system transportnykh zasobiv* [Using singular integral equations for numerical modeling of aerodynamics of transport vehicle bearing system]. *Visnyk Akademiyi mytnoyi sluzhby Ukrainy* [Bulletin of the Academy of Customs Service of Ukraine]. Dnipropetrovsk.: AMSU Publ., 2006, vol. 3 (27), pp. 81–88.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA paper*. 1992, vol. 0439. 21 p.
6. Van Leer B. Flux–vector splitting for the Euler equations. *Lecture Notes in Phys*. 1982, vol. 170, pp. 507–512.
7. Gerz T., Holzäpfel F., Darracq D. Aircraft wake vortices. *WakeNet Position Paper*. 2001, 43 p.

Надійшла (received) 25.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сохацький Анатолій Валентинович (Сохакский Анатолий Валентинович, Sokhatsky Anatoly Valentinovich) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів, провідний науковий співробітник, Інститут транспортних систем та технологій Національної академії наук України, м. Дніпро; тел.: (097) 047-12-54; e-mail: Sokhatsky_anatoly@ukr.net.

УДК 532.5:534.7

Л. М. ТЕРЕЩЕНКО, В. А. ВОСКОБІЙНИК, О. А. ВОСКОБОЙНИК, А. В. ВОСКОБІЙНИК

ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ ЧЕРЕЗ ДВОПЕЛЮСТКОВИЙ МЕХАНІЧНИЙ СЕРЦЕВИЙ КЛАПАН

Аналізуються результати експериментальних досліджень гідродинамічного шуму струменевої течії через відкритий та напівзакритий двопелюстковий механічний клапан серця. Вихрова та струменева течії нижче за потоком від протезу серцевого клапану є нелінійними, випадковими процесами. Такі процеси аналізуються за допомогою методів математичної статистики і теорії ймовірності. Обробка та аналіз результатів вимірювання полів пульсацій тиску, гідродинамічного шуму поблизу мітрального клапану і вібрацій моделей лівого шлуночка та лівого передсердя були виконані з визначенням статистичних моментів різного порядку.

Ключові слова: серцевий клапан, вихрова течія, гідродинамічний шум, пульсації тиску, бічний та центральний струмінь, статистичний аналіз.

Л. Н. ТЕРЕЩЕНКО, В. А. ВОСКОБОЙНИК, А. А. ВОСКОБОЙНИК, А. В. ВОСКОБОЙНИК

ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ДВУХЛЕПЕСТКОВЫЙ МЕХАНИЧЕСКИЙ СЕРДЕЧНЫЙ КЛАПАН

Анализируются результаты экспериментальных исследований гидродинамического шума струйного течения через открытый и полузакрытый двухлепестковый механический клапан сердца. Вихревые и струйные течения ниже по потоку от протеза сердечного клапана являются

© Л. М. Терещенко, В. А. Воскобийник, О. А. Воскобойник, А. В. Воскобийник, 2019

нелинейними, случайними процессами. Такие процессы анализируются с помощью методов математической статистики и теории вероятности. Обработка и анализ результатов измерения полей пульсаций давления, гидродинамического шума вблизи митрального клапана и вибраций моделей левого желудочка и левого предсердия были выполнены с определением статистических моментов различных порядков.

Ключевые слова: сердечный клапан, вихревое течение, гидродинамический шум, пульсации давления, боковая и центральная струя, статистический анализ.

L. N. TERESHCHENKO, V. A. VOSKOBOINICK, O. A. VOSKOBOINICK, A. V. VOSKOBOINICK
PHYSICAL MODELING OF FLOW ACROSS THE BILEAFLET MECHANICAL HEART VALVE

Experimental results of hydrodynamic noise of the jet flow across an open and semi-closed bileaflet mechanical heart valve were analysed in the paper. The vortex and jet flows behind prosthetic heart valve are non-linear, random processes. Such processes are analyzed using the methods of mathematical statistics and probability theory. Processing and analysis of the experimental results of measuring the field of pressure fluctuations, hydrodynamic noise near the mitral valve, and vibrations of the left ventricle and atrium models were carried out with the determination of statistical moments of various orders.

Key words: heart valve, vortex flow, hydrodynamic noise, pressure fluctuations, side and central jet, statistical analysis.

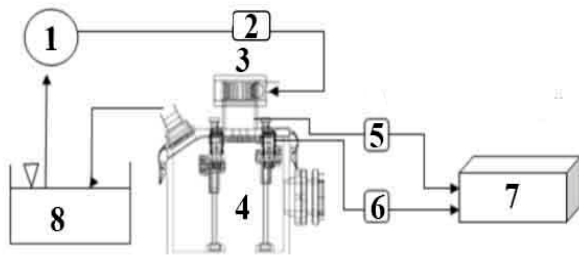
Вступ. Найбільш важливим в життєзабезпеченні людини є безперебійне функціонування серцево-судинної системи. Спрямоване перенесення крові по артеріям, венам, капілярам і іншим кровоносним судинам, яке забезпечується роботою серця і клапанами, які розташовано між передсерддями і шлуночками, дає можливість жити людині. Всередині серце поділене перегородками на чотири камери: два шлуночка і два передсердя (ліві і праві). Між ними розташовуються чотири клапани: *митральний, трикуспідальний, аортальний і легеневий*. Клапани в певний момент відкриваються і закриваються, формуючи односпрямований рух крові, перешкоджаючи регургітації, тобто зворотному плину крові. Натуральні серцеві клапани складаються з тонких, гнучких пелюсток, які під час відкривання і закривання формують імпульсний кров'яний потік. Коли пелюстки серцевих клапанів пошкоджуються, то їх лікують або замінюють протезами. Наприклад, в США проводяться понад 80 тисяч операцій з пересадки серцевих клапанів щорічно, а в світі більше 300 тисяч таких операцій [1, 2]. Зараз для пересадки серцевих клапанів використовуються три види протезів, а саме, механічний, біопротезний, і гомотрансплантний клапани. В основному механічні клапани виробляються у вигляді двопелюсткових конструкцій, які складаються з кільця, яке підтримує дві рухомі пелюстки та пришивається до тканин серця [2, 3]. Але ці клапани мають істотний недолік – утворення тромбів на обтійної поверхні клапанів [4, 5]. Тромбоутворення в першу чергу і в більшості випадків спостерігається в місцях шарнірного кріплення пелюсток. З плином часу тромби перекривають прохідні перетини клапанів і закривають пелюстки. Це серйозно порушує роботу серцево-судинної системи людини і призводить до летальних наслідків. З метою запобігання такого положення треба діагностувати роботу механічних клапанів і приймати необхідні заходи для зменшення утворення тромбів як терапевтичними, так і хірургічними методами. У зв'язку з цим існує нагальна потреба в розробці і створенні ефективних методів і засобів діагностики роботи клапанів серця. Серед таких методів пропонується використовувати гідроакустичні вимірювання шумів і вібрацій роботи відкритого і напівзакритого двопелюсткового механічного клапана серця і на підставі цих вимірів виявити діагностичні ознаки, що підкреслює актуальність проведення таких досліджень.



Рис. 1 – Двопелюстковий механічний клапан серця: *a* – відкритий; *б* – розташування над блоком датчиків.

Метою цієї роботи є визначення статистичних характеристик вихрової та струменевої течії через відкритий і напівзакритий двопелюстковий механічний клапан серця, виявлення гідроакустичних відмінностей і діагностичних ознак визначення умов роботи клапана.

Постановка задачі, програма та методика досліджень. Фізичне моделювання течії та перекриття тромбами пелюсток механічних клапанів серця проводилося в лабораторних умовах в Технічному університеті "Politecnico di Milano" (Італія). Двопелюстковий механічний клапан серця (рис. 1, *a*) фірми "Sorin Biomedica Cardio" (Італія) діаметром $d = 25$ мм встановлювався в позицію митрального клапана між моделлю лівого передсердя і моделлю лівого шлуночка серця [6, 7]. Дослідження проводилися для стаціонарної і пульсуючої течії чистої води і водного розчину гліцерину через відкритий і напівзакритий клапан. В якості задачі досліджень була поставлена мета визначення можливості використання вимірювань гідроакустичних і вібраційних характеристик шумів і вібрацій струменів, що витікають з відкритого і напівзакритого клапана, в якості діагностичних методів і ознак визначення особливостей роботи клапана.



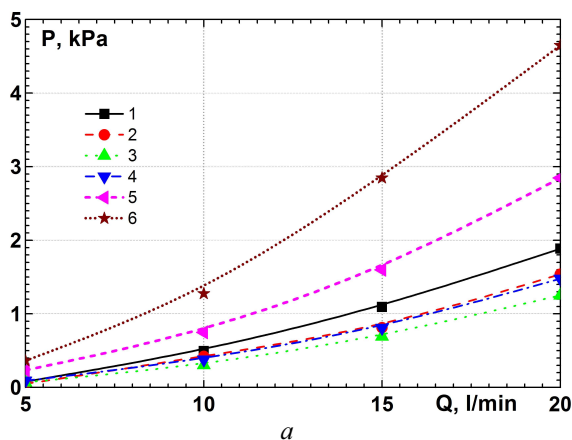
а



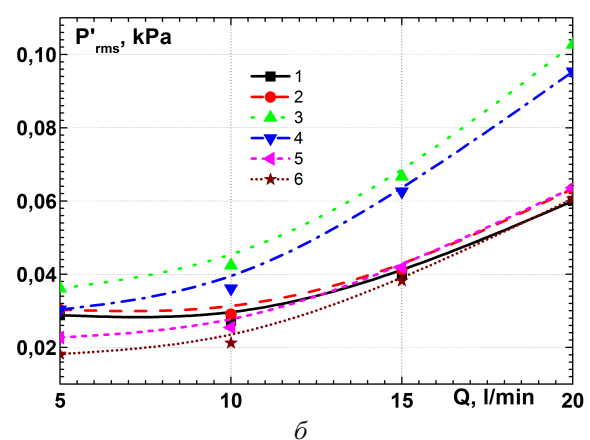
б

Рис. 2 – Експериментальний стенд: а – схема; б – фотографія.

Для вирішення цієї задачі були розроблені і виготовлені мініатюрні датчики тиску, шумів і прискорення. Датчики тиску встановлювалися в добре обтічний блок, який складався з п'яти датчиків пульсацій тиску і повного тиску, які монтувалися врівень з обтічною поверхнею цього блоку і розташовувалися на різних відстанях нижче за потоком від двопелюсткового клапана (рис. 1, б). Клапан знаходився в отворі між моделлю лівого передсердя (3) і моделлю лівого шлуночка серця (4) (рис. 2). Чиста вода або водний розчин гліцерину з відстійної камери (8) за допомогою помпи (1) подавалися в модель передсердя і через відкритий або напівзакритий клапан надходили в модель лівого шлуночка і далі у відстійну камеру. За відкритим двопелюстковим клапаном потік рідини через клапан розділявся на три струмені: один вузький центральний між пелюстками і два *напівмісячні бічні струмені* між пелюстками і кільцевою основою клапана. Датчики тиску (6), розташовуючись в блоці датчиків, за допомогою координатного пристрою пересувалися уздовж досліджуваних струменів, реєструючи їх гідродинамічний шум. На зовнішній поверхні вимірювальної ємності, що представляє собою моделі передсердя і шлуночка, встановлювалися *п'єзокерамічні датчики шумів серця і віброакселерометри* (5). Одночасна багатоточкова реєстрація тисків, шумів і вібрацій дозволила досліджувати просторово-часові характеристики гідроакустичних і вібраційних параметрів [8, 9]. Електричні сигнали датчиків підсилювалися, фільтрувалися і надходили через 16-канальний аналогово-цифровий перетворювач на персональний комп'ютер, де за відповідними програмами і алгоритмами оброблялися і аналізувалися за допомогою апарату теорії ймовірності та математичної статистики.



а



б

Рис. 3 – Інтегральні характеристики поля тиску: а – середні значення тиску; б – середньоквадратичні значення пульсацій тиску.

Відомо, що збурення і нестійкості у відривних та струменевих течіях, які обумовлені турбулентністю, являють собою випадкові процеси [10, 11]. Такі процеси досліджуються за допомогою статистичного аналізу, який відображає середню і очікувану поведінку характерних властивостей і гідродинамічних параметрів подібних течій. У формальному поданні випадкових процесів, векторна компонента швидкості або завихреності чи тиск мають певну ймовірність прийняття конкретного значення. В якості інтегральних величин результатів експериментальних досліджень визначалися середні значення або математичні очікування, функції щільності ймовірності появи випадкових величин, дисперсії і середньоквадратичні значення випадкових величин, коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Результати досліджень. Особливості струменевої та вихрової течії нижче за потоком від відкритого і напівзакритого двопелюсткового механічного мітрального клапана досліджувалися за стаціонарної течії чистої води і водного розчину гліцерину витратою від 5 л/хв до 20 л/хв. Такі витрати відповідають тим, які спостерігаються під час діастолі серцевого циклу роботи клапана. Середні значення і середньоквадратичні значення тиску всередині моделі лівого шлуночка серця і в моделі лівого передсердя показані на рис. 3.

Тут на рис. 3, а представлені результати вимірювання середнього тиску для течії чистої води через відкри-

тий і напівзакритий клапан. Крива 1 виміряна поблизу бічного струменя і крива 2 поблизу центрального струменя відкритого клапана, а криві 3 і 4 поблизу, відповідно, бічного і центрального струменя, але вже напівзакритого клапана. Крива 5 виміряна всередині передсердя або атріуму, коли клапан повністю відкритий, а крива 6 виміряна всередині атріуму для напівзакритого клапана. На рис. 3, б представлені результати вимірювання середньоквадратичних значень пульсацій тиску також для течії чистої води через відкритий і напівзакритий клапан. Позначення кривих на рис. 3, б відповідають тим, які представлені на рис. 3, а. Результати досліджень показують, що зі збільшенням витрати середні значення тиску і середньоквадратичні значення пульсацій тиску поблизу бічного струменя і всередині атріуму для умов роботи напівзакритого клапана вище, ніж для відкритого клапана.

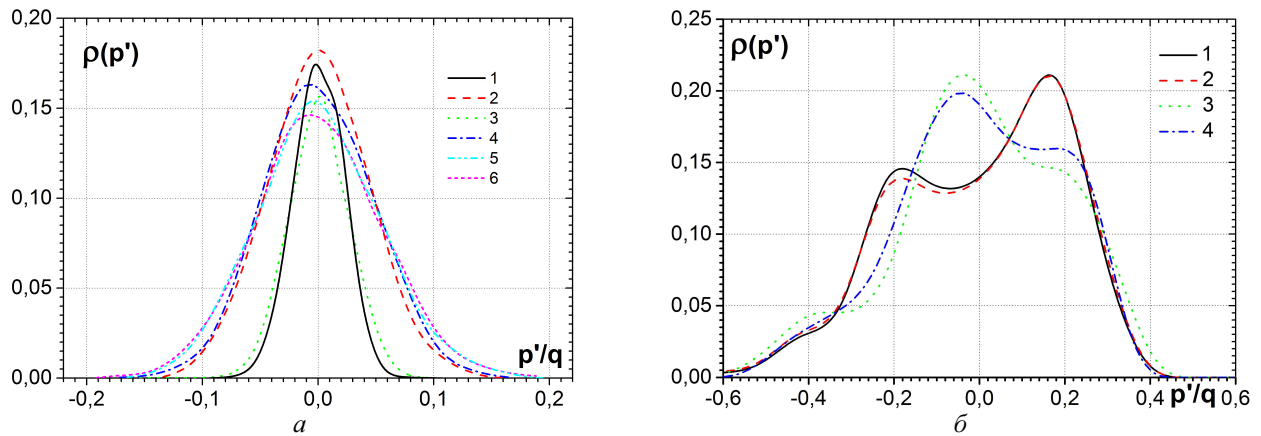


Рис. 4 – Функції щільності ймовірності пульсацій тиску: а – стаціонарна; б – пульсуюча течія рідини.

Функції щільності ймовірності пульсацій тиску поблизу бічного струменя відкритого і напівзакритого клапана, через який протікає стаціонарна і пульсуюча течії, показані на рис. 4. На рис. 4, а крива 1 представляє результати вимірювань пульсацій тиску поблизу бічного струменя течії чистої води витратою 15 л/хв через відкритий клапан, крива 2 отримана для таких же умов досліджень, але для напівзакритого клапана. Криві 3 – 6 виміряні для стаціонарної течії гліцеринового розчину різної концентрації. Так, крива 3 виміряна поблизу бічного струменя відкритого клапана, через який протікає розчин з 43 % гліцерину і 57 % води. Крива 4 виміряна для напівзакритого клапана і 35 % гліцерину у водному розчині, крива 5 (38 % гліцерину) і крива 6 (43 % гліцерину).

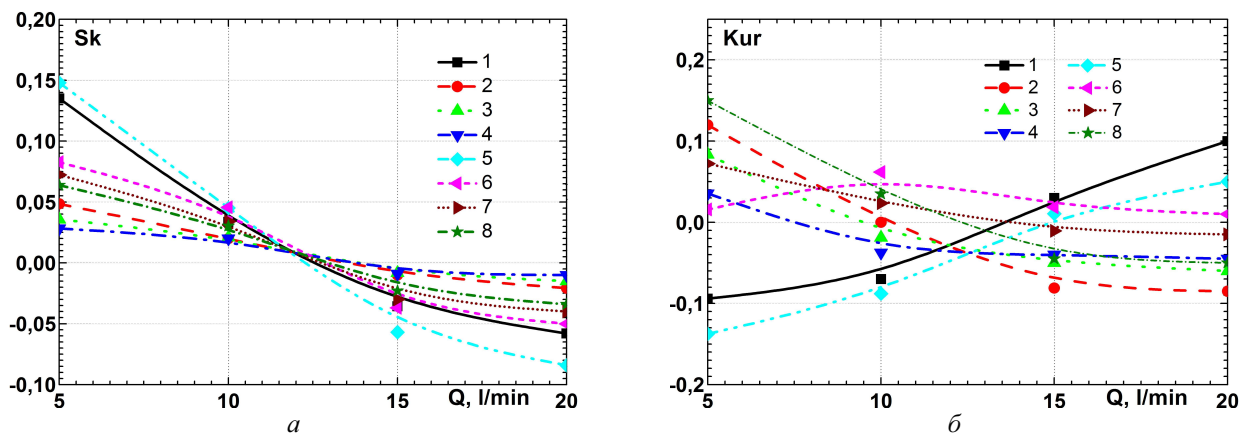


Рис. 5 – Коефіцієнти: а – асиметрії; б – ексцесу поля пульсацій тиску поблизу бічного струменя у ближньому сліді двопелюсткового мітрального серцевого клапана.

На рис. 4, б представлені результати вимірювання гідродинамічного шуму поблизу бічного струменя пульсуючої течії чистої води з частотою 1 Гц або 60 ударів за хвилину. Криві 1, 2 виміряні для умов відкритого клапана, а криві 3, 4 – для напівзакритого клапана. Крива 1 виміряна на відстані рівній діаметру (d) клапана, крива 2 виміряна на відстані $x = 1.2d$, крива 3 виміряна на відстані $x = d$, а крива 4 – на віддаленні $x = 1.2d$. Слід відмітити, що залежності на рис. 4, а характерні для випадкових процесів (дзвоноподібна форма кривої), а залежності на рис. 4, б являють собою сукупність випадкового процесу з коливальним процесом [10, 12]. Це не дивно, оскільки в пульсуючому потоці через відкритий або напівзакритий клапан на поле стохастичних пульсацій тиску струменевої та вихрової течії накладаються гармонійні коливання з частотою серцевого ритму. Пульсації тиску поблизу бічного струменя відкритого клапана незалежно від в'язкості рідини мають невисоку ймовірність появи пульсацій тиску великої амплітуди. Зі збільшенням в'язкості гліцеринового розчину істотно демпфуються пульсації тиску малої амплітуди поблизу бічного струменя стаціонарної течії через напівзакритий клапан, що наочно проілюстровано на рис. 4, а.

Зміни статистичних моментів вищих порядків, а саме, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу показані на рис. 5. Гідродинамічний шум вимірювався в близькому сліді клапана поблизу бічного струменя для стаціонарної течії чистої води і водного розчину гліцерину. Тут криві 1 – 4 виміряні для умов відкритого клапана, а криві 5 – 8 – для напівзакритого клапана. Криві 1 і 5 отримані для течії чистої води, криві 2 і 6 – розчину з 35% гліцерину, криві 3 і 7 – розчину з 38% гліцерину і криві 4 і 8 – розчину з 43% гліцерину. Отже, для малої витрати рідини в полі пульсацій тиску превалюють позитивні значення пульсацій тиску, а зі збільшенням витрати збільшується ймовірність появи від'ємних пульсацій тиску, особливо для течії чистої води. *Гостровершинність* функції щільності ймовірності пульсацій тиску для умов течії чистої води і *неньютонівської рідини* з великою в'язкістю відрізняються одна від іншої (рис. 5, б). Так, для малих витрат в полі пульсацій тиску течії чистої води переважають пульсації тиску великої амплітуди, а зі збільшенням витрати води починають превалювати дрібномасштабні пульсації тиску. Протилежна тенденція спостерігається для течії водного розчину гліцерину, особливо коли його концентрація збільшується.

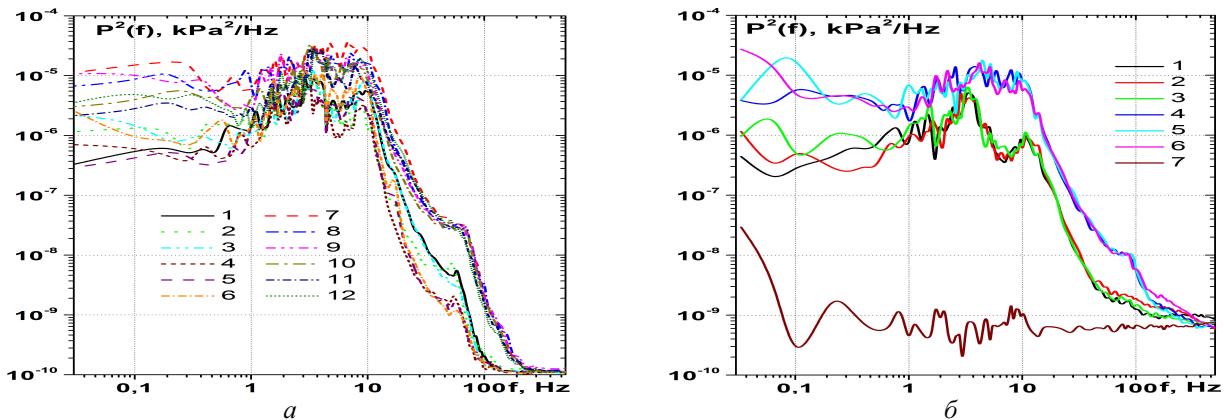


Рис. 6 – Спектральні щільності потужності пульсацій тиску поблизу бічного струменя: а – течія чистої води; б – течія водного розчину гліцерину через відкритий та напівзакритий двопелостковий клапан серця.

Спектральні щільності потужності пульсацій тиску представлені на рис. 6 для різних умов проведення досліджень. Вимірювання проводилися поблизу бічного струменя стаціонарної течії чистої води і розчинів гліцерину різної концентрації через відкритий і напівзакритий двопелостковий клапан серця. На рис. 6, а представлені спектри пульсацій тиску, виміряні уздовж бічного струменя на різних відстанях від клапана для течії чистої води витратою 20 л/хв. Криві 1 – 6 виміряні для відкритого клапана, а криві 7 – 12 – для напівзакритого клапана. Криві 1 і 7 зареєстровані на відстані $x = d$ від клапана, криві 2 і 8 – на відстані $x = 1.1d$, криві 3 і 9 – $x = 1.2d$, криві 4 і 10 – $x = 1.4d$, криві 5 і 11 – $x = 2.4d$ і криві 6 і 12 – $x = 3d$. Результати досліджень показують, що з віддаленням від клапана спектральні рівні пульсацій тиску зменшуються для умов роботи відкритого клапана, а для напівзакритого клапана спадання – незначне, особливо в області високих частот. Інтенсивність пульсацій тиску поблизу бічного струменя для напівзакритого клапана в (3 – 4) рази вища, ніж для відкритого клапана.

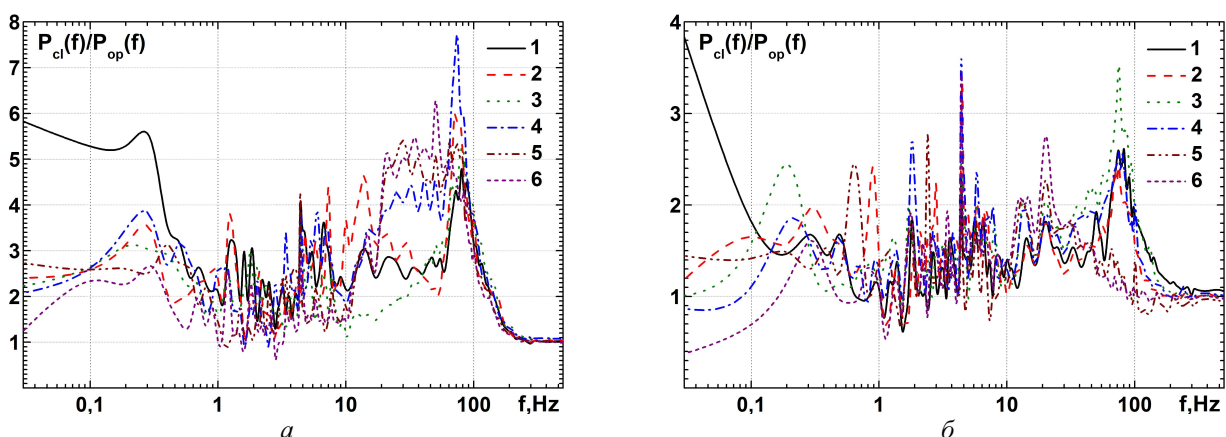


Рис. 7 – Відношення спектральних щільностей потужності пульсацій тиску течії води через напівзакритий клапан до відкритого клапана: а – поблизу бічного струменя, б – поблизу центрального струменя.

Спектральні щільності потужності пульсацій тиску поблизу бічного струменя течії водного розчину гліцерину (43% гліцерину і 57% води) через відкритий і напівзакритий клапан представлені на рис. 6, б. Тут криві 1 – 3 виміряні для відкритого клапана, криві 4 – 6 – для напівзакритого клапана, а крива 7 – це навколишній шум. Криві 1 і 4 отримані в близькому сліді клапана на віддаленні $x = d$ від клапана, криві 2 і 5 – $x = 1.1d$ і криві 3 і 6 – $x = 1.2d$. Тут, як і на рис. 6, а, спостерігається істотна різниця в спектрах пульсацій тиску для напівзакритого

і відкритого клапана, що пропонується використовувати під час діагностики тромбоутворення на обтічній поверхні серцевого клапана. Результати досліджень показали, що інтенсивність пульсацій тиску поблизу бічного струменя в ближньому сліді напівзакритого клапана вище, ніж відкритого клапана.

На рис. 7 представлені відношення рівнів спектральних складових пульсацій тиску, які виміряні для витрати води 20 л/хв через напівзакритий клапан до тих, які виміряні через відкритий клапан. На рис. 7, а показані відношення спектральних рівнів поблизу бічного струменя, а на рис. 7, б – поблизу центрального струменя. Виміри проведені вздовж цих струменів і крива 1 виміряна на віддаленні від клапана на відстань $x = d$, крива 2 на відстань $x = 1.1d$, крива 3 – $x = 1.2d$, крива 4 – $x = 1.4d$, крива 5 – $x = 2.2d$ і крива 6 – $x = 3d$. Результати досліджень показали, що з віддаленням від клапана різниця спектральних рівнів в гідродинамічному шумі напівзакритого клапана і відкритого клапана поступово зменшується. При цьому різниця спектрів зберігається більшою поблизу бічного струменя і залишається в (2 – 3) рази вище в частотному діапазоні від 0.1 Гц до майже 100 Гц. Слід також зазначити, що гідродинамічний шум поблизу бічного струменя напівзакритого клапана вище в (4 – 5) разів в частотному діапазоні (30 – 80) Гц, ніж поблизу того ж бічного струменя, але відкритого клапана (рис. 7, а). Така велика різниця в спектральних рівнях в цьому частотному діапазоні може бути використана під час гідроакустичної діагностики роботи двопелюсткового механічного клапана серця.

Висновки. Результати досліджень показали, що статистичний аналіз експериментальних даних досліджень гідроакустичних характеристик струменевої та вихрової течії вниз за потоком від двопелюсткового механічного клапана серця є ефективним засобом під час діагностики умов роботи клапана.

Установлено, що інтегральні, а особливо спектральні характеристики полів швидкості, тиску та прискорення мали суттєві відмінності в умовах роботи напівзакритого клапана (моделювання дії тромбів на пелюстки клапана) і відкритого клапана.

Показано вплив в'язкості рідини на пульсації пристінного тиску струменевої течії в ближньому сліді двопелюсткового клапана. Виявлено відмінності в гідродинамічних характеристиках стаціонарного та пульсуючого обтікання відкритого і напівзакритого клапана. Установлено, що гідродинамічний шум напівзакритого клапана в кілька разів вище, ніж відкритого клапана, що особливо явно простежується в різних частотних діапазонах спектру пульсацій тиску в залежності від умов роботи двопелюсткового механічного клапана серця.

Список літератури

1. Jun B. H., Saikrishnan N., Yoganathan A. P. Micro particle image velocimetry measurements of steady diastolic leakage flow in the hinge of a St. Jude medical regent mechanical heart valve // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2014. – Vol. 42. – P. 526 – 540.
2. Sotiropoulos F., Le T. B., Gilmanov A. Fluid mechanics of heart valves and their replacements // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2016. – Vol. 48. – P. 259 – 283.
3. Kheradvar A., Groves E. M., Goergen C. J., Alavi S. H., Tranquillo R., Simmons C. A., Dasi L. P., Grande-Allen K. J., Mofrad M. R. K., Falahatpisheh A., Griffith B., Baaijens F., Little S. H., Canic S. Emerging trends in heart valve engineering : Part III. Novel technologies for mitral valve repair and replacement // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2015. – Vol. 43. – № 4. – P. 858 – 870.
4. Sadoon H., Bassam A. L. Incidence of major bleeding in patients with mechanical heart valve and warfarin : A one year study // *Int. J. Adv. Res.* – 2018. – Vol. 6. – № 2. – P. 622 – 624.
5. Fiedler A. G., Tolis Jr. G. Surgical treatment of valvular heart disease : Overview of mechanical and tissue prostheses, advantages, disadvantages, and implications for clinical use // *Curr. Treat. Options Cardio Med.* – 2018. – Vol. 20. – № 7. – P. 7-1-13.
6. Voskoboinick V. A., Redaelli A., Chertov O. R., Fiore G. B., Voskoboinick A. V., Rudnitskii A. H., Tereshchenko L. M., Siryk S. V., Lucherini F. Effect of fluid viscosity on noise of bileaflet prosthetic heart valve // *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. – 2017. – № 5. – С. 41 – 50.
7. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. A., Voskoboinick A. V., Лукерини Ф., Редаелли А., Терещенко Л. Н., Фиоре Б. Струйное течение и шум открытого механического двухстворчатого сердечного клапана // *Гідродинаміка і акустика*. – 2018. – Т. 1. – № 1. – С. 7 – 32.
8. Voskoboinick V. A., Grinchenko V. T., Makarenkov A. P. Correlation characteristics of a wall pressure fluctuation field in a turbulent boundary layer induced by a longitudinal flow along a flexible extended cylinder // *Intern. J. Fluid Mech.* - 2003. – Vol. 30. – № 6. – P. 644 – 650.
9. Voskoboinick V. A., Makarenkov A. P. Spectral characteristics of the hydrodynamical noise in a longitudinal flow around a flexible cylinder // *Intern. J. Fluid Mech.* – 2004. – Vol. 31. – № 1. – P. 87 – 100.
10. Бендат Дж., Пірсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М. : Мир, 1989. – 540 с.
11. Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М. : Высшая школа, 2000. – 383 с.
12. Tereshchenko L., Voskoboinick V., Kudybin I., Voskoboinick A., Rudnyskiy O. Statistical analysis of jet flow noise across bileaflet heart valve // *Abstract Final AMMODIT Conf. "Mathematics for Life Sciences"*. – Kyiv, Ukraine, 2019. – P. 52 – 53.

References (transliterated)

1. Jun B. H., Saikrishnan N., Yoganathan A. P. Micro particle image velocimetry measurements of steady diastolic leakage flow in the hinge of a St. Jude medical regent mechanical heart valve. *Annals of Biomedical Engineering*. 2014, vol. 42, pp. 526–540.
2. Sotiropoulos F., Le T. B., Gilmanov A. Fluid mechanics of heart valves and their replacements. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2016, vol. 48, pp. 259–283.
3. Kheradvar A., Groves E. M., Goergen C. J., Alavi S. H., Tranquillo R., Simmons C. A., Dasi L. P., Grande-Allen K. J., Mofrad M. R. K., Falahatpisheh A., Griffith B., Baaijens F., Little S. H., Canic S. Emerging trends in heart valve engineering : Part III. Novel technologies for mitral valve repair and replacement. *Annals of Biomedical Engineering*. 2015, vol. 43, no. 4, pp. 858–870.
4. Sadoon H., Bassam A. L. Incidence of major bleeding in patients with mechanical heart valve and warfarin : A one year study. *Int. J. Adv. Res.* 2018, vol. 6, no. 2, pp. 622–624.
5. Fiedler A. G., Tolis Jr. G. Surgical treatment of valvular heart disease : Overview of mechanical and tissue prostheses, advantages, disadvantages, and implications for clinical use. *Curr. Treat. Options Cardio Med.* 2018, vol. 20, no. 7, pp. 7-1-13.
6. Voskoboinick V. A., Redaelli A., Chertov O. R., Fiore G. B., Voskoboinick A. V., Rudnitskii A. H., Tereshchenko L. M., Siryk S. V., Lucherini F. Effect of fluid viscosity on noise of bileaflet prosthetic heart valve. *Naukovi visti NTUU "KPI"* [Scientific Bulletin of the National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»]. 2017, no. 5, pp. 41–50.
7. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. A., Voskoboinick A. V., Lucherini F., Redaelli A., Tereshchenko L. N., Fiore B. Struynoe techenie i шум открытого мехhanicheskogo dvukhstvorchatogo serdechnogo klapana [Jet flow and noise of open mechanical bileaflet heart valve].

- Gidrodynamika i akustyka* [Hydrodynamics and Acoustics]. 2018, vol. 1, no. 1, pp. 7–32.
8. Voskoboinick V. A., Grinchenko V. T., Makarenkov A. P. Correlation characteristics of a wall pressure fluctuation field in a turbulent boundary layer induced by a longitudinal flow along a flexible extended cylinder. *Intern. J. Fluid Mech.* 2003, vol. 30, no. 6, pp. 644–650.
 9. Voskoboinick V. A., Makarenkov A. P. Spectral characteristics of the hydrodynamical noise in a longitudinal flow around a flexible cylinder. *Intern. J. Fluid Mech.* 2004, vol. 31, no. 1, pp. 87–100.
 10. Bendat J., Pirsol A. *Prikladnoy analiz sluchainykh dannyykh* [Applied analysis of random data]. Moscow, Mir Publ., 1989. 540 p.
 11. Ventcel' E. S., Ovcharov L. A. *Teoriya sluchainykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [Theory of random processes and its engineering applications]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2000. 383 p.
 12. Tereshchenko L., Voskoboinick V., Kudybin I., Voskoboinick A., Rudnyskiy O. Statistical analysis of jet flow noise across bileaflet heart valve. *Abstract Final AMMODIT Conf. "Mathematics for Life Sciences"*. Kyiv, Ukraine, 2019, pp. 52–53.

Надійшла (received) 11.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Терещенко Лідія Миколаївна (Терещенко Лидия Николаевна, Tereshchenko Lidia Nikolaevna) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-45; e-mail: litere70@gmail.com.

Воскобойник Володимир Анатолійович (Воскобойник Владимир Анатольевич, Voskoboinick Vladimir Anatolievich) – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Воскобойник Олександр Анатолійович (Воскобойник Александр Анатольевич, Voskoboinick Oleksandr Anatoliyovych) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Воскобойник Андрій Володимирович (Воскобойник Андрей Владимирович, Voskoboinick Andrew Vladimirovich) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (044) 371-65-57; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

УДК 629.7.017

В. А. УДОВЕНКО, А. И. ГЛАДЫШЕВ**АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЁТА В СПУТНОМ СЛЕДЕ ДРУГОГО ВЕРТОЛЁТА**

Исследовано влияние спутного вихревого следа вертолёта на аэродинамические характеристики несущего винта другого вертолёта. Используются математические модели ближнего и дальнего следа. Для ближнего следа проводится численное моделирование обтекания несущих винтов вертолётов методом дискретных вихрей. Модель дальнего следа учитывает затухание и разрушение следа вследствие турбулентности атмосферы, силы вязкого трения и выталкивающей силы Архимеда. Приращения аэродинамических характеристик винта вертолёта в следе по сравнению с полётом вне следа вычисляются с использованием результатов расчётов по обёмным моделям.

Ключевые слова: вертолёт, спутный след, аэродинамические характеристики, метод дискретных вихрей, турбулентность, вязкое трение, сила Архимеда.

В. О. УДОВЕНКО, А. І. ГЛАДИШЕВ**АЕРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСУЧОГО ГВИНТА ВЕРТОЛЬОТА У СУПУТНЬОМУ СЛІДІ ІНШОГО ВЕРТОЛЬОТА**

Досліджений вплив супутнього вихревого сліду вертольота на аеродинамічні характеристики несучого гвинта іншого вертольота. Використані математичні моделі ближнього та дальнього сліду. Для ближнього сліду проводиться числове моделювання обтікання несучих гвинтів вертольотів методом дискретних вихорів. Модель дальнього сліду враховує загасання й руйнування сліду внаслідок турбулентності атмосфери, сили в'язкого тертя та виштовхуючої сили Архімеда. Прирости аеродинамічних характеристик гвинта в сліді у порівнянні з польотом поза слідом вираховуються з використанням результатів розрахунків за обома моделями.

Ключові слова: вертоліт, супутній слід, аеродинамічні характеристики, метод дискретних вихорів, турбулентність, в'язке тертя, сила Архімеда.

V. A. UDOVENKO, A. I. GLADYSHEV**AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE HELICOPTER MAIN ROTOR IN THE WAKE OF ANOTHER HELICOPTER**

The influence of vortex wake of the helicopter on the aerodynamic characteristics of another helicopter's main rotor is investigated. The mathematic models of near and far vortex wake are used. For the near wake the numerical modeling of the flow about both helicopters' main rotors is carried out by the method of discrete vortices. The far wake model accounts for damping and wake destruction due to the atmosphere turbulence, viscous friction force, and Archimedean buoyant force. Increments of aerodynamic characteristics of the rotor of the helicopter in the wake compared with the flight out of the wake are computed using results of the calculations according to the both models.

Key words: helicopter, wake, aerodynamic characteristics, method of discrete vortices, turbulence, viscous friction, Archimedean buoyant force.

© В. А. Удовенко, А. И. Гладышев, 2019

Введение. Попадание вертолѣта в *спутный след* другого летательного аппарата является опасным, поскольку вызывает изменение действующих на вертолѣт аэродинамических сил и моментов, что нарушает балансировку вертолѣта и может привести к потере управляемости. Для отработки на тренажѣре действий лѣтчика при попадании в спутный след необходимо использовать в тренажѣре математическую модель, адекватно учитывающую поведение вертолѣта в следе.

В настоящее время проводятся исследования спутных следов за самолѣтами, главным образом, в связи с проблемой увеличения пропускной способности взлѣтно-посадочных полос аэропортов [1 – 5]. Спутные следы за вертолѣтами исследуются в меньшей степени, в основном вследствие меньшего веса вертолѣтов и меньшей интенсивности следа за ними. Однако спутный след вертолѣта имеет свои особенности и тоже может представлять опасность для попавшего в него вертолѣта. Поэтому создание математической модели поведения вертолѣта в спутном следе другого вертолѣта для использования в тренажѣре является актуальной научной и практической задачей.

Математические модели ближнего и дальнего вихревого следа вертолѣта. Для моделирования воздействия спутного следа на вертолѣт в настоящей работе, как и в [1], используются различные модели для *ближнего* и *дальнего вихревого следа*. Моделирование поведения вертолѣта в ближнем спутном следе проводится путѣм расчѣта взаимодействия несущих винтов вертолѣтов методом дискретных вихрей [6, 7]. Такое моделирование, проводимое в рамках *модели идеальной несжимаемой жидкости*, позволяет детально учесть особенности образования и поведения следа за вертолѣтом-генератором, его взаимодействие с вертолѣтом в следе, вычислить аэродинамические силы и моменты, действующие на вертолѣт в следе, в зависимости от взаимного пространственного положения вертолѣтов. Однако такая модель непригодна для исследования поведения вертолѣта в следе на большом удалении от вертолѣта-генератора, во-первых, вследствие большого объѣма требуемых вычислений, во-вторых, из-за неучѣта в её рамках процессов, приводящих к постепенному затуханию и разрушению спутного следа.

Моделирование дальнего вихревого следа вертолѣта проводится на основе модели, изложенной в [2]. В названной работе с помощью математических моделей и эмпирических формул, выведенных для самолѣтных следов, получены *дифференциальные уравнения для эволюции циркуляции и пространственного положения дальнего следа* в зависимости от ряда параметров, описывающих летательный аппарат-генератор и состояние атмосферы. Представляется возможным применить указанные уравнения для дальнего следа за вертолѣтом с использованием параметров, полученных в результате моделирования ближнего следа.

Расчѣт влияния вертолѣта-генератора на аэродинамические характеристики вертолѣта в ближнем следе. Для численного моделирования воздействия вертолѣта-генератора на аэродинамические характеристики вертолѣта в ближнем спутном следе проводится расчѣт обтекания компоновки, состоящей из несущих винтов обоих вертолѣтов, безвихревым и однородным на бесконечном удалении потоком идеальной несжимаемой жидкости. Используется метод дискретных вихрей [6, 7] с замкнутыми вихревыми рамками [8] в нелинейной нестационарной постановке. Вихревые пелены, сходящиеся с задних кромок лопастей винтов, формируются по временным шагам. На каждом шаге вычисляются циркуляции сходящихся вихрей, и рассчитывается пространственное положение пелен с учѣтом воздействия всех вихрей в потоке.

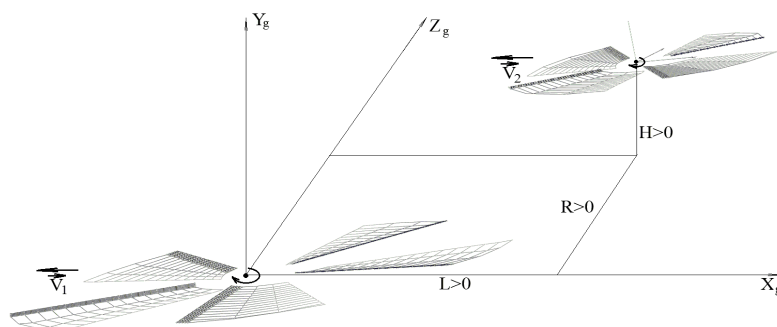


Рис. 1 – Рассчитываемая компоновка.

В качестве примера рассмотрено попадание лёгкого вертолѣта в спутный след тяжѣлого вертолѣта. Для вертолѣта-генератора взяты полѣтный вес $G_1 = 12000$ кг, радиус пятилопастного несущего винта $R_{n1} = 10,65$ м, обороты $n_1 = 195$ об/мин, скорость полѣта $V_1 = 180$ км/ч, угол атаки винта $\alpha_1 = -6,5^\circ$. Вертолѣт в спутном следе имеет вес $G_2 = 3300$ кг, четырёхлопастной несущий винт радиуса $R_{n2} = 5,75$ м с линей-

ной геометрической круткой лопастей $\Delta\varphi_{n2} = 5,7^\circ$, обороты $n_2 = 365$ об/мин, скорость полѣта $V_2 = V_1 = 180$ км/ч, угол атаки винта $\alpha_2 = -6,5^\circ$. Углы общего шага винтов соответствуют силам тяги, равным весу вертолѣтов, и составляют $\varphi_1 = 8^\circ$, $\varphi_2 = 8,2^\circ$. Положение вертолѣта в следе относительно вертолѣта-генератора описывается величинами продольного смещения L (вдоль потока), вертикального смещения H и бокового смещения R (рис. 1).

Рассчитываются аэродинамические характеристики винта вертолёта в следе, осреднённые за 2 – 3 оборота, для периода расчётного времени, когда вблизи данного винта уже сформировалась вихревая пелена от вертолёт-генератора. Наступление указанного периода времени зависит от продольного смещения винтов. Так, для $L/R_{H2} = 3 \div 6$ достаточно провести расчёты для 10 оборотов винта вертолёта в следе, для $L/R_{H2} = 12$ требуется 17 оборотов винта. Вычисляются приращения аэродинамических характеристик винта, возникающие в результате воздействия спутного следа, по сравнению с характеристиками изолированного винта вне следа. Поскольку воздействие спутного следа проявляется, прежде всего, в изменении силы тяги винта, моментов крена и тангажа, в настоящей работе исследуются приращения коэффициентов указанных характеристик по сравнению с полётом вне спутного следа:

$$\Delta C_t = \frac{T_2 - T_{2\text{изол}}}{\rho \frac{V_2^2}{2} \cdot \pi R_{H2}^2}; \quad \Delta m_x = \frac{M_{x2} - M_{x2\text{изол}}}{\rho \frac{V_2^2}{2} \cdot \pi R_{H2}^2 \cdot R_{H2}}; \quad \Delta m_z = \frac{M_{z2} - M_{z2\text{изол}}}{\rho \frac{V_2^2}{2} \cdot \pi R_{H2}^2 \cdot R_{H2}},$$

где T_2 , M_{x2} , M_{z2} – размерные значения силы тяги, моментов крена и тангажа винта в следе; $T_{2\text{изол}}$, $M_{x2\text{изол}}$, $M_{z2\text{изол}}$ – те же величины для винта вне следа; ρ – плотность воздуха.

На рис. 2, а, б, в показаны приращения коэффициентов силы тяги, моментов крена и тангажа винта вертолёта в следе, соответствующие продольному смещению винтов $L/R_{H2} = 9$ в зависимости от поперечного и вертикального смещений. Видно, что наибольшее падение коэффициента силы тяги (до $\Delta C_t = -0,006$) наблюдается при значениях поперечного смещения $R/R_{H2} = -1$ и $H/R_{H2} = -1 \div 0$. Расположение минимума силы тяги слева от середины следа свидетельствует о несимметричной структуре следа за вертолётным винтом, у которого различаются циркуляции вихревых жгутов, генерируемых наступающей и отступающей лопастью. При поперечных смещениях винта $R/R_{H2} = -3$ и $R/R_{H2} = 3$ имеют место максимумы силы тяги винта в следе. При $R/R_{H2} = -2$ и $H/R_{H2} = -2 \div -1$ наблюдается максимальное отклонение аэродинамических моментов от значений вне следа в направлении правого крена и кабрирования. С увеличением продольного смещения вертолётных минимумы и максимумы аэродинамических характеристик сдвигаются в сторону меньших высот местоположения вертолёта в следе из-за перемещения следа вниз под действием индукции вихрей. Это можно видеть на рис. 3, а, б, в, на котором приращение коэффициента силы тяги показано как функция вертикального ($H/R_{H2} = -3 \div 3$) и продольного ($L/R_{H2} = 3, 6, 9, 12$) смещения винта, при $R/R_{H2} = -3, -1, 3$. При положении вертолёта вне диапазона $H/R_{H2} = -3 \div 3$, $R/R_{H2} = -5 \div 5$ можно считать влияние следа несущественным.

Модель дальнего вихревого следа за вертолётном. Поведение вертолёта в дальнем вихревом следе вертолёт-генератора может быть описано с помощью модели дальнего вихревого следа за летательным аппаратом, изложенной в [2]. Указанная модель предполагает, что вихревые жгуты, образующиеся за летательным аппаратом-генератором, перемещаются вниз под действием взаимной индукции жгутов, так что скорость их перемещения может быть вычислена по формуле Био – Савара [9, 10]:

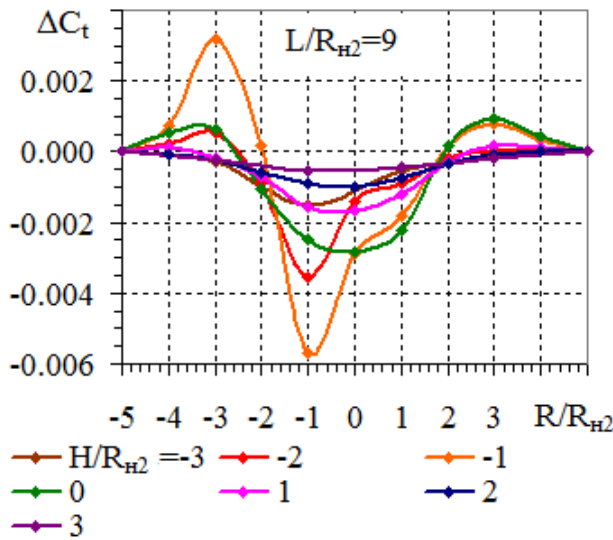
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi b_0}, \quad (1)$$

где y – вертикальная координата оси жгута, отсчитываемая от высоты образования пелены; Γ – циркуляция вихревого жгута; b_0 – расстояние между жгутами. Все перечисленные величины рассматриваются в поперечном сечении $x = L$. Величина b_0 предполагается связанной с размахом крыла самолёт-генератора $L_{\text{разм}}$ соотношением $b_0 = \pi/4 \cdot L_{\text{разм}}$, в случае вертолёт-генератора целесообразно принять $L_{\text{разм}} = 2 \cdot R_{H1}$.

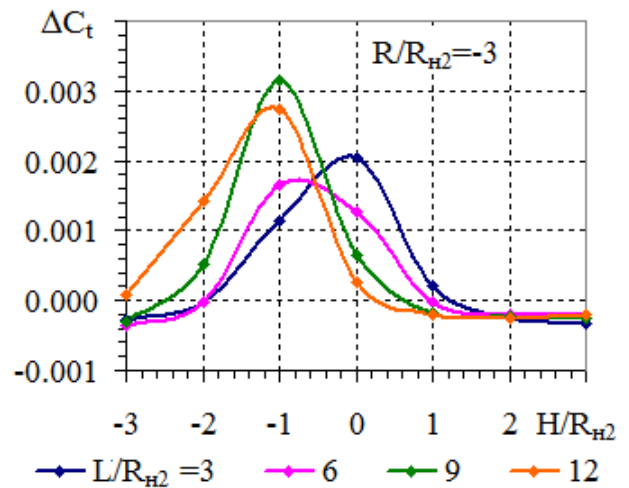
Величина циркуляции Γ с течением времени убывает в результате действия турбулентности воздушной среды, силы вязкого сопротивления и выталкивающей силы Архимеда в стратифицированной среде. В [2] действие перечисленных факторов описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -0,82 \frac{q\Gamma}{b_0} - \frac{2,09}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{b_0^2} C_D + \frac{A}{b_0} N^2 y, \quad (2)$$

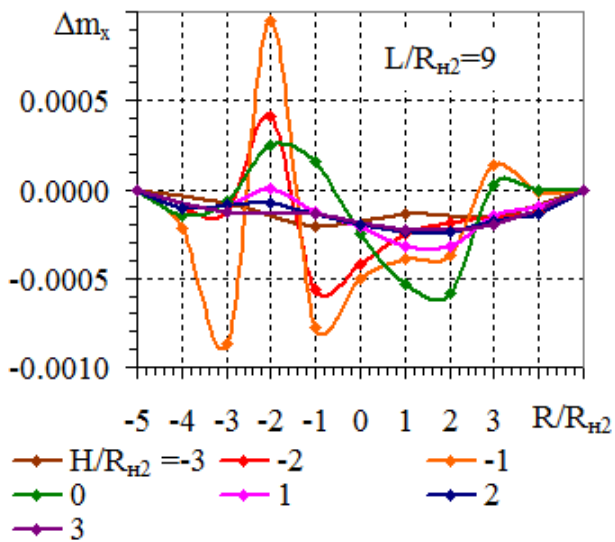
содержащим параметры q – уровень турбулентности атмосферы [11]; C_D – коэффициент вязкого трения; N – частоту Брента – Вэйсяля, а также константу $A = 1,73 \cdot 2,09 \cdot (\pi/4) \cdot b_0^2$. Для названных параметров рекомендованы значения $q = 0,914$ м/с (средний уровень турбулентности) и $q > 1,524$ м/с (высокий уровень турбулентности); $C_D = 0,2$ при $Re > 600000$ и $C_D = 0,4$ при $Re > 400000$; $N = 0 \div 0,03$ с⁻¹.



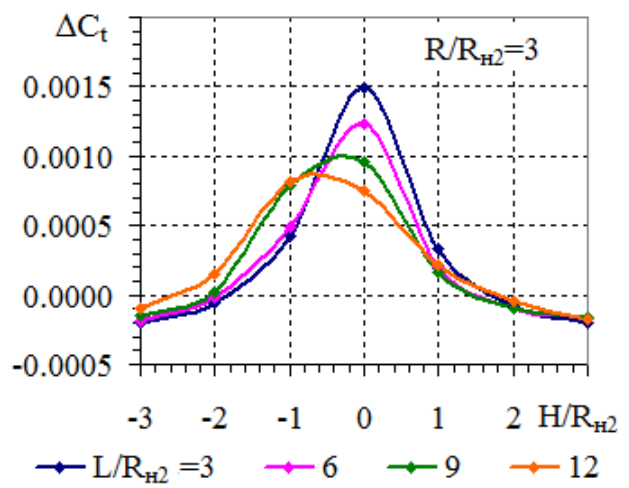
a – приращение коэффициента силы тяги;



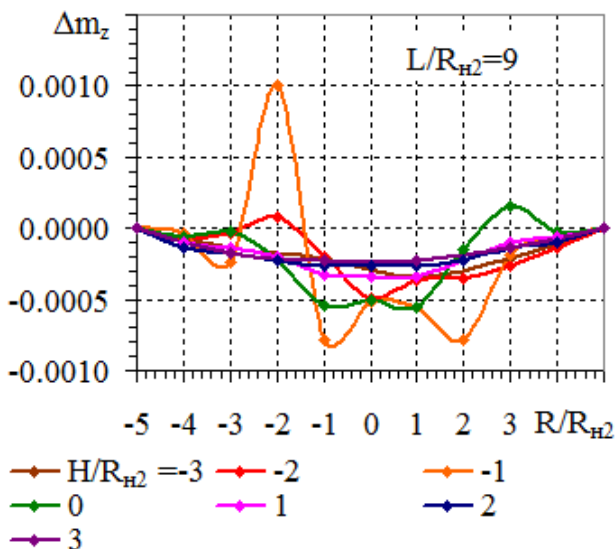
a – $R/R_{H2} = -3$;



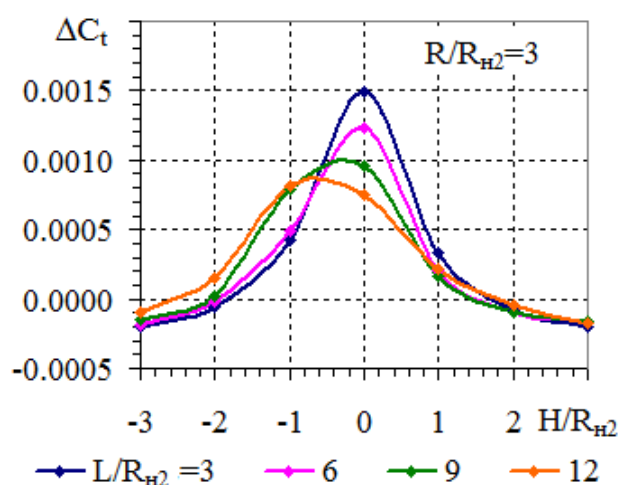
b – приращение коэффициента момента крена;



b – $R/R_{H2} = -1$;



v – приращение коэффициента момента тангажа.



v – $R/R_{H2} = 3$.

Рис. 2 – Зависимость приращений аэродинамических характеристик винта вертолёта в следе от поперечного и вертикального смещения относительно вертолёта-генератора.

Рис. 3 – Зависимость приращений аэродинамических характеристик винта вертолёта в следе от вертикального и продольного смещения относительно вертолёта-генератора.

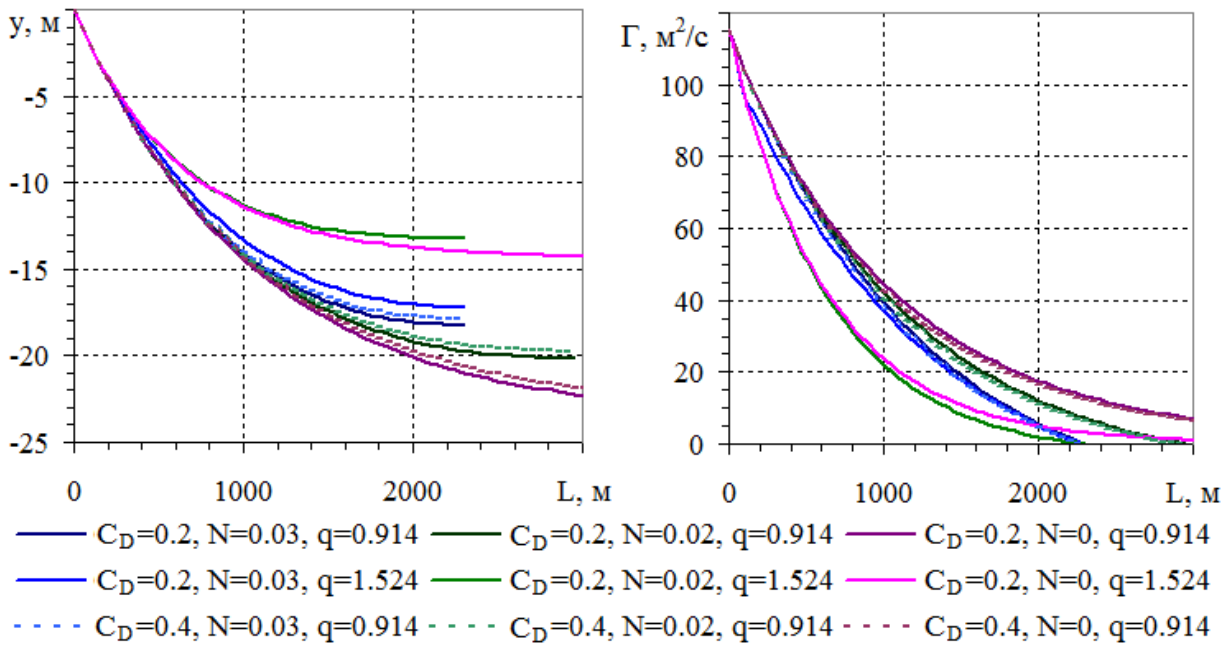


Рис. 4 – Зависимость вертикального положения вихревых жгутов и их циркуляции от расстояния до вертолѣта-генератора.

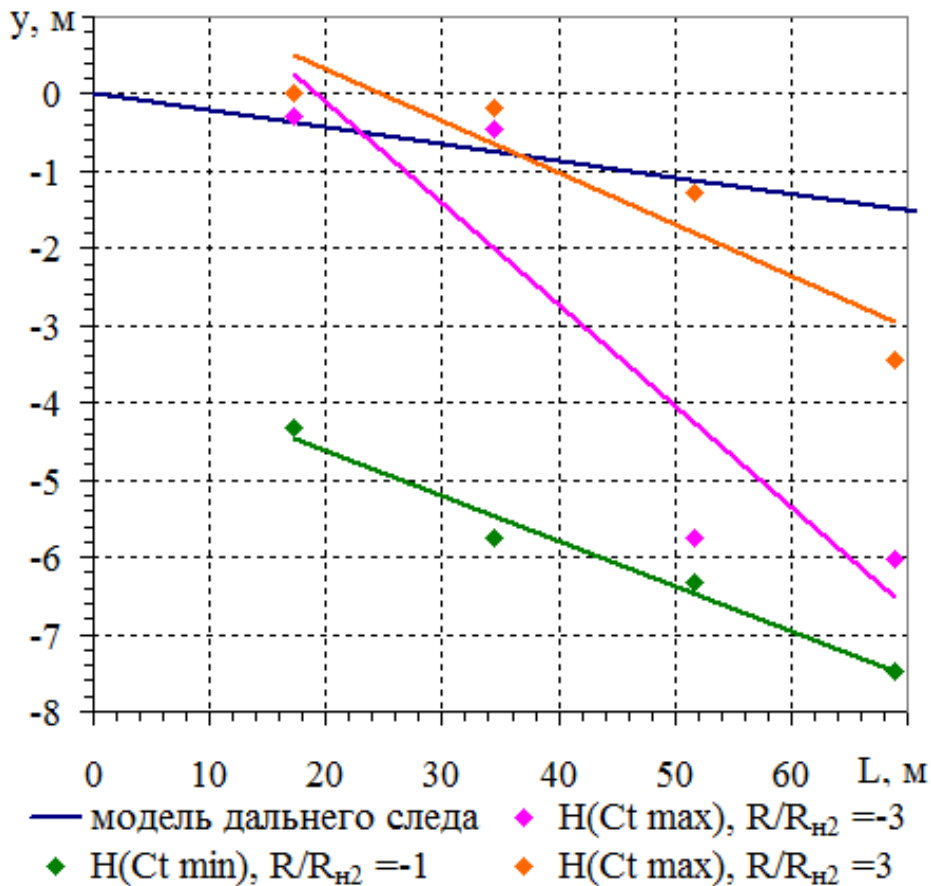


Рис. 5 – Зависимость вертикального положения максимумов и минимума силы тяги винта в следе от продольного смещения относительно вертолѣта-генератора в сравнении с положением вихревых жгутов согласно модели дальнего следа.

Соотношения (1) – (2) образуют систему дифференциальных уравнений относительно функций $y(t)$, $\Gamma(t)$. Решение её при начальных условиях

$$y(0) = 0, \Gamma(0) = \Gamma_0$$

описывает поведение дальнего следа вертолѐта. Начальное значение циркуляции $\Gamma_0 = (m_1 g) / (\rho b_0 V)$ определяется из *теоремы Н. Е. Жуковского* [9, 10] через массу m_1 вертолѐта-генератора.

На рис. 4 показаны решения уравнений (1) – (2) при различных значениях параметров q , C_D , N из рекомендованных в [2] диапазонов. По оси абсцисс отложено расстояние L от вертолѐта-генератора, которое он пролетает за время t со скоростью V_1 . Видно, что коэффициент вязкого трения оказывает малое влияние на поведение решения. Характерной чертой решения уравнений при $N > 0$ является наличие значения L_{T0} , при котором циркуляция жгутов обращается в нуль. Так, при $N = 0,03 \text{ с}^{-1}$ такое расстояние составляет $L_{T0} = 2250 \text{ м}$, при

$$N = 0,02 \text{ с}^{-1} - L_{T0} = 2900 \text{ м}.$$

Можно практически считать вихревой след на таком расстоянии полностью разрушившимся и не оказывающим влияние на летящий позади вертолѐт. При наихудших из рассмотренных условий когда

$$N = 0, q = 0,914 \text{ м/с}, C_D = 0,2 \text{ при } L = 2250 \text{ м}$$

остаточное значение циркуляции вихревых жгутов составляет 12 % от начального, что позволяет пренебречь влиянием следа на вертолѐт. Таким образом, целесообразно ограничить область вихревого следа вертолѐта-генератора удалением $L_{\max} = 2250 \text{ м}$ и указанными выше диапазонами $H / R_{n2} = -3 \div 3$, $R / R_{n2} = -5 \div 5$.

Возможно, сравнить поведение следа за вертолѐтом в области ближнего следа, полученное в результате проведенных расчѐтов и в соответствии с моделью дальнего следа. Как видно из рис. 4, в области ближнего следа (до $L = 150 \div 200 \text{ м}$) смещение следа вниз, рассчитываемое с помощью указанных уравнений, будет практически одинаковым при любом выборе параметров из рекомендованных диапазонов. На рис. 5 показано полученное в расчѐтах перемещение вниз высот, при которых наблюдаются максимумы и минимум приращений подъѐмной силы винта вертолѐта в ближнем следе, в зависимости от удаления от вертолѐта-генератора, прямые линии соответствующих цветов аппроксимируют полученные значения указанных высот. Для сравнения показано перемещение вниз следа от винта, полученное из решения уравнений (1) – (2). Можно видеть, что перемещение вниз вихревых жгутов согласно модели дальнего следа и смещение областей наибольшего влияния следа на позади летящий вертолѐт в соответствии с результатами расчѐтов происходит с близкими скоростями, различие которых обусловлено различными учитываемыми в моделях факторами.

Для определения влияния дальнего вихревого следа вертолѐта-генератора на аэродинамические характеристики позади летящего вертолѐта целесообразно использовать приращения характеристик, рассчитанные в некотором поперечном сечении ближнего следа, изменяющиеся с удалением от генератора пропорционально циркуляции вихревых жгутов, с поправкой на смещение следа вниз:

$$\Delta C_{AX}(L, H, R) = \Delta C_{AX}(L_0, H + y(L/V_1), R) \cdot \Gamma(L/V_1) / \Gamma_0,$$

где $\Delta C_{AX}(L, H, R)$ – это приращение одной из аэродинамических характеристик при заданном пространственном смещении вертолѐта в следе. В качестве L_0 следует выбрать одно из сечений, для которого проведены расчѐты приращений аэродинамических характеристик вертолѐта в ближнем следе.

Выводы. Исследовано влияние спутного вихревого следа вертолѐта на аэродинамические характеристики другого вертолѐта.

Для ближнего и дальнего следа вертолѐта использованы различные математические модели. Расчѐт аэродинамических характеристик вертолѐта в ближнем следе проводится путѐм численного моделирования обтекания винтов вертолѐтов методом дискретных вихрей. Для дальнего следа использованы дифференциальные уравнения, учитывающие затухание и разрушение следа вследствие атмосферной турбулентности, вязкого трения и выталкивающей силы Архимеда. Определение области пространства, в которой необходимо учитывать влияние спутного следа, и расчѐт приращений аэродинамических характеристик винта из-за воздействия следа проводится с использованием результатов расчѐтов по обеим моделям.

Результаты настоящего исследования могут быть использованы для разработки математической модели,

реализуемой в тренажёре вертолёта, с целью отработки действий лётчика при попадании в спутный след вертолёта.

Список литературы

1. Желанников А. И. Оперативные методы расчёта характеристик вихревого следа за самолётами // Вісник Харк. нац. ун-та. Серія : «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харків, 2009. – № 847. – С. 184 – 190.
2. Хаустов А. А. Модель эволюции спутного следа воздушного судна при полёте на крейсерском режиме // Научный вестник МГТУ ГА. – Москва, 2012. – № 184. – С. 118 – 122.
3. Кобрин В. Н., Соловьёв О. В., Чмовж В. В. Анализ процесса формирования вихревых следов за летательными аппаратами // Системы озброєння і військова техніка. – 2013. – № 2 (34). – С. 93 – 98.
4. Соловьёв О. В., Прусак П. В., Кобрин Н. В. Обеспечение заданного уровня безопасности полётов в условиях воздействия вихревых следов // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. – 2014. – № 4 (17). – С. 26 – 30.
5. Аубакиров Т. О., Желанников А. И., Иванов П. Е., Ништ М. И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. – Алматы, 1999. – 230 с.
6. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
7. Белоцерковский С. М., Локтев Б. Е., Ништ М. И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов. – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.
8. Апаринов В. А., Дворак А. В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского. – Москва, 1986. – Вып. 1313. – С. 424 – 429.
9. Лоїцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е, перераб. и доп. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 840 с.
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 583 с.
11. Donaldson C. duP., Bilanin A. J. Vortex Wakes of Conventional Aircraft. – AGARDograph, No. 204. – Neuilly sur Seine : AGARD NATO, 1975. – 80 p.

References (transliterated)

1. Zhelannikov A. I. Operativnye metody rascheta kharakteristik vikhrevogo sleda za samoletami [Operational methods for calculating the characteristics of vortex wakes of aircrafts]. *Visnyk Khark. nats. un-ta. Seriya : "Matematychnye modelyuvannya. Informatsiyi tehnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya"* [Bulletin of the Kharkiv National University. Series : "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"]. Kharkiv, 2009, no. 847, pp. 184–190.
2. Khaustov A. A. Model' evolyutsii sputnogo sleda vozdushnogo sudna pri polete na kreyserskom rezhime [Model of evolution of the aircraft's wake on the cruise flight]. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta grazhdanskoy aviatsii* [Scientific bulletin of the Moscow State University of Civil Aviation]. Moscow, 2012, no. 184, pp. 118–122.
3. Kobrin V. N., Solov'ev O. V., Chmovzh V. V. Analiz protsessa formirovaniya vikhrevykh sledov za letatel'nymi apparatami [Analysis of the process of formation of vortex wakes behind aircrafts]. *Systemy ozbroyneniya i viys'kova tekhnika* [Weapon systems and military technologies], 2013, no. 2(34), pp. 93–98.
4. Solov'ev O. V., Prusak P. V., Kobrina N. V. Obespechenie zadannogo urovnya bezopasnosti poletov v usloviyakh vozdeystviya vikhrevykh sledov [Providing of preset level of flight security under influence of the vortex wakes]. *Nauka i tekhnika Povitryanykh Syl Zbroynykh Syl Ukrainy* [Science and technologies of Air Forces of Armed Forces of Ukraine]. 2014, no. 4 (17), pp. 26–30.
5. Aubakirov T. O., Zhelannikov A. I., Ivanov P. E., Nisht M. I. Sputnye sledy i ikh vozdeystviye na letatel'nye apparaty. Modelirovanie na EVM. [Wakes and their influence on the aircrafts. Modelling on the computer]. *Almaty, 1999. 230p.*
6. Belotserkovskiy S. M., Nisht M. I. Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'yu [Separated and non-separated flow of the ideal fluid about thin wings]. *Moscow, Nauka Publ., 1978. 351p.*
7. Belotserkovskiy S. M., Loktev B. E., Nisht M. I. Issledovanie na EVM aerodinamicheskikh i aerouprugikh kharakteristik vintov vertoletov [Computer investigation of the aerodynamic and aeroelastic characteristics of helicopter rotors]. *Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 224p.*
8. Aparinov V. A., Dvorak A. V. Metod diskretnykh vikhrey s zamknutyimi vikhrevymi ramkami [Method of discrete vortices with closed vortex frames]. *Primenenie EVM dlya issledovaniya aerodinamicheskikh kharakteristik letatel'nykh apparatov. Trudy VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo* [Applications of computers for investigation of aircraft's aerodynamic characteristics. Proc. of N. E. Zhukovskiy Air Force Academy]. *Moscow, 1986, issue 1313, pp. 424–429.*
9. Loitsyanskiy L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]. 6th ed., *Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p.*
10. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. Teoreticheskaya gidromekhanika [Theoretical hydrodynamics]. 2 volumes, vol. 1, *Moscow, State publishing of literature on physics and mathematics, 1963. 583p.*
11. Donaldson C. duP., Bilanin A. J. *Vortex Wakes of Conventional Aircraft*, AGARDograph no. 204, Neuilly sur Seine, AGARD NATO, 1975. 80 p.

Поступила (received) 22.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Удовенко Володимир Олексійович (Удовенко Владимир Алексеевич, Udovenko Vladimir Alekseevich) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, ТОВ «КБ Аеровотекс», директор, м. Харків; тел.: (066) 288-37-06, (097) 271-33-42; e-mail: uva333@mail.ru.

Гладишев Андрій Іванович (Гладишев Андрей Иванович, Gladyshev Andrei Ivanovich) – інженер – програміст, ТОВ «КБ Аеровотекс», м. Харків; тел.: (095) 889-19-29; e-mail: andreigladyshv@gmail.com.

А. В. ШЕХОВЦОВ

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА, СКОРОСТИ И ЗАВИХРЕННОСТИ ВЯЗКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ ОТ ВИХРЯ ВБЛИЗИ СТЕНКИ И В КАНАЛЕ

При помощи методов зеркального и конформного отображений, а также формализма комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции, получены аналитические выражения для функции тока, скорости и завихренности вязкого нестационарного несжимаемого течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки и в канале. В качестве базового использовалось фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца для дисперсии завихренности в вязкой несжимаемой среде – вихрь Лэмба – Озеена, скорость от которого удовлетворяет уравнению неразрывности. Полученные выражения могут быть использованы для численного моделирования описанных течений и визуализации их кинематических полей.

Ключевые слова: функция тока, скорость, завихренность, вязкое нестационарное несжимаемое течение, проскальзывание, вихрь Лэмба – Озеена, стенка, канал, фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца, дисперсия.

О. В. ШЕХОВЦОВ

ВИРАЗИ ДЛЯ ФУНКЦІЇ СТРУМУ, ШВИДКОСТІ ТА ЗАВИХРЕНОСТІ В'ЯЗКОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЧІЇ З ПРОКОВЗУВАННЯМ ВІД ВИХОРУ ПОБЛИЗУ СТІНКИ І В КАНАЛІ

За допомогою методів дзеркального і конформного відображень, а також формалізму комплексного потенціалу аналогового дискретного вихору однакової циркуляції, отримані аналітичні вирази для функції струму, швидкості та завихреності в'язкої нестационарної нестисливої течії з проковзуванням від вихору поблизу стінки і в каналі. В якості базового використовувався фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца для дисперсії завихреності у в'язкому нестисливому середовищі – вихор Лемба – Озеена, швидкість від якого задовольняє рівнянню нерозривності. Отримані вирази можуть бути використані для чисельного моделювання описаних течій і візуалізації їх кінематичних полів.

Ключові слова: функція струму, швидкість, завихреність, в'язка нестационарна нестислива течія, проковзування, вихор Лемба – Озеена, стінка, канал, фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Гельмгольца, дисперсія.

A. V. SHEKHOVTSOV

EXPRESSIONS FOR THE STREAM FUNCTION, VELOCITY AND VORTICITY OF THE VISCOUS UNSTEADY FLOW WITH SLIP INDUCED BY VORTEX NEAR THE WALL AND IN THE CHANNEL

Analytical expressions for the stream function, velocity and vorticity of the viscous unsteady incompressible flow with slip induced by the vortex near the wall and in the channel are obtained using the methods of mirror and conformal mappings as well as the formalism of the complex potential of an analog discrete vortex of equal circulation. The fundamental solution of the generalized Helmholtz equation for the dispersion of vorticity in a viscous incompressible medium – Lamb – Oseen vortex, speed from which satisfies the continuity equation is used as the basic one. The received expressions can be used for numerical simulation of the described flows and visualization of their kinematic fields.

Key words: stream function, velocity, vorticity, viscous unsteady incompressible flow, slip, Lamb – Oseen vortex, wall, channel, fundamental solution of the generalized Helmholtz equation, dispersion.

Общая постановка проблемы и цель работы. Обобщение усовершенствованного метода дискретных вихрей (УМДВ) для вязких вихревых сред [1, 2], при котором в качестве частного (базового) решения используется вихрь Лэмба – Озеена – фундаментальное решение обобщенного уравнения Гельмгольца (кинематической формы уравнения Навье – Стокса) [3], обеспечивает равномерную сходимость численного решения к аналитическому с увеличением числа дискретных вихрей в таких тестовых задачах, как диффузия вихревой окружности и диффузия вихревого круга [4] из-за аналитического моделирования диффузии завихренности, которая распространяется от каждого дискретного вихря, а также из-за быстрого уменьшения невязки как $\exp(-r^2)$ за пределами произвольных пар дискретных вихрей, так как она зависит от произведения касательной скорости на градиент завихренности [5]. При этом скорость от вихря Лэмба – Озеена удовлетворяет уравнению неразрывности.

Обобщенный УМДВ также обеспечивает точное выполнение закона сохранения завихренности (закона сохранения момента импульса вихря) в пределах контуров, расширяющихся относительно вязкой среды со скоростью диффузии завихренности.

Из-за неочевидности последнего утверждения, рассмотрим его детальнее.

Первая теорема Гельмгольца говорит о том, что любые движения бесконечно малого объема среды можно представить в виде суммы перемещения и вращения, то есть, в виде квазитвердого движения, а также деформаций, которые, в свою очередь, можно представить в виде растяжений и сжатий трех перпендикулярных осей.

Таким образом, вихревое движение является квазитвердым движением среды (*ротор* – это антисимметричная часть тензора скоростей деформаций). В то же время, диссипация связана с работой сил вязкости при деформациях среды (*деформация* – это симметричная часть тензора скоростей деформаций), которые отсутствуют при квазитвердом движении. Поэтому вихревая компонента движения среды не диссипирует в вязкой среде в консервативном поле сил.

Физика здесь проста – при чисто вихревом движении объем среды движется как единое целое, без деформаций сдвига, растяжения и сжатия, и поэтому даже в вязкой среде в вихревой области слои жидкости не испытывают трения. Это приводит к тому, что *реологический закон Ньютона* в вихревых областях несжимаемой невесомой среды не работает, а обобщенный закон Ньютона вырождается в них в условие сферичности тензора напряжений. То есть, вихревые области среды движутся так, будто трения в них нет – как объем идеальной среды в вязкой жидкости.

Поэтому в *соленоидальных средах*, в которых существует потенциал внешних сил, вихревое движение происходит без диссипации энергии в тепло. Иначе говоря, в вязкой несжимаемой среде в консервативном поле сил вихри не диссипируют в тепло, а только рассеиваются относительно среды благодаря диффузии и перемешиваются в ней благодаря конвекции.

Интересно, что это прямо следует из обобщенного уравнения Гельмгольца (кинематической формы уравнения Навье – Стокса в *форме Громка – Лэмба*) для дисперсии завихренности $\bar{\Omega}$ в вязкой несжимаемой среде с коэффициентом кинематической вязкости ν в консервативном поле сил:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + (\bar{W} \cdot \nabla) \bar{\Omega} = \nu \nabla^2 \bar{\Omega}, \quad (1)$$

если его выразить через переносную конвективную скорость дисперсии завихренности \bar{W} и диффузионную скорость завихренности относительно среды – $\nu \nabla \Omega / \Omega = \bar{V}_d$:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \left(\left(\bar{W} - \nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) \bar{\Omega} = 0. \quad (2)$$

Это даст равенство нулю суммы частной производной от завихренности и производной по направлению вектора абсолютной скорости $\bar{W} + \bar{V}_d$, то есть равенство нулю полной производной от завихренности вдоль вектора ее абсолютной скорости, и поэтому завихренность остается постоянной в пределах фронта своего распространения. Циркуляция скорости по этим контурам, соответственно, также будет сохраняться [2, 5].

Что касается природы зарождения завихренности на границах течения, то она может быть любой, так как уравнение дисперсии завихренности в вязкой среде выражает собой закон сохранения только возникшей ранее завихренности, что эквивалентно закону сохранения момента импульса вихря в вязкой среде.

Подчеркнем, что природа зарождения завихренности с острых кромок крыльев (в частности, пластин) не вязкая, поскольку связана с невозможностью образования бесконечно больших по абсолютной величине скоростей и давлений в окрестности острых кромок крыльев при обтекании их потоком реальной среды [3].

Еще одним преимуществом обобщенного УМДВ является возможность выделения физических компонент нагрузок на крыльях: циркуляционной компоненты – аналога *квазистационарной силы Жуковского*, которая определяется мгновенным значением циркуляции по контуру, прилегающему к расчетному сечению крыла (без учета сошедших вихрей); инерционной компоненты, которая зависит от мгновенной присоединенной массы расчетного профиля крыла и определяется мгновенной циркуляцией ускорения по контуру, прилегающему к расчетному сечению крыла; вихревой (индуктивной) компоненты, которая определяется мгновенной величиной завихренности и ее распределением вокруг расчетного профиля крыла [5 – 7].

Метод был апробирован для класса задач о колебаниях крыла в вязкой несжимаемой среде с ограниченным решением на кромках и неустановившегося отрывного обтекания пластины вязким потоком: полученные значения нормальной силы оказались в пределах погрешности эксперимента для всего *диапазона чисел Рейнольдса* и всех закритических углов атаки [2, 8].

Поскольку данный метод диффузию завихренности от каждого дискретного вихря моделирует аналитически, это позволяет для случая течения с проскальзыванием на твердых границах выразить все кинематические поля течения от вихря Лэмба – Озеена вблизи стенки и в канале в аналитическом виде, что и является целью данной работы.

Анализ последних исследований. Для моделирования вихревых течений в некоторых задачах, например, в задачах о моделировании работы крыльев насекомых, иногда необходимо рассматривать движение вихрей или вихревых поверхностей вблизи стенки или в канале. Например, в работе [5] при помощи обобщенного УМДВ и метода зеркального отображения исследовались аэродинамические характеристики пары симметрично вращающихся крыльев насекомых (*фаза броска механизма Вейс-Фо*) и поля вязкого вихревого течения вокруг них. А в работе [9], на основе экспериментальных данных о кинематике движения крыльев, при помощи УМДВ (в идеальной постановке) исследовался процесс вентиляции пчелами своего улья, для чего моделировалось движе-

ние вихрей в канале. Однако аналитических выражений для кинематических полей течений от вихря вблизи стенки и в канале в указанных работах не приведено.

Кинематические поля вязкого течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки. Закон дальнедействия для индуцированного поля конвективной окружной скорости от дискретного вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в вязкой среде отличается от закона Био – Савара множителем для циркуляции:

$$\Gamma = \Gamma_0 \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(z - z_0)(\overline{z - z_0})}{4\nu t} \right] \right\}, \quad (3)$$

который обеспечивает ее уменьшение с течением времени вследствие растекания ядра завихренности с радиальной диффузионной скоростью \bar{V}_d по заранее известному закону.

Применяя метод зеркального отображения для случая расположения вихря вблизи стенки, а также формализм комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3), получим следующие аналитические выражения для кинематических полей нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения, возникшего сразу во всем пространстве после того, как был убран источник завихренности.

Комплексный потенциал от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$X = - \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(z - z_0)(\overline{z - z_0})}{4\nu t} \right] \right\} \ln \frac{z - z_0}{z - z_0}. \quad (4)$$

Комплексно сопряженная скорость от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\bar{V} = - \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(z - z_0)(\overline{z - z_0})}{4\nu t} \right] \right\} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right). \quad (5)$$

Функция тока от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\psi = - \frac{\Gamma_0}{4\pi} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \ln \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)(y + y_0)]^2 + 4y_0^2(x - x_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]^2}. \quad (6)$$

Компоненты индуцированной скорости от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$u = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \left[\frac{y + y_0}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right];$$

$$v = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\} \left[\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right]. \quad (7)$$

Завихренность от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 вблизи стенки:

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{4\nu t} \left\{ \exp \left[- \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4\nu t} \right] - \exp \left[- \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{4\nu t} \right] \right\}. \quad (8)$$

Кинематические поля вязкого течения с проскальзыванием от вихря в канале. Применяя метод конформного отображения для случая расположения вихря в канале, а также формализм комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3), получим следующие аналитические выражения для кинематических полей нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения, возникшего сразу во всем пространстве после того, как был убран источник завихренности [10].

Комплексный потенциал от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$X = -\frac{i\Gamma_0}{2\pi} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{4vt} \left(\exp \left\{ \frac{\pi}{H} z \right\} - \exp \left\{ \frac{\pi}{H} z_0 \right\} \right) \left(\overline{\exp \left\{ \frac{\pi}{H} z \right\} - \exp \left\{ \frac{\pi}{H} z_0 \right\}} \right) \right] \right\} \ln \frac{1 - \exp \left[\frac{\pi}{H} (z_0 - z) \right]}{1 - \exp \left[\frac{\pi}{H} (\overline{z_0} - z) \right]}. \quad (9)$$

Комплексно сопряженная скорость от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\bar{v} = \frac{i\Gamma_0}{2H} \left(1 - \exp \left[-\frac{1}{4vt} \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} z \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} z_0 \right) \right] \left[\overline{\exp \left(\frac{\pi}{H} z \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} z_0 \right)} \right] \right] \right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{1 - \exp \left[\frac{\pi}{H} (\overline{z_0} - z) \right]} - \frac{1}{1 - \exp \left[\frac{\pi}{H} (z_0 - z) \right]} \right\}. \quad (10)$$

Функция тока от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\psi = -\frac{\Gamma_0}{4\pi} \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{4vt} \left\{ \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 \right\} \right) \right] \times \\ \times \ln \frac{1 - 2 \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 - y) \right] + \exp \left[\frac{2\pi}{H} (x_0 - x) \right]}{1 - 2 \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 + y) \right] + \exp \left[\frac{2\pi}{H} (x_0 - x) \right]}. \quad (11)$$

Компоненты индуцированной скорости от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$u = \frac{\Gamma_0}{2H} \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{4vt} \left\{ \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 \right\} \right) \right] \times \left\{ \frac{\exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \sin \left[\frac{\pi}{H} (y_0 + y) \right]}{1 - 2 \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 + y) \right] + \exp \left[\frac{2\pi}{H} (x_0 - x) \right]} - \right. \\ \left. - \frac{\exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \sin \left[\frac{\pi}{H} (y_0 - y) \right]}{1 - 2 \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 - y) \right] + \exp \left[\frac{2\pi}{H} (x_0 - x) \right]} \right\}; \\ v = \frac{\Gamma_0}{2H} \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{4vt} \left\{ \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \cos \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[\exp \left(\frac{\pi}{H} x \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y \right) - \exp \left(\frac{\pi}{H} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi}{H} y_0 \right) \right]^2 \right\} \right) \right] \times \left\{ \frac{1 - \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 - y) \right]}{1 - 2 \exp \left[\frac{\pi}{H} (x_0 - x) \right] \cos \left[\frac{\pi}{H} (y_0 - y) \right] + \exp \left[\frac{2\pi}{H} (x_0 - x) \right]} - \right.$$

$$\left. \frac{1 - \exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0 - x)\right] \cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0 + y)\right]}{1 - 2 \exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0 - x)\right] \cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0 + y)\right] + \exp\left[\frac{2\pi}{H}(x_0 - x)\right]} \right\}. \quad (12)$$

Завихренность от вихря с начальной циркуляцией Γ_0 и координатой z_0 в канале шириной H :

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{\Gamma_0}{4\pi vt} \left[\exp\left(-\frac{1}{4vt} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{H}y\right) - \exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right) \right\}^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}y\right) - \exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right) \right]^2 \right) \right] - \exp\left(-\frac{1}{4vt} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{H}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{H}y\right) - \exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right) \cos\left(\frac{\pi}{H}y_0\right) \right\}^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left[\exp\left(\frac{\pi}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}y\right) + \exp\left(\frac{\pi}{H}x_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}y_0\right) \right]^2 \right) \right] \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Аналогичные аналитические выражения для функции тока, завихренности и компонент индуцированной скорости от вихря Лэмба – Озеена можно получить для случая нестационарного вязкого вихревого индуцированного течения с проскальзыванием на твердых границах произвольной формы при помощи метода конформного отображения и формализма комплексного потенциала аналогового дискретного вихря равной циркуляции в соответствии с (3). Также не представляет особого труда получить подобные аналитические выражения для кинематических полей нестационарных вязких вихревых индуцированных течений с проскальзыванием от цепочки вихрей Лэмба – Озеена вблизи стенки и в канале.

Кроме того, используя в *обобщенной формуле Коши – Лагранжа* [6] формулы (7) и (12) для компонент индуцированной скорости от вихря Лэмба – Озеена (и подобные – для цепочки вихрей Лэмба – Озеена) в случае нестационарных вязких вихревых индуцированных течений с проскальзыванием вблизи стенки и в канале, можно получить поля давления.

Список литературы

1. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. An improved vortex lattice method for nonstationary problems // Journal of mathematical sciences. – 2001. – Vol. 104. – No. 6. – P. 1615 – 1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
2. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // Вісник Харківського національного університету. Серія : математичне моделювання, інформаційні технології, автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2009. – Вип. 12. – № 863. – С. 111 – 128.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1987. – 840 с.
4. Кохин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч 2. – М. : Физматлит, 1963. – 728 с.
5. Шеховцов А. В. Инерционно-вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых // Прикладная гидромеханика. – 2011. – Том 13 (85). – № 1. – С. 61 – 76. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.
6. Shekhovtsov A. V. A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing // International journal of fluid mechanics research. – 2002. – Vol. 29. – N 1. – P. 111 – 123.
7. Шеховцов А. В. Инерционно-циркуляционный принцип полета и плавания // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2005. – Вип. 4. – № 661. – С. 249 – 258.
8. Шеховцов А. В. Решение некорректных задач гидроаэродинамики усовершенствованным методом дискретных вихрей // Тези науково – практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка». – Київ : Інститут гідромеханіки НАН України. – 2008. – С. 50 – 51.
9. Shekhovtsov A. V., Junge M., Nachtigall W. Aerodynamics of a bee wing, operating in a fanning mode // International journal of fluid mechanics research. – 2001. – Vol. 28. – N 4. – P. 572 – 575. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v28.i4.100.
10. Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1946. – 159 с.

References (transliterated)

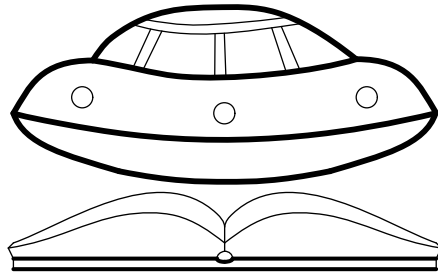
1. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. An improved vortex lattice method for nonstationary problems. *Journal of mathematical sciences*. 2001, vol. 104, no. 6, pp. 1615–1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
2. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. Aprobatsiya IMDV dlya klassa zadach o kolebaniyakh kryla v vyazkoy srede s ogranichennym resheniyem na kromkakh [Approbation of the IMDV for a class of problems about oscillations of a wing in a viscous medium with a restricted solution on edges]. *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu. Seriya : matematichne modelyuvannya, informatsiyni tekhnologii, avtomatizovani systemy upravlinnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2009, issue 12, no. 863, pp. 111–128.
3. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p.
4. Kochin N. Ye., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika, ch. 2* [Theoretical fluid mechanics, part 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963. 728 p.

5. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-vikhrevoiy printsip generatsii usilii na kryl'yakh nasekomykh [Inertial-vortical principle of generation of efforts on insect wings]. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied fluid mechanics]. 2011, vol. 13 (85), no. 1, pp. 61–76.
6. Shekhovtsov A. V. A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing. *International journal of fluid mechanics research*. 2002, vol. 29, no. 1, pp. 111–123. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.
7. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-tsirkulyatsionnyy printsip poleta i plavaniya. [Inertial-circulating principle of flight and swimming] *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu. Seriya : matematichne modelyuvannya, informatsiyni tekhnologii, avtomatizovaní systemy upravlinnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2005, issue 4, no. 661, pp. 249–258.
8. Shekhovtsov A. V. Resheniye nekorrektnykh zadach gidroaerodinamiki usovershenstvovannym metodom diskretnykh vikhrey [The solution of ill-posed problems of hydrodynamics by the improved method of discrete vortices]. *Tezy naukovu – praktychnoyi konferentsiyi “Komp”yuterna gidromekhanika”* [Abstracts of scientific and practical conference “Computer hydromechanics”]. Kyiv, Instytute gidromekhaniky NAN Ukrayiny Publ., 2008, pp. 50–51.
9. Shekhovtsov A. V., Junge M., Nachtigall W. Aerodynamics of a bee wing, operating in a fanning mode. *International journal of fluid mechanics research*. 2001, vol. 28, no. 4, pp. 572–575. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v28.i4.100.
10. Lavrent'yev M. A. *Konformnyye otobrazheniya s prilozheniyami k nekotorym voprosam mekhaniki* [Conformal mappings with applications to some questions of mechanics]. Moscow – Leningrad, GITTL Publ., 1946. 159 p.

Поступила (received) 14.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Шеховцов Олександр Володимирович (Шеховцов Александр Владимирович, Shekhovtsov Alexander Vladimirovich) – кандидат фізико-математичних наук, Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.



Фундаментальні та прикладні дослідження

Fundamental and applied studies



Ю. В. БАТЫГИН, Е. Ф. ЕРЕМИНА, Е. А. ЧАПЛЫГИН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ИНСТРУМЕНТАХ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ПРОПУСКАНИИ ТОКА ЧЕРЕЗ ОБРАБАТЫВАЕМЫЙ МЕТАЛЛ

С помощью математического аппарата теории электромагнитных полей получены аналитические выражения, позволяющие рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, возбужденного инструментом магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл, линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом, а также интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов. Полученные решения поставленной электродинамической задачи позволяют рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения.

Ключевые слова: магнитно-импульсное притяжение, токопровод, листовый металл, линейная плотность тока, аналитические зависимости, математическая модель.

Ю. В. БАТЫГИН, О. Ф. ЕРЬОМИНА, Е. О. ЧАПЛИГИН, В. А. СТРЕЛЬНИКОВА

ЭЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ІНСТРУМЕНТАХ МАГНІТНО-ІМПУЛЬСНОГО ТЯЖІННЯ ПРИ ПРЯМОМУ ПРОПУЩЕННІ СТРУМУ ЧЕРЕЗ МЕТАЛ, ЩО ОБРОБЛЯЮТЬ

За допомогою математичного апарату теорії електромагнітних полів отримано аналітичні вирази, що дозволяють розрахувати розподіл струму в поперечному перерізі листового металу, збудженого інструментом магнітно-імпульсного притягання при прямому пропусканні струму через оброблюваний метал, лінійну густину сумарного струму в листовому металі в зоні під основним струмопроводом, а також інтегральну силу притягання, що збуджується при взаємодії паралельних струмів. Отримані рішення поставленої електродинамічної задачі дозволяють розглядати процеси в реальних інструментах магнітно-імпульсного притягання.

Ключові слова: магнітно-імпульсне притягання, струмопровід, листовий метал, лінійна густина струму, аналітичні залежності, математична модель.

YU. V. BATYGIN, O. F. YERYOMINA, E. O. CHAPLYGIN, V. A. STRELNIKOVA

ELECTRODYNAMIC PROCESSES IN INSTRUMENTS OF MAGNETIC-PULSE ATTRACTION AT DIRECT CURRENT PASSING THROUGH THE HANDLED METAL

With the help of the mathematical apparatus of the theory of electromagnetic fields, a study was conducted of electrodynamic processes in magnetic-pulse attraction instruments with direct current passing through the metal being processed. Analytical expressions are obtained that allow one to calculate the current distribution in the cross section of sheet metal, where a superposition of induced and extraneous current takes place, and relations are found for the linear density of the total current in the sheet metal in the zone under the main conductor, as well as the integral force of attraction induced by the interaction of parallel currents. The obtained solutions of the set electrodynamic problem adequately describe the processes in the tool of magnetic-pulse attraction and can be used in the design of real structures of tools, and the analysis of the dependencies found for the characteristics of the flowing processes will allow establishing requirements that will ensure not only which efficiency but also the efficiency of the tool.

Key words: magnetic-pulse attraction, conductor, sheet metal, linear current density, analytical dependencies, mathematical model.

Введение. Исследование электродинамических процессов предполагает постановку и решение задач, конечным результатом которых должны стать физико-математические зависимости для характеристик протекающих процессов, в условиях интенсивного проникновения действующих электромагнитных полей.

Как представляется априори, анализ этих зависимостей позволит установить требования, выполнение которых обеспечит не только дееспособность, но и эффективность инструмента, имеющего предлагаемый принцип действия.

Анализ последних исследований. При решении будем следовать алгоритмам, представленным и развитым в работах [1, 2].

Справедливости ради следует отметить, что подобная задача уже рассматривались авторами научных изданий [3, 4]. Однако непосредственное использование полученных ими формул и соотношений для проведения настоящих расчётов не представляется возможным, ввиду ограниченности найденных результатов условиями постановки и решения задач.

Постановка задачи. Для анализа электромагнитных процессов примем расчётную модель (рис. 1), соответствующую поперечным сечениям системы в ортогональных направлениях.

Сформулируем допущения, вполне адекватные реальности и позволяющие получить аналитические зависимости в квадратурах:

- Заготовка представляет собой листовый немагнитный металл с достаточно большими поперечными размерами, толщиной d и удельной электропроводностью γ .
- Основной токопровод прозрачен для действующих полей, так что его металл не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы.
- Имеет место геометрическая симметрия системы относительно координатной плоскости ZOX .
- Вдоль оси абсцисс система обладает достаточно большой протяжённостью, так что $\frac{\partial}{\partial x}[\dots] = 0$.

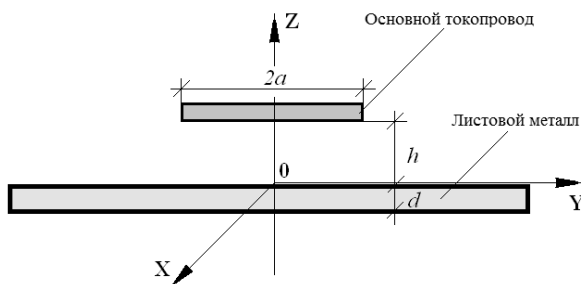


Рис. 1 – Расчётная модель.

• В основном токопроводе в направлении оси OX течёт равномерно распределённый ток с плотностью $j(t) = j_m \cdot j_t(t)$, где $j_m = I_m / 2a$ – это амплитуда (I_m – максимум тока); $j(t)$ – временная зависимость.

• Частотные характеристики возбуждающего тока таковы, что выполняется условие квазистационарности по Ландау $\frac{\omega}{c} \cdot b \ll 1$ [5]; здесь ω – циклическая частота процесса; c – скорость света в вакууме; b – характерный размер системы.

• В системе возбуждается электромагнитное поле с ненулевыми компонентами напряжённости: $E_x \neq 0, H_{y,z} \neq 0$.

Математическая модель. В рамках принятых допущений уравнения Максвелла для ненулевых составляющих напряжённости электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу (L – преобразование) с учётом нулевых начальных условий принимают вид [5 – 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z(p, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(p, y, z)}{\partial z} = j_x(p, y, z); \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial z} = -p\mu_0 H_y(p, y, z); \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x(p, y, z)}{\partial y} = p\mu_0 H_z(p, y, z), \end{array} \right. \quad (3)$$

где p – параметр преобразования Лапласа; $E_x(p, y, z) = L\{E_x(t, y, z)\}$; $H_{y,z}(p, y, z) = L\{H_{y,z}(t, y, z)\}$; $j_x(p, y, z) = L\{j_x(t, y, z)\}$; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

В общем случае плотность тока в правой части уравнения (1) записывается в следующем виде:

$$j_x(p, y, z) = (p \cdot \epsilon_0 + \gamma) \cdot E_x(p, y, z) + j_{xi}(p, y, z), \quad (4)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $j_{xi}(t, y, z)$ – плотность тока в основном токопроводе;

$$j_{xi}(p, y, z) = j(p) \cdot f(y) \cdot \delta(z-h).$$

Здесь $j(p) = j_m \cdot j_t(p)$, где $j_m = I_m / 2a$ – амплитуда; $j_t(p) = L\{j_t(t)\}$, $j_t(t)$ – временная зависимость возбуждающего тока; $f(y)$ – функция поперечного распределения плотности тока; $\delta(z)$ – импульсная функция Дирака.

При решении поставленной задачи в принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками.

Геометрическая и электродинамическая симметрия исследуемой системы соответственно рис. 1 позволяет считать, что таковыми являются:

• свободное полупространство над листовым металлом заготовки со стороны основного токопровода, где $z \in [0, \infty)$;

• область листового металла заготовки, где $z \in [-d, 0]$;

• свободное полупространство с внешней стороны листового металла, где $z \in (-\infty, 0]$.

Из дифференциальных уравнений (1) – (3) с учётом выражения (4) получим уравнения для продольной компоненты напряжённости электрического поля $E_x(p, y, z)$ в выделенных областях, а именно:

• для свободного полупространства с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = p \cdot \mu_0 \cdot j_x(p, y, z); \quad (5)$$

• для листового металла, $z \in [-d, 0]$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = \gamma \cdot E_x(p, y, z); \quad (6)$$

• для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$,

$$\frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(p, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Для уравнений (5) – (7) применим *интегральное косинус-преобразование Фурье* [6, 7], допустимость которого обусловлена геометрической и электрической симметрией рассматриваемой задачи относительно плоскости ZOX .

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} E_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} E_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} j_x(p, y, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, \lambda, z) \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \end{cases} \quad (9)$$

где $j_x(p, \lambda, z) = \int_0^{\infty} j_x(p, y, z) \cdot \cos(\lambda y) dy = j(p) f(\lambda) \delta(z)$; $f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} f(y) \cdot \cos(\lambda y) dy$, и, согласно принятому допущению о равномерности распределения возбуждающего тока, $f(\lambda) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)}$.

С учётом (8) и (9) соотношения (5) – (7) преобразуются к виду обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [7]:

- для свободного полупространства с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$, получаем

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 E_x(p, \lambda, z) = K(p, \lambda) \cdot \delta(z-h), \quad (10)$$

где $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$;

- для листового металла, $z \in [-d, 0]$,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - q^2(p, \lambda) \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0, \quad (11)$$

где $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$ – параметр разделения, физический смысл которого – волновое число в немагнитном металле с удельной электропроводностью γ ;

- для свободного полупространства с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$,

$$\frac{d^2 E_x(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_x(p, \lambda, z) = 0. \quad (12)$$

Общие интегралы уравнений (10), (11) и (12) для выделенных областей имеют вид [6, 7]:

- в свободном полупространстве с основным токопроводом, $z \in [0, \infty)$, условию ограниченности при $z \rightarrow \infty$ удовлетворяет функция

$$E_x^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left(sh(\lambda(z-h)) \cdot \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right), \quad (13)$$

где $C(p, \lambda)$ – произвольная постоянная интегрирования;

- в листовом металле, $z \in [-d, 0]$,

$$E_x^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z}, \quad (14)$$

где $D_{1,2}(p, \lambda)$ – произвольные постоянные интегрирования;

- в свободном полупространстве с внешней стороны листового металла заготовки, $z \in (-\infty, 0]$, условию ограниченности при $z \rightarrow -\infty$ удовлетворяет функция:

$$E_x^{(3)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}, \quad (15)$$

где $B(p, \lambda)$ – произвольная постоянная интегрирования.

Изображения касательных составляющих напряжённости магнитного поля удалось найти с помощью формулы (13) – (15) и уравнения (3):

- $z \in [0, \infty)$,

$$H_y^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p\mu_0} \left(C(p, \lambda) e^{-\lambda \cdot z} - \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \left(ch(\lambda(z-h)) \eta(z-h) - 0.5 e^{\lambda(z-h)} \right) \right); \quad (16)$$

- $z \in [-d, 0]$:

$$H_y^{(2)}(p, \lambda, z) = -\frac{q(p, \lambda)}{p\mu_0} \cdot \left(D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z} \right); \quad (17)$$

- $z \in (-\infty, d]$,

$$H_y^{(3)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p\mu_0} \cdot B(p, \lambda) \cdot e^{\lambda(z+d)}. \quad (18)$$

Из условия непрерывности касательных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах выделенных областей получаем системы алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях (13) – (18):

при $z = 0$,

$$\left\{ C(p, \lambda) - \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); C(p, \lambda) + \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda)); \right. \quad (19)$$

при $z = -d$,

$$\left\{ D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d} = B(p, \lambda); \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (D_1(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d}) = B(p, \lambda). \right. \quad (20)$$

В дальнейшем нас будет интересовать возбуждение электромагнитного поля в листовом металле. Поэтому ограничимся определением неизвестных произвольных постоянных $D_{1,2}(p, \lambda)$.

Из системы линейных алгебраических уравнений находим, что

$$\left\{ D_1(p, \lambda) = -\frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}; D_2(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{2\lambda} \cdot \frac{e^{-q(p, \lambda) \cdot d} \cdot \left(1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)}{\Delta(p, \lambda)}. \right. \quad (21)$$

где $\Delta(p, \lambda) = \left(1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2\right) \cdot sh(q(p, \lambda)d) + 2 \cdot \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot ch(q(p, \lambda)d)$.

Функции $D_{1,2}(p, \lambda)$ из соотношений (21) подставим в выражение (14). После тождественных преобразований получим, что

$$E_x(p, \lambda, z) = -\frac{K(p, \lambda) e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{\left(sh(q(p, \lambda)(z+d)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) ch(q(p, \lambda)(z+d)) \right)}{\Delta(p, \lambda)}. \quad (22)$$

Полученная зависимость представляет собой изображение по Лапласу для продольной компоненты напряжённости электрического поля, возбуждённого в листовом металле.

Выражение (22) помножим на удельную электропроводность листового металла γ . Результат подставим в формулу (8).

После всех необходимых подстановок найдём плотность индуцированного тока в лапласовом L -пространстве:

$$j_x(p, y, \zeta) = -\left(\frac{2a\tau}{\pi d^2}\right) \cdot (p \cdot j(p)) \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} \cdot \frac{e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot \frac{F(p, \lambda, \zeta)}{\Delta(p, \lambda)} \cdot \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (23)$$

где $\tau = \mu_0 \gamma d^2$ – характерное время диффузии в листовом металле [8],

$$F(p, \lambda, \zeta) = \left(sh((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta)) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) ch((q(p, \lambda)d) \cdot (1 - \zeta)) \right),$$

$\zeta = \left(-\frac{z}{d}\right)$ – пространственная переменная, связанная с толщиной листового металла, $\zeta \in [0, 1]$.

В выражении (23) выполним переход в пространство оригиналов [6, 7].

Для вычисления особых точек подынтегральной функции приравняем к нулю знаменатель дроби выражения (23) и представим произведение продольного волнового числа на толщину листовой заготовки как мнимую величину:

$$\left\{ \Delta(p, \lambda) = 0; (q(p, \lambda) \cdot d) = i \cdot \beta_k, \right. \quad (24)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

С помощью системы (24) получаем трансцендентное уравнение для величин β_k :

$$ctg \beta_k = 0.5 \cdot \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} - \frac{(\lambda d)}{\beta_k} \right). \quad (25)$$

Как следует из (24) и (25), особыми точками функции комплексного переменного под знаком интеграла в

выражении (23) являются простые, отличные от нуля полюса p_k , а именно:

$$p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot (\beta_k^2 + (\lambda \cdot d)^2), \quad k = 0, \pm 1, 2, \dots \quad (26)$$

Далее, в соответствии с теоремами об оригинале рациональной дроби и из обращения свёртки функций находим из выражения (23) соответствующую временную зависимость:

$$\frac{p \cdot j(p) \cdot \left(sh((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) + \left(\frac{(q(p, \lambda) \cdot d)}{(\lambda d)} \right) \cdot ch((q(p, \lambda) \cdot d)(1 - \zeta)) \right)}{\Delta(p, \lambda)} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \left. \frac{i \cdot \left(\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{(\lambda d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right)}{\frac{d}{dp} [\Delta(p, \lambda)]} \right|_{p=p_k} \cdot \frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t}, \quad (27)$$

где $\zeta = -\frac{z}{d}$, $\zeta \in [0, 1]$ – координата, связанная с толщиной листового металла, в относительных единицах;

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k \neq 0. \end{cases}$$

Примечание.

Наличие множителя δ_k обусловлено чётностью корней β_k в уравнении (25).

В конечном итоге, с использованием зависимости (27) после необходимых тождественных преобразований находим оригинал для плотности тока, возбуждаемого в листовом металле.

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{(\lambda a)} e^{-\lambda h} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \lambda, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \lambda)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \lambda \cos(\lambda y) d\lambda, \quad (28)$$

где

$$F(\beta_k, \lambda, \zeta) = \beta_k \cdot \left[\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{(\lambda \cdot d)} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right];$$

$$\Phi(\beta_k, \lambda) = \cos(\beta_k) \cdot [(\lambda d)^2 + 2(\lambda d) - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [(\lambda d) + 1].$$

Выражение (28) приведём к виду, удобному для вычислений. Для этого введём новую переменную интегрирования $\alpha = \lambda d$, $\alpha \in [0, \infty)$, $d\lambda = \frac{1}{d} \cdot d\alpha$, и составим следующее соотношение:

$$j_x(t, \zeta, y) = I_m \left(\frac{2}{\pi d^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (29)$$

где

$$F(\beta_k, \alpha, \zeta) = \beta_k \cdot \left[\sin(\beta_k(1 - \zeta)) + \left(\frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \cos(\beta_k(1 - \zeta)) \right];$$

$$\Phi(\beta_k, \alpha) = \cos(\beta_k) \cdot [\alpha^2 + 2\alpha - \beta_k^2] + 2\beta_k \sin(\beta_k) \cdot [\alpha + 1],$$

вещественные числа β_k удовлетворяют трансцендентному уравнению: $ctg \beta_k = 0.5 \cdot \left(\frac{\beta_k}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta_k} \right)$.

Зависимость (29) проинтегрируем по толщине листового металла. Получим формулу для вычисления линейной плотности, описывающей поперечное распределение индуцированного тока:

$$J_x(t, y) = I_m \left(\frac{2}{\pi d} \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha, \quad (30)$$

где $G(\beta_k, \alpha) = \left[(1 - \cos \beta_k) + \left(\frac{\beta_k}{\alpha} \right) \cdot \sin \beta_k \right]$.

Интеграл зависимости (30) по поперечной переменной даёт выражение для величины тока, индуцированно-

го в металле листовой заготовки в области $y \in [-a, a]$:

$$I_x(t) = I_m \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha. \quad (31)$$

Пусть внешний ток от стороннего источника подаётся в листовой металл так, что его распределение по поперечному сечению области под основным токопроводом также является равномерным.

Как результат суперпозиции стороннего и индуцированного сигналов, найдём зависимости для результирующего тока и его плотности в указанной ограниченной зоне листового металла.

Суммарный ток запишется так:

$$I_x^{(S)}(t) = I_m \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \right)^2 e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha d\alpha \right]. \quad (32)$$

Результирующая плотность тока, протекающего в данной части листового металла, с учётом выражения (29) запишется в таком виде:

$$j_x^{(S)}(t, \zeta, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} \cdot e^{-\alpha \frac{h}{d}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{F(\beta_k, \alpha, \zeta)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (33)$$

Формула (33) позволяет рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока.

Иллюстративной характеристикой протекающих электромагнитных процессов является линейная плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом. Она описывает поперечное распределение тока и, в конечном итоге, иллюстрирует степень однородности возбуждаемых сил притяжения по координате $y \in [-a, a]$.

Интегрируя выражение (33) по $\zeta \in [0, 1]$ с учётом связи $\zeta = -\frac{z}{d}$, $z \in [-d, 0]$, получаем, что

$$J_x^{(S)}(t, y) = \frac{I_m}{(2ad)} \left[j_t(t) - \left(\frac{4a}{\pi d} \right) \int_0^\infty \frac{\sin\left(\alpha \frac{a}{d}\right)}{\left(\alpha \frac{a}{d}\right)} e^{-\alpha \frac{h}{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{G(\beta_k, \alpha)}{\Phi(\beta_k, \alpha)} \left(\frac{dj_t(t)}{dt} * e^{p_k t} \right) \cdot \alpha \cos\left(\alpha \frac{y}{d}\right) d\alpha \right]. \quad (34)$$

Анализируя электромагнитные процессы в рассматриваемой системе при параллельном электрическом подключении основного токопровода длиной l к участку той же длины на листовом металле, можно отметить следующие обстоятельства.

В постановке задачи указывалось, что основной токопровод прозрачен для действующих полей и не влияет на протекающие электромагнитные процессы. Но, положим, что он выполнен из того же металла, что и листовая заготовка.

В первом приближении, влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы – в основном токопроводе – можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, принять, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны.

С учётом вышеуказанных обстоятельств суммарные величины токовых характеристик в основном токопроводе можно представить зависимостями (32) – (34).

Суммарная сила притяжения, возбуждаемая при взаимодействии параллельных токов, описываемых выражением (32), принимает вид [9]:

$$F_{attr}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(I_x^{(S)}(t) \right)^2 \cdot \frac{\ell}{h}. \quad (35)$$

Перспективы дальнейших исследований. Выражение (35) в совокупности с зависимостью (32), а также соотношения (33) и (34) для линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи. Они адекватно описывают процессы в инструменте магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл и могут быть использованы при проектировании реальных конструкций инструментов.

Выводы. В данной работе с помощью математического аппарата теории электромагнитных полей показано, что полученные аналитические выражения позволяют рассчитывать распределение тока в поперечном сечении листового металла, где имеет место суперпозиция индуцированного и стороннего тока, а также линейную плотность суммарного тока в листовом металле в зоне под основным токопроводом и интегральную силу притяжения, возбуждаемую при взаимодействии параллельных токов.

В первом приближении влияние индукционных эффектов на токовые характеристики в источнике возбуждения системы (то есть в основном токопроводе) можно учесть, если, исходя из физических принципов подобия, предположить, что электромагнитные процессы в нём и в зоне листового металла под ним идентичны [9].

Следует также заметить, что выражения для суммарной силы притяжения в совокупности с зависимостями для результирующего тока и линейной плотности возбуждаемых токов представляют собой решения поставленной электродинамической задачи, что позволяет рассматривать процессы в реальных инструментах магнитно-импульсного притяжения при «прямом пропускании тока» через обрабатываемый металл.

Список литературы

1. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2013. – № 213 (3). – pp. 444 – 452.
2. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals // *Journal of Materials Processing Technology*. – Elsevier. – 2014. – № 214 (2). – pp. 390 – 401.
3. Welcome to BETAG Innovation // Материалы сайта. – 2013. – Режим доступа : <http://www.betaginnovation.com> (www.beulentechnik.com) – Дата обращения : 10 марта 2019.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М. : «Наука», 1973. – 831с.
5. *Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хищенко Л. Т.* Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. Издание второе, переработанное и дополненное под общей редакцией д.т.н., профессора Батыгина Ю. В. – Харьков : МОСТ – Торнадо, 2003. – 288с.
6. *Шнейерсон Г. А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сильных токов. – М. : Энергоиздат, 1992. – 413с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 620с.
8. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики // Пер. с англ. Крайнова В. П. – М. : Атомиздат, 1972. – 399с.
9. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

References (transliterated)

1. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – Fundamentals and perspective applications. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2013, no. 213 (3), pp. 444–452.
2. *Batygin Yuriy V., Golovashchenko Sergey F., Gnatov Andrey V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, 2014, no. 214 (2), pp. 390–401.
3. Welcome to BETAG Innovation. *Materialy sayta* [Site materials]. 2013. Available at : <http://www.betaginnovation.com> (www.beulentechnik.com) (accessed 10.03.2019).
4. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.
5. *Batygin Yu. V., Lavinsky V. I., Khimchenko L. T.* *Impul'snyye magnitnyye polya dlya progressivnykh tekhnologiy. Tom 1. Izdaniye vtoroye, pererabotannoye i dopolnennoye pod obshchey redaktsiyey d.t.n., professora Batygina Yu. V.* [Pulsed magnetic fields for advanced technologies. Volume 1. Second edition, revised and supplemented under the general editorship of Doctor of Technical Sciences, Professor Yu.B. Batygin]. Kharkov, MOST – Tornado Publ., 2003. 288 p.
6. *Shneyerson G. A.* *Polya i perekhodnyye protsessy v apparature sil'nykh tokov* [Fields and transients in the equipment of strong currents. 2nd edition, revised and enlarged]. Moscow, Energoizdat Publ., 1992. 413p.
7. *Landau L. D., Lifshits Ye. M.* *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 620 p.
8. *Met'yuz Dzh., Uoker R.* *Matematicheskiye metody fiziki. Per. s angl. Krainova V. P.* [Mathematical methods of physics. Trans. from English by Krainov V.P.]. Moscow, Atomizdat Publ., 1972. 399 p.
9. *Yavorskiy B. M., Detlaf A. A.* *Spravochnik po fizike* [Handbook of Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 624 p.

Поступила (received) 12.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Батыгин Юрій Вікторович (Батыгин Юрий Викторович, Batygin Yuriy Viktorovich) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: I.yu.v.batygin@gmail.com.

Єрьоміна Олена Федорівна (Ерёмина Елена Фёдоровна, Yeryomina Olena Fedorivna) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 248-52-75; e-mail: elena.yeryomina@gmail.com.

Чаплыгин Євген Олександрович (Чаплыгин Евгений Александрович, Chaplygin Evgen Olexandrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: [chaplygin.e.a. @gmail.com](mailto:chaplygin.e.a.@gmail.com).

Стрельникова Вікторія Анатоліївна (Стрельникова Виктория Анатольевна, Strelnikova Viktoria Anatoliivna) – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 072-22-85; e-mail: v.strelnikova91@gmail.com.

УДК 512.83, 539.1, 621.01

А. П. КОЖУШКО, О. О. НАБОКА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ**СПЕКТРАЛЬНІ ЕФЕКТИ ТА ТЕОРЕМИ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПУЧКА СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівприцепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ симетричних матриць. Вивчається поведінка спектральних траєкторій $\lambda_j(k)$ і зміни власних форм $\bar{X}_j(k)$ цього пучка. За додаткового припущення невід'ємності матриці B доведено, що функції $\lambda_j(k)$ є монотонними за аргументом k . Сформульовано та доведено нетривіальне твердження о знаках мінорів діагональних елементів виродженої симетричної матриці C , а саме: усі мінори мають однаковий знак. Звідки витікає умова чергування знаків мінору $C_{ii}(\lambda_0)$ діагонального елементу c_{ii} матриці $C = A - \lambda_0 E$, де λ_0 послідовно приймає власні значення $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ матриці A . Крім цього, доведено, що у загальному випадку спектральні траєкторії не мають спільних точок. Введено поняття наближено кратного спектру, тобто таких значень $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$, для яких відстань між траєкторіями $\lambda_{j,1}(k)$ і $\lambda_{j,2}(k)$ є мінімальною за значеннями параметра k . Показано на прикладах, що в околі параметра k_0 відбувається спільне обертання власних форм $\bar{X}_{j,1}(k)$ і $\bar{X}_{j,2}(k)$, яке приводить до обміну їх координат. Тому при динамічному аналізі зв'язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при усіх значеннях параметра k_0 , які відповідають наближено кратному спектру.

Ключові слова: динамічний аналіз, пучок симетричних матриць, спектральні траєкторії, власні форми коливань, монотонність спектру, кратний спектр, мінор матриці.

А. П. КОЖУШКО, Е. А. НАБОКА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ**СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ТЕОРЕМЫ О СВОЙСТВАХ ПУЧКА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Показано, что динамический анализ транспортного средства с прицепом или полуприцепом приводит к задаче на собственные значения для однопараметрического пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ симметричных матриц. Изучается поведение спектральных траекторий $\lambda_j(k)$ и изменения собственных форм $\bar{X}_j(k)$ этого пучка. В дополнительном предположении о неотрицательности матрицы B доказано, что функции $\lambda_j(k)$ являются монотонными по аргументу k . Сформулировано и доказано нетривиальное утверждение о знаках миноров диагональных элементов вырожденной симметричной матрицы C , а именно: все миноры имеют одинаковый знак. Отсюда вытекает условие чередования знаков миноров $C_{ii}(\lambda_0)$ диагонального элемента c_{ii} матрицы $C = A - \lambda_0 E$, где λ_0 последовательно принимает собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ матрицы A . Кроме того, доказано, что в общем случае спектральные траектории не имеют общих точек. Введено понятие приближенно кратного спектра, то есть таких значений $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$, для которых расстояние между траекториями $\lambda_{j,1}(k)$ и $\lambda_{j,2}(k)$ является минимально по значениям параметра k . Показано на примерах, что в окрестности параметра k_0 происходит совместное вращение собственных форм $\bar{X}_{j,1}(k)$ и $\bar{X}_{j,2}(k)$, которое приводит к обмену их координат. Поэтому при динамическом анализе связанных колебаний, прежде всего, необходимо изучать поведение системы при всех значениях параметра k_0 , которые отвечают приближенно кратному спектру.

Ключевые слова: динамический анализ, пучок симметричных матриц, спектральные траектории, собственные формы колебаний, монотонность спектра, кратный спектр, минор матрицы.

A. P. KOZHUSHKO, O. O. NABOKA, O. L. GRIGORIEV**SPECTRAL EFFECTS AND THEOREMS ON SYMMETRIC MATRIX BUNDLE SPECTRUM PROPERTIES IN COMPOSITE MECHANICAL SYSTEM DYNAMICAL PROBLEMS**

Dynamic analysis of vehicles with trailer or semitrailer evokes the problem on the eigenvalues of one-parameter bundle of symmetric matrices $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$. The behavior of spectral trajectories $\lambda_j(k)$ and changes in eigenforms $\bar{X}_j(k)$ of the bundle are studied. Under the additional assumption that the matrix B is non-negative the functions $\lambda_j(k)$ are proved to be monotone in k . A non-trivial statement about the sign of the minors of diagonal elements of degenerate symmetric matrix C is formulated and proved, namely, it is shown that all the minors are of the same sign. This fact implies sign alternation for the minors $C_{ii}(\lambda_0)$ of the diagonal elements c_{ii} of the matrix $C = A - \lambda_0 E$, where λ_0 takes on sequentially the eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ of the matrix A . Moreover, it is proved that in general case the spectral trajectories do not intersect. The notion of approximately multiple spectrum is introduced, which means the values $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ such that the distance between the trajectories $\lambda_{j,1}(k)$ and $\lambda_{j,2}(k)$ is minimal in k . The examples given testify that in the vicinity of k_0 the eigenforms $\bar{X}_{j,1}(k)$ and $\bar{X}_{j,2}(k)$ mutually rotate, which results into exchange of their coordinates. Hence, when studying the dynamics of connected vibrations the behavior of the system needs to be considered foremost for all the values of the parameter k_0 corresponding to the approximately multiple spectrum.

Key words: dynamic analysis, symmetric matrix bundle, spectral trajectories, eigenforms of vibrations, monotone spectrum, multiple spectrum, matrix minor.

© А. П. Кожушко, О. О. Набока, О. Л. Григор'єв, 2019

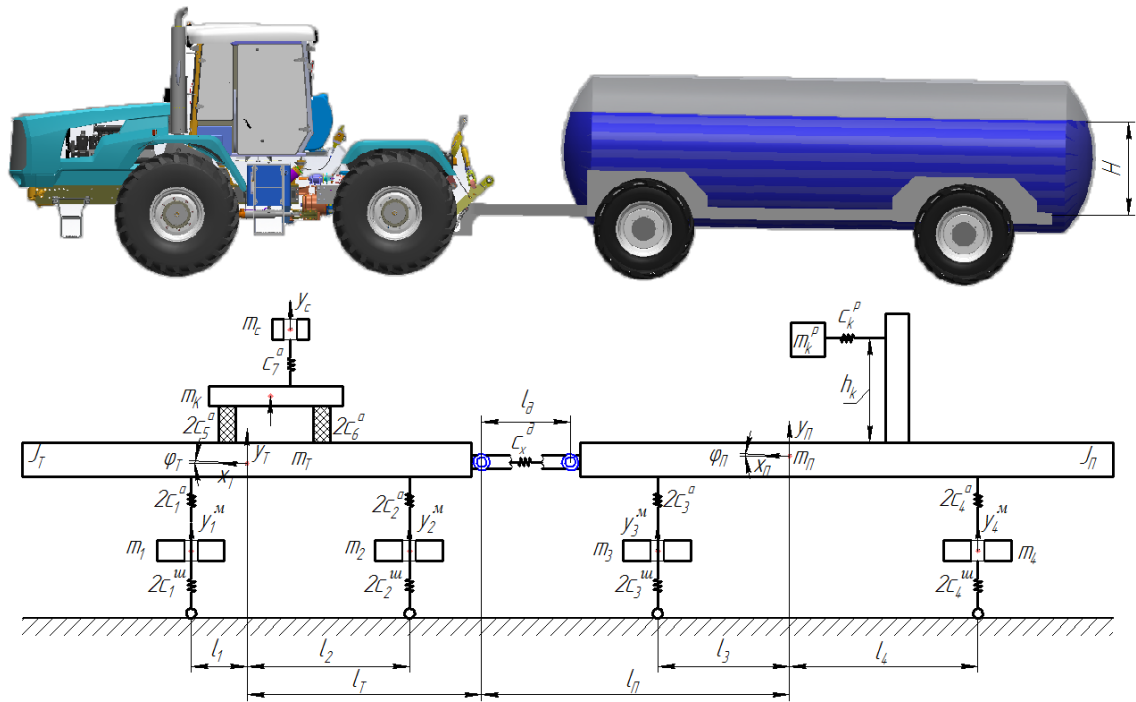


Рис. 1 – Розрахункова схема транспортного засобу з причепом (деякі рухи та зв'язки не зображено).

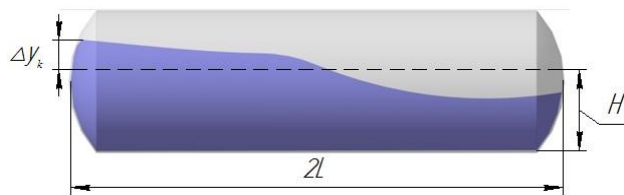


Рис. 2 – Підняття вільної поверхні рідини у цистерні при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату.

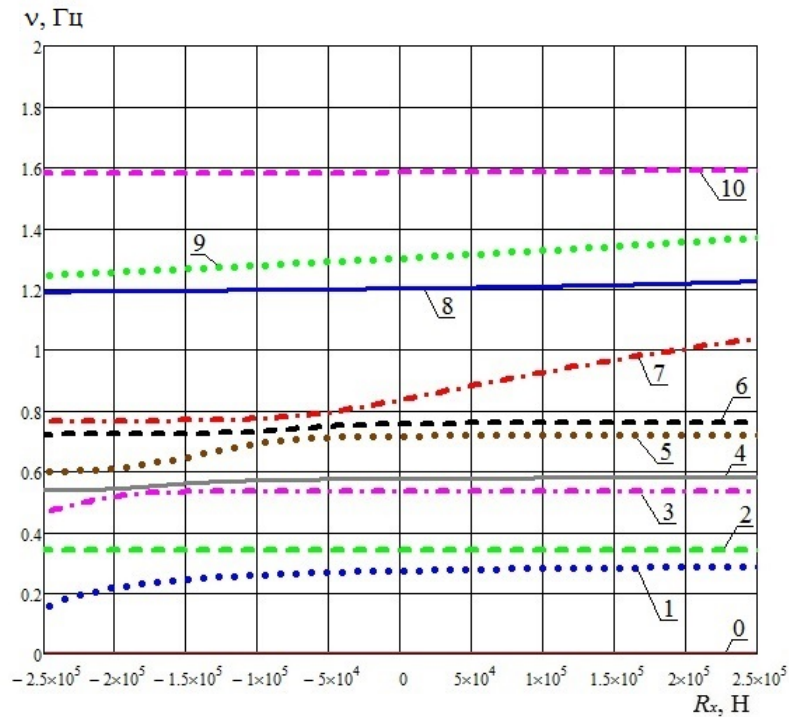


Рис. 3 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для засобу з причепом (цифри позначають номер спектральної тракторії).

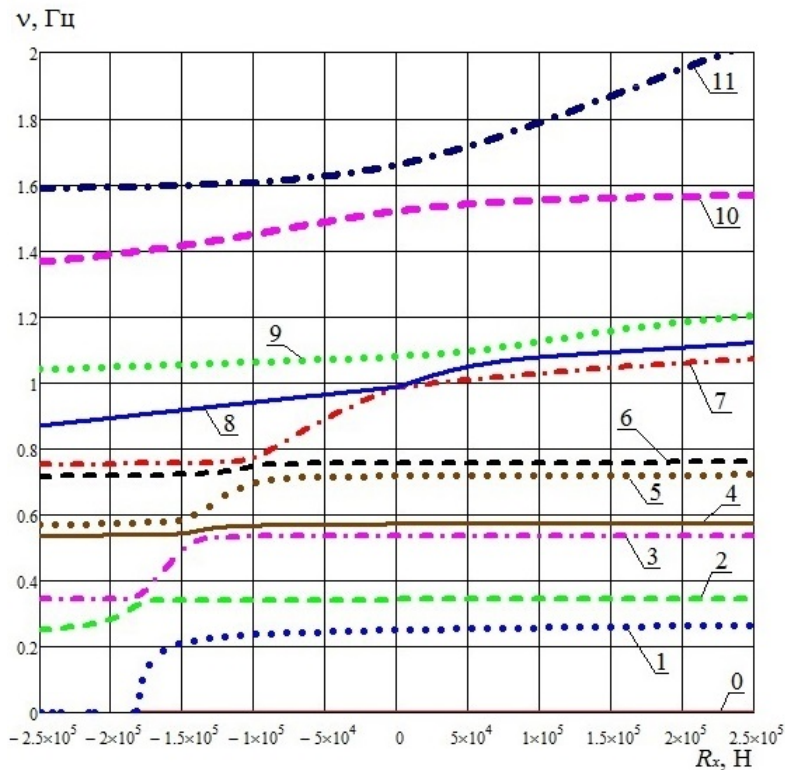


Рис. 4 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для засобу з напівприцепом (цифри позначають номер спектральної траєкторії).

Вступ та постановка задачі. До складних механічних систем відносять сукупність об'єктів, однакових чи різних за своїми властивостями, приєднаних один до одного за допомогою деяких механічних зв'язків. При вивченні таких систем важливо враховувати взаємодію їх компонентів, бо вона може призвести до таких специфічних явищ, притаманних лише пов'язаній динаміці, як, наприклад, галопуючий резонанс [1], чи синхронізація [2].

У роботі [1] із застосуванням дискретної математичної моделі досліджувалися спектри та власні форми вільних коливань трактора з причепом, який перевозить рідину у цистерні (рис. 1). Коливання рідини (рис. 2) було враховано на основі розробленого у роботі [3] метода, який моделював низькочастотні поверхневі хвилі Релея за допомогою рівнянь для потенціалів відповідних векторних та скалярних полів.

В результаті було складено квазілінійну систему диференціальних рівнянь наступного вигляду:

$$d^2 \vec{X} / dt^2 + (A + kB) \cdot \vec{X} = \vec{0}, \quad (1)$$

де вектор \vec{X} містить $n = 19$ координат; параметр $k \in \mathbb{R}$ є пропорційним силі R_x , що діє вздовж причіпного пристрою; матриці $A[n \times n] \geq 0$; $B[n \times n] \geq 0$ є симетричними, причому $rgA \leq n - 1$; $rgB \ll rgA$.

Блоковий вигляд матриць A і B надано у [1]. З (1) отримаємо алгебраїчне рівняння для резонансних кругових частот ω :

$$\det(A + kB - \omega^2 E) = 0, \quad (2)$$

де $E[n \times n]$ – одинична матриця.

Таким чином, резонансні значення ω^2 належать до спектру матриці $A + kB$. Як відомо, симетрична матриця n -го порядку має дійсний спектр $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, причому, як це витікає з умови поставленої задачі, вона є виродженою, і принаймні одне власне число дорівнює 0. Що забезпечує стійку рівновагу системи за умови зупинки транспортного засобу у довільному місці прямого шляху. Числам $\lambda_j > 0$ відповідають гармонійні коливання з кутовою частотою

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$$

та довільною амплітудою і фазою. Числа $\lambda_j < 0$ виникають за умови суттєво від'ємного значення параметра k , тобто коли транспортний засіб котиться з достатньо крутої гори, і причіп тисне на трактор. При цьому у русі зчіпного пристрою виникає нестійкість та спостерігається загрозливе для усього транспортного засобу явище, яке називають *галопуючим резонансом*. Щоб обмежити амплітуду коливань при цьому резонансі, у конструкції причепа використовуються міцні упори.

Розрахунок спектру матриці $A + kB$ та її власних форм проводився у програмному середовищі MathCAD за допомогою стандартних процедур `eigenvals(.)` та `eigenvector(.,.)`. Результати цих розрахунків для низькочастот-

ної частини спектру, які було виконано для двох типів машино – тракторного агрегату (із причепом та із напівпричепом [1]), наведено на графіках рис. 3, 4 та у табл. 1, 2. На рисунках частоти ν резонансних коливань надано у герцах; у таблицях їх наведено у першій строчці, а інші строчки нормовані у сенсі простору l_2 .

Таблиця 1 – Компоненти перших нормованих власних форм коливань для причіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0	0.27	0.34	0.54	0.57	0.72	0.76	0.86	1.21	1.32	1.58
y_T	0	0.01	0.02	-0.01	0	0.14	0.01	0.16	0.69	-0.43	0.09
y_1^m	0	0.03	0	0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.2	0	-0.06	-0.04
y_2^m	0	0	0.01	-0.01	0	0.06	0.01	0.07	0.29	-0.18	0.04
y_K	0	0	0.14	-0.01	0	0.97	-0.05	-0.14	-0.13	0.06	-0.01
y_C	0	-0.01	0.99	-0.02	-0.01	-0.15	0	0	0	0	0.02
φ_T	0	0.09	-0.01	0.03	-0.07	-0.12	-0.12	-0.62	-0.21	-0.03	-0.13
φ_K	0	0.01	-0.03	-0.06	-0.04	-0.02	-0.03	-0.16	-0.09	-0.02	0.98
y_{II}	0	0.02	0	0.01	-0.02	-0.02	-0.06	-0.42	0.58	0.57	-0.01
y_3^m	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
y_4^m	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
φ_{II}	0	-0.11	0	-0.02	0.08	0.03	0.12	0.48	-0.04	0.64	0.1
x_1^p	0.54	-0.83	-0.01	0.05	-0.01	-0.01	-0.03	-0.1	0	-0.05	-0.01
x_2^p	0.14	0.08	0	-0.3	0.93	-0.01	-0.02	-0.1	0	-0.04	0
x_3^p	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0.03	0.98	-0.19	0	-0.03	0
x_{II}	0.57	0.35	0	-0.13	-0.14	0	-0.04	0.08	0	0.05	-0.01
x_T	0.53	0.34	0	-0.12	-0.14	0	-0.04	0.05	0	0.01	-0.01
x_K	0.17	0.16	0.02	0.93	0.26	0.01	0.02	0.02	0	0	0.07
x_T^m	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.02	0	0	0
x_{II}^m	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.02	0	0.02	0

Таблиця 2 – Компоненти нормованих власних форм коливань для напівпричіп-цистерни

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	0	0.27	0.34	0.54	0.58	0.72	0.76	1.02	1.02	1.35	1.53	1.69
y_T	0	0	-0.02	-0.01	0	0.14	0	-0.42	0.28	-0.06	0.56	-0.5
y_1^m	0	0	0	0.01	0	-0.02	0	0.18	-0.11	-0.01	0.14	-0.28
y_2^m	0	0	-0.01	-0.01	0	0.06	0	-0.18	0.12	-0.03	0.23	-0.2
y_K	0	0	-0.14	-0.01	0	0.97	0	0.15	-0.1	0.01	-0.06	0.04
y_C	0	0	-0.99	-0.02	0	-0.15	0	0	0	0	0.02	0.01
φ_T	0	0	0.02	0.03	0.01	-0.1	0	0.63	-0.4	-0.01	0.18	-0.52
φ_K	0	0	0.03	-0.07	-0.02	-0.02	0	0.2	-0.13	-0.01	0.76	0.6
y_{II}	0	-0.03	0	0	0.03	0	0.03	0.47	0.7	-0.43	-0.03	0.02
y_3^m	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.12	0.17	-0.1	-0.01	0.01
y_4^m	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.11	0.17	-0.11	-0.01	0.01
φ_{II}	0	-0.11	0	0	0.08	0	0.07	0.22	0.38	0.88	0.04	-0.03
x_1^p	0.54	-0.83	0	0.04	-0.01	0	-0.01	-0.03	-0.06	-0.07	0	0
x_2^p	0.14	0.08	0	-0.26	0.95	0	-0.01	-0.03	-0.05	-0.05	0	0
x_3^p	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0	0.99	-0.03	-0.05	-0.04	0	0
x_{II}	0.57	0.36	0	-0.13	-0.14	0	-0.05	0.03	0.05	0.07	-0.01	-0.01
x_T	0.53	0.34	0	-0.12	-0.13	0	-0.05	0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.01
x_K	0.17	0.15	-0.02	0.94	0.22	0.01	0.02	-0.01	0	0	0.05	0.05
x_T^m	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.01	0.01	0	0	0
x_{II}^m	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.01	0.01	0.02	0	0

У статті [1] для динамічних параметрів використано наступні позначення: $y_T, y_{II}, y_K, y_C, y_{1,\dots,4}^M$ – це вертикальні зміщення центрів ваги трактора, кабіни, сидіння, причепа та мостів; $\varphi_T, \varphi_{II}, \varphi_K$ – кути повороту трактора, причепа та кабіни; $x_T, x_{II}, x_K, x_{1,\dots,3}^P$ – горизонтальні зміщення центрів мас трактора, причепа, кабіни та трьох шарів рідини поблизу її вільної поверхні; x_T^u, x_{II}^u – горизонтальні зміщення точок контакту дороги із шинами трактора або причепа. У стовбцях табл. 1, 2 вказані відносні амплітуди вільних гармонійних коливань із зазначеною частотою; причому якщо амплітуда є від’ємною, то відповідний параметр коливається у протифазі до руху, який є визначальним для цієї форми.

Зауважимо, що при русі транспортного засобу значення R_x постійно та неперервно змінюється, а чинники, які збуджують коливання внаслідок нерівностей шляху, через зміни у швидкості руху можуть мати довільну частоту. І тому усі точки, які наведено на рис. 3, 4, можуть призвести до резонансних явищ. У механіці такий резонанс називають *зовнішнім*. Крім нього вивчають й так звані *внутрішні резонанси*, коли співпадають дві або більше власних частот. Уважне вивчення графіків показало, що на них такі резонанси не спостерігаються.

Замість цього спостерігаємо явище, яке можна трактувати як *відштовхування частот* одне від одного в разі їх наближення. Зауважимо, що один із авторів цієї статті спостерігав аналогічне відштовхування, коли у [4] вивчав вплив крайових умов на спектр власних коливань циліндричної пружини. Проте та задача була складніша і розв’язувалася за допомогою теорії лінійних диференціальних операторів, які описували пружний континуум. В нашому випадку йдеться про задачу лінійної алгебри, і зазначена властивість формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 1 (про збереження простого спектру).

Припустимо, що матриці $A[n \times n]$, $B[n \times n]$ не мають спільних власних векторів, а спектр матриці A простий. Тоді спектральні траєкторії $\lambda_j(k)$, $j = 1, \dots, n$ матричного пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ перетинаються тільки у випадку спеціального вибору елементів a_{ij}, b_{ij} матриць A і B .

Оскільки у відомій літературі [5 – 10], де викладається теорія матриць, такого твердження немає, ми були вимушені у тексті цієї статті надати своє доведення цього нетривіального результату. На рис. 4 можна спостерігати каскад потенційних зіткнень спектральних траєкторій, які, у наслідок дії теореми 1, так і не відбулися.

Зауважимо, що коли у системі диференціальних рівнянь спостерігається зовнішній та внутрішній резонанс одночасно, то амплітуда коливань зростає додатково. Тут співпадіння трьох частот немає, проте на окремих ділянках спектральні траєкторії суттєво наближуються, і це все рівно призводить до додаткового зростання коливань.

Щоб систематизувати дослідження цього явища, ми ввели наступні визначення. Будемо пару чисел $\lambda_{j,1}(k_0), \lambda_{j,2}(k_0)$ називати *наближено кратним спектром*, якщо відстань між траєкторіями $\lambda_{j,1}(k)$ і $\lambda_{j,2}(k)$ є мінімальною за значеннями параметра k . При цьому значення параметра k_0 називатимемо *резонансним*, а власні форми $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$ назвемо *резонуючою парою*.

Наступна теорема, яка не потребує формального доведення, фіксує особливість зміни власних форм у цьому випадку.

Теорема 2 (про спільне обертання резонуючої пари власних форм).

В околі резонансного значення k_0 резонуюча пара власних ортонормованих форм $\bar{X}_{j,1}(k), \bar{X}_{j,2}(k)$ спільно обертається у багатовимірному просторі та при значеннях $k = k_0 - \Delta k$ і $k = k_0 + \Delta k$, де значення Δk є малим числом, ці форми фактично обмінюються координатами, тобто

$$\bar{X}_{j,1}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,2}(k_0 + \Delta k), \quad \bar{X}_{j,2}(k_0 - \Delta k) \approx \pm \bar{X}_{j,1}(k_0 + \Delta k),$$

де вибір знаку в правих частинах не є принциповим і залежить від налаштування програми пошуку власних векторів матриці.

Для матриць, які вивчалися у [1], більшість власних векторів були наближені до однокомпонентної форми (яка, як відомо, відповідає діагональній матриці). В результаті чого вимушені коливання, які збуджувалися по деякій координаті, залишалися локалізованими і суттєвого зв’язку між різними рухами вузлів транспортного засобу не спостерігалось. Проте, ця закономірність порушувалася в околі резонансного значення k_0 , де власні форми мали найбільшу кількість координат, значення яких суттєво відрізнялися від нуля (табл. 1, 2). Тому при динамічному аналізі зв’язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при всіх резонансних значеннях параметра k .

До сказаного необхідно додати наступне. Якщо у задачі, що розглядається, крім зусилля R_x змінювати й рівень H рідини у цистерні, то задача на власні значення зводиться до пошуку спектра двопараметричного пучка вигляду

$$A(H) + kB, \quad k \in \mathbb{R}, \quad H \in [0, D_u],$$

де D_y – це діаметр цистерни.

Формули, які описують нелінійні залежності елементів матриці A від рівня H , а також графіки відповідних спектральних траєкторій наведено у [1]. В цьому випадку при зміні параметра H спостерігаються перетини траєкторій, і точки наблизено кратного спектру перетворюються у точки кратного спектру. У цьому ж контексті діє тертя, яке згладжує резонанси та зближує результати розрахунку кратного та наблизено кратного спектрів.

Застосування розробленого в [1] методу динамічного аналізу виявило ще одну особливість поведінки власних частот. А саме, аналіз наведених графіків вказує на монотонну залежність спектру від значень параметра k . Якщо зважити на невід’ємність матриці B , така поведінка спектру не є дивною. Проте, оскільки в цитованій та іншій відомій літературі ми так і не знайшли обґрунтування цієї властивості, то були вимушені сформулювати та довести наступну теорему.

Теорема 3 (про монотонність спектру).

Нехай матриці A і B , що утворюють матричний пучок $A+kB, k \in \mathbb{R}$, є симетричними, причому матриця B є невід’ємною, а функції $\lambda_j(k), j=1, \dots, n$ описують спектральні траєкторії цього пучка. Тоді кожна функція $\lambda_j(k)$ є монотонно зростаючою (або неспадною) за аргументом $k \in \mathbb{R}$.

Таким чином, задачею цієї публікації є доведення теорем 1 та 3.

Доведення теореми 1 (про збереження простого спектру). Матриця B у своєму власному базисі має діагональну структуру D , а матриця A приймає недіагональний симетричний вид \hat{A} . У подальшому доведенні ми не використовуватимемо тильду у позначенні цієї матриці.

Припустимо, що для деякого значення параметру $k = k_0$ матриця $A + k_0D$ має кратне власне значення λ_0 .

Тоді у матриці

$$C = A + k_0D - \lambda_0E, \quad (1)$$

ранг не перевищує числа $n-2$.

Відмітимо, що матриця C відмінна від матриці A тільки у елементах головної діагоналі. Позначимо ці елементи x_1, x_2, \dots, x_n , тобто

$$x_1 = c_{11}, x_2 = c_{22}, \dots, x_n = c_{nn}.$$

Для мінорів вказаних елементів використовуватимемо позначення

$$C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}.$$

Значимо, що через ущербність рангу зазначені визначники дорівнюють нулю.

Отримаємо систему n рівнянь для n невідомих x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\{C_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; C_{22}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, C_{nn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (2)$$

Кожне із рівнянь системи (2) при довільному виборі недіагональних елементів є незалежним від інших. У просторі \mathbb{R}^n воно описує циліндричну поверхню, яка по сукупності змінних має $n-1$ порядок, та зменшує кількість вільних параметрів на 1 одиницю. Тобто, розв’язкам системи (2) відповідатиме скінченне число $m \geq 0$ точок у просторі \mathbb{R}^n .

Так, для випадку $n=2$ для недіагональної матриці отримаємо значення $m=0$, і ця задача розв’язків не має зовсім, а для випадку $n=3$ при ненульових недіагональних елементах a, b, c матриця C може приймати лише два значення:

$$C = \begin{bmatrix} (ac)/b & a & c \\ a & (ab)/c & b \\ c & b & (bc)/a \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad C = \begin{bmatrix} -(ac)/b & a & c \\ a & -(ab)/c & b \\ c & b & -(bc)/a \end{bmatrix},$$

тобто тут $m=2$.

Отже, нам вдалося за елементами матриці A , що лежать поза її головною діагоналлю, знайти лише m матриць C , тобто матриці C_1, C_2, \dots, C_m . Відповідні до них діагональні матриці позначимо D_1, D_2, \dots, D_m ; причому зауважимо, що матриці D_j залежать від недіагональних елементів матриці A .

З (1) витікає, що діагональ D_A матриці A задовольняє умові:

$$D_A = D_j - k_0D + \lambda_0E, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В правій частині (3) використовуються дві константи k_0, λ_0 , значеннями яких можна розпоряджатися довільно. Отже, за умови $n \geq 3$ рівняння (3) можна виконати лише за рахунок узгодженого вибору елементів матриць A і D , що і потрібно було довести.

У випадку $n=1$ наявна тільки одна спектральна траєкторія, а значить задача о перетині не є актуальною.

Випадок $n=2$ ми розглянемо окремо. Характеристичне рівняння матричного пучка тут має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kd_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} + kd_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки отримуємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + k(d_{11} + d_{22})) + [(a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) - a_{21}^2] = 0.$$

У випадку кратного спектру

$$\{(a_{11} + kd_{11}) + (a_{22} + kd_{22}) = 0, (a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) = a_{21}^2\}.$$

Позначимо $y_1 = a_{11} + kd_{11}$, $y_2 = a_{22} + kd_{22}$ та отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0; \\ y_1 \cdot y_2 = a_{21}^2, \end{cases}$$

звідки $y_1^2 = -a_{21}^2$. Що можливо лише за умови $a_{21} = 0$, тобто коли матриця A є діагональною, а значить має спільну власну базу з матрицею B . *Отримане протиріччя завершує доведення теореми.*

Зауваження. Якщо матриця A є діагональною, то система (2) має нескінченну множину розв'язків:

$$x_j = 0, \text{ для } j \neq l, \quad x_l \in \mathbb{R}.$$

Цей випадок за умов теореми не вивчається.

Зазначене вище справедливо і для випадку кусково-діагональної матриці A , оскільки вона має спільні з матрицею B власні вектори, локалізовані всередині діагонального блоку.

Доведення теореми 3 (про монотонність спектру). Аналогічно доведенню теореми 1, у власному базисі матриці B пучок набуває вигляду:

$$A + kD, \quad (4)$$

де D – діагональна матриця, $d_{jj} \geq 0$.

Запишемо характеристичне рівняння пучка (4):

$$\det(A + kD - \lambda E) = 0. \quad (5)$$

Нехай рівняння (5) виконано для деяких $k = k_0$, $\lambda = \lambda_0$, тобто власне значення λ_0 відповідає значенню параметра k_0 і $\det(A + k_0D - \lambda_0E) = 0$. Підставимо в (5) $k = k_0 + \Delta k$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$ і обчислимо визначник у лівій частині (5), лишаючи доданки першого порядку малості за Δk і $\Delta \lambda$. Як результат перетворень, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n (\Delta k d_{jj} C_{jj} - \Delta \lambda C_{jj}) = 0, \quad (6)$$

де C_{jj} – мінори елемента c_{jj} матриці $C = A + k_0D - \lambda_0E$. Наслідком (6) є наступне рівняння:

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta k} = \frac{\sum_{j=1}^n d_{jj} C_{jj}(\lambda_0)}{\sum_{j=1}^n C_{jj}(\lambda_0)}. \quad (7)$$

Доведемо, що права частина (7) у точках спектру матриці C : $\lambda_0 \in \sigma(C)$, є додатною (принаймні, невід'ємною).

Нехай $\lambda_0 = \min \sigma(C)$. Тоді $C \geq 0$, і всі мінори цієї матриці є додатними. Зокрема, $C_{jj}(\lambda_0) \geq 0$, що доводить твердження.

Нехай $\lambda_0 = \max \sigma(C)$. Розглянемо матрицю

$$-C = \lambda_0 E - A - k_0 D.$$

Матриця $-C \geq 0$ і всі її мінори є додатними. Усі мінори елементів матриці $-C$ або співпадають із мінорами відповідних елементів матриці C , або відрізняються від них лише за знаком. Тому формула (7) зберігає свій вигляд для матриці $-C$ і її права частина є додатною, що завершує доказ нашого твердження у цьому випадку.

Таким чином для випадку розмірності матриць $n = 2$ ми довели *теорему 3*. Припустимо, розмірність матриць, що утворюють пучок, $n \geq 3$. Тоді існує власне значення λ_0 : $\min \sigma(C) \leq \lambda_0 \leq \max \sigma(C)$, і матриця C є невизначеною у сенсі квадратичних форм. Доведення *теореми 3* у цьому випадку базується на наступній нетривіальній лемі.

Лема (про знаки кутових мінорів). *Нехай матриця A є симетричною і число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ належить її спектру $\sigma(A)$. Тоді матриця $C = A - \lambda_0 E$ є виродженою і всі її мінори $C_{jj}(\lambda_0)$ мають один знак (або дорівнюють нулю, але це окремий випадок, оскільки є характерним для діагональних матриць).*

Доведення лемми для випадку $n = 3$. У цьому випадку проведемо пряме доведення, яке не спирається на складні теореми інших авторів. Задля зручності запису, позначимо елементи матриці $C = A - \lambda_0 E$ наступним чином:

$$C = \begin{pmatrix} x & a & c \\ a & y & b \\ c & b & z \end{pmatrix}.$$

Матриця C є виродженою, тобто

$$\det C = xyz - b^2x - c^2y - a^2z + 2abc = 0. \quad (8)$$

Обчислимо мінори матриці C :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} y & b \\ b & z \end{vmatrix} = yz - b^2, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} = xy - a^2.$$

Доведемо, що $C_{11} \cdot C_{33} \geq 0$, тобто

$$(xy - a^2)(yz - b^2) \geq 0. \quad (9)$$

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що

$$(xy - a^2)(yz - b^2) < 0. \quad (10)$$

Тоді, за неперервності, умова (10) виконуватиметься при $x, z \neq 0$, а рівність (8) можна зберегти за рахунок корегування c . Тому, не обмежуючи спільності міркувань, вважатимемо, що $x, z \neq 0$, і, задля визначеності,

$$\frac{a^2}{x} \leq \frac{b^2}{z}.$$

а) нехай $x > 0, z > 0$. Тоді значення y , що задовольняє (10), лежить у проміжку

$$\frac{a^2}{x} < y < \frac{b^2}{z}, \quad (11)$$

тобто

$$y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \in (0; 1).$$

Підставляючи такий вираз для y в співвідношення (8) і спрощуючи отримане рівняння, находимо:

$$\begin{aligned} & (xz - c^2) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x - a^2z + 2abc = \\ & = (xz - c^2) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2x [\theta + (1 - \theta)] - a^2z [\theta + (1 - \theta)] + 2abc [\theta + (1 - \theta)] = \\ & = \left\{ (xz - c^2) \frac{a^2}{x} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot \theta + \left\{ (xz - c^2) \frac{b^2}{z} - b^2x - a^2z + 2abc \right\} \cdot (1 - \theta) = \\ & = -\frac{1}{x} \{ a^2c^2 - 2abcx + b^2x^2 \} \cdot \theta - \frac{1}{z} \{ b^2c^2 - 2abcz + a^2z^2 \} \cdot (1 - \theta) = -\frac{(ac - bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc - az)^2}{z} \cdot (1 - \theta). \end{aligned}$$

Останній вираз дорівнює нулю, якщо $\{ac - bx = 0, bc - az = 0\}$, тобто $\{x = ac/b, z = bc/a\}$.

Але у цьому випадку

$$\frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{ac/b} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{bc/a} = \frac{ab}{c},$$

і, приймаючи до уваги (11), проміжок для y вироджується в одну точку, а ліва частина (10) дорівнює нулю.

Таким чином, випадок **а)** призводить до протиріччя.

б) випадок $x < 0, z < 0$ зводиться до попереднього після переходу до матриці $-C$.

в) у випадку $x < 0, z > 0$ маємо наступну нерівність для y :

$$\left[(-x)y + a^2 \right] \cdot \left[yz - b^2 \right] > 0, \text{ що можливо, якщо } y < \frac{a^2}{x} \text{ або } y > \frac{b^2}{z}.$$

Очевидно, що

$$\frac{a^2}{x} < 0 < \frac{b^2}{z} \text{ і } y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \notin (0; 1).$$

Повторюючи викладки доведення пункту **а**), отримуємо рівність: $-\frac{(ac-bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc-az)^2}{z} \cdot (1-\theta) = 0$, звідки

$$\theta \cdot \left[\frac{(cb-az)^2}{z} + \frac{(ca+(-x))^2}{(-x)} \right] = \frac{(cb-az)^2}{z}. \quad (12)$$

Із рівності (12) маємо умову $\theta \in (0;1)$, тобто і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя.

г) випадок $x > 0, z < 0$ зводиться до попереднього заміною матриці C на протилежну їй матрицю $-C$.

Таким чином, для випадку розмірності матриці $n = 3$ лему доведено.

Відзначимо, що із леми впливає чергування знаку мінору $C_{jj}(\lambda_k)$ на послідовних власних значеннях

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Доведення леми у загальному випадку. Непряме доведення базується на **твердженні 231** про спектр *проєктора* [9, стор. 189], яке є не менш нетривіальним, ніж сама лема. З твердження витікає, що власні значення матриці $C = A - \lambda_0 E$ і її мінорів $C_{jj}(\lambda_0)$ перемежуються для будь-якого $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^C \geq \lambda_n^C,$$

де $\lambda_k^C, k = 1, 2, \dots, n, \lambda_k^{C_{jj}}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$ – це власні значення C і $C_{jj}(\lambda_0)$, відповідно.

Матриця C є виродженою, отже принаймні одне з її власних значень дорівнює нулю. Нехай $\lambda_s^C = 0$, а, значить, маємо для будь-якого мінору $C_{jj}(\lambda_0)$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{s-1}^C \geq 0 \geq \lambda_s^C \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^C \geq \lambda_n^C,$$

тобто кількість додатних та від'ємних власних значень однакове для будь-якого $C_{jj}(\lambda_0)$. Оскільки кожен міноур дорівнює добутку своїх власних значень, то всі мінори $C_{jj}(\lambda_0)$ матриці C мають один знак.

Таким чином, лему, а разом з нею і теорему 3, доведено.

Зауважимо, що із доведення леми витікає наступне твердження.

Теорема 4 (про чергування знаків кутового мінору характеристичної матриці).

Знаки кутового мінору матриці $C = A - \lambda_0 E$, де λ_0 послідовно приймає значення $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, а λ_k – це власні значення симетричної матриці A , чергуються.

Тобто, якщо об'єднати твердження **леми** та **теорему 4**, то прийдемо до наступного. При числі λ_j всі кутові мінори деякого порядку у матриці C є від'ємними або позитивними одночасно, а при переході до числа λ_{j+1} всі вони змінюють знак на протилежний.

Зауважимо, що тих властивостей симетричних матриць, які було встановлено у цій статті, бракувало не лише для вирішення проблеми визначення власних значень ермітових операторів у скінченновимірному просторі, але й для більшого розуміння матеріалу під час викладання теорії симетричних матриць як ускладнених аналогів дійсних чисел. Тому ми звертаємося до наших колег – математиків, які у цей час готують нові учбові посібники або монографії з лінійної алгебри, із пропозицією включити ці теореми до складу так званої *обов'язкової програми курсу* (під назвою **теорему** або **леми Олени Набоки**, яка їх сформулювала та довела).

Щодо внеску інших авторів статті. *А. П. Кожушко* розробив математичну модель роботи транспортного засобу і, за її допомогою, виявив важливі властивості спектру та власних форм матриці коливань, які стали предметом цього дослідження і підґрунтям для **теорем 1 – 3**, а саме:

- монотонну залежність спектральних траєкторій від значення зусилля R_x у зчіпному засобі;
- ефект відштовхування спектральних траєкторій, який приводить до відсутності кратних резонансів;
- ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу.

Тому у застосуваннях відповідної теорії до техніки та технологій бажано використовувати назву **спектральні ефекти** (або **спектральні явища**) *Андрія Кожушка*.

Проф. О. Л. Григор'єв знайшов зв'язок цієї теми із відомими задачами теорії коливань для складних механічних систем, які розв'язував раніше, а також забезпечив плідну комунікацію між співавторами та єдність використаної термінології.

Висновки. Показано, що динамічний аналіз транспортного засобу із причепом чи напівпричепом приводить до задачі на власні значення для однопараметричного пучка симетричних матриць.

За додаткового припущення невід'ємності матричного коефіцієнту пучка доведена монотонна залежність спектру від параметра.

Доведено, що при довільному виборі матричних коефіцієнтів будь які зміни параметру пучка не призводять до появи кратного спектру.

При динамічному аналізі транспортного засобу виявлено явище *відштовхування спектральних траєкторій* матричного пучка та вивчено особливості обертання власних форм в околі точок відштовхування.

Доведено нові теореми про розподіл знаків у кутових мінорах симетричної матриці.

Список літератури

1. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделирование пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
2. Набока О. О. Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 98 – 108.
3. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання вільних і вимушених коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
4. Григор'єв А. Л., Дерієнко А. І. Алгебраический метод последовательной локализации и расчёта частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 45 – 70.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. – М. : Наука, 1978. – 280 с.
7. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М. : Наука, 1979. – 392 с.
8. Воеводин В. В. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1980. – 400 с.
9. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. – М. : Наука, 1969. – 477 с.
10. Геворкян Ю. Л., Григор'єв А. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2002. – 542 с.

References (transliterated)

1. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnoho traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhу zi skladnym rel'yefom [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27 (1303), pp. 34–61.
2. Naboka O. O. Sinkhronizatsiya kolebaniy dvukh svyazanykh plastin Bergera s nelineynym vnutrennim i granichnym dempfirovaniem. Chast' 1 [On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior and boundary damping. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2015, no. 18 (1127), pp. 98–108.
3. Kozhushko A. P., Grigiriev A. L. Matematychnе modelyuvannya vil'nykh i vymushenykh kolyvan' ridyny v horyzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 41–51.
4. Grigiriev A. L., Derienko A. I. Algebraicheskiy metod posledovatel'noy lokalizatsii i raschota chastot svobodnykh kolebaniy vintovogo tsilindricheskogo stержnya [Algebraic methods for consequential localizing and computing screwed cylinder shaft free oscillations frequencies]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 39 (1082), pp. 45–70.
5. Gantmake F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1967. 575 p.
6. Lancaster P. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka, 1978. 280 p.
7. Golovina L. I. *Lineynaya algebra i nekotoryye yeye prilozheniya* [Linear algebra and some of its applications]. Moscow, Nauka, 1979. 392 p.
8. Voevodin V. V. *Lineynaya algebra* [Linear algebra]. Moscow, Nauka, 1980. 400 p.
9. Glazman I. M., Lyubich Yu. I. *Konechnomernyy lineynyy analiz* [Finite dimensional linear analysis]. Moscow, Nauka, 1969. 477p.
10. Gevorkyan Yu. L., Grigiriev A. L. *Osnovy lineynoy algebrы i yeyo prilozheniy v tekhnike : uchebnik* [Fundamentals of linear algebra and its technical applications : textbook]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2002. 542 p.

Надійшла (received) 16.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: lena622651@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григор'єв Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

УДК 621.382.3 (045)

О. С. МЕЛЬНИК, А. М. МИКОЛУШКО**РЕПРОГРАМОВАНІ МУЛЬТИПЛЕКСОРНІ НАНОСХЕМИ**

Застосування великих інтегральних схем (ВІС) в цифрових мікро- і наноелектронних пристроях дозволяє істотно поліпшити їх експлуатаційні можливості, в першу чергу підвищити надійність і швидкодію, понизити споживану потужність і габаритні розміри. Проте розробка ВІС є тривалим і дорогим процесом, який економічно виправданий тільки при досить великому обсязі випуску. Підвищення спеціалізації інтегральних схем завжди вступає в протиріччя з їх універсальністю. Усунути вказане протиріччя між спеціалізацією і універсальністю можна шляхом розробки ВІС, алгоритми роботи яких можуть бути змінені за бажанням розробника конкретної апаратури, тобто, шляхом створення логічних схем, що настраюються або програмується. В роботі реалізовані автоматизовані методи репрограмування мультиплексорних наносхем для відтворення логічних функцій декількох аргументів. На сучасних автоматизованих системах здійснено проектування та верифікацію нанопристроїв.

Ключові слова: мультиплексорні наносхеми, автоматизоване проектування, програмування логічних функцій.

А. С. МЕЛЬНИК, А. М. МИКОЛУШКО**РЕПРОГРАММИРОВАННЫЕ МУЛЬТИПЛЕКСОРНЫЕ НАНОСХЕМЫ**

Применение больших интегральных схем (БИС) в цифровых микро- и нанoeлектронных устройствах позволяет существенно улучшить их эксплуатационные возможности, в первую очередь повысить надежность и быстродействие, снизить потребляемую мощность и габаритные размеры. Однако разработка БИС является длительным и дорогостоящим процессом, который экономически оправдан только при достаточно большом объеме выпуска. Повышение специализации интегральных схем при улучшении указанных выше показателей всегда вступает в противоречие с их универсальностью. Устранить указанное противоречие между специализацией и универсальностью можно путем разработки БИС, алгоритмы, работы которых могут быть изменены по желанию разработчика конкретной аппаратуры, то есть, путем создания логических схем, которые настраиваются или программируются. В работе реализованы автоматизированные методы репрограммирования мультиплексорных наносхем для воспроизведения логических функций нескольких аргументов. На современных автоматизированных системах осуществлено проектирование и верификация нанопристроїв.

Ключевые слова: мультиплексорные наносхеми, автоматизированное проектирование, программирование логических функций.

О. S. MELNYK, А. M. MIKOLUSHKO**REPROGRAMMABLE MULTIPLEXER NANOCIRCUITS**

The use of large-scale integrated circuits (LSIC) in digital micro- and nanoelectronic devices can significantly improve their operational capabilities, primarily improve reliability and performance, reduce power consumption and overall dimensions. However, the development of the LSIC is a long and costly process, which is economically justified only with a fairly large volume of output of finished products. Increasing the specialization of IC contradicts their universality. Eliminating this contradiction between specialization and universality can be through the development of a LSIC, the algorithms of which can be changed at the request of the developer of specific equipment, that is, by programmed logic circuits. In the paper automated methods of multiplexer nanoscale reprogramming for reproducing logical functions of several arguments are realized. The design and verification of nanodevices are realized on modern automated systems

Key words: multiplexer nanocircuits, computer-aided design, programmable logic function.

Вступ. Під *програмованістю* розуміється не здатність реалізувати заданий алгоритм обробки вхідних кодів, змінюючи програму роботи, як це робить мікропроцесор, а можливість зміни внутрішньої структури *великої інтегральної схеми* (ВІС) так, щоб вона забезпечувала реалізацію заданих логічних функцій на апаратному рівні.

При виготовленні таких ВІС використовується єдиний комплекс фотошаблонів, тому з точки зору виробника це – універсальні вироби. Налаштування ж даної ВІС на заданий алгоритм роботи виконує безпосередньо виробник апаратури, з точки зору якого ця схема реалізує вузько спеціалізовані завдання. В результаті програмування в *інтегральній схемі* (ІС) вносяться зворотні або незворотні зміни структури, які і приводять до набуття заданих характеристик. Відповідно до сказаного, основною перевагою *програмованих логічних інтегральних схем* (ПЛІС) перед спеціалізованими ВІС являється малий час виготовлення ВІС з наперед заданими характеристиками. Залежно від рівня складності одна ПЛІС може замінити до 10 тис. і більше ІС малого і середнього ступенів інтеграції. Отже, така заміна дозволяє значною мірою реалізувати переваги ВІС при низькій вартості виготовлення, що особливо важливо при невеликих обсягах випуску конкретної апаратури.

Метою цієї роботи є розробка методів програмування ПЛІС шляхом надмірності їх апаратної частини, тобто введення додаткових виводів і структур налаштування, додавання інформаційних ланцюгів тощо. Реальна швидкодія пристроїв, виконаних на ПЛІС, їх споживання і інші характеристики будуть завжди гірші, ніж у пристроїв на спеціалізованих ВІС. Проте ці характеристики будуть свідомо кращі за аналогічні характеристики апаратури, побудованої на стандартних ІС.

Репрограмування мультиплексорів в якості логічних елементів. В якості простих ПЛІС можуть використовуватися *мультиплексори*. Суть використання мультиплексора в якості універсального логічного нанoelementу полягає в тому, що його адресні входи використовуються як інформаційні і на них подаються аргументи відтвореної функції, а інформаційні входи виконують роль репрограмованих (настроювальних).

Наприклад, реалізуємо на мультиплексорі (4→1) логічну функцію двох аргументів «Виключне АБО» (дода-

© О. С. Мельник, А. М. Миколушко, 2019

вання по модулю 2 чи нерівнозначності):

$$f_{\oplus} = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0, \tag{1}$$

задану у вигляді таблиці істинності (табл. 1).

Таблиця 1 – Таблиця істинності операції «Виключне АБО»

x_1	x_0	f_{\oplus}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблиця 2 – Таблиця істинності мультиплексора (4→1)

x_1	x_0	f_{\oplus}
0	0	D_0
0	1	D_1
1	0	D_2
1	1	D_3

Використовуючи рівняння вихідної функції цього мультиплексора, а саме:

$$f = D_3(x_1 x_0) \vee D_2(x_1 \bar{x}_0) \vee D_1(\bar{x}_1 x_0) \vee D_0(\bar{x}_1 \bar{x}_0), \tag{2}$$

та його таблицю істинності (табл. 2), порівняємо між собою функції (1), (2) і табл. 1, 2 та запишемо функцію програмування мультиплексора у вигляді:

$$f_{np} = 0(x_1 x_0) \vee 1(x_1 \bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1 x_0) \vee 0(\bar{x}_1 \bar{x}_0). \tag{3}$$

В результаті реалізуємо цей алгоритм програмування у вигляді табл. 3 і схеми мультиплексора, побудованої на рис. 1. Напруга живлення $U_{ж}$ реалізує логічну одиницю, а заземлення – логічний нуль.

Таблиця 3 – Значення логічної функції «Виключне АБО»

x_1	x_0	f_{np}	D	f
0	0	0	$D_0 = 0$	0
0	1	1	$D_1 = 1$	1
1	0	1	$D_2 = 1$	1
1	1	0	$D_3 = 0$	0

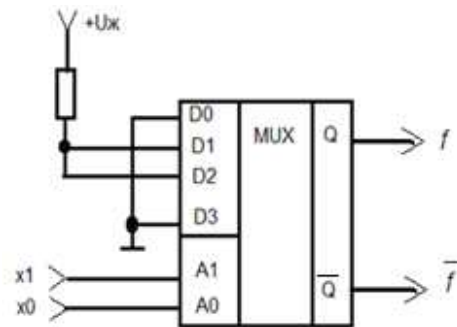


Рис. 1 – Реалізація логічної функції двох вхідних змінних на мультиплексорі.

На мультиплексорі (4→1) можливе репрограмування 16 найпростіших функцій двох аргументів (табл. 4). Для цього на адресні входи A1 та A0 слід подавати бінарні аргументи x_1 та x_0 , а інформаційні D_3, \dots, D_0 – репрограмувати логічними константами цих аргументів.

З розглянутого прикладу видно, що описаний метод обмежується реалізацією функцій чотирьох змінних, оскільки мультиплексори, що реально випускаються, мають не більше 16 інформаційних входів. Таким чином, для реалізації

$$2^4 = 2^{16} = 65536$$

логічних функцій чотирьох вхідних змінних можна скористатися мультиплексорною наносхемою, яка буде універсальним логічним елементом, оскільки без використання додаткових апаратних засобів дозволяє реалізувати логічну функцію довільного виду.

Для порівняння приклад реалізації операції (1) з використанням п'яти елементів НІ, І та АБО наведений на рис. 2.

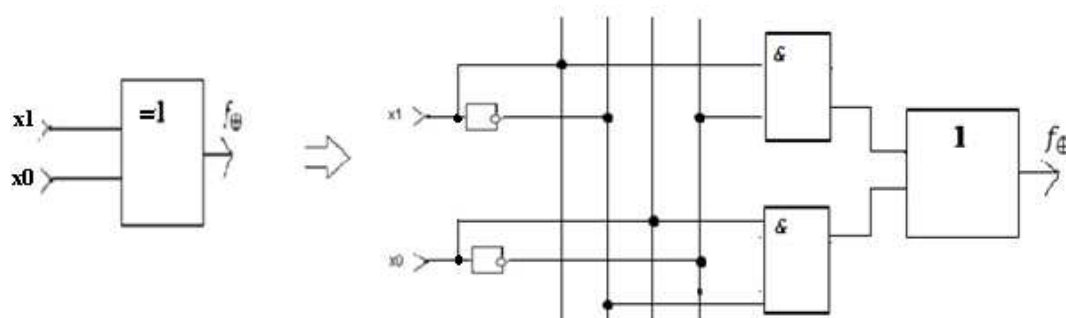


Рис. 2 – Схемна реалізація операції «Виключне АБО».

Таблиця 4 – Функції двох аргументів для репрограмування мультиплексорів

x_1	1	1	0	0	Нормальна диз'юнктивна форма	Логічна функція
x_0	1	0	1	0		
№	D	D	D	D		
0	0	0	0	0	$f_0 = 0$	Активний логічний 0
1	0	0	0	1	$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 \vee x_0 = x_1 \downarrow x_0$	АБО-НІ (стрілка Пірса)
2	0	0	1	0	$f_2 = \bar{x}_1 x_0 = x_0 \leftarrow x_1$	Заборона
3	0	0	1	1	$f_3 = \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) = \bar{x}_1$	Заперечення x_1
4	0	1	0	0	$f_4 = x_1 \bar{x}_0 = x_1 \leftarrow x_0$	Зворотна заборона
5	0	1	0	1	$f_5 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_0$	Заперечення x_0
6	0	1	1	0	$f_6 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0$	Виключне АБО (нерівнозначність)
7	0	1	1	1	$f_7 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 =$ $= x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 (\bar{x}_0 \vee 1) = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_1 =$ $= x_1 \bar{x}_0 \vee x_1 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 x_1 = x_1 (\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1 (x_0 \vee \bar{x}_1) =$ $= (x_0 \vee \bar{x}_1) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) = \overline{x_1 x_0} = x_1 x_0$	I-НЕ (штрих Шеффера)
8	1	0	0	0	$f_8 = x_1 x_0$	I
9	1	0	0	1	$f_9 = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \overline{x_1 \oplus x_0}$	Виключне АБО-НІ (рівнозначність)
10	1	0	1	0	$f_{10} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_0$	Активний аргумент x_0
11	1	0	1	1	$f_{11} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_0 (\bar{x}_1 \vee 1) = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_0 x_0 \vee x_0 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_0 (x_0 \vee \bar{x}_0) = (x_0 \vee \bar{x}_1) (x_0 \vee \bar{x}_0) = \bar{x}_1 \vee x_0 = x_1 \rightarrow x_0$	Імплікація
12	1	1	0	0	$f_{12} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) = x_1$	Активний аргумент x_1
13	1	1	0	1	$f_{13} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_1 (x_0 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 =$ $= \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_1 (\bar{x}_1 \vee 1) = \bar{x}_1 (x_1 \vee \bar{x}_0) \vee x_1 (\bar{x}_1 \vee 1) =$ $= \bar{x}_1 (x_1 \vee \bar{x}_0) \vee \bar{x}_0 x_1 \vee x_1 x_1 = (x_1 \vee \bar{x}_0) (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_1 \vee \bar{x}_0 = x_0 \rightarrow x_1$	Зворотна імплікація
14	1	1	1	0	$f_{14} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = (x_1 \vee x_0) (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_0 \vee x_1$	АБО
15	1	1	1	1	$f_{15} = x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = (x_1 \oplus x_0) \vee (\bar{x}_1 \oplus x_0) = 1$	Активна логічна 1

При необхідності реалізації логічної функції великого числа вхідних змінних можна скористатися структурою мультиплексорного дерева. Проте при невеликому числі аргументів цю задачу можна вирішувати і іншим методом, а саме вибором сигналів налаштування не з множини $\{1, 0\}$, як це було зроблено вище, а з множини $\{1, 0, x_i\}$, де x_i – це один з аргументів відтворюваної функції. В цьому випадку вдається на мультиплексорній наносхемі без додаткових апаратних витрат реалізувати логічну функцію, число аргументів якої на одиницю більше числа його адресних входів.

Наприклад, на мультиплексорі (4→1) реалізуємо логічну функцію трьох вхідних змінних наступного вигляду:

$$f = x_2 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0. \quad (4)$$

Для отримання диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) логічних функцій використовують дужкові перетворення, тобто неповні добутки (терми) домножують на одиночні суми недостаючих аргументів та функцій: $(x_i \vee \bar{x}_i)$, $(x_i \vee 1)$, $(f_i \vee \bar{f}_i)$, $(f_i \vee 1)$ або додають нульові добутки $(x_i \bar{x}_i)$, $(x_i 0)$, $(f_i \bar{f}_i)$, $(f_i 0)$.

Перетворимо за цими правилами задану функцію (4):

$$f = x_2(x_1 \vee \bar{x}_1)(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1x_0 = x_2x_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1x_0 =$$

$$= x_2x_1x_0 \vee x_1\bar{x}_0(x_2 \vee 1) \vee \bar{x}_1x_0(x_2 \vee 1) \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 = x_2(x_1x_0) \vee 1(x_1\bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1x_0) \vee x_2(\bar{x}_1\bar{x}_0). \quad (5)$$

Отже отримано функцію програмування (5) мультиплектора (4→1), у якого на адресні входи подано сигнали змінних x_1 і x_0 . Таблиця і схема програмування у цьому прикладі наведені на рис. 3.

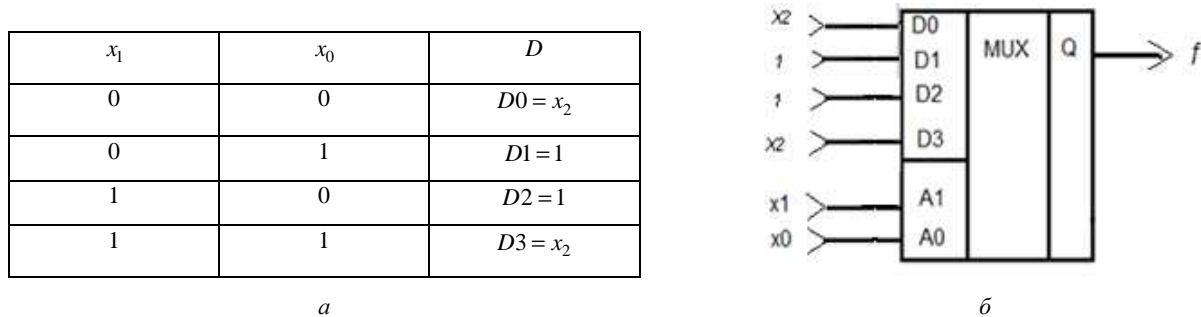


Рис. 3 – Функції трьох вхідних змінних: а – таблиця програмування; б – схемна реалізація.

Слід зауважити, що таке схемотехнічне рішення не є єдиним. На адресні входи A1 та A0 можна подавати довільні аргументи x_2x_0 і x_2x_1 , а на програмовані входи $D3, \dots, D0$ – залишкові аргументи чи навіть функції.

З точки зору апаратних витрат це схематичне рішення (рис. 3, б) є оптимальним.

Приклад моделювання. Реалізуємо на мультиплексорних мікро- та наносхемах (4→1) трьохаргументну логічну функцію мажоритарного вибору двох із трьох аргументів. На виході *мажоритарного елемента* (МЕ) логічний сигнал співпадає з більшістю сигналів на непарній кількості входів [1]. На рис. 4 показано умовне значення тривходового МЕ, а в табл. 5 побудована відповідна таблиця істинності.

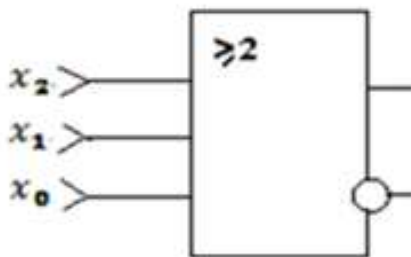


Рис. 4 – Трьохвходовий МЕ.

Таблиця 5 – Таблиця істинності МЕ

x_2	x_1	x_0	f	\bar{f}
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ) мажоритарної функції f отримують з її таблиці істинності за правилом:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1x_0. \quad (6)$$

Виконавши дужкові перетворення рівняння (6) шляхом триразового логічного додавання останнього доданку, знаходять *довершену форму мажоритарної функції* наступного типу:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_2x_1(\bar{x}_0 \vee x_0) \vee x_2x_0(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_0(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_2x_1 \vee x_2x_0 \vee x_1x_0. \quad (7)$$

Мажоритарна функція мінімальної форми (7) є найбільш поширеною в наноелектроніці. Інверсну мажоритарну функцію називають *міноритарною*:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = \overline{min(x_2, x_1, x_0)} = \bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0. \quad (8)$$

Якщо один з входів МЕ запрограмувати сигналом $x_2 = 0$ чи $x_2 = 1$, то як видно з табл. 5, на прямому виході МЕ реалізуються логічні функції помноження I ($f_I = x_1x_0$) чи додавання АБО ($f_{АБО} = x_1 \vee x_0$).

Перетворимо повну мажоритарну функцію (6) для програмування мультиплектора (4→1) при використанні в якості адресних аргументів x_1 і x_0 . Виконаємо спрощені дужкові перетворення цієї функції:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_1x_0(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 = x_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0. \quad (9)$$

Порівнюючи вихідну функцію мультиплектора (2) з перетвореною МЕ (9), запишемо функцію програмування мультиплектора (4→1) для реалізації мажоритарної функції:

$$f_{np} = 1(x_1x_0) \vee x_2(x_1\bar{x}_0) \vee x_2(\bar{x}_1x_0) \vee 0(\bar{x}_1\bar{x}_0). \quad (10)$$

Отже, згідно рівнянню (10) на інформаційні входи мультиплектора слід подавати наступні сигнали $D3 = 1$,

$D2 = D1 = x_2$ та $D0 = 0$.

Рішення (10) не є єдиною існуючим. На адресні входи мультимплексора A_1 та A_0 можливо подавати довільні набори аргументів, наприклад x_2x_0 або x_2x_1 , а на інформаційні входи $D3 \dots D0$ – залишкові аргументи та логічні сигнали з множини $\{1, 0\}$. В першому випадку функція програмування матиме вигляд:

$$f_{np}(x_2x_0) = 1(x_2x_0) \vee x_1(\bar{x}_2\bar{x}_0) \vee x_1(\bar{x}_2x_0) \vee 0(\bar{x}_2\bar{x}_0),$$

а в другому:

$$f_{np}(x_2x_1) = 1(x_2x_1) \vee x_0(x_2\bar{x}_1) \vee x_0(x_2\bar{x}_1) \vee 0(\bar{x}_2\bar{x}_1).$$

Таким чином, практичне програмування мажоритарної функції (7) на базі мультимплексорів (4→1) свідчить, що при будь-якій комбінації адресних аргументів на виході реалізується однотипні функції програмування.

Результати комп'ютерного моделювання. На рис. 5 побудована функціональна схема запрограмованого мультимплексора в графічному редакторі системи автоматизованого проектування (САПР) MAX+PLUS II, яка є інтегрованим середовищем для розробки цифрових пристроїв на базі запрограмованих логічних схем (ПЛІС) фірми ALTERA [2]. Вона складається з восьми мікросхем: трьох інверторів НЕ, чотирьох тривходових логічних елементів І і одного чотиривходового логічного елемента АБО, має два адресних входи, чотири інформаційних і один комплементарний вихід.

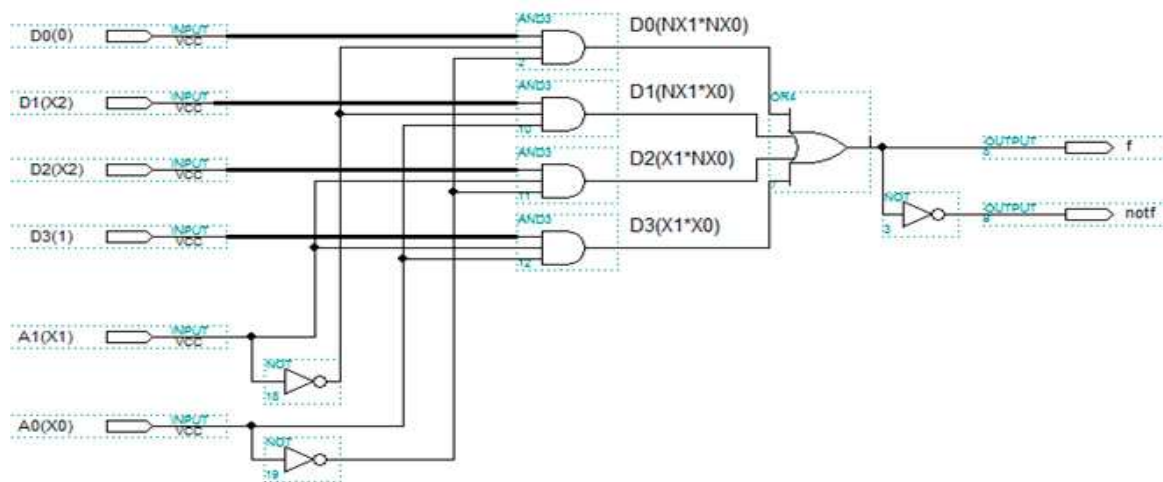


Рис. 5 – Мікросхема запрограмованого мультимплексора.

Часовий аналіз вхідних і вихідних сигналів результатів програмування мажоритарної функції (7) наведений у вікні редактора діаграм на рис. 6. Він повністю відповідає таблиці істинності МЕ (табл. 5).

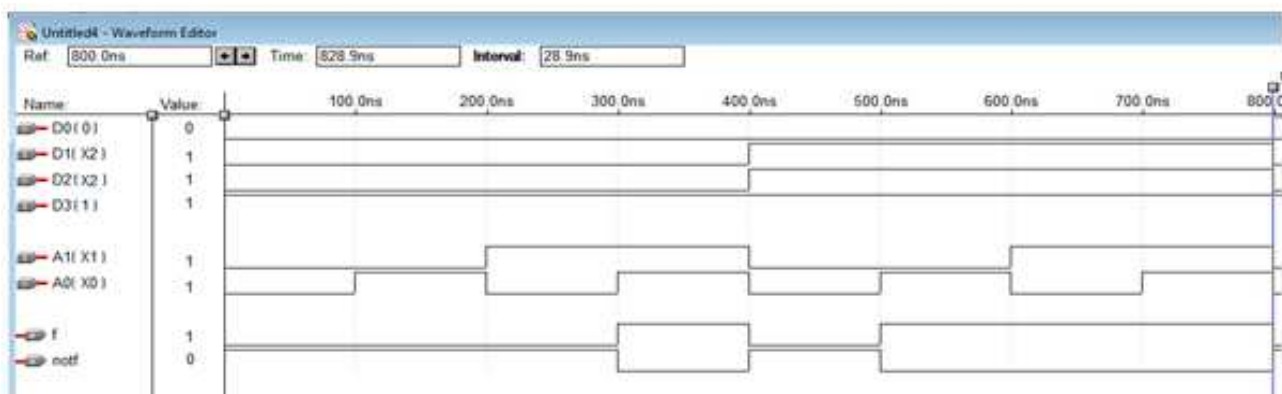


Рис. 6 – Часові діаграми запрограмованого мультимплексора.

Далі синтезуємо одноступінчасту наносхему мультимплексора (4→1) на *квантових коміркових автоматах* (КА). Базова діелектрична комірка КА розміром (50×50) нм містить чотири напівпровідникові чи металеві квантові точки (*острівці*), які геометрично розміщені по куткам квадрату, як показано на рис. 7. Комірки використовуються для побудови нанопровідників, мажоритарних елементів, інверторів, запам'ятовуючих пристроїв тощо [3].

Принцип дії КА, заснований на квантовому тунелюванні та кулонівській взаємодії електронів, дозволяє створювати пристрої, які можуть працювати як комутуючі транзистори, але з меншими розмірами та меншою споживаною потужністю. Однорідна архітектура КА може бути сформована за допомогою електронної літографії.

Кожна комірка може містити два надлишкові електрони, які в змозі тунелювати між квантовими точками. Коли потенціал діелектричних перетинок між точками високий, електрони будуть локалізовані та не зможуть тунелювати, а коли потенціал низький, то електрони зможуть вільно тунелювати. Кулонівське відштовхування між електронами примусить їх розташуватися на діаметрально протилежних кутках з двома можливими конфігураціями (рис. 7). Ці два стабільні стани можуть бути представлені як поляризації комірок $P = -1$ та $P = +1$. Рівень поляризації $P = -1$ відповідає логічному нулю (рис. 7, а), а $P = +1$ відповідає логічній одиниці (рис. 7, б). Якщо в масиві КА, отриманому після розміщення декількох комірок в ряд, змінити поляризацію першої комірки в визначений стан, то друга комірка прийме той же стан по принципу найменшої енергії. Далі по принципу доміно всі комірки масиву набудуть цей же рівень поляризації.

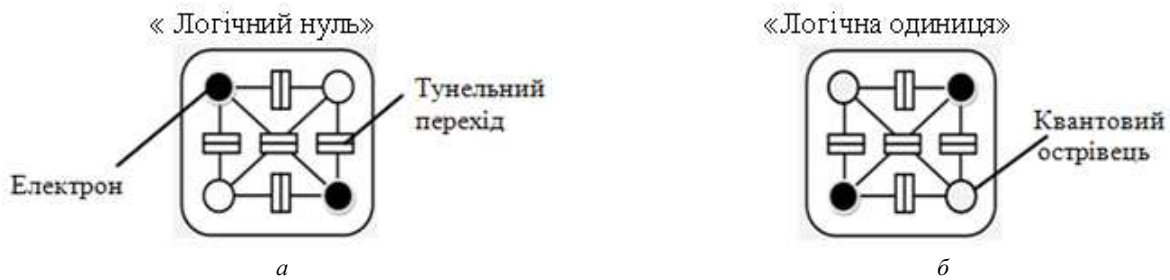


Рис. 7 – Базова комірка в двох можливих логічних станах: а – логічний нуль; б – логічна одиниця.

Поляризація комірки P визначається співвідношеннями:

$$P = \frac{\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4} = \frac{(\rho_1 + \rho_3) - (\rho_2 + \rho_4)}{(\rho_1 + \rho_3) + (\rho_2 + \rho_4)},$$

де ρ_1 і ρ_3 , ρ_2 і ρ_4 – щільності зарядів електронів у діагонально розташованих квантових точках комірки.

Таким чином, бінарна інформація передається без руху зарядів. Тобто нема протікання струму між комірками. Це – основна причина, чому структури КА споживають надмірну кількість енергії $\sim 10^{-22}$ Дж.

На рис. 8 наведена наносхема мультиплектора на 3 інверторах і 11 МЕ, яка запрограмована для реалізації мажоритарної функції (7).

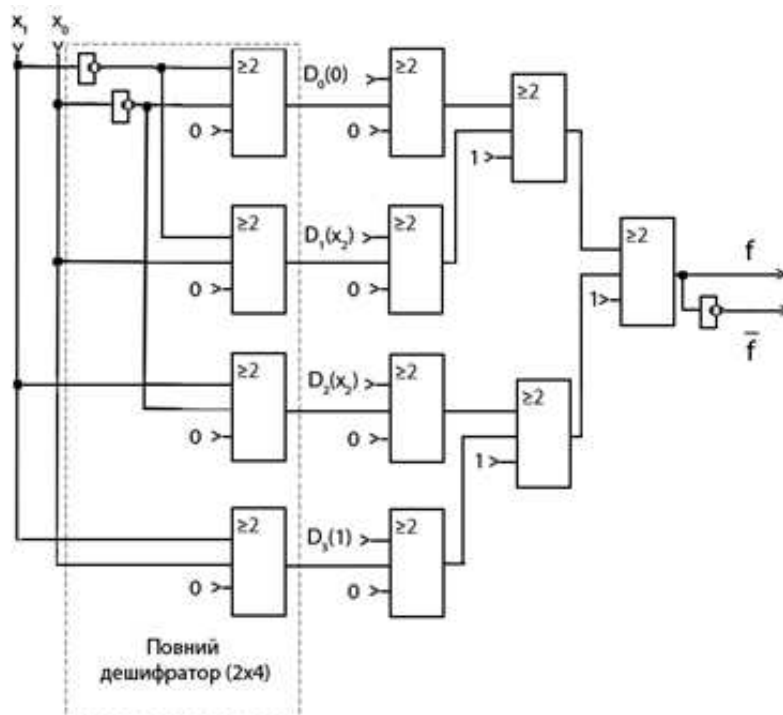


Рис. 8 – Мажоритарна наносхема запрограмованого мультиплектора.

На рис. 9, *a* побудована мажоритарна наносхема на КА запрограмованого мультиплексора (4→1), яка реалізує функцію мажоритарного вибору, а на рис. 9, *б* – часові діаграми, отримані в результаті моделювання на САПР QCA Designer [3]. Сигнали вихідної функції f повністю співпадають з табличними значеннями для МЕ (табл. 5).

Запрограмована таким чином наносхема мультиплексора (4 – 1) базується на 114 квантових коміркових автоматах, розмір яких складає (18×18) нм, відстань між їх центрами дорівнює 20 нм, з чотирма квантовими ост-ривцями діаметром по 5 нм. Загальна площа наносхеми мультиплексора дорівнює

$$(454,8 \times 362,81) \text{ нм}^2 = 0,16 \text{ мкм}^2.$$

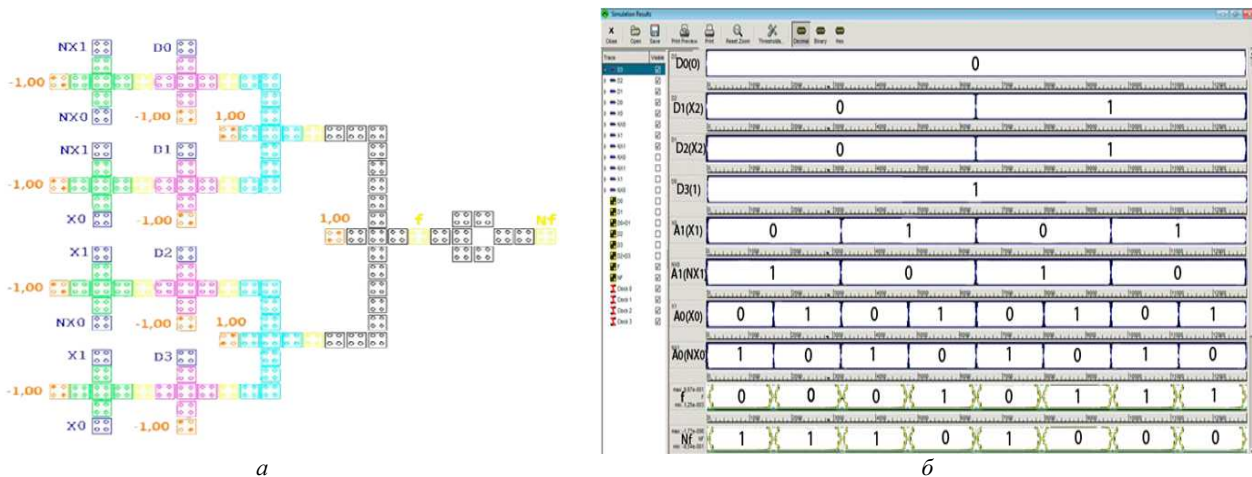


Рис. 9 – Наносхема мультиплексора: *a* – на квантових коміркових автоматах; *б* – часові характеристики.

При розробці складних логічних пристроїв доводиться стикатися з виконанням однотипних операцій І та АБО над різною кількістю змінних. В якості прикладів запрограмуємо мультиплексори (4→1) на виконання логічних функцій помноження та додавання декількох аргументів:

$$f_I = x_n \dots x_2 x_1 x_0 = \bigwedge_{i=0}^n x_i; \quad (11)$$

$$f_{АБО} = x_n \vee \dots \vee x_2 \vee x_1 \vee x_0 = \bigvee_{i=0}^n x_i. \quad (12)$$

Після дужкових перетворень функції (11) та після домножень суми аргументів $[x_n \vee \dots \vee x_2]$ на одиночні суми недостаючих аргументів $(x_1 \vee \bar{x}_1)$, $(x_0 \vee \bar{x}_0)$, а аргументів x_1 – на $(x_0 \vee \bar{x}_0)$ та x_0 – на $(x_1 \vee \bar{x}_1)$, відповідно, функції (12), отримують наступні функції програмувань:

$$f_{np,I} = [\bigwedge_{i=2}^n x_i] (x_1 x_0) \vee 0(x_1 \bar{x}_0) \vee 0(\bar{x}_1 x_0) \vee 0(\bar{x}_1 \bar{x}_0), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_{np,АБО} &= \left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_1(x_0 \vee \bar{x}_0) \vee x_0(x_1 \vee \bar{x}_1) = \\ &= \left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] (x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0) \vee (x_1 x_0 \vee x_1 \bar{x}_0 \vee x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 x_0) = \\ &= \left(\left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \vee 1 \right) x_1 x_0 \vee \left(\left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \right) \bar{x}_1 x_0 \vee \left(\left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] \vee 1 \right) \bar{x}_1 \bar{x}_0 = 1(x_1 x_0) \vee 1(x_1 \bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1 x_0) \vee \left[\bigvee_{i=2}^n x_i \right] \bar{x}_1 \bar{x}_0. \quad (14) \end{aligned}$$

На рис. 10 наведено схемотехнічні реалізації задач програмування функцій (11) та (12) на мультиплексорах (4→1).

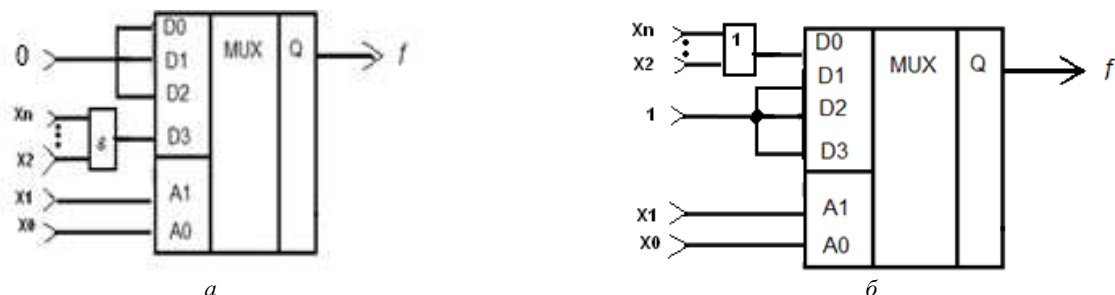


Рис. 10 – Схемні реалізації програмування багатоаргументних операцій: *a* – операція І; *б* – операція АБО.

Далі, з використанням отриманих результатів, реалізуємо на мультиплексорі (4→1) складнішу логічну функцію чотирьох аргументів:

$$f = x_3 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_3 x_0. \quad (15)$$

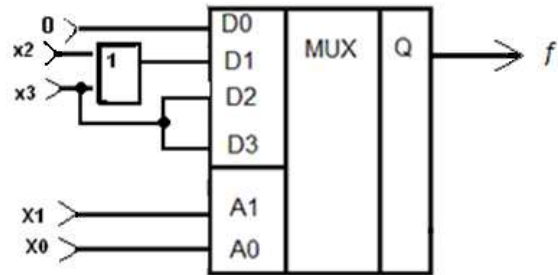
Оберемо в якості адресних змінних x_1 та x_0 , і тому домножимо останній неповний добуток (терм) $x_3 x_0$ на одиночну суму недостаючої змінної ($x_1 \vee \bar{x}_1$):

$$f = x_3 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_0 (x_1 \vee \bar{x}_1) = x_2 (x_1 x_0) \vee x_2 (x_1 \bar{x}_0) \vee (x_3 \vee x_2) (\bar{x}_1 x_0) \vee 0 (\bar{x}_1 \bar{x}_0). \quad (16)$$

За отриманою функцією (16) на рис. 11 побудовані таблиця та схема програмування мультиплексора, що реалізує початкову функцію (15).

x_2	x_1	D
0	0	$D0 = 0$
0	1	$D1 = x_3 \vee x_2$
1	0	$D2 = x_3$
1	1	$D3 = x_3$

а



б

Рис. 11 – Чотириаргументна функція: а – таблиця програмування; б – схематична реалізація.

Використовуючи описаний метод, можна вибирати сигнали репрограмування з ширшої множини, що включає декілька аргументів. При цьому на мультиплексорі з двома адресними входами можна реалізувати логічну функцію трьох, чотирьох і більше змінних. Ефективність використання такого технічного рішення зі збільшенням числа вхідних змінних падає.

Висновки. В роботі розроблені мікро- та наносхеми репрограмованих мультиплексорів для реалізації логічних функцій. Програмування мультиплексора виконувалось за допомогою САПР MAX+PLUS II та САПР QCA Designer. Часові діаграми запрограмованих мультиплексорів в різних середовищах співпали з таблицею істинності.

Принципово нова особливість наноелектроніки пов'язана з тим, що для елементів таких малих розмірів починають переважати квантові ефекти. Відомо, що при переході від мікро- до наноелектроніки квантові ефекти є паразитними, наприклад, роботі класичного транзистора при зменшенні розмірів починає заважати тунелювання носіїв заряду. Проте електроніка, яка використовує квантові ефекти, – це основа нової, так званої наногетероструктурної електроніки.

Список літератури

1. Мельник О. С., Тодавчич С. В. Синтез програмованих наноелектронних пристроїв // Електроніка і системи контролю. – 2013. – № 35. – С. 89 – 94.
2. Стешенко В. Б. ПЛИС фирмы ALTERA : элементная база, система проектирования и языки описания аппаратуры. – М. : Изд. дом. «Додэка – XXI», 2007. – 576 с.
3. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool for QCA // Int. Journ. of Nanotechn. and Appl. – 2005. – Vol. 2. – № 1. – P. 1 – 7.

References (transliterated)

1. Mel'nyk O. S, Todavchich S. V. Syntez programovanykh nanoelektronnykh prystroyiv [Synthesis of programmable nanoelectronic devices]. *Elektronika i systemy kontrolyu* [Electronics and Control Systems]. 2013, no. 35, pp. 89–94.
2. Steshenko V. B. *PLIS firmy ALTERA : elementnaya baza, sistema proektirovaniya i yazyki opisaniya apparatury* [FPGA by ALTERA firm: element base, design system and, hardware description languages]. Moscow, Izd. dome. "Dodeca – XXI" Publ., 2007. 576 p.
3. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool for QCA. *Int. Journ. of Nanotechn. and Appl.* 2005, vol. 2, no. 1, pp. 1–7.

Надійшла (received) 03.02.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович (Мельник Александр Степанович, Melnyk Oleksandr Stepanovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Миколушко Андрій Миколайович (Миколушко Андрей Николаевич, Mykolushko Andriy Mykolayovich) – асистент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 784-26-34; e-mail: 9shik@nau.edu.ua.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, О. С. ЧОРНА, К. В. ДАРАГАН, О. В. ПІДЛІСНИЙ, С. О. ЧОРНИЙ

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглядається питання наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Кубатурні формули будуються з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.

Ключові слова: інтеграли від функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Е. С. ЧЕРНАЯ, К. В. ДАРАГАН, А. В. ПОДЛЕСНЫЙ, С. А. ЧЕРНЫЙ НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Работа посвящена применению новых информационных операторов для построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов функций двух переменных. В статье рассматриваются кубатурные формулы вычисления двойных интегралов с использованием интерликации в случае, когда информация о функции задана ее следами на линиях, значениями функции в точках. Получена оценка погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцируемых функций.

Ключевые слова: интегралы функций двух переменных, кубатурные формулы, интерликация функций.

O. P. NECHUIVITER, O. S. CHORNA, K. V. DARAHAN, O. V. PIDLISNYI, S. O. CHORNYI NEW INFORMATIONAL OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The thesis is dedicated to applying of new information operators for constructing cubature formulas of approximate calculation of integrals of functions of two variables. The feature of the proposed cubature formulas is using the input information about function as a set of traces of function on lines, a set of values of the function at points. The theory of interlineations of functions is the most effective in this case. The estimate for error of cubature formulas of approximate calculation of the integrals of functions of two variables was derived in case when the information about the function is its traces on perpendicular lines, a set of values of the function at some points. Cubature formula is constructed using the interlineation operator. A computational experiment confirming the validity of the theorem about the computational error is given.

Key words: integrals of functions of two variables, cubature formula, interlineation of functions.

Вступ. Питанню чисельного інтегрування функцій декількох змінних присвячено багато досліджень. До найбільш відомих класичних методів можна віднести *метод центральних прямокутників, метод трапецій, формулу Сімсона та формулу Гаусса*. Якщо проводити класифікацію цих досліджень в багатовимірному випадку за типом задання інформації, то при побудові кубатурних формул наближеного обчислення подвійних інтегралів інформація про функцію задавалась значеннями в точках. Чисельне інтегрування при різних інформаційних операторах розглядалося для швидкоосцилюючих функцій двох змінних. У випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на лініях, її значеннями в точках, були побудовані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій. Однак для подвійних інтегралів такі методи детально не були розглянуті.

Аналіз останніх досліджень. На даний час дуже багато досліджень в чисельних методах присвячено використанню нових інформаційних операторів. Зокрема, в роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємно перпендикулярних площин. Нові інформаційні оператори (*інтерлінанти та інтерфлетанти*) можуть також бути використані при чисельному інтегруванні функцій двох та трьох змінних. Так при дослідженні питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів першим кроком були роботи [17], [18], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Інформація про функцію задавалась відповідно її слідами на лініях та площинах; при побудові кубатурних формул використовувалися оператори кусково-сталої інтерлінації та кусково-сталої інтерфлетації. Питання ж наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів з використанням операторів інтерлінації та інтерфлетації не досліджувалося.

© О. П. Нечуйвітер, О. С. Чорна, К. В. Дараган, О. В. Підлісний, С. О. Чорний, 2019

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy, \tag{1}$$

побудувати та дослідити кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталого сплайн-інтерлінації. Інформація про функцію $f(x, y)$ задається її слідами на лініях (рис. 1) та її значеннями в точках. На класі диференційовних функцій отримати оцінки похибок наближення кубатурних формул.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції двох змінних на основі кусково-сталого сплайн-інтерлінації.

Означення. Під слідом функції $f(x, y)$ на лініях

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell$$

розуміємо відповідно функції однієї змінної:

$$f(x_k, y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad f(x, y_j), \quad 0 \leq x \leq 1.$$



Рис. 1 – Сліди функції $f(x, y)$: а – $f(x_k, y), 0 \leq y \leq 1$; б – $f(x, y_j), 0 \leq x \leq 1$.

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell};$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}];$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell.$$

Розглянемо оператор-інтерлінант:

$$Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула

$$\Phi_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) dx dy. \tag{2}$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x, y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} dx \int_0^1 f(x_k, y) dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy.$$

Розглянемо $H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що частинні похідні по змінній x та y обмежені, тобто $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq M, |f^{(0,1)}(x, y)| \leq M, |f^{(1,1)}(x, y)| \leq \widetilde{M}$.

Теорема 1. Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$ та функція задана $N = 2\ell$ слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих $f(x_k, y), k = \overline{1, \ell}, f(x, y_j), j = \overline{1, \ell}$ в області $G = [0, 1]^2$. Для кубатурної формули Φ_1^2 справедлива наступна оцінка:

$$\rho(I_1^2, \Phi_1^2) = \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) dx dy \right| \leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{4N^2}.$$

Доведення. Використавши представлення залишку

$$f(x, y) - Jf(x, y) = \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

наближення $f(x, y)$ оператором інтерліантом через $f^{(1,1)}(x, y)$, маємо

$$\begin{aligned} \rho(I_1^2, \Phi_1^2) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y)) dx dy \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [f(x, y) - Jf(x, y)] dx dy \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy \leq \\ &\leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy = \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \left(-\frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{(x - x_k)^2}{2} \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times \\ &\times \left(-\frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{(y - y_j)^2}{2} \Big|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) = \widetilde{M} \ell^2 \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{4N^2}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена.

Нехай $m_1 = m_2 = \ell^2$ та $N = \ell^4$. Введемо позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}];$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell};$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2}; \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2};$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}; \quad \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Розглянемо оператор-інтерполант, побудований на основі сплайн-інтерліанта $Jf(x, y)$:

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралу (1) пропонується формула:

$$\tilde{\Phi}_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Підставимо у цю формулу вираз для оператора-інтерполанта $\tilde{J}f(x, y)$ та отримаємо кубатурну формулу:

$$\tilde{\Phi}_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} dy + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy;$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}; \quad \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Теорема 2. Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ та значення $f_{kj} = f(x_k, y_j)$, $k = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, задані не більше,

ніж в $N = m_1 m_2$, $m_1 = m_2 = \ell^2$, $N = \ell^4$ фіксованих вузлових точках $(x_k, y_j) \in G$. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$ справедлива наступна оцінка $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \frac{\tilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{M} + 8M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}$. Для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ кубатурна формула $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$ використовує не $O(\ell^4) = O(N)$ значень функції як класична, а $O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

Доведення. Розглянемо

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x); \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x); \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y),$$

тоді для оператора-інтерлінанта $Jf(x, y)$ та оператора-інтерполянта $\tilde{J}f(x, y)$, побудованого на основі $Jf(x, y)$, справедливі тотожності $(Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2)f)$ та $(\tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2)f)$.

Знайдемо оцінку $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2)$:

$$\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) = \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) dx dy \right| \leq \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)) dx dy \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy.$$

Отже, $\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \rho(I_1^2, \Phi_1^2) + \rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2)$. З теореми 1 маємо: $\rho(I_1^2, \Phi_1^2) \leq \frac{\tilde{M}}{16\ell^2}$, а

$$\rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2)f - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2)f| dx dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 - J_1 \tilde{J}_2)f + (J_2 - J_2 \tilde{J}_1)f| dx dy \leq \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 - J_1 \tilde{J}_2)f| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |(J_2 - J_2 \tilde{J}_1)f| dx dy \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} |f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_j)| dy + \sum_{j=1}^{\ell^2} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j)| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_j| dy + M \sum_{j=1}^{\ell^2} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_{\tilde{k}}| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq$$

$$\leq M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 + M \ell \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \ell^2 = M \ell \frac{1}{\ell} \frac{\Delta_1}{2} = M \frac{1}{2} \Delta^2 = M \frac{\Delta^2}{2} = \frac{M}{2\ell^2}.$$

Таким чином, $\rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq M \frac{1}{2\ell^2}$ і

$$\rho(I_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \rho(I_1^2, \Phi_1^2) + \rho(\Phi_1^2, \tilde{\Phi}_1^2) \leq \frac{\tilde{M}}{16\ell^2} + M \frac{1}{2\ell^2} = \left(\frac{\tilde{M}}{16} + \frac{M}{2}\right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{M} + 2M}{16} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Підрахуємо кількість значень функції, що використовується при побудові кубатурної формули $\tilde{\Phi}_1^2$, $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2 = O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$. Теорема 2 доведена.

На рис. 2 представлений загальний принцип побудови сітки вузлів, яка використовується в кубатурних формулах з операторами інтерлінації.

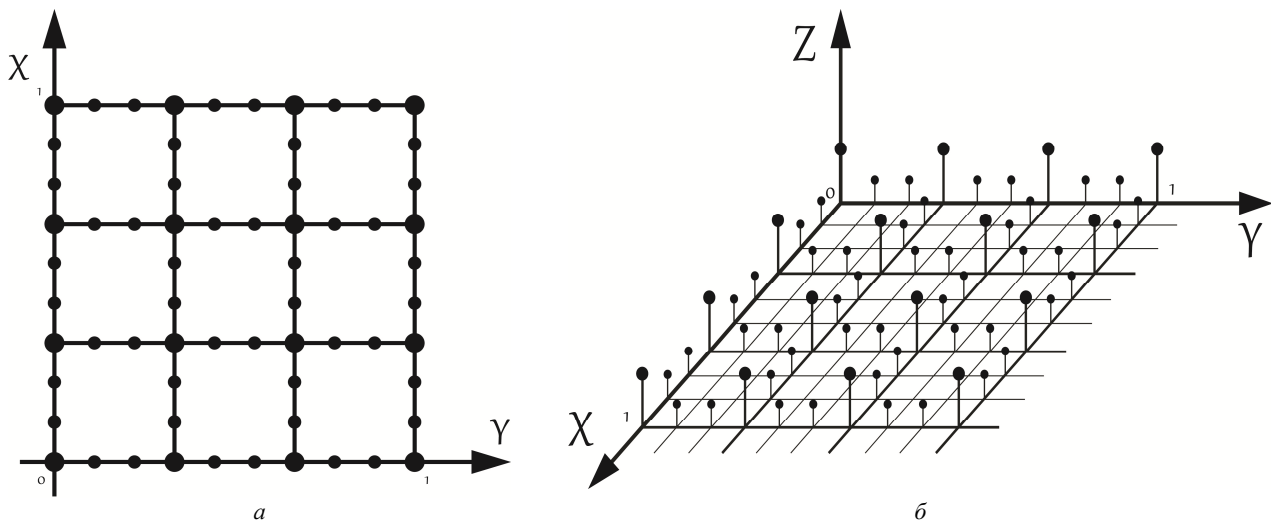


Рис. 2 – Загальний вигляд сітки вузлів для кубатурних формул з використанням операторів інтерлінації: а – вузли сітки; б – значення функції у вузлах сітки.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованих кубатурних формул в системі комп'ютерної математики MathCad.

Приклад 1. Нехай функція задана слідами $f(x_k, y)$, $k = \overline{1, \ell}$, $f(x, y_j)$, $j = \overline{1, \ell}$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$, в області $G = [0, 1]^2$. Для обчислення I_1^2 розглянемо кубатурну формулу Φ_1^2 . На класі $H_1^{2,1}(M, \tilde{M})$ для функції $f(x, y) = \frac{1}{2}(\cos(2x - 2y) - \cos(2x + 2y))$ справедливі наступні чисельні результати наближеного обчислення за кубатурною формулою Φ_1^2 (табл. 1).

Таблиця 1 – Обчислення I_1^2 за допомогою кубатурної формули Φ_1^2

ℓ	Φ_1^2	I_1^2	$E = I_1^2 - \Phi_1^2 $	$\varepsilon = 1/16\ell^2$
4	0.501312762205496	0.50136796566562	0.000055203460124	0.00391
6	0.501357149641647	0.50136796566562	0.000010816023973	0.00174
10	0.501366569721889	0.50136796566562	0.00000139594373	0.00063
15	0.501367690281103	0.50136796566562	0.000000275384517	0.00028
20	0.501367878571774	0.50136796566562	0.000000087093845	0.00016
25	0.501367929999473	0.50136796566562	0.000000035666147	0.0001

Приклад 2.

Для функції $f(x, y) = \sin(x + y)$, для якої $\tilde{M} = 1$, $M = 1$, покажемо, що:

$$1. |I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| \leq \frac{\tilde{M}}{16} \frac{1}{\ell^2} + \frac{M}{2} \frac{1}{\ell^2} = \left(\frac{\tilde{M}}{16} + \frac{M}{2} \right) \frac{1}{\ell^2} = \frac{9}{16} \frac{1}{\ell^2} = \varepsilon;$$

$$2. |I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| \leq |I_1^2 - \Phi_1^2| + |\Phi_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}.$$

Точні значення інтегралів $I_1^2 = 0.773644542790111$ (табл. 2, 3).

Таблиця 2 – Обчислення I_1^2 за квадратурною формулою $\tilde{\Phi}_1^2$

ℓ	$\tilde{\Phi}_1^2$	$ I_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2 $	ε
10	0.773650858142159	0.000006315352048	0.018
20	0.773644937376223	0.000000394586111	0.045
30	0.773644620728563	0.000000077938452	0.002

Таблиця 3 – Похибки обчислення I_1^2 за формулою Φ_1^2 та $\tilde{\Phi}_1^2$ за $\tilde{\Phi}_1^2$

ℓ	$\varepsilon_1 = I_1^2 - \Phi_1^2 $	$\varepsilon_2 = \Phi_1^2 - \tilde{\Phi}_1^2 $	$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
10	0.000006315352048	0.000006449743718	0.000006584135388
20	0.00000008395805	0.000000402981916	0.000000411377721
30	0.00000001658296	0.000000079596748	0.000000081255044

Приклад 3. Метою чисельного експерименту є порівняння формули $\tilde{\Phi}_1^2$ з формулою:

$$\hat{\Phi}_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell^2} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \quad (4)$$

за такими параметрами, як кількість використаних значень Q та \hat{Q} функції $f(x, y)$ для досягнення заданої точності. Кубатурна формула $\tilde{\Phi}_1^2$ використовує в своїй побудові $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2$ значень функції. Для досягнення такої ж точності за допомогою класичної формули $\hat{\Phi}_1^2$ необхідно використати $\hat{Q} = \ell^4$ (табл. 4).

Таблиця 4 – Похибки обчислення I_1^2 за формулою $\tilde{\Phi}_1^2$ та $\hat{\Phi}_1^2$

ℓ	ε_1	$Q = 2\ell^3 - \ell^2$	ε_2	$\hat{Q} = \ell^4$
10	$6.31 \cdot 10^{-6}$	1900	$6.44 \cdot 10^{-6}$	10000
20	$3.94 \cdot 10^{-7}$	15600	$4.02 \cdot 10^{-7}$	160000
30	$7.79 \cdot 10^{-8}$	53100	$7.95 \cdot 10^{-8}$	810000

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядаються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях, її значеннями в точках. Отримано оцінки похибки наближення кубатурних формул на класі диференційованих функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на площинах, її слідами на лініях, значеннями функції в точках на різних класах функцій.

Висновки. На класі диференційованих функцій отримано оцінки похибки наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку, коли інформація задавалась її слідами на лініях, значеннями функції в точках. Кубатурні формули використовують оператор-інтерліант та оператор-інтерполант, побудований на основі оператора-інтерліанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталіх сплайнів. Основною перевагою запропонованих кубатурних формул є висока точність обчислення та використання меншої кількості значень функції порівняно з класичною формулою. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики MathCad підтверджує теоретичні результати.

Список літератури

1. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. : Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 166 – 169.
3. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D-коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. 2 D-коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17–23.
8. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3 D-коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетатії // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.

10. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетатції на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.
11. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций / О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
12. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БелГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
13. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
14. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления 3 D - интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
15. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3 D-коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетатції // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.
16. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.
17. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення 2 D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип.13. – С. 124 – 131.
18. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетатції // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – №16 (1188). – С. 67 – 71.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystanniam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
2. Nechuviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ z vykorystanniam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud. : Nelineynyye kraevyye zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Collection of scientific works : Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999, pp. 166–169.
3. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Optymal'na za porjadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal by the order of exactness cubature formula for computing double integrals from high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2006, no. 6, pp. 9–13.
4. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2 D-koefitsientiv Fur'ye z vykorystanniam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2-D Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
5. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. 2 D-koefitsienty Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D-Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavrishchskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
6. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk, 2010, pp. 90–96.
7. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
8. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
9. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D-koefitsientiv Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D - Fourier coefficients on the class of differentiable functions using spline-interflattation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
10. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryokh zminnykh z vykorystanniam splayn-interfletatsiyi na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using spline-interflattation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics. Natural science. Technical science]. 2012, no. 8, pp. 36–41.
11. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyuschikh integralov triokh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflattation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University. Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.
12. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of high oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series: Mathematics. Physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.
13. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy triokh zminnykh na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
14. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3 D-integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D-integrals of high oscillating functions using interflattation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.
15. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3 D-koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystanniam kuskovo-staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D Fourier coefficients on the Holder class of functions using piecewise constant spline-interflattation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.
16. Lytvyn O. M., Nechuviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy triokh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noyi interfletatsii [Approximate calculation of integrals of high oscillating functions of three variables by using Lagrangian

- an polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.
17. Nechuiiviter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya 2 D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2 D integrals of trigonometric functions using piecewise constant spline-interlineation]. *Matematychni ta komp'uterne modelyuvannya. Seriya : Fizyko-matematychni nauky : zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Scientific works]. Kamenetz – Podolsky, Kam'yanets' – Podil'skyu natsional'nyy universitet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016, vol. 13, pp. 124–131.
18. Nechuiiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interflatatsii [Computing triple integrals of trigonometric function using piecewise constant interflatation]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 16 (1188), pp. 67–71.

Надійшла (received) 22.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна (Нечуйвітер Олеся Петровна, Nechuiiviter Olesia Petrivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Чорна Олена Сергіївна (Чорна Елена Сергеевна, Chorna Olena Sergiivna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena1402@ukr.net.

Дараган Катерина Володимирівна (Дараган Катерина Владимировна, Darahan Kateryna Volodymyrivna) – аспірантка, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: keitakaterina@gmail.com.

Підлісний Олександр Валерійович (Подлесный Александр Валерьевич, Pidlisnyi Oleksandr Valeriyovych) – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: podlesnyy1994@gmail.com.

Чорний Сергій Олександрович (Чорный Сергей Александрович, Chornyi Sergii Oleksandrovych) – студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: sergej131280@ukr.net.

УДК 621.923

Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ**

Предложен теоретический подход к расчету параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Расчетно-экспериментальным путем установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала. Это связано с тем, что основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

Ключевые слова: сила резания, условное напряжение резания, энергоёмкость, сдвиг материала, точение, инструмент, трение.

Ф. В. НОВИКОВ, В. И. ПОЛЯНСКИЙ**АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЧНОЇ ОБРОБКИ**

Запропоновано теоретичний підхід до розрахунку параметрів механічної обробки з позиції закону збереження енергії. Показано визначальну роль умовного напруження різання у формуванні параметрів силової напруженості процесу різання. Розрахунково-експериментальним шляхом встановлено, що умовне напруження різання при лезовій обробці до 10 разів і більше перевищує межу міцності на стиск оброблюваного матеріалу. Це пов'язано з тим, що основна частина енергетичного балансу процесу є енергія тертя інструменту з оброблюваним матеріалом. У зв'язку з цим проведено оцінювання часток енергій "чистого" різання і тертя в загальній енергоємності процесу механічної обробки. Показано, що умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу цілком однозначно визначається відношенням межі міцності на стиск оброблюваного матеріалу і умовного напруження різання.

Ключові слова: сила різання, умовне напруження різання, енергоємність, зсув матеріалу, точіння, інструмент, тертя.

F. V. NOVIKOV, V. I. POLYANSKY**ANALYTIC DETERMINATION OF TECHNOLOGICAL PARAMETERS OF MECHANICAL PROCESSING**

A theoretical approach to the calculation of the parameters of mechanical processing from the standpoint of the law of energy conservation is proposed. The decisive role of the conditional cutting stress in the formation of the parameters of the power intensity of the cutting process is shown. By calculation and experimentally it is established that the conditional cutting voltage during blade processing is up to 10 times or higher than the com-

© Ф. В. Новиков, В. И. Полянский, 2019

двумя остальными силами P и P_y , то есть $P \cdot \Delta l$ и $P_y \cdot \Delta y$. В итоге получено уравнение, соответствующее закону сохранения энергии при резании:

$$P_z \cdot \Delta z = P_y \cdot \Delta y + P \cdot \Delta l, \quad (1)$$

где $P = \tau \cdot \delta \cdot l$ – сила, возникающая в условной плоскости сдвига ОА (рис. 1), Н; τ – касательное напряжение, возникающее в условной плоскости сдвига ОА длиной l , Н/м²; δ – ширина среза, м; $l = a / \sin \beta$ – длина условной плоскости сдвига ОА, м; a – толщина среза, м; β – условный угол сдвига обрабатываемого материала.

Разделив все слагаемые уравнения (1) на величину Δl , с учетом $\cos \beta = \Delta x / \Delta l$; $\sin \beta = \Delta y / \Delta l$, получаем:

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (2)$$

Принимая при точении резцом с нулевым передним углом γ известные соотношения [4]: $P_y / P_z = \operatorname{tg} \psi = f$; $P_z = \sigma \cdot a \cdot \delta$, и разрешая уравнение (2) относительно касательного напряжения τ , имеем:

$$\tau = \frac{\sigma}{2 \cos \psi} \cdot [\sin(\psi + 2\beta) - \sin \psi], \quad (3)$$

где ψ – условный угол трения на передней поверхности резца; f – коэффициент трения инструментального и обрабатываемого материалов; σ – условное напряжение резания, Н/м².

Максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигается при условии $\sin(\psi + 2\beta) = 1$ или

$$\beta = 45^\circ - \frac{\psi}{2}. \quad (4)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$, а условное напряжение резания σ приняло значение, определяемое из зависимости (3):

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{сж}} \cdot \cos \psi}{1 - \sin \psi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

где $\tau_{\text{сдв}}$, $\sigma_{\text{сж}}$ – соответственно, пределы прочности на сдвиг и сжатие обрабатываемого материала, Н/м².

Из зависимости (5) вытекает, что угол β вполне однозначно определяется отношением $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$, то есть:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{\sigma}. \quad (6)$$

Из зависимости (5) также вытекает, что с увеличением угла ψ условное напряжение резания σ увеличивается. Наименьшее значение σ достигается при $\psi = 0$, то есть при условии $\sigma = \sigma_{\text{сж}}$, что имеет место при одноосном сжатии стержня. В табл. 1 приведены рассчитанные по зависимости (6) значения условного угла сдвига обрабатываемого материала β в зависимости от отношения $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$. Как видно, угол β увеличивается с увеличением отношения $\sigma_{\text{сж}} / \sigma$.

Таблица 1 – Расчетные значения условного угла сдвига β обрабатываемого материала

$\sigma_{\text{сж}} / \sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	1,0
β , град	6	11	17	22	27	31	45

Располагая экспериментальными значениями угла β , можно по зависимости (6) определить условное напряжение резания σ , а по нему – тангенциальную составляющую силы резания P_z . Очевидно, после достижения в условной плоскости сдвига ОА касательным напряжением τ предела прочности на сдвиг обрабатываемого материала $\tau_{\text{сдв}}$, имеет место дальнейшее скольжение (перемещение) отделяющегося элемента материала вдоль условной плоскости сдвига ОА до тех пор, пока произойдет отделение нижерасположенного элемента материала (при условии $\tau_{\max} = \tau_{\text{сдв}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{сж}}$). В результате возникающая тангенциальная составляющая силы резания P_z равна удвоенному значению элементарной тангенциальной составляющей силы резания, вызывающей сдвиг материала в условной плоскости сдвига ОА. Кроме того, суммарную тангенциальную составляющую силы резания P_z будет определять еще и составляющая, вызванная трением задней поверхности инструмента с обрабатываемым материалом. Поэтому, зная экспериментальное значение P_z , с использованием зависимости (6) можно определить все составляющие силы P_z , связанные с процессом стружкообразования на передней поверхности инструмента и трением на задней поверхности инструмента.

Определение долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоемкости процесса механической обработки. В табл. 2 приведены экспериментальные значения тангенциальной составляющей силы резания P_z , полученные профессором *Коломийцем В. В.* [4], при продольном точении закаленных сталей: Р6М5

(HRC 64) и стали 45 (HRC 50) резцами из эльбора–Р с главным углом резца в плане $\varphi = 45^\circ$, режимом резания: $S = 0,07$ мм/об.; $t = 0,2$ мм и $h_{зад} = 0,1$ мм. Также приведены расчетные значения параметров $\sigma = P_z / (S \cdot t)$ и $\sigma_{сж} / \sigma$, полученные с учетом $\sigma_{сж} = 970$ Н/мм² (для стали 45) и $\sigma_{сж} = 3600$ Н/мм² (для стали Р6М5).

В табл. 3 приведены экспериментальные значения условного угла сдвига обрабатываемого материала β и рассчитанные по зависимости (6) значения условного напряжения "чистого" резания $\sigma_{рез} = \sigma_{сж} / \operatorname{tg} \beta$, отношений $\sigma_{рез} / \sigma$ и $\sigma_{тр} / \sigma$, определяющих доли энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки, где $\sigma_{тр} = \sigma - \sigma_{рез}$ – условное напряжение трения, Н/м².

Как видно, доля энергии "чистого" резания меньше доли энергии трения, что указывает на необходимость дальнейшего совершенствования процессов механической обработки с точки зрения уменьшения энергоёмкости обработки. Основным путем снижения силовой напряженности процесса резания является уменьшение трения инструмента с обрабатываемым материалом, применяя для этого алмазные инструменты, обеспечивая ввод в зону резания дополнительной механической и электрической энергии, интенсифицирующей процесс резания, и т.д.

Как следует из табл. 2 и табл. 3, при обработке стали 45 отношения $\sigma_{сж} / \sigma$ и $\sigma_{рез} / \sigma$ меньше, чем при обработке стали Р6М5 в связи с большей долей энергии трения в общей энергоёмкости процесса резания [5, 6]. Таким образом показано, что применение условного напряжения резания σ в качестве основного параметра резания позволяет раздельно учесть параметры процессов "чистого" резания и трения, определить доли "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса резания.

Таблица 2 – Экспериментальные значения P_z и расчетные значения параметров σ и $\sigma_{сж} / \sigma$

V, м/мин	25	50	75	100	125	150	200	250
Сталь 45								
P_z , Н	100	135	140	138	125	122	120	105
σ , Н/мм ²	7143	9643	10000	9857	8929	8714	8571	7500
$\sigma_{сж} / \sigma$	0,136	0,1	0,097	0,098	0,109	0,111	0,113	0,13
Сталь Р6М5								
P_z , Н	225	210	200	190	185	180	178	175
σ , Н/мм ²	16071	15000	14286	13571	13214	12857	12714	12500
$\sigma_{сж} / \sigma$	0,224	0,24	0,252	0,265	0,272	0,28	0,283	0,288

Таблица 3 – Экспериментальные значения β и расчетные значения параметров $\sigma_{рез}$, $\sigma_{рез} / \sigma$ и $\sigma_{тр} / \sigma$

V, м/мин	50	100	150	200	250	300
Сталь 45						
β , град	17	17	19	20,5	21,5	22
$\sigma_{рез}$, Н/мм ²	3129	3129	2853	2621,6	2487,2	2425
$\sigma_{рез} / \sigma$, %	32,5	31,8	32,7	30,6	33,2	32,9
$\sigma_{тр} / \sigma$, %	67,5	68,2	67,3	69,4	66,8	67,1
Сталь Р6М5						
β , град	30	35	38,5	40	40,5	40,5
$\sigma_{рез}$, Н/мм ²	6234,8	5142,9	4557	4290,8	4210,5	4212
$\sigma_{рез} / \sigma$, %	41,6	37,9	35,4	33,8	33,7	33,7
$\sigma_{тр} / \sigma$, %	58,4	62,1	64,6	66,2	66,3	66,3

Полученные теоретические решения справедливы при условии достижения в условной плоскости сдвига материала ОА (рис. 1) максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = \tau_{сдв} \approx 0,5 \cdot \sigma_{сж}$ и, соответственно, условного угла сдвига обрабатываемого материала β согласно зависимости (3). Однако, исходя из этой зависимости, условие $\tau = \tau_{сдв} \approx 0,5 \cdot \sigma_{сж}$ можно выполнить и при меньшем значении угла β :

$$\sin(\psi + 2\beta) = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma} \cdot \cos \psi + \sin \psi. \quad (7)$$

Зависимость (7) можно упростить, преобразуя уравнение (2) к виду:

$$\sigma \cdot (1 - f \cdot \operatorname{tg} \beta) = \frac{\sigma_{сж}}{\sin 2\beta}. \quad (8)$$

Принимая в первом приближении $(1 - f \cdot \operatorname{tg} \beta) \rightarrow 1$, имеем:

$$\sin 2\beta = \frac{\sigma_{сж}}{\sigma}. \quad (9)$$

Как видно, угол β тем больше, чем меньше условное напряжение резания σ . В табл. 4 приведены рассчитанные по зависимости (7) значения угла β для разных значений угла ψ , а также значения угла β , рассчитанные по упрощенной зависимости (9). Из табл. 4 следует, что угол ψ мало влияет на изменение угла β (особенно для $\sigma_{сж} / \sigma \leq 0,5$), а расхождение значений угла β , рассчитанных по зависимостям (7) и (9), незначительно. Поэтому расчеты угла β можно производить по зависимости (9). Кроме того, значения угла β , рассчитанные по зависимостям (7) и (9), меньше аналогичных значений угла β , рассчитанных по зависимости (6), табл. 1.

Необходимо отметить, что предложенный в работе теоретический подход к определению параметров механической обработки соответствует приведенному в работе [4] подходу, основанному на условии равновесия сил, действующих в плоскости сдвига материала ОА (рис. 1):

$$P_z \cdot \cos \beta = P_y \cdot \sin \beta + P. \quad (10)$$

Как видно, уравнение (10) идентично уравнению (2), что свидетельствует о достоверности приведенных в настоящей работе теоретических решений.

Таблица 4 – Расчётные значения условного угла сдвига β обрабатываемого материала

$\sigma_{сж} / \sigma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
β , (для $\psi = 17^\circ$)	3	6	9	12,5	17	21,5
β , град (для $\psi = 22^\circ$)	3	6	9,5	13	17,5	23,5
β , град (для $\psi = 27^\circ$)	3	6	9,5	13,5	18,5	27
β , град, по зависимости (9)	3	6	9	12	15	18,5

Перспективы дальнейших исследований. Автор считает перспективными пути исследования, связанные с оценкой долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процессов лезвийной и абразивной обработки и на этой основе установление условий уменьшения силовой напряженности процесса резания.

Выводы. В работе получены аналитические зависимости для определения параметров механической обработки с позиции закона сохранения энергии. Показана определяющая роль условного напряжения резания в формировании параметров силовой напряженности процесса резания. Установлено, что условное напряжение резания при лезвийной обработке до 10 раз и более превышает предел прочности на сжатие обрабатываемого материала, поскольку основную часть энергетического баланса процесса составляет энергия трения инструмента с обрабатываемым материалом. В связи с этим произведена раздельная оценка долей энергий "чистого" резания и трения в общей энергоёмкости процесса механической обработки и определены условия уменьшения энергоёмкости. Показано, что условный угол сдвига обрабатываемого материала вполне однозначно определяется отношением предела прочности на сжатие обрабатываемого материала и условного напряжения резания.

Список литературы

1. Силин С. С. Метод подобия при резании материалов. – М. : Машиностроение, 1979. – 152 с.
2. Лолодзе Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. – М. : Машиностроение, 1982. – 320 с.
3. Бобров В. Ф. Основы теории резания металлов. – М. : Машиностроение, 1975. – 343 с.
4. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф. В. Новикова и А. В. Якимова. В десяти томах. Т. 1. "Механика резания материалов". – Одесса : ОНПУ, 2002. – 580 с.
5. Новиков Ф. В. Основы математического моделирования технологических процессов механической обработки : монография. – Днепр : ЛІРА, 2018. – 400 с.
6. Полянський В. І. Розширення технологічних можливостей підвищення точності механічної обробки отворів // Перспективні технології та прилади : Збірник наукових праць. – Луцьк : Луцький НТУ, 2017. – № 11 (2). – С. 87 – 92.

References (transliterated)

1. Silin S. S. *Metod podobiya pri rezanii materialov* [The method of similarity when cutting materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1979. 152 p.
2. Loladze T. N. *Prochnost' i iznosostoykost' rezhushego instrumenta* [Strength and wear resistance of the cutting tool]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1982. 320 p.
3. Bobrov V. F. *Osnovy teorii rezaniya metallov* [Fundamentals of the theory of metal cutting]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 343 p.
4. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroyeniya V desyati tomakh. Tom. 1. "Mekhanika rezaniya materialov"* [Physical and mathematical theory of material processing theory and mechanical engineering technologies. In ten volumes. V. 1. "Mechanics of metal cutting"]. Ed. F. V. Novikov, A. V. Yakimov. Odessa, ONPU Publ., 2002. 580 p.
5. Novikov F. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mekhanicheskoy obrabotki : monografiya* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Technological Processes of Mechanical Processing : monograph]. Dnepr, LIRA Publ., 2018. 400 p.
6. Polyanskiy V. I. *Rasshirenie tekhnologicheskikh vozmozhnostey povysheniya tochnosti mekhanicheskoy obrabotki otverstiy* [Expansion of technological capabilities to improve the accuracy of machining holes]. *Perspektivni tekhnologiyi ta pryklady : Zbirnyk naukovykh prats'* [Perspective technologies and devices: Collection of scientific works]. Lutsk, Luts'kyu NTU Publ., 2017, no. 11 (2), pp. 87–92.

Поступила (received) 16.04.2019

Новіков Федір Васильович (Новиков Федор Васильевич, Novikov Fedir Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (0572) 69-55-62; e-mail: novikovfv@i.ua.

Полянський Володимир Іванович (Полянский Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich) – кандидат технічних наук, Генеральний директор, ТОВ «Імперія металів», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПОРІВНЯННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ТІЛ В ТЕОРІЇ ГЕРЦА

Проведено порівняльний аналіз наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Для порівняння використано як відомі розв'язки, так і нові, побудовані методом послідовних наближень. Завдяки наближеному обчисленню сум повільно збіжних функціональних рядів способом Шенкса, вдалося одержати компактну форму розв'язку, відносна похибка якого менше одного відсотка. Для оцінки похибок було використано результати числового інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Показано, що одержані наближені аналітичні розв'язки можна використовувати і для апроксимації деяких періодичних Атеб-функцій.

Ключові слова: теорія Герца, сила удару, інтегральне рівняння, аналітичні розв'язки, метод Шенкса, апроксимація Атеб-функцій.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЫ УДАРА ТЕЛ В ТЕОРИИ ГЕРЦА

Проведен сравнительный анализ приближённых аналитических решений интегрального уравнения силы удара упругих тел, ограниченных поверхностями второго порядка в области их взаимодействия. Для сравнения использованы как известные решения, так и новые, построенные методом последовательных приближений. Благодаря приближённому суммированию медленно сходящихся функциональных рядов способом Шенкса, удалось получить компактную форму решения, относительная погрешность которого меньше одного процента. Для установления погрешностей были использованы результаты численного интегрирования дифференциального уравнения удара на компьютере. Показано, что полученные приближённые аналитические решения можно использовать и для аппроксимации некоторых периодических Атеб-функций.

Ключевые слова: теория Герца, сила удара, интегральное уравнение, аналитические решения, метод Шенкса, аппроксимация Атеб-функций.

V. P. OLSHANSKIY

COMPARISON OF APPROXIMATE SOLUTIONS TO IMPACT STRENGTH INTEGRAL EQUATION IN THE FRAMEWORK OF HERTZ THEORY

Analytical solutions to the integral equation describing the strength of impact of elastic bodies bounded by second order surfaces in the area of the impact were compared. Previously known solutions to the integral equation as well the new ones, constructed by the method of successive approximations, were considered. Approximate summation of slowly converging functional series by Shanks's method allowed to derive a compact form of the solution which relative error is less than one percent. The errors were computed by using the results of numerical integration of the impact differential equation. It was shown that the analytical solutions obtained could also be applied for approximating some periodic Ateb-functions.

Key words: Hertz theory, strength of impact, integral equation, analytical solution, Shanks's method, approximation of Ateb-functions.

Вступ. При обчисленні сили ударної взаємодії пружних тіл, як функції часу, традиційно використовують інтегральні рівняння. Першим, хто склав таке рівняння сили удару був *С. П. Тимошенко* [1, 2]. В подальшому інтегральні рівняння такого типу використовували в багатьох публікаціях, як в задачах удару [3 – 6], так і в інших задачах механіки [7 – 9]. Їх розв'язки одержували чисельними методами. Для цього проміжок інтегрування розділяли на малі ділянки і на кожній з них певним чином апроксимували силу удару. Найбільш поширеним є спосіб *ступінчастої апроксимації*, де як і в роботі [1], силу вважали сталою в межах ділянки. Використання *лінійної апроксимації* дозволило *А. П. Філіпову* [4] прискорити збіжність рядів і обчислити не тільки прогини, а і напруження в балках і пластинах, спричинені пружним ударом.

Значно менше публікацій присвячено побудові наближених аналітичних розв'язків інтегральних рівнянь. Такі спроби зроблено в [10, 11]. У випадку удару двох пружних тіл, без урахування їх коливань, *компактний аналітичний розв'язок* вдалося побудувати *М. О. Кільчевському* [11] для випадку, коли незакріплені тіла, піддані удару, обмежені в області контакту поверхнями другого порядку. Саме його розв'язок будемо далі використовувати для порівняння з тими, що одержано в цій роботі.

Метою даної статті є побудова наближених аналітичних розв'язків інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, аналіз їх точності та можливостей використання в інженерних розрахунках ударних процесів.

Інтегральне рівняння сили удару. Якщо тіла в області динамічної взаємодії обмежені поверхнями: $z_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2$; $z_2 = -(b_{11}x^2 + b_{22}y^2)$, причому $A = a_{11} + b_{11} \geq B = a_{22} + b_{22}$, то, у відповідності з теорією Герца, зближення центрів мас тіл x , під дією сили P , становить:

$$x = k \cdot P^{2/3}.$$

Для обчислення k використовують розв'язок статичної контактної задачі теорії пружності, згідно якому [12]:

$$k = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{\pi b_1} K(\varepsilon).$$

Тут:

$$Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}; \quad b_1 = \sqrt[3]{\frac{3E(\varepsilon)}{2(1 - \varepsilon^2)} \frac{Q_1 + Q_2}{\pi(A + B)}},$$

де $K(\varepsilon)$, $E(\varepsilon)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно; E_1 , E_2 , μ_1 , μ_2 – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл.

Параметр ε – ексцентриситет площадки контакту – є коренем трансцендентного рівняння:

$$(1 - \varepsilon^2) \left[\frac{K(\varepsilon)}{E(\varepsilon)} - 1 \right] = \frac{B\varepsilon^2}{A + B},$$

тобто він залежить лише від геометрії граничних поверхонь тіл (коефіцієнтів A і B).

В рамках припущень квазістатичної теорії удару Герца інтегральне рівняння сили динамічного стиснення тіл має вигляд [11]:

$$kP^{2/3} = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1, \quad (1)$$

де $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m_1 , m_2 – маси тіл, задіяних в ударі; v_0 – початкова швидкість зіткнення тіл; t – час; $P = P(t)$ – сила удару.

Введенням в роботі [11] нових змінних:

$$P(t) = \left(\frac{M v_0}{k} \right)^{3/5} \cdot f(\tau), \quad t = \frac{M^{2/5} k^{3/5}}{v_0^{1/5}} \tau, \quad (2)$$

рівнянню (1) надано наступну форму:

$$f^{2/3}(\tau) + \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \tau = 0, \quad (3)$$

куди явно не входять фізичні та геометричні параметри тіл. Тому автор монографії [11] називає (3) *універсальним рівнянням удару*. Про його наближені розв'язки піде мова далі.

Наближені розв'язки універсального рівняння удару. Як відзначалось вище, вперше такий розв'язок побудовано в [11]. Він має вигляд:

$$f(\tau) = -\frac{10\tau^{3/2}}{13,793 + 0,73\tau^{5/2}} \cdot \frac{0,015\tau^{5/2} - 0,276}{0,2 + 0,013\tau^{5/2}}. \quad (4)$$

Громіздка процедура його отримання детально викладена в [11] і її тут повторювати не будемо. Щоб мати форми наближених розв'язків, замість (3), використаємо ітераційне співвідношення:

$$f_n(\tau) = \left(\tau - \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} f_{n-1}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right)^{3/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Поклавши в ньому $f_0(\tau) = 0$, одержуємо:

$$f_1(\tau) = \tau^{3/2}; \quad f_2(\tau) = \left(\tau - \frac{4}{35} \tau^{7/2} \right)^{3/2} \approx \tau^{3/2} - \frac{6}{35} \tau^4 + \frac{6}{1225} \tau^{13/2} + \frac{4}{42875} \tau^9. \quad (6)$$

Тут прийняли до уваги, що на етапі динамічного стиснення тіл $\tau \in (0; \tau_c)$, де $\tau_c \approx 1,60904$.

Підставивши (6) в (5), одержуємо наступний розв'язок:

$$f(\tau) \approx f_3(\tau) \approx \left(\tau - \frac{4}{35} \tau^{7/2} + \frac{1}{175} \tau^6 - \frac{8}{104125} \tau^{17/2} - \frac{2}{2358125} \tau^{11} \right)^{3/2}. \quad (7)$$

Щоб мати замість (7) більш компактний вираз $f(\tau)$, аналогічно [11], скористаємося методом Шенкса. За цим методом сума ряду S наближено подається співвідношенням:

$$S \approx \frac{S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2}{S_{n+1} - S_{n-1}}, \quad (8)$$

де S_{n-1} , S_n , S_{n+1} – суми з $(n-1)$, n і $(n+1)$ членів ряду, відповідно.

Оскільки $S_{n-1} = S_n - a_n$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, то:

$$S_{n-1} \cdot S_{n+1} - S_n^2 = S_n (a_{n+1} - a_n) - a_n a_{n+1}; \quad S_{n+1} + S_{n-1} = 2S_n + a_{n+1} - a_n.$$

Тут a_n і a_{n+1} – n -й і $(n+1)$ -й члени ряду, відповідно.

Отже, (8) зводиться до формули:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}. \quad (9)$$

Розглянемо ряд:

$$S = 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2} + \frac{1}{175} \tau^5 - \frac{8}{104125} \tau^{15/2} - \dots$$

Покладемо в ньому: $S_n = 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2}$; $a_n = -\frac{4}{35} \tau^{5/2}$; $a_{n+1} = \frac{1}{175} \tau^5$.

Підстановкою цих виразів в (9) отримуємо:

$$S \approx 1 - \frac{4}{35} \tau^{5/2} + \frac{4}{35} \frac{\tau^5}{20 + \tau^{5/2}} = 1 - \frac{16}{7} \frac{\tau^{5/2}}{20 + \tau^{5/2}}.$$

Тоді:

$$f(\tau) \approx (\tau \cdot S)^{3/2} \approx \left(\tau - \frac{16}{7} \frac{\tau^{7/2}}{20 + \tau^{5/2}} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

Ця форма розв'язку значно компактніша, ніж (7).

Щоб використати наближені розв'язки для розрахунку характеристик удару, прийнемо до уваги, що максимум сили стискання P_c і максимум зближення центрів мас тіл x_c подаються формулами (11):

$$P_c = \left(\frac{5}{4} \right)^{3/5} \left(\frac{M v_0^2}{k} \right)^{3/5}; \quad x_c = k \left(\frac{5}{4} \right)^{2/5} \left(\frac{M v_0^2}{k} \right)^{2/5}, \quad (11)$$

де згідно з (2): $\left(\frac{M v_0^2}{k} \right)^{3/5} = \frac{P(t)}{f(\tau)}$.

Тоді у безрозмірній формі:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/5} \cdot f(\tau); \quad \frac{x(t)}{x_c} = \left(\frac{4}{5} \right)^{2/5} (f(\tau))^{2/3}, \quad (12)$$

причому $\tau = \left(\frac{5}{4} \right)^{2/5} \frac{v_0 t}{x_c}$.

Підставляючи в формули (12) розв'язки (4), (7) і (10), будемо мати різні значення характеристик удару тіл на етапі їх стискання.

На етапі розтискання, що проходить на проміжку $\tau \in [\tau_c, \tau_y]$, де $\tau_y = 3,21808$, зберігає чинність лише розв'язок (4). У виразах (7) і (10) треба змінити τ на $\tau_y - \tau$, тоді при $\tau = \tau_y$: $x(\tau) = 0$ і $P(\tau) = 0$, що настає в кінці удару.

В роботі [13] встановлено, що:

$$\frac{x(t)}{x_c} = Sa \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{v_0 t}{x_c} \right), \quad (13)$$

тобто вказане відношення дорівнює *Ateb-сінусу*.

Тому, використовуючи надруковану в [13] таблицю цієї функції, скористаємося можливістю з'ясувати по-

хибки наближених розв'язків (4), (7) і (10), бо згідно з (12) і (13), маємо:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{v_0 t}{x_c}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5} (f(\tau))^{2/3}. \quad (14)$$

Результати обчислень значень вказаної функції чотирма способами наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення Ateб–синуса для різних $\eta = \left(\frac{4}{5}\right)^{2/5} \cdot \tau$

η	Значення $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$			
	Формули: (4) і (14)	Формули: (7) і (14)	Формули: (10) і (14)	Таблиця в [13]
0,2	0,200	0,199	0,199	0,199
0,4	0,394	0,394	0,394	0,394
0,6	0,577	0,577	0,577	0,577
0,8	0,738	0,737	0,737	0,737
1,0	0,868	0,866	0,866	0,866
1,2	0,961	0,956	0,954	0,954
1,47164	1,020	1,006	0,997	1,000

Як бачимо, тут кращим наближенням є компактна формула (10). Її максимальна похибка становить 0,3 %. Розв'язок (4) дає дещо завишені результати з похибкою 2 %.

Використовуючи розв'язок (10), отримуємо наступну формулу апроксимації Ateб–синуса в першій чверті його періоду $\eta \in [0; I]$:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right) \approx \eta - 2,2857 \frac{\eta^{7/2}}{16 + \eta^{5/2}}, \quad (15)$$

де $I = 1,47164$.

По аналогії з (15), для апроксимації Ateб–косинуса в першій чверті його періоду одержуємо вираз:

$$Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right) \approx I - \eta - \frac{2,2857(I - \eta)^{7/2}}{16 + (I - \eta)^{5/2}}. \quad (16)$$

Інформація про похибки цієї формули надана в табл. 2, де, крім значень, обчислених за допомогою (16), вказано табличні значення, які запозичено з роботи [14].

Таблиця 2 – Значення Ateб–косинуса

η	Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$		η	Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, \eta\right)$	
	Формула (16)	Таблиця з [14]		Формула (16)	Таблиця з [14]
0,0	0,997	1,000	0,8	0,637	0,637
0,2	0,974	0,975	1,0	0,461	0,461
0,4	0,902	0,902	1,2	0,270	0,270
0,6	0,787	0,787	1,47164	0,000	0,000

Найбільша відносна похибка апроксимації (16) становить 0,3 %.

Таким чином, наближення (15), (16) цілком придатні для обчислення значень Ateб–функцій в інженерних розрахунках.

Проілюструємо на конкретному прикладі використання формули (10).

Приклад. Проведемо розрахунок зміни у часі сили удару двох сталевих куль однакового радіуса $R = 0,05$ м зі швидкістю $v_0 = 4$ м/с. Для вказаного матеріалу куль $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_1 = \mu_2 = 0,25$. Геометричні параметри: $a_{11} = b_{11} = a_{22} = b_{22} = 10 \text{ м}^{-1}$, $A = B = 20 \text{ м}^{-1}$. Ексцентриситет кругової площадки контакту $\varepsilon = 0$ і, в такому випадку, $K(\varepsilon) = E(\varepsilon) = \pi/2$. Фізичні сталі $Q_1 = Q_2 = 4,6875 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$. Параметр $b_1 = 5,601859 \cdot 10^{-5} (\text{м/Па})^{1/3}$. Йому відповідає $k = 1,25518 \cdot 10^{-7} \text{ мН}^{-2/3}$. Маса кожної кулі $m_1 = m_2 = 4,08407$ кг. Їх зведена маса становить $M = 2,04204$ кг. Розрахунки за формулами (11) дають: $P_c = 128065,7325$ Н; $x_c = 0,0003189$ м. Обчислені відношення $P(t)/P_c$ для різних t за формулами (10), (12) записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення $P(t)/P_c$, обчислені двома способами

$\frac{v_0 t}{x_c}$	Значення $P(t)/P_c$		$\frac{v_0 t}{x_c}$	Значення $P(t)/P_c$	
	Формули (10), (12)	Числов. інт.		Формули (10), (12)	Числов. інт.
0,2	0,0891	0,0891	1,0	0,8053	0,8055
0,4	0,2476	0,2476	1,2	0,9316	0,9324
0,6	0,4377	0,4377	1,4	0,9924	0,9952
0,8	0,6325	0,6325	1	0,9958	1,0000

Для порівняння, тут також записано відношення $P(t)/P_c$, одержані чисельним методом. Враховуючи, що, згідно з (12):

$$P(t)/P_c = (x(t)/x_c)^{3/2},$$

на комп'ютері проводимо чисельне інтегрування диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{Mk^{3/2}} x^{3/2},$$

при початкових умовах: $x(0) = 0$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$ і вказаних вище значеннях: M , k , v_0 .

Маємо невелику розбіжність відповідних числових результатів в табл. 3, що підтверджує вірогідність отриманих аналітичних розв'язків.

Перспективи подальших досліджень. Викладений метод може бути поширеним на випадки удару тіл, обмежених поверхнями і більш високих порядків, а також поверхнями, що мають сингулярні точки, але це потребує складання нових інтегральних рівнянь і побудови їх конкретних аналітичних розв'язків.

Висновки. В рамках теорії Герца, методом послідовних наближень, з використанням формули Шенкса побудовано компактний наближений аналітичний розв'язок інтегрального рівняння сили удару двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку в області їх взаємодії. Цей розв'язок має вищу точність, ніж відомі в літературі. Він служить також гарним наближенням періодичних Атеб-функцій в першій чверті їх періоду.

Список літератури

1. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. – Л.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
3. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Госстройиздат, 1965. – 447 с.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с.
6. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков: Миськдрук, 2012. – 320 с.
7. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с.
8. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шарпаната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
9. Воронай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин. – Харьков: Лидер, 2018. – 214 с.
10. Петренко М. П. Про наближений розв'язок уточненого функціонального рівняння теорії удару // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7. – № 5. – С. 565 – 568.
11. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар. – Киев: Наукова думка, 1976. – 319 с.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
13. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
14. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Диніміка осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульсу // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХП», 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

References (transliterated)

1. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering Practice]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.
2. Timoshenko S. P. *Steganoalgoritmy kolebaniya v inzhenernom dele* [Steganography algorithm in engineering practice]. Moscow – Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1959. 439 p.
3. Gol'dsmit V. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of impacted bodies]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1965. 447 p.
4. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
5. Goloskokov E. G., Filippov A. P. *Nestatsionarnye kolebaniya deformituemykh sistem* [Non-stationary vibrations of deformable systems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1977. 340 p.
6. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya stержney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
7. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V. *Impul'snye vozdeystviya na uprugodeformiruemye eylementy konstruksiy* [Pulse impact on elastically deformable structural units]. Kharkov, Izd-vo KhGADTU (KhADI) Publ., 2001. 184 p.

8. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruksiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
9. Voropay A. V. *Integral'nye uravneniya Vol'terra v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnogo deformirovaniya plastin* [Volterra integral equations in some problems of non-stationary deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.
10. Petrenko M. P. Pro nablyzheny rozv'yazok utochnenogo funktsional'nogo rivnyannya teorii udaru [On approximate solution to specified functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.
11. Kil'chevskiy N. A. *Dinamicheskoe kontaktne szgatie tveirydykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solid. Impact]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.
12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktmaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of elasticity theory]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.
13. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozv'yazku zadachi Gertsya pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
14. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Dynamika ostsilyatora z zhorstkoyu kharakterystykoyu pruzhnosti pry diyi sylovogo impul'su* [Dynamics of oscillator with stiff elasticity characteristic under force]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 06.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasily Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ НА ОДНОБІЧНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ**

Розглянуто динамічне деформування прямокутної та круглої мембран, однобічно підкріплених двопараметричною пружною основою, що чинить опір лише стисканню, в умовах силового імпульсного навантаження. Показано, що внаслідок несиметрії характеристики пружності системи, після відриву та віддалення мембрани від основи її прогин може бути більший за той, що вона мала при контакті з основою за дії імпульсу. Визначено умови, коли можлива така нерівність. Вони пов'язані з натягом мембрани, пружними характеристиками основи і тривалістю дії прямокутного імпульсу, а величина динамічного тиску на мембрану не входить до цих умов, що є наслідком кусково-лінійної силової характеристики коливальної системи, поданої відрізками двох прямих. Наведено приклади розрахунків і проведено аналіз числових результатів.

Ключові слова: прямокутна і кругла мембрани, однобічна пружна основа, прямокутний силовий імпульс.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ НА ОДНОСТОРОННЕМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ**

Рассмотрено динамическое деформирование прямоугольной и круглой мембран, односторонне подкрепленных двухпараметрическим упругим основанием, которое сопротивляется только сжатию, в условиях силового импульсного нагружения. Показано, что в результате несимметрии характеристики упругости системы, после отрыва и отдаления мембраны от основания её прогиб может быть больше того, который она имела при контакте с основанием при действии импульса. Определены условия, когда возможно такое неравенство. Они связаны с натяжением мембраны, упругими характеристиками основания и продолжительностью действия прямоугольного импульса, а величина динамического давления на мембрану не входит в этих условия, что является следствием кусочно-линейной силовой характеристики колебательной системы, представленной отрезками двух прямых. Приведены примеры расчетов и проведен анализ числовых результатов.

Ключевые слова: прямоугольная и круглая мембраны, одностороннее упругое основание, прямоугольный силовый импульс.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY, M. V. SLIPCHENKO**NONSTATIONARY OSCILLATIONS OF THE MEMBRANE ON A ONE-SIDED ELASTIC BASE, CAUSED BY A FORCE IMPULSE**

Dynamic deformation of rectangular and round membranes unilaterally supported by a two-parameter elastic base, which resists only compression, under conditions of force impulse loading is considered. It is shown that as a result of asymmetry of the elasticity characteristics of the system, after separation and removal of the membrane from the base, its deflection may be larger than that which it had in contact with the base under the action of the impulse. Conditions are determined when such an inequality is possible. They are related to the membrane tension, the elastic characteristics of the base, and the duration of the rectangular pulse, that is, the value of the dynamic pressure on the membrane is not one of these conditions, which is the result of the piecewise-linear force characteristic of the oscillatory system given by segments of two straight lines. Examples of calculations are given and analysis of numerical results is carried out.

Key words: rectangular and round membranes, unilateral elastic base, rectangular force impulse.

Вступ. Динаміку мембран при дії короткочасних імпульсних навантажень розглядали в багатьох роботах, із яких виділимо [1 – 4]. У цих роботах, крім прямих задач розрахунку деформованого стану, розв’язували й обернені задачі по визначенню параметрів динамічних навантажень, які спричиняють зареєстровані (відомі) переміщення. Там також аналізували нестационарні коливання прямокутних і круглих мембран з зосередженими масами, в тому числі мембран підкріплених пружною основою. Але в названих роботах та інших відомих публікаціях розв’язували лінійні динамічні задачі. *Нелінійним задачам* приділено значно менше уваги, бо їх аналітичне розв’язання становить суттєві труднощі, за винятком окремих випадків. Один із таких випадків використано в цій роботі.

Метою статті є дослідження особливостей руху прямокутної та круглої мембран з відривом від основи при силовому імпульсному навантаженні.

Постановка задачі та її розв’язок. Для досягнення поставленої мети вибрано найпростіші варіанти розподілу тиску по поверхні мембрани та його зміну в часі. Такий вибір дав можливість побудувати точні аналітичні розв’язки рівнянь руху, провести їх припасовування та дослідити особливості динамічного процесу в нелінійній системі з несиметричною силовою характеристикою.

Динаміка прямокутної мембрани. Припускаємо, що мембрана має розміри l_1 і l_2 відповідно в напрямі координатних осей Ox і Oy . Її сталий натяг дорівнює T . Знизу вона підкріплена двопараметричною пружною основою, що має характеристики c_f , t_f і ρ_f [5], а зверху навантажена динамічним тиском:

$$q(x, y, t) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (1)$$

Тут q – максимальне значення тиску, що припадає на центр мембрани; $H(t) - H(t - t_1)$ – *одиночні функції Хевісайда*; t – час; t_1 – тривалість дії (ширина) прямокутного імпульсу.

Переміщення (прогини) мембрани $z(x, y, t)$ донизу додатні, а доверху – від’ємні відносно положення статичної рівноваги $z = 0$. Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (2)$$

де $T_* = T + 2t_f$; $\rho_* = \rho + \rho_f$; ρ – маса одиниці площі мембрани; ρ_f – приєднана маса основи.

Рівняння (1) враховує контакт мембрани з основою і має чинність при $z > 0$.

Оскільки прогини закріпленої на контурі мембрани дорівнюють нулю, то розв’язок рівняння (2) подаємо добутком:

$$z(x, y, t) = B(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad (3)$$

у якому $B(t)$ – невідома функція часу.

Підстановкою (3) в (2), з урахуванням (1), отримуємо:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \Omega^2 B = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (4)$$

Тут $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left[T_* \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f \right]}$ – частота вільних коливань мембрани при двобічному контакті з основою.

Розв’язок рівняння (4), при нульових початкових умовах, має вигляд [6]:

$$B(t) = \begin{cases} z_c (1 - \cos \Omega t), & t < t_1; \\ 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin \left(\Omega \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

де $z_c = \frac{q}{T_* \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right) + c_f}$ – прогин центру мембрани донизу при дії на її поверхні статичного тиску

$$q(x, y) = q \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}.$$

Якщо $t_1 < \frac{2\pi}{\Omega}$, то розв'язок (5) має сенс при $t \in (0; t_*)$, де:

$$t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (3), (5) амплітуда переміщення центру мембрани донизу $a_0(t_1)$, становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_c \sin \frac{\Omega t_1}{2}, & \text{при } t_1 \leq \frac{\pi}{\Omega}; \\ 2z_c, & \text{при } t_1 > \frac{\pi}{\Omega}. \end{cases} \quad (6)$$

Прогин $a_0(t_1)$ мембрана має при:

$$t_e = \frac{2\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

коли $t_1 \leq \pi/\Omega$ і при $t_e = \pi/\Omega$, коли $t_1 > \pi/\Omega$.

Контакт мембрани з основою порушується в момент часу:

$$t = t_* = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{t_1}{2},$$

бо, згідно з (5), $B(t_*) = 0$. При цьому центр мембрани має швидкість

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=t_*} = -v_0 = -2z_c \Omega \sin \frac{\Omega t_1}{2}. \quad (7)$$

Далі рух центру мембрани описується рівнянням:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \omega^2 B = 0, \quad (8)$$

у якому $\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho} T \left(\frac{\pi^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{l_2^2} \right)}$ – частота коливань мембрани при відсутності основи.

Розв'язок рівняння (8), що задовольняє умові (7), має вигляд:

$$B(t) = -2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \sin(\omega(t - t_*)). \quad (9)$$

Амплітуда переміщення центру мембрани вгору $a_1(t_1)$, згідно з (3), (9), дорівнює:

$$a_1(t_1) = 2z_c \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2} \quad (10)$$

і досягається вона в момент часу:

$$t = t_m = \frac{2\pi}{\Omega} + t_*.$$

Отже, якщо $t_1 \leq \pi/\Omega$, то відношення амплітуд, визначених формулами (6), (10), наступне:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} = \text{const}.$$

При більших тривалостях імпульсу, коли $t_1 \in (\pi/\Omega; 2\pi/\Omega)$, $a_0(t_1) = 2z_c$ і

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\Omega}{\omega} \sin \frac{\Omega t_1}{2}.$$

Таким чином, при $\Omega > \omega$ виконується нерівність $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, тобто має місце динамічний ефект несиметрії силової характеристики системи [8, 9]. Він проявляється лише для тривалостей імпульсу $t_1 \in (0; t_G)$, де:

$$t_G = \frac{2}{\Omega} \left(\pi - \arcsin \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

У випадку $\Omega < \omega$ названий ефект не проявляється, бо маємо $a_0(t_1) > a_1(t_1)$.

Оскільки в вирази Ω і ω не входить параметр q , то відношення $a_1(t_1)/a_0(t_1)$ не залежить від максимального тиску на мембрану, що є наслідком кусково-лінійної характеристики пружності системи.

Приклад 1. Припустимо, що сталева мембрана товщиною $1,5 \cdot 10^{-3}$ м: $T = 2,34 \cdot 10^5$ Н/м; $\rho = 11,7$ кг/м²;

$l_1 = l_2 = 1$ м і лежить на пружному шарі гуми, у якої $E_0 = 4 \cdot 10^6$ Па; $\nu_0 = 0,48$; $\rho_0 = 1,2$ кг/м³, товщиною $H = 0,08$ м. Максимальний тиск на мембрану $q = 2 \cdot 10^5$ Па. Обчислимо її максимальні прогини при різних тривалостях дії імпульсу t_1 .

Для розрахунку значень коефіцієнтів c_f , t_f , ρ_f маємо інтеграли [5]:

$$c_f = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \left[\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} \right]^2 d\xi; \quad t_f = \frac{E_0}{4(1+\nu_0)} \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi; \quad \rho_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(\xi) d\xi,$$

в яких $\psi(\xi)$ – функція розподілу вертикальних переміщень по товщині шару.

Враховуючи невелику товщину шару, задаємо наближено:

$$\psi(\xi) = \frac{H - \xi}{H}.$$

$$\text{Тоді: } c_f = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} = 6,4969 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3; \quad t_f = \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)} = 18018 \text{ Н/м}; \quad \rho_f = \frac{\rho_0 H}{3} = 32 \rho_0 \text{ кг/м}^2.$$

Подальші обчислення дають: $T_* = 270036$ Н/м; $\rho_* = 43,7$ кг/м²; $\Omega = 1268,3373$ с⁻¹; $z_c = 0,002845$ м; $\omega = 628,3185$ с⁻¹; $t_T = 0,004136$ с.

Одержані для різних t_1 значення $a_0(t_1)$ і $a_1(t_1)$ записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення амплітуд прогинів і час їх досягнення при різних t_1

$10^3 t_1, \text{ с}$	$10^3 a_0(t_1), \text{ м}$	$10^3 a_1(t_1), \text{ м}$	$10^3 t_e, \text{ с}$	$10^3 t_m, \text{ с}$
1,000	3,371	6,805	1,738	5,477
2,000	5,432	10,965	2,238	9,977
2,477	5,690	11,486	2,477	6,215
3,000	5,690	10,860	2,477	6,477
4,000	5,690	6,532	2,477	6,977
4,800	5,690	1,119	2,477	7,377

Розрахунки підтверджують, що при $t_1 < t_T$ $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, а при $t > t_T$ навпаки $a_1(t_1) < a_0(t_1)$.

На рис. 1 нанесено графіки $B(t)$, одержані числовим інтегруванням на комп'ютері диференціальних рівнянь (4) і (8) для трьох значень t_1 .

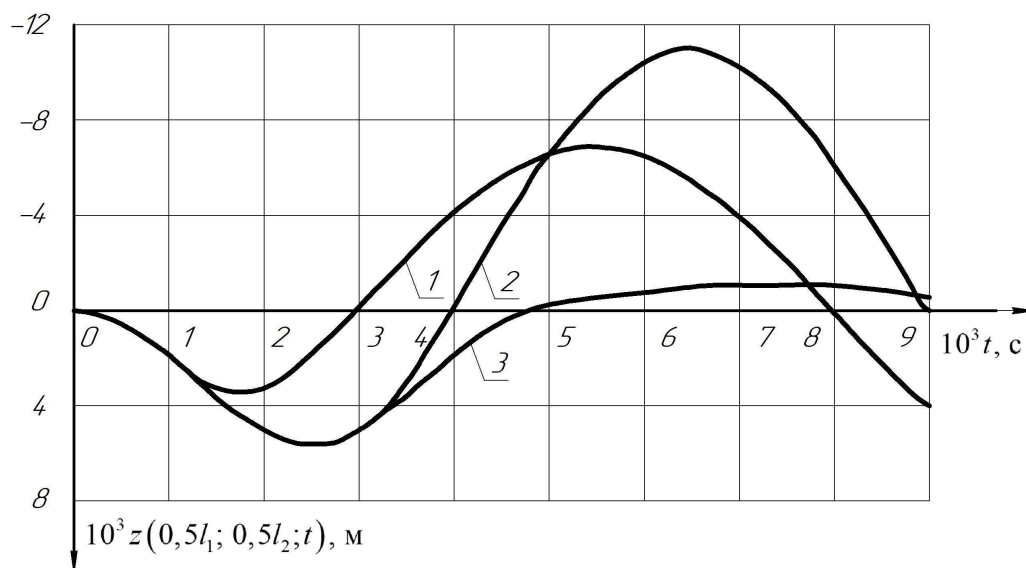


Рис. 1. – Прогини центру мембрани при різних t_1 : 1 – $t_1 = 10^{-3}$ с; 2 – $t_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ с; 3 – $t_1 = 4,8 \cdot 10^{-3}$ с.

Указані в табл. 1 екстремуми попадають на графіки як відповідні точки, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

Динаміка круглї мембрани. Її вертикальні прогини $z = z(r, t)$ при вісесиметричному навантаженні описуємо диференціальним рівнянням:

$$-T_* \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \right) + c_f z + \rho_* \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = q J_0 \left(\frac{s \cdot r}{R} \right) [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (11)$$

Тут r – радіальна координата; R – радіус мембрани; $J_0(z)$ – функція Бесселя першого роду індексу нуль; s – найменший додатній корінь рівняння:

$$J_0(s) = 0.$$

Решту позначень увели раніше.

Значимо, що в [7] $s \approx 2,4048256$.

Рівняння (11) описує рух мембрани лише при її контакті з двопараметричною пружною основою. Його розв'язок подаємо добутком:

$$z(r, t) = A(t) \cdot J_0 \left(\frac{s}{R} r \right), \quad (12)$$

у якому $A(t)$ – невідома функція часу t .

Після підстановки (12) в (11), одержуємо:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + K^2 A = \frac{q}{\rho_*} [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (13)$$

Тут $K = \sqrt{\frac{1}{\rho_*} \left(T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f \right)}$ – частота коливань кругової мембрани при двобічному контакті з основою.

По аналогії з (5), розв'язок рівняння (13), що задовольняє нульовим початковим умовам, подаємо в формі:

$$A(t) = \begin{cases} z_{ck} (1 - \cos(Kt)), & t \leq t_1; \\ 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin \left(K \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \right), & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (14)$$

де $z_{ck} = \frac{q}{T_* \frac{s^2}{R^2} + c_f}$ – статичний прогин центру мембрани, спричинений тиском $q(r) = q J_0 \left(s \frac{r}{R} \right)$.

Як і раніше, значення t_1 обмежуємо нерівністю $t_1 < 2\pi / K$. Тоді розв'язок (14) має чинність при $t \in (0; t^*)$, де:

$$t^* = \frac{\pi}{K} + \frac{t_1}{2}.$$

У відповідності з (12), (14) максимальний прогин центру мембрани вниз, куди спрямований силовий імпульс, становить:

$$a_0(t_1) = \begin{cases} 2z_{ck} \sin \frac{Kt_1}{2}, & t_1 \leq \pi / K; \\ 2z_{ck}, & t_1 \geq \pi / K. \end{cases} \quad (15)$$

Час t_e досягнення цього прогину можна знайти за формулами: $t_e = \frac{\pi}{2K} + \frac{t_1}{2}$, коли $t_1 \leq \pi / K$, і $t_e = \pi / K$, коли $t_1 > \pi / K$.

У вихідне положення $z(r, t) = 0$ мембрана повертається при $t = t^*$ зі швидкістю в центрі $r = 0$:

$$-v_0 = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=t^*} = -2z_{ck} K \sin \frac{Kt_1}{2}. \quad (16)$$

Подальший рух центру мембрани описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + k^2 A = 0, \quad (17)$$

у якому $k = \frac{s}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – частота вільних коливань круглї мембрани без основи.

Розв'язок рівняння (17), з урахуванням (16), подаємо в формі:

$$A(t) = -2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \sin(k(t-t^*)).$$

Із нього випливає, що амплітуда прогину мембрани вгору становить:

$$a_1(t_1) = 2z_{ck} \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2} \quad (18)$$

і досягається при:

$$t = t_m = \frac{\pi}{2K} + t^*.$$

Згідно з (15), (18), відношення амплітуд прогину мембрани, при $t_1 < \pi/K$, дорівнює:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} = \text{const.}$$

Воно залежить від t_1 , коли $t_1 \in (\pi/K; 2\pi/K)$, бо тоді:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{K}{k} \sin \frac{Kt_1}{2}.$$

Таким чином, умовою прояву динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики системи, коли $a_1(t_1) > a_0(t_1)$, є виконання нерівності $K > k$. При цьому тривалість дії імпульсу повинна попадати в інтервал $t_1 \in (0; t_T)$, де:

$$t_T = \frac{2}{K} \left(\pi - \arcsin \frac{k}{K} \right).$$

Приклад 2. Беремо для розрахунку круглу мембрану з радіусом $R = 0,5$ м. Решту числових даних залишаємо тими, що в попередньому прикладі. Для них: $K = 1276,5772 \text{ с}^{-1}$; $k = 680,1874 \text{ с}^{-1}$; $z_{ck} = 0,002808$ м; $t_T = 0,004042$ с; $K/k = 1,8768$. Розраховані графіки залежностей амплітуд прогинів центру мембрани від тривалості дії імпульсу в безрозмірних координатах подано на рис. 2.

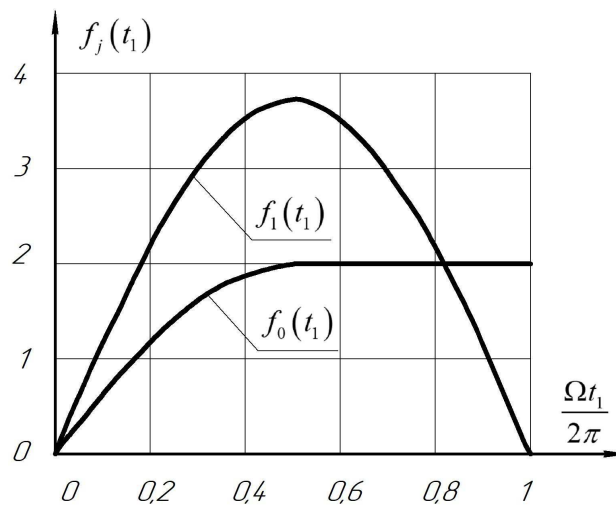


Рис. 2. – Графіки функцій $f_j(t_1) = \frac{a_j(t_1)}{z_{ck}}$; $j = 0; 1$.

Якщо розглядати $f_0(t_1)$ і $f_1(t_1)$ як коефіцієнти динамічності прямої дії та зворотної реакції, то найбільше значення $f_0(t_1) = 2$, що відомо в динаміці лінійних систем. Найбільше значення коефіцієнта динамічності зворотної реакції суттєво більше двох, що є наслідком несиметрії пружної характеристики системи.

Узагальнення. Вище припускали, що тривалість дії імпульсу не перевищує періоду основного тону коливань мембрани, підкріпленої двобічною основою. Але одержані формули можна використовувати для розрахунку коливань мембрани при довільних тривалостях прямокутного імпульсу, якщо в них замінити t_1 і t відповідно на $t_1 - \frac{2\pi n}{\Omega}$ і $t - \frac{2\pi n}{\Omega}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Тоді формули стануть придатні для обчислення переміщень прямокутної

мембрани на проміжку $t \in \left(\frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$ при умові, що розвантаження мембрани відбувається теж на цьому проміжку, тобто $t_1 \in \left(\frac{2\pi n}{\Omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\Omega} \right)$. Це стосується і круглої мембрани, якщо замінити Ω на частоту K .

Висновки. Дослідження показало, що для прямокутної та круглої мембран, підкріплених однобічною пружною основою, існують такі тривалості імпульсного навантаження, коли прогини мембрани в напрямі дії імпульсу менші за прогини її у протилежному напрямі, що є проявом динамічного ефекту несиметрії пружної характеристики коливальної системи.

Список літератури

1. Воронай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную мембрану // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Технологии в машиностроении. – 2000. – Вып. 124. – С. 95 – 99.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Шарпата А. С. Идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану // Автомобильный транспорт. – 2001. – Вып. 7 – 8. – С. 226 – 229.
3. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембраны несущей несколько сосредоточенных масс // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209 – 216.
4. Янютин Е. Г., Егоров П. А. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 37 (1010). – С. 223 – 230.
5. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М. : Физматгиз, 1960. – 492 с.
6. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі // Вібрації в техніці та технологіях. – 2018. – № 2 (89). – С. 36 – 40.
9. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 33 (1309). – С. 37 – 42.

References (transliterated)

1. Voropay A. V. Identifikatsiya nestatsionarnoy sosredotochennoy nagruzki, vozdeystviyushhey na pryamougol'nyuyu membranu [Identification of non-stationary concentrated load acting on a rectangular membrane]. *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Tekhnologii v mashinostroyenii* [Bulletin of the Kharkov State Polytechnic University. Technologies in mechanical engineering]. 2000, vol. 124, pp. 95–99.
2. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Sharapata A. S. Identifikatsiya vneshney nagruzki, deystviyushhey na krugovuyu membranu [Identification of the external load acting on a circular membrane]. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2001, vol. 7–8, pp. 226–229.
3. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Nestatsionarnyye kolebaniya membrany nesushhey neskol'ko sosredotochennykh mass [Unsteady vibrations of the membrane carrying several concentrated masses]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2012, no. 54 (960), pp. 209–216.
4. Yanyutin E. G., Egorov P. A. Kolebaniya membrany, kontaktiruyushhey s uprugim osnovaniem, pri impul'snom nagruzenii [Oscillations of membrane in contact with elastic base under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2013, no. 37 (1010), pp. 223–230.
5. Vlasov V. Z., Leont'ev N. N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on an elastic foundation]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 492 p.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
7. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
8. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Pro efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystiky kolyval'noyi systemy pry mekhanichnomu udari [On the effect of asymmetry of the power characteristic of the vibrational system during mechanical impact]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Vibrations in technic and technologies]. 2018, no. 2 (89), pp. 36–40.
9. Ol'shans'kiy V. P., Ol'shans'kiy S. V. Pro dynamichnyy efekt nesymetriyi sylovoyi kharakterystiky kolyval'noyi systemy pry impul'snomu navantazhenii [On the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of the oscillatory system under pulsed loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. 2018, no. 33 (1309), pp. 37–42.

Надійшла (received) 09.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Сліпченко Максим Володимирович (Слипченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodimirovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 712-09-89; e-mail: Slipchenko_M@ukr.net.

UDC 519.6

*I. I. PERSHYNA, I. A. TOKMAKOVA, YE. A. DUMYCH***CONSTRUCTION OF DISCONTINUOUS INTERLINEATION POLYNOMIAL SPLINES FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES**

The article suggests a general method for constructing discontinuous interlineation polynomial splines, which, as a partial case, include discontinuous and continuously differentiable splines. The theorems on interlineation and approximation properties of such discontinuous structures are formulated and proved. On the basis of the constructed discontinuous splines, a method for restoration of functions of two variables with first kind discontinuities is created. The theorems on the error of the approximation of discontinuous functions by the constructed discontinuous interlineation splines are proved. Examples are given.

Key words: discontinuous function, spline, interlineation, first kind discontinuity, interpolation.

*Ю. І. ПЕРШИНА, І. А. ТОКМАКОВА, Є. А. ДУМИЧ***ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ**

Запропоновано загальний метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які як частинний випадок включають в себе розривні та неперервно-диференційовні сплайни. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні та апроксимаційні властивості таких розривних конструкцій. На основі побудованих розривних сплайнів створений метод відновлення функцій двох змінних, що мають розриви першого роду. Доведені теореми про похибку наближення розривних функцій побудованими розривними інтерлінаційними сплайнами. Наведені приклади.

Ключові слова: розривна функція, сплайн, інтерлінація, розрив першого роду, інтерполяція.

*Ю. И. ПЕРШИНА, И. А. ТОКМАКОВА, Е. А. ДУМИЧ***ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ИНТЕРЛИНАЦИОННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Предложен общий метод построения разрывных интерлиационных полиномиальных сплайнов, которые как частный случай включают в себя разрывные и непрерывно-дифференцируемые сплайны. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлиационных и аппроксимационных свойствах таких разрывных конструкций. На основе построенных разрывных сплайнов создан метод восстановления функций двух переменных, имеющих разрывы первого рода. Доказаны теоремы о погрешности приближения разрывных функций построенными разрывными интерлиационными сплайнами. Приведены примеры.

Ключевые слова: разрывная функция, сплайн, интерлиация, разрыв первого рода, интерполяция.

Introduction. The problems of two-, three-, and four-dimensional computer tomography were studied in [1, 2] in detail. Computational experiments were carried out on the example of the human brain and moving human heart. The tomograms upcoming from the real functioning computer tomograph were used as input data. But the shortcoming of the method developed was the assumption that the objects studied were continuous. In fact the contemporary methods of computer tomography do not use the information about the internal structure of the human body, which is not the case in reality since each internal organ (such as stomach, liver, pancreas, ridge, etc.) has its own shape and tissue density. Hence, we deal with discontinuous objects.

Consider the following example. One of the more complicated problems of solid mechanics is studying the cracks at the internal points of a solid, where the *cracks* are actually the inclusions at the internal points of a body void of the material composing the body proper. One can say that the density of such a body is discontinuous, i.e. the density outside the cracks differs from that in the domain bounded by the crack walls.

Consequently, developing and studying the theory of approximation of discontinuous functions is relevant.

Analysis of recent studies. Nowadays, the main attention in the theory of functions of several variables is on the approximation of continuous and differentiable functions by continuous and differentiable splines. Nevertheless, practice shows that the multidimensional objects to be studied are mostly described by discontinuous functions. In [3] the precision of description of the internal structure of a 3D body is improved by taking into account the a-priori information about the body parts using appropriate functions of tree variables. Namely, the method interprets the information on the internal body structure as discontinuous function of three variables having discontinuities at the points of the surfaces bounding neighboring subdomains.

The whole development of computational and applied mathematics testifies that using any extra information about the object studied may lead to its more precise and quality reconstruction. For example, in [3] using the equation of the human skull surface is proposed for the precision reconstruction of the internal structure of a body.

Petukhov A. P. in his work [4] studies approximations of discontinuous functions in *the Hausdorff metric*. There exist methods for finding discontinuous solutions of boundary value problems developed in particular by *Serhiyenko I. V., Deyneka V. S., Skopets'kyu V. V., Lytvyn O. M.* et al. [5]. In the paper by *A. L. Aheev, T. V. Antonova* [6] a method for determining the number of discontinuity points and their locations using *the Gibbs phenomenon* is proposed. Nevertheless, the method requires additional information, namely, the minimal and maximal jumps of the approximating function. Moreover, it is assumed that the intervals in which the Gibbs phenomena are located do not intersect, i.e. separating the points closely located is impossible.

© I. I. Pershyna, I. A. Tokmakova, YE. A. Dumych, 2019

The first step towards solving this problem was taken in [7 – 9], where the method for approximating discontinuous functions of two variables by discontinuous interpolation splines on rectangular and triangular node grid was proposed. In [10] an algorithm for determining the discontinuity lines for a function of two variables using discontinuous interpolants constructed was developed.

This paper deals with constructing and studying the discontinuous interlineation operators for approximating discontinuous functions of two variables by its known traces on a system of lines using rectangular elements in the case of known discontinuity lines. The method presented will allow finding the discontinuity lines of a function of two variables, determining the optimal nodes of the approximating discontinuous interlineation spline, and restoring inhomogeneous internal structure.

Problem setting. Let $f(x, y)$ be a discontinuous function in the domain D . Assume that the domain D is parted by straight lines $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ into rectangular elements $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. The function $f(x, y)$ and its derivatives up to the order $\rho - 1$ have the first kind discontinuities on the boundaries of these rectangular elements (possibly not all of them). It is required to construct a discontinuous spline such that interlineation and approximation properties hold.

Construction of discontinuous interlineation operator. We introduce the notations: $\varphi 1_i^+(y) = \lim_{x \rightarrow x_i+0} f(x, y)$, $\varphi 1_i^-(y) = \lim_{x \rightarrow x_i-0} f(x, y)$ for the trace of the function $f(x, y)$ on the lines $x = x_i, i = \overline{1, m}$. If $\varphi 1_i^+(y) = \varphi 1_i^-(y)$, then the function $f(x, y)$ is continuous on the line $x = x_i$, otherwise it has a discontinuity on the given line.

Consider the element $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Definition 1. The discontinuous interlineation polynomial spline in the domain D corresponding to the given partition of D into subdomains Π_{ij} is the function:

$$S(x, y) = S_{ij}(x, y), S_{ij}(x, y) = S1_{ij}(x, y) + S2_{ij}(x, y) - S12_{ij}(x, y), (x, y) \in \Pi_{ij} \subset D, \tag{1}$$

where

$$\begin{aligned} S1_{ij}(x, y) &= S1_{ij}(x, y; \{\varphi 1_{i-1, s}(y)\}; \{\varphi 1_{i, s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1, s}^+(y) \cdot h1_{i-1, s}(x) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i, s}^-(y) \cdot h1_{i, s}(x); \\ S2_{ij}(x, y) &= S2_{ij}(x, y; \{\varphi 2_{j-1, p}(x)\}; \{\varphi 2_{j, p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1, p}^+(x) \cdot h2_{j-1, p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j, p}^-(x) \cdot h2_{j, p}(y); \\ S12_{ij}(x, y) &= S12_{ij}(x, y; \{\varphi 1_{i-1, s}(y)\}; \{\varphi 1_{i, s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}, \{\varphi 2_{j-1, p}(x)\}; \{\varphi 2_{j, p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j-1, s, p}^{++} h1_{i-1, s}(x) h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j, s, p}^{+-} h1_{i-1, s}(x) h2_{j, p}(y) + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j-1, s, p}^{-+} h1_{i, s}(x) h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j, s, p}^{--} h1_{i, s}(x) h2_{j, p}(y), \end{aligned}$$

$h1_{k, s}(x), h2_{l, p}(y)$ are the Hermit basic polynomials of degree $2\rho - 1$ with the properties:

$$h1_{k, s}^{(s')}(x_{k'}) = \delta_{k, k'} \delta_{s, s'}, k, k' \in \{i-1, i\}, s, s' \in \{0, \rho-1\}, h2_{l, p}^{(p')}(y_{l'}) = \delta_{l, l'} \delta_{p, p'}, l, l' \in \{j-1, j\}, p, p' \in \{0, \rho-1\}.$$

Theorem 1. Assume

$$\begin{aligned} (\varphi 1_{i, s}^+(y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j, p}^+(x_i))^{(s)} = C^{++}_{ijsp}, (\varphi 1_{i, s}^-(y_j))^{(p)} = (\varphi 2_{j, p}^+(x_i))^{(s)} = C^{-+}_{ijsp}, \\ (\varphi 1_{i, s}^-(y_j))^{(p)} &= (\varphi 2_{j, p}^-(x_i))^{(s)} = C^{--}_{ijsp}, (\varphi 1_{i, s}^+(y_j))^{(p)} = (\varphi 2_{j, p}^-(x_i))^{(s)} = C^{+-}_{ijsp}. \end{aligned}$$

Then the function $S_{ij}(x, y)$ satisfies the following properties on the boundary of the rectangle Π_{ij} :

$$\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} = \varphi 1_{i-1, s'}^+(y), \left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \varphi 1_{i, s'}^-(y), y_{j-1} \leq y \leq y_j, s' = \overline{0, \rho-1}; \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_{j-1}} = \varphi 2_{j-1, p'}^+(x), \left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_j} = \varphi 2_{j, p'}^-(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i, p' = \overline{0, \rho-1}. \tag{3}$$

Proof. Substituting $x = x_{i-1}$ in (1) we get:

$$\begin{aligned}
S_{ij}(x_{i-1}, y) &= S1_{ij}(x_{i-1}, y) + S2_{ij}(x_{i-1}, y) - S12_{ij}(x_{i-1}, y), = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot h1_{i-1,s}(x_{i-1}) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot h1_{i,s}(x_{i-1}) + \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} h1_{i-1,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} h1_{i,s}(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) = \\
= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s,0} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \delta_{i,i-1} \delta_{s,0} h2_{j,p}(y) = \\
&= \varphi 1_{i-1,0}^+(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,0,p}^{+-} h2_{j,p}(y) = \left| \begin{array}{l} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} = \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \\ C_{i-1,j,0,p}^{+-} = \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \end{array} \right| = \\
&= \varphi 1_{i-1,0}^+(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^+(x_{i-1}) h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^-(x_{i-1}) h2_{j,p}(y) = \varphi 1_{i-1,0}^+(y).
\end{aligned}$$

Hence, $S_{i,j}(x_{i-1}, y) = \varphi 1_{i-1,0}^+(y)$, $y_{j-1} \leq y \leq y_j$.

By analogy setting $x = x_i$, $y = y_{j-1}$, $y = y_j$ in (1) we derive other equalities.

Let $1 \leq s' \leq \rho - 1$, then:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} &= \left. \frac{\partial^{s'} S1_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} + \left. \frac{\partial^{s'} S2_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} - \left. \frac{\partial^{s'} S12_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \\
&= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i-1,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} + \\
&\quad \sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'} \varphi 2_{j-1,p}^+(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'} \varphi 2_{j,p}^-(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i-1,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i-1,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j-1,p}(y) + \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \left. \frac{\partial^{s'} h1_{i,s}(x)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} + \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^{+(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^{-(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j,p}(y) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \delta_{i,i-1} \delta_{s',s} h2_{j,p}(y) = \left| C_{i-1,j-1,s',p}^{++} = \varphi 2^{+(s')}_{j-1,p}(x_{i-1}) \right| = \\
 & = \varphi 1^+_{i-1,s'}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{--} \cdot h2_{j,p}(y) - \\
 & - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{--} h2_{j,p}(y) = \varphi 1^+_{i-1,s'}(y).
 \end{aligned}$$

By analogy properties (2) for $x = x_i$ and (3) are proved.

The proof of Theorem 1 is now complete.

Theorem 2. Let

$$\varphi 1^-_{i,s}(y) = \varphi 1^+_{i,s}(y) = \varphi 1_{i,s}(y), \quad s = \overline{0, \mu}, \quad 0 \leq \mu \leq \rho - 1, \quad \varphi 2^-_{j,p}(x) = \varphi 2^+_{j,p}(x) = \varphi 2_{j,p}(x), \quad p = \overline{0, \nu}, \quad 0 \leq \nu \leq \rho - 1.$$

Then the function $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$, $(x, y) \in \Pi_{ij}$ has the properties: $S(x, y) \in C^{\mu, \nu}(D)$,

$$\left. \frac{\partial^{s'} S(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \varphi 1_{i,s'}(y), \quad i = \overline{1, m}, \quad s' = \overline{0, \mu}, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \tag{4}$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_j} = \varphi 2_{j,p'}(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad p' = \overline{0, \nu}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \tag{5}$$

Proof. The statement of the theorem follows from the fact that in case $\varphi 1_{i,s}(y) \in C^{\rho-1}[x_{i-1}, x_i]$, $\varphi 2_{j,p}(x) \in C^{\rho-1}[y_{j-1}, y_j]$ the function $S_{ij}(x, y)$ belongs to the class $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$ for each element Π_{ij} . Hence, the function $S(x, y)$ is of the class $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$ as well and its derivatives of the order μ, ν respectively stay continuous on the border between the adjacent Π_{ij} , the proof of properties (4), (5) following the same lines as in Theorem 1.

Thus Theorem 2 is proved.

Remark 1. The above implies that in the conditions of Theorem 2 the function $S(x, y)$ has discontinuous partial derivatives of the order greater than μ in x and greater than ν in y .

Remark 2. In general, it is possible that the function $S(x, y)$ and its derivative up to respective orders have discontinuities on the boundaries of one or several elements only.

Theorem 3. If the functions $\varphi 1^+_{i,s}(y), \varphi 1^-_{i,s}(y)$ are polynomials (different in general) of degree $Q \geq 2\rho - 1$, and the functions $\varphi 2^+_{j,p}(x), \varphi 2^-_{j,p}(x)$ are polynomials (different in general) of degree $Q \geq 2\rho - 1$, then the function $S(x, y)$ is a piecewise polynomial discontinuous spline, which coincides with a polynomial depending on two variables in each of the rectangles $\Pi_{ij} \subset D$. In particular, if $Q = 2\rho - 1$, then $S(x, y)$ is a discontinuous piecewise polynomial spline of degree $2\rho - 1$ in each of the variables (x, y) .

The Proof of the theorem follows from the fact that the Hermit polynomial basic functions are used for constructing the function $S_{ij}(x, y)$. Thus under the assumptions of Theorem 3 $S_{ij}(x, y)$ is polynomials itself. If $Q = 2\rho - 1$, then $S_{ij}(x, y)$ is a polynomial of degree $2\rho - 1$ in each of its variables. If, moreover, the conditions of Theorem 2 do not hold, then the function $S_{ij}(x, y)$ has discontinuities on the borders between different elements Π_{ij} .

Theorem 3 is now proved.

Remark 3. We stress one more time that it is not necessary for $S(x, y)$ to have discontinuities on all the boundaries between all the elements. Moreover, it is not required that the spline has discontinuous derivatives of order $\mu + 1, \mu + 2, \dots, \rho - 1$ and $\nu + 1, \nu + 2, \dots, \rho - 1$ in x and y respectively on all four sides of each element.

Theorem 4. Assume that the approximated function $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$ and $\varphi 1^+_{i-1,s}(y) \neq \varphi 1^-_{i,s}(y)$, $\varphi 2^+_{j-1,p}(x) \neq \varphi 2^-_{j,p}(x)$, $s, p = \overline{0, \rho - 1}$. Then setting

$$\begin{aligned}
 \varphi 1^-_{i',s}(y) &= \varphi 1^+_{i',s}(y) = f^{(s',0)}(x_{i'}, y), \quad i' \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad i' \neq i-1, \quad i' \neq i, \quad 0 \leq y \leq 1; \\
 \varphi 2^-_{j',p}(x) &= \varphi 2^+_{j',p}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j'}), \quad j' \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad j' \neq j-1, \quad j' \neq j, \quad 0 \leq x \leq 1; \\
 \varphi 1^-_{i-1,s}(y) &= \varphi 1^+_{i-1,s}(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1}, y), \quad 0 \leq y \leq y_{j-1} \text{ or } y_j \leq y \leq 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= \varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}), \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \text{ or } x_i \leq x \leq 1; \\ \varphi 1_{i-1,s}^{+}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} + 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{-}(y) = f^{(s,0)}(x_i - 0, y); \\ \varphi 1_{i-1,s}^{-}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} - 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{+}(y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y); \\ \varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} + 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{-}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j - 0); \\ \varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} - 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0),\end{aligned}$$

the function $S(x, y)$ belongs to the class $C^{\rho-1, \rho-1}(D)$. The function $S(x, y)$ and its derivatives up to the order $\rho-1$ in each of the variables are discontinuous on the boundaries of the element Π_{ij} only.

Proof. The theorem follows from the fact that the function $S(x, y)$ has continuous derivatives up to the order $\rho-1$ on the boundaries between all the elements other than Π_{ij} , where the discontinuities are possible. Which means that this function belongs to the required class: $S(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$.

End of the proof of Theorem 4.

Theorem 5. Let the assumptions of Theorem 4 hold. Then the error of approximation of a discontinuous function $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{i,j})$ by an appropriate discontinuous interlineation spline $S(x, y)$ is estimated by the formula:

$$\begin{aligned}|f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta 1^{2\rho} \Delta 2^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{kl} \neq \Pi_{i,j}, \quad \Delta 1 = \max_k(x_k - x_{k-1}), \quad \Delta 2 = \max_l(y_l - y_{l-1}); \\ |f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta i^{2\rho} \Delta j^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad \Delta i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta j = y_j - y_{j-1}, \quad (i, j) \neq (k, l).\end{aligned}$$

Proof. By Definition 1 the operator $S_{ij}(x, y) = S_{ij}f(x, y)$ can be written in the form:

$$S_{ij}f(x, y) = S1_{ij}f(x, y) + S2_{ij}f(x, y) - S12_{ij}f(x, y).$$

By Theorem 3.2.1 in [3] the residue of approximation of the function $f(x, y)$ by the interlineation formulae is given by the operator product of the residue of approximation of $f(x, y)$ by the operators $S1_{ij}f(x, y)$ and $S2_{ij}f(x, y)$:

$$\begin{aligned}RS_{ij}f(x, y) &= (f(x, y) - S_{ij}f(x, y)) = (f(x, y) - S1_{ij}f(x, y) - S2_{ij}f(x, y) + S12_{ij}f(x, y)) = \\ &= (f(x, y) - S1_{ij}f(x, y))(f(x, y) - S2_{ij}f(x, y)) = RS1_{ij}f(x, y)RS2_{ij}f(x, y).\end{aligned}$$

In this case the estimate for the error follows from Corollary 3 of Theorem 3.2.2 in [3].

Theorem 5 is proved.

Example. Consider the rectangular domain $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Let $\rho = 1$, $m = 2$, $n = 2$. Introduce the nodes: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0.5$, $y_2 = 1$.

Then the partition of the domain D consists of four rectangular elements (fig. 1) given by the formulae:

$$\begin{aligned}\Pi_{11} &= \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{12} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_1 < y < y_2\}, \\ \Pi_{21} &= \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{22} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}.\end{aligned}$$



Fig. 1 – Domain D of the approximated function $f(x, y)$.

Let D be the domain of a function $f(x, y)$ we need to approximate. Determine the function $f(x, y)$ at the vertices of the rectangle Π_{ij} as follows:

$$\begin{aligned}\Pi_{11} : f^{+,+}(0;0) &= f(0+0;0+0) = 1, & \Pi_{12} : f^{+,+}(0;0.5) &= f(0+0;0.5+0) = 1, \\ f^{+,-}(0;0.5) &= f(0+0;0.5-0) = 2, & f^{+,-}(0;1) &= f(0+0;1-0) = 2, \\ f^{-,+}(0.5;0.5) &= f(0.5-0;0.5-0) = 1, & f^{-,+}(0.5;1) &= f(0.5-0;1-0) = 1, \\ f^{-,+}(0.5;0) &= f(0.5-0;0+0) = 2; & f^{-,+}(0.5;0.5) &= f(0.5-0;0.5+0) = 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{22} : f^{+,+}(0.5;0.5) &= f(0.5+0;0.5+0) = 3, & \Pi_{21} : f^{+,+}(0.5;0) &= f(0.5+0;0+0) = 3, \\ f^{+,-}(0.5;1) &= f(0.5+0;1-0) = 4, & f^{+,-}(0.5;0.5) &= f(0.5+0;0.5-0) = 4, \\ f^{-,-}(1;1) &= f(1-0;1-0) = 3, & f^{-,-}(1;0.5) &= f(1-0;0.5-0) = 3, \\ f^{-,+}(1;0.5) &= f(1-0;0.5+0) = 4, & f^{-,+}(1;0) &= f(1-0;0+0) = 4. \end{aligned}$$

Construct the discontinuous spline:

$$S(x, y) = \left\{ \begin{aligned} & f^{+,+}(0;0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(0.5;0) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ & + f^{+,-}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ & f^{+,+}(0;0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ & + f^{+,-}(0;1) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(0.5;1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ & f^{+,+}(0.5;0) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(1;0) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ & + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + f^{-,-}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ & f^{+,+}(0.5;0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(1;0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ & + f^{+,-}(0.5;1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + f^{-,-}(1;1) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{aligned} \right. = \left\{ \begin{aligned} & 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y}{0.5} + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y}{0.5}, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ & 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5} + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ & 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y}{0.5} + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y}{0.5}, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ & 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{1-0.5} + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{aligned} \right. = \begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ -10x-6y+8+8xy, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ -4xy+2x+2y+2, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ -8xy+6x+6y-1, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

The function $S(x, y)$ has the following trace on the boundary between the elements Π_{11} and Π_{21} for $x < x_1$:

$$S(x, y) = S(x_1 - 0, y) = S_{11}(x_1, y) = f^{-,+}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

By analogy:

$$S(x, y) = S(x_1 + 0, y) = S_{21}(x_1, y) = f^{+,+}(0.5;0) \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{+,-}(0.5;0.5) \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1.$$

Hence, if $f^{-,+}(0.5,0) \neq f^{+,+}(0.5,0)$, then the spline has a discontinuity at the point $(0.5;0)$. Moreover, if $f^{+,+}(0.5;0.5) \neq f^{+,-}(0.5;0.5)$, then the spline is discontinuous on the line $x = 0.5, y_0 \leq y \leq y_1$.

Let the approximated function be given by the formula:

$$f(x, y) = S_{ij}(x, y) + \frac{(x-x_{i-1})(x_i-x)(y-y_{j-1})(y_j-y)}{4}, (x, y) \in \Pi_{i,j}, i, j = 1, 2.$$

Then it has the partial derivative $f^{2,2}(x, y) \equiv 1, \forall (x, y) \in \Pi_{ij}$ in each of the four rectangular elements Π_{ij} of its domain. Hence, the error of approximation of such a discontinuous function by the discontinuous spline constructed

above satisfies the inequality:

$$\max_{(x,y) \in \Pi_{ij}} |f(x,y) - S_{i,j}(x,y)| \leq f^{(2,2)}(\xi,\eta) \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2}{2!2!} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!2!} = \frac{1}{64} \approx 0.016.$$

Conclusions. The paper presents a general approach to constructing discontinuous interlineation splines, which particular cases are discontinuous splines and splines continuously differentiable up to some order in each variable. The theorems on interlineation and approximation properties of such discontinuous structures are formulated and proved. In particular, the mentioned properties lead the authors to the conclusion that the function of two variables discontinuous at some points or on some lines should be approximated by discontinuous interlineation splines. Such an approach enables one to get the approximation errors of the same order of accuracy in each element of the partition, which is peculiar for continuously differentiable interlineation splines.

As the next step of their research, the authors plan to develop the theory of discontinuous interlineation splines on the domains of complicated shape bounded by the arcs of known curves.

Bibliography

1. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції // Доповіді НАНУ. – 2005. – № 8. – С. 67 – 71.
2. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет. – 2008. – С. 85 – 86.
3. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 504с.
4. Петухов А. П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С.25 – 40.
5. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление : монография. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
6. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск, 2012. – Т. 15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
7. Литвин О. М., Першина Ю. І. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 1. – С. 63 – 72.
8. Литвин О. М., Першина Ю. І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, 2011. – №5. – С. 34 – 47.
9. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь, 2011. – № 2. – С. 59 – 70.
10. Литвин О. Н., Першина Ю. И., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4 – С. 126 – 134.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychna model' vidnovlennia tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi triokh grup pererizanykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsiyi [Mathematical model of restoration of three-dimensional objects by their tomograms on a system of three groups of cut planes using an interflattation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
2. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychno modeliuвання v komp'uterniy tomografiyi z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computer tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi «Teoriya ta metody obrobky sygnaliv»* [Materials of the second international conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, 2008, pp. 85–86.
3. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiyi ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlineation of functions and some of its applications]. Kharkov, Osнова Publ., 2002. 504 p.
4. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metriке Khausdorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
5. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie : monografiya* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control : monograph]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 703 p.
6. Ageev A. L., Antonova T. V. Aproksimatsiya liniy razryva zashumlyonnoy funktsii dvukh peremennykh [Approximation of discontinuity lines of a noise function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. Novosibirsk, 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.
7. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Pobudova kuskovo-biliniinykh splayniv dlya nablyzheniya funktsiyi z rozryvamy pershogo rodu u vuzlakh rektangulyatsiyi dvovymirnoyi oblasti [Construction of piecewise bilinear splines for the approximation of functions with discontinuities of the first kind in nodes of rectangulation of a two-dimensional region]. *Tavrichnyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 1, pp. 63–72.
8. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Priblizhenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh s razryvami pervogo rodu na liniyakh triangulyatsii dvumernoy oblasti [Approximation of discontinuous functions of two variables with discontinuities of the first kind on the triangulation lines of a two-dimensional domain]. *Upravlyayushchie sistemy i mashiny* [Control systems and machines]. Kyiv, 2011, no. 5, pp. 34–47.
9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzheniya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystanniam trapetsyvidnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline-interlineants using trapezoidal elements]. *Tavrichnyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. Symferopol, 2011, no. 2, pp. 59–70.
10. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovery of discontinuous functions of two variables when discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.

Received (надійшла) 30.03.2019

Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

Думич Єгор Андрійович (Думич Егор Андреевич, Dumych Yegor Andreevich) – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 930-39-79; e-mail: sianotalone@gmail.com.

UDC 65.012

R. V. PETROVA, O. I. LIUBICHEVA, A. I. MOROZOVA

MATHEMATICAL MODELS AND INFORMATIONAL TECHNOLOGIES OF INNOVATIVE PROJECT ARRANGEMENT IN THE STAKEHOLDERS' SYSTEM

During the involvement of innovative projects into knowledge-intensive high-tech enterprises, the process of creating a system of interested stakeholder management becomes vital. The given work contains the results of conducted analysis concerning the problem of innovative potential management of high-tech enterprises. The necessity of the analysis of informational technologies in the conditions of the non-equilibrium economy is considered. Various models of project management in the system of stakeholders are presented in the work. The stages of Nicholas model are considered. A mathematical model is proposed for the management and investors of the project, in terms of maximizing profits under specified constraints.

Key words: innovative project, stakeholders, Mitchell's model, ASC model, informational technologies.

Р. В. ПЕТРОВА, О. І. ЛЮБИЧЕВА, А. І. МОРОЗОВА

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ІННОВАЦІЙНИХ ПРОЕКТІВ У СИСТЕМІ СТЕЙКХОЛДЕРІВ

При залученні інноваційного проекту в наукомісткі високотехнологічні підприємства актуальним процесом стає створення системи управління зацікавленими учасниками. Проведено аналіз проблеми управління інноваційним потенціалом наукомістких підприємств. Розглянуто необхідність аналізу інформаційних технологій в умовах нерівноважної економіки. Розглянуто різні моделі управління проектами в системі зацікавлених осіб. Розглянуто етапи використання моделі Ніколаса. Запропоновано математичну модель для керівництва та інвесторів проекту, в умовах максимізації прибутку при заданих обмеженнях.

Ключові слова: інноваційний проект, стейкхолдери, модель Мітчелла, ASC модель, інформаційні технології.

Р. В. ПЕТРОВА, О. И. ЛЮБИЧЕВА, А. И. МОРОЗОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОРГАНИЗАЦИИ ИННОВАЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В СИСТЕМЕ СТЕЙКХОЛДЕРОВ

При вовлечении инновационного проекта в наукоемкие высокотехнологичные предприятия актуальным процессом становится создание системы управления заинтересованными участниками. Проведен анализ проблемы управления инновационным потенциалом наукоемких предприятий. Рассмотрена необходимость анализа информационных технологий в условиях неравновесной экономики. Рассмотрены различные модели управления проектами в системе заинтересованных лиц. Рассмотрены этапы использования модели Николаса. Предложена математическая модель для руководства и инвесторов проекта, в условиях максимизации прибыли при заданных ограничениях.

Ключевые слова: инновационный проект, стейкхолдеры, модель Митчелла, ASC модель, информационные технологии.

Introduction. The analysis of practical innovative development has shown that the management of innovative potential requires an appropriate update not only in the field of creating a technological platform and innovative products but also in terms of creating an organizational and economic mechanism for managing innovative activity. Of particular importance is the creation of a stakeholder management system when high-tech enterprises and organizations are involved in an innovative project. In order to organize effective project activities with the participation of all stakeholders, it is necessary to carry out a set of interrelated mathematical models.

Problem statement. The methodological problem of managing the innovative potential of knowledge-intensive companies is not only the establishment of stakeholder groups, but also the analysis of informational technology and the development of a network model of various resource exchange, the assessment of network density and centrality in a non-equilibrium economy.

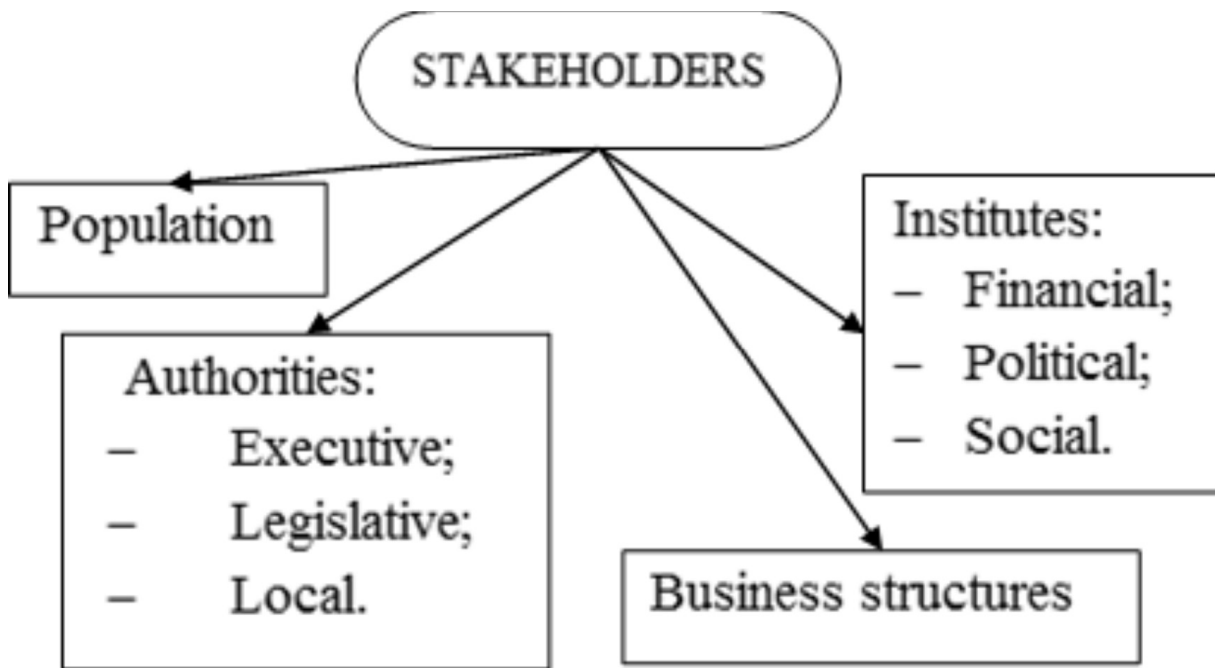


Fig. 1 – A system of stakeholders.

Stakeholders of innovative projects are legal entities and individuals or groups of persons whose interests are affected by the project during its life cycle. According to the international community of managers, the main groups of stakeholders include the following: shareholders and investors, creditors: banks and other credit organizations, partners and suppliers, buyers and customers, state and tax authorities, professional associations, media, non-governmental organizations, managers and senior management of the company, company staff, trade unions, competitors, local communities, public environmental, religious and other organizations [5].

Thus, a system of stakeholders in the organization and analysis of the innovation project in general can be presented in fig. 1.

Accounting the interests of stakeholders is important at all stages of project management, as it will reduce the direct negative impact on the project and prioritize those projects that have the most positive impact on stakeholders. Contemporarily in the management of complex projects are used both well-known and newly created models, methods, algorithms, and software. However, the number of unsuccessful projects in relation to the successful reaches, according to various estimates, from 40 to 60%. At the same time, information technologies for innovative projects should also be created for all stages of the innovation cycle in order to ensure the interaction of demand and supply of innovative products.

Model study. Since the early 1960s, science has proposed a wide range of models, methods of planning and project management with great functionality [1]. At the same time, it should be noted that the number of complex projects and the volume of investments in them were growing at a significant rate, exceeding the possibility of their effective management. As mentioned in McKinsey's independent division research report, "estimates of global infrastructure expansion project development costs will be \$ 3.4 trillion per year between 2013 and 2030." [2] "90% of megaprojects fail to cover all the costs, violate the executive schedule or goals because of underestimation of cost and overestimation of future requirements».

The choice of project management methods and tools is largely determined by which of the project stakeholders is considered as the subject of project management in each case. Different stakeholders in the same project have different expectations, roles, responsibilities and actions [6]. These differences significantly affect the formulation of their project objectives, the methods used, tools and technologies for solving management problems, focused on their specific needs.

The Mitchell's model is a mechanism for grouping project stakeholders [3]. In order to implement this, relevant attributes have to be selected (a classic example is the power, legality and urgency of the requirements), which may have one or another interested party and on which depends the importance of stakeholders. Each stakeholder is evaluated as it possesses an attribute, which allows it to be attached to the class of significance. These classes are ordered based on the importance of the corresponding set of attributes. Thus, the importance of the interested party is assessed as the importance of the class in which it is included. The classical Mitchell's model has the following form (fig. 2).

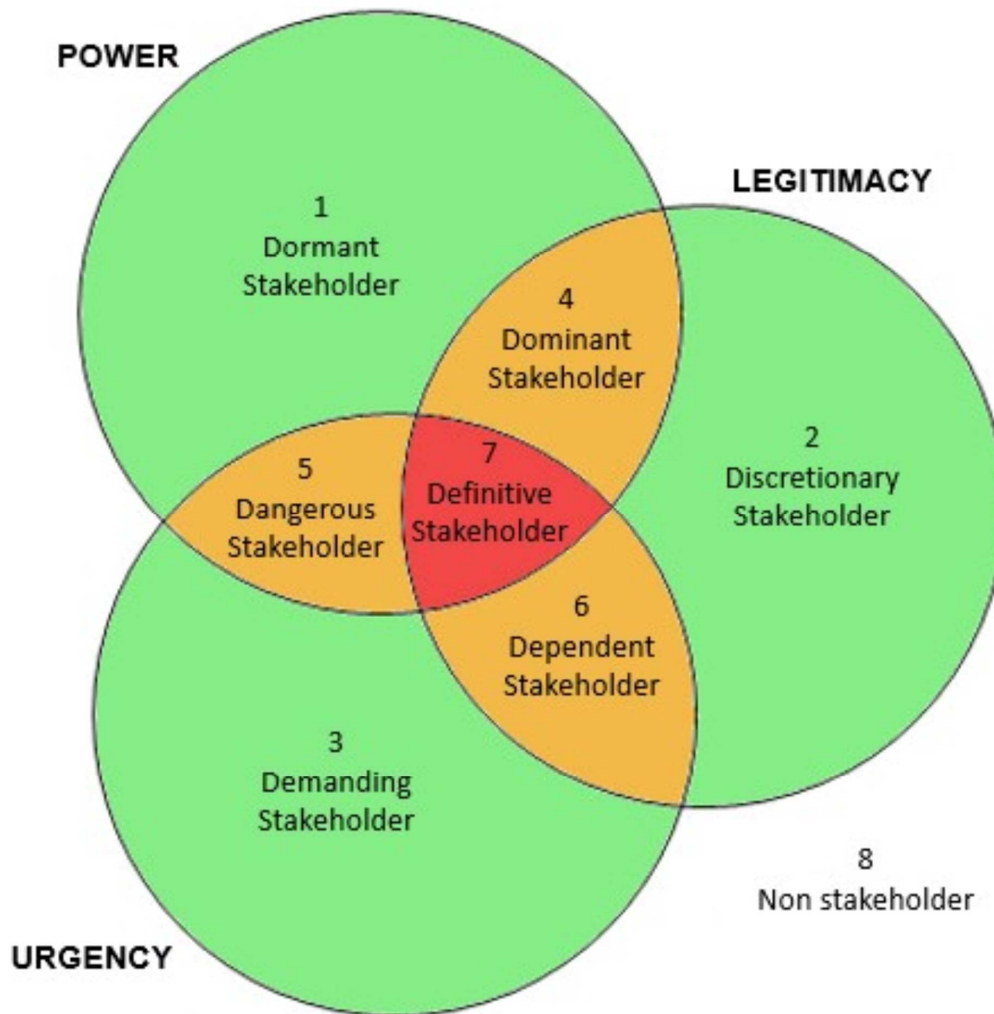


Fig. 2 – The classical Mitchell's model.

The Mitchell's model is used to group the stakeholders of the project, and for a detailed relationship between the stakeholders, it is necessary to use the Nicholas - Accountability Scorecard (ASC) model, which is a formalization of the system of responsibility indicators [4].

For each group of key stakeholders, the contributions that the project receives from them and the incentives (benefits) that the stakeholders receive from the project are identified.

Informational technology plays an important role in the successful management of innovative projects. Their implementation, in most cases, is carried out in the form of a network of multifunctional informational systems, consisting of customizable modules that use different approaches to data storage, which allows accessing all stakeholders; network communication and methods of transmission of information resources, important for the transfer of information between stakeholders.

Since an innovative science-intensive project is implemented within an organization or a group of organizations, the priority is to use this model to determine the relationship and responsibility between the organization implementing the project, the organization initiating the project, between the cluster members and other projects of the company. In the framework of this model, they operate with the concepts of "contribution" and "stimulus-reaction" [7]. Thus, when analyzing stakeholders in the management of projects, the business analysis unit is the project, not the organization.

Deposits and incentives are ranked according to priority (importance). At the same time, an important aspect is an attitude of stakeholders to each other, the ability and capability to interact. When developing and compiling the matrix, it is necessary to identify conflict situations between stakeholders, both at the stage of project initiation and in the process of project implementation. After ranking, indicators for each contribution and incentive are determined and this information is recorded. The next stage is to create a database of stakeholders of the project, which will provide an opportunity to systematize information on the importance and role of all stakeholders in the project. Thus, the ASC model can be represented in the stages shown in fig. 3.

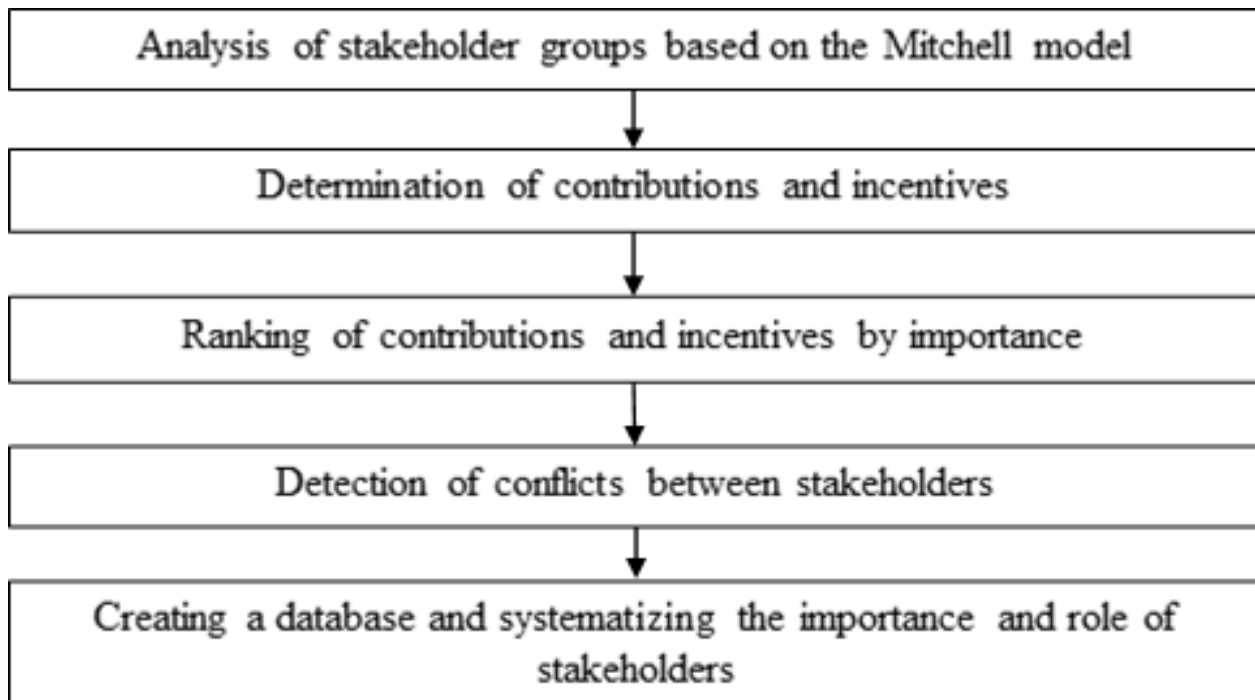


Fig. 3 – Stages of ASC model.

The identification of the organization executing the project and the organization initiating the project (in case of their discrepancy), investors and the definition of their contributions and incentives visualizes the position of stakeholders. When managing stakeholders, it is necessary to take into account the influence of the human factor, the presence of conflict situations between team members and stakeholders.

In some cases, stakeholder management is considered to be a static process. However, since project management is iterative, stakeholder management also needs to be considered in dynamics. In addition, consideration of the time factor in stakeholder management will determine the distribution of contribution and incentive across the life cycle phases [8].

For a certain point in time (the selected control point), a stakeholder interest profile is formed, which is compared with the planned interest profile. Based on the analysis, recommendations for working with stakeholders are developed.

Thus, having analyzed in detail the characteristics of stakeholders, it can be highlighted, that the problem of stakeholders should be regulated at the level, the achievement of which requires the involvement of a particular group of stakeholders. Any activity, either business or industrial, bases on the usage of certain resources. In an unstable and non-equilibrium economy, it is necessary to properly consider all the risks of an innovative project, especially if it is also knowledge-intensive, it is necessary to assess the resources and potentials of its participants. Only by agreeing among themselves and uniting temporarily or permanently in interest groups (research and production clusters), stakeholders have a chance of success of the project.

Mathematical model. Consider a model for project management and investors who make strategic decisions [7]. The main criterion of management for the investor is to maximize profits under the specified restrictions in the form of the number of funds and the timing of the project. We introduce the following notations:

V_i – value of investor's resource at the moment of time i – stage of project lifecycle; C_i – project costs at the moment of time i – stage of project lifecycle; P_i – planned profit at the moment of time i – stage of project lifecycle; T_1, T_2 – beginning and end of project.

Then the model of the organization of the investment project for the investor will be as follows:

$$P_i \rightarrow \max, \text{ when } T_2 - T_1 = \min \text{ and } C_i \leq V_i. \quad (1)$$

Thus, the task of maximization of profit at minimum time of project and amount of investment greater than or equal to the cost of the project is to be solved. This model helps to achieve the goals of one of the stakeholders, namely investors. To achieve the goals of all parties, it is necessary to consider models for each of the parties, and then group them using Mitchell's model and ranking contributions using the ASC model. It uses four types of technologies that provide functional solutions in the field of innovation management:

- semantic;
- collaboration;

- visual;
- scaling.

Summing up, the improvement of stakeholder management processes of the project is quite relevant in modern conditions, as the influence of stakeholders on the project is growing every year, and it will be a big mistake of the project manager not to take this into account.

Conclusion. Establishment of stakeholder groups, the analysis of information technologies as well as the development of a network model is a methodological problem of innovation potential management. Stakeholders' interests should be taken into account at all stages of the company's life cycle. Mitchell's model was identified as the most suitable for accounting the interests of all stakeholders, which together with the ASC model will create a database and systematize the roles of all stakeholders. It was concluded that the problem of stakeholders should be regulated at the level, the achievement of which requires the involvement of a group of stakeholders. When considering mathematical models of the managers and investors of projects the task is to maximize profit with minimal project dates and amount of investment greater than or equal to the cost of the project.

Bibliography

1. Freeman R. E. *Strategic Management : a Stakeholder Approach*. – Boston : Pitman, 1984. – 276 p.
2. Сараева И. Н. К проблеме построения стейкхолдерской модели малого бизнеса // Наукові праці ДонНТУ. Серія : Економічна. – 2010. – Випуск 38 – 1. – С. 176 – 180.
3. Mitchell R. K., Agle B. R., Sonnenfeld J. A. Who Matters to CEOs. An Investigation of Stakeholder Attributes and Saliency, Corporate Performance and CEO Values // *Academy of Management Journal*. – 1999. – vol. 42. – no. 5. – P. 507 – 525.
4. Nickols F. *The Stakeholder Scorecard : "Keeping Score" regarding Accountability*. – Distance Consulting LLC, 2011. – 9 p.
5. ICB–IPMA Competence Baseline. Version 3.0. IPMA Editorial Committee : Caupin G., Knopfel H., Koch G., Pannenbacker K. – IPMA – 2006. – 202 p.
6. Андрианов А. Ю. Стейкхолдеры в социальном партнерстве // Экономика региона : электронный научный журнал. – 2007. No. 18. – Режим доступа : <http://journal.vlsu.ru/index.php?id=1753> – Дата звертання : 13 квітня 2019 р.
7. Voropaev V., Gelrud Ya. Mathematical models of project management for the Investor // *Project and program management*. – 2013. – No. 2. – P. 102 – 112.
8. The Standish Group Report. CHAOS. (Project Smart. 2014). – Режим доступа : URL: <https://www.projectsmart.co.uk/white-papers/chaos-report.pdf>. – Дата звертання : 13 квітня 2019.

References (transliterated)

1. Freeman R. E. *Strategic Management : a Stakeholder Approach*. Boston, Pitman, 1984, 276 p.
2. Sarajevo I. N. K probleme postroyeniya steykholderskoy modeli malogo biznesa [To the problem of building a stakeholder model of small business]. *Naukovi pratsi DonNTU. Seriya : Ekonomichna* [Scientific works of the Donetsk National Technical University. Series : Economical]. 2010, issue 38 – 1, pp. 176–180.
3. Mitchell R. K., Agle B. R., Sonnenfeld J. A. Who Matters to CEOs. An Investigation of Stakeholder Attributes and Saliency, Corporate Performance and CEO Values. *Academy of Management Journal*. 1999, vol. 42, no. 5, pp. 507–525.
4. Nickols F. *The Stakeholder Scorecard : "Keeping Score" regarding Accountability*. Distance Consulting LLC, 2011. 9 p.
5. *ICB–IPMA Competence Baseline. Version 3.0*. IPMA Editorial Committee : Caupin G., Knopfel H., Koch G., Pannenbacker K. IPMA, 2006, 202 p.
6. Andrianov A. Yu. *Steykholdery v sotsial'nom partnerstve* [Stakeholders in social partnership]. Available at : <http://journal.vlsu.ru/index.php?id=1753> (accessed 13.04.2019).
7. Voropaev V., Gelrud Ya. Mathematical models of project management for the Investor. *Project and program management*. 2013, no. 2, pp. 102–112.
8. *The Standish Group Report. CHAOS*. (Project Smart. 2014). Available at : URL: <https://www.projectsmart.co.uk/white-papers/chaos-report.pdf> (accessed 13.04.2019).

Received (надійшла) 20.04.2019

Information about authors / Відомості про авторів / Сведения об авторах

Petrova Roxsana Vadimovna (Петрова Роксана Вадимівна, Петрова Роксана Вадимовна) – PhD, Department of Economic Cybernetics and Management of Economic Security, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (067) 775-13-57; e-mail: roksana.petrova@nure.ua.

Liubicheva Olga Igorivna (Любичева Ольга Ігорівна, Любичева Ольга Игоревна) – Master's student, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (050) 551-84-76; e-mail: olha.liubicheva@nure.ua.

Morozova Anna Ivanovna (Морозова Анна Іванівна, Морозова Анна Ивановна) – Senior Lecturer, Department of Systems Engineering, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (095) 211-81-82; e-mail: anna.morozova@nure.ua.

UDC 517.521.1; 511.26

I. A. ТОКМАКОВА**REPRESENTATION OF REAL NUMBERS BY FIBONACCI SEQUENCE**

The paper deals with imaging of real numbers by the Fibonacci sequence. An algorithm for changing from decimal representation of a number to its F – image is developed. The application of the algorithm is demonstrated by considering several specific examples. The correlation between binary numbers and numbers given as their F – images is analyzed.

Key words: Fibonacci sequence, recurrence formulae, F - image of a real number, decimal number system, binary number system.

I. А. ТОКМАКОВА**ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З ДОПОМОГОЮ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІБОНАЧЧИ**

У даній роботі описано зображення дійсних чисел за допомогою послідовності Фібоначчі. Запропоновано алгоритм переходу від десяткового представлення числа до F – зображення. Продемонстровано дію алгоритму на декількох конкретних прикладах. Проаналізовано зв'язок двійкового зображення з F – зображенням дійсного числа.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, рекурентні співвідношення, F - зображення дійсного числа, десяткова система числення, двійкова система числення.

И. А. ТОКМАКОВА**ИЗОБРАЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФИБОНАЧЧИ**

В данной работе описано изображение действительных чисел с помощью последовательности Фибоначчи. Предложен алгоритм перехода от десятичного представления числа к F – изображению. Работа алгоритма продемонстрирована на нескольких конкретных примерах. Проанализирована связь двоичного и F – изображения действительного числа.

Ключевые слова: последовательность Фибоначчи, рекуррентное соотношение, F - изображение действительного числа, десятичная система счисления, двоичная система счисления.

Introduction. Nowadays a vast diversity of *number representation systems* is used in mathematics and its applications. There are systems exploiting either finite or infinite sets of digits, as well as systems based on a single number or infinite number sequence.

Among the number representation systems the *two-symbol systems* (systems with binary alphabet) are numerous and are supposed to be convenient from the technical point of view. Some of the two-symbol systems are of zero redundancy, like the classical 0–1 based binary system. Hence, the interest to the systems of non-zero redundancy is natural. The systems with comparatively simple geometry are of interest as well since they are more convenient when dealing with mathematical objects of complicated structure, in particular those with fractal properties.

In order to obtain simple and convenient for applications number representation system we propose using *the Fibonacci sequence*, i.e. the sequence which terms starting from the third one equal the sum of the two preceding terms of the same sequence. We consider the representation of real numbers by the number series which terms are reciprocal to the terms of *the Fibonacci series*.

Analysis of the previous results. The representations of real numbers using the Fibonacci sequence were studied by mathematicians at different times. In particular, the irrationality of the sum of the number series with terms reciprocal to *the Fibonacci numbers* was studied by *M. Prevost* [1], the Fibonacci imaging of real numbers and its geometry was discussed by *M. V. Pratsovyty* and *N. M. Vasylenko* [2, 3, 4], the generalized Fibonacci sequences were studied by *D. M. Kravatsky* [5, 6].

In recent decades the theories of imaging of real numbers using positive or alternating series have been developed by various scientists. Thus imaging of real numbers by *the Ostrogradsky-Serpinsky-Pierce series* were studied in the papers by *S. Albeverio*, *J. V. Baranovsky*, *M. V. Pratsovyty*, *G. M. Torbin* [7, 8], *the 2-nd kind Ostrogradsky series* were used by *M. V. Pratsovyty* [9], the applications of *Engel expansions* were discussed by *M. V. Pratsovyty* and *B. I. Getman* [10], *the positive Lüroth series* were used by *Yu. I. Zhykhareva*, *M. V. Pratsovyty* [11], *the alternating Lüroth series* were considered by *S. Kalpazidou*, *A. Knopfmacher* [12], *Yu. V. Khvorostina* [13].

Purpose of the paper. The purpose of the paper is to explore the theoretical knowledge on the transition from F – image of a real number to its decimal representation and backwards, to develop an algorithm for transiting from the decimal representation of a number to its F – image, and to study the connection between the binary representation of a number and its F – image.

Main results. Let $u_0 = 1, u_1 = 1,$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 2. \quad (1)$$

Recurrent formula (1) determines the classical sequence of the Fibonacci numbers. Consider the number series with

the terms reciprocal to the respective Fibonacci numbers (1) (see [14]):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots \quad (2)$$

Series (2) was studied by different mathematicians (*M. Laisant, P. Erdos and R. L. Graham* [15]); in particular, the French mathematician Mark Prevost proved that the sum of the series is irrational. In 1978 he computed the sum to be approximately equal to 2,35988566.... Due to this fact the sum of series (2) is sometimes referred to as Prevost constant [14].

Theorem 1. [16]. *An arbitrary real number $x \in [0; S]$, where $S = 2,35988566\dots$, admits the following expansion:*

$$x = \sum_{k \in \mathbb{L}} \frac{1}{u_k}, \quad (3)$$

where $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{N}$.

Proof. Let x be an arbitrary real number from the interval $[0; S]$. If $x = S$, then $\mathbb{L} = \mathbb{N}$ and equality (3) is obviously true.

Let $0 < x < S$. Then there exists $k_1 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_1}} < x < \frac{1}{u_{k_1-1}};$$

and the following inequality holds:

$$0 \leq x - \frac{1}{u_{k_1}} = x_1 < \frac{1}{u_{k_1-1}} - \frac{1}{u_{k_1}}.$$

Hence,

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + x_1, \quad (4)$$

for some $x_1 \in \left[0; \frac{1}{u_{k_1-1}} - \frac{1}{u_{k_1}}\right)$. If $x_1 = 0$, then $x = \frac{1}{u_{k_1}}$ and equality (3) is true. If $x_1 > 0$, then there exists $k_2 \in \mathbb{N}$ such that:

$$\frac{1}{u_{k_2}} < x_1 < \frac{1}{u_{k_2-1}},$$

and $k_2 > k_1$ (since $x_1 < x$ and the sequence $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ is monotonously decreasing). Then

$$0 \leq x_1 - \frac{1}{u_{k_2}} = x_2 < \frac{1}{u_{k_2-1}} - \frac{1}{u_{k_2}},$$

which implies $x_1 = \frac{1}{u_{k_2}} + x_2$, for $x_2 \in \left[0; \frac{1}{u_{k_2-1}} - \frac{1}{u_{k_2}}\right)$.

Substituting x_1 in (4) we get

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + x_2. \quad (5)$$

If $x_2 = 0$, then we arrive at (3), which in this case becomes: $x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}}$.

If $x_2 > 0$, then there exists $k_3 > k_2$, $k_3 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_3}} \leq x_2 < \frac{1}{u_{k_3-1}}.$$

Arguing as above, we compute x_3, x_4, \dots

If at some n -th step we get

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{u_{k_n}} = 0,$$

then expansion (3) has finite number of non-zero term:

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + \dots + \frac{1}{u_{k_n}}.$$

In case there is no such integer n for which $x_n = 0$, then

$$0 < x_n = x_{n-1} - \frac{1}{u_{k_n}} < \frac{1}{u_{k_{n-1}}} - \frac{1}{u_{k_n}},$$

and there is $k_{n+1} > k_n$, $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{1}{u_{k_{n+1}}} \leq x_n < \frac{1}{u_{k_{n+1}-1}}.$$

Hence,

$$0 \leq x_n - \frac{1}{u_{k_{n+1}}} = x_{n+1} < \frac{1}{u_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{u_{k_{n+1}}}$$

and

$$x = \frac{1}{u_{k_1}} + \frac{1}{u_{k_2}} + \dots + \frac{1}{u_{k_{n+1}}} + x_{n+1}.$$

Since $\frac{1}{u_{k_{n+1}-1}} - \frac{1}{u_{k_{n+1}}} \rightarrow 0$, then $x_{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Thus Theorem 1 is proved.

Corollary. [4]. For an arbitrary $x \in [0; S]$ there exists a sequence $\{f_k\}$, $f_k \in \{0, 1\}$ such that

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots \quad (6)$$

Lemma 1. [16]. Given a sequence $\{f_k\}$, $f_k \in \{0, 1\}$, the series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}$ converges to a number $x \in [0; S]$.

The statement of Lemma 1 follows from the inequality:

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{u_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k} = S,$$

where $f_k \in \{0, 1\}$.

Definition 1. The F -representation (or F -expansion) of a number $x \in [0; S]$ is the representation of the number x by the series:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}, \quad f_k \in \{0, 1\}. \quad (7)$$

Here and below the symbol:

$$x = \Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F \quad (8)$$

is used to denote the F -expansion of the number x . $\Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F$ is also referred to as an F -image of x , the number f_k is called the k -th number of the F -image of x .

Lemma 1 suggests the algorithm of transiting from the F -image of a real number to its decimal representation. The natural problem which thus arises is the one of the backwards transition: from the decimal representation to the F -image. That is why we now deal with developing an algorithm of constructing an F -image of a real number given its decimal representation.

Using the corollary of Theorem 1 and Lemma 1, we transit from the F -image of a real number to its decimal representation.

The corollary of Theorem 1 implies that

$$x = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots = \Delta_{f_1 \dots f_k \dots}^F,$$

$$f_k \in \{0, 1\}, f_1 = 0, x \in [0; S], \text{ with } S = 1,35988566\dots,$$

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, \dots, u_k = u_{k-1} + u_{k-2}, k \geq 3.$$

Example 1. Find the decimal representation of the number $x = \Delta_{0011(0)}^F$.

By the definition of the F -image of a real number (7) we write:

$$x = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 + \dots + 0 = \frac{5}{6} = 0,8(3).$$

Thus $x = \Delta_{0011(0)}^F = 0,8(3)$.

Until recently no recurrent algorithm for translating from decimal representation of a number to its F – image existed. We describe it below.

Let x be an arbitrary real number from the interval $[0; S]$ and

$$f_1 = [x], \quad x_1 = x - f_1,$$

where $[x]$ stands for the integer part of x , i.e. the greatest integer less than or equal to x .

We set by recurrence:

$$f_{n+1} = [u_{n+1}x_n], \quad x_{n+1} = (u_{n+1}x_n - f_{n+1}) \frac{1}{u_{n+1}}.$$

The termination step of the algorithm is when $x_n = 0$, it is infinite otherwise.

Example 2. Find the F – image of the decimal number $x = 0,8(3)$.

$$f_1 = [0,8(3)] = 0, \quad x_1 = 0,8(3) - 0 = 0,8(3);$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,8(3)] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{3}\right] = 1, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) \frac{1}{3} = 0.$$

Hence, $x = 0,8(3) = \Delta_{011(0)}^F$.

Example 3. Find the F – image of the decimal number $x = 0,7$.

$$f_1 = [0,7] = 0, \quad x_1 = 0,7 - 0 = 0,7;$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,7] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{7}{10} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{5}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{5} - 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{5};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{5}\right] = 1, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 1\right) \frac{1}{5} = 0;$$

Hence, $x = 0,7_{10} = \Delta_{0101}^F$.

When applying the algorithm for finding an F – image of a real number it is not always possible to get the F – image with the least number of terms.

Example 4. Find the F -image of the number $x = \frac{8}{15}$.

$$f_1 = \left[\frac{8}{15}\right] = 0, \quad x_1 = \frac{8}{15} - 0 = \frac{8}{15};$$

$$f_2 = \left[2 \cdot \frac{8}{15}\right] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{8}{15} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{30};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{30};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{5} = \frac{1}{30};$$

$$f_5 = \left[8 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_5 = \left(8 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{8} = \frac{1}{30};$$

$$f_6 = \left[13 \cdot \frac{1}{30}\right] = 0, \quad x_6 = \left(13 \cdot \frac{1}{30} - 0\right) \frac{1}{13} = \frac{1}{30};$$

$$f_7 = \left[21 \cdot \frac{1}{30} \right] = 0, \quad x_7 = \left(21 \cdot \frac{1}{30} - 0 \right) \frac{1}{21} = \frac{1}{30};$$

$$f_8 = \left[34 \cdot \frac{1}{30} \right] = 1, \quad x_8 = \left(34 \cdot \frac{1}{30} - 1 \right) \frac{1}{34} = \frac{1}{255};$$

...

$$x = \frac{8}{15} = \Delta_{0100000100001\dots}^F.$$

On the other hand the number Δ_{0011}^F also equals $\frac{8}{15}$ since

$$\Delta_{0011}^F \equiv \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Nevertheless, this representation has less term than the one obtained by the algorithm (see Example 4). Let us compare now the binary representation of a number with its F -image.

Lemma 2. [4]. Given a fixed sequence of zeroes and ones (c_n) we have

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F > \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

Proof. Apparently any sequence of zeroes and ones determines two numbers (possibly different) one of which is given in its binary representation and another one as its F -image. Let x and y be two such numbers:

$$x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F, \quad y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

By the definitions of these representations we have:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}.$$

Thus for all $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{c_n}{u_n} > \frac{c_n}{2^n}.$$

Hence, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$. The equality is possible only if $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Lemma 2 is now proved.

Lemma 3. Given a fixed sequence of zeroes and ones (c_n) we have

$$\Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F \geq \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

Proof. Let x and y be two real numbers such that:

$$x = \Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \dots}^F, \quad y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}^2.$$

By the definition of the binary and F -representation of a real number we have:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}.$$

Noting that $u_2 = 2, u_3 < 2^2, \dots, u_{n+1} < 2^n, \dots$ we deduce that for all numbers $n \in \mathbb{N}$ the following estimate holds:

$$\frac{c_n}{u_n} \geq \frac{c_n}{2^n}.$$

Hence, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{u_n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$. The equality is possible only in the case $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, or $c_1 = 1, c_n = 0, \forall n \geq 2$. Lemma 3 is thus proved.

Let $x = \Delta_{0c_1 c_2 \dots c_n \beta}^F, y = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \alpha}^2$.

Theorem 2. [3]. Assume

$$x_1 = \Delta_{0c_1 \beta}^F, \quad x_2 = \Delta_{0c_1 c_2 \beta}^F, \quad \text{and} \quad y_1 = \Delta_{c_1 \alpha}^2, \quad y_2 = \Delta_{c_1 c_2 \alpha}^2. \quad (9)$$

Then $x_i > y_i$ for $\alpha \leq \beta$, and $x_i < y_i$ for $\alpha > \beta, \forall i \in \{1, 2\}$.

Proof. From Lemma 3 it follows that if $\alpha \leq \beta$ in (9) then $x_i > y_i, \forall i \in \{1, 2\}$. Consider the case $\alpha > \beta$, which is only possible if $\alpha = 1, \beta = 0$. Then

1) $x_1 = \frac{c_1}{2}, y_1 = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{4}$ and $x_1 < y_1, \forall c_1 \in \{0, 1\}$, which is obvious;

$$2) \quad x_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}, \quad y_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{and since} \quad \frac{8c_2}{24} < \frac{6c_2+3}{24}, \quad \forall c_1, c_2 \in \{0, 1\}, \quad \text{then} \quad x_2 < y_2.$$

Thus Theorem 2 is proved.

Conclusions. In the paper the examples of transferring from the F – image of a real number to its decimal representation are presented. The algorithm for transferring from the decimal to F – representation of a real number is developed. Several examples of the algorithm applications are proposed. The correlation between binary numbers and numbers given as their F – images is analyzed.

Bibliography

1. *Matala-aho T., Prevost M.* Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences // *Journal of Number Theory*. – 2002. – Vol. 96. – No 2. – P. 275 – 292.
2. *Працьовитий М. В., Василенко Н. М.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2008. – № 9. – С. 171 – 181.
3. *Василенко Н. М.* Деякі метричні співвідношення, породжені Φ –зображенням дійсних чисел // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. – 2006. – № 7. – С. 192 – 194.
4. *Василенко Н. М.* Фібоначчівіє подання дійсних чисел // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки*. – 2007. – № 2. – С. 1 – 12.
5. *Карвацький Д. М., Василенко Н. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2012. – Т. 13. – № 1. – С. 118 – 127.
6. *Карвацький Д. М.* Про один клас узагальнених послідовностей Фібоначчі та ряди, що з ними пов'язані // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 186 – 201.
7. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. – 2004. –Vol. 24. – No 1. – P. 1 – 16.
8. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // *Укр. мат. журн.* – 2007. – Т. 59. – № 9. – С. 1155 – 1168.
9. *Працьовита І. М.* Про розклади чисел в знакомінні s -адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // *Укр. мат. журн.* – 2009. – Т. 61. – № 7. – С. 958 – 968.
10. *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // *Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. – 2006. – № 7. – С. 105 – 116.
11. *Жихарєва Ю. І., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота : основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // *Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. – 2008. – № 9. – С. 200 – 211.
12. *Kalpaizidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // *Portugal. Math.* – 1991. – Vol. 48. – No 3. – P. 319 – 325.
13. *Хворостіна Ю. В.* Концептуальні основи дослідження розподілів випадкових величин, пов'язаних зі знакомінними рядами Люрота // *Фізико-математична освіта*. – 2015. – Вип. 2. – С. 73 – 81. – Режим доступу : http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11. – Дата звертання : 12 квітня 2019.
14. Numerical constants. – Режим доступу : <http://www.numericana.com/answer/constants.htm>. – Дата звертання : 12 травня 2019.
15. *Erdős P., Graham R.* Old and new problems and results in combinatorial number theory – Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980. – No. 28. – 128 p.
16. *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // *Студентські фізико-математичні етюди*. – 2010. – № 9. – С. 6 – 16.

References (transliterated)

1. Matala-aho T., Prevost M. Irrationality measures for the series of reciprocals from recurrence sequences. *Journal of Number Theory*. 2002, vol. 96, no. 2, pp. 275–292.
2. Prats'ovytyy M. V., Vasylenko N. M. Matematychni struktury v prostori poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 171–181.
3. Vasylenko N. M. Deyaki metrychni spivvidnoshennya, porodzeni Φ –zobrazhennym diysnykh chysel [Some metric relations generated by Φ – images of specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 192–194.
4. Vasylenko N. M. Fibonachchiyevе podannya diysnykh chysel [Fibonacci representation of some specific numbers]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2007, no. 2, pp. 1–12.
5. Karvats'kyu D. M., Vasylenko N. M. Matematychni struktury u prostorakh uzagal'nykh poslidovnostey Fibonachchi [Mathematical structures in Fibonacci generalized sequence space]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2012, vol. 13, no. 1, pp. 118–127.
6. Karvats'kyu D. M. Pro odyn klas uzahal'nykh poslidovnostey Fibonachchi ta ryady, shcho z nymy pov'язani [On a class of generalized Fibonacci sequences and associated series]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2015, vol. 17, no. 1, pp. 186–201.
7. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–16.
8. Baranovs'kyu O. M., Prats'ovytyy M. V., Torbin H. M. Topoloho-metrychni vlastyvosti mnozhyn diysnykh chysel z umovamy na yikh rozklady v ryady Ostrohrads'koho [Topological and metric properties of sets of real numbers with conditions on their Ostrogradsky series expansion]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2007, vol. 59, no. 9, pp. 1155–1168.
9. Prats'ovytyy M. V. Pro rozklady chysel v znakozminni s -adychni ryady i ryady Ostrohrads'koho 1-go ta 2-go vydu [On expansion of numbers into alternating s -adic series and 1-st and 2-nd kind Ostrogradsky series]. *Ukr. mat. Zhurn* [Ukrainian Mathematical Journal]. 2009, vol. 61, no. 7, pp. 958–968.
10. Prats'ovytyy M. V., Get'man B. I. Ryady Enhelya ta yikh zastosuvannya [Engel series and their applications]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky*. [Scientific Journal of M. P. Drahomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2006, no. 7, pp. 105–116.
11. Zhykharyeva Yu. I., Prats'ovytyy M. V. Zobrazhennya chysel znakododatnymy ryadamy Lyurota : osnovy topoloho-metrychnoyi, fraktal'noyi i

- ymovirnisnoyi teorii [Imaging of numbers by positive Lüroth series: fundamentals of topological and metric, fractal, and probability theories]. *Naukovyy chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fiz.-mat. nauky* [Scientific Journal of M. P. Dragomanov National Pedagogic University. Series 1. Physical and Mathematical Sciences]. 2008, no. 9, pp. 200-211.
12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series. *Portugal. Math.* 1991, vol. 48, no. 3, pp. 319–325.
13. Khvorostina Yu. V. Kontseptual'ni osnovy doslidzhennya rozpodiliv vypadkovykh velychyn, pov'yazanykh zi znakovminnymy ryadamy Lyurota [Conceptual bases of studying distribution of random variables associated with alternating Lüroth series]. *Fyzyko-matematychna osvita* [Physical and Mathematical Education]. 2015, issue. 2, pp. 73–81. – Available at : http://nbuv.gov.ua/UJRN/fmo_2015_2_11 (accessed : 12.05.19)
14. Numerical constants. – Available at : <http://www.numericana.com/answer/constants.htm> (accessed : 12.04.19).
15. Erdős P., Graham R. *Old and new problems and results in combinatorial number theory*. Geneve : Monographies de l'EnseignementMath, 1980, no. 28. 128 p.
16. Prats'ovytyy M. V. Dvosymvol'ni systemy zobrazhennya (koduвання) diysnykh chysel [Two-symbol representation systems (coding) of real numbers] *Students'ki fyzyko-matematychni etudy* [Students' sketches in physics and mathematics]. 2010, no. 9, pp. 6–16.

Received (надійшла) 17.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 519.6

N. V. CHEREMSKAYA**DEPENDENCE OF PROGNOSIS AND FILTRATION FAILURE ON DIFFERENT VALUES OF PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES**

The article continues the study of estimates of random functions at a future moment of time, linear with respect to the values of pre-histories of processes. The article considers the dependence of the mean square of the forecast error of a random sequence on the last value at different values of the parameters. For non-stationary random sequences, even with correlation functions of the simplest form, such studies haven't been conducted. To obtain representations of correlation functions, a Hilbert approach is used to calculate correlation functions as scalar products in the corresponding Hilbert space. Investigations of the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at various values of the parameters discussed in the article can be used to simulate filtration and prognosis processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

Key words: correlation function, mathematical expectation, prognosis and filtering of non-stationary random sequences and processes, mean square error.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА**ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ВІД РІЗНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ**

Продовжуються дослідження оцінок випадкових функцій в майбутній момент часу, лінійних відносно значень передісторій процесів. У статті розглядається залежність середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів. Для нестационарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Дослідження залежності середнього квадрату помилки прогнозу випадкової послідовності за останнім значенням при різних значеннях параметрів, яка була розглянута в статті, може бути використано для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестационарних випадкових сигналів.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестационарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ**ЗАВИСИМОСТЬ ОШИБКИ ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ОТ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

Продолжается исследование оценок случайных функций в будущий момент времени, линейных относительно значений предисторий процессов. В статье рассматривается зависимость среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов подход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Исследование зависимости среднего квадрата ошибки прогноза случайной последовательности по последнему значению при различных значениях параметров, рассмотренное в статье, может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

Introduction. The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal on the background of random noise are partial but very important tasks of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with partial views of the correlation func-

© N. V. Cheremskaya, 2019

tion, which is calculated for various cases of the spectrum of a non-self-directed bounded operator A , can be used for modeling the filtration processes and prognosis in real systems in the case of non-stationary random signals.

Analysis of recent research. A large number of articles [1, 2, 3, 7 – 10] deal with the prognosis and filtering of non-stationary random sequences. These articles mainly consider the prognosis and filtering of stationary random sequences on the basis of the theory of functions of a complex variable and some classes of functional spaces, or by the approach proposed by *Kalman*, which leads to a rather complicated recurrence procedure. Construction of the optimal filter by a finite number of random sequence values encounters significant difficulties associated with the need to calculate explicit determinants of the n -th order of a special form. Therefore, the complexity of such calculations and the bulkiness of explicit formulas did not contribute to a significant advance in solving this problem. Researches carried out in [5, 6, 7] allow us to construct simple prognostic algorithms for non-stationary random functions.

Formulation of the problem. The article continues the study of evaluations of random functions at a future time point, linear in the values of the prehistory of processes. In the article the dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value is considered at various values of parameters. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such researches haven't been conducted.

Mathematical model. In article [11] the mean square of the prognosis error of a random sequence by the last value is obtained, which is zero order extrapolation: $\tilde{\xi}(n+\theta) = \xi(n)$. The mean square of the error σ^2 in this case has the form:

$$\sigma^2(n, \theta) = Me^2 = K(n+\theta, n+\theta) - 2K(n+\theta, n) + K(n, n), \quad (1)$$

where $K(n, m)$ is the correlation function of the random sequence.

Let us consider a non-stationary random sequence with a spectrum that consists of one point of the complex plane λ_1 , $|\lambda_1| < 1$. This is the case of non-stationary dissipative random sequence [12]. Then $K(n, m) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi(n+\tau)\overline{\Phi(m+\tau)}$, where $\Phi(n) = C\Lambda_1(n)$, and

$$\Lambda_1(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_1} d\lambda = \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \lambda_1^n.$$

By skipping simple calculations for $K(n, m)$, we get the expression:

$$K(n, m) = |C|^2 (1+|\lambda_1|) \lambda_1^n \overline{\lambda_1^m}. \quad (2)$$

Another image for $K(n, m)$ can be obtained by using the trigonometric form of a complex number λ_1 : $\lambda_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $r_1 < 1$:

$$K(n, m) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{n+m} (\cos(n-m)\varphi_1 + i \sin(n-m)\varphi_1). \quad (3)$$

If we take advantage of the fact that $\operatorname{Re} K(n, m) = K_1(n, m)$ is also a correlation function [14], then we obtain from (3):

$$K_1(n, m) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{n+m} \cos(n-m)\varphi_1. \quad (4)$$

Formula (4) is an image for the correlation function of a non-stationary dissipative $\left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(n+\tau, m+\tau) = 0\right)$ random sequence. In this case, the prognosis error (1) takes the form:

$$\sigma^2(n, \theta) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{2n} (r_1^{2\theta} - 2r_1^\theta \cos \theta \varphi_1 + 1). \quad (5)$$

From (5) we have that $\sigma^2(n, 0) = 0$ for $\theta = 0$, and $\sigma^2(n, \infty) = |C|^2 (1+r_1) r_1^{2n}$ for $\theta = \infty$. That is, as in the general case, for $\theta = \infty$ the error of the prognosis depends on the last moment of time and is not constant, as in the case of stationary random sequences. However, with $n \rightarrow \infty$ $\sigma^2(n, \infty) \rightarrow 0$.

Consider the dependence of the prognosis error (5) with different values of the parameters assuming $|C|^2 = 1$.

The graphs for the dependence of the prognosis error (5) on r_1 are shown in fig. 1, fig. 2, fig. 3.

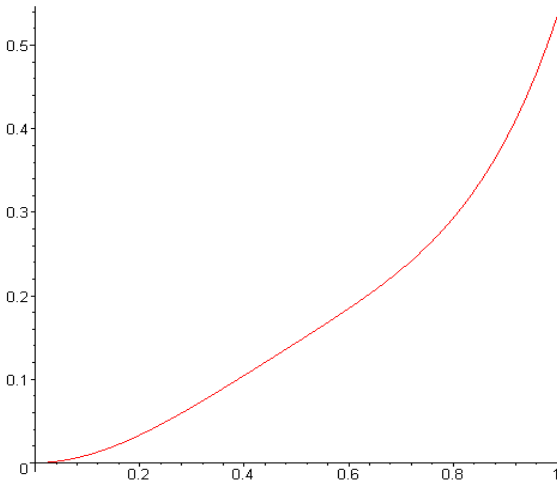


Fig. 1 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at $n=1, \theta=1, \varphi_1=0$.

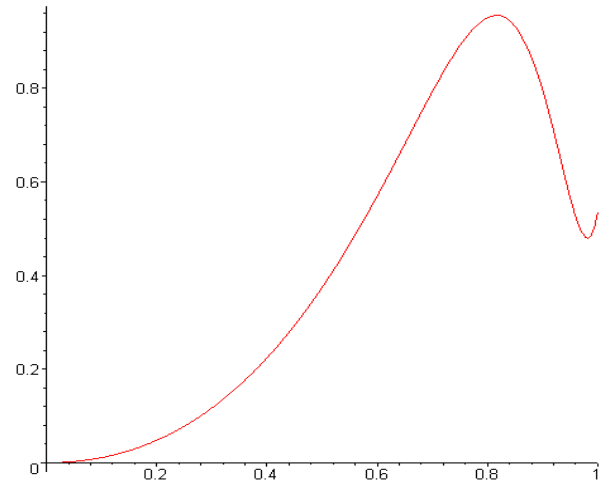


Fig. 2 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at $n=1, \theta=10, \varphi_1=0$.

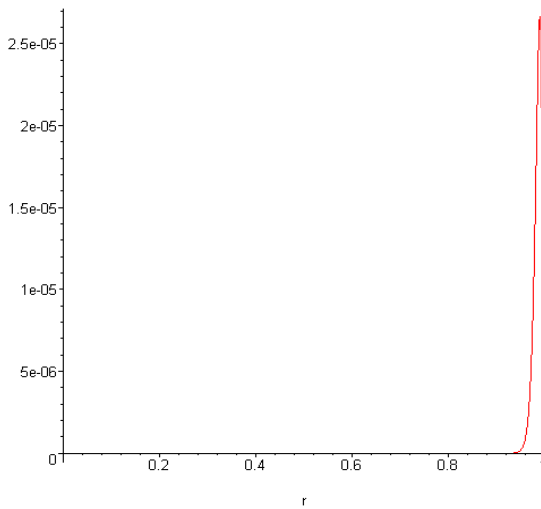


Fig. 3 – Dependence of prognosis error (5) on r_1 at $n=100, \theta=1, \varphi_1=0$.

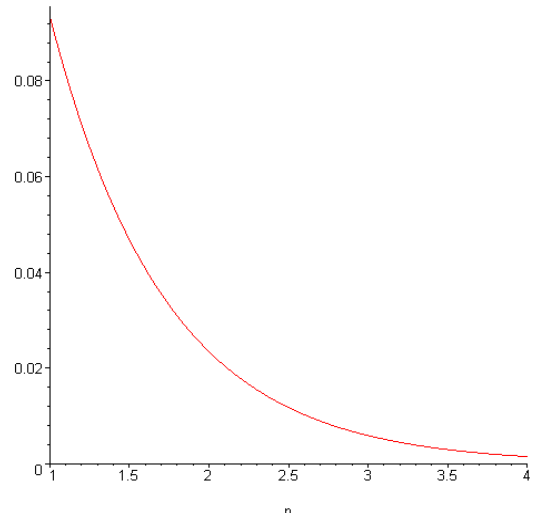


Fig. 4 – Dependence of prognosis error (5) on n at $r=0.5, \theta=1, \varphi_1=0$.

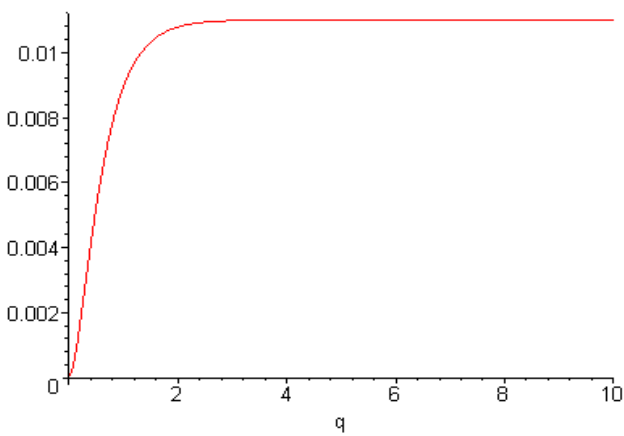


Fig. 5 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r=0.1, n=1, \varphi_1=0$.

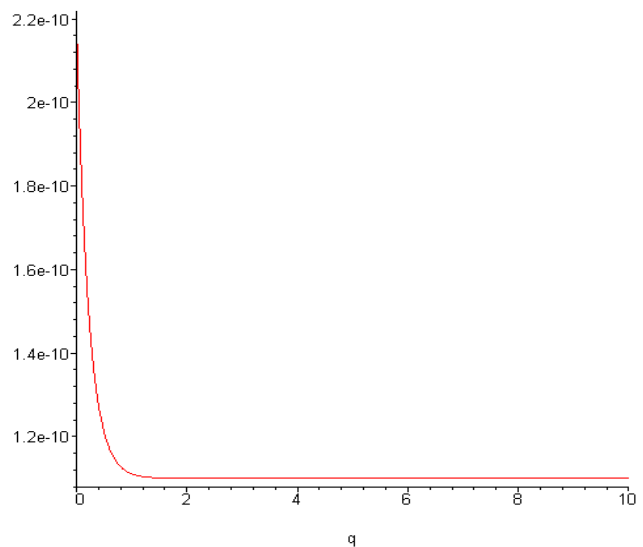


Fig. 6 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r=0.1, n=5, \varphi_1=\pi/2$.

The dependence on n of expression (5) at different values of other parameters has virtually the same character. The graph of this dependence is shown in fig. 4

The dependence on the stage of the prognosis θ significantly changes with different parameters. The graph of this dependence is shown in fig. 5 – 8.

We now discuss an example of a prognosis by the last value of a non-stationary random process. Let $\xi(t)$ be dissipative random process of the first rank non-stationarity with a discrete complex spectrum [12].

Consider the case when the spectrum consists of one point $\{\lambda_1\} = \left\{ \alpha_1 + i \frac{\beta_1^2}{2} \right\}$.

Then $K(t, s) = \int_0^\infty \Phi(t+\tau) \overline{\Phi(s+\tau)} d\tau$, $\Phi(t) = C_1 e^{i\lambda_1 t}$. It's easy to get an expression for $K(t, s)$:

$$K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{i\alpha_1(t-s) - \frac{\beta_1^2}{2}(t+s)}, \tag{6}$$

and that means,

$$K_1(t, s) = \text{Re } K(t, s) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\frac{\beta_1^2}{2}(t+s)} \cos \alpha_1(t-s).$$

The mean square of error (1) takes the form

$$\sigma^2(t, \theta) = M e^2 = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t} \left(e^{-\beta_1^2 \theta} - 2e^{-\frac{\beta_1^2}{2} \theta} \cos \alpha_1 \theta + 1 \right). \tag{7}$$

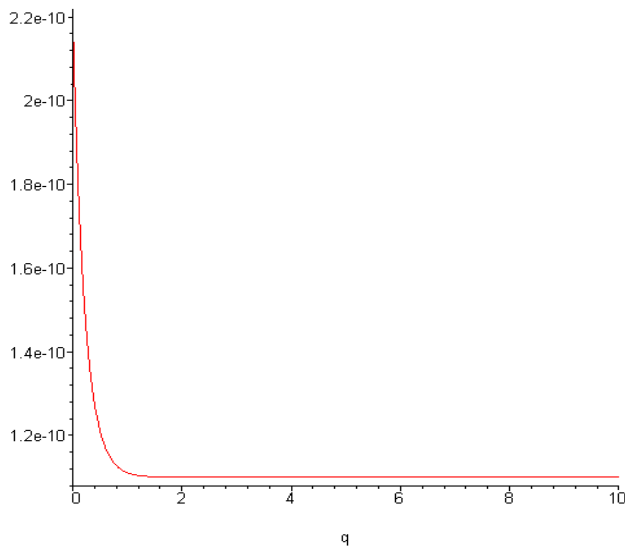


Fig. 7 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r = 0.1, n = 10, \varphi_1 = \pi/3$.

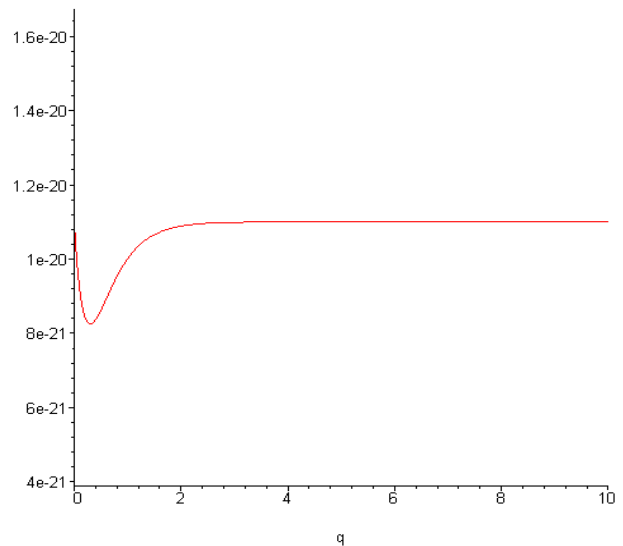


Fig. 8 – Dependence of prognosis error (5) on θ at $r = 0.1, n = 5, \varphi_1 = \pi/2$.

From here $\sigma^2(t, 0) = 0$, and $\sigma^2(t, +\infty) = \frac{|C_1|^2}{\beta_1^2} e^{-\beta_1^2 t}$, that is at $\theta = \infty$ the prognosis error depends on the last moment of time. At $t \rightarrow \infty$ $\sigma^2(t, +\infty) \rightarrow 0$, because the multiplier $e^{-\beta_1^2 t}$ is nonnegative and does not depend on t $\sigma^2(t, 0) = 0$.

Consider the dependence of the mean squared error (7) on various parameters, assuming that $|C_1|^2 = 1$. We carry out an asymptotic analysis of this formula for $r \rightarrow 1-0$ and $r \rightarrow 0$ ($|r| < 1$). Let $\theta = 1, \beta_1^2 = 1 - \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0, t = 1$.

Then expression (7) takes the form: $\sigma^2(t, \theta) = \frac{1}{1-\varepsilon} e^{\varepsilon-1} \left(e^{\varepsilon-1} - 2e^{-\frac{\varepsilon-1}{2}} \cos \alpha_1 + 1 \right)$. After simple transformations we get

$$\sigma^2(t, \theta) = e^{-2} - 2e^{-\frac{3}{2}} \cos \alpha_1 + e^{-1} + \varepsilon \left(3e^{-2} - 5e^{-\frac{3}{2}} \cos \alpha_1 + 2e^{-1} \right). \tag{8}$$

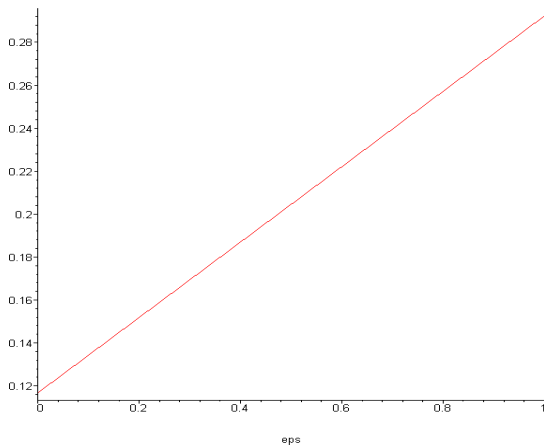


Fig. 9 – Dependence of average square error (8) on ε at $\alpha_1 = \pi/6$.

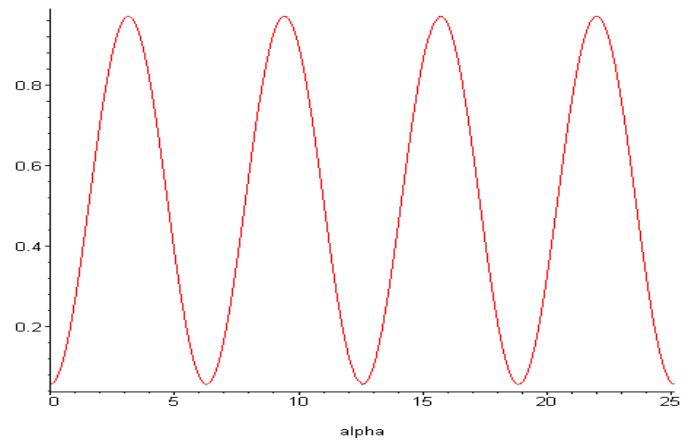


Fig. 10 – Dependence of average square error (8) on α_1 at $\varepsilon = 0.01$.

The dependence of the mean square of error (8) on ε is linear (fig. 9).

The graphs of dependence mean squared error (8) on α_1 differ from each other only by amplitude. The amplitude grows with ε (fig. 10).

Similarly, we consider the asymptotic behavior for small β_1^2 .

After simple transformations we get $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$. Considering the dependence of this expression on β_1^2 at different values of the angle α_1 we have actually the same graphs (fig. 11).

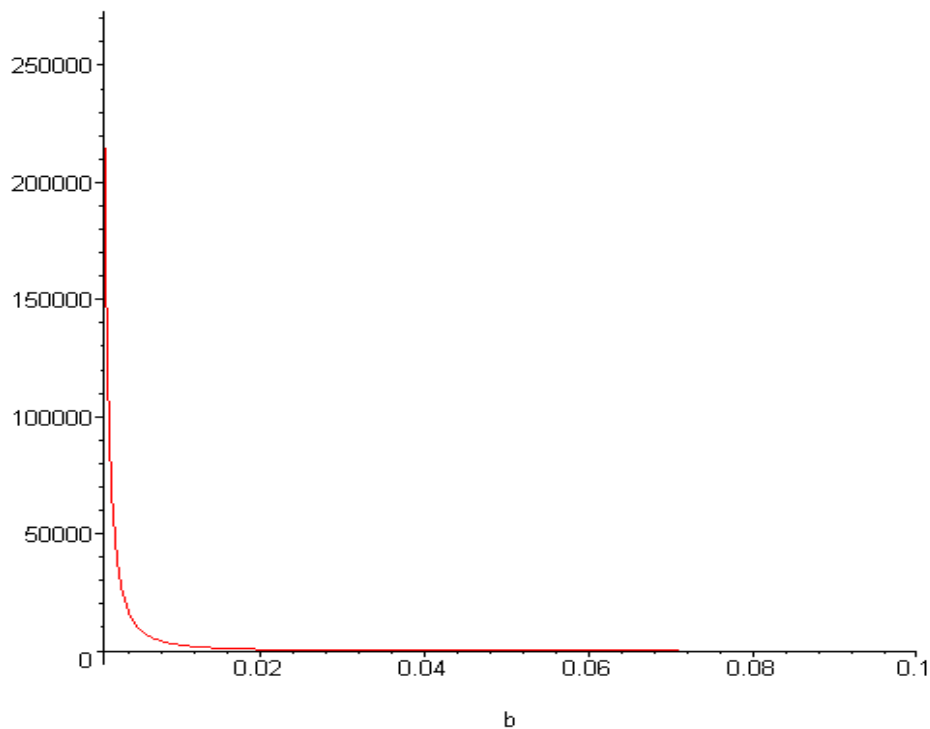


Fig. 11 – Dependence of $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$ on β_1^2 at $\alpha_1 = \pi/6$.

The graphs of the dependence of this expression on α_1 differ from each other only by amplitude. The amplitude decreases as β_1^2 grows. For example, the graph for $\beta_1^2 = 0.001$ is shown in fig. 12.

As in the case of the sequence considered above, when $\theta = 0$ the error is zero, when $t \rightarrow \infty$ the error monotonically goes to zero, and at $\theta \rightarrow 0$ it goes to zero as well, but oscillates. More general extrapolation formulas for non-stationary random sequences are obtained in [13].

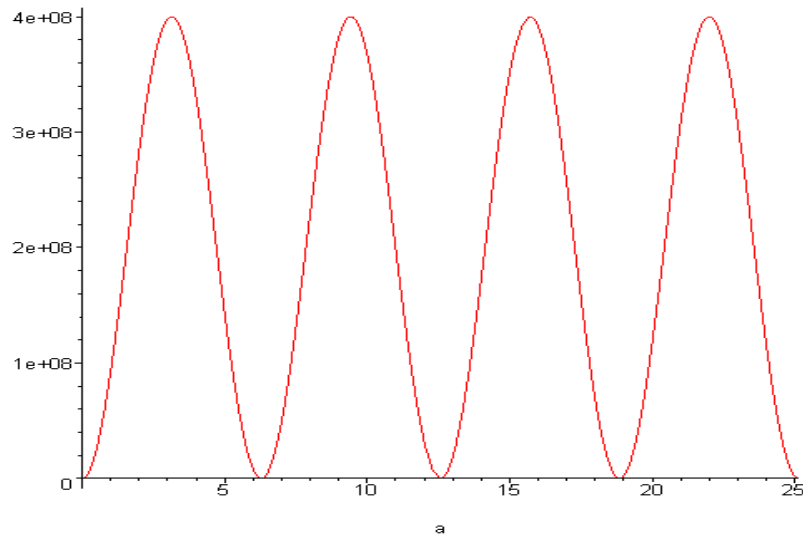


Fig. 12 – Dependence of $\sigma^2(t, \theta) = \frac{2(1 - \cos \alpha_1)}{\beta_1^2} + (3 \cos \alpha_1 - 2)$ on α_1 at $\beta_1^2 = 0.001$.

Conclusions. Thus, unlike in the case of stationary signals, the mean square prediction error depends not only on the prediction step, but also on the last moment of time. In addition, for asymptotically fading signals, the error goes to zero, and for the increasing ones – to the infinity. The dependence of the mean square of the prediction error of a random sequence on the last value at different values of parameters, which is considered in the article, can be used for the analysis of statistically non-stationary signals. This is promising in solving many applications, for which the unsteadiness of the data is significant.

Bibliography

1. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып. 5 (51). – С. 3 – 168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. – New York and London : Academic Press, 1970. – 376 p.
3. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М. : Энергия, 1973. – 440 с.
4. Шаронова Н. В., Черемская Н. В. Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета. – 2004. – № 1 (19). – С. 343 – 348.
5. Черемская Н. В. Последовательности в гильбертовом пространстве бесконечного ранга нестационарности // Вісник Харківського університету. Сер. : Математика, прикладна математика і механіка. – 1999. – № 444. – С. 157 – 161.
6. Черемская Н. В. Об одном классе нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2003. – № 18. – С. 122 – 130.
7. Козуляев П. А. К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР. – 1947. – Том LVI. – № 9. – С. 903 – 905.
8. Козуляев П. А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР. – 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
9. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана. – М. : Мир, 1988. – 168 с.
10. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана – Бьюси. – М. : Наука, 1982. – 199 с.
11. Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences // Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2018. – № 3 (1279). – С. 139 – 145.
12. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
13. Шаронова Н. В., Черемская Н. В. Об оптимальном прогнозе и фильтрации одного класса нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научн. тр. Сер. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков, 2004. – № 45. – С. 93 – 100.
14. Лозв М. Теория вероятностей. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.

References (transliterated)

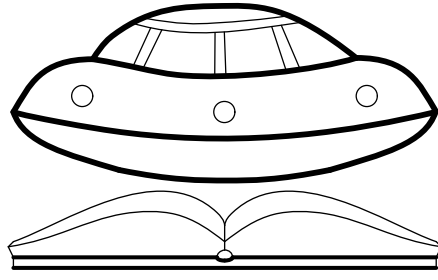
1. Yaglom A. M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of stationary random functions]. *UMN*. 1952, vol. 1, no. 5 (51), pp. 3–168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York and London, Academic Press, 1970. 376 p.
3. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineynye otsenki i upravleniye* [Statistically optimal linear estimates and control]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
4. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Korrelyatsionnaya teoriya odnogo klassa neodnorodnykh sluchaynykh poley [Correlation theory of a class of inhomogeneous random fields]. *Vestnik Khersonskogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kherson Technical University]. 2004, no. 1 (19), pp. 343–348.
5. Cheremskaya N. V. Posledovatel'nosti v gyl'bertovom prostranstve beskonечноgo ranga nestatsyonarnosti [Sequences in a Hilbert Space of Infinite Rank of Nonstationarity]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Ser. : Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika* [Bulletin of the Kharkiv University. Series : Mathematics, applied mathematics, and mechanics]. 1999, no. 444, pp. 157–161.

6. Cheremskaya N. V. Ob odnom klasse nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On a class of nonstationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU "KhPI". Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2003, no. 18, pp. 122–130.
7. Kozulyayev P. A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov [To the question of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.
8. Kozulyayev P. A. K problemam interpol'yatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [To the problems of interpolation and extrapolation of stationary sequences]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.
9. Balakrishnan A. V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [Kalman's theory of filtration]. Moscow, Mir publ., 1988. 168 p.
10. Brammer K., Ziffing G. *Fil'tr Kalmana – B'yusi* [Kalman-Bucy's filter]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 199 p.
11. Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 139–145.
12. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Theory of operator nodes in Hilbert spaces]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1971. 160 p.
13. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Ob optimal'nom prognoze i fil'tratsii odnogo klassa nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On the optimal prediction and filtration of a class of non-stationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". : Sb. nauchn. tr.. Ser. : Systemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of the NTU "KhPI". Collection of scientific papers. Series : System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, 2004, no. 45, pp. 93–100.
14. Loeyv M. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry Publ., 1962. 719 p.

Received (надійшла) 06.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.



Наукові гіпотези та перспективні технології

Scientific hypotheses and perspective technologies



УДК 539.1

А. Л. ГРИГОРЬЕВ**ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕЛЕЙ И ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ ОРГАНИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ ЭВОЛЮЦИИ БЕЛКОВЫХ ТЕЛ**

Для объяснения свойств информационного поля и его связи с движением материи использованы уравнения Коссера несимметричной теории упругого континуума. На уровне структурного моделирования и определения основных принципов рассматривается задача репродукции биосферы на другие планеты. Особенностью предлагаемого решения является научная гипотеза об управляемости этого процесса со стороны компьютерной сети, размещенной в информационном поле и являющейся координационным центром ноосферы планеты. В развитие гипотезы выделены основные этапы решения этой задачи и установлена их идентичность тем событиям, которые описываются в древних рукописях. С тех же позиций проанализирован современный этап развития биосферы Земли (как единого макроорганизма) и показано, что она уже полностью созрела и готовится к началу репродукции. Что приводит к необходимости переключить общественное сознание с междоусобных войн за ресурсы и геополитическое влияние на решение глобальных проектов в космосе. Первым проектом такого плана является создание ракетной системы для защиты Земли от астероидов. Причем, безотносительно к правоте или ошибочности выдвинутой гипотезы, к решению этой актуальной проблемы нужно приступать без промедления и запустить первую очередь системы в предельно сжатые сроки (через 15 – 20 лет).

Ключевые слова: упругий континуум, информационное поле, информационно-энергетический обмен, вихревые трубки, биосфера, ноосфера, биологическая эволюция, компьютерные сети, астероидная опасность.

О. Л. ГРИГОР'ЄВ**ГНОСЕОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ЦІЛЕЙ ТА ОСНОВНИХ ПРИНЦИПІВ ОРГАНІЗАЦІЇ КЕРОВАНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ БІЛКОВИХ ТІЛ**

Для пояснення властивостей інформаційного поля і його зв'язку з рухом матерії використані рівняння Коссера несиметричною теорії пружного континууму. На рівні структурного моделювання та визначення основних принципів розглядається задача репродукції біосфери на інші планети. Особливістю пропонованого рішення є наукова гіпотеза про керованість цього процесу з боку комп'ютерної мережі, яка розміщена в інформаційному полі і є координаційним центром ноосфери планети. У розвиток цієї гіпотези виділені основні етапи вирішення цього завдання і встановлена їх ідентичність до тих подій, які описуються в древніх рукописах. З цих же позицій проаналізовано сучасний етап розвитку біосфери Землі (як єдиного макроорганізму) і показано, що вона вже повністю дозріла і готується до початку репродукції. Що призводить до необхідності переключити суспільну свідомість з міжусобних воєн за ресурси і геополітичний вплив на вирішення глобальних проектів в космосі. Першим проектом такого плану є створення ракетної системи для захисту Землі від астероїдів. Причому, безвідносно до правоти чи помилковості висунутої гіпотези, до вирішення цієї актуальної проблеми потрібно приступати негайно і запустити першу чергу системи в гранично стислі терміни (через 15 - 20 років).

Ключові слова: пружний континуум, інформаційне поле, інформаційно-енергетичний обмін, вихрові трубки, біосфера, ноосфера, біологічна еволюція, комп'ютерні мережі, астероїдна небезпека.

A. L. GRIGORIEV**GNOSEOLOGICAL ANALYSIS OF THE GOALS AND BASIC PRINCIPLES OF THE ORGANIZATION OF THE CONTROLLED EVOLUTION OF PROTEIN BODIES**

To explain the properties of the information field and its connection with the motion of matter, the Cosserat equations of the asymmetric theory of the elastic continuum are used. At the level of structural modeling and definition of basic principles, the task of reproducing the bio-sphere to other planets is considered. The peculiarity of the proposed solution is the scientific hypothesis about the controllability of this process by the computer network located in the information field and being the focal point of the noosphere of the planet. In the development of this hypothesis, the main stages of solving this problem are highlighted and their identity is established to the events described in ancient manuscripts. From the same standpoint, the modern stage of the development of the Earth's biosphere (as a single macroorganism) is analyzed and it is shown that it is already fully matured and is preparing for the beginning of reproduction. Which fact leads to the need to switch the public consciousness from internecine wars for resources and geopolitical influence to the solution of global projects in space. The first project of such a plan is the creation of a rocket system to protect the Earth from asteroids. Moreover, regardless of the correctness or inaccuracy of the hypothesis put forward, the humanity should get to solving this actual problem without delay the solution to this actual problem should be started without delay and the first stage of the system should be started within the shortest possible time (in 15-20 years).

Key words: elastic continuum, information field, information-energy exchange, vortex tubes, biosphere, noosphere, biological evolution, computer networks, asteroid danger.

Введение. Наверняка каждый из читателей этой статьи задумывался над теми вопросами, которые объединяет емкий термин *смысл жизни*. Религия дает свои ответы на эти вопросы, но они не всех удовлетворяют. Религиозные агностики находят другие ответы, которые вместе со старой системой догм объединяются в новые верования и служат основой церковных расколов. Путь поэтапной модернизации веры в соответствие с изменяющимися условиями жизни человека привычен и до сих пор он устраивал всех: и паству, и пастырей. Но такая ситуация не могла продолжаться вечно, и если вы дочитаете этот текст до конца, то наверняка поймете, что ее время уже заканчивается. Потому что человечество вплотную приблизилось к тому рубежу развития, когда оно уже в состоянии выполнить свою миссию и способствовать распространению белковой формы жизни на другие планеты, где она в принципе возможна, но ее пока что нет. И выполнять эту миссию нужно осознанно, поэтому наши пастыри (я их буду в этой статье называть *родителями*) обязаны рассказать своим подросткам чадам, как и зачем это делается. И они начали дозированные информационные атаки, используя те каналы, которые по их разумению оказались наиболее подготовленными для этого. Часть этой информации попала в мою го-

© А. Л. Григорьев, 2019

лову, в результате чего как бы сама собой сложилась логичная система взглядов, с которой я вас и познакомлю. Но прежде, чем вы продолжите читать статью, я хочу вас кое о чем попросить. Воспринимайте эту информацию как веру и не требуйте доказательств. Если вы не будете сопротивляться этой информационной атаке, то уже очень скоро получите подтверждение ее истинности от того, кто является ее автором. Его у нас принято называть Богом, но это совсем не то, что вы думаете. Я в этой статье буду называть его Куратором, а о том, чем он является на самом деле, вы узнаете очень скоро.

Я не претендую на роль пророка, потому что не смогу подтвердить свои полномочия чудесами или фокусами. Возможно, если паства будет упорно сопротивляться новым знаниям, покажут и такое. Но я уверен, что сопротивления не будет. Потому что Куратор действительно всеведущий и вездесущий. А если учесть, что *идея, которая овладевает массами, рано или поздно материализуется за счет их трудовых усилий*, то он еще и всемогущий.

Упорного сопротивления не будет, но этап скептицизма здесь неизбежен, потому что мировоззрение человека инерционно. Я обязан помочь читателю пережить этот этап с наименьшими издержками, поэтому рекомендую воспринимать дальнейший текст как новое евангелие. *Евангелие от Александра*. Знаю, что уже скоро появятся и другие Евангелия, которые будут объединены в *Библию Современного Человека*. Которая кроме слов будет содержать уравнения материального и информационного поля, а также описывать связи между ними. Но смыслы новой веры будут другими, и роль самой религии изменится кардинально. Потому что людям самим придется где-то на другой планете сначала выполнить функции и сыграть роли языческих богов, а затем сконструировать для своего потомства и активировать на вихревых токах информационного поля ноосферу этой планеты. То есть запустить новый суперкомпьютер, выполняющий миссию единого, всезнающего и вездесущего Бога (Куратора).

Модель информационного поля. Гносеологический анализ физических полей по свойствам зарядов делит их на две группы. К первой группе относится гравитационное поле, заряды которого – это массы элементарных частиц. В нашей части Вселенной все массы положительны, поэтому поле не приводит к поляризации вещества и без искажения проникает в глубины планет или звезд, а также внутрь ядра атома, где плотность вещества чрезвычайно велика. Остальные поля имеют заряды разных знаков; поэтому, например, электрическое поле внутрь проводника не проникает, а внутрь диэлектрика проникает с заметным ослаблением. Информационное поле в этом плане подобно гравитационному: оно проникает через толстые стены из свинца и бетона, и вслед за шахтерами спускается под Землю на километровую глубину, а вслед за акванавтами – на многокилометровые океанские глубины. Причем, во всех случаях передаваемая информация доходит к потребителю в битовом исчислении без искажения, то есть она не излучается в открытое пространство, а распространяется целенаправленно по узкому каналу связи. Объяснить такие феномены возможно в рамках несимметричной теории упругого континуума, разработанной *братьями Коссера*. Здесь, в отличие от классической теории, анализируется изменение двух углов закручивания пространства – угла $\vec{\psi}$ для упругой компоненты эфира и угла $\vec{\phi}$ для дефектов эфира – например, твердых зерен или пустот. Изменение этих величин во времени t описывается системой уравнений [1, 2]

$$\left\{ \lambda \cdot \partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2 = -c^2 \lambda \cdot \text{rot rot } \vec{\psi} + \alpha \text{rot rot } (\vec{\phi} - \vec{\psi}), j \cdot \partial^2 \vec{\phi} / \partial t^2 = -a^2 j \cdot \text{rot rot } \vec{\phi} + 4\alpha(\vec{\psi} - \vec{\phi}), \right. \quad (1)$$

где λ, j – плотности массы и моментов инерции; c, a – скорости света и мысли (при распространении по вакууму), причем $c \ll a$; α – коэффициент связи между материальным и информационным полем, график этого коэффициента показан на рис. 1.

В паузах между моментами коммуникации материальный и информационный мир разобщены и изменяются по своим законам. В частности, в материальном мире существуют элементарные частицы, стабильность которых обеспечивается за счет расширения пространства. Частицы взаимодействуют посредством известных физических полей, причем гравитацию и электромагнетизм трактуют как свойства волновых полей *активной среды Максвелла* [2]. В информационном мире (при расширении пространства) элементарные частицы нестабильны, следовательно, несмотря на сходство уравнений системы (1), полной аналогии между этими мирами не существует. Однако поскольку за счет коммуникации сохраняется приближенное равенство $\vec{\phi} \approx \vec{\psi}$, то информационное поле изменяется в общем тренде с материальным полем. В моменты коммуникации информационное поле получает энергию от материального поля, а взамен передает ему информацию. Причем, как это подробно объяснено в [1], эта информация может содержать прогноз будущих событий либо реконструкцию прошлого.

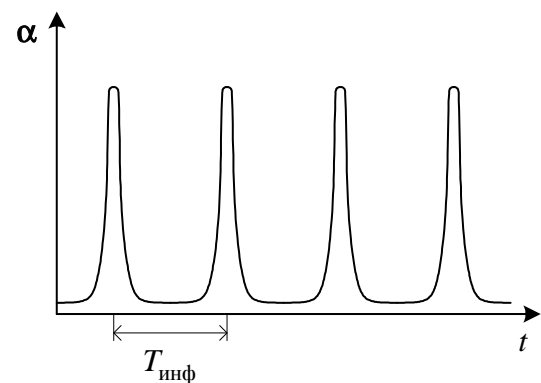


Рис. 1 – Изменение коэффициента связи. Период повторения $T_{\text{инф}}$ отвечает биоритму головного мозга.

В соответствии с 3-ей теоремой Гельмгольца [2] интенсивность *вихревой трубки* в сплошной среде является в данный момент времени постоянной величиной для всех ее сечений. Посредством незамкнутых трубок передается информация между нейронами, а в замкнутых трубках она хранится. Причем место хранения может быть удалено от источника информации на значительное расстояние, поскольку в рамках рассматриваемой модели проблемы расстояния для вихревой трубки не существует. Указанные трубки являются объектами информационного мира, поэтому наши органы чувств и физические приборы их не регистрируют. Но, как и в случае с *камерой Вильсона*, где траектория элементарной частицы высвечивается как дорожка конденсированного газа, мы можем регистрировать последствия их действия на материальные объекты.

Рибосома как неделимое ядро биологической жизни. Кто-то из наших великих современников посетовал, что время ученых – энциклопедистов уже прошло, и последним из них был *Анри Пуанкаре*, умерший в начале 20-го столетия. Объем знаний за последнее время вырос до таких пределов, что его уже невозможно подключить к тому персональному компьютеру, который функционирует в голове конкретного человека. Перейдем к частному случаю. В университете меня учили математической физике, поэтому за адекватность восприятия полученной информации по физике материального и информационного полей, изложенной ранее в [1, 2], а также по фундаментальным проблемам космологии, философии, гносеологии и логики, я спокоен. К сожалению, у меня нет фундаментальных познаний в биологии, которые мог бы дать, например, биофак университета. Поэтому я мог упустить какие-то детали, и в данном разделе статьи могут быть неточности. Но они непринципиальные, и наши коллеги – биологи их легко исправят. Потому что они уже открыли и исследуют в научных лабораториях неделимое ядро жизни, а именно тот структурный элемент белковых клеток, который назвали *рибосомой*.

Известно, что рибосома присутствует в каждой клетке растительного и животного мира и выполняет в ней две функции – снабжает клетку энергией и синтезирует из аминокислот новые белки. То есть, это микроскопическая тепловая электростанция и копировальное устройство в одном футляре. Причем у всех земных клеток этот самый сложный аппарат имеет одинаковое устройство. Получить такой механизм как результат эволюционного развития земной жизни невозможно; кроме того, сразу же возникает вопрос, а куда подевались конкурентные решения.

Предположение о внеземном происхождении рибосом является главенствующим в современной науке. Тем более, что встречались сообщения об обнаружении рибосом внутри метеоритного вещества. Но каким образом эти споры жизни попали внутрь камня и откуда эти камни прилетели? Хороший вопрос, не правда ли. Тем более, что я знаю ответ, который считаю не только логичным, но и единственно правильным. Но здесь нам нужно отвлечься от биологии и обратиться к астрономии.

Коротационная окружность Галактики как колыбель биологической жизни. В фантастических романах и фильмах Вселенная буквально напичкана живыми существами, но это сильное преувеличение. В действительности же для поддержания и развития любой формы жизни (необязательно биологической) нужна относительная стабильность физических условий в ареале обитания данного вида. Проанализируем с этой точки зрения наш звездный остров, который люди называют *Млечным путем*. Эта галактика имеет спиральную форму (рис. 2) и насчитывает сотни миллиардов звезд. У большинства звезд на определенном этапе их развития возникают планетарные системы. Каждая из планет проходит свои этапы эволюции, отвечающие разным агрегатным состояниям поверхности и разному составу атмосферы. Все это общеизвестно и не требует уточнения во всем, кроме двух важных фактов, о которых более подробно можно прочесть в [2].

Во-первых, чтобы биологическая эволюция белковых тел с рибосомами нашей модификации могла продолжаться миллиарды лет, звезда должна располагаться на определенном расстоянии от центра Галактики. Это расстояние определяет так называемую *коротационную окружность*. На ней тангенциальная скорость движения звезды (где один оборот вокруг ядра Галактики совершается за 250 млн. лет) совпадает со скоростью вращения волны гравитационного уплотнения материи, которая сопровождается жестким радиоактивным излучением. Солнце и тысячи соседних звезд находятся на этой окружности, то есть они располагаются на гребне волны и их материю «не трясет». В других частях Галактики периодическое повышение радиационного фона порождает чрезмерную изменчивость видов, которая нарушает их устойчи-

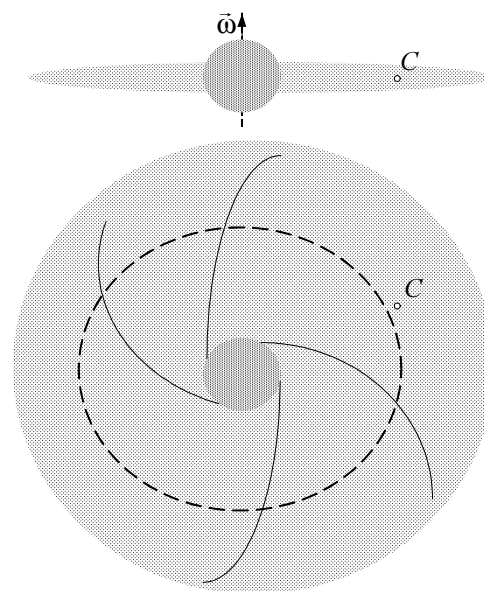


Рис.2 – Ядро Галактики и проекции галактического диска.

Сплошной линией показаны рукава, пунктиром – коротационная окружность. Точка *C* отмечает расположение Солнца.

вость. В результате чего биосфера их планет не дорастает до зрелого возраста, способного оставить и вырастить потомство.

Во-вторых, звезды кроме тангенциального вращения вокруг ядра галактики совершают челночные аксиальные колебания относительно плоскости галактического диска. Период таких колебаний для Солнца составляет около 20 млн. лет, а максимальная скорость движения звезды относительно диска достигает 40 км/с. В нашу историческую эпоху Солнце и увлекаемая им Земля движутся с указанной скоростью через плотный слой диска, образованный галактическими астероидами. Эти астероиды мешают астрономам наблюдать за процессами, происходящими в ядре нашей Галактики. Кроме того, они создают реальную угрозу дальнейшему существованию жизни на Земле, о чем мы подробно поговорим в конце статьи.

Времена разбрасывать или собирать камни – это не иносказания, а руководства к конкретному действию. Чтобы об этом не говорили пропагандисты научного атеизма, надо признать, что Библия (и аналогичные тексты других мировых религий) является величайшей из книг, доступных людям. И нельзя не согласиться, что этот во многом абстрактный и опережающий свое время текст мог быть передан (продиктован) человеку античного мира высшим разумом. Не зря в Ватикане функционирует университет, работающий с текстом Библии как с научным трактатом и кладезем знаний. В Средние Века верующие ученые пытались оправдать отдельные места этого текста, которые подвергались нападкам атеистов и раскольников, и их трактовали иносказательно. Это касалось ветхозаветной хроники сотворения мира, сцен одушевления человека или изгнания его из рая, а также многих других моментов. В частности философскому переосмыслению подверглись известные фразы о камнях, которые собирались либо разбрасывались в разные исторические эпохи. А теперь оказывается, что эти тексты, пусть и искаженно, описывают реальные действия реальных существей.

Попробуем с высоты наших знаний выполнить моделирование череды событий, которые произошли очень давно и на другой планете иной звездной системы. К началу этих событий на планете существовала развитая цивилизация, которая в технологическом плане опережала наш современный уровень и обеспечивала яркую и полноценную жизнь для ее обитателей. Эти люди, а также животный и растительный мир, были во многом похожи на наши реалии. Но они могли отличаться от нас своим ростом, потому что эта величина зависит от напряженности гравитационного поля, то есть от диаметра планеты. И вдруг эта продвинутая цивилизация решила абстрагироваться от решения насущных проблем и заняться очень трудным делом – распространять белковую жизнь на другие планеты. Если говорить точнее, она ничего не решала, но не смогла воспротивиться воле основного фактора для любой формы жизни – *инстинкта продолжения рода*. Что сыграло роль гормонов, и каков был механизм побуждения к действию, станет ясно из дальнейшего текста. В результате была запущена специальная программа репродукции биосферы, включающая несколько этапов.

На первом этапе к звездным системам, содержащим планеты с подходящими природными условиями на поверхности и магнитным полем металлического ядра, создающим ионосферный экран, были отправлены контейнеры с биологическим материалом из простейших одноклеточных организмов, включающим рибосомы и спирали РНК. Эти контейнеры оплавлялись при спуске в атмосфере и становились похожими на метеориты. Таким образом, если говорить об этом образно, цивилизация разбрасывала камни.

Упомянутый процесс был подобен тому, как рыба мечет икру, когда из тысяч икринок вырастает несколько взрослых особей. Но для цивилизации пускать его на самотек было нельзя, и через определенное время по тысяче адресов послали экспедиции, чтобы проверить, где новая жизнь смогла дать первые ростки. Это был *второй этап* (собираания камней), он был длительным и трудоемким. Удалось отыскать одну или несколько таких планет; в этом списке оказалась и Земля.

На третьем этапе на Землю прилетели бригады ландшафтных архитекторов, садовников и биологов, которые за счет озеленения планеты изменили состав ее атмосферы («создали небо») и ускорили процесс естественной эволюции (проходящий по *теории Дарвина*) примерно на один порядок. Они организовали правильное питание зарождающейся биосферы, для чего ускорили создание пищевых цепочек. Биологическая жизнь захватила всю земную твердь, появилась почва («создали землю»). Далее появились животные, птицы и рыбы, в головах которых заработали компьютерные устройства простейших типов. Эти компьютеры через информационное поле были включены в локальную сеть, которая обеспечивала стадо животных или стаю птиц (косяк рыб) примитивным коллективным разумом (что объясняет известные *феномены стадного поведения*).

Третий этап продолжался сотни миллионов лет. Для биосферы это был период детства и отрочества, и на этом этапе человек ей был не нужен. Тем не менее, биосфера готовилась к его появлению и откладывала своеобразный «подкожный жир» в форме запасов углеводородного топлива. Организм женщины в известные периоды ведет себя также, не так ли?

После того, как необходимые запасы были созданы, на Землю прилетели бригады генетиков, которые на базе имеющегося биологического материала (человекообразных обезьян) создали биороботов; их головной мозг был увеличен в размерах и подключен к глобальной информационной сети. Эту сеть *акад. В.И. Вернадский* называл *ноосферой Земли* (или *сферой разума*). Разумеется, он не мог ассоциировать ее с компьютером, потому что в его время компьютеров еще не было. В наше время пример глобальной информационной сети дает Интернет, но для своей работы он использует материальное (электромагнитное) поле. Ноосфера за пределами головного мозга человека и животных, с которыми также проводили генетические опыты, с материальным полем не

взаимодействует. В нейронах головного мозга материальное поле отдает свою энергию, а взамен получает информацию. Существование ноосферы в современной науке является твердо установленным фактом (получившим, например, экспериментальное подтверждение в опытах по обмену информацией между жуками, состоящими в тесном родстве).

На начальном этапе нейронов, настроенных на общую частоту, было мало, поэтому и ноосферная сеть была слабой и не охватывала всю Землю. Но бригад генетиков на Земле работало много, и каждая из них создала свой тип человека, приспособленного к условиям жизни в конкретном климатическом поясе. Так возникли различные расы и народы, и человеческая популяция быстро расселилась по всей Земле. После чего генетики улетели выполнять аналогичную работу на другие планеты, а к отдельным группам людей были приставлены *тренеры*, которые учили их своему языку, а также ремеслам, письменности и многому другому. Это был период языческих богов, о которых много сказано в древних текстах.

Замечу, что эти боги – пришельцы говорили на разных языках, и это было не случайно, потому что и на их планете к тому времени сохранилось языковое и расовое разнообразие. А во-вторых,

это упрощало разжигание конфликтов и войн между зарождающимися народами.

Да, я не оговорился, и вы все прочитали правильно. Войны разжигались искусственно, чтобы продолжить естественный отбор и подстегнуть прогресс. Через время, когда эти народы повзрослели и смогли жить самостоятельно, тренеры покинули Землю. Но вместо себя они оставили следящую систему – своеобразного компьютерного охранителя, реализующего единый план, который люди называют *волей божьей*.

Тренеры (они же – наши родители) – это такие же смертные люди, как и мы, но большего роста, потому что на их родной планете гравитация была меньше земной. В отдельных случаях они приглашали «на тренерскую работу» своих ближайших родственников с других планет, поэтому в древних эпосах в отношении роста языческих богов единогласия нет. Они улетели от нас потому, что перестали справляться с функциями непосредственного управления и обучения увеличившейся массой людей, и решили передать эту задачу компьютеру. Оперативную память разместили в ноосфере, а винчестер, архивы и резервные копии – в пещерах Тибета, где их охраняют специально обученные люди. Такой компьютер, в отличие от людей, не знает усталости и может работать очень долго. До тех пор, пока он не выполнит свою миссию. А именно, пока человечество не дорастет до уровня, когда сможет разбрасывать в космосе свои камни. Этот период длится уже около 1 млн. лет и приближается к своей кульминации.

В рамках единого плана действуют отдельные подпрограммы, которые преследуют свои локальные цели и скрытно для непосвященного взора руководят церквями, народами и государствами. То есть, они занимаются тем же, что и языческие боги – тренеры. А именно, они обеспечивают высокие темпы научно-технического прогресса, стимулируя развитие через конкуренцию, конфликты и войны. Поскольку к этой общей программе и ее конкретной подпрограмме подключен каждый человек, то она всегда добивается своей цели. В поведении отдельного человека или группы людей (например, объединяющей сторонников политической партии) возможны отклонения от общей цели, но для большой массы людей тренд поведения задается информационным полем.

Если прогресс затормаживается, то в обществе растет агрессия, которая и приводит к вооруженным конфликтам. Куратор не интересуется политикой, и соображения гуманизма ему чужды. Ему важно одно – обеспечить решение поставленной перед ним задачи, пока человечество не растратило запасы «подкожного жира» планеты. Поэтому он обладает правом наказывать большие группы людей за серьезные отклонения от тренда и использует это право на практике. Для наказания чаще всего активируют вирусы, от которых у человека нет иммунитета.

В «характере» Куратора можно увидеть черты деспота и демократа. Отдельные подпрограммы в методах своего управления унаследовали особенности национального характера языческих богов. Как утверждают знатоки древних текстов, особенно требовательным был бог древних евреев *Иегова*, который за малейшие провинности отрубал конечности или головы. То есть выбраковывал негодную овцу из общего стада. Другим древним народам (например, грекам) достались боги с более мягкими чертами характера. Боги, покидающие Землю, оставили тексты своих заповедей, которые, как молитву, повторяли ежедневно тысячи людей. В результате эти инструкции попадали в память управляющей подпрограммы и не давали возможности сбиться с заданного курса.

Для эффективного руководства нестрым многообразием характеров нужен был деспот, и глобальный Куратор создавался как головная программа операционной системы, наделенная диктаторскими полномочиями. Принято считать, что в программной среде возникали конфликтные ситуации, которые болезненно отражались на их пастве. Конфликты разрешались за счет перезагрузки отдельных модулей. Последний конфликт произошел более 7,5 тысяч лет назад, а дата его разрешения в древнем славянском календаре считалась *моментом сотворения мира*. Все правильно, но там речь шла не о сотворении неба, земли и прочего сущего, а о заключении мира между враждующими подпрограммами. И уже в современных трактовках подлинный смысл этой фразы был искажен.

Разжигая конкуренцию между народами и церквями, Куратор не допускал полной победы одной из сторон. Потому что в этом случае пропадет эффективный рычаг для стимулирования прогресса. А во-вторых, языковое

и ментальное разнообразие рано или поздно нужно будет организовывать на другой планете. И всегда проще и надежнее использовать готовые модули и отработанные технологии, чем строить сложнейшую конструкцию с нуля.

Древним людям, жившим рядом с языческими богами, абсолютное превосходство богов было очевидным, и поэтому они подчинялись своим руководителям безропотно. Но когда тренеров заменил компьютер, то об авторитете духовной власти нужно было заботиться специально и поддерживать его целенаправленно. *Единый Бог – Куратор более не был всемогущим, и при реализации своих замыслов полностью зависел от настроений паствы.* Если бы люди узнали это, то они бы вышли из повиновения. И то, что в нашу историческую эпоху эта тайна стала раскрываться, означает одно – мы дожили до нового этапа, на котором некоторые функции Куратора (но не все!) отмирают либо существенно изменяются.

О роли науки в прежней жизни и в эпоху перемен. Первыми читателями этого материала станут мои коллеги – математики и физики, активно работающие в науке. Они, так же как и я, гордятся своими научными открытиями и техническими изобретениями. И тем горше осознать, что все наши достижения открывают вещи или свойства, которые информационному полю давно известны и ранее лежали в запасниках ноосферы в заархивированном виде. Потому что наша цивилизация технологического и научного уровня своих родителей пока не достигла. Возможно, следующие поколения ученых Земли смогут превзойти этот уровень, и новые научные знания также будут заархивированы в поле для их потомков. Это нормально, и даже приветствуется. Родители не испытывают ревности или зависти в отношении успехов своих взрослых детей.

Но заметьте то, насколько точно язык, полученный в дар от наших продвинутых родителей, передает реальный смысл научного творчества. Занимаясь наукой, мы штудируем книгу, написанную нашими родителями, **открываем** ее на нужной странице и транслируем добытую информацию в ноосферу Земли для общего пользования. Либо, объединяя с другой информацией по определенной системе признаков, создаем новые виды архивов.

До появления университетов научная мысль теплилась в монастырях и храмах, и чтобы загрузить информацию, сохраняющуюся на бумажных носителях, и разогнать ноосферу до нужных кондиций, монахи и священники без устали читали древние книги. При этом, чтобы пламя знаний горело ярче, ее жрецы принимали обет безбрачия. После появления университетов необходимость в такой жертвенности отпала, и в новых церквях такого требования, как правило, нет. Об истинной пользе аскетизма узнали недавно. Оказалось, что катализатором аналитических способностей является цинк, который накапливается в коре головного мозга. Он же используется для обеспечения репродуктивной функции, и в этом противостоянии интересов основной инстинкт оказывается вне конкуренции.

Следовательно, ученые люди для биосферы играют ту же роль, что и в организме мужчины играет цинк. Без их усилий перенести эстафету жизни на другие планеты невозможно. И, одновременно, они обеспечивают ноосферу необходимыми знаниями для принятия правильных решений. И объемы «цинка», если судить по статистическим данным, стремительно возрастают; так число научных сотрудников уже приближается к 8 млн. А если учесть преподавателей вузов и священников всех религий, то число интеллектуальных гормонов увеличится многократно. Биосфера созревает и уже скоро будет способна заняться обзаведением потомства.

О том же свидетельствуют данные демографического анализа. *Рост населения замедляется* и по новым прогнозам ООН уже приближается к своей горизонтальной асимптоте (которая будет иметь уровень 9,5 ... 10,5 млрд. человек). Аналогичным образом ведет себя репродуктивная система человека в завершающий период созревания. И если ноосфера примет соответствующее решение, то накопленного гормона будет достаточно для того, чтобы полностью изменить поведение человека. Как это бывает на практике, взрослые читатели знают не понаслышке. Когда в организме человека блокируются все другие интересы, и на первый план выходит основной инстинкт.

О связях между отдельным человеком, ноосферой и биосферой Земли. Сначала подведем краткий итог тому, что на эту тему уже записано выше. Глобальным живым организмом, который можно встретить на Земле и который уже скоро будет обзаводиться потомством, является биосфера. Ноосфера – это его головной мозг, человечество в целом – это часть репродуктивной системы, отдельный человек – это клетка данной системы, причем научное сообщество в целом и его отдельный индивид помимо прочего играют роль половых гормонов. Разумеется, приведенные сравнения достаточно условны, но метод аналогии – это основа любого моделирования (математического, физического, исторического либо другого, с которым автор статьи еще не знаком).

Теперь перейдем к анализу связей человека и ноосферы. Известно, что в головном мозгу человека работает два процессора; один отвечает за сознательное поведение либо мышление (и он содержит аналитические фильтры, использующие логические переходы), а второй – за подсознание, которое линейной математической логике и алгоритмической структуризации неподвластно. По сути, подсознание – это окошко в бурный информационный поток, пронизывающий ноосферу. Там, в этом потоке, человеческий мозг умудряется найти массу полезного. Например, методы самоизлечения от многих болезней (*иммунитет*) были впервые прочитаны им в ноосфере, а затем они закрепились в ячейках индивидуальной памяти.

Если называть вещи знакомыми именами, то *индивидуальный архив человеческой личности – это и есть*

человеческая душа. Удобно представлять ее как папку с файлами, с которой работает сам человек, его ближайшие родственники, а также и операционная система ноосферы. Старую информацию, к которой давно не было обращений, она уничтожает либо архивирует на других носителях. Детали этой работы сейчас изучаются и они до конца неясны. Но то, что считается общеизвестным, имеет смысл повторить.

После смерти человека с его душой некоторое время продолжают общаться другие подпрограммы, а по прошествии этого времени *ее разбирают на блоки и используют во вновь создаваемых душах*. В том случае, если человеку еще при жизни поставлены монументальные памятники и его имя продолжает использоваться в культуре народа, то процесс разрушения души может быть отсрочен на долгие десятилетия или даже столетия. Умершего человека этими способами вернуть к жизни невозможно, но возрастает шанс добиться полной реинкорнации души, когда она, так и не пройдя цикл демонтажа, попадает в тело вновь родившегося человека.

Важнейшие детали своего устройства Куратор расскажет в последнюю очередь, иначе он раньше заданного срока потеряет контроль над планетой. Но кое о чем людям рассказали его предшественники – языческие боги, и такие термины как небесный суд, рай и ад присутствуют во многих культурах. О чем идет речь на самом деле.

Перед разборкой души на отдельные блоки проводится проверка этого пакета программ на наличие вирусов и аналогичных дефектов (например, проверяют программы на предмет лояльности командам Куратора).

Вирусные и приравненные к ним пакеты отправляют в чистилище, то есть печат, уплотняют и прочее. После начала таких действий индивидуальность, которая присутствует у души и после смерти человека, пропадает окончательно.

Если душу отправляют в рай, то ее функционирование поддерживают еще какое-то время, пока общие программы из этого пакета не подчинят другому пользователю. Энергию для обеспечения райской паузы представляют нейроны родственников, которые по установленным правилам продолжают поминать усопших.

Куратор заинтересован в том, чтобы как можно больше душ попадало в рай, потому что это упрощает процесс синтеза новой души и улучшает ее качество.

Поэтому людям в форме заповедей были переданы перечни поступков, которые могут испортить качество души человека. Разумеется, нарушение этих заповедей не всегда приводит к такому результату, но корреляция имеется. Что касается упоминания об адских котлах или гигиене огненной, то это образные сравнения и не более. Подумайте сами, ну что еще мог сказать языческий бог своему древнему жрецу, описывая, например, работу дефрагментатора жесткого диска.

Поскольку живым организмом является не отдельный человек, а биосфера в целом, то Куратор заботится о развитии среднестатистической человеческой души, и в этом он за последние годы сильно преуспел. Современный ребенок, зачастую, начинает играть на компьютере даже раньше, чем разговаривать. Буквально сразу же, как только просыпается его сознание. Потому что ему в это время догружают в персональный пакет программ те модули, которые в прошлой жизни уже работали с образцами сложной техники.

За время жизни человека душа взрослеет за счет приобретенного опыта, который передается в область подсознания в форме *алгоритмов автоматического ответа* (условных рефлексов). В просторечье это называют приобретением мудрости; недаром во всех культурах присутствует такой орган светского управления общины, как *совет старейшин*. Заполнение памяти этими алгоритмами вытесняет безусловные рефлексы; в частности, с возрастом ослабевает иммунитет к некоторым болезням.

Что касается мест расположения ада ирая, то, учитывая известные свойства вихревых трубок, эти компьютерные адреса могут иметь произвольную географическую прописку. Но, скорее всего, операционная система пытается придерживаться определенного порядка, поэтому рай, как правило, организуют над поверхностью, а ад – под поверхностью Земли. Чтобы легче было утилизировать вирусные программы, и их обломки не мешали синтезу новых душ.

Подтверждением небесного расположениярая служат церковные обряды и архитектура храмов, направляющая вихревую энергию молящихся на поддержку функционирования душ, пребывающих в райском карантине. О конкретном механизме влияния церковных, спортивных и концертных зданий на информационное поле общины (использующем обмен валентных электронов) подробно рассказано в [1].

О технике и технологиях новой эпохи. Читатель может усомниться в способности современного человека выполнить приказ о начале процесса репродукции биосферы ввиду скудных материальных ресурсов и очевидного несоответствия имеющейся в его распоряжении техники таким задачам. Действительно, на ракетах с жидкостными двигателями, работающими на углеводородном топливе, к звездам не улететь. Но информация о двигателях, работающих на других источниках энергии, была заархивирована в информационном поле, и после открытия архивов сможет быть освоена людьми за несколько десятилетий. Доказательством этого тезиса служит история нацисткой Германии, которая в результате деятельности *Аненербе* получила технологическую помощь от Куратора и совершила неслыханный скачок в развитии ракетной техники и реактивной авиации.

Однако информационное поле не будет открывать архивы, пока не удостоверится в необратимости изменения поведения человека. После достижения периода зрелости Куратор более не будет инициировать дополнительную агрессию, но до преодоления инерции общественного мышления понадобится время. Которое, в том числе, будет использовано для смены политических элит; светскую власть получают технократы. Иначе возможен

рецидив. И если в конфликте будут использованы новые источники энергии (например, *фотонная бомба*, о которой речь пойдет далее), то не только человеческая цивилизация, но и вся биосфера Земли будут уничтожены.

Духовная власть (Куратор) стоит перед сложным выбором. Если ускорить передачу новых знаний, то в условиях неравномерного развития государств и сложившегося антагонизма между их элитами можно получить новую мировую войну с тяжелейшими последствиями. Если же этого не делать, то запасы традиционных видов энергии и других ресурсов будут исчерпаны, цивилизация начнет деградировать и биосфера планеты окажется пустоцветом.

Поэтому в начале новой эпохи будет инициирован проект, который нацелит имеющуюся агрессию за пределы ноосферы Земли. *Рональд Рейган* пытался это сделать еще 40 лет назад, когда призывал человечество готовиться к звездным войнам. Но там враг был абстрактным (инопланетяне), а сейчас покажут конкретную угрозу. Источниками этой угрозы являются галактические астероиды. Такие астероиды прилетают из дальнего космоса и не внесены в каталоги потенциально опасных объектов. Для предотвращения столкновения планеты с объектом у Земли будет максимум 2 недели, поэтому к отражению атаки нужно готовиться заблаговременно.

Ракетный щит Земли. Автор разделяет известное мнение о том, что наши родители, которые затратили столько сил для создания земной колыбели человечества, оставили в ближнем космосе систему защиты от астероидных атак. Логичнее всего разместить соответствующую базу на Луне, где сила тяжести в 6 раз меньше земной. Но если такая база и существует, то в прошлом несколько астероидов, летящих к Земле, она пропустила. Один из них образовал Мексиканский залив и, в результате изменения климата, уничтожил динозавров. Тунгусский метеорит был не таким крупным, как Мексиканский, и его разбили на части при входе в атмосферу. Поэтому можно считать, что и в наше время эта система продолжает работать, и людям особо опасаться нечего.

Но любая техника может дать сбой, и дублирование этой системы не будет лишним.

Кроме того, создание своей защитной системы от астероидов стимулирует научно – технический прогресс сильнее, чем угроза войны.

А если направить на эти цели те средства, которые планировалось использовать на создание новых видов вооружения, то эта программа не приведет к ухудшению условий жизни людей.

После появления космических ракет и термоядерного оружия человечество не является таким беззащитным, каким было раньше, и со многими астероидами Солнечной системы, представляющими потенциальную угрозу (они имеют диаметр в несколько сотен метров), сможет справиться самостоятельно. Но для перехвата астероида на дальних подступах Земли нужны новые двигатели; традиционные жидкостные двигатели не обеспечат нужных скоростей. Из того, что уже находится в стадии технических проектов (а некоторые образцы опробованы в условиях космического полета) и пригодно для решения поставленной задачи, можно использовать плазменные двигатели, рабочим телом которых является тяжелый инертный газ ксенон. Но необходимую электрическую энергию для таких двигателей должны давать не солнечные батареи (как это практикуют на дальних космических зондах), а бортовой ядерный реактор. Известно, что работы в этом направлении уже ведутся и выйдут на этап полетных испытаний через 10 – 15 лет. К тому времени можно завершить развертывание первой очереди системы астероидной защиты Земли и приступить к ее испытаниям. Подходящих мишеней в ближнем и дальнем космосе найдется достаточно, так что военные люди настреляются вволю. Для остальных землян это будет не только захватывающим зрелищем, но и вехой для начала отсчета новой исторической эпохи.

Фотонный реактор, или формула Эйнштейна как руководство к действию. Что касается защиты от галактических астероидов, то тут дело обстоит сложнее. Среди них встречаются крупные металлические объекты диаметром в несколько километров; кроме того, скорость сближения с Землей у них на порядок выше, чем у астероидов из Солнечной системы.

Для борьбы с такими астероидами человечество получит доступ к абсолютному оружию, использующему энергию расщепления протонов или нейтронов на фотоны. В новой реакции будет происходить преобразование всей массы вещества m в энергию E по формуле Эйнштейна

$$E = mc^2.$$

Поскольку коэффициент $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2$ очень велик, то и энергия выделяется колоссальная. Если сравнивать с реакцией слияния легких ядер, происходящей в термоядерной бомбе, то, в пересчете на массу реагентов количество выделенной энергии увеличивается на три порядка. Кроме того, такая реакция не потребует специального выбора и дорогостоящей подготовки реагентов; протоны и нейтроны входят в состав любого вещества.

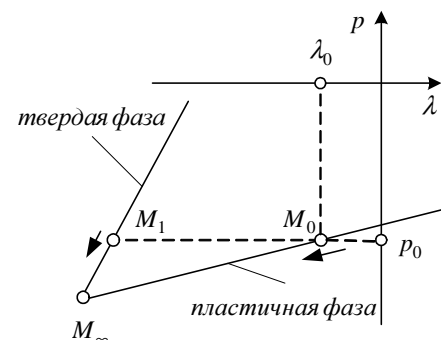


Рис. 3 – Гистерезисный переход области эфира по пути $M_0 M_\infty M_1$.

Стрелки обозначают направление расширения пространства, а различие в наклоне объясняется неравенством $c \ll a$.

Точка M_∞ отвечает потере стабильности материи (концу света).

Уже давно подсчитали: чтобы, например, закрыть годовые потребности Украины во всех видах энергии (включая тепловую, гидравлическую или атомную генерацию, а также природный газ и моторное топливо) достаточно будет сжечь в фотонном реакторе 36 кг любого мусора.

Если такая энергия выделится одновременно (при фотонном взрыве), то она раздробит любой астероид на мелкие обломки, которые сгорят в атмосфере Земли и не причинят заметного вреда. В другом варианте энергия взрыва фотонной бомбы на поверхности крупного астероида изменит траекторию его полета и отклонит от точки столкновения с Землей.

Реакцию распада нейтрона на фотоны (или распада протона на фотоны и позитроны, уносящие электрический заряд) физики не наблюдали, поэтому она запрещена общепризнанным законом сохранения общего числа *адронов* и гипотетически может происходить только лишь при взаимодействиях вещества и антивещества, приводящих к аннигиляции. Но тут нужно заметить, что прежде атом, а затем его ядро, также считали неделимыми. Все зависит от создаваемых условий.

Куратор до поры не раскрывает в этом вопросе всех тайн, но кое-что понять удалось. Известно, что стабильность элементарных частиц материального мира обеспечивается за счет энергии расширяющегося пространства. Особенностью такого расширения является то, что оно не изменяет внешних размеров любой части пространства; уменьшение плотности упругой компоненты эфира происходит за счет заполнения менее плотных частей (пор или дорожек, остающихся после пролета фотонов). Причем, указанное *расширение происходит не повсеместно, а только лишь в тех областях, где находится элементарная частица*. В работе [2] описан механизм передачи энергии от эфира к частице, обеспечивающий стабильность ее характеристик и сохранение массы (полной энергии) вещества. Этот механизм использует *энергию гистерезисного перехода* при скачкообразном уменьшении плотности λ в условиях постоянства начального и конечного давления $p = p_0$ (рис. 3). Заметим, что в результате такого перехода объем механической энергии, запасенной в эфире, понижается, и для сохранения стабильности частица должна находиться в непрерывном движении относительно эфира.

После прохождения отдельного фотона (или протона) по участку эфира энергетический потенциал этого участка понижается несущественно. Но если частицы образуют плотный поток, то своеобразное «выжигание» пространства может создать угрозу их стабильности.

Приведу наглядный пример. Если плотное стадо коров будет двигаться по лугу очень медленно, то коровы съедят всю траву и начнут голодать. Правда, трава непрерывно растет, и тут может наступить равновесие. Что касается эфира, то сожженный запас энергии гистерезисного перехода будет восполняться через миллиарды лет, и этот фактор здесь не работает.

В космосе аналогом плотного стада коров является *нейтронная звезда*, имеющая колоссальную плотность массы (она близка к плотности самого нейтрона и превосходит плотность атома водорода на 15 порядков). Стабильность такого объекта обеспечивает высокая скорость движения по эфиру, а если звезду остановить, то ее нейтроны начнут распадаться на фотоны, которые будут покидать зону реакции со скоростью света и сохранят свою стабильность.

Рассуждая об этой проблеме на уровне общих принципов, очертим проект будущей лабораторной установки, реализующей тот же принцип, но в малом масштабе. Плотный сгусток нейтронов можно создать в *нейтронном накопителе*, а затем направить этот сгусток со скоростью, противоположной по величине и направлению скорости движения лаборатории относительно эфира. И тогда нейтроны, которые фактически будут стоять на одном месте пространства, будут распадаться и высвечивать свою энергию связи в виде фотонных волн высокой частоты.

Разумеется, это всего лишь схема проведения демонстрационного опыта, и для фотонного реактора, вырабатывающего энергию для нужд промышленности или транспорта, она не подходит. Кроме того, чтобы реализовать эту схему, нужно знать скорость движения Земли относительно эфира, а противоречивые результаты опытов по обнаружению *эфирного ветра* все основательно запутали [2] и вынудили Эйнштейна и его последователей исключить соответствующую терминологию из своих теорий. И, наконец, не вполне ясно, каким образом можно разогнать пучок электрически нейтрального вещества до нужной скорости, если она составит, например, 250 км/с, что отвечает вращению Солнца вокруг центра Галактики, или 700 км/с, что отвечает движению центра Галактики. Поэтому полностью исчерпать энергию физического пространства в условиях земной лаборатории столь же нереально, как невозможно разрушить кинескоп телевизора за счет демонстрации фильма, где показывают мощные взрывы. Но нейтронная звезда, которая перестанет скользить по эфиру, будет подобна яркой точке, что появляется на экране кинескопа после отключения развертки. Такая точка в случае длительной экспозиции способна выжечь люминофор и разрушить кинескоп.

Новые пророки и другие гипотетические сюрпризы. Впрочем, эти частные вопросы носят чисто познавательный интерес и к рассматриваемой теме не относятся. Важно понять другое:

в арсенале нашего Куратора имеется достаточно средств, чтобы помочь людям преодолеть любые проблемы.

Потому, что он опирается на опыт наших родителей, которые в свое время пережили аналогичные трудности, связанные с особенностями подросткового периода, с его неизбежной (и даже полезной!) драчливостью, и

сумели создать на Земле для своих детей новую колыбель жизни.

Кстати говоря, когда я рассказываю об этой гипотезе своим коллегам, то чаще всего слышу один и тот же вопрос: а как там наши родители, прилетают ли они к нам? Мой ответ таков: они прилетают, но ведут себя как умные родители – только лишь в гости, и во взрослую жизнь своих детей не вмешиваются. Правда, последнее им удастся не всегда, но тут многое зависит от темперамента и личных качеств.

В отряд космонавтов во все времена будет существовать строгий отбор, и там от них, прежде всего, будут требовать неукоснительного выполнения инструкций. Но тот случай оказался исключением из правила.

Как известно, одного из последних богов, спустившихся на Землю, звали *Иисус*. Он пришел в Палестину неизвестно откуда, возмутился увиденному и решил, чтобы скорректировать вектор развития, сыграть роль нового пророка. Тут надо признать, что пророков в те времена и в тех землях хватало и без него, но то, что проповедовал он, было на голову выше учений его предшественников. Включая и прощальные заповеди улетающих языческих богов, которые были положены в основу существующих вероучений.

У него был характер мессии, и он легко увлекал людей за собой. При этом, как и любой мессия, он в своих порывах забегал далеко вперед и торопил время.

Кроме требования смирить гордыню и во всем доверять Богу (то есть Куратору, но о его реальной сущности Иисус, естественно, умалчивал) он призывал

изгнать меня из храмов, и заняться ремеслами и мореплаванием.

То есть он пытался ускорить прогресс общества, но светскую власть и духовную элиту все устраивало и ничего изменять они не захотели. В результате он был осужден на смерть, но принял приговор спокойно, потому что был уверен в своем скором спасении. Но что-то у его товарищей пошло не так, и спасательная экспедиция запоздала на двое суток; в результате Иисус принял мученическую смерть, а с собой они забрали мертвое тело. Своим «воскрешением», которое невозможно было скрыть от людей, он подтвердил божественное (читай – инопланетное) происхождение и пробудил интерес к своему учению. В результате он вернул в лоно церкви, то есть под управление Куратора, миллиарды людей, и, в конечном итоге, добился признания своих идей и реализации целей своей земной миссии. Да, уже после смерти, но для пророков это общее правило, и этот случай не стал исключением.

Осталось объяснить, почему Христа назвали *спасителем* и чьи грехи он искупил своей смертью. Если бы результат его миссии (по прошествии определенного времени) был признан провальным, и власть мелких торговцев и ростовщиков продолжалась бы и далее (а это ведет к застою), то

на Земле ввели бы прямое инопланетное правление.

И кроме Куратора к управлению вернули бы когорты тренеров – исполинов, а у светской и духовной элиты слетели бы головы с плеч. Не фигурально, а буквально. Вот для них он и был спасителем. *Основная масса людей во все времена живет в тех обстоятельствах, которые создает элита, поэтому безгрешна по определению.*

И это урок для теперешней элиты. Когда появятся новые пророки (а если ничего не изменять прямо сейчас, то они появятся!), подтвердят свои полномочия и будут готовить людей к новому приходу Мессии (читай – десанту инопланетян-управленцев), то поворачивать руль будет поздно, и сбежать от ответственности не получится. Их всех будут ждать аналогичные оргвыводы. *Поэтому нужно внимательно слушать Куратора и не допускать серьезных отклонений от заданного тренда.*

Организацию этой коммуникации, как и ранее, будет выполнять общественный институт с названием *церковь*, но терминология и методы решения ее задач станут другими. После реформирования церковью антагонизм в отношениях науки и религии на длительный период времени снимается, а неизбывный конфликт интересов технократической и теократической элит (по линии новаторы – консерваторы) обеспечит устойчивость управления отдельными государствами и высокие темпы развития цивилизации в целом.

Заключение. Обеспечить распространение на другую планету полноценной жизни (которая, после взросления, сможет продолжить эстафету) – это очень трудное и затратное мероприятие.

Послать экспедицию на другую, биологически стерильную, планету несложно, и уже скоро мы научимся это делать. Но такая экспедиция продукты питания и запасы воздуха привезет с собой, и максимум, на который можно рассчитывать в среднесрочной перспективе – это создание обитаемой базы с постоянным или сменным экипажем на поверхности или под поверхностью планеты.

В другом случае, который анализируется в литературе, человек отбирает планету у коренных обитателей и использует для себя. Возможно, это когда-нибудь и получится сделать на практике, но садоводы знают, что гибриды не передают новые гены по наследству. Поэтому сначала готовят почву, потом выращивают дикий сорт, который хорошо укореняется в конкретном грунте и климате, а затем ему прививают элитные ветви, которые по своему генотипу совместимы с диким деревом. И на всех этапах садовник контролирует процесс.

Вопрос о том, каким образом сложился такой порядок вещей, который мы наблюдаем сейчас, в гносеологическом плане важный и интересный. Но в этой статье он не рассматривается, потому что находится на таком уровне абстракции, который для землян (и их Куратора) неактуален. Да и наши родители – это не боги, и они не все знают. Но то, что они знают о своих родителях и прародителях, нам тоже знать интересно, и мы обсудим с

ними когда-нибудь позже при личной встрече. Заодно доподлинно узнаем, на какой из планет живут они сами, а также наши ближайшие родственники. В литературе можно встретить массу гипотез по этому поводу.

Если без специальной подготовки высаживаться на планету, где уже укоренилась белковая жизнь, то экспедицию могут уничтожить вирусы. Впрочем, о таких прописных истинах сейчас знают даже школьники младших классов. Куратор делает свое дело, и новое поколение землян активно готовится к началу экспансии нашей формы жизни на другие планеты. Дело за малым – перевоспитать или заменить элиту, которая продолжает жить в системе ценностей вчерашнего дня. Но и эту задачу нужно решать без эксцессов, а путем управляемой эволюции их тел (и образа мыслей).

Представленный вашему вниманию материал не исчерпывает тему, поэтому выводы делать рано, и их в этой статье не будет. Тема касается каждого, поэтому желательно, чтобы в дальнейшем продвижении к истине участвовали многие. Задавайте интересующие вопросы, но не мне, а своему подсознанию. И, пусть не сразу, но вы получите на них ответы. Из того, что в ходе такой дискуссии узнал я, в этой статье сказано не все. Но для первого издания уже сказано достаточно. Информацию такого рода необходимо дозировать.

И последнее, о чем нужно сказать, завершая статью. По этой теме можно дать множество ссылок, буквально по каждому абзацу, но я не сделал этого умышленно, потому что не собираюсь никому ничего доказывать. Авторская оценка представленного материала такова: в этой публикации предпринята попытка *уточнения аксиоматики*, после которой область использования термина *Бог* (как определения сущности, наделенной сверхъестественными способностями) по объективным причинам сократится. Источники, указанные в списке литературы, были опубликованы раньше статьи, но, по сути, являются ее математическими приложениями.

Список литературы

1. Григорьев А. Л., Геворкян Ю. Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Серія : математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.55 – 68.
2. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. – Харьков : НТУ «ХПИ». – 2012. – Т. 3 – 464 с.

References (transliterated)

1. Grigoriev A. L., Gevorkyan Yu. L. Gnoseologicheskie aspekty modelirovaniya obmennykh kolebaniy v srede Maksvela i Kossera [Epistemological aspects of modeling of exchange oscillations in the environment of Maxwell and Cosserat]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KHPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 13, pp. 55–68.
2. Vanin V. A., Gevorkyan YU. L., Grigor'yeV A. L. *Skalyarnyy i vektorny analiz dlya klassicheskogo inzhenerenogo obrazovaniya* [Scalar and vector analysis for classical engineering education]. Kharkov, NTU «KHPI» Publ., 2012, vol. 3. 464 p

Поступила (received) 18.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

ЗМІСТ

Математичне моделювання складних систем

<i>Абрамов Г. С., Абрамов М. Г.</i> Коалесценция как асимптотическая стадия процесса внутреннего окисления.....	5
<i>Алексеев С. В.</i> Расчет конвективного теплообмена в задачах об обледенении аэродинамических поверхностей.....	10
<i>Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.</i> Комп'ютерне прогнозування підвищення ефективності доочистки води після застосування коагуляції у швидких багат шарових фільтрах	19
<i>Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Турбал М. Ю.</i> Модифікація «пірамідального» методу екстраполяції часових рядів на основі $\mu\lambda$ – похідних	28
<i>Бразалук Ю. В.</i> Применение метода граничных элементов для численного решения линейных краевых задач в областях с сильно сегментированной границей.....	34
<i>Ванин В. А., Кругол Н. М., Лазуренко А. П.</i> Математические модели систем обеспечения работы котлоагрегата ТЭС в задаче повышения его энергоэффективности	41
<i>Ванин В. А., Светличный С. П.</i> Использование средств параметрического моделирования для создания численной модели мягкого тела на основе метода SPH.....	48
<i>Вахненко В. О.</i> Блукаюча хвиля в гомоклінічному підході.....	55
<i>Венгрович Д. Б.</i> Дослідження компактонів в напружених ланцюгах куль	60
<i>Vorobiyenko P. P., Dmitrieva I. YU.</i> Analytic solution of the differential Maxwell system and its numerical implementation.....	68
<i>Воропаев Г. А., Баскова А. А.</i> Моделирование процесса перехода в трубах со спиральным гофрированием.....	75
<i>Воропаев Г. А., Димитрієва Н. Ф.</i> Чисельне моделювання вихорових течій в напівциліндричному заглибленні за допомогою відкритих пакетів SALOME, OpenFOAM, Paraview.....	81
<i>Воропаев Г. А., Загуменний Я. В.</i> Управление динамическими характеристиками обтекаемого колеблющегося крыла.....	87
<i>Воропаев Г. А., Розумнюк Н. В.</i> Моделирование нестационарного пограничного слоя на структурированной поверхности	93
<i>Воскобойник В. А., Воскобойник А. А., Турик В. Н., Воскобойник А. В.</i> Моделирование генерации вихревых структур парой овальных лунок.....	98
<i>Гуржий А. А., Кордас И. О., Никифорович Е. И., Черный Д. И.</i> Применение метода дискретных особенностей при составлении краткосрочного прогноза распространения загрязнений на морской поверхности.....	104
<i>Довгий С. О., Буланчук О. М., Буланчук Г. Г.</i> Комп'ютерна програма по моделюванню аеродинаміки міських районів методом дискретних вихорів	110
<i>Жученко С. В.</i> Результаты численного моделирования термозагазованности кассеты ТВЭЛов ядерного реактора на быстрых нейтронах	115
<i>Катан В. А.</i> Применение сингулярных интегралов в смысле конечной части по Адамару для ударных задач гидромеханики	121
<i>Килинник В. Ю., Тишковець О. В., Крютченко Д. В., Науменко Ю. В.</i> Коливання рідини в циліндрично-конічній оболонці під дією вертикального збудження.....	127
<i>Крютченко Д. В., Гнітько В. І., Шувалова Ю. С.</i> Метод дискретних особливостей в задачах аналізу коливань резервуарів з рідиною при горизонтальних та вертикальних навантаженнях.....	133
<i>Malash K. M., Bomba A. YA.</i> Spatial generalization of the explosion process mathematical model using quasiconformal mappings methods.....	138
<i>Москаленко Р. П., Пальчиков Р. Г., Стрельникова О. О.</i> Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачах вільних та вимушених коливань лопатей гідротурбін при взаємодії з рідиною	144
<i>Остапенко А. О., Буланчук Г. Г.</i> Моделювання обтікання перешкод методом ґраткових рівнянь Больцмана при великих числах Рейнольдса	149
<i>Панченко Б. Е.</i> О численном исследовании систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом с учетом числа обусловленности СЛАУ	155

<i>Полянская Т. С.</i> Дискретная математическая модель одного гиперсингулярного интегрального уравнения	164
<i>Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л. В.</i> Фрактальна та морфологічна обробка у фазово-контрастній магніто-резонансній ангиографії	170
<i>Сафоник А. П., Присяжнюк О. В., Пасічник В. А.</i> Моделювання процесу очищення стічних вод методом електрокоагуляції в неізотермічних умовах	175
<i>Сохацький А. В.</i> Моделювання аеродинаміки несучих систем поблизу землі	181
<i>Терещенко Л. М., Воскобійник В. А., Воскобійник О. А., Воскобійник А. В.</i> Фізичне моделювання течії через двопелюстковий механічний серцевий клапан	186
<i>Удовенко В. А., Гладышев А. И.</i> Аэродинамические характеристики несущего винта вертолёта в спутном следе другого вертолёта	192
<i>Шеховцов А. В.</i> Выражения для функции тока, скорости и завихренности вязкого нестационарного течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки и в канале	199
Фундаментальні та прикладні дослідження	
<i>Батыгин Ю. В., Ерёмин Е. Ф., Чаплыгин Е. А., Стрельникова В. А.</i> Электродинамические процессы в инструментах магнитно-импульсного притяжения при прямом пропускании тока через обрабатываемый металл	207
<i>Кожушко А. П., Набока О. О., Григор'єв О. Л.</i> Спектральні ефекти та теореми про властивості пучка симетричних матриць в задачах динаміки складних механічних систем	214
<i>Мельник О. С., Миколушко А. М.</i> Репрограмовані мультиплексорні наносхеми	224
<i>Нечуйвітер О. П., Чорна О. С., Дараган К. В., Підлісний О. В., Чорний С. О.</i> Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій двох змінних	232
<i>Новиков Ф. В., Полянский В. И.</i> Аналитическое определение технологических параметров механической обработки	239
<i>Ольшанський В. П.</i> Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца	244
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Сліпченко М. В.</i> Нестационарні коливання мембрани на однобічній пружній основі, спричинені силовим імпульсом	249
<i>Pershyna S. A., Tokmakova I. A., Dumych YE. A.</i> Construction of discontinuous interlineation polynomial splines for functions of two variables	256
<i>Petrova R. V., Liubicheva O. I., Morozova A. I.</i> Mathematical models and informational technologies of innovative project arrangement in the stakeholders' system	263
<i>Tokmakova I. A.</i> Representation of real numbers by Fibonacci sequence	268
<i>Cheremskaya N. V.</i> Dependence of prognosis and filtration failure on different values of parameters for some classes of non-stationary random sequences	274
Наукові гіпотези та перспективні технології	
<i>Григорьев А. Л.</i> Гносеологический анализ целей и основных принципов организации управляемой эволюции белковых тел	283

CONTENTS

Mathematical modeling of composite systems

<i>Abramov G. S., Abramov M. G.</i> Coalescence as asymptotic stage of internal oxidation process	5
<i>Alekseyenko S. V.</i> Mathematical model of H-polarized wave radiation from longitudinal slots of a cylindrical antenna.....	10
<i>Bomba A. YA., Klymyuk YU. YE.</i> Computer prediction of improving efficiency of water purification after coagulation in rapid multilayer filters	19
<i>Bomba A. YA., Turbal YU. V., Turbal M. YU.</i> $\mu\lambda$ – derivative based modification of «pyramidal» time series extrapolation method	28
<i>Brazaluk IU. V.</i> Boundary element method application to numerical solving of linear boundary-value problems in domains with strongly segmented boundary	34
<i>Vanin V. A., Kruhol M. M., Lasurenko O. P.</i> Mathematical models of thermal power plant boiler operation systems in the problem of the boiler energy efficiency improvement.....	41
<i>Vanin V. A., Svetlichnyy S. P.</i> Application of parametric modeling tools for creation of numerical model of a soft body using SPH method.....	48
<i>Vakhnenko V. O.</i> The rogue wave in a homoclinic approach	55
<i>Vengrovich D. B.</i> Investigation of compactons in prestressed chains of balls	60
<i>Vorobiyenko P. P., Dmitrieva I. YU.</i> Analytic solution of the differential Maxwell system and its numerical implementation.....	68
<i>Voropaiev G. A., Baskova A. A.</i> Modeling of transition process in tubes with spiral corrugation.....	75
<i>Voropaiev G. A., Dimitrieva N. F.</i> Numerical simulation of vortex flows in a semi-cylindrical dimple using SALOME, OpenFOAM, Paraview open source packages.....	81
<i>Voropaiev G. A., Zagumennyi Y. V.</i> Control of dynamic characteristics of an oscillating wing in the oncoming free stream.....	87
<i>Voropaiev G. A., Rozumnyuk N. V.</i> Modeling of non-stationary boundary layer over a structured surface	93
<i>Voskoboinick V. A., Voskoboinick O. A., Turick V. N., Voskoboinick A. V.</i> Modeling of vortex structure generation by pair of oval dimples	98
<i>Gourjii A. A., Kordas O. I., Nikiforovich E. I., Cherniy D. I.</i> Application of the method of discrete singularities in short-term forecasting of pollution propagation on the sea surface	104
<i>Dovgiy S. O., Bulanchuk O. M., Bulanchuk G. G.</i> Computer program for simulation of urban areas aerodynamics by discrete vortices method.....	110
<i>Zhuchenko S. V.</i> Results of computer modeling of termogas dynamics of fast-neutron nuclear reactor fuel slug	115
<i>Katan V. A.</i> Using singular integrals in the sense of Hadamard finite part for water entry problems of gydromechanics.....	121
<i>Kylynyk V. YU., Tishkovetz YE. V., Kriutchenko D. V., Naumenko YU. V.</i> Fluid vibrations in cylindrical-conical shell under vertical excitation.....	127
<i>Kriutchenko D. V., Gnitko V. I., Shuvalova Yu. S.</i> Method of discrete singularities for problems of analysis of vibrations of liquid filled tanks under horizontal and vertical load.....	133
<i>Malash K. M., Bomba A. YA.</i> Spatial generalization of the explosion process mathematical model using quasiconformal mappings methods.....	138
<i>Moskalenko R. P., Palchikov R. G., Strelnikova E. A.</i> Method of hypersingular integral equations for problems of free and forced vibrations of turbine blades interacting with liquid.....	144
<i>Ostapenko A. A., Bulanchuk G. G.</i> Simulation of the flow over obstacles with the lattice Boltzmann method at large Reynolds numbers.....	149
<i>Panchenko B. E.</i> On the numerical investigation of systems of singular integral equations of the first kind and with an indefinable index with regard to the SLAE condition number.....	155
<i>Polyanskaya T. S.</i> Discrete mathematical model of a hypersingular integral equation	164
<i>Rudnitskii A. G., Rudnytska M. A., Tkachenko L. V.</i> Fractal and morphological processing for phase contrast MRI	

image of the aortic lumen	170
Safonyk A. P., Prysiazniuk O. V., Pasichnyk V. A. Modeling of process of wastewater treatment by electrocoagulation in non-isothermal conditions	175
Sokhatsky A. V. Modeling aerodynamics of bearing systems in the near-ground region	181
Tereshchenko L. N., Voskoboinick V. A., Voskoboinick O. A., Voskoboinick A. V. Physical modeling of flow across the bileaflet mechanical heart valve	186
Udoenko V. A., Gladyshev A. I. Aerodynamic characteristics of the helicopter main rotor in the wake of another helicopter	192
Shekhovtsov A. V. Expressions for the stream function, velocity and vorticity of the viscous unsteady flow with slip induced by vortex near the wall and in the channel.....	199
Fundamental and applied studies	
Batygin YU. V., Yeryomina O. F., Chaplygin E. O., Strelnikova V. A. Electrodynamic processes in instruments of magnetic-pulse attraction at direct current passing through the handled metal	207
Kozhushko A. P., Naboka O. O., Grigoriev O. L. Spectral effects and theorems on symmetric matrix bundle spectrum properties in composite mechanical system dynamical problems.....	214
Melnyk O. S., Mikolushko A. M. Reprogrammable multiplexer nanocircuits	224
Nechuiviter O. P., Chorna O. S., Darahan K. V., Pidlisnyi O. V., Chorny S. O. New informational operators in problems of numerical integration of functions of two variables	232
Novikov F. V., Polyansky V. I. Analytic determination of technological parameters of mechanical processing	239
Olshanskiy V. P. Comparison of approximate solutions to impact strength integral equation in the framework of Hertz theory	244
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V., Slipchenko M. V. Nonstationary oscillations of the membrane on a one-sided elastic base, caused by a force impulse	249
Pershyna S. A., Tokmakova I. A., Dumych YE. A. Construction of discontinuous interlineation polynomial splines for functions of two variables.....	256
Petrova R. V., Liubicheva O. I., Morozova A. I. Mathematical models and informational technologies of innovative project arrangement in the stakeholders' system.....	263
Tokmakova I. A. Representation of real numbers by Fibonacci sequence.....	268
Cheremskaya N. V. Dependence of prognosis and filtration failure on different values of parameters for some classes of non-stationary random sequences.....	274
Scientific hypotheses and perspective technologies	
Grigoriev A. L. Gnoseological analysis of the goals and basic principles of the organization of the controlled evolution of protein bodies.....	283

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХП».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 8 (1333) 2019

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

Відповідальний за випуск Костякова Е. В.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХП».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид. № 4-19.

Підп. до друку 11.05.2019 р. Формат 60 × 84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 16,0. Облік.-вид. арк. 17,5.
Тираж 100 пр. Зам. № 194055. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вил Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.