

ISSN 2078-9130



# ВІСНИК

Національного технічного університету «ХПІ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 2'2019

Харків  
2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ  
І НАУКИ УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION  
AND SCIENCES OF UKRAINE

Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

National technical university  
"Kharkiv polytechnic institute"

## **ВІСНИК**

**Національного  
технічного університету «ХПІ»  
Серія: Динаміка і міцність  
машин**

**№ 2 ' 2019**

## **BULLETIN**

**of the National  
Technical University "KhPI"  
Series: Dynamics and Strength of  
Machines**

**No. 2 ' 2019**

Збірник наукових праць

Collection of Scientific papers

Видання засноване у 1961 р.

The edition was founded in 1961

Харків  
НТУ «ХПІ», 2019

Kharkiv  
NTU "KhPI", 2019

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».** Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2019. № 2. 69 с. ISSN 2078-9130

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок, виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України KB № 23779-13619P від 14 лютого 2019 року

Засновник видання Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Мова статей – українська, російська, англійська.

Web-сайт (web-сторінка) наукового видання – <http://jdsd.khpi.edu.ua/>

*Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.*

*З 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).*

*З 2014 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у індекс Копернікус; індекс ICV (Index Copernicus Value)*

*З 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в електронну бібліотеку The Vernadsky National Library of Ukraine*

*З 2001 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в Електронну бібліотеку науково-технічної бібліотеки НТУ «ХПІ»*

*З 2001 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в Електронна бібліотека Institutional Repository (eNTUKhPIIR)*

#### **Головний редактор**

Морачковський О. К., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Morachkovskii, O.K.)

#### **Редакційна колегія**

Аврамов К.В., д-р техн. наук, професор, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Avramov, K.V.)

Альтенбах Х., д-р техн. наук, професор, Магдебургський університет імені Отто фон Гюріке, Німеччина (Altenbach, H., Prof.Dr.-Ing.habil. Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Барканов С.М., д-р інж. наук, професор, Інститут матеріалів і конструкцій, Ризький технічний університет, Латвія (Barkanov, E.N.)

Бреславський Д.В., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Breslavsky, D.V.)

Воробйов Ю.С., д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Vorobiov, Yu.S.)

Зінковський А.П., д-р техн. наук, професор, Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України, Київ, Україна (Zinkovskii, A.P.)

Курпа Л.В., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Kurpa, L.V.)

Ларін О.О., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Larin, O.O.)

Львов Г.І., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Lvov, G.I.)

Мартиненко Г.Ю., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Martynenko, G. Yu.)

Міхлін Ю.В., д-р фіз.-мат. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Mikhlin, Yu.V.)

Науменко К., д-р техн. наук, професор, Магдебургський університет імені Отто фон Гюріке, Німеччина (Naumenko, K., Prof.Dr.-Ing.habil. Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Пеллікано Ф., д-р механіки, професор, Університет Модени, Італія (Pellicano, F., Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italy)

Ткачук М.А., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Tkachuk, M.V.)

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 09 від 01 листопада 2019 р.

*I.O. MORACHKOVSKA, G.M. TIMCHENKO***ЛІДІЯ ВАСИЛІВНА КУРПА – ВИДАТНИЙ ВЧЕНИЙ-МАТЕМАТИК І ПЕДАГОГ  
(ДО ЮВІЛЕЮ 3 ДНЯ НАРОДЖЕННЯ)**

У статті міститься нарис про видатного вченого – математика та механіка, доктора технічних наук, професора Лідію Василівну Курпу. Наведено коротку біографію, описано педагогічні здібності, що виявились в її діяльності. Надано коротке викладення основних наукових результатів, що їх отримано Л. В. Курпою у різних розділах математики та механіки: методи теорії R-функцій, розв'язання початково-крайових задач теорії коливань, теорії пластин та оболонок. Наведено деякі науково-методичні праці, розроблені нею для студентів та викладачів на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету «ХПІ».

**Ключові слова:** біографічний нарис, методи теорії R-функцій, початково-крайові задачі, теорія коливань, теорія пластин та оболонок.

*I.O. MORACHKOVSKAYA, G.H. TIMCHENKO***ЛИДИЯ ВАСИЛЬЕВНА КУРПА – ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЕНЫЙ-МАТЕМАТИК И ПЕДАГОГ  
(К ЮБИЛЕЮ КО ДНЮ РОЖДЕНИЯ)**

В статье содержится очерк о выдающемся ученом – математике и механике, докторе технических наук, профессоре Лидии Васильевне Курпе. Приведена краткая биография, описаны педагогические способности, проявившиеся в ее деятельности. Представлено краткое изложение основных научных результатов, которые получены Л. В. Курпой в различных разделах математики и механики: методы теории R-функций, решения начально-краевых задач теории колебаний, теории пластин и оболочек. Приведены научно-методические труды, разработанные ею для студентов и преподавателей на кафедре прикладной математики Национального технического университета «ХПИ».

**Ключевые слова:** биографический очерк, методы теории R-функций, начально-краевых задач, теория колебаний, теория пластин и оболочек.

*I. MORACHKOVSKA, G. TIMCHENKO***LYDIA KURPA– OUTSTANDING SCIENTIST MATHEMATICIAN AND TEACHER  
(DEDICATED TO THE ANNIVERSARY)**

The paper contains an essay about the outstanding scientist – mathematician and mechanical, doctor of technical sciences, professor Lydia Kurpa. A brief biography is given, the pedagogical abilities revealed within her activities are described. A brief summary of the main scientific results obtained by L. V. Kurpa in various branches of mathematics and mechanics are presented: methods of the R-functions theory, investigations of initial-boundary value problems of vibrations theory, theory of plates and shells. The scientific and methodological works developed by her for students and teachers of the Department of Applied Mathematics of the National Technical University "KhPI" are presented here.

**Keywords:** biographical sketch, methods of the R-functions theory, initial-boundary value problems, theory of vibrations, theory of plates and shells.



Есть на свете удивительные люди:  
Кажется, исходит свет от них.  
И ни зло, ни горе не остудит  
Этот жар, горящий в сердце их.  
Как святой огонь, тепло не обжигает,  
Только греет, лечит и живит.  
Счастлив, кто тем даром обладает,  
В ком душа прекрасная горит!  
И в минуты серых, тусклых буден,  
В час тоски, поверьте, есть просвет:  
Знаю я, что есть на свете люди,  
Излучающие яркий свет!

Абдулина Г. Е.

25 листопада – день народження Лідії Василівни Курпи, завідуючої кафедрою прикладної математики Національного технічного університету «ХПІ». Ювілей Лідії Василівни – це не тільки велике бажання привітати її, але й відзначити заслуги перед нашим університетом та країною.

Лідія Василівна Курпа відома в нашій країні та за її межами як видатний спеціаліст в області теорії R-функцій та численно-аналітичних методів розв'язання крайових задач математичної фізики, теорії тонких пластин та оболонок.

Лідія Василівна народилася у місті Маріуполі Донецької області в сім'ї робочого. Ще зі шкільних років вона мріяла стати вчителем математики. Школу вона закінчила зі срібною медаллю, та у 1961 році вступила на перший курс фізико-математичного факультету Державного педагогічного інституту у місті Бердянськ. «Я з п'ятого класу мріяла бути вчителем математики. У зв'язку з цим пішла в педагогічний інститут і закінчила фізмат. Люблю педагогічну роботу», – говорить Лідія Василівна. У той час в інституті викладали вищу математику доктор фізико-математичних наук, професор Володимир Логвинович Рвачов та його дружина Ірина Костянтинівна. Саме вони зіграли вирішальну роль у подальшій долі Лідії Василівни. Рвачов Володимир Логвинович – математик, механік і логік, академік АН України, професор, доктор фізико-математичних наук; ректор Харківського інституту радіоелектроніки (1964–1967), завідуючий кафедрою теоретичної і математичної фізики Харківського політехнічного інституту (1969–1970), завідуючий відділом прикладної математики та обчислювальних методів Інституту проблем машинобудування (1967–2005).

Спогади про свого Великого Вчителя завжди пройняті щирою повагою, вдячністю та теплотою. «При воспоминании о Владимире Логвиновиче, приходят на ум слова священной заповеди, которую он часто повторял: «Не сотвори себе кумира». Что касается меня, то мне эту заповедь выполнить трудно, поскольку я была ученицей необыкновенного человека и работала под началом Великого Ученого, в котором органично сочетались такие прекрасные (и ценимые во все времена) качества, как незаурядный ум, Талант, удивительная интуиция, неумное и постоянное стремление к новому. Имея весь этот арсенал, трудно было «не видеть в нем идеала». Мы гордились и гордимся тем, что мы ученики В. Л. Рвачева. Будучи незаурядным Ученым, он проложил путь в науку всей своей школе. И его роль в становлении каждого из учеников – огромна. Подтверждением тому является большое число учеников, которых он вывел в настоящий мир Науки». – Пише Лідія Василівна у книзі, яку присвятила В. Л. Рвачову [18].

Навчання в інституті для Лідії Василівни завжди було успішним. Навик організаційної роботи вона почала здобувати ще студенткою, активно займаючись громадською діяльністю.

Після закінчення інституту, у 1966 році, Лідія Василівна вступає до аспірантури Харківського інституту радіоелектроніки на кафедру прикладної математики. Її науковим керівником стає саме професор

В. Л. Рвачов, який з 1964 року працював у Харкові. Л. В. Курпа була серед перших учнів професора В. Л. Рвачова, які почали розвивати та використовувати теорію R-функцій для розв'язку крайових задач математичної фізики з крайовими умовами різних типів для областей практично довільної форми.

Після закінчення аспірантури вона отримала пропозицію від професора В. Л. Рвачова перейти працювати на посаду старшого викладача кафедри теоретичної та математичної фізики інженерно-фізичного факультету Харківського політехнічного інституту. У 1970 році в одному з найстаріших закладів вищої освіти Європи, Львівському університеті імені Івана Франка, Лідія Василівна захищає кандидатську дисертацію на тему «R-функції та їх застосування до розв'язання задач про власні коливання пластин складної форми». Їй присуджується науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. Плодотворна співпраця зі своїм Великим Вчителем знайшла відображення у написанні монографії «Метод R-функцій в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы» та її виданні у 1973 році у співавторстві з іншими учнями В. Л. Рвачова: М. Г. Склепусом та Л. О. Учішвілі.

У 1980 році Лідія Василівна отримала запрошення на посаду старшого наукового співробітника відділу прикладної математики та обчислювальних методів від Інституту проблем машинобудування АН України. У той час відділом керував В. Л. Рвачов. Тут вона провела великий цикл наукових досліджень з теорії R-функцій, створення програмуєної системи «ПОЛЕ» для автоматизації процесу розв'язання крайових задач математичної фізики. Результати цих наукових досліджень було надано у монографії «R-функции в задачах теории пластин», виданої 1987 році у співавторстві з В. Л. Рвачовим.

Працюючи в Інституті проблем машинобудування, Лідія Василівна підготувала докторську дисертацію, у якій розробила нові методи розв'язання задач теорії пластин та пологих оболонок зі складним контуром плану. У 1990 році на засіданні Спеціалізованої Вченої ради у Харківському політехнічному університеті вона блискуче захистила докторську дисертацію на тему «Создание на основе теории R-функций методов и программного обеспечения для решения задач изгиба, колебаний и устойчивости тонкостенных конструктивных элементов сложной формы». За підсумками цього захисту ВАК України присуджує Л. В. Курпі вчений ступінь доктора технічних наук за двома спеціальностями: механіка деформівного твердого тіла та динаміка та міцність машин.

Після захисту докторської дисертації Лідія Василівна повертається на кафедру прикладної математики Інженерно-фізичного факультету на посаду професора, де викладає студентам математичні дисципліни, а з 1995 року стає завідуючою кафедрою прикладної математики. На цій посаді вона проявила себе талановитим і енергійним організатором. Кафедра отримала нове приміщення, відбувалося оновлення обчислювальної техніки. Було відкрито аспірантуру. Кафедра отримала новий поштовх до розвитку наукової роботи.

«Мій колектив підібраний таким чином, що вони відповідають моїм вимогам: вони завжди готові при-

йти на допомогу один до одного. Я люблю своїх співробітників. Всі вони принципові і дуже добрі. Люди, які вірно оцінюють те, що для них робиться. На добро відповідають добром. У нас продуктивна робота, ми розуміємо один одного з півслова. Сумлінне, небайдухе ставлення до роботи. Взагалі, вважаю, що одна з головних якостей викладача – це вміння любити людей», – говорить Лідія Василівна про колектив своєї кафедри.

Активно йде робота над новими навчальними посібниками. Лідія Василівна разом з іншими викладачами плідно працює над розробкою низки навчальних посібників англійською мовою [5-7]. Перший навчальний посібник, виданий за редакцією Лідії Василівни, з синхронним відображенням матеріалу російською та англійською мовами вміщав повний курс вищої математики і складався з чотирьох томів.

Велику увагу Лідія Василівна приділяє збереженню традицій кафедри, якою в перші роки її розвитку керували видатні вчені та педагоги – Н. І. Ахієзер, І. М. Глазман, В. Л. Рвачов. У той же час кафедра постійно оновлюється, поповнюється молодими викладачами. На кафедрі всіляко підтримуються як високий рівень і культура викладання, так і науково-дослідна робота співробітників кафедри.

Лідія Василівна очолила науковий напрямок, пов'язаний з розвитком конструктивних засобів теорії R-функцій та її застосуванням до лінійних і нелінійних задач теорії пластин і пологих оболонок складної форми. На даний час кількість опублікованих наукових робіт Л. В. Курпи перевищує 300, в число яких входять монографії [1-4] і публікації у відомих міжнародних наукових журналах, які індексуються у науковометричних базах Scopus та Web of Science. Ці роботи завжди відрізняє висока математична культура та глибоке проникнення в фізичну суть проблеми. Основні напрямки наукових досліджень стосуються розробки ефективних методів розв'язання лінійних та геометрично нелінійних задач теорії пологих оболонок і пластин складної форми, в тому числі багатошарових і функціонально-градієнтних пластин та оболонок.

Суттєві результати отримано в розвитку теорії R-функцій та методів розв'язання початково-крайових задач математичної фізики [1-4, 8, 13, 16, 22, 24, 30, 35, 45, 46]. Добре відомі її дослідження проблем динаміки та стійкості пластин та оболонок [26-29, 33, 34, 42]. Суттєвим внеском в теорію коливань пластин та оболонок є результати, що отримані в роботах [10, 12, 15, 20, 21, 25,

32, 37, 39, 50]. Нелінійні коливання пластин та оболонок отримали суттєвий розвиток в роботах [9, 11, 14, 17, 19, 23, 31, 36, 38, 40, 41, 43, 44, 47-49].

Під керівництвом Лідії Василівни успішно захищено чотирнадцять кандидатських дисертацій. Багато учнів Лідії Василівни стали кваліфікованими викладачами, деякі з них – співробітниками кафедри прикладної математики. Лідія Василівна разом зі своїми учнями неодноразово брала участь в престижних міжнародних конференціях та семінарах в різних країнах світу: Австрії, Італії, Польщі, США, Угорщині та інших.

Починаючи з 2004 року, Лідія Василівна була активним організатором п'яти міжнародних конференцій з нелінійної динаміки, в яких взяли участь провідні вчені як з України, так і з багатьох країн світу: Великої Британії, Італії, Канади, Китаю, Кореї, Німеччини, Польщі, США, Японії та ін.

В різні роки Лідія Василівна була членом Національної ради України з теоретичної та прикладної механіки, дійсним членом Академії Наук Вищої школи України та й залишається зараз членом рад по захисту кандидатських і докторських дисертацій в Національному технічному університеті «ХПІ» та Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

Лідія Василівна – Педагог великого рівня. Робота зі студентами на лекціях та практичних заняттях – одна з найулюбленіших її справ. Особисте спілкування і зрозуміле пояснення нового складного матеріалу вона вважає головним в роботі зі студентами. Вона не уникає дискусії зі студентами, намагається навчити їх мислити, бути сміливими у виборі методів і підходів до розв'язання задач, бути впевненими перед викладачами, задавати питання, допомагати один-одному у будь-якій ситуації, радіти успіхам своїх друзів, вчитися не тільки заради оцінки. «Якщо я бачу, що студент прагне до отримання знань, то намагаюся допомогти йому, підтримати», – говорить Лідія Василівна.

Колеги говорять про Лідію Василівну з теплотою і повагою, виділяючи різні позитивні риси її характеру, людські вчинки. Вони характеризують її як людину розсудливу, високопрофесійну, тверду, іноді навіть жорстку в прийнятті керівних рішень, вимогливу до своїх колег і підлеглих, і в той же час – людяну, добру, яка дбайливо ставиться до людей. Лідія Василівна – справжній професіонал, визнаний вчений, людина, що користується найвищим авторитетом і повагою з боку колег і студентів.

### Бібліографія

*Основні наукові публікації професора Л. В. Курпи*

1. Рвачев В.Л., Курпа Л.В., Склепус Н.Г., Учишвили Л.А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Киев: Наукова думка, 1973. 124 с.
2. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. Метод R-функций в задачах теории пластин. Киев: Наукова думка, 1987. 176 с.
3. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. Харьков: НТУ «ХПІ», 2009. 408 с.
4. Курпа Л.В., Мазур О.С., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. Харьков: ООО «В деле», 2016. 492 с.
5. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Differential and Integral Calculus for One Variable Functions. Differential and Integral Calculus for One Variable Functions: Textbook. Kharkiv: NTU KhPI: 2017. 324 p.
6. Вища математика: навч. посібник: У 4 т. / Курпа Л.В., Кацууба Ж.Б. та ін.; за ред. Курпа Л.В. Харків: НТУ «ХПІ», 2006. Рос. та англ. мовами.

7. Kurpa L.V., Mazur O.S., Shmatko T.V. Differential Equations and Series: Textbook. Kharkiv: NTU KhPI, 2013. 288 p.
8. Курпа Л.В., Морачковская И.О., Скелпус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек. Проблемы машиностроения. 2001. No 4 (1-2). С. 58-77.
9. Курпа Л.В., Пильгун Г.В. Применение теории R-функций к решению задач о нелинейных колебаниях пластин сложной формы. Доповіді НАН України. 2003. No 10. С. 52-56.
10. Kurpa L., Rvachev V., Ventsel E. The R-function method for the free vibration analysis of thin orthotropic plates of arbitrary shape. Journal of sound and vibration. 2003. No 26. P. 109-122.
11. Курпа Л.В., Пильгун Г.В., Онуфрієнко О.Г. Застосування методу R-функцій для дослідження нелінійних коливань пластин складної форми. Машинознавство. 2003. No 9. С. 3-7.
12. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н. Исследование свободных колебаний анизотропных пластин сложной формы. Вестник НТУ «ХПИ». 2004. No 20. С. 39-44.
13. Курпа Л.В., Любичька К.И. Нелінійний аналіз ортотропних пластин складної форми. Теоретична і прикладна механіка. 2005. Вип. 1. С. 161-166.
14. Kurpa L., Pilgun G. Application of the R-functions method to nonlinear vibrations of thin plates of arbitrary shape. Journal of sound and vibration. 2005. No 284. P. 379-392.
15. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Lyubitskaya E.I. Solution of vibration problems for shallow shells of arbitrary form by the R-functions method. Journal of sound and vibration. 2005. No 279. P. 1071-1084.
16. Kurpa L., Ventsel E. Analysis of sandwich plates of arbitrary shape. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2006. Vol. 12, Number 1. P. 33-41.
17. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufrienko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with a complex form. Mathematical Problems in Engineering. 2006. P. 125-138.
18. Владимир Логвинович Рвачев. Се человек. Много званых – мало избранных : биограф. сб. / редкол. : Курпа Л.В., Шматко Т.В., Шматко А.В.; под общ. ред. Курпа Л.В. Харьков: Новое слово, 2006. 80 с.
19. Kurpa L., Pilgun G., Amabili M. Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary: R-functions method and experiments. Journal of Sound & Vibr. 306. 2007. P. 580-600.
20. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н. Исследование свободных колебаний многослойных пластин сложной формы в плане. Проблемы прочности. 2007. № 5. С. 38-46.
21. Курпа Л.В., Чистилина А.В. Исследование колебаний ортотропных оболочек переменной толщины с помощью метода R-функций. Прикладная механика. 2008. № 12. С. 27-34.
22. Курпа Л., Мазур О. Параметричні коливання пластин складної форми плану. Машинознавство. 2008. № 3. С. 9-15.
23. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2008. Т. 51, №2. С. 75-85.
24. Курпа Л.В., Осетров А.А. Решение задач изгиба многослойных пологих оболочек с применением метода R-функций и сплайн-аппроксимации. Пробл. машиностроения. 2010. Т. 13, № 2. С. 38-50.
25. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. Composite Structures. 2010. Vol. 93. P. 225-233.
26. Курпа Л.В., Любичька К.И., Морачковская И.О. Метод R-функций для решения нелинейных задач изгиба ортотропных пологих оболочек на упругом основании. Прикладная механика. 2010. № 6. С. 56-65.
27. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. On the parametric vibrations and meshless discretization of orthotropic plates with complex shape. The International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation. 2010. Т. 11(5). P. 371-386.
28. Курпа Л.В., Мазур О.С. Параметрические колебания ортотропных пластин сложной формы. Прикладная механика. 2010. № 4. С. 83-95.
29. Kurpa L.V., Lyubitskaya E.I., Morachkovska I.O. The R-Function Method Used to Solve Nonlinear Bending Problems for Orthotropic Shallow Shells on an Elastic Foundation. International Applied Mechanics. 2010. Vol. 46, №. 6. P. 660-668.
30. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2011. P. 1-10.
31. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex form with variable thickness. Latin American Journal of Solid and Structures, 10. 2013. P. 147-160.
32. Курпа Л.В., Мазур О.С., Ткаченко В.В. Параметричні коливання багатощарових пластин складної форми. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2013. Т. 56, №2. С. 136-150.
33. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plate with external cutout. Lodz. 2013. P. 427-438.
34. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. Latin American Journal of Solids and Structures 10. 2013. P. 175-188.
35. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Будников Н.А. К вопросу о построении системы базисных функций для решения задач о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек. Динамические системы, 2013. Т. 2 (30), № 3-4. С. 273-284.
36. Курпа Л.В., Будников Н.А. Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек при помощи многомодовой аппроксимации. Вісник донецького національного університету, Сер. А:

Природничі науки. 2013. № 1. С. 55-60.

37. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. Теоретическая и прикладная механика. 2014. Вып. 54, № 8. С. 77-86.

38. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. Shell Structures: Theory and Applications. 2014. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 3. P. 305-308.

39. Kurpa L., Mazur O. Investigation of Parametric Vibrations of Laminated plates by R-functions Method. ENOC. 2014. Vienna, July 6–11.

40. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Применение метода R-функций к исследованию нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек. Теоретическая и прикладная механика, 2014. Вып.55, № 9. С. 59-70.

41. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. Composite Structures. 2015. V. 125. P. 575-585.

42. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout. Int. J. of Non-linear Mechanics. 2016. Vol. 81. P. 103-114.

43. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shells of a complex shape. Latin American Journal of Solid and Structures. 2017. Vol. 14. P. 1648-1668.

44. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. Journal of Nonlinear Dynamics. 2017. P. 133-147.

45. Курпа Л.В., Любичка Е.И., Морачковская И.О. Геометрически нелинейный изгиб функционально-градиентных пластин на упругом основании. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка неоднорідних структур». 2017. Вип. 2 (21). С. 77-88.

46. Awrejcewicz J., Kurpa L.V., Lyubitska K.I. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations. Shell Structures: Theory and Applications Volume 4. Proceedings of the 11th International Conference on Shell Structures: Theory and Applications. 2018. P. 61-64.

47. Lidiya K., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear Vibration Analysis of Laminated Shallow Shells with Clamped Cutouts by the R-functions Method. Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 93 (1). P.133-147.

48. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. Non-linear Mechanics. 2018. Vol. 107. P. 161-169.

49. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н., Осетров А.А. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек и пластин с вырезами и различными граничными условиями. Вісник НТУ "ХПІ". Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2018. № 3. С. 52-59.

50. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. Lat. Am. Journal of Solids Struct. 2019. Vol. 16 № 1, Rio de Janeiro 2019, Epub Feb 18.

#### Bibliography (transliterated):

The basic scientific publications of professor L. V. Kurpa

1. Rvachev V.L., Kurpa L.V., Sklepus N.G., Uchishvili L.A. Metod R-funkcij v zadachax ob izgibe i kolebaniyax plastin slozhnoj formy. Kyiv: Naukova dumka, 1973. 124 p.

2. Rvachev V.L., Kurpa L.V. Metod R-funkcij v zadachax teorii plastin. Kyiv: Naukova dumka, 1987. 176 p.

3. Kurpa L.V., Mazur O.S., Shmatko T.V. Primenenie teorii R-funksiy k resheniyu nelineynykh zadach dinamiki mnogosloynnykh plastin. Kharkiv: OOO «V dele», 2016. 492 p.

4. Kurpa L.V. Metod R-funkcij dlya resheniya lineinykh zadach izgiba i kolebanij plastin i pologih obolochek. Kharkiv: NTU «KhPI», 2009. 408 p.

5. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Differential and Integral Calculus for One Variable Functions. Differential and Integral Calculus for One Variable Functions: Textbook. Kharkiv: NTU KhPI: 2017. 324 p.

6. Visha matematika: navch. posibnik: In 4 vol. Kurpa L.V., Kashuba Zh.B. ta in.; za red. Kurpa L.V. Kharkiv: NTU «KhPI», 2006. Ros. ta angl. movami.

7. Kurpa L.V., Mazur O.S., Shmatko T.V. Differential Equations and Series: Textbook. Kharkiv: NTU KhPI, 2013. 288 p.

8. Kurpa L.V., Morachkovskaya I.O., Sklepus A.N. Primenenie metoda R-funkcij k resheniyu nelineynykh zadach teorii pologih obolochek. Problemy mashinostroeniya. 2001. No 4 (1–2). P. 58–77.

9. Kurpa L.V., Pilgun G.V. Primenenie teorii R-funkcij k resheniyu zadach o nelineynykh kolebaniyax plastin slozhnoj formy. Dopovidi NAN Ukrainy. 2003. No 10. P. 52-56.

10. Kurpa L., Rvachev V., Ventsel E. The R-function

method for the free vibration analysis of thin orthotropic plates of arbitrary shape. Journal of sound and vibration. 2003. No 26. P. 109-122.

11. Kurpa L.V., Pilgun G.V., Onufriyenko O.G. Zastosuvannya metodu R-funkcij dlya doslidzhennya nelineynykh kolebanij plastin skladnoyi formi. Mashinoznavstvo. 2003. No 9. P. 3-7.

12. Kurpa L.V., Timchenko G.N. Issledovanie svobodnykh kolebanij anizotropnykh plastin slozhnoj formy. Vestnik NTU «KhPI». 2004. No 20. P. 39-44.

13. Kurpa L.V., Lyubitska K.I. Nelineynij analiz ortotropnykh plastin skladnoyi formi. Teoretichna i prikladna mehanika. 2005. Vol. 1. P. 161-166.

14. Kurpa L., Pilgun G. Application of the R-functions method to nonlinear vibrations of thin plates of arbitrary shape. Journal of sound and vibration. 2005. No 284. P. 379-392.

15. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Lyubitskaya E.I. Solution of vibration problems for shallow shells of arbitrary form by the R-functions method. Journal of sound and vibration. 2005. No 279. P. 1071-1084.

16. Kurpa L., Ventsel E. Analysis of sandwich plates of arbitrary shape. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2006. Vol. 12, Number 1. P. 33-41.

17. Kurpa L.V., Shmatko T.V., Onufriyenko O.G. Research of nonlinear vibrations of orthotropic plates with a complex form. Mathematical Problems in Engineering. 2006. P. 125-138.

18. Vladimir Logvinovich Rvachov. Se chelovek. Mnogo zvanykh – malo izbrannykh : biograf. sb. / redkol. : Kurpa L.V., Shmatko T.V., Shmatko A.V.; pod obshch. red. Kurpa L.V. Kharkiv: Novoye slovo, 2006. 80 p.

19. Kurpa L., Pilgun G., Amabili M. Nonlinear vibrations of



shallow shells with complex boundary: R-functions method and experiments. *Journal of Sound & Vibr.* 306. 2007. P. 580-600.

20. Kurpa L.V., Timchenko G.N. Issledovanie svobodnyh kolebanij mnogoslujnyh plastin slozhnoj formy v plane. *Problemy prochnosti.* 2007. № 5. P. 38-46.

21. Kurpa L.V., Chistilina A.V. Issledovanie kolebanij ortotropnyh obolochek peremennoj tolshiny s pomoshyu metoda R-funkcij. *Prikladnaya mehanika.* 2008. № 12. P. 27-34.

22. Kurpa L., Mazur O. Parametrichni kolivannya plastin skladnoyi formi planu. *Mashinostroystvo.* 2008. № 3. P. 9-15.

23. Kurpa L.V. Nelinejnye svobodnye kolebaniya mnogoslujnyh pologih obolochek simmetrichnogo stroeniya so slozhnoj formoj plana. *Mat. Metodi ta fiz.-meh. polya.* 2008. Vol. 51, №2. P. 75-85.

24. Kurpa L.V., Osetrov A.A. Reshenie zadach izgiba mnogoslujnyh pologih obolochek s primeneniem metoda R-funkcij i splajn-approksimacii. *Probl. Mashinostroyeniya.* 2010. Vol. 13, № 2. P. 38-50.

25. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures.* 2010. Vol. 93 P. 225-233.

26. Kurpa L.V., Lyubickaya K.I., Morachkovskaya I.O. Metod R-funkcij dlya resheniya nelinejnyh zadach izgiba ortotropnyh pologih obolochek na uprugom osnovanii. *Prikladnaya mehanika.* 2010. № 6. P. 56-65.

27. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. On the parametric vibrations and meshless discretization of orthotropic plates with complex shape. *The International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation.* 2010. Vol. 11(5). P. 371-386.

28. Kurpa L.V., Mazur O.S. Parametricheskie kolebaniya ortotropnyh plastin slozhnoj formy. *Prikladnaya mehanika.* 2010. № 4. P. 83-95.

29. Kurpa L.V., Lyubitskaya E.I., Morachkovskaya I.O. The R-Function Method Used to Solve Nonlinear Bending Problems for Orthotropic Shallow Shells an Elastic Foundation. *International Applied Mechanics.* 2010. Vol. 46, № 6. P. 660-668.

30. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2011. P. 1-10.

31. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex form with variable thickness. *Latin American Journal of Solid and Structures.* 10. 2013. P. 147-160.

32. Kurpa L.V., Mazur O.S., Tkachenko V.V. Parametrichni kolivannya bagatosharovih plastin skladnoyi formi. *Matematichni metodi ta fiziko-mechanichni polya.* 2013. Vol. 56, № 2. P. 136-150.

33. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plate with external cutout. *Lodz.* 2013. P. 427-438.

34. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures* 10. 2013. P. 175-188.

35. Kurpa L.V., Timchenko G.N., Budnikov N.A. K voprosu o postroenii sistemy bazisnyh funkcij dlya resheniya zadach o geometricheski nelinejnyh kolebaniyah mnogoslujnyh pologih obolochek. *Dinamicheskie sistemy.* 2013. Vol. 2 (30), № 3-4. P. 273-284.

36. Kurpa L.V., Budnikov N.A. Issledovanie vyzhdennyh nelinejnyh kolebanij mnogoslujnyh pologih obolochek pri po-

moshi mnogomodovoj approksimacii. *Visnyk donetskoho natsionalnoho universytetu, Ser. A: Pryrodnychi nauky.* 2013. № 1. P. 55-60.

37. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Svobodnye kolebaniya funkcionalno-gradientnyh pologih obolochek so slozhnoj formoj plana. *Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika.* 2014. Vol. 54, № 8. P. 77-86.

38. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Nonlinear vibrations of laminated shells with layers of variable thickness. *Shell Structures: Theory and Applications.* 2014. Taylor & Francis Group, London, UK. Vol. 3. P. 305-308.

39. Kurpa L., Mazur O. Investigation of Parametric Vibrations of Laminated plates by R-functions Method. *ENOC.* 2014. Vienna, July 6-11.

40. Kurpa L.V., Shmatko T.V. Primenenie metoda R-funkcij k issledovaniyu nelinejnyh kolebanij funkcionalno-gradientnyh pologih obolochek. *Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika.* 2014. Vol. 55, № 9. P. 59-70.

41. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory. *Composite Structures.* 2015. Vol. 125. P. 575-585.

42. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Dynamical instability of laminated plates with external cutout. *Int. J. of Nonlinear Mechanics.* 2016. Vol. 81. P. 103-114.

43. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shells of a complex shape. *Latin American Journal of Solid and Structures.* 2017. Vol. 14. P. 1648-1668.

44. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method. *Journal of Nonlinear Dynamics.* 2017. P. 133-147.

45. Kurpa L.V., Lyubickaya E.I., Morachkovskaya I.O. Geometricheski nelinejnyj izgib funkcionalno-gradientnyh plastin na uprugom osnovanii. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universytetu. Seriya «Mexanika neodnorodnyh struktur».* 2017. Vol. 2 (21). P. 77-88.

46. Awrejcewicz J., Kurpa L.V., Lyubitskaya E.I. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations. *Shell Structures: Theory and Applications.* Vol. 4. Proceedings of the 11th International Conference on Shell Structures: Theory and Applications. 2018. P. 61-64.

47. Lidiya K., Timchenko G., Osetrov A., Shmatko T. Nonlinear Vibration Analysis of Laminated Shallow Shells with Clamped Cutouts by the R-functions Method. *Nonlinear Dynamics.* 2018. Vol. 93 (1). P. 133-147.

48. Awrejcewicz J., Lidiya K., Shmatko T. Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions. *Non-linear Mechanics.* 2018. Vol. 107. P. 161-169.

49. Kurpa L.V., Timchenko G.N., Osetrov A.A. Nelineynye svobodnye kolebaniya mnogoslujnykh pologikh obolochek i plastin s vrezami i razlichnymi granichnymi uslovijami. *Visnik NTU "KhPI". Seriya: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh.* 2018. № 3. P. 52-59.

50. Shmatko T., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with clamped cutout of the complex form by the Ritz method and the R-functions theory. *Lat. Am. Journal of Solids Struct.* 2019. Vol. 16 №1, Rio de Janeiro 2019, Epub Feb 18.

Надійшло (received) 25.10.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Морачковська Ірина Олегівна (Morachkovskaya Irina Olegovna, Morachkovska Iryna)** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; Україна, тел.: (057)-707-60-32; e-mail: i.morachkovska@gmail.com.

**Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina Nikolaevna, Timchenko Galina)** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-60-32; e-mail: gntimchenko2000@gmail.com.

*Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСЬКИЙ, В. КОНКІН*

### ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ У ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті розглядається аналіз нестационарного температурного поля, яке виникає у циліндричному тілі при його індукційно-му нагріванні за допомогою зовнішнього спірального багатовиткового індуктора. Представлені результати аналітичного розв'язання за допомогою методу перетворення за Лапласом та чисельного розв'язання методом скінчених елементів.

**Ключові слова:** нестационарна теплопровідність, електромагнітне поле, індукційний нагрів, перетворення за Лапласом, метод скінчених елементів.

*Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСКИЙ, В. КОНКИН*

### ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВодНЫХ ТЕЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье рассматривается анализ нестационарного температурного поля, которое возникает в цилиндрическом теле при его индукционном нагревании при помощи внешнего спирального многовиткового индуктора. Представлены результаты аналитического решения, полученного при помощи метода преобразования по Лапласу и численного решения методом конечных элементов.

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, электромагнитное поле, индукционный нагрев, преобразование по Лапласу, метод конечных элементов.

*H. ALTENBACH, K. NAUMENKO, D. LAVINSKY, V. KONKIN*

### THE PROBLEMS OF TRANSIENT HEAT TRANSFER OF ELECTROCONDUCTIVE BODIES IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

The article deals with issues related to the analysis of transient propagation of the temperature field in electrically conductive bodies under the influence of an electromagnetic field. The action of the electromagnetic field on electrically conductive bodies is manifested in two versions: the possible movement of the body and a change in its temperature in accordance with the Joule-Lenz law. The energy of the electromagnetic field is used in various technological operations, including in the sense of changing the temperature of the processed objects. The use of the temperature effect of an electromagnetic field is typical, for example, for technological operations such as induction heating. A calculated study of the unsteady temperature field in this case allows us to select rational structural and operational parameters of the technological operation. In addition, it is known that a change in body temperature leads to the appearance of thermal deformations, which makes a certain contribution to the stress-strain state and can affect the working life and durability of technological equipment. Thus, the topic of the article is relevant in practical and scientific aspects. In the analysis of real structures, the features of their geometry and operating conditions require the use of numerical analysis methods. Analytical calculation methods, which most often allow obtaining approximate results, can be used as evaluative for simplified calculation models. In technological operations of induction heating of massive cylindrical billets, a spiral multi-coil inductor is very often used. The article considers the task of analyzing the spatio-temporal distribution of temperature in a cylindrical billet, which is heated by an external multi-turn inductor. The problem is considered in an axisymmetric formulation. The spatial-temporal distribution of the basic characteristics of the electromagnetic field is preliminarily determined. An analytical solution to the problem is presented, which was obtained by the Laplace transform method, under the assumption of unlimited workpiece, its ideal electrical conductivity, as well as neglecting the real heat transfer conditions at its boundary. The numerical solution of the problem is obtained by the finite element method and is devoid of these simplifications. The analysis of the influence of the size of the inductor on the nature of the distribution of the temperature field in the workpiece is carried out.

**Keywords:** transient heat transfer, electromagnetic field, induction heating, Laplace transform method, finite element method.

**Вступ.** Дія електромагнітного поля (ЕМП) на електропровідні тіла проявляється частіше за усе у двох варіантах: рух тіла (або його деформування) та зміна температури внаслідок тепловиділення згідно до закону Джоуля-Ленца. Саме ці два прояви найчастіше використовують у відповідних технологічних операціях. За деяких умов тепловиділення є достатньо інтенсивним, що призводить до значного зростання температури, яке може бути використане у технологічних цілях. Увесь великий клас операцій, заснованих на нагріванні заготовок за допомогою зовнішнього ЕМП

прийнято називати індукційний нагрів [1-3]. Розрахункові дослідження нестационарного розподілу температури у електропровідних заготовках дозволяють визначати раціональні значення конструкційних та експлуатаційних параметрів технологічного процесу. Також відомо, що неоднорідне температурне поле призводить до термодформування елементів конструкцій, яке може впливати на їх працездатність та довговічність. Отже, тема даної роботи є актуальною у теоретичному та практичному сенсі.

Відзначимо, що елементи конструкцій реальних

© Х. Альтенбах, К. Науменко, Д. Лавінський, В. Конкін, 2019

технологічних та технічних систем мають доволі складну геометрію та умови експлуатації, отже, розрахункові дослідження доцільно проводити із застосуванням відповідних чисельних методів. Аналітичні методи розрахунку, які зазвичай потребують значних спрощень розрахункових схем, можуть використовуватись у деяких випадках, як оціночні.

**Аналітичне розв'язання.** Розглянемо задачу із визначення нестационарного температурного поля циліндричної заготовки, яка нагрівається за допомогою змінного ЕМП – рис. 1.

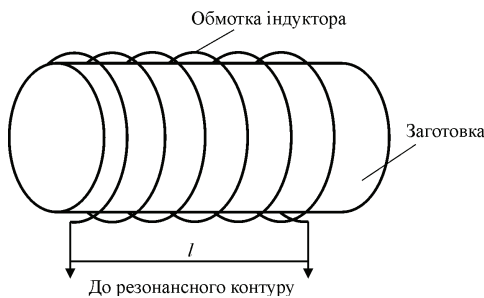


Рисунок 1 – Фізична модель процесу

При розв'язанні поставленої задачі аналітично необхідно зробити деякі припущення та спрощення:

– нехтуємо наявністю розрізу в області струмопроводів і вважаємо, що має місце осьова симетрія

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0\right);$$

– вважаємо, що індуктор є досить протяжним  $\frac{l}{R_2} \gg 1$  так, що реальною неоднорідністю поля в напрямку орта  $\vec{e}_z$  можна знехтувати і вважати, що

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx 0;$$

– вважаємо, що енергія магнітного поля, що збуджується сконцентрована у внутрішній порожнині соленоїда і на його внутрішній поверхні поздовжня  $z$ -компонента напруженості буде дорівнювати:

$$H_z^{\text{інд}} = \frac{NJ^{\text{інд}}(t)}{l^{\text{інд}}}, \text{ де } t - \text{ час, } N - \text{ кількість витків, } J^{\text{інд}}(t)$$

– струм, що збуджується,  $l^{\text{інд}}$  – довжина обмотки індуктора;

– приймаємо умову квазістационарного наближення процесу, так що  $\frac{\omega}{c} \cdot a \ll 1$ , де  $\omega$  – характерна

циклічна частота в спектрі збуджуючого струму,  $a$  – характерний розмір системи,  $c$  – швидкість світла у вакуумі. З урахуванням зроблених припущень розрахункова схема аналітичного розв'язання набуває вигляд, наведений на рис. 2.

Аналітичний розв'язок будемо відшукувати згідно до схеми перетворення за Лапласом [4]. Подібний спосіб розв'язання диференціальних рівнянь Максвелла часто застосовується на практиці [5, 6]. Відповідно до прийнятих припущень і розрахункової моделі рівнянь

Максвелла для ненульових складових напруженостей електричного та магнітного полів, перетворених за Лапласом у циліндричній системі координат з урахуванням нульових початкових умов, можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}(p, r)) = -\mu_0 p H_z(p, r); \\ -\frac{\partial H_z(p, r)}{\partial r} = \varepsilon_0 p E_{\varphi}(p, r); \\ -\frac{\partial H_z(p, r)}{\partial r} = \gamma E_{\varphi}(p, r), \end{cases} \quad (1)$$

де  $p$  – параметр перетворення Лапласа;  $\gamma$  – електропровідність металу заготовки. З системи диференціальних рівнянь (1) одержуємо одне диференціальне рівняння для напруженості електричного поля в середовищах з різними електрофізичними характеристиками:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}(p, r)) \right) - k_{1,2}^2(p) E_{\varphi}(p, r) = 0, \quad (2)$$

де  $k_{1,2}$  – хвильові числа,  $k_1(p) = \frac{p}{c}$  (для областей з діелектричним заповненням);  $k_{1,2}(p) = k_2(p) = \sqrt{p\mu_0\gamma}$  (для областей зі скінченою провідністю);  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

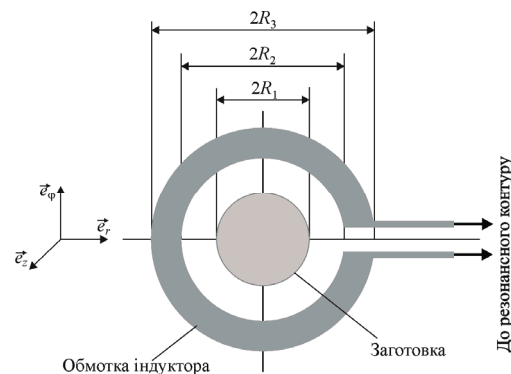


Рисунок 2 – Розрахункова схема аналітичного розв'язання

Стандартний процес розв'язання, подібний до наведених прикладів у [5, 6], в решті дозволяє одержати прямо пропорційний зв'язок між струмом збудження (у індукторі) і струмом, індуктованим в металі циліндричної заготовки, що нагрівається.

$$J(t) \approx NJ^{\text{інд}}(t). \quad (3)$$

Одержаний результат (3) свідчить про те, що величина індукovanого струму в циліндричній системі індукційного нагріву з робочими частотами до  $\sim 30 \div 50$  кГц та сталевими немагнітними заготовками ( $\sim 0,4 \cdot 10^7$  1/Ом·м) з поперечними розмірами  $\sim 0,01 \div 0,05$  м встановлюється виключно кількістю витків обмотки індуктора  $-N$  і не залежить від часових характеристик електромагнітних процесів  $-\omega$ , а також від геометрії

системи, яка визначається співвідношенням  $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ .

Далі одержимо оціночні вирази для температури,

яка має місце у заготовці в результаті тепловиділення, використовуючи підхід викладений у [5]. Оціночними вони є тому, що одержані у припущенні про відсутність теплообміну. Тож вважаємо, що має місце нагрів (відповідно до закону Джоуля-Ленца) лише тієї частини заготовки, де сконцентрований індукований струм. Розвиток процесів проникнення діючих полів дозволяє вважати, що область концентрації – це «умовний» провідник з площею поперечного перерізу  $S \approx \delta l$ , де  $\delta$  – величина скін-шару,  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}}$ , і довжиною  $\sim 2\pi R$ .

Опускаючи проміжні перетворення, в кінцевому підсумку, знаходимо приріст температури зразка за час –  $\Delta t \gg \frac{2\pi}{\omega}$ :

$$\Delta T^\circ \approx \Delta t \frac{2\pi}{c\rho\gamma} \left( \frac{R_1}{l} \right) \left( \frac{N J_m}{S} \right)^2, \quad (4)$$

де  $c$  – питома теплоємність,  $\rho$  – масова густина матеріалу,  $\gamma$  – питома електропровідність,  $J_m$  – амплітудне значення струму збудження. Дана формула (за усіх зроблених припущень та спрощень), фактично, дозволяє визначати залежність температури на поверхні протяжної заготовки у зоні, що відповідає середині коаксіального індуктора.

**Чисельне моделювання.** Тепер перейдемо до чисельного розв'язання, яке було проведене для розрахункової схеми, наведеної на рис. 3. Задача розв'язувалась у вісесиметричній постановці, джерелом ЕМП вважався струм, густина якого задавалась рівномірно розподіленою по перерізах витків індуктора. На першому етапі розв'язання було знайдено просторово-часові розподілення основних компонент ЕМП. Для цієї задачі розглядалась розрахункова схема, що містила індуктор, провідник та повітряне оточуюче середовище. Визначальним рівнянням для чисельного розв'язання є диференціальне рівняння для ненульової компоненти векторного магнітного потенціалу, яке витікає із загальної постановки задачі [7, 8]:

$$\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} - \mu_c \gamma \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = -\mu_0 J(t). \quad (5)$$

На зовнішніх границях середовища –  $\Gamma_1$  задавались однорідні граничні умови відносно єдиної ненульової компоненти векторного магнітного потенціалу:  $A_\phi = 0$ . СЕ-розбиття системи (індуктор – заготовка – повітря) наведено на рис. 4, розбиття обране нерівномірним із згущенням в околі витків індуктора.

На другому етапі розглядалась задача нестационарної теплопровідності для заготовки, індуктор та оточуюче середовище (повітря) із розгляду виключалось. Просторово-часовий розподіл температури для вісесиметричної постановки задачі визначається диференціальними рівняннями:

$$K \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + Q = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6)$$

де  $K$  – коефіцієнт теплопередачі;  $Q$  – питома потуж-

ність внутрішніх джерел тепловиділення:  $Q = \frac{1}{\gamma} j_\theta^2$ ;

$j_\theta$  – окружна компонента густини вихрового струму, яка є єдиною ненульовою у випадку розгляду вісесиметричної постановки. На граничних поверхнях заготовки розглядались умови конвекційного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r=R_1)}{\partial r} &= \frac{\alpha}{K} [T(r=R_1) - T_\infty] \\ \frac{\partial T(z=\pm L/2)}{\partial z} &= \frac{\alpha}{K} [T(z=\pm L/2) - T_\infty] \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт конвекційного теплообміну,  $T_\infty$  – температура зовнішнього середовища.

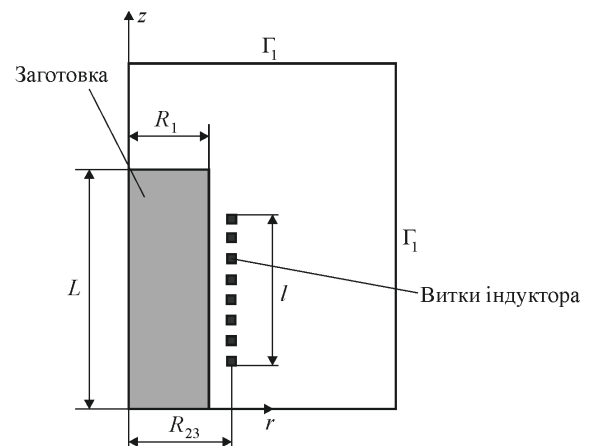


Рисунок 3 – Розрахункова схема для чисельного розв'язання

Розв'язання поставленої задачі нестационарної теплопровідності є еквівалентним задачі пошуку стаціонарного значення функціоналу температури, який є конкретизацією загального випадку:

$$\begin{aligned} \text{Tr} = \iint_S \left\{ \frac{K}{2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - QT + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} r dS + \\ + \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{2} [T^2 - 2T_\infty T] r d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

тут  $\Gamma_2$  – границя заготовки.

Заготовка розглядалась у вигляді суцільного циліндру, виготовленого із немагнітної сталі. Характеристики матеріалу: питома електропровідність –  $\gamma = 0,4 \cdot 10^6$  1/(Ом·м); питома теплоємність –  $c = 460$  Дж/(кг·град); густина речовини –  $\rho = 9000$  кг/м<sup>3</sup>. Геометричні параметри заготовки: довжина –  $L = 0,08$  м, радіус –  $R_1 = 0,025$  м. Індуктор вважався виготовленим із міді: питома електропровідність –  $\gamma = 0,4 \cdot 10^7$  1/(Ом·м); питома теплоємність –  $c = 360$  Дж/(кг·град); густина речовини –  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup>. Геометричні параметри: довжина –  $\ell = 0,05$  м, радіус –  $R_{23} = 0,035$  м, кількість витків – 10, поперечний переріз витка – квадрат (4×4 мм). Характеристики струму у індукторі: амплітуда струму 55 А; частота струму 50 кГц.

**Аналіз результатів.** На першому етапі чисельного розв'язання були проведені дослідження з метою

вибору розмірів розрахункової області, які показали, що ЕМП загасає з достатнім ступенем точності на відстані  $2R_{23}$  і у горизонтальному, і у вертикальному напрямках ( $R_{23} = \frac{R_3 - R_2}{2}$ ).

Представлені результати з розподілу магнітного поля та температури наведені для моменту часу  $t = 10$  с. Наведені дані із розподілу магнітного поля свідчать про його значну неоднорідність в області моделі (рис. 5), найбільші значення фіксуються у заготовці безпосередньо навпроти витків індуктора.

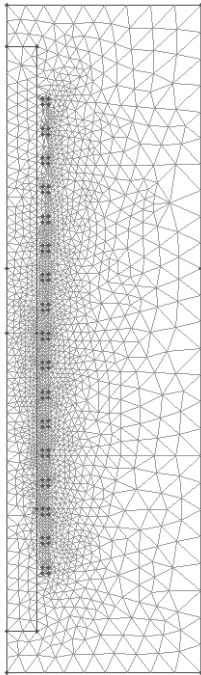


Рисунок 4 – СЕ-розбиття

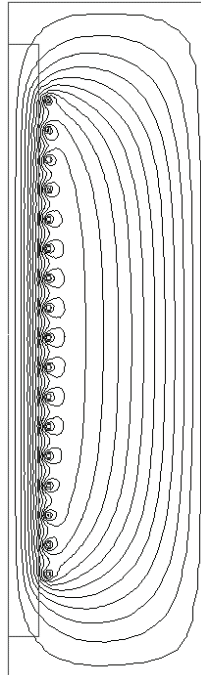


Рисунок 5 – Силві лінії магнітного поля

Відзначимо, що просторовий розподіл температури у заготовці є також суттєво неоднорідним (рис. 6), що стосується розподілу і вздовж радіальної, та осової координати, тобто припущення стосовно однорідного розподілу температури у заготовці, у яких одержано аналітичний розв'язок, є далекими від реальності. Таким чином, аналітичний розв'язок (4) може надавати лише деяку інформацію про часовий розподіл температури у середній точці поверхні заготовки, у обраній системі координат це точка (0;0). З метою порівняння аналітичних та чисельних розв'язків розглянемо графіки залежності температури від часу на поверхні заготовки (розглядаємо середину заготовки) – рис. 7.

З рисунку видно, що має місце якісне та кількісне відхилення чисельного результату від аналітичного. Формула (4), яка була одержана в припущенні про відсутність теплообміну дає лінійну залежність приросту температури від часу, натомість чисельний розв'язок свідчить про суттєву нелінійність при зростанні температури. Ця нелінійність обумовлена саме явищами теплообміну із зовнішнім середовищем (в умовах конвекційного теплообміну), а також теплопере-

дачею з іншими зонами заготовки. Таким чином, формула (4), одержана аналітично у подібних задачах може використовуватись лише з метою попереднього оцінювання достовірності результатів чисельних розрахунків.

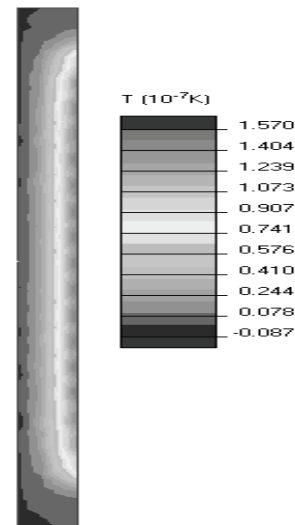
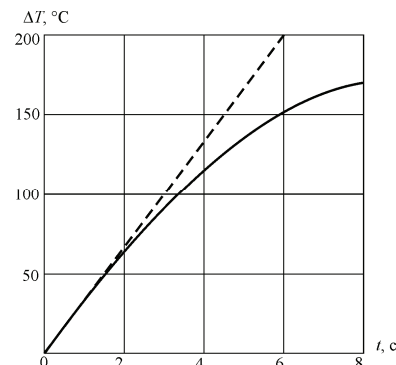
Рисунок 6 – Розподіл температури у заготовці у момент часу  $t = 10$  с

Рисунок 7 – Залежність від часу температури на поверхні середини заготовки. Штрихова лінія – аналітичний розв'язок; суцільна лінія – розв'язок МСЕ

**Висновки.** Розглянуто розв'язання задачі нестационарної теплопровідності вісесиметричного електропровідного тіла у змінному електромагнітному полі на прикладі технологічної операції індукційного нагріву циліндричної заготовки спіральним багатовитковим індуктором. Проведене порівняння результатів аналітичних та чисельних розрахунків. Наведений підхід до створення розрахункової схеми та розв'язання методом скінчених елементів може використовуватись при аналізі нестационарного температурного поля у подібних системах.

#### Список литературы

1. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А., Пашин Н.А., Савицкий В.В., Ткачук Г.И. Перераспределение остаточных сварочных напряжений при обработке импульсным электромагнитным полем. Проблемы прочности. 2011. № 3. С. 123-131.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.

3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. *Journal of materials processing technology*. 2005. № 161 (1-2). С. 269-275.

4. Араманович И. Г. Уравнения математической физики. Рипол Классик. 1964.

5. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Магнитно-импульсная обработка тонкостенных металлов. Харьков: Изд. МОСТ-Торнадо, 2002. 284 с.

6. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Л.Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. 2003.

7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

8. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. *Strength of Materials*. 2016. Vol. 48. No. 6. P. 760-767.

#### Bibliography (transliterated)

1. Stepanov G.I., Babytskii A.I., Mameev I.A., Paschin N.A., Savickii V.V., Tkachuk G.I. *Pereraspredelenie ostatoch-*

*nykh napryazhenii pri obrabotke impulsnym electromagnitnym polem. Problemy prochnosti*. 2011. № 3. P. 123-131.

2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. *Handbook of induction heating*. CRC press. 2017.

3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. *Journal of materials processing technology*. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.

4. Aramanovich I.G. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. Ripol Klassik. 1964.

5. Batugin Yu.V., Lavinsky V.I. *magnitno-impulsnaya obrabotka tonkostennykh metallov*. Kharkiv: Izd. «MOST-Tornado», 2002. 284 p.

6. Batugin Yu.V., Lavinsky V.I., Khimenko L.T. *Impulsnye magnitnye polya dlya progressivnykh tekhnologii*. 2003.

7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

8. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. *Strength of Materials*. 2016. Vol. 48. No. 6. P. 760-767.

*Поступила (received) 01.10.2019*

#### *Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Альтенбах Хольм (Альтенбах Хольм, Altenbach Holm)** – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина (Prof. Dr.-Ing.habil.Dr.h.c.mult., Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Magdeburg, Germany), e-mail: holm.altenbach@ovgu.de

**Науменко Костянтин (Науменко Константин, Naumenko Konstantin)** – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина (Prof. Dr.-Ing.habil., Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Magdeburg, Germany.), e-mail: konstantin.naumenko@ovgu.de

**Лавінський Денис (Лавинский Денис, Lavinsky Denis)** – кандидат технічних наук, доцент, кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

**Конкін Валерій (Конкин Валерий, Konkın Valerii)** – кандидат технічних наук, професор, кафедра механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, НТУ «ХПІ», e-mail: 1956kvn@gmail.com

*А.Г. АНДРЕЕВ, В.А. КОВАЛЕВА*

### **ВЛИЯНИЕ ТОНКОСТЕННОСТИ НА НДС ПРОФИЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ**

В машинах и технологическом оборудовании для передачи значительных осевых сил и крутящих моментов находят широкое применение соединения деталей посадкой с натягом. Такие соединения позволяют передавать значительные осевые усилия и крутящие моменты. Посадки с натягом используются для соединения с валом различных конструктивных элементов вместо шпоночных, болтовых и сварных соединений. Они являются более экономичными и рациональными по сравнению, например, со шпоночными соединениями, также исчезает опасность возникновения значительной концентрации напряжения в местах шпоночных канавок. Прочность соединения в неподвижных посадках с натягом достигается за счет упругой, а иногда также пластической деформации соединяемых деталей, возникающей при технологическом процессе сборки. Прочность и относительная неподвижность таких соединений обеспечивается силами трения между сопрягаемыми деталями, обусловленной величиной натяга. Целью данной работы является оценка зависимости напряженно-деформированного состояния разных видов профильных соединений с натягом. Были исследованы соединения круглых втулок с отверстиями круглой, эллиптической и шестигранной формы с валами соответствующей формы. На основе ПК ANSYS были получены результаты, представленные в виде таблиц и графиков для суммарных перемещений, контактных давлений и эквивалентных напряжений. Показана зависимость напряженно-деформированного состояния профильных соединений указанных типов от фактора тонкостенности. Практическое значение полученных результатов состоит в оценке прочности соединений с натягом, имеющих различную форму вала, и пригодности их для использования.

**Ключевые слова:** посадка с натягом, прочность соединений, напряженно-деформированное состояние, фактор тонкостенности.

*А.Г. АНДРЕЄВ, В.А. КОВАЛЬОВА*

### **ВПЛИВ ТОНКОСТЕННІСТІ НА НДС ПРОФІЛЬНИХ З'ЄДНАНЬ З НАТЯГОМ**

У машинах і технологічному обладнанні для передачі значних осьових сил і крутячих моментів широко застосовуються з'єднання деталей посадкою з натягом. Такі з'єднання дозволяють передавати значні осьові зусилля і крутячі моменти. Посадки з натягом використовуються для з'єднання з валом різних конструктивних елементів замість шпоночних, болтових і зварних з'єднань. Вони є економічнішими і раціональнішими порівняно наприклад, зі шпоночними з'єднаннями, також усувається небезпека виникнення значної концентрації напружень в місцях шпоночних канавок. Міцність з'єднання в нерухомих посадках з натягом досягається за рахунок пружної, а іноді також пластичної деформації деталей, що сполучаються, яка виникає при технологічному процесі складання. Міцність і відносна нерухомість таких з'єднань забезпечується силою тертя між деталями, обумовленої величиною натягу. Метою даної роботи є оцінка залежності напружено-деформованого стану різних видів профільних з'єднань з натягом. Були досліджені з'єднання круглих втулок з отворами круглої, еліптичної і шестигранної форми з валами відповідної форми. На основі ПК ANSYS були отримані результати, представлені у вигляді таблиць і графіків для сумарних переміщень, контактної тиску і еквівалентних напружень. Показана залежність напружено-деформованого стану профільних з'єднань вказаних типів від фактору тонкостінності. Практичне значення отриманих результатів полягає в оцінці міцності з'єднань з натягом, що мають різну форму валу, і придатності їх для використання.

**Ключові слова:** посадка з натягом, міцність з'єднань, напружено-деформований стан, фактор тонкостінності.

*A.G. ANDREEV, V.A. KOVALEVA*

### **INFLUENCE THIN-WALLED FACTOR ON THE DEFLECTED MODE OF PROFILE JOINTS WITH INTERFERENCE**

In machines and technological equipment for transmitting significant axial forces and torques, the connection of parts by interference fit is widely used. Such joints allow the transmission of significant axial forces and torques. An interference fit is used to connect various structural elements to the shaft instead of key, bolt and welded joints. They are more economical and rational in comparison with, for example, keyed joints, and the risk of a significant stress concentration in the places of keyed grooves also disappears. The strength of the connection in stationary fit is achieved due to the elastic, and sometimes also plastic deformation of the parts to be joined that occurs during the assembly process. The strength and relative immobility of such joints is ensured by the forces of friction between the mating parts, due to the magnitude of the interference fit. The aim of this work is to assess the dependence of the deflected mode of different types of profile joints with interference. The connections of round bushings with round, elliptical and hexagonal holes with shafts of the corresponding shape were investigated. Based on the ANSYS PC, the results were obtained, presented in the form of tables and graphs for the total displacements, contact pressures and equivalent stresses. The dependence of the deflected mode of the profile compounds of the indicated types on the thin-walled factor is shown. The practical significance of the obtained results consists in assessing the strength of the interference fit having a different shaft shape and their suitability for use.

**Keywords:** interference fit, strength of the connection, deflected mode, thin-walled factor.

В машинах и технологическом оборудовании для передачи значительных осевых сил и крутящих моментов находят широкое применение соединения деталей посадкой с натягом. Такие соединения позволяют передавать значительные осевые усилия и крутящие моменты. Посадки с натягом используются для соединения с валом различных конструктивных элементов вместо шпоночных, болтовых и сварных соединений. Они являются более экономичными и рациональными по сравнению, например, со шпоночными соединениями, также исчезает опасность возникновения значительной концентрации напряжения в местах шпоночных канавок. Прочность соединения в неподвижных посадках с натягом достигается за счет упругой, а иногда также пластической деформации соединяемых деталей, возникающей при технологическом процессе сборки.

Из практики известно, что соединения с натягом характеризуются низкой усталостной прочностью валов и осей. Предел выносливости деталей из конструкционных сталей в посадках в 2-3 раза ниже предела выносливости гладких образцов, а предел выносливости по трещинообразованию приблизительно в два раза ниже предела выносливости по излому. Основными факторами, вызывающими такое резкое снижение усталостной прочности валов и осей, принято считать концентрацию контактного давления у торцов ступиц или коррозию трения на подступичных частях этих деталей, что приводит к появлению трещин и разрушения [1, 2].

Попытка устранить эти недостатки привела к появлению профильных бесшпоночных конструкций, которые используют валы некруглого поперечного сечения, которые соединяются натягом со втулкой соответствующей формы [3]. Такие соединения применяются для изготовления сложных зубчатых, червячных и локомотивных колес, коленчатых валов, соединений зубчатых колес с валами, для посадки подшипников на вал, роторов электродвигателей и др.

Самыми распространенными способами сборки является запрессовка одной детали в другую усилием прессы («прессовая посадка»), предварительный нагрев охватываемой детали с последующей сборкой («горячая посадка»), предварительное охлаждение внутренней детали жидким азотом с последующей сборкой или комбинация этих способов. От относи-

тельной величины натяга, характеристик материала деталей, качества поверхностей, способа сборки, зависит прочность соединения. Прочность неподвижных соединений также зависит от отклонений от правильной геометрической формы собираемых деталей, которые могут приводить к ослаблению соединения [4-8].

Прочность и относительная неподвижность таких соединений обеспечивается силами трения между сопрягаемыми деталями, обусловленного величиной натяга. Рабочая поверхность профильных соединений может быть расположена как параллельно осевой линии вала, так и наклонно к ней.

**Целью** данной работы является определение зависимости напряженно-деформированного состояния профильных соединений с натягом от фактора тонкостенности  $\varphi = d_0/d_1$ , который представляет отношение внутреннего  $d_0$  и внешнего  $d_1$  диаметров соединяемых элементов, в данном случае вала и втулки.

В работе выполнены следующие этапы:

- построение моделей профильных соединений;
- численное исследование НДС соединенных элементов на основе ПК ANSYS;
- разработка прикладной программы в среде Delphi;
- анализ полученных результатов.

Для построения моделей в качестве материала использовалась сталь марки 40X (табл. 1).

Таблица 1 – Характеристики материала

Название физического параметра	Значения для стали 40X
Модуль упругости $E$ , МПа	$0,21 \cdot 10^6$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7800
Предел текучести $G_T$ , МПа	785
Коэффициент трения $\mu$	0,15

Исследуемая профильные соединения представлены на рис. 1 в виде трех вариантов, втулки которых имеют форму цилиндра, отверстия в них – разной формы: А – круглой, Б – эллиптической, В – шестигранной. Форма вала соответствует форме отверстия втулки. Каждый вариант соединений представлен тремя типами размеров (табл. 2-4).

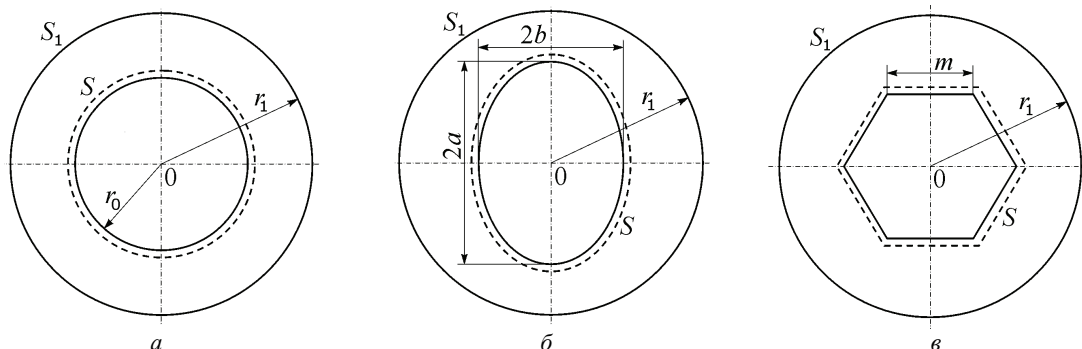


Рисунок 1 – Исследуемые варианты профильных соединений:

*a* – А – втулка с круглым отверстием и вал круглой формы, *б* – Б – втулка с отверстием эллиптической формы и вал эллиптической формы, *в* – В – втулка с шестиугольным отверстием и шестиугольный вал



Таблица 2 – Геометрические характеристики для варианта соединения А

Характеристика	Тип соединения		
	I	II	III
Внешний радиус втулки $r_1$ , м	0,11	0,089	0,2 – 1,0
Внутренний радиус втулки $r_0$ , м	0,062	0,05	0,05
Периметр контактной зоны $S$ , м	0,390	0,314	0,314
Внешний периметр втулки $S_1$ , м	0,691	0,557	1,256 – 6,283
Диаметральный натяг $\delta$ , м	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$
Фактор тонкостенности $\varphi = r_0/r_1$	0,564	0,564	0,25 – 0,05

Таблица 3 – Геометрические характеристики для варианта соединения Б

Характеристика	Тип соединения		
	I	II	III
Внешний радиус втулки $r_1$ , м	0,11	0,089	0,1 – 1,0
Большая полуось эллипса $a$ , м	0,069	0,056	0,056
Малая полуось эллипса $b$ , м	0,055	0,044	0,044
Периметр контактной зоны $S$ , м	0,390	0,314	0,314
Внешний периметр втулки $S_1$ , м	0,691	0,557	0,628 – 6,283
Диаметральный натяг $\delta$ , м	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$
Фактор тонкостенности $\varphi = 0,5(a+b)/r_1$	0,564	0,562	0,50 – 0,05

Таблица 4 – Геометрические характеристики для варианта соединения В

Характеристика	Тип соединения		
	I	II	III
Внешний радиус втулки $r_1$ , м	0,11	0,089	0,15 – 1,0
Длина стороны шестигранника $m$ , м	0,065	0,0524	0,0524
Отверстие втулки $r_0$ , м	0,046 – 0,065	0,0371 – 0,0524	0,0371 – 0,0524
Периметр контактной зоны $S$ , м	0,390	0,314	0,314
Внешний периметр втулки $S_1$ , м	0,691	0,557	0,942 – 6,283
Диаметральный натяг $\delta$ , м	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,12 \cdot 10^{-3}$
Фактор тонкостенности $\varphi = r_0/r_1$	0,418 – 0,590	0,417 – 0,589	0,037 – 0,349

Для исследований в работе используется программный комплекс ANSYS. Применены КЭ типа PLANE82, PLANE42. Расчетная схема для исследования показана на рис. 2.

В табл. 5-7 представлены результаты исследований вариантов соединений А, Б, В. В таблицах даны максимальные значения перемещений  $u_{\max}$ , контактного давления  $P_{\max}$  и эквивалентных напряжений  $\sigma_{e \max}$ .

На рис. 3-5 даны графики зависимости максимального перемещения  $u_{\max}$ , контактного давления  $P_{\max}$ , эквивалентных напряжений  $\sigma_{e \max}$  от коэффициента тонкостенности  $\varphi$ .

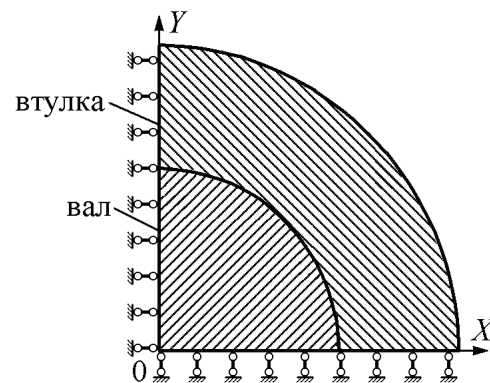


Рисунок 2 – Расчетная схема профильного соединения

Таблица 5 – Результаты исследований для варианта соединения А

$\varphi$	0,564	0,564	0,25	0,200	0,167	0,125	0,100	0,0833	0,0714	0,0625	0,0556	0,050
$r_1$ , м	0,11	0,089	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u_{\max} \cdot 10^6$ , м	40,1	40,1	22,3	18,5	15,7	11,8	9,26	7,48	6,17	5,18	4,22	3,81
$P_{\max}$ , МПа	61,1	75,9	65,3	56,2	48,6	37,3	29,5	23,9	19,8	16,6	14,2	12,3
$\sigma_{e \max}$ , МПа	157	195	117	96,8	81,0	58,7	44,1	34,0	26,8	21,5	17,6	14,5

Таблица 6 – Результаты исследований для варианта соединения Б

$\varphi$	0,564	0,564	0,5	0,333	0,250	0,200	0,167	0,125	0,100	0,0833	0,0714	0,0625	0,0556	0,050
$r_1$ , м	0,11	0,089	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u_{\max} \cdot 10^6$ , м	45,1	45,4	43,8	39,7	38,1	37,4	37,0	36,6	36,4	36,3	36,2	36,1	36,1	36,1
$P_{\max}$ , МПа	69,2	87,2	92,9	102	104	105	106	106	106	106	106	106	106	106
$\sigma_{e \max}$ , МПа	248	313	293	257	237	223	212	195	181	169	159	150	142	134

Таблица 7 – Результаты исследований для варианта соединения В

$\phi$	0,564	0,564	0,333	0,250	0,200	0,167	0,125	0,100	0,0833	0,0714	0,0625	0,0556	0,050
$r_1, \text{M}$	0,11	0,089	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u_{\max} \cdot 10^6, \text{M}$	48,0	47,8	42,0	40,8	40,3	39,9	39,6	39,8	39,4	39,5	39,6	39,4	39,2
$P_{\max}, \text{MПа}$	123	155	173	177	179	177	181	184	180	189	175	177	180
$\sigma_{e \max}, \text{MПа}$	514	630	456	418	387	354	341	326	302	281	257	242	221

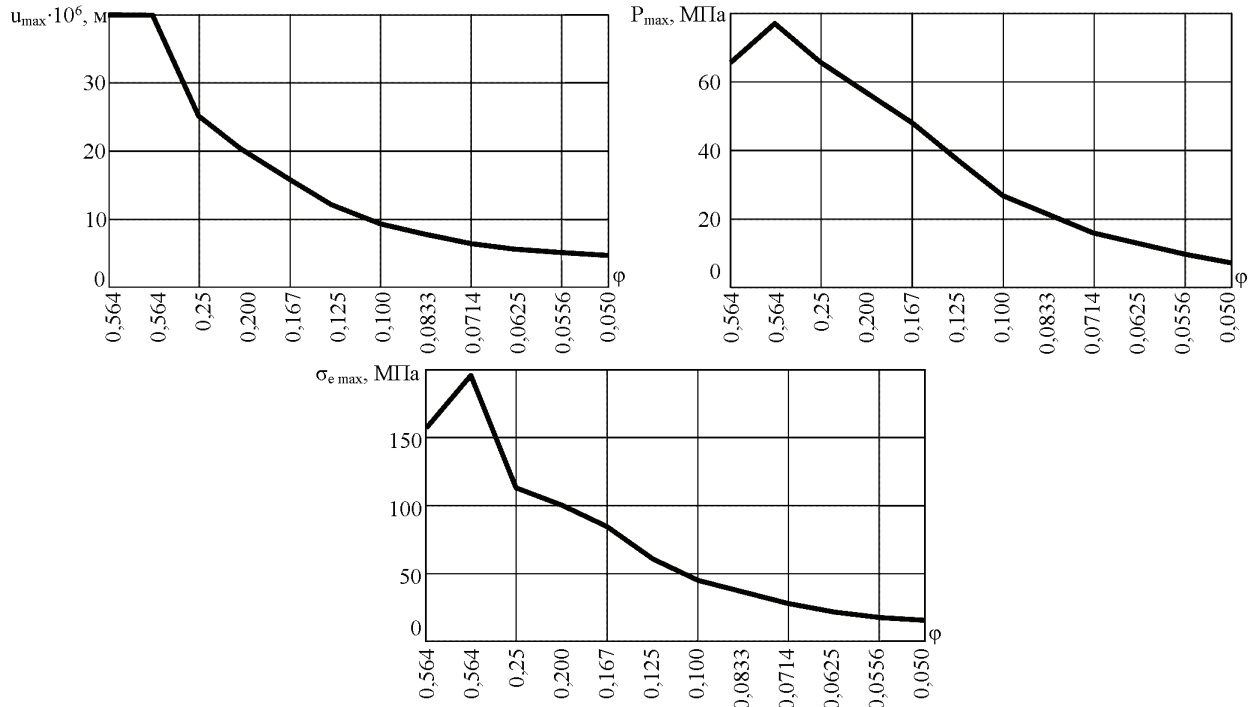


Рисунок 3 – Результаты исследований для варианта соединения А (соединение круглой формы)

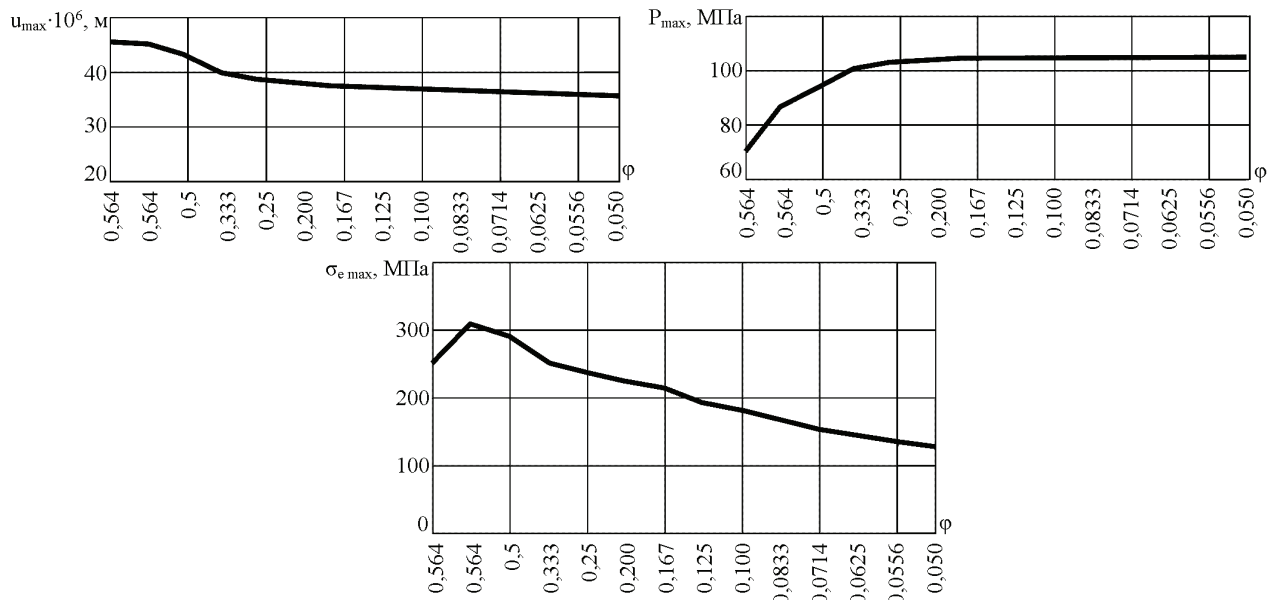


Рисунок 4 – Результаты исследований для варианта соединения Б (соединение овальной формы)

В работе была проведена оценка зависимости напряженно-деформированного состояния от фактора тонкостенности  $\phi$  разных видов профильных соединений с натягом. Были исследованы соединения круглых втулок с отверстиями круглой, эллиптической и шестигранной формы с валами соответствующей формы. Для рассматриваемых вариантов сопоставлялись два

состояния соединения, в которых были равны либо длина контактной зоны, либо величина натяга при варьировании  $\phi$  изменением внешнего радиуса втулки  $r_1$ . На основе ПК ANSYS были получены результаты, представленные в виде таблиц и графиков для суммарных перемещений, контактных давлений и эквивалентных напряжений.

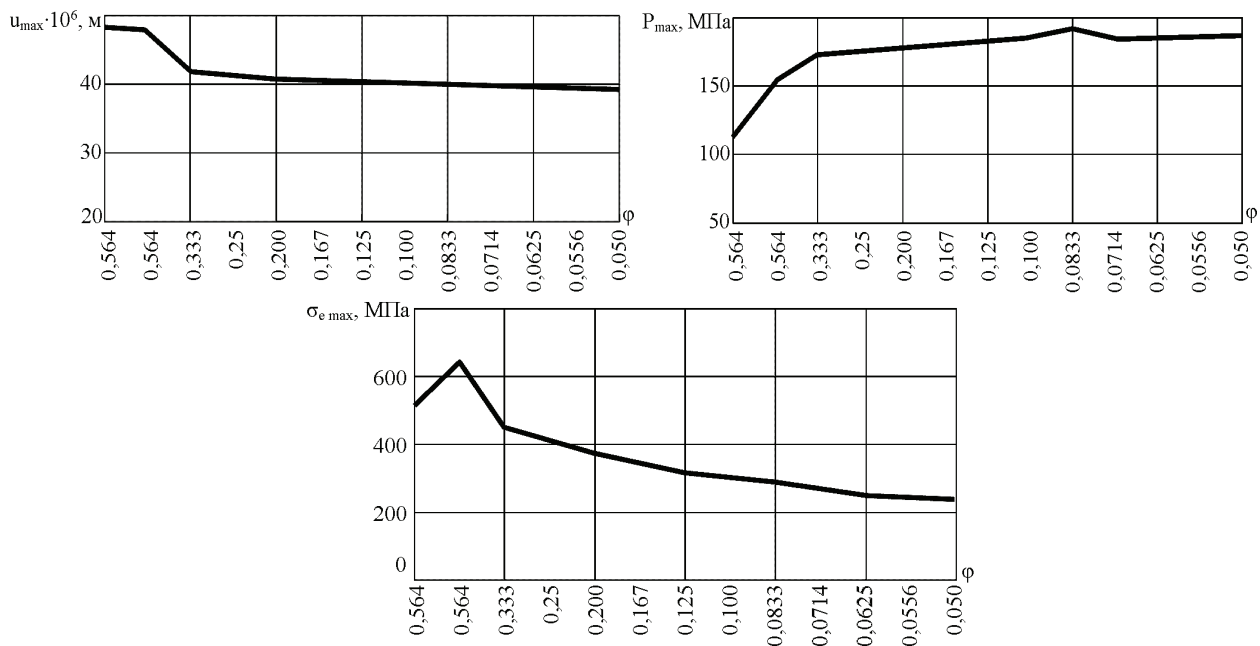


Рисунок 5 – Результаты исследований для варианта соединения В (соединение шестигранной формы)

Максимальные суммарные перемещения  $u_{\max}$  наибольшие у предельно тонкостенных втулок и снижаются по мере увеличения радиального размера втулки:  $u_{\max} = 40,1 \cdot 10^{-6}$  м (вариант А);  $45,4 \cdot 10^{-6}$  м (вариант Б);  $47,8 \cdot 10^{-6}$  м (вариант В) при  $\phi = 0,564$ ;  $u_{\max} = 38,1 \cdot 10^{-6}$  м (вариант А);  $36,1 \cdot 10^{-6}$  м (вариант Б);  $39,2 \cdot 10^{-6}$  м (вариант В) при  $\phi = 0,050$ .

Максимальные контактные напряжения в зоне соединения сопрягаемых элементов у тонкостенных втулок равны  $P_{\max} = 75,9$  МПа (вариант А);  $87,2$  МПа (вариант Б);  $155$  МПа (вариант В) при  $\phi = 0,564$  и по мере увеличения радиального размера втулки падают до величины  $P_{\max} = 12,3$  МПа (вариант А) и растут до  $P_{\max} = 106$  МПа (вариант Б);  $180$  МПа (вариант В) при  $\phi = 0,050$ .

Максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_{e \max}$  наибольшие у тонкостенной втулки и снижаются по мере увеличения радиального размера втулки  $\sigma_{e \max} = 195$  МПа (вариант А);  $313$  МПа (вариант Б);  $630$  МПа (вариант В) при  $\phi = 0,564$ ;  $\sigma_{e \max} = 145$  МПа (вариант А);  $134$  МПа (вариант Б);  $301$  МПа (вариант В) при  $\phi = 0,050$ .

Практическое значение полученных результатов состоит в оценке прочности соединений с натягом, имеющих различную форму вала, и пригодности их для использования.

#### Список литературы

1. Балацкий Л.Т. Усталость валов в соединениях. Киев: Техніка, 1972. 180 с.
2. Балацкий Л.Т. Прочность прессовых соединений. Киев: Техніка, 1982. 151 с.
3. Данилов Д. В., Андреев А. Г. НДС профильных соединений с натягом под действием контактных нагрузок. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2011. Вип. 52. – С. 63-76.

4. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении. Москва-Ленинград: Машиностроение, 1968. 168 с.

5. Дунаев П.Ф., Леликов О.П., Варламова Л.П. Допуски и посадки. Обоснование выбора. Москва: Высшая школа, 1984. 112 с.

6. Пригоровский Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений. Москва: Машиностроение, 1983. 248 с.

7. Зенкин А.С., Арпентьев Б.М. Сборка неподвижных соединений термическими методами. Москва: Машиностроение, 1987. 128 с.

8. Гречисhev Е.С., Ильяшенко А.А. Соединения с натягом: расчеты, проектирование, изготовление. Москва: Машиностроение, 1981. 247 с.

#### Bibliography (transliterated)

1. Balackij L.T. Uсталost' valov v soedineniyah. Kyiv: Tehnika, 1972. 180 p.
2. Balackij L.T. Prochnost' pressovyh soedinenij. Kyiv: Tehnika, 1982. 151 p.
3. Danilov D.V., Andreev A.G. NDS profil'nyh soedinenij s natygom pod dejstviem kontaktnyh nagruzok. Zbirnyk naukovykh prac'. Tematychnyj vypusk: Dynamika i micnist' mashyn. Kharkiv: NTU "KhPI". 2011. Vyp. 52. P. 63-76.
4. Berniker E.I. Posadki s natygom v mashinostroenii. Moscow-Leningrad: Mashinostroenie, 1968. 168 p.
5. Dunaev P.F., Lelikov O.P., Varlamova L.P. Dopuski i posadki. Obosnovanie vybora. Moscow: Vysshaya shkola, 1984. 112 p.
6. Prigorovskij N.I. Metody i sredstva opredeleniya polej deformacij i napryazhenij. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 248 p.
7. Zenkin A.S., Arpent'ev B.M. Sborka nepodvizhnyh soedinenij termicheskimi metodami. Moscow: Mashinostroenie, 1987. 128 p.
8. Grechishev E.S., Ilyashenko A.A. Soedineniya s natygom: raschety, proektirovanie, izgotovlenie. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 247 p.

Поступила (received) 08.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Андреев Арнольд Георгиевич (Андреев Арнольд Георгійович, Andreev Arnol'd Georgievich)** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин» НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-68-79; e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

**Ковалева Валерия Андреевна (Ковальова Валерія Андріївна, Koval'ova Valeriya Andriyivna)** – студент, кафедра «Динамика и прочность машин», НТУ «ХПИ», e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. № 2. 2019

*Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, А.В. СЕНЬКО*

### ПОШКОДЖУВАНІСТЬ ТА РУЙНУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТВЕЛІВ ЯДЕРНИХ РЕАКТОРІВ

Стаття містить опис методу та алгоритмів розрахунку двовимірних задач повзучості, яка супроводжується накопиченням прихованої пошкоджуваності, та руйнування, процес якого обумовлено зародженням та поширенням макроскопічного дефекту. В основі методу розв'язання задачі є комбінація методу скінченних елементів та методу прогнозу-корекції третього порядку для інтегрування за часом. В розрахунках застосовується скінченноелементний комплекс FEM Creep та комп'ютерна програма FEM Creepdamagefracture, яка реалізує процес змінювання сіток та граничних умов задачі згідно з перебігом процесу руйнування. Розглянуто модель твєлу ядерного реактору атомних електричних станцій, яка включає паливо та оболонку, виконано моделювання накопичення пошкоджуваності та подальшого руйнування. Чисельними розрахунками встановлено час закінчення прихованого та повного руйнування, для різних моментів часу визначено форму дефекту.

**Ключові слова:** повзучість, пошкоджуваність, руйнування, рівняння стану, ядерний реактор, твєл, метод скінченних елементів.

*Д.В. БРЕСЛАВСКИЙ, А.В. СЕНЬКО*

### ПОВРЕЖДЕННОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТВЭЛОВ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Статья содержит описание метода и алгоритмов расчета двумерных задач ползучести, сопровождающейся накоплением скрытой поврежденности, и разрушения, процесс которого обусловлен зарождением и распространением макроскопического дефекта. Основой метода решения задачи является комбинация метода конечных элементов и метода прогноза-коррекции третьего порядка для интегрирования по времени. В расчетах применяются конечноэлементный комплекс FEM Creep и компьютерная программа FEM Creepdamagefracture, реализующая процесс изменения сеток и граничных условий задачи согласованно с течением процесса разрушения. Рассмотрена модель твэла ядерного реактора атомных электростанций, включающая топливо и оболочку, выполнено моделирование накопления поврежденности и дальнейшего разрушения. Численными расчетами установлено время окончания скрытого и полного разрушения, для различных моментов определена форма дефекта.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, разрушение, уравнения состояния, ядерный реактор, твэл, метод конечных элементов.

*D. V. BRESLAVSKY, A. V. SENKO*

### DAMAGE AND FRACTURE OF FUEL RODS OF NUCLEAR REACTORS

The paper contains the description of method and calculation algorithms for two-dimensional problems of creep-damage and fracture caused by development the macroscopic defect. The method of problem solution is based on combination of Finite Element and time integration third order predictor-corrector methods. The finite element software FEM creep and computer code FEM Creep damage fracture for modification of grids and boundary conditions, which are gone with fracture process behavior, are used in calculations. The resulting system of differential equations, which includes right part caused by traction and additional forces caused by creep strains, is presented. The plane triangular finite element is used in numerical analysis. The model of fuel rod cross section was regarded. It includes uranium fuel and metal cladding. The constitutive equations for fuel were built by use of Norton and Kachanov-Rabotnov laws for cases of varying temperatures. The constants which are included in creep-damage constitutive equations for fuel were processed by use of experimental curves at different temperatures. The comparison between experimental and calculated data is presented. The fracture algorithm was built by use the idea of grid modification due to exception of 'failed' elements. The calculations with modified grids and, if necessary, the boundary conditions, are continued until the moment of achieving the critical dimensions of macroscopic defect. The numerical simulation of creep-damage process and macroscopic defect's growth was carried out and damage distribution in fuel rod's cross section as well its current geometry were determined by way of finite elements exclusion.

**Key words:** creep, damage, fracture, constitutive equations, nuclear reactor, fuel rod, finite element method.

**Вступ.** Питанням забезпечення надійної довготривалої роботи тепловиділяючих елементів (твєлів) атомних електростанцій приділяється велика увага [1, 2]. Одним з найбільш небезпечних випадків втрати працездатності твєлу є руйнування його оболонки, яке може відбуватись спільно з виникненням макродефектів (тріщин) у ядерному паливі. Для різних умов та конструктивних особливостей попереднє руйнування може відбуватись як в оболонці, так й у паливі [2-4], при цьому тріщина, що виникла, обумовлює швидку

втрату працездатності в обох елементах.

При оцінюванні ймовірного остаточного ресурсу твєлу та при проектуванні нових є необхідним проведення розрахунків міцності. На попередніх етапах розвитку методів моделювання напружено-деформованого стану вони проводились у спрощеній, аналітичній постановці з застосуванням стрижневих чи аналітичних моделей [5], але на теперішній час суворе математичне формулювання задачі та вимоги до точного опису геометрії та крайових умов потребує викорис-

тання чисельних методів, насамперед методу скінчених елементів (МСЕ) [6]. Його застосування дозволяє розв'язувати фізично нелінійні задачі, в яких враховуються деформації пластичності, повзучості, накопичення прихованих пошкоджень тощо за достатньо складними рівняннями стану [7], які, до того ж, є можливість формулювати їх для різних матеріалів, з яких складається конструктивний елемент [6].

Як відомо [8], завершення накопичення прихованих пошкоджень, наприклад внаслідок повзучості матеріалу, призводять до виникнення макроскопічних дефектів (тріщин). В останній час розроблено необхідні алгоритми та отримано можливість моделювання умов зародження тріщин чи аналізу їхньої еволюції у часі за допомогою МСЕ. Відмітимо метод, що у GYFM (механіці руйнування, побудованій для пластичних та в'язкопластичних середовищ) визначає швидкість звільнення енергії за допомогою  $J$  та  $C$  інтегралів для задач теорії пластичності та повзучості відповідно [9]. Альтернативним, більш адекватним підходом є застосування МСЕ для наскрізного опису процесу – від прихованого руйнування за допомогою використання континуальної механіки пошкоджуваності [8] до виникнення, розповсюдження макродефекту до розділення конструкції на частини. В задачах теорії повзучості останній підхід був запропонований у роботах Дж. Вебстера і К. Нікбіна [10], Дж. Хейхерста зі співавторами [11] та інших. Огляд робіт, виконаних за цим напрямом в останні роки, міститься у роботі [12].

В цій роботі запропоновано оновлений підхід до моделювання взаємно пов'язаних процесів накопичення пошкоджень та зростання макродефектів, який завдяки перебудові матриці жорсткості конструкції враховує зміну її жорсткості при виключенні з моделі «зруйнованих» елементів. Така ж методологія та створене скінченноелементне програмне забезпечення використовуються й у даній роботі для моделювання процесів накопичення пошкоджуваності та руйнування циліндричних твєлів ядерних реакторів АЕС.

**Метод та алгоритм розрахунку.** Процедуру розрахунку побудовано на базі використання двох основних методів, які у сукупності надають можливість розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості: для крайових на кожному кроці за часом використовується МСЕ, початкові інтегруються різницею методом прогнозу-корекції.

В статті розглянемо двовимірні задачі теорії повзучості. Завдяки тому, що розглядається процеси деформування та руйнування металевих елементів конструкцій, перебіг яких характеризуються малими деформаціями, використаємо підхід Лагранжу. Скінченноелементне формулювання задачі розрахунку повзучості з урахуванням накопичення пошкоджуваності при циклічному навантаженні отримуємо у наступному вигляді [6, 13]:

$$[K]\{\dot{U}\} = \{\dot{F}\} + \{\dot{F}^c\}; \quad (1)$$

$$\{\dot{F}\} = \sum_{N_\beta} \int_{S_3^e} [N^p]^T \{\dot{p}\} dS \Big|_{t=0} + \sum_{N_\beta} \int_{V_\beta} [N^p]^T \{\dot{P}\} dV \Big|_{t=0};$$

$$\{\dot{F}^c\} = \sum_{N_\beta} \int_{V_\beta} [\bar{B}]^T \cdot [C] \cdot \{\dot{\epsilon}\} dV;$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = \frac{3}{2} B \frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^k} \exp\left(-\frac{Q_c}{T}\right) [\hat{C}]\{\sigma\}; \quad Q_c = \frac{U_c}{R}; \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = D \frac{\sigma_e^m}{(1-\omega)^k} \exp\left(-\frac{Q_d}{T}\right); \quad Q_d = \frac{U_d}{R};$$

$$\omega(0) = \omega_0; \quad \omega(t_*) = \omega_* \quad (3)$$

Тут  $K$  – матриця жорсткості;  $u$  – глобальний вектор вузлових переміщень;  $F$  – вектор вузлових навантажень, обумовлених поверхневими й об'ємними силами;  $F^c$  – вузлові навантаження, обумовлені деформаціями повзучості;  $\bar{B}$  – матриця деформування;  $C$  – матриця пружних констант;  $N$  – матриця форм;  $p$  і  $P$  – поверхневі й об'ємні навантаження відповідно;  $c$  – незворотні деформації повзучості;  $\beta$  – номер скінченого елемента;  $V_\beta$  – об'єм скінченого елемента;  $\sum_{N_\beta}$  – підсумовування за всіма скінченими елементами;  $S$  – площа поверхні скінченого елемента, який знаходиться під дією розподіленого навантаження;

Як рівняння стану, до векторно-матричного формулювання задачі включено рівняння теорії повзучості інкрементального типу з конкретизацією зв'язку між швидкістю інтенсивності деформацій повзучості та інтенсивність напружень  $\sigma_i$  за законом Бейлі-Нортон [8].  $\omega$  – скалярний параметр пошкоджуваності, що визначається за кінетичним рівнянням Работнова-Качанова [8], до якого входить еквівалентне напруження  $\sigma_e$ ,  $t_*$  – час до завершення прихованого руйнування,  $\omega_*$  – критичне значення параметру пошкоджуваності. Рівняння стану (2) та (3) містять множник, що враховує залежність швидкості деформацій повзучості від температури. Тут  $T$  – температура,  $U_c$  та  $U_d$  – значення енергій активації повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості відповідно,  $R$  – константа Больцмана [8].

Покрокове розв'язання системи (1)-(3) надає можливість визначення на кожному часовому інтервалі компонентів напружено-деформованого стану та параметру пошкоджуваності в кожному вузлі чи елементі скінченноелементної моделі. За розвитком процесу повзучості, що супроводжується пошкоджуваністю, у певній точці конструктивного елемента у момент часу  $t_*$  відбувається зародження макроскопічного дефекту, що у багатьох випадках є зародком тріщини [9].

Далі для пояснення отриманих чисельних результатів стисло наведемо опис методу скінченноелементного моделювання процесу руйнування при повзучості. Виникнення макродефекту у певній точці конструктивного елемента в загальній логіці скінченноелементного моделювання означає виключення з розрахункової моделі відповідного скінченного елемента. При цьому геометрія саме моделі, а у багатьох випадках й крайових умов, змінюється. Це означає зміну її жорсткості, яка враховується отриманням нової матриці жорсткості конструкції, в якій виключено «зруйновані» елементи (тобто ті, в яких на поточний момент досягнуто критичне значення параметру пошкоджуваності  $\omega_*$ ). У багатьох випадках нова

геометрія моделі характеризується присутністю концентратора напружень. Це призводить до необхідності планування заздалегідь відповідної кількості скінченних елементів у місцях, де передбачаються руйнування, чи навіть до перебудови сітки.

Після отримання нової скінченноелементної моделі з проведеною перенумерацією вузлів та елементів, що в ній залишилися, проводяться операції перезапису до відповідних елементів набутих на той момент значень компонентів напружено-деформованого стану та параметрів пошкоджуваності. Розрахунок продовжується далі, до чергового випадку досягнення критичного значення параметру пошкоджуваності в інших елементах. Після цього повторюється алгоритм перебудови сітки та перезапису, що описаний вище. Повний опис методу наведено у роботі [12].

### Чисельне моделювання руйнування твела.

Розглянемо результати чисельного моделювання модельної задачі повзучості та руйнування циліндричного твела. Задачу розв'язуємо за схемою плоскої деформації, будемо скінченноелементну модель перерізу твела (рис. 1). Твел складається з уранового палива 1, яке знаходиться у металевій оболонці 2. Розглянемо постійне поверхнєве навантаження  $p = 25$  МПа за частиною поверхні оболонки.

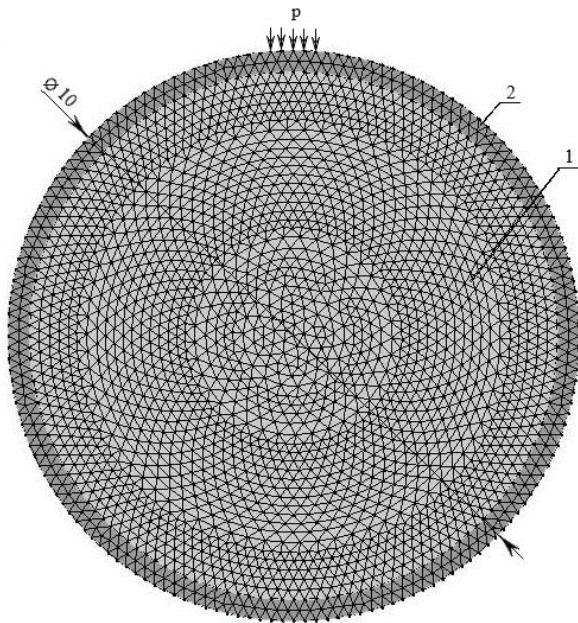


Рисунок 1 – Модель перерізу твела зі скінченноелементною сіткою

Для розрахунків повзучості матеріалів, з яких складається твел, та пов'язаного з нею руйнування конкретизуємо його матеріальний склад. Прийmemo, що оболонку твела виготовлено зі сплаву IN100. Дані щодо констант до законів повзучості та пошкоджуваності цього матеріалу наведено у [8]. Після приведення до форми рівнянь (2)-(3) для  $T = 1273$  К вони мають наступний вигляд:  $B = 3,43 \cdot 10^{-29}$  (МПа) $^{-n}$ /год;  $n = 9,7$ ;  $D = 7,5 \cdot 10^{-15}$  (МПа) $^{-m}$ /год;  $m = 5,2$ ;  $k = 15$ ;  $Q_d = Q_c = 0$ .

З використанням даних робіт [2-4] щодо кривих

деформування урану на етапі усталеної повзучості та кривих повзучості, отриманих до моменту руйнування, визначено значення констант, що входять до рівнянь стану (2)-(3). Наприклад, при температурі 623 К вони дорівнюють:  $B = 1,25 \cdot 10^{-7}$  (МПа) $^{-n}$ /час;  $n = 3$ ;  $k = 3$ ;  $Q_c = 5114$  К;  $D = 3,125 \cdot 10^{-7}$  (МПа) $^{-m}$ /час;  $m = 3$ ;  $Q_d = 4083$  К.

Отримані значення констант було використано для перевірки правильності опису повзучості з пошкоджуваністю (всі ділянки повзучості) та повзучості на усталеній (другій) ділянці при різних температурах. Рис. 2 а, б містить деякі криві, що побудовані за результатами дослідження достовірності моделювання перебігу у часі кривих повзучості. Точками позначено експериментальні дані робіт [2, 3]. На рис. 2, а наведено дані для усталеної ділянки повзучості. Тут крива 1 відповідає деформуванню при  $T = 1273$  К з напруженням 12 МПа, крива 2 – 10 МПа, крива 3 – 8 МПа при  $T = 1773$  К. На рис. 2, б крива 1 є кривою до руйнування з напруженням 50 МПа, криву 2 побудовано для значення 30 МПа. Температура 623 К.

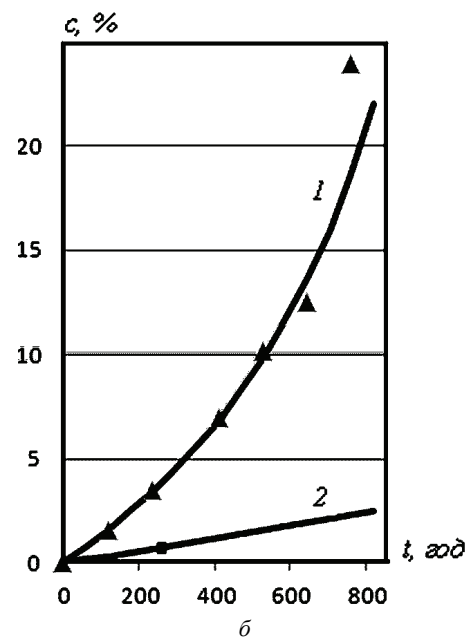
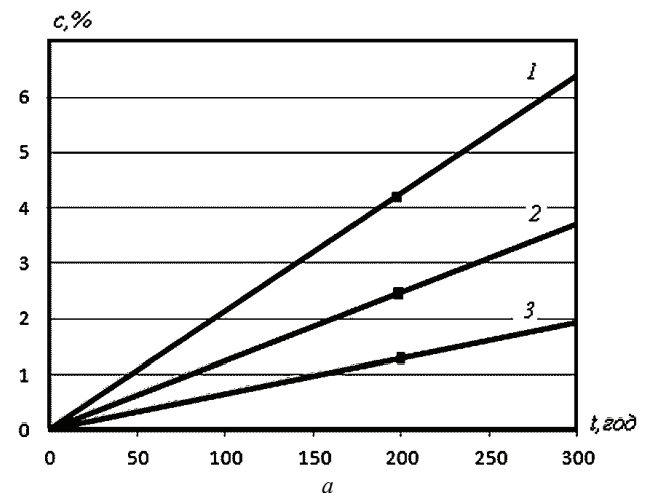


Рисунок 2 – Криві повзучості уранового палива

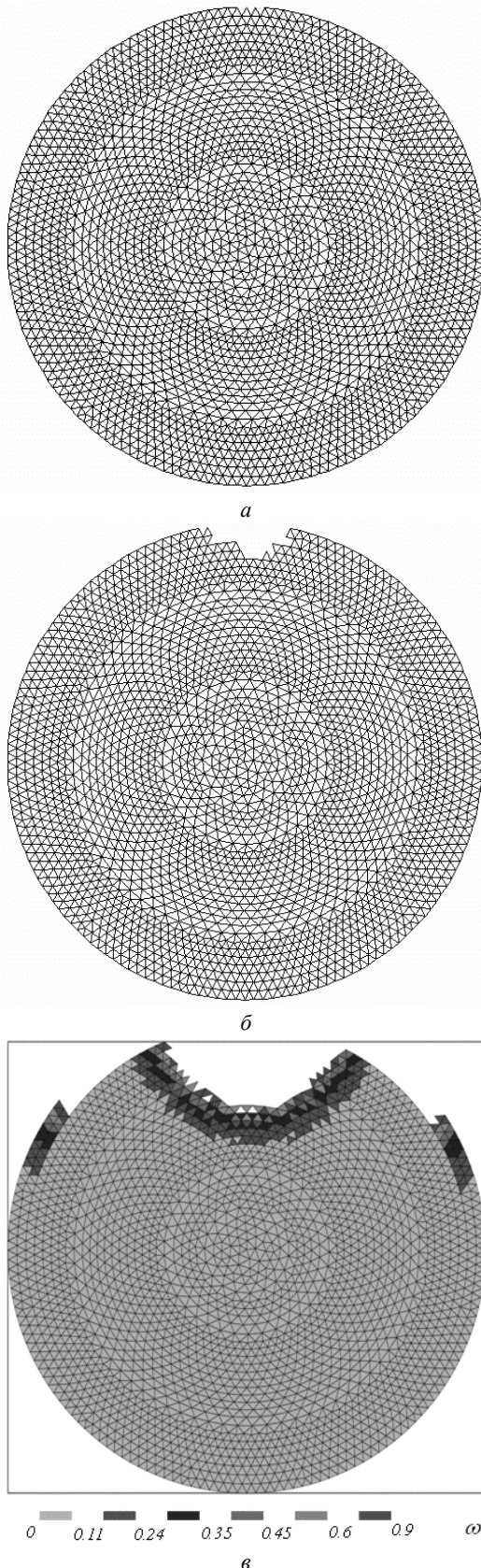


Рисунок 3 – Змінювання у часі форми перерізу твелу при руйнуванні: *a* –  $t = 400$  год; *b* –  $t = 419$  год; *v* –  $t = 420$  год

Далі отримані та перевірені рівняння повзучості з пошкоджуваністю застосуюмо для чисельного моделювання. В розрахунках застосовано декілька моделей

– з двома та чотирма шарами скінченних елементів при моделюванні металеві оболонки. Досліджено збіжність результатів, встановлено відмінності у значеннях часу переходу на нові форми макродефекту, що відрізняються не більш, ніж на 15 %. При більшому числі елементів кут, що утворює макродефект, є незначно меншим. Розглянемо розрахункові дані, для наявності зображення на рисунках застосуємо відображення з сіткою з двома шарами. Перебіг процесу навантаження призводить до розвитку пошкоджуваності внаслідок повзучості. При  $t = 390$  год відбувається зародження макродефекту, що зростає з часом. У момент 421 год спостерігається прискорене руйнування. Процес руйнування ілюструється чисельними результатами, які представлені на рис. 3, *a-v* формами зруйнованого перерізу для різних моментів часу. «Зруйновані» елементи виключено зі скінченноелементної моделі. Рис. 3, *v* також містить розподіл параметру пошкоджуваності у момент 420 год, з якого видно істотну локалізацію пошкоджуваності в околі макродефекту.

Як видно з рис. 3, розроблений метод чисельного моделювання процесів повзучості, що супроводжується пошкоджуваністю, та пов'язаного з ними руйнування якісно вірно відображає картини розвитку макродефектів у твелах, які описано у роботах [2-3].

**Висновки.** В статті надано опис методу математичного моделювання процесу розвитку макродефектів при руйнуванні твелів, які містять паливо для ядерних реакторів атомних електростанцій. Руйнування відбувається внаслідок попереднього тривалого деформування в умовах високотемпературної повзучості, що супроводжується прихованою пошкоджуваністю, як палива, так й оболонки твелу. На прикладі модельної задачі про руйнування перерізу твелу з урановим паливом продемонстровано можливість моделювання процесів в елементах конструкцій, виготовлених з різних матеріалів. Показано, як завдяки застосуванню методу скінченних елементів (МСЕ) та розроблених алгоритмів змінювання сітки на кожному кроці за часом створюється можливість відстеження поточної геометрії перерізу, що деформується та руйнується одночасно.

#### Список літератури

1. Неклюдов И.М. Состояние и проблемы материалов атомных реакторов Украины. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (81). 2002. С. 3-10.
2. Ма Б.М. Материалы ядерных энергетических установок. Москва: Энергоатомиздат, 1987. 408 с.
3. Brucklacher D., Dienst W. Creep behavior of ceramic nuclear fuels under neutron irradiation. Journal of nuclear materials. 1972. № 42. P. 285-296.
4. Lee Van Duyn Evaluation of the mechanical behavior of a metal-matrix dispersion fuel for plutonium burning. Ph.D Theses, Georgia Institute of Technology November 2003. 135 p.
5. Лухачев Ю.И., Пупко В.Я., Попов В.В. Методы расчета на прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. Москва: Энергоатомиздат, 1982. 88 с.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. The Finite

Element Method for Solid and Structural Mechanics. Butterworth-Heinemann. 2014.

7. *Chaboche J.L.* A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive equations. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. P. 1642-1693.

8. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Mechanics of solid materials. Cambridge: University press, 1994. 556 p.

9. *Penny R.K., Marriott D.L.* Design for creep. London: Chapman and Hall, 1995. 430 p.

10. *Webster G.A., Nikbin K.M.* History of Loading Effects on Creep Crack Growth in 1/2% Cr, 1/2% Mo, 1/4% V Steel. Creep in Structures», 3rd Symposium, Leicester, UK, September 8-12. 1980. P. 576-591.

11. *Hayhurst D.R., Horrison C.J., Brown P.R.* Creep Crack Growth. Creep in Structures», 3rd Symposium, Leicester, UK, September 8-12. 1980. P. 564-575.

12. *Breslavsky D., Kozlyuk A., Tatarinova O.* Numerical simulation of two-dimensional problems of creep crack growth with material damage consideration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics*. 2018. Vol. 7 (92). P.27-33.

13. *Бреславський Д.В., Коритко Ю.М., Татарінова О.А.* Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2017. 232 с.

#### References (transliterated)

1. *Nekljudov I.M.* Sostojanie i problemy materialov atomnyh reaktorov Ukrainy. *Voprosy atomnoj nauki i tehniki*. Series: Physics of Radiation Damage and Radiation Materials Science (81). 2002. P. 3-10.

2. *Ma B.M.* Materialy jadernyh jenergeticheskikh ustanovok. Moscow: Energoatomizdat, 1987. 408 p.

3. *Brucklacher D., Dienst W.* Creep behavior of ceramic

nuclear fuels under neutron irradiation. *Journal of nuclear materials*. 1972. № 42. P. 285-296.

4. *Lee Van Duyn* Evaluation of the mechanical behavior of a metal-matrix dispersion fuel for plutonium burning. Ph.D Theses, Georgia Institute of Technology November 2003. 135 p.

5. *Lihachev Ju.I., Pupko V.Ja., Popov V.V.* Metody rascheta na prochnost' teplovydeljajushhih elementov jadernyh reaktorov. Moscow: Energoatomizdat, 1982. 88 p.

6. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Butterworth-Heinemann. 2014.

7. *Chaboche J.L.* A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive equations. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. P. 1642-1693.

8. *Lemaitre J., Chaboche J.L.* Mechanics of solid materials. Cambridge: University press, 1994. 556 p.

9. *Penny R.K., Marriott D.L.* Design for creep. London: Chapman and Hall, 1995. 430 p.

10. *Webster G.A., Nikbin K.M.* History of Loading Effects on Creep Crack Growth in 1/2% Cr, 1/2% Mo, 1/4 % V Steel. Creep in Structures. 3rd Symposium. Leicester, UK, September 8-12, 1980. P. 576-591.

11. *Hayhurst D.R., Horrison C.J., Brown P.R.* Creep Crack Growth. Creep in Structures. 3rd Symposium. Leicester, UK, September 8-12, 1980. P. 564-575.

12. *Breslavsky D., Kozlyuk A., Tatarinova A.* Numerical simulation of two-dimensional problems of creep crack growth with material damage consideration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics*. 2018. Vol. 7 (92). P. 27-33.

13. *Breslavsky D.V., Korytko Yu.M., Tatarinova O.A.* Proektuvannya ta rozrobka skinchennoelementnogo programnogo zabezpechennya. Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. 232 p.

*Надійшла (received) 01.11.2019*

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Бреславський Дмитро Васильович (Бреславский Дмитрий Васильевич, Breslavsky Dmytro Vasylovych)** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, НТУ «ХПІ»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

**Сенько Альона Володимирівна (Сенько Алена Владимировна, Senko Alyona Volodymyrivna)** – аспірантка. НТУ «ХПІ»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: alyonassenko@gmail.com



**В.М. ГРИЩЕНКО****СХЕМА АЛГОРИТМУ ПОКРОКОВОГО ПРИВЕДЕННЯ ДВОХ МАТРИЦЬ У ФОРМІ ШУРА ДО ПРОСТОГО ВИДУ**

Важливого значення для сучасної техніки набувають питання динамічної поведінки машин та конструкцій. Зважаючи на тенденції сьогодення такі як нові інформаційні технології, трансформація проектно-конструкторських процесів; створення систем САПР (систем автоматизації проектних робіт), особливого значення набувають питання удосконалення методів рішення задач динаміки. Чисельне моделювання стало невід'ємною частиною дослідження самих складних процесів для самих складних фізичних моделей, а Finite Element Method став основним чисельним методом їх дослідження. Зазначені тенденції невідворотно будуть супроводжуватись значним ростом кількості параметрів визначення стану об'єктів. Зокрема, в динаміці машин значної кількості степенів вільності. Як наслідок, появу проблеми багатократного збільшення розмірів задачі.

Рішення проблеми власних значень (EigenValue) може розглядатись як важлива компонента в побудові чисельно-аналітичних підходів, які альтернативні простим покроковим схемам інтегрування типу Рунге-Кутта в задачах великого розміру. Можна одержати певні переваги, якщо матриці лінійних перетворень попередньо привести до простих форм. Такий підхід широко застосовується в динаміці (модальний аналіз). В даній роботі запропонована схема алгоритму покрокового чисельного аналізу структури матриці  $K$  в проблемі  $(K, E) \rightarrow (J, E)$  та схема побудови жорданового базису для загального випадку коренів характеристичного поліному (для дійсних та комплексних коренів, простих та кратних). В якості стартової форми прийнята стандартна проблема власних значень з матрицею  $K$  попередньо приведеною до форми Шура (матрицею блочно-трикутної форми). Схема супроводжується рішенням модельних прикладів.

**Ключові слова:** проблема власних значень, канонічна форма, жордановий базис, чисельний алгоритм.

**В.Н. ГРИЩЕНКО****СХЕМА АЛГОРИТМА ПОШАГОВОГО ПРИВЕДЕННЯ ДВУХ МАТРИЦЬ В ФОРМЕ ШУРА К ПРОСТОМУ ВИДУ**

Важное значение для современной техники приобретают вопросы динамического поведения машин и конструкций. Учитывая тенденции сегодняшнего дня такие как новые информационные технологии, трансформация проектно-конструкторских процессов; создание систем САПР (систем автоматизации проектных работ), особое значение приобретают вопросы усовершенствования методов решения задач динамики. Численное моделирование стало неотъемлемой частью исследований самых сложных процессов для самых сложных физических моделей, а Finite Element Method стал основным численным методом их исследования. Указанные тенденции неотвратимо будут сопровождаться значительным ростом количества параметров состояния объекта. В частности, в динамике машин значительное число степеней свободы. Как следствие, появление проблемы многократного увеличения размеров задачи.

Решение проблемы собственных значений (EigenValue) можно рассматривать как важную компоненту в построении численно-аналитических подходов, которые альтернативны простым пошаговым схемам интегрирования типа Рунге-Кутта в задачах большого размера. Можно получить определенные выгоды, если матрицы линейных преобразований предварительно привести к простой форме. Такой подход широко используется в динамике (модальный анализ). В данной работе предложена схема алгоритма пошагового численного анализа структуры матрицы  $K$  в проблеме  $(K, E) \rightarrow (J, E)$  и схема построения жорданового базиса для общего случая корней характеристического полинома (для действительных и комплексных корней, простых и кратных). В качестве стартовой формы принята стандартная проблема собственных значений с матрицей  $K$  предварительно приведенной к форме Шура (матрице блочно-треугольной формы). Схема сопровождается решением модельных примеров.

**Ключевые слова:** проблема собственных значений, каноническая форма, жордановый базис, численный алгоритм.

**V.M. GRISCHENKO****THE SCHEME OF THE ALGORITHM FOR THE STEP-BY-STEP REDUCTION OF TWO MATRICES IN THE FORM OF SCHUR TO A SIMPLE FORM**

Of great importance for modern technology are the issues of the dynamic behavior of machines and structures. Given the trends of today such as new information technologies, the transformation of design processes; creation of CAD systems (automation systems for design work), issues of improving methods for solving dynamics problems are of particular importance. Numerical modeling has become an integral part of the study of the most complex processes for the most complex physical models, and the Finite Element Method has become the main numerical method for their study. These trends will inevitably be accompanied by a significant increase in the number of parameters for determining the state of the object. In particular, in the dynamics of machines, a significant number of degrees of freedom. As a result, the appearance of the problem of a multiple increase in the size of the task.

The solution of the eigenvalue problem can be considered as an important component in the construction of numerical-analytical approaches that are alternative to simple step-by-step integration schemes of the Runge-Kutta type in large-scale problems. Certain benefits can be obtained if the linear transformation matrices are first reduced to a simple form. This approach is widely used in dynamics (modal analysis). In this paper, we propose a scheme for a step-by-step numerical analysis of the structure of the matrix

$K$  in a problem  $(K, E) \rightarrow (J, E)$  and a scheme for constructing a Jordan basis for the general case of roots of a characteristic polynomial (for real and complex roots, simple and multiple). As the starting form, the standard eigenvalue problem with the matrix  $K$  previously reduced to the Schur form (block-triangular shape matrix) is adopted. The scheme is accompanied by the solution of test cases.

**Keywords:** eigenvalue problem, canonical form, Jordan basis, numerical algorithm.

**Вступ.** Рішення багатьох прикладних задач сучасної техніки невинно ускладнюються одночасно з запитами на створення більш складних конструкцій та об'єктів. Значні навантаження, складні умови експлуатації, різноманітність структурних схем енергетичних машин, парових, газових турбін, трансмісійних машин та інших приводять до високих рівнів напруженості у всіх ланках та вузлах. Робота таких складних конструкцій супроводжується сумісною деформацією частин установок як єдиних динамічних систем. Особливо небезпечним є динамічний (циклічний) характер процесів в широкому діапазоні частот, коли стає актуальною проблема усунення вібрацій резонансного типу з робочих діапазонів роботи. Для рішення зазначених задач використовуються різні моделі, методи, програмне забезпечення. Але, безсумнівно, головною тенденцією буде залишатись перехід до моделювання все більш реальних умов експлуатації, моделювання все більш складних за формою механізмів, об'єктів та процесів. Зазначені тенденції невідворотно будуть супроводжуватись значним ростом кількості параметрів визначення стану об'єктів. Зокрема, в динаміці машин, теорії коливань моделювання потребуватимуть введення значної кількості степенів вільності. Тільки такий підхід дозволяє детально кількісно та якісно визначати поведінку конструкцій та явищ, та, як наслідок, появу проблеми багатократного збільшення розмірів задачі.

В практичних методах дослідження процесів в прикладних технічних об'єктах мають справу з системами складних нелінійних диференціальних рівнянь. Але в подальшому в процесі аналізу досить часто акценти зміщуються до розгляду систем еквівалентних лінійних рівнянь. Це пов'язано з тим, що теоретичні положення рішення лінійних диференціальних рівнянь добре розроблені та викладені як в науковій літературі так і в численних підручниках по аналізу [10, 12]. Разом з тим, не все так ясно з чисельною реалізацією таких рівнянь. Аспекти інженерного рішення «до числа» в літературних джерелах для різних варіантів наводяться детально, переважно, для рівнянь невеликого розміру, і або не можуть бути використаними, або не є ефективними в загальному випадку.

Разом з тим, одержати адекватне рішення задач практичних розмірів можливо, в більшості випадків, чисельними методами. Чисельні підходи в наш час перетворились в самостійний розділ прикладної математики, в провідний напрямок моделювання поведінки систем, а в багатьох випадках і єдиний. І цей напрямок в практичних розрахунках продовжує активно розвиватись у зв'язку з широким застосуванням комп'ютерних технологій.

Одним з найбільш ефективних підходів моделювання складних багато функціональних систем в інженерних дослідженнях став метод скінченних елементів (МСЕ) – Finite Element Method (FEM) [5, 9]. Формалі-

зація задачі в формі МСЕ, при якій проводиться дискретизація поля невідомих з переходом до узагальнених координат має багато переваг. Одна з них – це матрична трактовка розрахункових співвідношень. Значне коло прикладних задач також знаходить компактну форму вираження саме в матричній інтерпретації. Саме тому чисельні методи матричної алгебри відіграють визначну роль в обчислювальній математиці. А такі характеристики чисельних процедур як оптимальна кількість операцій та потрібна оперативна пам'ять, стійкість алгоритму (мінімізація помилок) в поєднанні з розробкою ефективної схеми алгоритму стають тими стратегічними факторами, які можуть ефективно протистояти проблемі багатократного збільшення розмірів задачі. Становиться очевидним, що для успішного рішення великих систем чисельними методами на ЕОМ потрібні алгоритми спеціально розроблені для конкретного типу задач.

Важливого значення в машинобудуванні мають питання динамічної поведінки машинних агрегатів, питання їх віброзахисту та інші. Традиційні підходи чисельного інтегрування матричних систем диференціальних рівнянь динаміки більш-менш значимих розмірів покроковими методами типу Рунге-Кутта є простим універсальним засобом аналізу, але потребують великих затрат часу й ресурсів, не враховують в повному обсязі специфіку рішення та є умовно стійкими. Альтернативою можуть стати різні варіанти чисельно-аналітичних підходів, які включають попереднє приведення систем рівнянь до більш простої структури (однієї з канонічних). Ця частина потребує розробки ефективних схем. Канонічна форма рівнянь надає значні переваги в загальній схемі обчислень, такі як:

- використання аналітичної складової в процесі обчислень підвищує точність та стійкість алгоритму, скорочує час;

- чисельно-аналітичний підхід дає можливість більш детального аналізу структури рішення, зменшує труднощі обчислювального характеру та інші.

В теорії коливань, матричній алгебрі до таких проблемних питань відноситься побудова алгоритму визначення власних значень та канонічної форми рівнянь.

**1. Постановка задачі.** Домінуючим засобом аналізу поведінки об'єктів сучасної техніки є чисельні методи. Для подолання обчислювальних труднощів вигідною є матрична трактовка основних співвідношень проблеми і щонайбільш важливим – це розробка простих обчислювальних схем ефективних для конкретних задач. Рішення проблеми власних значень-власних векторів (форм коливань) набуває значення в дослідженнях задач динамічної поведінки машинних агрегатів і в узагальненій формі має такий вигляд:

$$Kx = \lambda Mx, \quad (1)$$

де  $(K, M)$  – задані квадратні матриці порядку  $n$ ;

$(\lambda, x)$  – власні значення та власні вектори пробле-



$$(K - \lambda E) = \begin{pmatrix} k & k & k & k & k & k & k & k & k \\ k & k & k & k & k & k & k & k & k \\ \cdot & \cdot & k & k & k & k & k & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & k & k & k & k & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k & k & k & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k & k & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k \end{pmatrix} - \lambda E;$$

Рисунок 2 – Стандартна проблема власних значень з матрицею K в формі Шура

Зважаючи на структуру матриці K, перетворення U також приймається у відповідній їй квазитрикутній формі. Для зберігання коефіцієнтів матриці оператора після подібних перетворень у тому ж самому масиві, і для зручності поточного аналізу коренів характеристичного поліному розглядається покроковий процес реалізації подібного перетворення. З цією метою структура матриці U представляється послідовним ланцюгом стовбців відповідно до порядку коренів: дійсних або пари комплексно спряжених. А надалі ця послідовність в U реалізується співмножниками N<sub>s</sub>. Приклад структурної організації U для n=5 приведений нижче:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ \cdot & 1 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ \cdot & \cdot & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ \cdot & \cdot & u_{43} & u_{44} & u_{45} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = N_5 * N_{43} * N_2; \quad (5)$$

де N<sub>s</sub> – праве неунітарне стійке елементарне перетворення ;

$$N_5 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{15} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & u_{25} \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & u_{35} \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & u_{45} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}; \quad N_{43} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & u_{13} & u_{14} & \cdot \\ \cdot & 1 & u_{23} & u_{24} & \cdot \\ \cdot & \cdot & u_{33} & u_{34} & \cdot \\ \cdot & \cdot & u_{43} & u_{44} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix};$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix};$$

і т. д.

Кожен зі співмножників N<sub>s</sub> – це елементарна матриця, яка по перше – виконує перетворення тільки тих стовбців K, які пов'язані зі своїм коренем; по друге – для цього перетворення просто знайти зворотне, наприклад

$$N_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -u_{1s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -u_{2s} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

По третє – чисельні значення окремого перетворення N<sub>j</sub> можна визначати, наприклад, послідовно з вироджених рівнянь зі зсувами

$$(K - \lambda^* E) u^i \rightarrow 0. \quad (6)$$

Згідно з цим порядком знайдений вектор u<sup>j</sup> може бути як власним для задачі (6) так і приєднаним (4). Є лише одна відмінність, яка відрізняє їх: для простих коренів система рівнянь сумісна і можна знайти такі значення u<sup>j</sup> (власного вектора), що права частина буде точно дорівнювати 0. Для випадку кратних коренів на діагоналі з'являються додаткові 0, система рівнянь може бути несумісною, тобто знайти такі u<sup>j</sup>, щоб елементи правої частини (6) всі дорівнювали 0 неможливо). В таких випадках потрібно обмежитись таким набором u<sup>j</sup> (приєднаний вектор), щоб права частина (6) «майже» дорівнювала 0, нехтуючи тими умовами, які несумісні.

Структура матриці U така, що для випадку дійсного кореня елементарні матриці, наприклад, N<sub>5</sub>, N<sub>2</sub> містять один стовбець u<sub>ij</sub>, а для випадку комплексно-спряжених таких стовбців два (5). Алгоритм їх визначення складніший.

Таким чином, в довільному випадку, аналіз структури матриці лінійного оператора виконується чисельно. Жордановий базис, який складається з векторів матриці U, визначається неоднозначно, чисельно, шляхом аналізу рішень рівняння (4, 5).

Визначати спочатку власний вектор, потім будувати ланцюги рівнянь типу (4) для приєднаних, аналізувати Rg(K - λ\*E) не потрібно. Розглянемо дію схеми на модельних прикладах.

**3.Результати чисельних розрахунків** Для чисельних розрахунків вибрано два модельних приклади: один з дійсними кратними коренями, інший з комплексними.

**Приклад 1.** (7x7) стандартна проблема з кратними дійсними коренями.

$$(K - \lambda E) = \begin{pmatrix} 4 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} - \lambda E \rightarrow 0;$$

Має такі дійсні власні значення:

№	1	2	3	4	5	6	7
λ <sub>s</sub>	4	2	3	2	3	2	1

Кратними є корені λ<sub>2,4,6</sub> = 2 і λ<sub>3,5</sub> = 3.

Згідно з наведеним вище структура перетворення подібності визначається структурою матриці U(K), представляється послідовним добутком матриць N<sub>s</sub>, пов'язаних зі своїми стовбцями та реалізується рішеннями матричних рівнянь зі зсувами. В нашому прикладі, де тільки дійсні корені, всі N<sub>s</sub> містять по одному стовбцю.

Розглянемо покроково в установленому вище порядку (5) обчислення складових U – неунітарних перетворень N<sub>s</sub>.

**1) λ<sub>7</sub> = 1;**

Матриця K зі зсувом λ<sub>7</sub> та елементарна N<sub>7</sub> будуть мати такий вид:

$$(K - \lambda_7 E) N_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -6 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0.$$

На діагоналі стоїть один 0. В сьомому стовбці  $N_7$  побудовано власний вектор  $u_7$  для простого кореня  $\lambda_7$ . Подібне перетворення  $K$  з використанням  $u_7$  дає:

$$K_6 = (N_7)^{-1} (K - \lambda_7 E) N_7 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Тепер 7-ий стовбець цієї матриці нульовий.

**2)  $\lambda_7 = 2$ ;**

Корінь кратний. В матриці  $(N_7)^{-1} (K - \lambda_6 E) N_7$  зі зсувом  $\lambda_6$  на діагоналі стоять три нуля, а в 6-му стовбці елементарної  $N_6$  побудовано приєднаний вектор  $u_6$  кореня  $\lambda_6$ :  $[(N_7)^{-1} (K - \lambda_6 E) N_7] N_6 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0.$$

Якщо завершити виконання перетворення подібності матриці  $K$  з використанням тепер вже двох векторів  $K_7$  та  $K_6$ , то одержимо:

$$K_5 = (N_6)^{-1} (N_7)^{-1} (K - \lambda_6 E) N_7 N_6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

Видно, що в випадку використання для  $U$  приєднаних векторів в шостому стовбці після цього залишаються ненульові позиції, тобто матриця після перетворення не буде набувати діагональної форми.

**3)  $\lambda_5 = 3$ ;**

Теж кратний. В матриці  $(N_6)^{-1} (N_7)^{-1} (K - \lambda_5 E) N_7 N_6$  зі зсувом  $\lambda_5$  на діагоналі стоять два нуля, а в 5-му стовбці елементарної  $N_5$  побудовано приєднаний вектор  $u_5$  кореня  $\lambda_5$ :  $[(N_6)^{-1} (N_7)^{-1} (K - \lambda_5 E) N_7 N_6] N_5 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0.$$

Завершення перетворення подібності  $K$  з використанням векторів  $u_7, u_6$  та  $u_5$ , дає:

$$K_4 = (N_5)^{-1} N_6^{-1} (N_7)^{-1} (K - \lambda_5 E) N_7 N_6 N_5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{bmatrix}$$

Видно, що при використанні приєднаних векторів, поза діагоналю знову з'являються ненульові позиції і т.д.

По закінченню ланцюга покрокових обчислень буде сформована матриця з векторів базису даного лінійного оператора. В наведеному прикладі вона має такий вигляд:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -1 & \cdot & -2 & -1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & -6 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця  $K$  в цьому базисі прийме просту форму:

$$K' = U^{-1} K U = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Або після перестановки рядків та стовбців матриця набуде вигляду, близького до канонічного:

$$K'' = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

**Приклад 2.** (6х6) стандартна проблема з кратними комплексними коренями.

$$(K - \lambda E) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -4 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} - \lambda E \rightarrow 0.$$

Система має наступні дійсні та комплексно-спряжені власні значення:

$N_0$	1	2,3	4	5,6
$\lambda_s$	1	$1 \pm 2i$	3	$1 \pm 2i$

Кратними є корені  $\lambda_{2,5} = 1 + 2i$ , і  $\lambda_{3,6} = 1 - 2i$ .

Принципові положення чисельного алгоритму залишаються незмінними: структура модальної матриці відповідає структурі  $K$ . Проте процес визначення модальних стовбців дещо ускладнюється.

Приведемо тут структурну композицію модальної матриці в чисельному виконанні згідно наведеної схеми.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u & u & u & u & u \\ . & u & u & u & u & u \\ . & u & u & u & u & u \\ . & . & . & 1 & u & u \\ . & . & . & . & u & u \\ . & . & . & . & u & u \end{bmatrix} = N_{65} * N_4 * N_{32} * N_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & . & -3/4 & -1/4 & . \\ . & 1 & . & -1 & 1 & . \\ . & . & 1 & -2 & 1/2 & . \\ . & . & . & 1 & 1/4 & -3/4 \\ . & . & . & . & -5 & . \\ . & . & . & 1 & 2 & . \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} * E;$$

Заключна еквівалентна форма простого виду для рівняння з комплексними коренями така:

$$K' = U^{-1}KU = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & 2 & . & . & 5/2 \\ . & -2 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 3 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 2 \\ . & . & . & . & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Одержані рівняння лінійного оператора в базисі Жордана мають значні переваги в подальшому чисельно-аналітичному дослідженні задач, так як рішення їх може розпадатись на серію задач меншого розміру.

*Зауваження.* В літературі по матричній алгебрі, в розділах, які пов'язані з проблемою побудови жорданового базису приводяться деякі не зовсім характерні, на наш погляд, приклади.

$$\text{Наприклад: } K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & . & -1 \\ 1 & 1 & . & -1 \\ . & . & 2 & -1 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Так, це приклад матриці, яка має кратні, але дійсні корені. Тому всі такі матриці можуть попередньо з допомогою еквівалентного перетворення бути приведені до чистої трикутної форми.

**Висновки.** По результатам проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

Запропонована схема алгоритму побудови жорданового базису для загального випадку коренів матриці лінійного оператора та для випадку, коли матриця проблеми попередньо приведена до форми Шура.

В основі схеми лежить принцип формування структури модальної матриці  $U$  у відповідності зі структурою

самої матриці оператора  $K$ , та наступним представленням її у вигляді ланцюга елементарних матриць..

Відзначимо, що потрібна певна практика у напрацюванні зручних прийомів рішення задач та використанні цієї схеми.

#### Список літератури:

1. *Булгаков Б.В.* Колебания. Москва: ГИТТЛ, 1954, 892 с.
2. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. Москва: Гостехиздат, 1956.
3. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. Москва: Наука, 1968, 560 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Москва: Гостехиздат, 1967. 575 с.
5. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. 448 с.
6. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1977. 304 с.
7. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. Москва: Наука, 1984. 320 с.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
9. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974.
10. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. Москва: Наука, 1972, 720 с.
11. *Форсайт Дж, Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1980. 280 с.
12. *Беклемішев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. Москва: Наука, 1983. 336 с.

#### Bibliography (transliterated)

1. *Bulgakov B.V.* Kolebaniya. Moscow: GITTL, 1954, 892 p.
2. *Mal'cev A.I.* Osnovy linejnoy algebrы. Moscow: Gostehizdat, 1956.
3. *Babakov I.M.* Teoriya kolebanij. Moscow: Nauka, 1968, 560 p.
4. *Gantmaher F.R.* Teoriya matric. Moscow: Gostehizdat, 1967. 575 p.
5. *Bate K., Vilson E.* Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov. Moscow: Strojizdat, 1982. 448 p.
6. *Voevodin V.V.* Vychislitel'nye osnovy linejnoy algebrы. Moscow: Nauka, 1977. 304 p.
7. *Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A.* Matricy i vychisleniya. Moscow: Nauka, 1984. 320 p.
8. *Lankaster P.* Teoriya matric. Moscow: Nauka, 1978. 280 p.
9. *Postnov V.A., Harhurim I.Ya.* Metod konechnykh elementov v raschetah sudovykh konstrukcij. Leningrad: Sudostroenie, 1974.
10. *Yakubovich V.A., Starzhinskij V.M.* Linejnye differencial'nye uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilozheniya. Moscow: Nauka, 1972, 720 p.
11. *Forsajt Dzh, Mal'kol'm M., Moulер K.* Mashinnye metody matematicheskikh vychislenij. Moscow: Mir, 1980. 280 p.
12. *Beklemishev D.V.* Dopolnitel'nye glavy linejnoy algebrы. Moscow: Nauka, 1983. 336 p.

Надійшла (received) 08.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Грищенко Володимир Миколайович (Грищенко Владимир Николаевич, Grischenko Volodymir Mykolayovich)** – кандидат технічних наук, доцент кафедри динаміки та міцності машин, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-68-79; e-mail: grivn\_dmm@ukr.net.

***С.В. КРАСНИКОВ***

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА ТУРБИНЫ 500 МВт ВБЛИЗИ ОСНОВНОЙ МОДЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Проведено моделирование системы турбоагрегат-фундамент-основание с паротурбинной установкой мощностью 500 МВт. Для исследования выбрана система с паровой турбиной, которая содержит несколько типовых корпусов. Построены геометрические и расчетные модели. Проведены расчеты вынужденных колебаний наиболее гибких корпусов паровой турбины в диапазоне частот близких к основной моде, которая характеризуется максимальными вертикальными колебаниями. Расчеты и моделирование выполнено методом конечных элементов. Определены места наибольших амплитуд колебаний на внешних стенках корпусов паровой турбины. По результатам расчетов определены причины повышенных вибраций.

**Ключевые слова:** вибрация, паровая турбина, система турбоагрегат-фундамент-основание, метод конечных элементов, собственные частоты и формы колебаний, фундамент.

***С.В. КРАСНИКОВ***

### **МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ КОРПУСА ТУРБИНИ 500 МВт ПОБЛИЗУ ОСНОВНОЇ МОДИ ВЕРТИКАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ**

Розглянуто проблему підвищеної вібрації найбільш гнучких корпусів парової турбіни енергоблоку потужністю 500 МВт. Основною причиною виникнення підвищеної вібрації парової турбіни є небаланс ротору та недостатня жорсткість елементів системи. Розглядається випадок з практики експлуатації, де центрування роторів не надала суттєвих змін вібраційних параметрів. Ціллю даної роботи було моделювання вимушених коливань корпусів циліндрів низького тиску в системі турбіна-фундамент-основа з турбіною потужністю 500 МВт, а також дослідження причин їх підвищеної вібрації. Дослідження проводились за допомогою метода коливань, метода скінчених елементів, а також розробленими автором методиками побудови моделей та проведення досліджень коливань системи турбіна-фундамент-основа. В результаті проведених досліджень було отримано трьохвимірну скінчено-елементну модель системи турбіна-фундамент-основа, отримані амплітудно-частотні залежності для точок корпусів циліндрів низького тиску. Проведене дослідження дозволило зробити висновки щодо причин підвищеної вібрації верхніх частин корпусів парової турбіни. Завдяки унікальним особливостям розробленої моделі існує можливість дослідження вібраційних процесів на рівні, що дозволяє аналізувати вібрації складних елементів системи. Практичне значення проведеної роботи має наглядний засіб розробки спеціалізованих моделей для дослідження вимушених коливань системи турбіна-фундамент-основа, а також розв'язок практичної задачі з аналізу причин підвищеної вібрації окремих складних елементів.

**Ключові слова:** вібрація, парова турбіна, система турбоагрегат-фундамент-основа, метод скінчених елементів, власні частоти та форми коливань, фундамент.

***S.V. KRASNIKOV***

### **MODELING AND ANALYSIS OF 500 MW TURBINE CASING OSCILLATIONS NEAR BASIC VERTICAL OSCILLATION**

The problem of increased vibration of the most flexible housings of a steam turbine of a power unit of 500 MW is considered. The main cause of the increased vibration of the steam turbine is the unbalance of the rotor and insufficient rigidity of the elements of the system. A case study is considered where the centering of the rotors did not significantly change the vibration parameters. The purpose of this work was to simulate the forced oscillations of low pressure cylinder housings in a turbine-foundation system with a turbine capacity of 500 MW, and to investigate the causes of their increased vibration. The studies were carried out using the oscillation method, the finite element method, as well as the methods developed by the author to construct models and conduct oscillation studies of the turbine-foundation system. As a result of the studies, a three-dimensional finite element model of the turbine-foundation-base system was obtained. The amplitude-frequency dependences for the points of the low-pressure cylinder housings were obtained. The conducted research made it possible to draw conclusions about the causes of increased vibration of the rotors of the steam turbine. The type of developed three-dimensional models of the turbine-foundation-base system is unique. Due to the features of this model, it is possible to study the vibrational processes at the level, which allows you to analyze the vibrations of almost all elements of the system. For individual studies, further specification of the parts of the system important for the task is needed. The study made it possible to conclude on the causes of increased vibration of the upper parts of the steam turbine housings. Due to the unique features of the developed model, it is possible to study vibration processes at a level that allows you to analyze the vibrations of complex elements of the system. The practical value of the work carried out is a clear tool for the development of specialized models for the investigation of the forced oscillations of the turbine-foundation-base system, as well as the solution of a practical problem to analyze the causes of increased vibration of individual complex systems of the elements. The results of the realized work were used to develop measures to improve the vibration state and reliability of power units with steam turbines with a capacity of 500 MW.

**Keywords:** vibration, steam turbine, turbine-foundation-base system, finite element method, own frequencies and forms of oscillations, foundation.

**Введение.** Экономика передовых стран в мире базируется на развитии высокотехнологичного производства, которое невозможно без мощного энергетического комплекса и его постоянного совершенствования. Большая часть электрической энергии в мире и нашей стране вырабатывается на атомных и тепловых электростанциях. Отечественные энергоблоки атомных электростанций включают в себя паротурбинные установки мощностью 500, 800 и 1000 МВт. В стране прогрессирующей экономики, одним из преемников которой стала наша страна, турбины указанной мощности были разработаны полвека назад учеными и инженерами г.Харькова под общим руководством генерального конструктора паровых и газовых турбин ПОАТ «Харьковский турбинный завод» имени Кирова Косяка Юрия Федоровича. Значительный вклад в практическое воплощение научных решений сделал заместитель генерального конструктора Зарубин Леонид Александрович. Перечислить всех ученых и инженеров, которые вложили свой труд в создание основополагающих серий турбин атомной энергетики не просто. Многие имена забыты. Труды знаменитых отечественных ученых сейчас востребованы не в нашей стране, а преимущественно за рубежом. Это один из факторов, который показывает на цели и результаты деятельности руководства нашей страны и отраслей народного хозяйства. Основные процессы экономики нашей страны сводятся к противоположным тенденциям от развитых стран мира, в частности Китая. Фактически последнее десятилетие Китай планомерно берет под контроль наукоемкое и трудоемкое производство в нашей стране. При этом он использует своих специалистов и производственные мощности. Одним из факторов их успеха является то, что китайские специалисты на всех уровнях умело используют научные и технические достижения других стран, в частности нашей. Среди технологий, которые активно применяются китайскими производителями, одними из ключевых являются разработки в области энергетики и, в частности, в производстве энергоблоков и паровых турбин. Одним из факторов надежности работы паротурбинных установок является отстройка от резонанса и другие вопросы колебаний корпусных и роторных систем.

Исследованием резонансных процессов роторных систем в нашей стране занималось большое количество ученых. Значительный вклад в разработку методов исследования роторных систем газотурбинной и паротурбинной техники сделали харьковские ученые: Сергей Иванович Богомолов, Алефтина Матвеевна Журавлева, Юрий Сергеевич Воробьев, Николай Григорьевич Шульженко. Основоположник этой школы С.И. Богомолов был дважды удостоен Государственной премии Украины в области науки и техники, а также был признан еще в 1985 году заслуженным деятелем науки Украинской ССР. С.И. Богомоловым и А.М. Журавлевой в до СНГ-пространстве было начато принципиально новое направление – исследование колебаний системы турбоагрегат-фундамент-основание на основе трехмерного моделирования наиболее гибких корпусных конструкций паротурбинных уста-

новок. Значительный вклад в развитие этого направления сделали Александр Станиславович Степченко и Валерий Алексеевич Жовдак. При исследовании резонансных процессов значительное внимание уделяется колебаниям вблизи первого резонанса, которые оказывают существенное влияние на работоспособность всей системы турбоагрегат-фундамент-основание (ТФО) [1-4]. Моделирование и анализ колебаний корпусов паровых турбин в системе турбоагрегат-фундамент-основание является сложной, но необходимой задачей для обеспечения надежности работы системы ТФО.

**Цель работы.** Необходимо провести моделирование и анализ вынужденных колебаний корпусов цилиндров низкого давления в системе ТФО с турбиной 500 МВт соответствующих частотам вблизи основной моды вертикальных колебаний. Объектом проведенных исследований является система ТФО с наиболее гибкими корпусами турбины 500 МВт. Предметом исследования являются характеристики колебаний системы ТФО с наиболее гибкими элементами турбины.

**Математическая модель.** Для моделирования и вычисления характеристик собственных колебаний используется метод конечных элементов. Основной функционал в общем виде:

$$L(t, O, q) = R(t), \quad (1)$$

где  $O$  – различные состояния связи корпусов турбины с фундаментом;

$L$  – уравнение Лагранжа 2-го рода;

$q$  – обобщенные перемещения;

$R$  – внешние силы.

В методе конечных элементов [5-7] выражение (1) часто записывается в следующем матричном виде:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (2)$$

где  $M$  – матрица масс,

$C$  – матрица демпфирования,

$K$  – матрица жесткости.

Собственная частота системы  $p_j$  определяется из формулы (3):

$$\det[K - p_j^2 M] = 0. \quad (3)$$

**Описание расчетной модели.** На основе разработанных геометрических моделей фундамента и корпуса цилиндра низкого давления был построено ряд конечно-элементных моделей [8-13]. Для проведения расчетов выбрана модель из 27040 узлов и 23165 конечных элементов. Внешний вид моделей корпусов цилиндра низкого давления паровой турбины показан на рис. 1. Корпусов ЦНД в исследуемой турбине четыре и они имеют соответствующие номера от одного до четырех [1-2]. Из рис. 1 видно, что наиболее гибкие части турбины моделировались трехмерной системой пластин, стержней и масс. Жесткие части турбины и генератор моделировались системой масс и связей. Фундамент моделировался как система стержневых элементов. Связь гибких частей турбины с фундаментом моделировалось системой жесткостей, которая учитывает особенности взаимодействия турбины с



фундаментом [14 - 21].

**Результаты численных исследований.** Были проведены расчеты вынужденных колебаний системы ТФО вблизи основной моды. Первые собственные частоты всей системы ТФО, которые характеризуются максимальными значениями амплитуд вертикальных колебаний находятся в диапазоне 18,7-19,9 Гц. Этих частот четыре, формы вынужденных колебаний корпусов турбины в системе ТФО вблизи этих частот аналогичны и показаны на рис. 2. Отличие заключается в разном соотношении амплитуд колебаний одинаковых точек системы. На одной частоте максимальную амплитуду колебаний имеет один корпус ЦНД, а

на остальных – другие.

На рис. 3 показаны точки определения амплитуд колебаний на внешней стенке корпуса второго цилиндра низкого давления. На рис. 4 – 10 показаны распределения амплитуд вертикальных колебаний указанных на рис. 3 точек вблизи соответствующей основной моды системы ТФО.

Из рис. 4-10 видно, что указанные точки имеют значительные амплитуды колебаний вблизи основной моды. Их значения имеют коэффициенты динамичности 4 и более. При этом амплитуды колебаний внутренней стенки (точки x2, x3, x4) корпуса ЦНД имеют большие значения, чем на второй стенке (точки x1, x5, x6, x7).

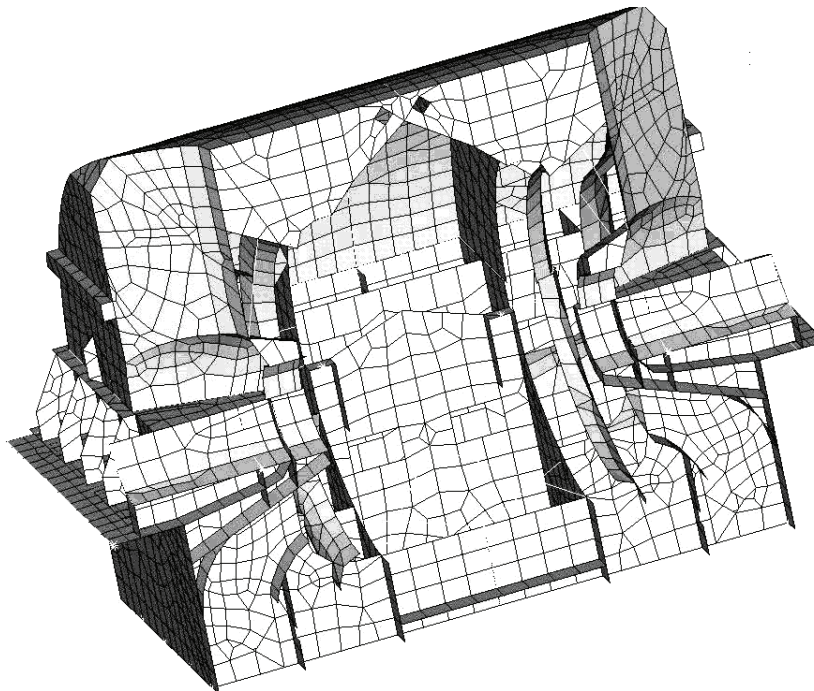


Рисунок 1 – Расчетная модель системы корпуса цилиндра низкого давления

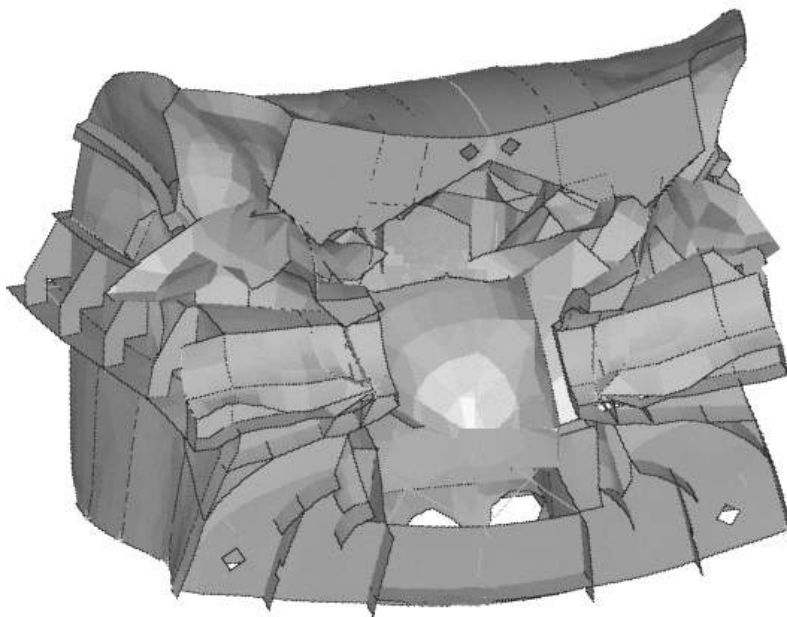


Рисунок 2 – Форма колебаний корпуса ЦНД вблизи основной моды

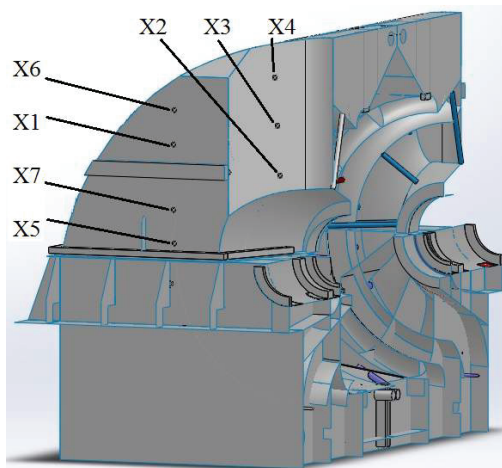


Рисунок 3 – Точки определения амплитуд вертикальных колебаний

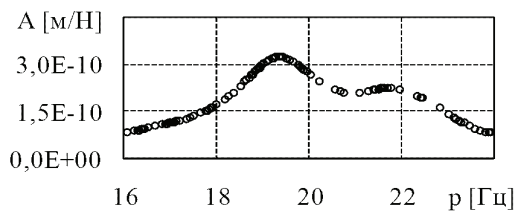


Рисунок 4 – Амплитуды колебаний в точке x1 корпуса ЦНД

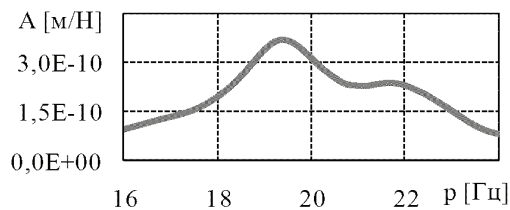


Рисунок 5 – Амплитуды колебаний в точке x2 корпуса ЦНД

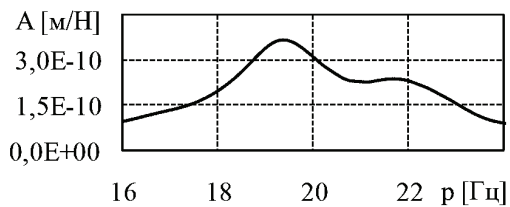


Рисунок 6 – Амплитуды колебаний в точке x3 корпуса ЦНД

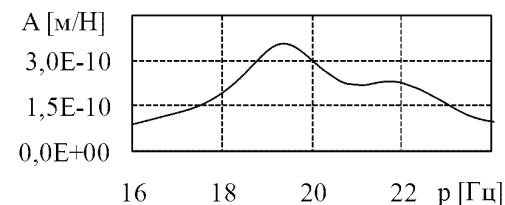


Рисунок 7 – Амплитуды колебаний в точке x4 корпуса ЦНД

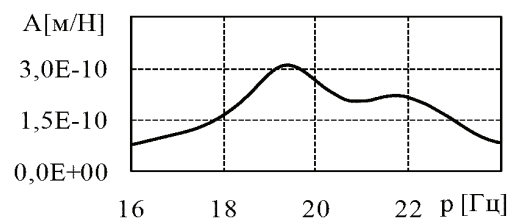


Рисунок 8 – Амплитуды колебаний в точке x5 корпуса ЦНД

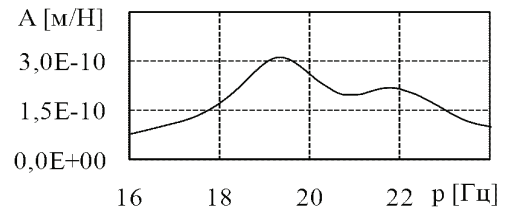


Рисунок 9 – Амплитуды колебаний в точке x6 корпуса ЦНД

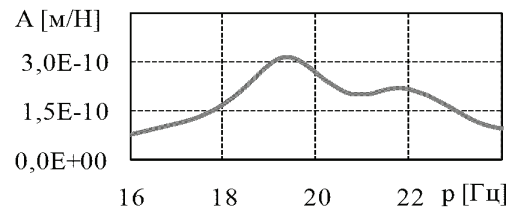


Рисунок 10 – Амплитуды колебаний в точке x7 корпуса ЦНД

**Выводы.** В результате моделирования и анализа вынужденных колебаний системы ТФО вблизи основной моды определены места повышенной вибрации на стенках корпуса цилиндра низкого давления. Результаты проведенных исследований могут быть использованы для снижения общего уровня вибрации системы турбоагрегат-фундамент-основание и повышения надежности ее работы.

#### Список литературы

1. Косяк Ю.Ф. и др. Паротурбинные установки атомных электростанций / ред. Ю.Ф. Косяк. Москва: Энергия, 1978. 312 с.
2. Трояновский Б.М. Турбины для атомных электростанций. Москва: Энергия, 1978. 182 с.
3. Левченко Е.В., Швецов В.Л., Кожешкурт И.И., Лобко А.Н. Опыт ОАО «ТурбоАтом» в разработке и модернизации турбин для АЭС. Санкт-Петербург: Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. 2010. № 3. С.5-11.
4. Субботин В.Г., Левченко Е.В., Швецов В.Л. Паровые турбины ОАО «Турбоатом» для тепловых электростанций. Харьков: Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». 2009. № 3. С. 6-17.
5. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Основа, 1991. 271 с.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984. 428 с.
7. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan. 2009. 104 p.
8. Назаренко С.А., Ткачук Н.А. Обзор некоторых ключевых направлений исследований ученых НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций. Харків: Вісник НТУ «ХПІ». 2017. № 39. С.49-56.
9. Ларін А., Чумаченко О. Співпраця запорізьких авіадвигунобудівних підприємств з провідними вченими України в галузі динамічної міцності в 1950-1970-х рр. Харків: Дослідження з історії техніки. 2016. № 23. С.72-78.
10. Жовдак В.О., Красников С.В., Степченко О.С. Решение задачи статистической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров. Харьков: Проблемы машиностроения. 2004. Т. 7, № 3. С. 39-47.
11. Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He, Lei Xiao A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction. Düsseldorf: ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. 2014. No. V01BT27A041. P. 1-8.

12. Alan Turnbull Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. London: The Royal Society. 2014. No. 20140254. P. 1-19.

13. Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press. 2009. 616 p.

14. Рунов Б.Т. Исследование и устранение вибрации паровых турбоагрегатов. Москва: Энергоиздат, 1982. 352 с.

15. Yu M., Feng N., Hahn E.J. An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters. Journal of Sound and Vibration. 2016. Vol. 365. P. 182-198.

16. Xu X.P., Han Q.K., Chu F.L. Nonlinear vibration of a generator rotor with unbalanced magnetic pull considering both dynamic and static eccentricities. Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86. P. 1521-1536.

17. Jalali M. H., Ghayour M., Ziaei Rad S., Shahriari B. Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation. 2014. Vol. 53. P. 1-9.

18. Zhang Yang, Yanlong Jiang, Guoyuan Zhang Bending fault evaluation for the HP-IP rotor system of the nuclear steam turbine based on the dynamic model. Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. P. 3364-3379.

19. Minli Yu., Ningsheng Feng, Eric J. Hahn Corrigendum to «An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters» J. Sound Vib. 2016. Vol. 365. P.182-198.

20. Minli Yu, Jike Liu, Ningsheng Feng, Eric J. Hahn Experimental evaluation of a quasi-modal parameter based rotor foundation identification technique. J. Sound Vib. 2017. Vol. 411. P. 165-192.

21. Красников С.В. Моделирование и анализ вибрационных характеристик корпуса паровой турбины большой мощности. Харьков: Вісник НТУ «ХП». 2017. № 39. С.23-26.

#### References (transliterated)

1. Kosyak Yu.F. and other (1978). Paroturbinnye ustanovki atomnykh elektrostantsii. Red. Yu.F. Kosyak [Steam turbine installations of atomic power plants] Moscow: Energiya. 312 p. [in Russian].

2. Troyanovskii B.M. Turbiny dlya atomnykh elektrostantsii [Turbines for nuclear power plants] Moscow: Energiya, 1978. 182 p. [in Russian].

3. Levchenko E.V., Shvetsov V.L., Kozheshkurt I.I., Lobko A.N. Opyt OAO "TurboAtom" v raz-rabotke i modernizatsii turbin dlya AES [Experience of OJSC "TurboAtom" in the development and modernization of turbines for nuclear power plants.] Energeticheskie i teplotekhnicheskie protsessy i oborudovanie. SantPeterburg, 2010. Vol. 3. P. 5-11 [in Russian].

4. Subbotin V.G., Levchenko E.V., Shvetsov V.L. Parovye turbiny OAO "Turboatom" dlya teplovykh elektrostantsii [Turboatom steam turbines for thermal power plants]. Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI". Kharkiv, 2009. Vol. 3. P. 6-17 [in Russian].

5. Eremenko S.Yu. Metody konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tel [Finite-element methods in mechanics of deformable bodies], Kharkiv: Osnova, 1991. 271 p. [in Russian].

6. Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy [The finite element method. Basedata] Moscow: Mir, 1984. 428 p. [in Russian].

7. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan, 2009. 104 p.

8. Nazarenko S.A., Tkachuk N.A. Obzor nekotorykh klyuchevykh napravlenii issledovaniy uchenykh NTU "KhPI" v oblasti dinamiki konstruksii. [Review of the main directions of research of scientists of NTU "KhPI" in the field of dynamics of constructions]. Visnik NTU "KhPI". Kharkiv, 2017. Vol. 39. P. 49-56 [in Russian].

9. Larin A., Chumachenko O. Spivpratsya zaporiz'kikh aviadvigunobudivnykh pidpriemstv z providnimi vchenimi Ukraïni v galuzi dinamich-noï mitsnosti v 1950-1970-kh rr. [Co-operation Zaporizhzhya aviation engine-building companies with the leading scientists of Ukraine in the field of dynamic strength in the 1950-1970] Doslidzhennya z istorii tekhniki. Kharkiv, 2016. Vol. 23. P. 72-78 [in Ukrainian].

10. Zhovdak V.O., Krasnikov S.V., Stepchenko O.S. Reshenie zadachi statisticheskoi dinamiki ma-shinostroitel'nykh konstruksii s uchetom slu-chainogo izmeneniya parametrov [The solution of the problem of the statistical dynamics of the machine-building constructions taking into account a random change in parameters]. Kharkiv: Engineering problems]. Problemy mashinostroeniya, Kharkiv, 2004. Vol. 3. P. 39-47 [in Russian].

11. Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He, Lei Xiao A Seismic Analysis on Steam Turbine Con-sidering Turbine and Foundation Interaction. ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition, Düsseldorf. 2014. V01BT27A041. P. 1-8.

12. Alan Turnbull Corrosion pitting and environmen-tally assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, London: The Royal Society. 2014. No 20140254. P. 1-19.

13. Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press, 2009. 616 p.

14. Runov B.T. Issledovanie i ustranenie vib-ratsii parovykh turboagregatov [Research and elimination of the vibration of the steam turbine units] Moscow: Energoizdat, 1982. 352 p. [in Russian].

15. Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy [The finite element method. Basedata], Moscow: Mir, 1984. 428 p. [in Russian].

16. Xu X.P., Han Q.K., Chu F.L. Nonlinear vibration of a generator rotor with unbalanced magnetic pull considering both dynamic and static eccentricities. Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86. P. 1521-1536.

17. Jalali M. H., Ghayour M., Ziaei Rad S., Shahriari B. Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation. 2014. Vol. 53. P. 1-9.

18. Zhang Yang, Yanlong Jiang, Guoyuan Zhang Bending fault evaluation for the HP-IP rotor system of the nuclear steam turbine based on the dynamic model. Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. P. 3364-3379.

19. Minli Yu., Ningsheng Feng, Eric J. Hahn Corrigendum to «An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters» J. Sound Vib. 2016. Vol. 365. P. 182-198.

20. Minli Yu, Jike Liu, Ningsheng Feng, Eric J. Hahn Experimental evaluation of a quasi-modal parameter based rotor foundation identification technique. J. Sound Vib. 2017. Vol. 411. P. 165-192.

21. Krasnikov S.V. Modelirovanie i analiz vib-ratsionnykh kharakteristik korpusa parovoi tur-biny bol'shoi moshchnosti [Modeling and analysis of the vibration characteristics of a high-power steam turbine hull]. Visnik NTU "KhPI". Kharkiv, 2017. Vol. 39. P. 23-26 [in Russian].

Поступила (received) 24.01.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Красников Сергей Васильевич (Красніков Сергій Васильович, Krasnikov Sergij Vasylovych)** кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет: тел. (+038057) 707-37-30; e-mail: vsevkr@yandex.ru

***О.О. ЛАРИН, К.Є. ПОТОПАЛЬСЬКА, А.Д. ЧЕТВЕРІКОВА***

**АНАЛІЗ ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ КОРПУСУ ВІДЦЕНТРОВОГО НАСОСУ  
ВЕЛИКОЇ ПОТУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ КОРОЗІЙНОГО ЗНОШЕННЯ  
ЙОГО ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ЧАС ТРИВАЛОЇ ЕКСПЛУАТАЦІЇ**

У даній статті була проведено дослідження для визначення залишкової міцності відцентрового насоса, що працює в понад проектний термін експлуатації в лінії насосів енергоблока АЕС. Оцінка статичної міцності проводилась для основного експлуатаційного режиму роботи насоса (при нормальних умовах експлуатації). Проведено розрахунки для отримання параметрів НДС з яких визначено вплив рівню стоншення стінки корпусу насоса на виникаючі еквівалентні напруження, з використанням розроблених розрахункових тривимірних SE-моделей, які враховують фактичну геометрію деталей насоса і прогноз її можливої зміни на період продовженого ресурсу. Відповідні дослідження проведено в рамках чисельного комп'ютерного моделювання на основі методу скінченних елементів з використанням сучасних програмних комплексів.

**Ключові слова:** корозійне зношення, відцентровий насос, енергетичне обладнання, залишкова міцність.

***А.А. ЛАРИН, К.Е. ПОТОПАЛЬСКАЯ, А.Д. ЧЕТВЕРИКОВА***

**АНАЛИЗ ОСТАТОЧНОЙ ПРОЧНОСТИ КОРПУСА ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА  
БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА КОРРОЗИОННОГО ИЗНОСА  
ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ**

В данной статье была проведено исследование для определения остаточной прочности центробежного насоса, работающего в сверх проектного срока эксплуатации в линии насосов энергоблока АЭС. Оценка статической прочности проводилась для основного эксплуатационного режима работы насоса (при нормальных условиях эксплуатации). Проведены расчеты для получения параметров НДС из которых определено влияние уровня утонения стенки корпуса насоса на возникающие эквивалентные напряжения, с использованием разработанных расчетных трехмерных КЭ-моделей, которые учитывают фактическую геометрию деталей насоса и прогноз ее возможного изменения на период продленного ресурса. Соответствующие исследования проведены в рамках численного компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов с использованием современных программных комплексов.

**Ключевые слова:** коррозийный износ, центробежный насос, энергетическое оборудование, остаточная прочность.

***О.О. LARIN, К.Е. ПОТОПАЛЬСКА, А.Д. ЧЕТВЕРИКОВА***

**ANALYSIS OF THE RESIDUAL STRENGTH OF THE HIGH-CAPACITY CENTRIFUGAL PUMP  
WITH TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF CORROSIVE WEAR DUE TO LONG-TERM  
EXPLOITATION**

In this paper, a study was conducted to determine the residual strength of a centrifugal pump operating beyond the design lifetime of the pump unit of a NPP unit. Static strength assessment had been performed for the main operating mode of the pump (under normal operating conditions). Calculations were made to obtain the deformed state parameters, which were depend on determined the effect of the thinning of the pump housing wall on the resulting equivalent stress, using the developed calculated three-dimensional CE models, which take into account the actual geometry of the pump parts and the forecast of its possible change for the extended life period. To study the deformed state at the pump in normal operating conditions had been taken into account the pre-stressed state from tightening the pump caps and the uneven temperature distribution across the housing wall and the covers, as well as the uneven distribution of internal pressure, that is, a linearly distributed pressure from the inlet pipe to the pressure head. With increasing corrosion inside the housing, the stress is increased while on the paw it is decreased. The stresses are distributed evenly and monotonically across the points selected for analysis. The relevant studies have been conducted in the framework of numerical computer modeling based on the finite element method using modern software systems.

**Keywords:** life-time, corrosion wear, reliability, power engineering equipment, residual strength.

**Вступ.** В основі енергоефективності та енергетичної безпеки України знаходяться питання, які пов'язані із транспортуванням енергоносіїв. Важливими елементами системи, що відіграють значну роль у забезпеченні потреб кінцевого споживача є супровідні енергетичні машини, зокрема відцентрові насоси [1-5]. В експлуатації дані конструкції зазнають суттєвих циклічних перевантажень, а також відчувають дію агресивного середовища, що за певний час експлуата-

ції призводить до ерозійно-корозійного зносу корпусних деталей. Несвоєчасна діагностика поточного стану конструкторів може стати причиною виникнення аварійних ситуацій, екологічних катастроф, завдати суттєвих споживчих збитків, а також бути загрозою життю людини. Попередження цих подій за рахунок вчасного проведення технічного обслуговування та ремонту є вкрай важливою задачею.

У даній роботі розглянуто питання оцінки зали-

шкової міцності відцентрового насосу, що працює в понад проектний термін експлуатації в лінії насосів енергоблока АЕС. Наведено результати теоретичних досліджень його напружено-деформованого стану з урахуванням зміни геометрії корпусних деталей, яка спостерігалася по закінченні проектного терміну експлуатації. Оцінка статичної міцності проводилася для основного експлуатаційного режиму роботи насоса (при нормальних умовах експлуатації).

Відповідні дослідження проведено в рамках чисельного комп'ютерного моделювання на основі методу скінченних елементів з використанням сучасних програмних комплексів. Розроблено розрахункові тривимірні СЕ-моделі, які враховують фактичну геометрію деталей насоса і прогноз її можливої зміни на період продовженого ресурсу. Зміну геометрії конструкції враховано на основі екстраполяції даних товщинометрії стінок корпусу, отриманих в процесі тривалого терміну експлуатації.

Насос, який розглядається відпрацював свій проектний ресурс. Експертна оцінка експлуатуючої організації його технічного стану показує, що має місце стоншення стінок корпусу в порівнянні з проектними значеннями. При аналізі швидкості ерозійно-корозійного зносу встановлено, що за час експлуатації товщини стінок корпусу, кришки і патрубків вони будуть стоншуватися лінійно в часі рівномірно по всьому корпусу на 1 % за 100 годин роботи.

Досвід експлуатації показує, що середнє напруження для насоса становить 20 год/рік. Виходячи з експертних оцінок швидкості стоншення стінок і оцінки середнього напруження насоса в рік прогнозовано стоншення стінок корпусних деталей.

Розрахунки на міцність виконані за технологією тривимірного СЕ-моделювання. Для адекватної оцінки НДС до кожного патрубка додані фрагменти труб довжиною 1 м з пружно підвішеними кінцями.

При СЕ дискретизації використовувалися лінійні елементи гексагональної і тетрадральної форм (рис. 1). Трубопроводи мають менш густу сітку, ніж корпусні деталі, оскільки їх напружений стан не є об'єктом дослідження – вони моделюються лише для передачі адекватних граничних умов на патрубки насоса. Фактично ці елементи потрібні для нівелювання можливих крайових ефектів поблизу насоса. Для оцінки якості побудованої моделі була проведена серія розрахунків з СЕ-сітками різної густоти. Товщини стінок корпусних деталей задані відповідно до прогнозованих даних по стоншенню.

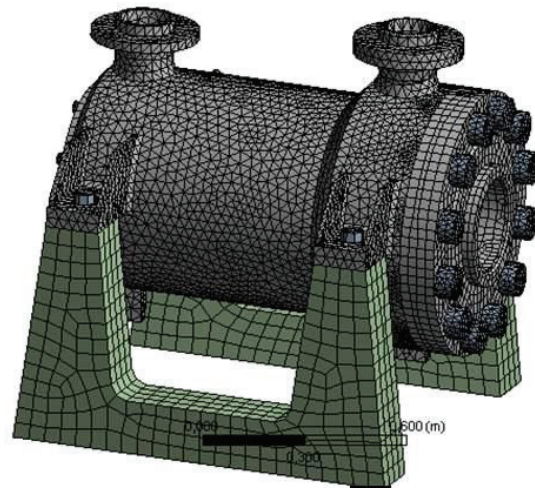
На геометричну модель була нанесена (СЕ) сітка. При цьому використовувався лінійний СЕ гексагональної і тетрадральної форм. Деталі насоса розбиті так, щоб основні конструктивні елементи мали хоча б по два елементи по товщині, усюди витримувалося співвідношення сторін СЕ з тим, щоб сітка не мала вироджених СЕ. СЕ сітка, яка використовується для розрахунків, представлена на рис. 1.

Для вибору розмірів та кількості елементів для СЕ-сітки були проведені тестові розрахунки до допустимої похибки 5 % за еквівалентними напруженнями.

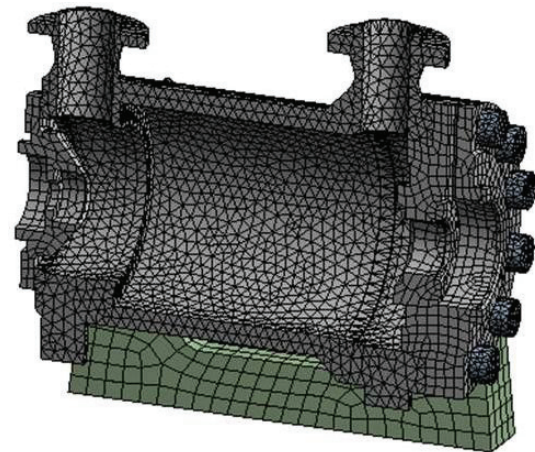
Для проведення розрахунків використовувалися

фізико-механічні характеристики матеріалів 12Х18Н10Т, 40Х, згідно ПНАЕ Г 7-002-86. При цьому використовувалися наступні граничні умови:

- жорстке закладення по опорних поверхнях лап насоса;
- обмеження можливості на радіальне стиснення по внутрішнім колам напірної і вхідної кришок;
- основа напірного і вхідного фланця в осьовому напрямку мали пружне спірання, яке моделює вплив відкинутах труб.
- об'ємна сила – сила тяжіння;
- на внутрішніх поверхнях задавався конвективний теплообмін вода – сталь (коефіцієнт тепловіддачі,  $27900 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$ );
- на зовнішніх поверхнях задавався конвективний теплообмін сталь – повітря (коефіцієнт тепловіддачі,  $5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$ );
- температура навколишнього середовища приймалася 22 град.



a



б

Рисунок 1 - СЕ сітка корпусу насоса (а) (вид в розрізі горизонтальною площиною (б))

У розрахунках враховувалася наявність попереднього затягування різьбових з'єднань (рис. 2). Значення осьових зусиль для шпильок вхідної кришки і напірної становили 100 кН і 35 кН відповідно.

Таким чином, на першому етапі вирішувалося за-

вдання визначення попередньо напруженого стану, викликаного затягуванням шпильок. На рис. 3 представлено розподіл інтенсивності напружень (еквівалентні напруження за критерієм Мізесу), які формуються в насосі при цьому режимі навантаження.

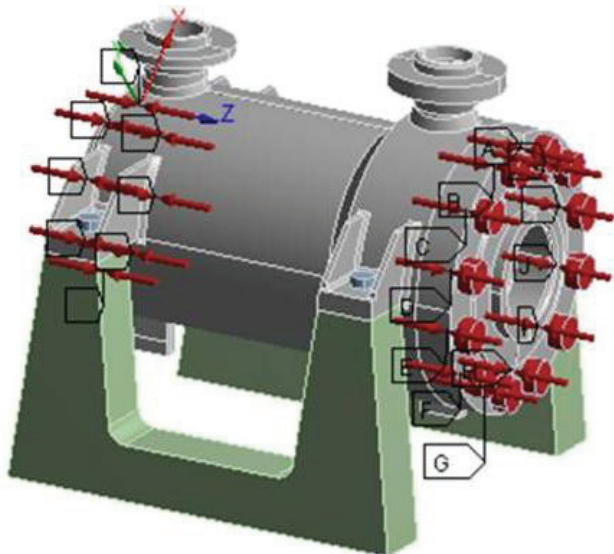


Рисунок 2 – Моделювання умов затягування різьбових з'єднань

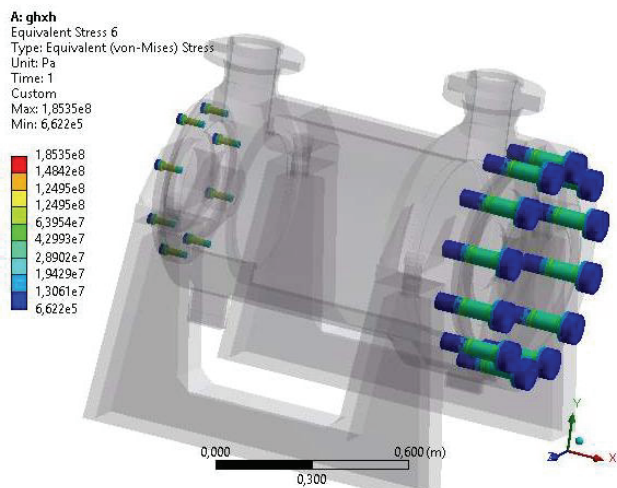


Рисунок 3 – Попереднє напружений стан шпильок, викликаний їх монтажною затягуванням

Згідно ПНАЕ Г 7-002-86 (п.3.4), номінальне напруження, що допускається для елементів обладнання і трубопроводів, навантажених внутрішнім тиском, приймають мінімальним з наступних значень [6]:

$$\sigma = \min\{R_m / 2,6; R_{0,2} / 1,5\}, \quad (1)$$

де  $R_m$  – межа міцності;  $R_{0,2}$  – межа текучості.

Для болтових з'єднань

$$[\sigma]_w = R_{0,2} / 1,5, \quad (2)$$

Аналізуючи попереднє напружений стан шпильок, затягування призвело до наявності стискаючих напружень в шпильках досить істотного рівня (рівень максимальних напружень формується під гайкою і на місці входу шпильки в тіло корпусу і становить 185 МПа, що менше допустимого значення 295 МПа).

Високий рівень напружень в місцях концентрації сформувався і на кришках насоса (рис. 3), при цьому отримані напруги (72 МПа) менше номінальних допустимих напружень (131 МПа).

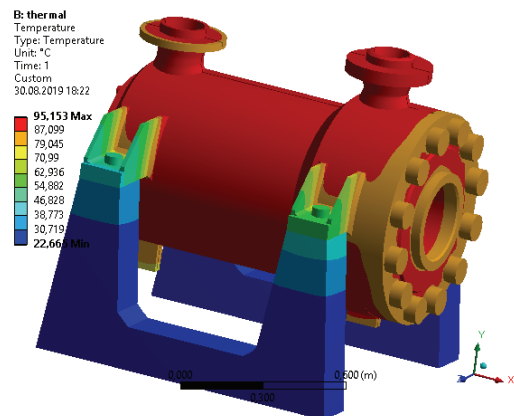


Рисунок 4 – Розподіл температури по перетину корпусу насоса при номінальній товщині стінки

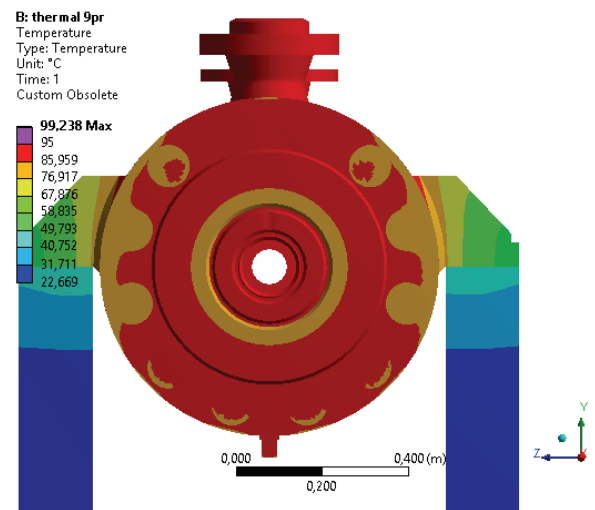


Рисунок 5 – Вплив 20% стоншення стінки корпусу насоса на розподіл температури, вид на кришку

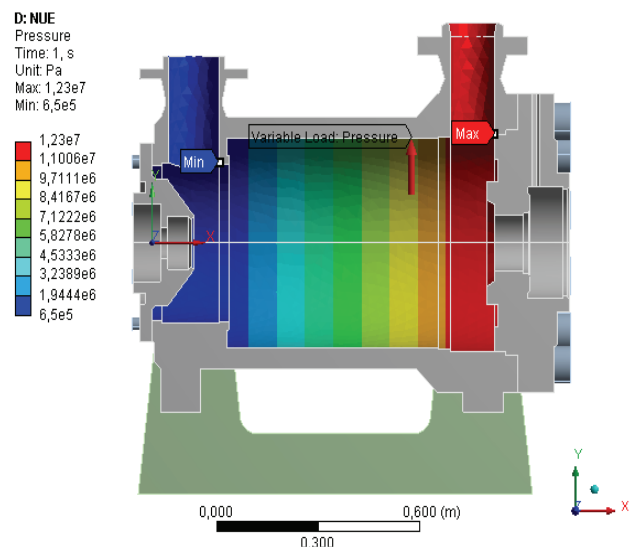


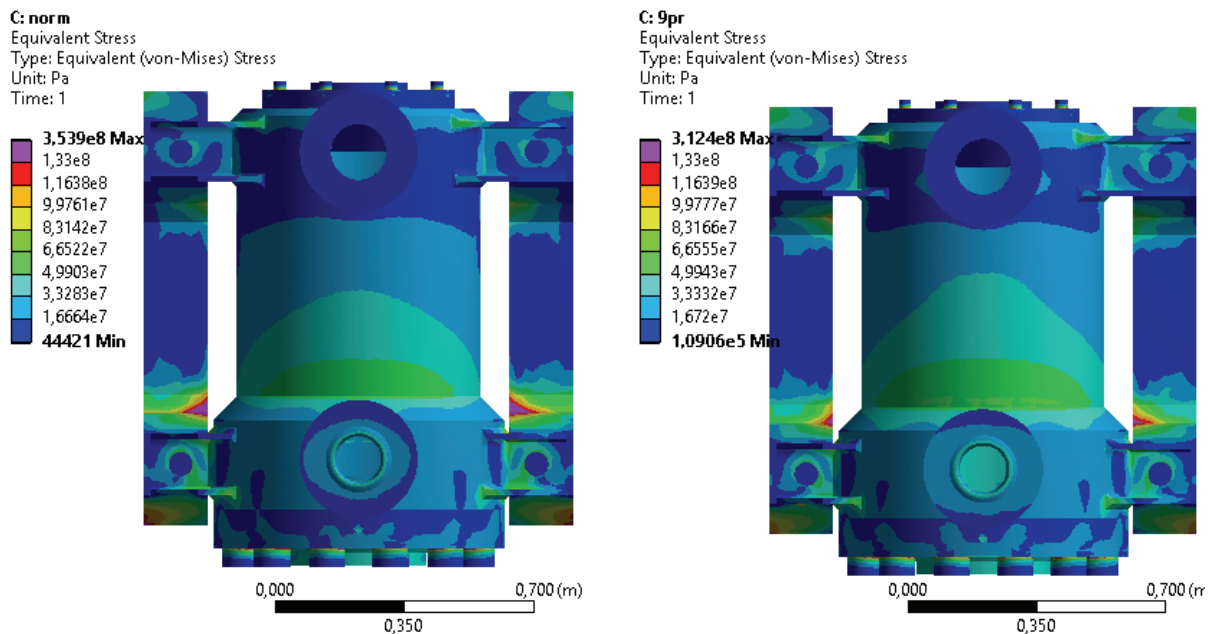
Рисунок 6 – Навантаження насоса внутрішнім тиском при NUE

Наступним розрахунком було визначення НДС при НУЕ. При НУЕ насос знаходиться в роботі з робочою рідиною, що подається під тиском і з температурою 95°C. З огляду на неоднорідність конструкції по товщині стінок, для визначення теплових навантажень попередньо вирішувалося завдання теплопровідності. Результати розрахунків при різній товщині стінки показані на рис. 4-5.

Таким чином, для вивчення НДС при НУЕ насоса враховувався попереднє напружений стан від затягу-

вання шпильок кришок насоса, нерівномірний розподіл температури по стінці корпусу і кришок, а також нерівномірний розподіл внутрішнього тиску, тобто задавалося лінійно розподілений тиск від вхідного патрубка до напірної кришки (від 0,65 МПа до 12,3 МПа). Розподіл тиску показано на рис. 6.

Отримані результати розподілу еквівалентних напружень при такій схемі навантаження з урахуванням впливу ерозійно-корозійного зносу (від 10% до 20% стоншення стінки) наведено на рис.7-8.



а б

Рисунок 7 – Вплив стоншення стінки корпусу насоса

(а – при номінальній товщині стінки, б – 20 % стоншення) на розподіл еквівалентних напружень, вид зверху

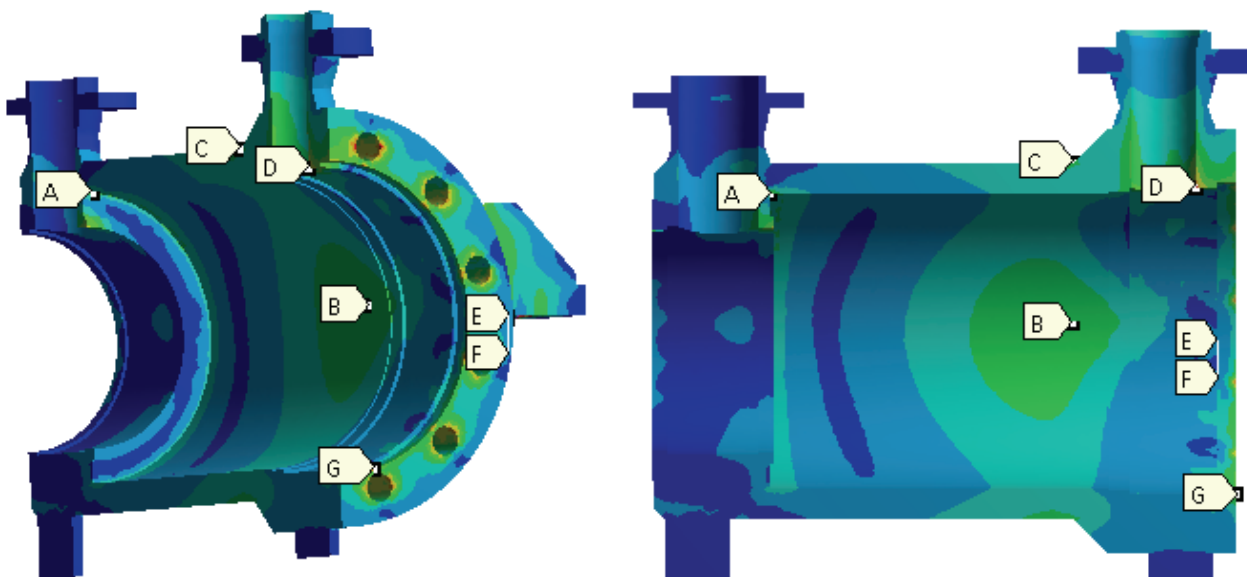


Рисунок 8 – Вибрані точки на корпусі насосу

Аналіз НДС насосу проведено окремо за компонентами для еквівалентних напружень за критерієм Мізеса у 7 перетинах на корпусі насоса, де спостеріга-

лися зони підвищених еквівалентних напружень. Це перетини:

А – корпусу у вихідного патрубка;

В – центру внутрішньої частини корпусу;  
 С – з'єднання напорного патрубку з корпусом;  
 D – внутрішньої поверхні напорного патрубку;  
 E – по корпусу через зварний шов лапи насоса (місце концентрації);  
 F – по корпусу через зварний шов лапи насоса;  
 G – місце кріплення болтових з'єднань.

Нижче приведені графіки розподілу напружень згідно з розташуванням вибраних раніше перетинів. На першому присутні перетини тільки всередині корпусу, починаючи з очки А і закінчуючи точкою D. На другому були включені всі точки з А до F.

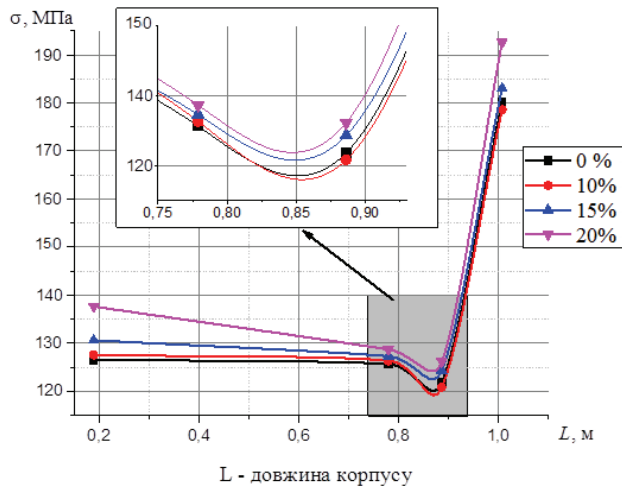


Рисунок 9 – Розподіл еквівалентних напружень по довжині корпусу при стоншення стінки

Найбільші напруження були виявлені у місцях, де знаходяться отвори для болтів, які з'єднують опори та корпус. Це пояснюється тим, що у цих місцях вра-

ховувалось попереднє натягіння. А при стонненні стінки значення еквівалентних напружень у цій зоні зменшується. Максимальні напруження в корпусі насоса сконцентровані в місці точки E по корпусу через зварний шов лапи насоса і становлять 154 МПа при номінальних розмірах, 188 МПа при 10 відсотках стоншення стінки, 165 МПа при 15 відсотках стоншення стінки та 130 МПа при 20 відсотках стоншення стінки. Напруження розподілилися таким чином, що на лапі насоса вони почали зменшуватися. Дані значення більше допустимих напружень для НУЕ 121 МПа. Напруження в місці кріплення болтових з'єднань становили 133 МПа при номінальних розмірах, 125 МПа при 10 відсотках стоншення стінки, 136 МПа при 15 відсотках стоншення стінки та 211 МПа при 20 відсотках стоншення стінки. В даному місці напруження розподілилися таким чином, що почали збільшуватися зі збільшенням впливу корозії. Дані значення також більш допустимих напружень для НУЕ, але при 10 відсотках стоншення стінки напруження майже співпадають зі значенням границі допустимих напружень.

Нижче приведений графік розподілу напружень згідно з розташуванням вибраних раніше перетинів, на якому були включені всі точки з А до F.

Як можна побачити з графіку з плином збільшення корозії всередині корпусу напруження зростають в той час, як на лапі корпусу вони зменшуються. Напруження у перетині D та у місці біля вхідного патрубка (перетин А) при трьох відсотках корозії напруження менше за напруження при її відсутності, що добре відображає вплив попереднього зміцнення насоса до введення його в експлуатацію.

Напруження розподіляються рівномірно та монотонно в усіх вибраних для аналізу перетинах.

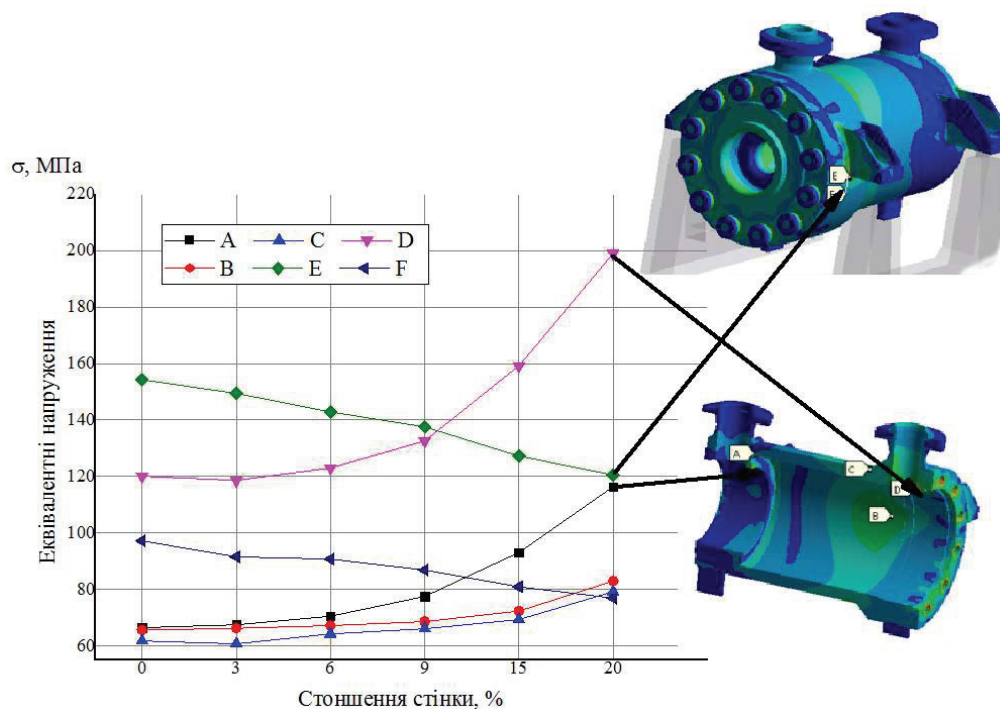


Рисунок 10 – Розподіл напружень згідно з вибраними для аналізу перетинів під впливом корозії різних відсотків



**Висновки.** У даній статті була досліджена залишкова міцність відцентрового насосу, що працює в понад проектний термін експлуатації в лінії насосів енергоблоку АЕС.

Створено SE-модель відцентрового насосу та проведено розрахунки НДС з яких визначено вплив рівню стоншення стінки корпусу насоса на виникаючі еквівалентні напруження.

На основі розробленої математичної моделі отримані результати об НДС конструкції для усіх можливих рівнів стоншення стінки конструкції. Визначено зони у яких виникають мінімальні концентрації напружень.

#### Список літератури

1. Коньшин В.І., Франкова М.В. Техніко-економічний аналіз робіт по подовженню терміну експлуатації енергоблоку ВВЕР-440. Енергетика: економіка, технології, екологія. 2014. Vol. 5420, № 3. С. 78–83.
2. Noon A.A., Kim M.H. Erosion wear on centrifugal pump casing due to slurry flow. Wear. Elsevier, 2016. Vol. 364–365. P. 103–111.
3. Tarodiya R., Gandhi B.K. Hydraulic performance and erosive wear of centrifugal slurry pumps – A review. Powder Technol. Elsevier B.V. 2017. Vol. 305. P. 27–38.
4. Leskin S.T., Slobodchuk V.I., Shelegov A.S. Analysis of VVER-1000 main circulation pump condition in operation. Nucl. Energy Technol. Elsevier B.V. 2017. Vol. 3, № 1. P. 10–14.

P. 10–14.

5. Ларин А.А. et al. Анализ прочности насоса с целью продления его ресурса. Ядерна та радіаційна безпека. 2018. Т. 79, № 3. С. 30–35.

6. Кириллов П.Л., Богословская Г.П. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках. Энергоатомиздат, 2000.

#### Bibliography (transliterated)

1. Kon'shyn V.I., Frankova M.V. Tekhniko-ekonomichnyy analiz robit po podovzhenniyu terminu ekspluataciyi enerhobloku VVER-440. Enerhetika: ekonomika, tekhnolohiyi, ekolohiya. 2014. Vol. 5420, № 3. P. 78–83.
2. Noon A.A., Kim M.H. Erosion wear on centrifugal pump casing due to slurry flow. Wear. Elsevier, 2016. Vol. 364–365. P. 103–111.
3. Tarodiya R., Gandhi B.K. Hydraulic performance and erosive wear of centrifugal slurry pumps - A review. Powder Technol. Elsevier B.V. 2017. Vol. 305. P. 27–38.
4. Leskin S.T., Slobodchuk V.I., Shelegov A.S. Analysis of VVER-1000 main circulation pump condition in operation. Nucl. Energy Technol. Elsevier B.V. 2017. Vol. 3, № 1. P. 10–14.
5. Larin A.A. et al. Analiz prochnosti nasosa s cel'yu prodleniya ego resursa. Yaderna ta radiacijna bezpeka. 2018. Vol. 79, № 3. P. 30–35.
6. Kirillov P.L., Bogoslovskaya G.P. Teplomassoobmen v yadernyh energeticheskikh ustanovkah. Energoatomizdat, 2000.

Поступила (received) 01.10.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ларін Олексій Олександрович (Ларин Алексей Александрович, Larin Olexsiy Olexsandrovych)** – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри Динаміки та міцності машин; м. Харків, Україна; e-mail: alexeya.larin@gmail.com.

**Потопальська Ксенія Євгенівна (Потопальская Ксения Евгеньевна, Potopalska Ksenia Evgenievna)** – старший викладач кафедри Динаміка та міцність машин, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; e-mail: ks.potopalskaya@gmail.com.

**Четверікова Анастасія Дмитрівна (Четверикова Анастасия Дмитриевна, Chetverikova Anastasiya Dmitrievna)** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка кафедри Динаміки та міцності машин; м. Харків, Україна; e-mail: anastasiyachetverikova8@gmail.com.

***В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ***

### **ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОЇ СКЛАДОВОЇ В'ЯЗКОГО ОПОРУ НА ТРИВАЛІСТЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА**

Розглянуто вільні коливання лінійно пружного осцилятора зі степеневим нелінійним в'язким опором. Вираз сили опору в рівнянні руху складається з двох доданків. Перший доданок пропорційний швидкості руху, а другий – степеню швидкості. Дослідження проведено методом енергетичного балансу. Реалізовано два варіанти вказаного методу. Перший пов'язаний зі складанням і розв'язанням диференціального рівняння обвідної графіка коливального процесу. В другому варіанті методу розрахунок спадної послідовності амплітуд розмахів зведено до рекурентного співвідношення, яке, при довільному додатному показнику нелінійності, доводиться розв'язувати чисельним методом. В роботі задіяно ітераційний метод Ньютона. Встановлено випадки нелінійності, коли рекурентне співвідношення має замкнені аналітичні розв'язки та побудовано їх. Доведено, що коли показник нелінійності більший нуля, але менший одиниці, то вільні коливання осцилятора обмежені в часі та зводяться до скінченної кількості розмахів, тобто осцилятор з в'язким опором має таку властивість, як і осцилятор з сухим тертям. Оскільки розрахункові формули одержані без розв'язування нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора, проведено порівняння чисельних результатів, до яких вони призводять, з результатами чисельного комп'ютерного інтегрування задачі Коші. Отримано їх задовільну узгодженість і встановлено, що використання рекурентних співвідношень дає вищу точність, ніж використання виразу для обвідної графіка вільних коливань. Показано що із виведених формул, як окремі випадки, випливають одержані раніше залежності для розрахунку амплітуд вільних коливань осцилятора при спільній дії сил сухого і лінійного в'язкого тертя. Дослідження супроводжується прикладами розрахунків і порівняльним аналізом отриманих чисельних результатів.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, вільні коливання, лінійна характеристика пружності, степеневим нелінійний в'язкий опір, умова припинення коливань.

***В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ***

### **ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА**

Рассмотрено свободные колебания линейного упругого осциллятора со степенным нелинейным вязким сопротивлением. Выражение силы сопротивления в уравнении движения состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое пропорционально скорости движения, а второе – степени скорости. Исследование проведено методом энергетического баланса. Реализовано два варианта указанного метода. Первый связан с составлением и решением дифференциального уравнения огибающей графика колебательного процесса. Во втором варианте метода расчет последовательности убывающих амплитуд размахов сведен к рекуррентному соотношению, которое при произвольном положительном показателе нелинейности приходится решать численным методом. В работе задействован итерационный метод Ньютона. Установлены случаи нелинейности, когда рекуррентное соотношение имеет замкнутые аналитические решения и построено их. Доказано, что когда показатель нелинейности больший нуля, но меньший единицы, свободные колебания осциллятора ограничены во времени и сводятся к конечной последовательности размахов, то есть осцилятор с вязким сопротивлением имеет такое свойство, как и осцилятор с сухим трением. Поскольку расчетные формулы получены без решения нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора, проведено сравнение численных результатов, к которым они приводят, с результатами численного компьютерного интегрирования задачи Коши. Получено их удовлетворительную согласованность и установлено, что использование рекуррентных соотношений дает более высокую точность, чем использование выражения для огибающей графика свободных колебаний. Показано, что из выведенных формул, как частный случай, следуют полученные ранее зависимости для расчета амплитуд свободных колебаний осциллятора при совместном действии сил сухого и линейного вязкого трения. Исследование сопровождается примерами расчетов и сравнительным анализом полученных результатов.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, свободные колебания, линейная характеристика упругости, степенное нелинейное вязкое сопротивление, условие прекращения колебаний.

***V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY***

### **THE INFLUENCE OF THE NONLINEAR COMPONENT OF VISCOUS RESISTANCE ON THE DURATION OF FREE OSCILLATIONS OF THE OSCILLATOR**

The free oscillations of a linear elastic oscillator with a power nonlinear viscous resistance are considered. The expression of the resistance force in the equation of motion consists of two terms. The first term is proportional to the speed of movement, and the second to the degree of speed. The study was conducted by the method of energy balance. Two variants of the specified method are implemented. The first is associated with the preparation and solution of the differential equation of the envelope of the graph of the oscillatory process. In the second version of the method, the calculation of the sequence of decreasing amplitudes of the ranges is reduced to a recurrence relation, which, for an arbitrary positive non-linearity index, has to be solved numerically. Newton's iterative method is

involved. Cases of nonlinearity are established when the recurrence relation has closed analytical solutions and they are constructed. It is proved that when the non-linearity index is greater than zero, but less than unity, the free oscillations of the oscillator are limited in time and are reduced to a finite sequence of ranges, that is, an oscillator with viscous resistance has the same property as an oscillator with dry friction. Since the calculation formulas were obtained without solving the nonlinear differential equation of motion of the oscillator, the numerical results they bring to are compared with the results of numerical computer integration of the Cauchy problem. Their satisfactory consistency was obtained and it was found that the use of recurrence relations gives higher accuracy than using the expression for the envelope of the graph of free oscillations. It is shown that from the derived formulas, as a special case, the previously obtained relationships for calculating the amplitudes of free oscillations of the oscillator under the combined action of the forces of dry and linear viscous friction follow. The study is accompanied by examples of calculations and a comparative analysis of the results.

**Keywords:** nonlinear oscillator, free vibrations, linear characteristic of elasticity, power nonlinear viscous resistance, condition for the termination of oscillations.

**Вступ.** Наявність двох доданків у виразі сили в'язкого опору, один з яких лінійний, а другий нелінійний, може внести суттєві зміни в рух дисипативного осцилятора, спричинений початковим відхиленням від положення рівноваги. Прикладом тому є відоме рівняння Кельвіна з двома такими доданками, яке зіграло важливу роль при математичному моделюванні автоколивань [1]. Але поряд з цим існують і інші прояви особливостей руху. Виявляється, що осцилятор з двома доданками у виразі сили в'язкого опору може мати таку властивість як і осцилятор з сухим тертям Кулона, тобто його вільні коливання зводяться до декількох розмахів і відбуваються за обмежений проміжок часу. Тут з'ясовуються умови, за яких проявляється така властивість коливальної системи. Для дослідження задіяно метод енергетичного балансу, який не потребує побудови аналітичних розв'язків складного нелінійного диференціального руху осцилятора.

**Огляд літературних джерел та постановка мети дослідження.** Метод енергетичного балансу давно використовують для опису затухаючих коливань дисипативних систем [2-4]. Але там традиційно обмежуються одним доданком у виразі сили опору і окремо розглядають такі випадки, як сухе тертя, лінійно в'язкий опір, опір пропорційний квадрату швидкості руху. Вільні коливання осциляторів при наявності в рівнянні руху двох доданків у виразі сили опору описано в статті [5] та монографічних виданнях [6, 7]. Зазначимо, що раніше вільні коливання, при спільній дії в'язкого лінійного опору та сухого тертя, розглянуто в [8]. Там подано аналітичний розв'язок задачі на фазовій площині, коли для аналізу достатньо першого інтегралу рівняння руху. В роботах [6, 7] методом припасування отримано точні розв'язки диференціальних рівнянь коливань і проведено наближений розрахунок коливань методом енергетичного балансу. Показано, що останній дає досить точні результати. Тому цей метод використовуємо і в даній роботі.

**Метою** статті є математичне моделювання вільних коливань осцилятора з нелінійним в'язким опором, який описується двома доданками в диференціальному рівнянні руху.

### 1. Побудова виразу обвідної графіка коливань.

Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m \ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + c x = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2):  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора;  $m$  – його маса;  $k_1, k_2$  – коефіцієнти в'язкого опору;  $c$  – коефіцієнт лінійної жорсткості пружини;  $v > 0$  – показник нелінійності;  $a_0$  – початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги  $x = 0$ ;  $t$  – час; крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

Розглянемо  $i$ -й розмах коливань, що починається з відхилення  $x = -a_{i-1}$  і закінчується відхиленням  $x = a_i$ . Зміна потенціальної енергії на ньому  $\Delta\Pi$  становить:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} c (a_i^2 - a_{i-1}^2). \quad (3)$$

Цю зміну подамо наближеним виразом [4, 7]:

$$\Delta\Pi \approx ca \frac{\pi da}{\omega dt}, \quad (4)$$

у якому  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ;  $a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$ .

Роботу сили в'язкого опору  $A_T$  визначаємо інтегралом [4, 7]:

$$A_T = -k_1 a^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt - k_2 a^{v+1} \omega^{v+1} \int_0^{\pi/\omega} \sin^{v+1}(\omega t) dt. \quad (5)$$

Враховуючи, що:

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{2\omega};$$

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^{v+1}(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)},$$

де  $\Gamma(z)$  – гама функція затабульована в [9, 10], виразу (5) надаємо вигляд:

$$A_T = -\frac{k_1 \pi \omega}{2} a^2 - k_2 \omega^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)} a^{v+1}. \quad (6)$$

Згідно з методом енергетичного балансу:

$$\Delta\Pi = A_T,$$

що з урахуванням (4) і (6), призводить до диференціального рівняння:

$$\frac{da}{dt} = -\lambda_1 a - \lambda_2 a^v, \quad (7)$$

в якому:  $\lambda_1 = \frac{k_1}{2m}$ ;  $\lambda_2 = \frac{k_2 \omega^{v+1}}{\pi c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}$ .

Інтегруванням (7) отримуємо з точністю до сталої  $A$ :

$$\int \frac{da}{a + ba^v} = -\lambda_1 t + A, \quad b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Звідки:

$$\ln \frac{a}{(a + ba^{v-1})^{\frac{1}{v-1}}} = -\lambda_1 t + A \quad \text{при } v \neq 1,$$

$$\frac{1}{1+b} \ln a = -\lambda_1 t + A \quad \text{при } v = 1.$$

Сталу  $A$  визначаємо з умови  $a(0) = a_0$ . Тоді:

$$a(t) = \begin{cases} \left[ (b + a_0^{1-v}) e^{\lambda_1(v-1)t} - b \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1 \\ a_0 \exp\left(-\frac{k_1 + k_2}{2m} t\right) & v = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Верхній вираз переходить в нижній при  $v = 1$ , внаслідок граничного переходу  $v \rightarrow 1$ .

Згідно з (8), при  $v < 1$ , існує таке  $t = t_*$ , коли  $a(t_*) = 0$ . Воно є коренем рівняння:

$$(b + a_0^{1-v}) e^{-\lambda_1(1-v)t_*} - b = 0,$$

що має аналітичний розв'язок:

$$t_* = \frac{1}{(1-v)\lambda_1} \ln \left( 1 + \frac{a_0^{1-v}}{b} \right).$$

Отже, при  $v < 1$ , вільні коливання характеризуються обмеженою кількістю розмахів  $n_*$ , яку можна наближено знайти за формулою:

$$n_* = \text{ціла частина} \left[ \frac{\omega}{\pi(1-v)\lambda_1} \ln \left( 1 + \frac{a_0^{1-v}}{b} \right) \right]. \quad (9)$$

В цьому проявляється аналогія вільних коливань осцилятора з нелінійним в'язким опором і осцилятора з сухим кулоновим тертям. При  $v \geq 1$  такої аналогії немає.

Використовуючи (8), нескладно обчислити амплітудне відхилення осцилятора в кінці  $i$ -го розмаху. Його значення становить:

$$a_i \approx \begin{cases} \left[ (b + a_0^{1-v}) \exp\left(\lambda_1(v-1)\frac{i\pi}{\omega}\right) - b \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1 \\ a_0 \exp\left(-\frac{k_1 + k_2}{2m} \frac{i\pi}{\omega}\right) & v = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Тут нижня залежність відповідає точному розв'язку задачі Коші.

Формула (10) узагальнює відомі результати. Так при  $v = 0$ ;  $k_1 = k$ ;  $k_2 = F_T$  маємо  $\lambda_1 = \frac{k}{2m}$ ;

$$\lambda_2 = \frac{2F_T}{\pi\sqrt{cm}}; \quad b = \frac{4F_T}{\pi k} \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \text{і формула (10) набуває}$$

вигляд:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right) - \frac{2F_T}{\lambda c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right) \right], \quad (11)$$

де  $\lambda = \pi k (2\sqrt{cm})^{-1}$ .

**2. Рекурентні співвідношення для розрахунку амплітуд розмахів.** Їх одержимо теж методом енергетичного балансу. Для цього прирівняємо праві частини виразів (3) і (6).

В результаті одержуємо рекурентне співвідношення:

$$a_i^2 - a_{i-1}^2 = -\gamma_1 (a_i + a_{i-1})^2 - \gamma_{2i} \cdot a_{i-1}^{1-v} (a_i + a_{i-1})^{v+1}, \quad (12)$$

в якому:

$$\gamma_1 = \frac{\pi \omega k_1}{4c}; \quad \gamma_{2i} = \frac{\pi}{2^v \omega} \frac{\lambda_2}{a_{i-1}^{1-v}}.$$

Введенням безрозмірної величини  $\xi_i = 1 + \frac{a_i}{a_{i-1}}$

рівнянню (12) надаємо вигляд:

$$(1 + \gamma_1) \xi_i + \gamma_{2i} \cdot \xi_i^v = 2. \quad (13)$$

Тут, при  $v < 1$ , коефіцієнт  $\gamma_{2i} \rightarrow \infty$ , коли  $a_{i-1} \rightarrow 0$ . Зі зменшенням амплітуд розмахів  $a_{i-1}$  ліва частина рівняння (13) стає більшою двох і воно переставати мати додатні корені. Це означає, що у випадку  $v < 1$  вільні коливання мають обмежену кількість циклів, про що вже йшлося вище. Для забезпечення коливального руху відхилення осцилятора на початку розмаху повинно бути більшим, ніж:

$$\sup a_{i-1} = \left( \frac{2\pi \lambda_2}{\omega(1-\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{1-v}}, \quad \gamma_1 < 1.$$

Розв'язок рівняння (13) при довільних  $v > 0$  доводиться одержувати числовими методами. Одним із них може бути ітераційний метод Ньютона, у відповідності з яким:

$$\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} - \frac{(1 + \gamma_1) \xi_{ij} + \gamma_{2i} \cdot \xi_{ij}^v - 2}{1 + \gamma_1 + v \gamma_{2i} \cdot \xi_{ij}^{v-1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

За нульове наближення можна брати  $\xi_{i0} = 2$ .

Обчисливши з заданою точністю  $\xi_{i,j+1}$ , далі слід використати залежність:

$$a_i = (\xi_{i,j+1} - 1) a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

щоб знайти значення  $a_i$  по відомому значенню  $a_{i-1}$ .

Поряд з викладеним універсальним способом, розглянемо додатково окремі значення показника нелінійності  $v$ , для якого рівняння (13) має точні аналітичні розв'язки.

Випадок  $v = 1/3$ . Заміною  $z_i = \xi_i^{1/3}$  рівняння (13) зводимо до кубічного:

$$z_i^3 + \frac{\gamma_{2i}}{1 + \gamma_1} z_i - \frac{2}{1 + \gamma_1} = 0.$$

Його розв'язок виражається формулами [11]:

$$z_i = \sqrt[3]{S + \frac{1}{1+\gamma_1}} - \sqrt[3]{S - \frac{1}{1+\gamma_1}};$$

$$S = \frac{1}{1+\gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{27} \frac{\gamma_{2i}^3}{1+\gamma_1}}.$$

Рекурентне співвідношення отримує форму:

$$a_i = (z_i^3 - 1)a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Процес коливань триває лише при  $z_i > 1$ , тобто маємо обмежену кількість циклів.

Випадок  $\nu = 1/2$ . Заміною  $\eta_i = \xi_i^{1/2}$  рівняння (13) зводимо до квадратичного:

$$\eta_i^2 + \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1} \eta_i - \frac{2}{1+\gamma_1} = 0.$$

Тоді зв'язок між амплітудами розмахів подається формулою:

$$a_i = (\eta_i^2 - 1)a_{i-1}, \quad (14)$$

де  $\eta_i = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1} \right)^2 + \frac{2}{1+\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1}}.$

Умова припинення коливань виражається нерівністю  $\eta_i \leq 1$ .

Випадок  $\nu = 1$ . Рівняння (13) стає лінійним і має розв'язок:

$$\xi_i = \frac{2}{1+\gamma_1 + \gamma_{2i}}.$$

Обчислення амплітуд розмахів зводиться до використання формули:

$$a_i = \frac{1-\gamma_1-\gamma_{2i}}{1+\gamma_1+\gamma_{2i}} a_{i-1} = \frac{4\sqrt{cm} - \pi(k_1+k_2)}{4\sqrt{cm} + \pi(k_1+k_2)} a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

При  $k_1+k_2 = k$  вона співпадає з формулою, що надрукована в [6, 7].

Випадок  $\nu = 2$ . Рівняння (13) стає квадратним, що має розв'язок:

$$\xi_i = \sqrt{\left( \frac{1+\gamma_1}{2\gamma_{2i}} \right)^2 + \frac{2}{\gamma_{2i}} - \frac{1+\gamma_1}{2\gamma_{2i}}}. \quad (15)$$

Амплітуди розмахів пов'язані співвідношенням:

$$a_i = (\xi_i - 1)a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Якщо  $a_{i-1} \rightarrow 0$ , то  $\gamma_{2i} \rightarrow 0$ . Тоді з (15) випливає, що  $\xi_i \rightarrow \frac{2}{1+\gamma_1}$ . Це значить, що при  $\gamma_1 < 1$   $\xi_i > 1$  і процес вільних коливань має безліч циклів, з нескінченно малими амплітудами.

При відсутності лінійної складової маємо чисто квадратичний в'язкий опір. Для нього  $\gamma_1 = 0$ :

$\gamma_{2i} = \frac{k_2 \cdot a_{i-1}}{3m}$ . Якщо  $\gamma_{2i} \ll 1$ , то згідно з (15):

$$\xi_i = 2 - 4\gamma_{2i}.$$

Тоді:  $\frac{a_i}{a_{i-1}} = \xi_i - 1 = 1 - \frac{4k_2}{3m} a_{i-1}.$

Залежність такого типу це відома формула А де Салігн, яку він одержав емпіричним шляхом [1]

Випадок  $\nu = 3$ . Рівняння (13) зводиться до кубічного:

$$\xi_i^3 + \frac{1+\gamma_1}{\gamma_{2i}} \xi_i - \frac{2}{\gamma_{2i}} = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок [11]

$$\xi_i = \sqrt[3]{Q + \frac{1}{\gamma_{2i}}} - \sqrt[3]{Q - \frac{1}{\gamma_{2i}}},$$

де  $Q = \frac{1}{\gamma_{2i}} \sqrt{1 + \frac{1}{27} \frac{(1+\gamma_1)^3}{\gamma_{2i}}}.$

Якщо  $a_{i-1} \rightarrow 0$ , то  $\gamma_{2i} \rightarrow 0$ , а  $Q \gg \frac{1}{\gamma_{2i}}$ , бо

$$Q \rightarrow \frac{(1+\gamma_1)^{3/2}}{3^{3/2} \gamma_{2i}^{3/2}}. \text{ Такий асимптотичний поведінці відпо-}$$

відає:

$$\xi_i \rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma_{2i} Q^{2/3}} \rightarrow \frac{2}{1+\gamma_1}.$$

Оскільки  $\gamma_1 < 1$ , то  $\xi_i > 1$ . Отже вільні коливання не обмежені кількістю розмахів.

#### Числові результати і їх порівняльний аналіз.

Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1$  кг;  $c = 100$  Н/м;  $a_0 = 0,04$  м;  $k_1 = 0,4$  Нс/м;  $k_2 = 0,8$  Н(с/м)<sup>γ</sup>.

**Приклад 1.** Обчислимо послідовність амплітуд вільних коливань осцилятора, в якого  $\nu = 0,5$ . Для прийнятих числових даних:  $\omega = 10$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_1 = 0,2$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_2 = 0,140764$  м<sup>1/2</sup>с<sup>-1</sup>;  $b = 0,703818$  м<sup>1/2</sup>;  $\gamma_1 = 10^{-2} \pi$ ;  $\gamma_{2i} = 0,031270 / \sqrt{a_{i-1}}$ . Тут враховано, що:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ;

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = 0,906402; \quad \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0,919063.$$

Оскільки  $\nu < 1$ , то вільні коливання обмежені кількістю розмахів і, згідно з формулою (9),  $n^* = 7$ .

Обчислені трьома способами значення амплітуд коливань записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 0,5$

i	Формула (10)	Формула (14)	Числове інтегр.
	Значення $10^2 a_i$ , м		
1	2,9600	2,9567	2,9574
2	2,1013	2,0951	2,0963
3	1,4092	1,4007	1,4020
4	0,8699	0,8595	0,8609
5	0,4708	0,4590	0,4602
6	0,2001	0,1873	0,1882
7	0,0466	0,0335	0,0339

В останній колонці вказано значення  $x(t_i)$ ,  $t_i = \frac{i\pi}{\omega}$ , одержані числовим інтегруванням рівняння

(1) при початкових умовах (2). Маємо задовільну узгодженість результатів, отриманих різними способами. Коливальний процес включає сім розмахів, що було визначено раніше по формулі (9).

Графік коливань, до якого призводить числове комп'ютерне інтегрування задачі Коші (1), (2), подано на рис. 1.

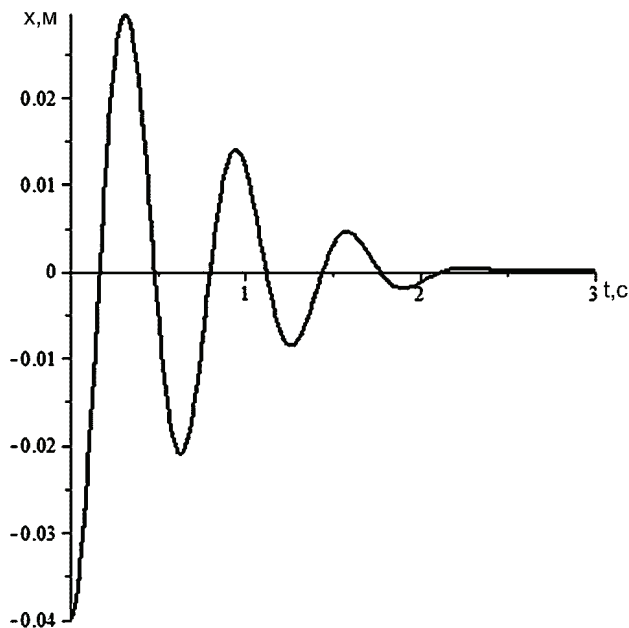


Рисунок 1 – Графік коливань при  $\nu = 0,5$

На рисунку видно, що здійснивши сім розмахів, далі осцилятор з плином часу монотонно прямує в положення рівноваги  $x = 0$ .

**Приклад 2.** Поміняємо в першому прикладі лише значення  $\nu$ , задавши  $\nu = 2$ . Тоді:  $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda_2 = 3,395305 \text{ м}^{-1}\text{с}^{-1}$ ;  $b = 16,976527 \text{ м}^{-1}$ ;  $\gamma_1 = 10^{-2}\pi$ ;  $\gamma_{2i} = 0,266667a_{i-1}$ . При обчисленні констант враховано, що  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 0,75\sqrt{\pi}$ . Розраховані трьома способами значення перших десяти амплітуд вільних коливань записано в табл. 2.

Таблиця 2 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 2$

$i$	Формула (10)	Формула (16)	Числове інтегр.
	Значення $10^2 a_i$ , м		
1	3,6072	3,6067	3,6070
2	3,2658	3,2649	3,2653
3	2,9667	2,9657	2,9661
4	2,7031	2,7020	2,7025
5	2,4695	2,4682	2,4688
6	2,2614	2,2601	2,2606
7	2,0752	2,0738	2,0743
8	1,9078	1,9065	1,9070
9	1,7570	1,7557	1,7562
10	1,6202	1,6193	1,6197

Обчислені методом енергетичного балансу значення  $a_i$  добре узгоджуються зі значенням  $x = x\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)$ , що дає числове інтегрування диференціального рівняння коливань (1).

Одержаний цим способом графік коливань зображено на рис. 2.

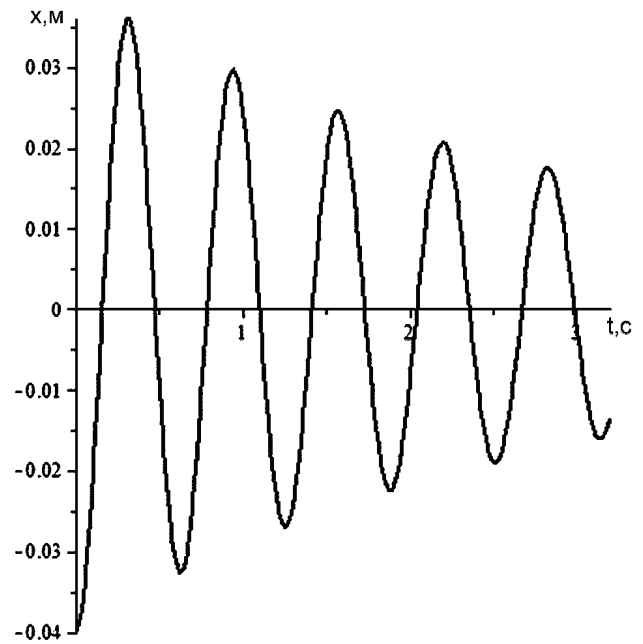


Рисунок 2 – Графік вільних коливань при  $\nu = 2$

Тут коливальний процес не обмежений у часі, бо має нескінченну кількість циклів.

**Висновки.** Методом енергетичного балансу виведено та апробовано наближені формули для розрахунку амплітуд вільних затухаючих коливань осциляторів, рівняння руху яких мають нелінійну складову в виразі сили в'язкого опору. Показано, що такі осцилятори, за певних умов, при вільних коливаннях здійснюють обмежену кількість розмахів, як і осцилятори з сухим кулоновим тертям. Встановлено умову прояву цієї аналогії, яка стосується показника степеневі нелінійності сили в'язкого опору. Вірогідність запропонованих наближених формул підтверджена узгодженістю числових результатів, до яких вони призводять, з результатами числового комп'ютерного інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху.

#### Список літератури

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. – Т. 3. / под общей ред. И.А. Бергера, Я.Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968. 568 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Москва: Наука, 1980. 270 с.
5. Бурлака В.В., Ольшанський В.П., Малець О.М. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого тертя. Механізація сільськогосподарського виробництва. Вісник ХНТУСГ. Харків: ХНТУСГ, 2014. Вип. 148. С. 19-24.
6. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М. та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдруку, 2015. 116 с.
7. Ольшанський В.П., Тіщенко Л.М., Ольшанський С.В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдруку, 2016. 264 с.

8. *Бабак І.М.* Теорія коливань. Москва: Дрофа, 2004. 591 с.

9. *Абрамовиц М., Стиган І.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва: Наука, 1974. 832 с.

#### References (transliterated)

1. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 1974. 504 p.

2. Prochnost', ustochivost', kolebaniya. Spravochnik v trekh tomakh. [Strength, stability, fluctuations. Handbook in three volumes]. T. 3. edited by *I.A. Berger, J.G. Panovko*. Moscow: Mechanical Engineering, 1968. 568 p.

3. Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh [Vibration in technology. Handbook in six volumes]. T. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems; edited by *I.I. Blekhtman*. Moscow: Engineering, 1979. 351 p.

4. *Panovko Ya.G.* Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations].

Moscow: Nauka, 1980. 270 p.

5. *Burlaka V.V., Olshanskiy V.P., Malets O.M.* Do rokhrakhunku kolyvan' mekhanizmiv pry spil'niy diyi syl sukhoho tertya [Towards the calculation of oscillations of mechanisms under the joint action of the forces of dry friction]. Mechanization of agricultural production Visnyk KhNTUSG. Kharkiv, KhNTUSG, 2014. Vol. 148. P. 19-24.

6. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., Tishchenko L.N.* Kolyvannya dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv: Miskdruk, 2015. 116 p.

7. *Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N., Olshanskiy S.V.* Dynamika dysypatyvnykh ostsyl'yatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv: Miskdruk, 2016. 264 p.

8. *Babakov I.M.* Theori of vibrations. Moscow: Drofa, 2004. 591 p.

9. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Science, 1979. 832 p.

10. *Janke E., Jemde F., Ljosh F.* Special'nye funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

11. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]. Moscow: Science, 1974. 832 p.

Надійшла (received) 01.11.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

**В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

### **ДО РОЗРАХУНКУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ДИСИПАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА З НЕЛІНІЙНОЮ ПРУЖНІСТЮ**

Викладено наближений спосіб обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань осцилятора, що має у виразі пружної характеристики нелінійний степеневий доданок, при дії сили лінійного в'язкого опору. Метод не потребує побудови розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху і ґрунтується на відомому положенні про те, що обвідна графіка вільних затухаючих коливань дисипативного осцилятора Дуффінга наближено описується експоненціальною функцією, такою як і в лінійного осцилятора. Виходячи з цього положення, розрахунок амплітуд затухаючих коливань осцилятора зі степеневою нелінійністю в виразі пружності де є також лінійний доданок, зведено до рекурентних співвідношень. У випадку жорсткої силової характеристики в співвідношення входить двохзначна функція Ламберта від'ємного аргументу, де використана її перша гілка. Для м'якої силової характеристики рекурентне співвідношення має функцію Ламберта додатного аргументу, яка однозначна. З метою спрощення числової реалізації одержаних аналітичних розв'язків, рекомендовано використовувати відомі таблиці цієї спеціальної функції, а в випадку малих за модулем значень аргументу – запропоновану апроксимацію її елементарними функціями. Щоб надати інформацію про фактичні похибки запропонованого способу розрахунку, розглянуто приклади, де проведено порівняння результатів, до яких він призводить, з результатами числового комп'ютерного інтегрування диференціального рівняння руху осцилятора, для випадків квадратичної та кубічної нелінійностей. Задовільна узгодженість результатів порівняння підтвердила придатність використання запропонованого способу в інженерних розрахунках.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, амплітуда затухаючих коливань, в'язкий опір, степенева нелінійність жорсткості, функція Ламберта, рекурентне співвідношення.

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**

### **К РАСЧЕТУ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТЬЮ**

Изложен приближенный способ вычисления амплитуд свободных затухающих колебаний осциллятора с нелинейным степенным слагаемым в выражении упругой характеристики, при действии силы линейного вязкого сопротивления. Метод не требует построения решения нелинейного дифференциального уравнения движения и основан на известном положении о том, что огибающая графика свободных затухающих колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга приближенно описывается экспоненциальной функцией, как и в линейном осцилляторе. Исходя из этого положения, расчет амплитуд затухающих колебаний осциллятора со степенной нелинейностью в выражении упругости, где есть также линейное слагаемое, сведен к рекуррентным соотношениям. В случае жесткой силовой характеристики в соотношение входит двухзначная функция Ламберта отрицательного аргумента, где использована ее первая ветвь. Для мягкой силовой характеристики рекуррентное соотношение имеет функцию Ламберта положительного аргумента, которая однозначна. С целью упрощения числовой реализации полученных аналитических решений, рекомендуется использовать известные таблицы этой специальной функции, а в случае малых по модулю значений аргумента – предложенную аппроксимацию ее элементарными функциями. Чтобы предоставить информацию о фактических погрешностях предложенного способа расчета, рассмотрены примеры, где проведено сравнение результатов, к которым он приводит, с результатами численного компьютерного интегрирования дифференциального уравнения движения для случаев квадратичной и кубической нелинейности. Удовлетворительная согласованность результатов сравнения подтвердила пригодность использования предложенного способа в инженерных расчетах.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, амплитуда затухающих колебаний, вязкое сопротивление, степенная нелинейность жесткости, функция Ламберта, рекуррентное соотношение.

**V.P. OLSHANSKIY**

### **CALCULATION OF FREE OSCILLATIONS OF A DISSIPATIVE OSCILLATOR WITH NONLINEAR ELASTICITY**

An approximate method for calculating the amplitudes of free damping oscillations of an oscillator with a nonlinear power term in terms of the elastic characteristic under the force of linear viscous resistance is presented. The method does not require the construction of a solution of a nonlinear differential equation of motion and is based on the well-known assumption that the envelope graph of the free damping oscillations of a dissipative Duffing oscillator is approximately described by an exponential function, as in a linear oscillator. Based on this position, the calculation of the damping oscillations of the oscillator with power nonlinearity in the expression of elasticity, where there is also a linear term, is reduced to recurrent relations. In the case of a rigid power characteristic, the two-digit Lambert function of the negative argument, where its first branch is used, is included in the ratio. For a soft power characteristic, the recurrence relation has a Lambert function of a positive argument, which is unambiguous. In order to simplify the numerical implementation of the analytical solutions obtained, it is recommended to use known tables of this special function, and in the case of small modular values of the argument, the proposed approximation by its elementary functions. In order to provide information on the



actual errors of the proposed calculation method, examples are given where the results to which it results are compared with the results of numerical computer integration of the differential equation of motion for quadratic and cubic nonlinearities. The satisfactory consistency of the comparison results confirmed the suitability of using the proposed method in engineering calculations. Calculations showed that the influence of the nonlinear component of elasticity weakens during oscillation damping and, at small amplitudes, they are close to the terms of the geometric progression, as in a linear oscillator.

**Keywords:** nonlinear oscillator, damping amplitude, viscous resistance, power stiffness nonlinearity, Lambert function, recurrence relation.

**Вступ.** В теорії нелінійних механічних коливань відомо, що в першому наближенні дисипативна система з лінійним в'язким опором і кубічним доданком у виразі сили пружності (осцилятор Дуффінга) має обвідну графіка затухаючих коливань, близьку до експоненти [1, 2]. Виходячи з цього, тут зроблена спроба використати цю властивість для наближеного обчислення амплітуд вільних коливань осциляторів з іншими показниками нелінійності в виразі силової характеристики, що має ще й лінійну складову. Оскільки в таких системах частота вільних коливань залежить від амплітуди, то тривалості напівциклів змінюються в ході руху і це доводиться враховувати в запропонованому способі розрахунку, який має форму рекурентних співвідношень між амплітудами розмахів.

**Огляд літературних джерел.** Рух осцилятора Дуффінга з лінійним в'язким опором розглядає в [3]. Там трьома способами будували наближені розв'язки рівняння руху. Використали методи: степеневих рядів, скінченних різниць і послідовних наближень Пікара. Встановлено, що розбіжності результатів, які дають перелічені методи, несуттєві при малому значенні коефіцієнта в'язкості. В монографії [1] розв'язок нелінійного рівняння руху осцилятора з кубічною нелінійністю у виразі пружності будували асимптотичним методом Крилова-Боголюбова. Показано, що в першому наближенні обвідна графіка вільних коливань описується експонентою, причому такою як і в лінійному осциляторі. До такого результату приходять і автори в [2]. Тут робимо спробу одержати розрахункові формули для обчислень амплітуд коливань без побудови розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. Така можливість є при використанні методу енергетичного балансу [4-7], де його реалізовано для лінійно пружних систем. Не користуючись ним, в основу роботи тут покладаємо результати публікацій [1, 2] про наближену експоненціальну залежність обвідної від часу. Це призводить до рекурентних співвідношень між амплітудами розмахів, виражених через функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [8].

**Метою** статті є розробка та апробація наближеного способу обчислення амплітуд вільних коливань дисипативного осцилятора при наявності нелінійного степеневого доданка у виразі його силової характеристики.

**Викладення основного матеріалу.** Будемо обчислювати амплітуди коливань механічної системи, рух якої описується диференціальним рівнянням:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c_1 x + c_2 |x|^{v+1} \operatorname{sign}(x) = 0, \quad (1)$$

при умові, що:

$$x(0) = -a_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2)  $m$  – маса осцилятора;  $k$  – коефіцієнт в'язкого опору;  $c_1, c_2$  – характеристики пружності;  $v \geq 0$  – показник нелінійності;  $a_0$  – початкове відхилення системи від положення рівноваги;  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора, як функція часу  $t$ , крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

При  $v = 0$  маємо лінійний осцилятор, а при  $v = 2$  – осцилятор Дуффінга.

Обвідну графіка затухаючих коливань, як і в лінійній системі, де вона не залежить від жорсткості пружини, подаємо виразом:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{k}{2m} t\right). \quad (3)$$

Точність цього наближення буде високою, коли  $c_2 |a_0|^v \ll c_1$ .

Осереднену частоту  $\omega_i$  –  $i$ -го розмаху обчислюємо по формулі:

$$\omega_i = \left[ \frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{\alpha c_2}{2^v m} (a_{i-1} + a_i)^v \right]^{1/2}, \quad (4)$$

де  $a_{i-1}, a_i$  – відповідно амплітудні відхилення на початку і в кінці  $i$ -го розмаху,

$$\alpha = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{v+2} \varphi d\varphi.$$

Цей інтеграл виражається через Гама-функцію  $\Gamma(z)$  [9]. Тому:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)}$$

і обчислення  $\alpha$  можна проводити за допомогою таблиць Гама-функцій [10, 11]. При  $v = 0, \alpha = 1$ , що відповідає лінійному осцилятору.

Якщо тривалість  $i$ -го розмаху становить:

$$t_i = \frac{\pi}{\omega_i},$$

то із (3) і (4) випливає наступне співвідношення між його початковою  $a_{i-1}$  і кінцевою  $a_i$  амплітудами:

$$a_i = a_{i-1} \exp\left\{-\frac{k\pi}{2m} \left[ \frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{\alpha c_2}{2^v m} (a_{i-1} + a_i)^v \right]^{-1/2}\right\}, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

Обчислення  $a_i$  при відомому  $a_{i-1}$  тут можна проводити методом ітерацій. Але, коли:

$$\frac{\alpha c_2}{m} a_0^v \ll \omega_*^2 = \frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2,$$

то, замість (5), можна наближено прийняти:

$$a_i = a_{i-1} \exp \left[ -\frac{k \pi}{2m\omega_*} \left( 1 - \frac{\alpha c_{2*}}{2m\omega_*^2} a_i^v \right) \right],$$

де

$$c_{2*} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + \exp \left( \frac{k \pi}{2m\omega_*} \right) \right] \right\}^v c_2.$$

Тоді, логарифмуванням із (6) отримуємо:

$$\ln a_i^v - \frac{k \pi \alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v = \ln a_{i-1}^v - \frac{k \pi v}{2m\omega_*}. \quad (7)$$

Далі будемо розрізняти випадки жорсткої ( $c_2 > 0$ ) то м'якої ( $c_2 < 0$ ) силової характеристики.

Якщо  $c_2 > 0$ , то (7) зводиться до рівняння:

$$\ln \left[ \frac{k \pi \alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v \right] - \frac{k \pi \alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v = y_i, \quad (8)$$

де

$$y_i = \ln \left[ \frac{k \pi \alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_{i-1}^v \right] - \frac{k \pi v}{2m\omega_*}.$$

Рівняння (8) має аналітичний розв'язок. Він виражається через першу гілку двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу  $W_1(-\zeta)$  і має вигляд:

$$a_i = \left[ -\frac{(2m)^2 \omega_*^3}{k \pi \alpha v c_{2*}} W_1(-\exp(y_i)) \right]^{\frac{1}{v}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

У випадку  $c_2 < 0$  замість (8) маємо рівняння:

$$\ln \left[ \frac{k \pi \alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v \right] - \frac{k \pi \alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v = z_i, \quad (10)$$

в якому:

$$z_i = \ln \left[ \frac{k \pi \alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} a_{i-1}^v \right] - \frac{k \pi v}{2m\omega_*}.$$

Розв'язок рівняння (10) виражається через функцію Ламберта додатного аргументу  $W(\zeta)$  в має вигляд:

$$a_i = \left[ \frac{(2m)^2 \omega_*^3}{k \pi \alpha v |c_{2*}|} W(\exp z_i) \right]^{\frac{1}{v}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Таблиці функції Ламберта надруковано в [8]. Їх використання спрощує обчислення  $a_i$  за формулами (9) і (11). При близьких до нуля значеннях аргументу  $\zeta \in [-0,2; 0,3]$  функцію можна обчислювати за наближеною формулою:

$$W(\zeta) \approx \zeta - \zeta^2 + \frac{27\zeta^3}{2(16\zeta + 9)}. \quad (12)$$

Похибка наближення (12) менша 1 %. Так при  $\zeta = -0,2$   $W(-0,2) = W_1(-0,2) \approx -0,2586$ . В таблиці в [8]  $W_1(-0,2) \approx -0,2592$ . При  $\zeta = 0,3$   $W(0,3) \approx 0,2364$ . В таблиці в [8]  $W(0,3) \approx 0,2368$ . Отже, на вказаному інтервалі, формула (12) дає досить високу точність.

Щоб переконатися у вірогідності виведених на-

ближених формул (9), (11), проведемо розрахунки амплітуд коливань осциляторів із заданими значеннями  $v$ .

**Коливання осцилятора з квадратичною нелінійністю.** При  $v = 1$  маємо:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ;

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}; \quad \alpha = \frac{8}{3\pi}. \text{ У випадку } c_2 > 0:$$

$$a_i = -\frac{3m^2\omega_*^3}{2k c_{2*}} W_1(-\exp(y_i)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (13)$$

причому:

$$y_i = \ln \left( \frac{2k c_{2*}}{3m^2\omega_*^3} a_{i-1} \right) - \frac{k \pi}{2m\omega_*};$$

$$c_{2*} = \frac{1}{2} \left( 1 + \exp \left( \frac{k \pi}{2m\omega_*} \right) \right) c_2.$$

Якщо  $c_2 < 0$ , то:

$$a_i = \frac{3m^2\omega_*^3}{2k |c_{2*}|} W(\exp z_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

де:

$$z_i = \ln \left( \frac{2k |c_{2*}|}{3m^2\omega_*^3} a_{i-1} \right) - \frac{k \pi}{2m\omega_*}.$$

Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 2$  кг;  $k = 8$  Нс/м;  $c_1 = 800$  Н/м;  $c_2 = 4000$  Н/м<sup>2</sup>;  $a_0 = 0,05$  м. Одержані двома способами послідовності з десяти амплітуд записано в табл. 1. Там, поряд з наближеними результатами, вказано амплітуди  $x(\sum t_i^*)$  і час їх досягнення  $\sum t_i^*$ , отримані числовим інтегруванням задачі Коші (1), (2) на комп'ютері. Ці результати можна вважати умовно точними при аналізі похибок наближеного способу. Відносні похибки наближеного способу теж вказано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення  $a_i$ ,  $c_2 > 0$ ,  $v = 1$

$i$	$\sum t_i^*$ , с	Числове інтегр.	Формула (13)	Похибка, %
		Значення 100 $a_i$ , м		
1	0,14475	3,780	3,758	0,6
2	0,29242	2,836	2,803	1,2
3	0,44246	2,114	2,078	1,7
4	0,59440	1,567	1,534	2,1
5	0,74780	1,157	1,129	2,4
6	0,90234	0,852	0,829	2,7
7	1,05774	0,626	0,607	3,0
8	1,21379	0,459	0,445	3,1
9	1,37032	0,336	0,325	3,3
10	1,52720	0,246	0,237	3,7

Розбіжності результатів, одержаних різними способами і цієї таблиці не суттєві. Похибка наближених результатів менша 4 %.

Амплітуди коливань в табл. 2 розраховані для осцилятора з м'якою силовою характеристикою, коли  $c_2 = -4000$  Н/м<sup>2</sup>. Решта вхідних даних залишилися ти-

ми, що і при  $c_2 > 0$ .

Тут розбіжності трохи більші, ніж при  $c_2 > 0$ .

Таблиця 2 – Значення  $a_i, c_2 < 0, v = 1$

$i$	$\sum t_i^*, c$	Числове інтегр.	Формула (14)	Похибка, %
		Значення 100 $a_i, m$		
1	0,17498	3,465	3,544	2,3
2	0,34416	2,444	2,532	3,6
3	0,50977	1,742	1,820	4,5
4	0,67306	1,251	1,313	5,0
5	0,83476	0,902	0,950	5,3
6	0,99537	0,653	0,689	5,5
7	1,15521	0,473	0,501	5,9
8	1,31451	0,344	0,364	5,9
9	1,47340	0,250	0,265	6,0
10	1,63202	0,182	0,193	6,0

**Коливання осцилятора Дуффінга.** Задавши  $v = 2$ , знаходимо, що  $\alpha = \frac{3}{4}$ . При  $c_2 > 0$  формула (9) набуває вигляд:

$$a_i = \left[ -\frac{8m^2 \omega_*^3}{3k \pi c_{2*}} W_1(-\exp(y_i)) \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

де:

$$y_i = \ln \left( \frac{3k \pi c_{2*}}{8m^2 \omega_*^3} a_{i-1}^2 \right) - \frac{k \pi}{m \omega_*};$$

$$c_{2*} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \exp \left( \frac{k \pi}{2m \omega_*} \right) \right]^2 \cdot c_2.$$

Якщо  $c_2 < 0$ , то формула (11) зводиться до наступної:

$$a_i = \left[ \frac{8m^2 \omega_*^3}{3k \pi |c_{2*}|} W(\exp(z_i)) \right]^{1/2}, \quad (16)$$

причому

$$z_i = \ln \left( \frac{3k \pi |c_{2*}|}{8m^2 \omega_*^3} a_{i-1}^2 \right) - \frac{k \pi}{m \omega_*}.$$

Проведемо розрахунок послідовності амплітуд коливань осцилятора з жорсткою силовою характеристикою, що має:  $m = 2$  кг;  $k = 8$  Нс/м;  $c_1 = 800$  Н/м;  $c_2 = 160000$  Н/м<sup>3</sup>;  $a_0 = 0,05$  м. Результати обчислень по формулі (15) вказано в табл. 3, де також записано амплітуди і час їх досягнення одержані числовим комп'ютерним інтегруванням рівняння (1).

Відносна похибка наближеного методу тут менша 6 %.

Таблиця 3 – Значення  $a_i, c_2 > 0, v = 2$

$i$	$\sum t_i^*, c$	Числове інтегр.	Формула (15)	Похибка, %
		Значення 100 $a_i, m$		
1	0,13830	3,885	3,831	1,4
2	0,28354	2,955	2,872	2,8
3	0,43376	2,212	2,126	3,9
4	0,58722	1,638	1,564	4,5
5	0,74263	1,204	1,145	4,9

6	0,89916	0,882	0,837	5,1
7	1,05630	0,645	0,611	5,3
8	1,21378	0,471	0,446	5,3
9	1,37145	0,344	0,325	5,5
10	1,52921	0,251	0,237	5,6

В табл. 4 записано амплітуди, обчислені двома способами при коливаннях осцилятора з м'якою силовою характеристикою. Для розрахунку в попередніх числових даних змінили лише значення  $k$  і  $c_2$ , прийнявши  $c_2 = -80000$  Н/м<sup>3</sup>,  $k = 6$  Нс/м.

Розбіжності наближених і точних результатів не великі.

Таблиця 4 – Значення  $a_i, c_2 < 0, v = 2$

$i$	$\sum t_i^*, c$	Числове інтегр.	Формула (16)	Похибка, %
		Значення 100 $a_i, m$		
1	0,17123	3,800	3,880	2,1
2	0,33627	2,937	3,032	3,2
3	0,49817	2,292	2,378	3,8
4	0,65831	1,797	1,870	4,1
5	0,81744	1,412	1,473	4,3
6	0,97594	1,112	1,161	4,4
7	1,13408	0,877	0,916	4,5
8	1,29198	0,692	0,723	4,5
9	1,44973	0,546	0,570	4,4
10	1,60740	0,431	0,450	4,4

**Висновки.** Запропоновано та апробовано розрахунками наближений спосіб обчислень амплітуд вільних затухаючих коливань, без розв'язування нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора, що має лінійний в'язкий опір і нелінійний степеневий доданок у виразі силової характеристики. Обчислення зведено до рекурентних співвідношень, пов'язаних з функцією Ламберта. Результати, до яких призводить запропонований спосіб задовільно узгоджується з результатами числового інтегрування диференціального руху осцилятора на комп'ютері.

#### Список літератури

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504 с.
2. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теория колебаний и стійкості руху. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.
3. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва: ИЛ, 1953. 258 с.
4. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под редакцией И.И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Москва: Наука, 1980. 270 с.
6. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М. та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків: Миськдрук, 2015. 116 с.
7. Ольшанський В.П., Тищенко Л.М., Ольшанський С.В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Миськдрук, 2016. 264 с.
8. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Функція Ламберта в задачах баллистики матеріальної точки. Харків: Издатель Савчук В.О., 2013. 204 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралом, сумы рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. 1100 с.

10. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

11. *Янке Е., Эмде Ф., Леиш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

#### References (transliterated)

1. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 1974. 504 p.

2. *Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M.* Teoriya kolyvan i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev: High School. 2004. 525 p.

3. *Stocker J.* Nelineynyye kolebaniya v mekhanicheskikh i elektricheskikh sistemakh [Nonlinear Oscillations in Mechanical and Electrical Systems]. Moscow: Il, 1953. 258 p.

4. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh* [Vibration in technology. Handbook in six volumes]. T. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems; edited by *I.I. Blekhtman*. Moscow: Engineering, 1979. 351 p.

5. *Panovko Ya.G.* Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh

kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow: Nauka, 1980. 270 p.

6. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., Tishchenko L.N.* Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv: Miskdruk. 2015. 116 p.

7. *Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N., Olshanskiy S.V.* Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. 2016. 264 p.

8. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Funktsiya Lambert v zadachakh ballistiki material'noy tochki [The Lambert function in ballistic problems of a material point]. Kharkiv: Publisher Savchuk V.O., 2013. 204 p.

9. *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tablitsy integralom, sumy ryadov i proizvedeniy [Tables by integral, sums of series and products]. Moscow: Nauka, 1962. 1100 p.

10. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Science. 1979. 832 p.

11. *Janke E., Jemde F., Ljosh F.* Special'nye funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka. 1977. 344 p.

*Надійшла (received) 2.10.2019*

#### *Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

*А.В. ЩЕПКИН, А.Г. АНДРЕЕВ***КИНЕТИКА НАПРЯЖЕННОГО И ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ДЛИННОМЕРНЫХ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ ПРИ СБОРКЕ С НАТЯГОМ**

Для сборки деталей с натягом, представляющих собой тела вращения, а также для бандажирования широко применяется тепловой метод, имеющий ряд преимуществ по сравнению с прессовой сборкой: обеспечивает большую прочность соединений, исключает повреждение сопрягаемых поверхностей, снижает количество брака, обеспечивает возможность автоматизации процесса сборки, допускает возможность разборки без повреждения сопрягаемых поверхностей. Автофретирование или бандажирование применяется в тех случаях, когда максимальные напряжения соизмеримы с пределом прочности материала детали, для увеличения рабочего давления при той же толщине стенки или уменьшения толщину стенки при том же давлении. В работе описан алгоритм для исследования кинетики напряженного и теплового состояния длинномерных сопрягаемых деталей при сборке с термоздействием, который заключается в попеременном решении нестационарной температурной задачи и вычислении напряженно-деформированного состояния и взаимном использовании получаемых данных. Создана имитационная модель предназначена для исследования сборки длинномерных конструкций, имеющих соединения с натягом и подвергающихся при эксплуатации импульсной нагрузке, обеспечивает выполнение технологических и прочностных требований к конструкции. Описано решение тестовой задачи. Проведено исследование процесса сборки длинномерной конструкции с упрочняющими кожухами. Рассчитана зависимость точности посадки от локального охлаждения кожухов и величины прижимающей силы. Результаты приводятся в форме таблиц и рисунков. Выполненные исследования позволяют проследить влияние параметров соединения на его прочность, наметить рациональные пути его упрочнения.

**Ключевые слова:** втулка, вал, посадка с натягом, геометрические аномалии, метод конечных элементов, автофретирование, бандажирование.

*О.В. ЩЕПКИН, А.Г. АНДРЕЄВ***КИНЕТИКА НАПРУЖЕНОГО І ТЕПЛООВОГО СТАНУ ДОВГОМІРНИХ ДЕТАЛЕЙ, З'ЄДНУВАНИХ З НАТЯГОМ**

Для з'єднання деталей – тіл обертання – с натягом, а також для бандажування широко застосовується тепловий метод, який має ряд переваг порівняно з пресовим складанням: забезпечує більшу міцність з'єднань, виключає пошкодження поверхонь, що сполучаються, знижує кількість браку, забезпечує можливість автоматизації процесу складання, допускає можливість розбандажування без пошкодження поверхонь, що сполучаються. Автофретування або бандажування застосовують тоді, коли максимальне напруження близькі до межі міцності матеріалу деталі, для збільшення робочого тиску при тій же товщині стінки або для зменшення товщини стінки при тому ж тиску. В роботі описаний алгоритм дослідження кинетики напруженого і теплового стану довгомірних деталей, які з'єднуються з застосуванням термовпливу. Алгоритм полягає в попереминому розв'язанні нестационарної температурної задачі та обчисленні напружено-деформованого стану зі взаємним використанням отримуваних даних. Створена імітаційна модель призначена для дослідження зборки довгомірних конструкцій, які мають з'єднання з натягом та піддаються під час експлуатації імпульсному навантаженню, забезпечує виконання технологічних і міцностних вимог до конструкції. Описано розв'язання тестової задачі. Проведено дослідження процесу складання довгомірної конструкції зі зміцнюючими кожухами. Розрахована залежність точності посадки від локального охолодження кожухів і величини притискаючої сили. Результати наводяться у вигляді таблиць та рисунків. Виконані дослідження дозволяють дослідити вплив параметрів з'єднання на його міцність, намітити раціональні шляхи його зміцнення.

**Ключові слова:** втулка, вал, посадка з натягом, геометричні аномалії, метод скінченних елементів.

*O.V. SCHEPKIN, A.G. ANDREEV***KINETICS OF THE STRENGTH AND THERMAL STATE OF LONG-SIZED INTERFACED DETAILS WITH TIGHTNESS APPLICATION**

The thermal method is widely used for the assembly of interference details, which are bodies of revolution, as well as for banding, which has a number of advantages compared to the press assembly: it provides greater strength of joints, eliminates damage to mating surfaces, reduces the amount of scrap, provides the ability to automate the assembly process, allows the ability to disassemble without damage to the mating surfaces. Autofrettage or bandaging is applied when the maximal pressure {voltage} are commensurable with strength of a material of a detail, for increase in working pressure at the same thickness of a wall or reduction thickness of a wall at the same pressure. The paper describes an algorithm for studying the kinetics of the stress and thermal state of long mated details during assembly with thermal action, which consists in the alternate decision of a non-stationary temperature problem {task} and calculation of the is intense-deformed condition and sharing of received data. The created simulation model is designed to study the assembly of long details that have interference fit and are subjected to a pulsed load during operation, ensures the fulfillment of technological and strength structural requirements. The decision of a test problem is described. It is carried out research of process of assembly of a lengthy design with strengthening casings. Dependence of accuracy of assembly on local cooling casings and sizes of pressing force is calculated. The results are presented in the form of tables and figures. The studies performed allow us to trace the influ-

© А.В. Щепкин, А.Г. Андреев, 2019

ence of the parameters of the compound on its strength, and outline rational ways of strengthening it.

**Keywords:** bush, shaft, interference fit, geometric anomaly, finite element method, autofrettage, bandaging.

**Введение.** Толстостенные цилиндры, работающие при высоких внутренних давлениях, являются распространенными элементами многих ответственных конструкций. В тех случаях, когда величина давления соизмерима с пределом прочности материала, повышение несущей способности может быть достигнуто автофреттированием или с помощью бандажирования, то есть посадкой с натягом кожухов на основную конструкцию. Это позволяет увеличить рабочее давление при той же толщине стенки или уменьшить толщину стенки при том же давлении.

Соединения деталей с натягом широко применяются в машиностроении при больших динамических нагрузках и отсутствии необходимости в разборке.

**1. Вопросом исследования посадки с натягом** уделяется большое внимание. Это обусловлено распространенностью конструкций подобного класса в технике и спецификой расчетных исследований. В изучении посадок с натягом значительный вклад внесли такие ученые как Берникер Е.И., Антипин П.К., Борович Л.С., Тарабасов Н.Д., Щенятский А.В., Александров В.М., Чебаков М.И., Джонсон К.Л. и др.

В справочнике Палея М.А., Романова А.Б., Брагинского В.А. [1], пособия Дунаева П.Ф., Леликова О.П., Варламовой Л.П. [2], справочнике машиностроителя Ачеркана Н.С. [3], у Сателя Э.А. [4] и Берникера Е. И. [5] приведены методики и примеры расчета вероятных зазоров и натягов цилиндрических соединений, методика выбора посадок с натягом.

В статье Гаффанова Р.Ф., Щенятского А.В. [6] описан процесс формирования соединения термическим методом. Опыты показали, что из рассмотренных конструктивных и технологических методов управления погрешностью базирования деталей наиболее эффективным является применение дискретное изменение натяга, полученного за счет создания на поверхности втулки геометрических особенностей.

Среди фундаментальных работ по проблеме исследования прочности соединений с натягом следует указать работы Пригоровского Н.И. [7], Серенсена с.В. [8], Решетова Д.Н. [9], Берникера Е. И. [5].

Работы Зенкина А.С. [10], Балацкого Л.Т. [11, 12], Гречишева Е.С., Ильяшенко А.А. [13] посвящены технологическим аспектам проблемы. В книге Гричишева Е.С., Ильяшенко А.А. рассмотрены теория, расчет и конструирование цилиндрических и конических соединений с натягом, а также технология их изготовления. Большое внимание уделено прочности соединений при статических и переменных нагрузках. Приведены методики расчета прочности соединений и предельные нагрузки, которые передаются из условий отсутствия локального скольжения в зоне контакта.

Расчетным аспектам соединений с натягом посвящены работы Подгорного А.Н., Гонтаровского П.П. [14], Миллера В.С. [15]. Большинство работ по прочности соединений с натягом не учитывают сложные процессы взаимодействия деталей в контактной

зоне при эксплуатации, поэтому расчеты прочности таких конструкций дополняют проверочными расчетами с использованием эмпирических коэффициентов, основанных на экспериментальных данных.

**2. Тепловой метод сборки.** Для сборки деталей с натягом, представляющих собой тела вращения, а также для бандажирования широко применяется тепловой метод, имеющий ряд преимуществ по сравнению с прессовой сборкой [16]:

- обеспечивает большую прочность соединений;
- исключает повреждение сопрягаемых поверхностей;
- снижает количество брака;
- обеспечивает возможность автоматизации процесса сборки;
- допускает возможность разборки без повреждения сопрягаемых поверхностей.

При бандажировании конструкций с большой длиной бандажа параметры сборки могут оказывать существенное влияние на распределения контактных давлений и определять работоспособность конструкции в целом. В таких случаях возникает необходимость решения задачи кинетика напряженного и теплового состояния длинномерных сопрягаемых деталей при сборке с натягом [17].

**3. Решение задачи НДС при наличии контактного взаимодействия элементов конструкций – тел вращения.** Исследованиям НДС конструкций с помощью МКЭ посвящены тысячи книг, среди авторов которых можно Зенкевича О. [18, 19], Сегерлинда Л. [20], Постнова В.А., Хархурима И.Я. [21], Розина Л.А. [22], Образцова И. Ф. [23].

Наиболее удобным способом решения контактных задач МКЭ является использование специальных стыковочных элементов, моделирующих состояние сила-смещение на поверхностях раздела взаимодействующих тел [14]. В данной работе используются контактные элементы, соединяющие узлы контактирующих деталей. Такой контактный элемент содержит 2 узла с одинаковыми координатами, принадлежащими к смежным контактирующим телам. Для определения силы трения в элементе задаются узлы смежных контактных элементов, чтобы вся контактная поверхность была распределена между контактными элементами (рис. 1).

Характеристики элемента задаются в радиальном  $r$  и осевом  $z$  направлениях, типы характеристик: натяг, натяг-зазор, проскальзывание (в перпендикулярном направлении должен быть задан натяг-зазор), отсутствие взаимодействия. При наличии элементов типа натяг-зазор и проскальзывание расчет НДС становится итерационным до стабилизации состояния контактных элементов.

Элемент типа натяг-зазор имеет 2 состояния: «натяг» и «зазор». Исходное состояние может быть любым, однако необходимо исключить возможность

смещения каждой из деталей как жесткого целого. После определения напряжений и перемещений в конструкции, для элемента натяг-зазор в состоянии «натяг» контролируется значение силы между узлами: если действует растягивающая сила, элемент переключается в состояние «зазор», переключение хотя бы одного из контактных элементов требует выполнения расчета НДС заново. Сила в узле определяется как сумма сил в этом узле для обычных элементов. Для элемента в состоянии «зазор» контролируется значение перемещений узлов. Условие зазора имеет вид (рис. 2):

$$u_1 + \delta \leq u_2, \quad (1)$$

где  $u_1, u_2$  – перемещения узлов элемента,  $\delta$  – натяг. Нарушение условия приводит к переключению элемента в состояние «натяг».

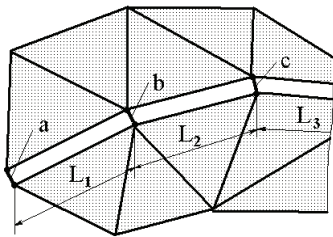


Рисунок 1 – Пример схемы распределения области контакта между контактными элементами  $a, b, c$ . Длина линии контакта для элемента  $a$ , находящегося на краю линии контакта составляет  $L_1/2$ , для элемента  $b - L_1/2 + L_2/2$ ; для элемента  $c - L_2/2 + L_3/2$

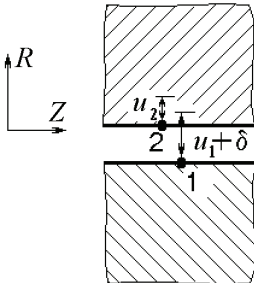


Рисунок 2 – Сохранение зазора в зоне контакта

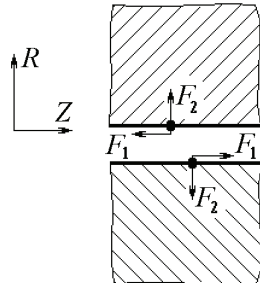


Рисунок 3 – Схема элемента проскальзывания

Элемент проскальзывания имеет состояния «контакт», «проскальзывание» и «отсутствие взаимодействия»; в перпендикулярном направлении этот элемент имеет тип натяг-зазор. Исходное состояние – «контакт». Если для силы сжатия в перпендикулярном направлении  $F_2$  не выполняется условие

$$|F_2 f_i| > |F_1|, \quad (2)$$

то элемент переходит в состояние «проскальзывание» и силы  $F_1$  в узлах заменяются на значение  $|F_2 f|$ , направление действия сохраняется;  $f$  – коэффициент трения (рис. 3). На следующей итерации фиксируется значение относительного смещения узлов в контактный элемент и он возвращается в состояние «контакт». Если элемент в перпендикулярном направлении переключается в состояние «зазор», элемент проскальзывания переходит в состояние «отсутствия взаимодействия».

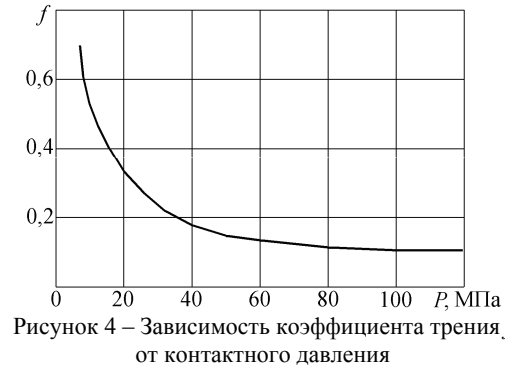


Рисунок 4 – Зависимость коэффициента трения  $f$  от контактного давления

Поскольку коэффициент трения  $f$  зависит от величины контактного давления (рис. 4) [24], то формулу (2) следует применять в виде

$$\left| \int_S F_2 f(F_2) dS \right| \geq |F_1|, \quad (3)$$

где  $S$  – площадь зоны контакта. Коэффициент трения также зависит от качества обработки сопрягаемых поверхностей, наличия специальных покрытий, которые иногда наносятся на сопрягаемые поверхности.

**4. Решение МКЭ нестационарной температурной контактной задачи для тел вращения.** Решение температурной задачи МКЭ подробно изложено в монографии Сегерлинда Л. [20].

Контактному теплообмену деталей всегда сопутствует контактное термическое сопротивление  $R$ , величина которого при определенных условиях достигает большого значения. Согласно экспериментальным данным [15] величина контактного термического сопротивления может изменяться в 40-50 раз в зависимости от условий теплопередачи. Основными факторами, влияющими на теплопередачу, являются давлению в зоне контакта, чистота обработки соприкасающихся поверхностей и температура. При силах сжатия 50 МПа и выше заметного влияния температуры на термическое сопротивление не наблюдается. Термическое сопротивление обратно пропорционально силе сжатия, например, для материала Сталь 45 при силе сжатия 5 МПа сопротивление равно  $443 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{град/Вт}$ , при силе сжатия 50 МПа –  $90 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{град/Вт}$ , 100 МПа –  $60 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{град/Вт}$  (чистота поверхностей  $\nabla 3$ ).

Термическое контактное сопротивление удобно оценивать величиной эквивалентной толщины материала  $B$ , температурный перепад на которой соответствует температурному скачку в зоне контакта, то есть

$$R = B/K, \quad (4)$$

где  $K$  – коэффициент теплопроводности. Если рассматриваемый контактный элемент при расчете НДС находится в состоянии «зазор» то

$$B = B_G \frac{K_G}{K} + B_0, \quad (5)$$

где  $B_G, K_G$  – фактический зазор в точке контакта и теплопроводность газовой среды; если находится в состоянии «натяг» то эквивалентная толщина материала определяется эмпирической зависимостью от давления в зоне контакта и температуры (рис. 5)

$$B = B(P, t). \quad (6)$$

Расчет коэффициента теплообмена (теплоотдачи)  $h$  нагретой детали осуществляется с использованием эмпирических формул [25] и зависит от скорости воздушного потока, разности температур детали и окружающей среды. При водном охлаждении детали при температуре ее поверхности выше 100 град. происходит закипание воды, что повышает теплоотдачу при отводе пара от поверхности детали или снижает ее при скоплении пара у поверхности. При температуре детали ниже 100 град. коэффициент теплоотдачи зависит от скорости потока воды.

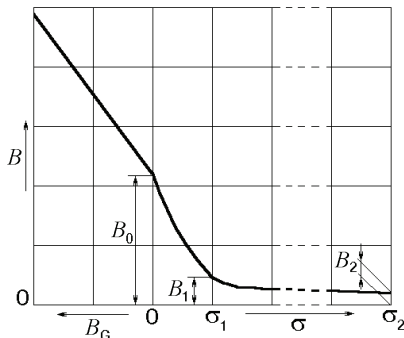


Рисунок 5 – Зависимость эквивалентной толщины  $B$  контактного элемента от давления в зоне контакта

**5. Решение тестовой задачи.** В качестве тестовой задачи выполнен расчет тепловой посадки бандажа на трубу (рис. 6). Бандаж после остывания должен быть вплотную к упору на трубе. При посадке бандаж нагревается до температуры  $T = 350^\circ \text{C}$  и после посадки прижимается силой  $F = 2,5 \text{ МН}$ , диаметральный натяг в соединении  $\delta = 0,6 \text{ мм}$ . Взаимодействие между деталями происходит через контактные конечные элементы, действующими как при расчете напряженно-деформированного состояния, так и при решении нестационарной температурной задачи. Теплообмен с окружающей средой не учитывается. На рис. 7 приведена схема действующих нагрузок в момент времени  $t = 0$  (начало сборки).

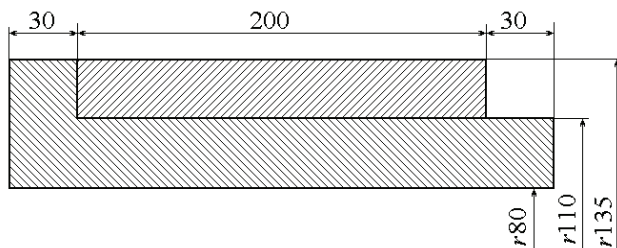


Рисунок 6 – Тестовая модель

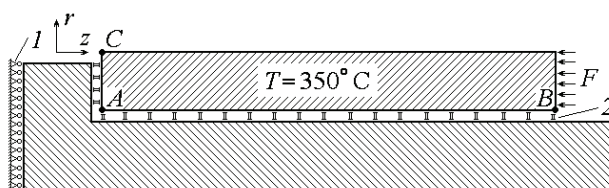


Рисунок 7 – Схема нагружения детали в момент времени  $t = 0$ . 1 – граничные условия, 2 – контактные элементы

Характеристики материала:

- модуль упругости  $E = 0,21 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ ;
- коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ;
- коэффициент теплопроводности  $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ ;
- температура окружающей среды  $T_0 = 20 \text{ град}$ ;
- удельная теплоемкость  $c = 460 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град}^2$ ;
- коэффициент теплопроводности материала  $K = 80 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$ , воздуха –  $K_g = 0,035 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$ ;
- удельный вес  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;
- коэффициент трения  $f = 0,15$ ;
- термическое сопротивление в зоне контакта  $R = 176 \cdot 10^{-6}$ ;  $84 \cdot 10^{-6}$ ;  $15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{град/Вт}$  (при нулевом сжимающем напряжении; при напряжении 10 МПа соответственно).

Все параметры материала не зависят от температуры.

Созданная расчетная схема для исследования кинетики напряженного и теплового состояния предполагает следующий порядок расчета:

1. Определение НДС в начальный момент времени  $t = 0$ ;
2. Решение нестационарной температурной задачи продолжительностью 30 секунд с шагом по времени 5 секунд с использованием данных о НДС для вычисления параметров контактных элементов;
3. Определение НДС в текущий момент времени с использованием данных о распределении температур в конструкции;
4. Если разность между минимальной и максимальной температурой в конструкции превышает 15 градусов, переход к 2;
5. Определение НДС в остывшей конструкции.

Были проведены следующие расчеты:

1. посадка при действии силы  $F$  вплоть до уравновешивания температур в трубе и бандаже (4 мин.);
2. посадка при действии силы  $F$  в течении ограниченного времени (1 мин.);
3. имитация влияния местного нагрева, обусловленного посадкой следующего бандажа, на деформации уже посаженного бандажа.

### 5.1. Посадка бандажа при действии силы $F$ вплоть до уравновешивания температур в конструкции.

Было проведено исследование напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе ее сборки под действием прижимающей силы  $F = 2,5 \text{ МН}$  в течении 4 мин. На рис. 8 представлено распределение температур в конструкции в моменты времени 1,2,3,4 мин. с начала сборки. На рис. 9, 10 показано распределение сжимающих напряжений  $\sigma_r$  и напряжений сдвига  $\tau_{rz}$ , действующих на бандаж в зоне контакта с трубой. Указанные напряжения получены из текущих параметров контактных КЭ. Если напряжения  $\tau_{rz} < 0$ , они «отодвигают» бандаж от упора. В результате действия напряжений сдвига снижается силовое воздействие бандажа на упор: в момент времени 1 мин. давление на упор равно 2,13 МН, 2 мин. – 1,12 МН, 3 мин. – 0,95 МН, 4 мин. – 0,96 МН. Длина бандажа (относительное перемещение точки В относительно



точки А) в остывшей конструкции уменьшилась на  $74,2 \cdot 10^{-6}$  м; то есть бандаж сжат на  $16,6 \cdot 10^{-6}$  м; сила давления на упор при этом равна нулю.

**5.2. Посадка бандажа при действии силы  $F$  в течении 1 мин.** Было проведено исследование напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе ее сборки под действием прижимающей силы  $F = 2,5$  МН в течении 1 мин. Распределение температуры в конструкции близко к полученному в раз-

ле 5.1 (см. рис. 8). На рис. 11 показано распределение напряжений сдвига  $\tau_{rz}$ , действующих на бандаж в зоне контакта с трубой. Начиная со второй минуты наблюдалось смещение бандажа по трубе в направлении от упора: 2 мин. –  $27,5 \cdot 10^{-6}$  м, 3 мин. –  $43,3 \cdot 10^{-6}$  м, 4 мин. –  $44,4 \cdot 10^{-6}$  м, в остывшей конструкции –  $45,0 \cdot 10^{-6}$  м. Длина бандажа в остывшей конструкции уменьшилась на  $37 \cdot 10^{-6}$  м; то есть бандаж растянут на  $20,6 \cdot 10^{-6}$  м.

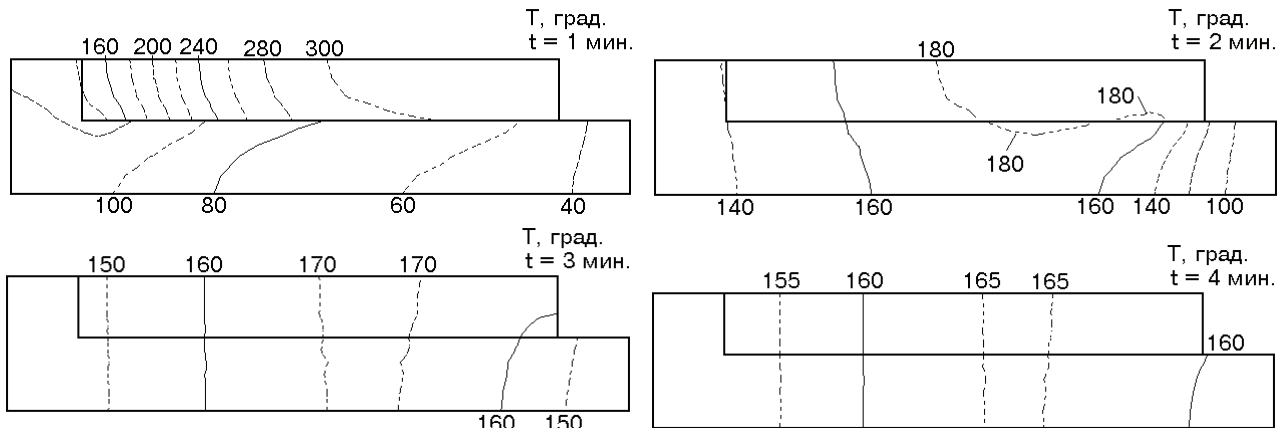


Рисунок 8 – Распределение температуры  $T$  в конструкции в процессе ее сборки

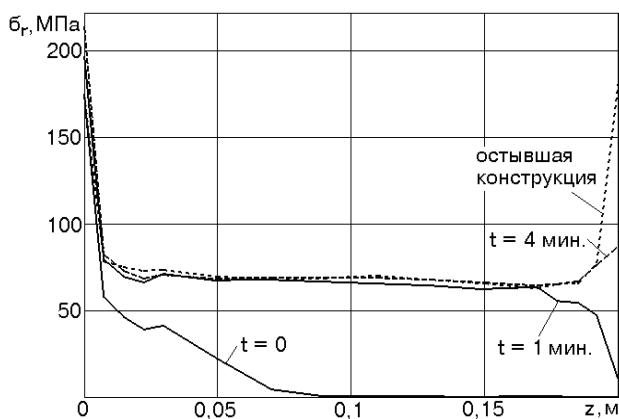


Рисунок 9 – Распределение сжимающих напряжений  $\sigma_{rz}$ , действующих на бандаж в зоне посадки на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН

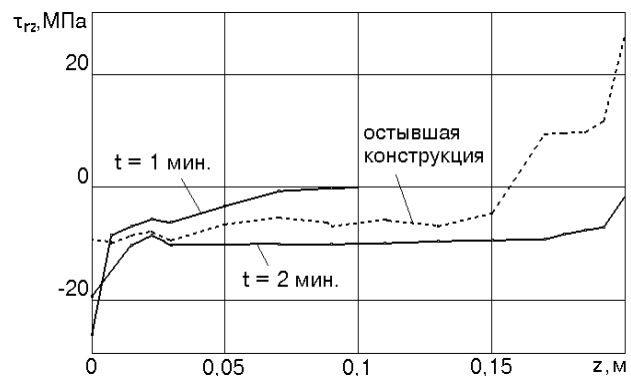


Рисунок 10 – Распределение напряжений сдвига  $\tau_{rz}$ , действующих на бандаж в зоне посадки на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН

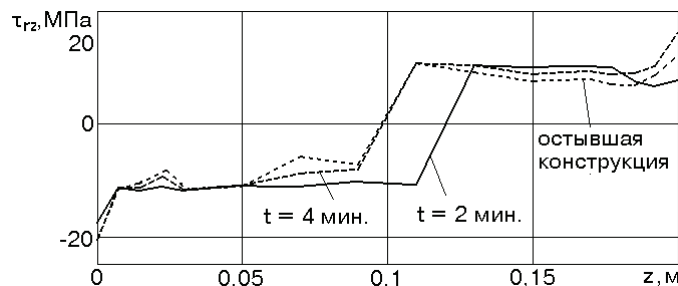


Рисунок 11 – Распределение напряжений сдвига  $\tau_{rz}$ , действующих на бандаж в зоне посадки на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН только в течении первой минуты

**5.3. Влияние на НДС посаженного бандажа посадки на трубу следующего бандажа.** При посадке на трубу вплотную к предыдущему следующего бандажа происходит нагрев первого за счет теплопередачи. Термовоздействие имитировалось заданием в уз-

лах бандажа, смежных по следующим, температурных граничных условий  $T = 350^\circ \text{C}$  продолжительностью 2 мин. Прижимающая силы отсутствовала или действовала 1 мин. На рис. 12 показана схема приложения нагрузок в конструкции. В результате теплопередачи

от первого бандажка ко второму происходит разъединение контактных элементов в первом бандаже и его деформация в зависимости от времени действия приложенной силы и параметров его посадки (см. разд. 5.1, 5.2).

На рис. 13 показано распределение температуры  $T$  в конструкции в процессе имитации посадки второго бандажка.

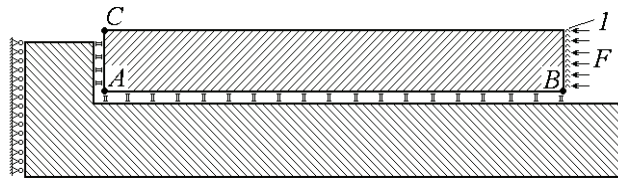


Рисунок 12 – Схема нагружения детали при  $t = 0$ .  
 $I$  – температурные граничные условия  $T = 350^\circ\text{C}$

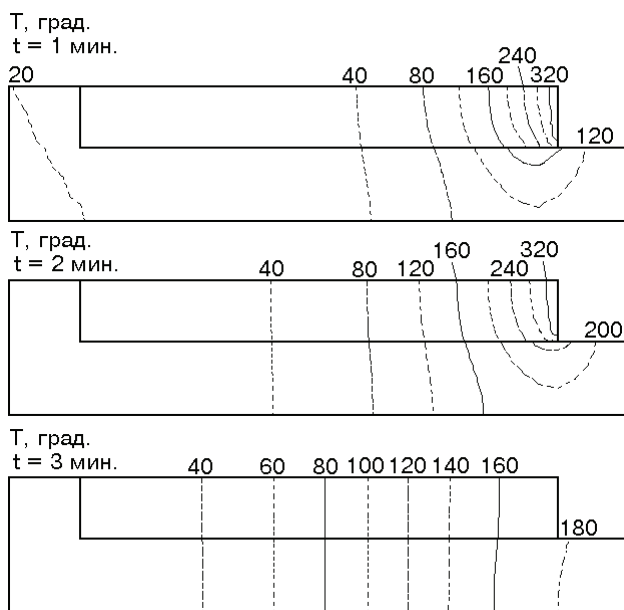


Рисунок 13 – Распределение температуры  $T$  в конструкции в процессе имитации посадки второго бандажка

#### 6. Закономерности тепловой сборки деталей.

Выявлены следующие закономерности:

- схватывание бандажка с трубой начинается вблизи упора и через две минуты после сборки контакт происходит по всей поверхности деталей;

- через 4 мин. после сборки происходит выравнивание температур в деталях в радиальном направлении;

- выравнивание температур в деталях сопровождается относительным удлинением трубы и укорачиванием бандажка, возникающие при этом силы взаимодействия деталей «отодвигают» бандаж от упора, величина силы пропорциональна коэффициенту трения (см. разд. 5.1);

- в случае прекращения действия прижимающей силы до выравнивания температур в деталях происходит отрыв бандажка от упора (см. разд. 5.3);

- бандаж после посадки может быть как в растянутом, так и в сжатом состоянии, что зависит от величины и продолжительности действия прижимающей

силы;

- при посадке на трубу вплотную к предыдущему следующему бандажу происходит нагрев первого за счет теплопередачи, что приводит к разъединению контактных элементов в первом бандаже и его деформации в зависимости от параметров посадки первого и второго бандажка.

Итоговые данные по контакту между упором на трубе и бандажом представлены в табл. 1 ( $t$  – время,  $\delta$  – расстояние между упором и бандажом,  $F_{AC}$  – сила, действующая на упор со стороны бандажка,  $t_F$  – время действия на бандаж прижимающей силы):

Таблица 1 – Смещение бандажка относительно упора  $\delta$ ,  
 $F_{AC}$  сила, действующая на упор

$t$ , мин.	$t_F = 4$ мин		$t_F = 1$ мин	
	$\delta$	$F_{AC}$ , МН	$\delta \cdot 10$ , м	$F_{AC}$ , МН
0	0	2,5	0	2,5
1	0	2,13	0	2,13
2	0	1,12	27,5	0
3	0	0,95	43,3	0
4	0	0,96	44,4	0
хол. констр.	0	0	45,0	0

Обеспечению посадки бандажка вплотную к упору трубы способствует снижение коэффициента трения, увеличение прижимающей силы. Прижимать бандаж следует вплоть до выравнивания температур в деталях в радиальном направлении, то есть 4-5 минут.

**7. Исследование кинетики напряженного и теплового состояния длинномерной конструкции с упрочняющими кожухами.** Исследуемая конструкция состоит из основной трубы и трех кожухов, посаженных на нее посадкой с натягом (рис. 14). При посадке кожух нагревается до температуры  $400^\circ\text{C}$ , одевается на трубу, после посадки прижимается силой  $F = 2,5$  МН, диаметральный натяг в соединении –  $0,6$  мм. Кожух охлаждается за счет воздушной конвекции и передает тепло трубе. Кожух после остывания должен быть вплотную к упору на трубе (к ранее установленному кожуху). Плотное соединение деталей обеспечивается прижимающей силой и водяным охлаждением части поверхности кожуха после сборки.

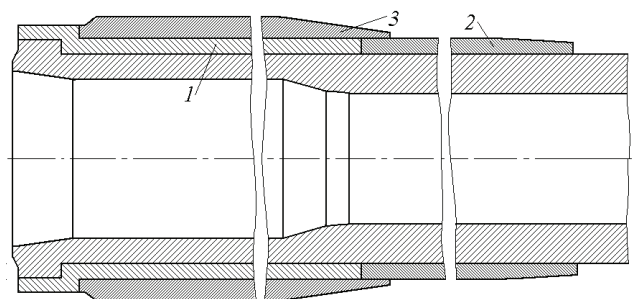


Рисунок 14 – Схема исследуемой конструкции.  
 $1, 2, 3$  – кожухи

Характеристики материала:

- модуль упругости  $E = 0,21 \cdot 10^6$  МПа;
- коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ;

– коэффициент температурного расширения  
 $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ ;  
 – температура окружающей среды  $T_0 = 20 \text{ град.}$ ;  
 – удельная теплоемкость  $c = 460 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град}^2$ ;  
 – коэффициент теплопроводности материала  
 $K = 28 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$ , воздуха –  $K_g = 0,035 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$ ;  
 – удельный вес  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;  
 – коэффициент трения  $f = 0,15$ ;  
 – коэффициент теплообмена конструкции с воздушной средой  $h = 6,0 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$ , при водяном охлаждении детали при температуре ее поверхности выше 100 град.  $h_1 = 20000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$ , ниже 100 град. –  $h_2 = 5000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$ .

– термическое сопротивление в зонах контакта деталей между собой  $R = 530 \cdot 10^{-6}$ ;  $113 \cdot 10^{-6}$ ;  $30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{град/Вт}$  (при нулевом сжимающем напряжении; при напряжениях 30 и 100 МПа соответственно).

Все параметры материала приняты не зависящими от температуры. Схема действующих нагрузок при посадке кожухов в момент времени  $t = 0$  (начало сборки) приведена на рис. 15. Длина обандаженной части конструкции – около 2 м, внутренний диаметр – 0,12 м.

Созданная расчетная схема для исследования кинетики напряженного и теплового состояния предполагает следующий порядок расчета:

1. Определение НДС в начальный момент времени  $t = 0$ ;
2. Решение нестационарной температурной задачи продолжительностью 10 секунд с шагом по времени 1 секунда с использованием данных о НДС для вычисления параметров контактных элементов;
3. Определение НДС в текущий момент времени с использованием данных о распределении температур в конструкции;
4. Если наблюдаются взаимные смещения контактирующих деталей, переход к 2;
5. Определение НДС в остывшей конструкции.

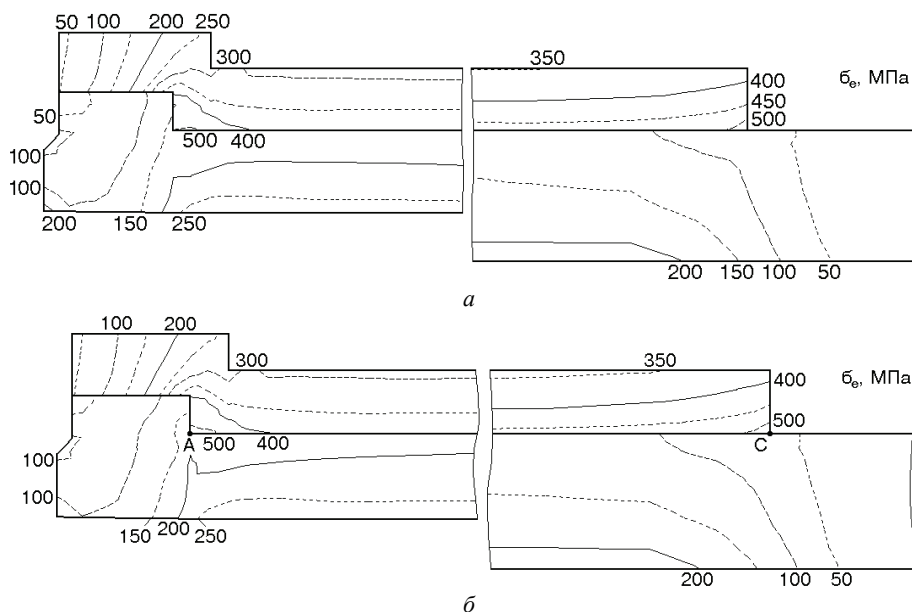


Рисунок 16 – Распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в поперечном сечении трубы с одним посаженным кожухом в момент начала сборки (а) и в остывшей собранной конструкции (б) при действии прижимающей силы  $F = 2,5 \text{ МН}$  и отсутствии водяного охлаждения

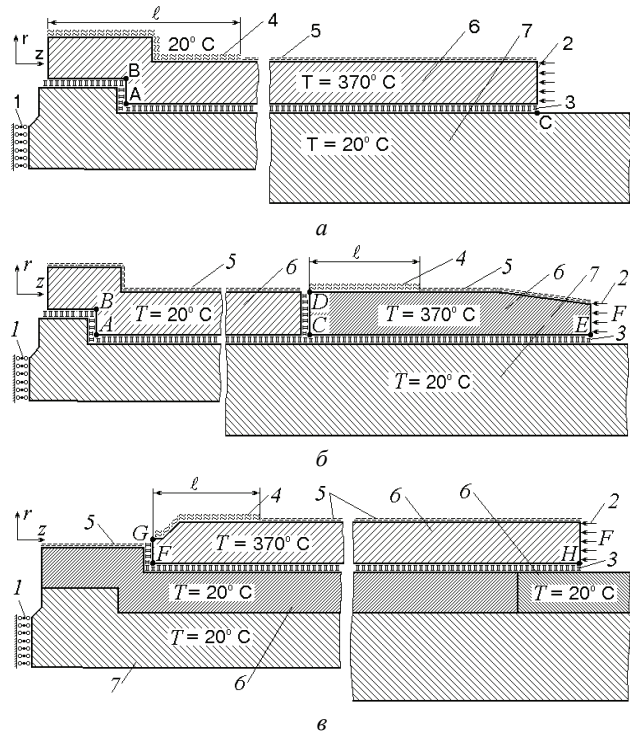


Рисунок 15 – Схема нагружения конструкции при посадке первого (а), второго (б) и третьего (в) кожуха: 1 – упор, 2 – прижимающая сила, 3 – контактные элементы, 4 – зона водяного охлаждения, 5 – зона воздушного охлаждения, 6 – кожух, 7 – труба

**7.1. Посадка первого кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5 \text{ МН}$  и отсутствии водяного охлаждения детали.** На рис. 16 представлено распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в поперечном сечении трубы с одним посаженным кожухом в момент времени  $t = 0$  (начало сборки).

На рис. 17 представлено распределение температур в конструкции в процессе сборки.

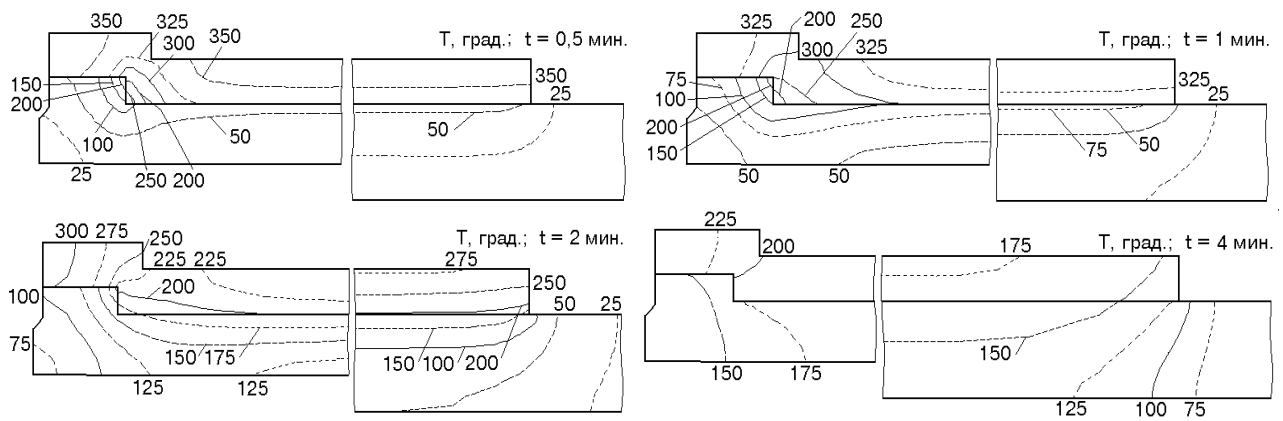


Рисунок 17 – Распределение температур в конструкции в процессе посадки первого кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения

Согласно расчетным данным, схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками А, С (см. рис. 15, а). При этом осевая прижимающая сила  $F_{AB}$ , действующая на упор трубы со стороны кожуха уменьшается и в 2,5 мин. контакт между упором трубы и кожухом (поверхность А-В) теряется и появляется зазор, величина которого стабилизируется в 5-6 мин. с начала сборки. В процессе охлаждения конструкции за счет взаимного проскальзывания поверхность АВ кожуха, несмотря на действие прижимающей силы, перемещается от упора на величину 0,264-0,235 мм. Взаимные перемещения кожуха и трубы в точке С ( $\delta_C$ ) происходят в течение 7 мин. с начала сборки. После снятия прижимающей силы  $F$  вновь происходят взаимные перемещения деталей, в основном, вблизи точки С (см. табл. 2).

Таблица 2 – Данные о процессе посадки первого кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения поверхности кожуха

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_e$ макс., МПа
0 ( $F=0$ )	0	0	0	3478	370	0
0 ( $F \neq 0$ )	0	0	2,500	2890	370	288
0,5	0	0	2,500	2526	363	513
1	0	0	2,500	2146	348	464
1,5	0	0	2,210	1642	330	477
2	0	0	0,965	1045	311	423
2,5	65	32	0	688	292	437
3	85	62	0	322	274	469
4	132	106	0	-108	245	517
6	142	110	0	-271	208	542
8	142	109	0	-321	190	558
10	142	107	0	-325	188	570
хол. констр.	264	235	0	-253	–	539

**7.2. Посадка первого кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и водяном охлаждении его поверхности.** Было проведено исследование напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе посадки первого кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,2–0,35 м, начало охлаждения через 1 мин. после сборки, на-

чальная температура кожуха 370 град. Распределение напряжений в поперечном сечении трубы с одним посаженным кожухом после остывания аналогично приведенному в разд. 7.1. (см. рис. 16). На рис. 18 представлено распределение температур в конструкции в процессе сборки при длине зоны водяного охлаждения поверхности кожуха 0,2 м.

Согласно расчетным данным, схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками А, С. Осевая прижимающая сила  $F_{AB}$ , действующая на упор трубы со стороны кожуха уменьшается и поверхность АВ кожуха, несмотря на действие прижимающей силы, частично отрывается от упора. Взаимные перемещения кожуха и трубы в точке С ( $\delta_C$ ) происходят в течение 7 мин. с начала сборки. Охлажденная деталь перемещается от упора на величину 0,083-0,054 мм. После снятия прижимающей силы  $F$  вновь происходят взаимные перемещения деталей, в основном, вблизи точки С (см. табл. 3).

Таблица 3 – Данные о процессе посадки первого кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,2 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_e$ макс., МПа
0 ( $F=0$ )	0	0	0	3478	370	0
0 ( $F \neq 0$ )	0	0	2,500	2890	370	288
0,5	0	0	2,500	2526	363	513
1	0	0	2,500	2146	348	464
1,5	0	0	1,838	1267	320	467
2	1	0	1,498	693	294	574
2,5	6	0	1,050	320	247	630
3	5	0	0,944	2	214	637
4	6	0	0,960	-383	195	635
5	10	0	0,795	-508	190	622
6	9	0	0,836	-558	189	607
8	9	0	0,872	-560	186	585
10	9	0	0,886	-560	185	577
хол. констр.	40	10	0	-497	–	534

В табл. 4-6 приведены данные о процессе соединения деталей в процессе сборки и для остывшей собранной конструкции при длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,25; 0,3; 0,35 м. Распреде-

ление напряжений в конструкции в процессе сборки близко к представленному в разд. 7.1 (см. рис. 16). Распределение температур в конструкции в процессе сборки аналогично представленному на рис. 18.

Таблица 4 – Данные о процессе посадки первого кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,25 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °C	$\sigma_{\epsilon \max}$ , МПа
0 ( $F=0$ )	0	0	0	3478	370	0
0 ( $F \neq 0$ )	0	0	2,500	2890	370	288
0,5	0	0	2,500	2526	363	513
1	0	0	2,500	2146	348	464
1,5	3	0	1,348	116	320	450
2	5	0	1,086	552	294	585
2,5	5	0	1,070	146	247	628
3	6	0	1,064	-150	214	626
4	6	0	1,098	-505	194	611
5	6	0	1,172	-609	189	594
6	5	0	1,216	-641	187	584
8	5	0	1,254	-641	183	573
10	5	0	1,261	-679	179	568
хол. констр.	9	0	0,486	-614	-	542

Таблица 5 – Данные о процессе посадки первого кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,3 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °C	$\sigma_{\epsilon \max}$ , МПа
0 ( $F=0$ )	0	0	0	3478	370	00
0 ( $F \neq 0$ )	0	0	2,500	2890	370	288
0,5	0	0	2,500	2526	363	513
1	0	0	2,500	2146	348	464
1,5	4	0	1,139	1023	320	454
2	17	0	0,888	460	294	594
2,5	7	0	0,873	67	248	635
3	7	0	0,887	-213	214	629
4	8	0	0,972	-542	194	609
5	7	0	1,053	-644	187	593
6	7	0	1,110	-700	184	581
8	7	0	1,176	-702	178	569
10	7	0	1,204	-702	174	565
хол. констр.	10	0	0,554	-643	-	531

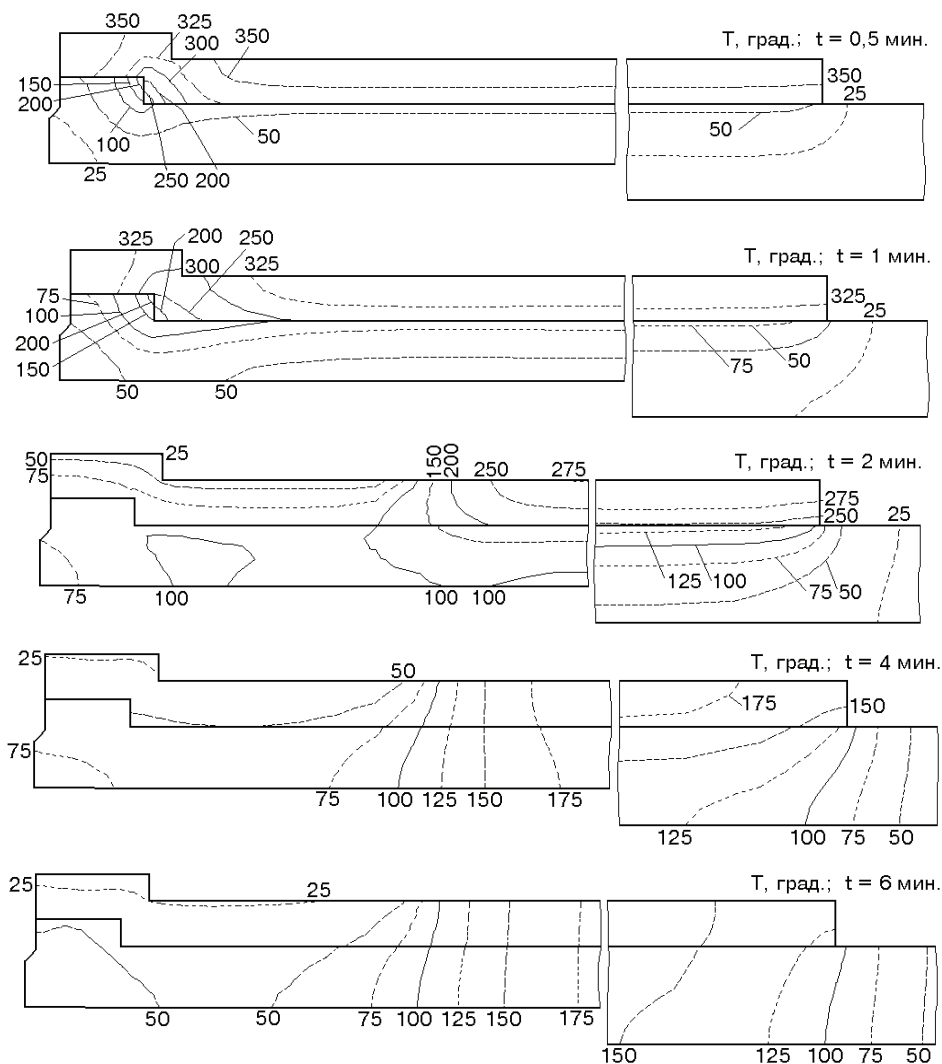


Рисунок 18 – Распределение температур в конструкции в процессе посадки первого кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности кожуха 0,2 м

Таблица 6 – Данные о процессе посадки первого кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,35 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_e$ макс., МПа
0 ( $F=0$ )	0	0	0	3478	370	0
0 ( $F \neq 0$ )	0	0	2,500	2890	370	288
0,5	0	0	2,500	2526	363	513
1	0	0	2,500	2146	348	464
1,5	13	0	0,407	951	320	466
2	16	0	0,477	350	294	600
2,5	18	0	0,473	5	247	640
3	18	0	0,492	-279	214	631
4	17	0	0,600	-605	190	609
5	17	0	0,689	-715	181	591
6	17	0	0,774	-763	176	577
8	15	0	0,826	-765	170	577
10	16	0	0,848	-765	166	557
хол. констр.	20	0	0,327	-700	–	526

**7.3. Посадка второго кожуха.** На рис. 19 представлено распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в поперечном сечении трубы с двумя посаженными кожухами в момент времени  $t=0$  (начало посадки второго кожуха) при действии прижимающей силы

$F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения детали. На рис. 20 представлено распределение температур в конструкции в процессе сборки.

Согласно расчетным данным, схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками  $C$ ,  $E$ . При этом осевая прижимающая сила  $F_{CD}$ , действующая на упор трубы со стороны кожуха уменьшается и в 2 мин. контакт между кожухами (поверхность  $C-D$ ) теряется и появляется зазор, величина которого стабилизируется в 7-8 мин. с начала сборки. В процессе охлаждения конструкции за счет взаимного проскальзывания поверхность  $CD$  кожуха, несмотря на действие прижимающей силы, перемещается от упора на величину 1,2 мм. Взаимные перемещения кожуха и трубы в точке  $C$  ( $\delta_C$ ) происходят в течение 9-10 мин. с начала сборки. После снятия прижимающей силы  $F$  вновь происходят взаимные перемещения деталей, в основном, вблизи точки  $E$  (см. табл. 7). Тепловое воздействие на первый кожух приводит к его перемещению в осевом направлении и снижению осевых сжимающих напряжений  $\sigma_z$  в первом кожухе вблизи поверхности  $CD$ .

Таблица 7 – Данные о процессе посадки второго кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения поверхности кожуха

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$\delta'_C \cdot 10^6$ , м	$\delta_D \cdot 10^6$ , м	$F_{CD}$ , МН	$\delta_E \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_e$ макс., МПа
0 ( $F=0$ )	10	0	0,565	-643	0	11	0	4835	370	530
0 ( $F \neq 0$ )	7	0	1,194	-722	0	0	2,500	3841	370	556
0,5	7	0	1,194	-699	0	0	2,500	3262	359	552
1	7	0	1,194	-691	2	0	2,476	2608	338	552
1,5	7	0	1,194	-670	0	0	1,503	2353	314	636
2	7	0	1,194	-560	78	74	0	1922	261	704
2,5	7	0	1,194	-563	391	393	0	1450	219	725
3	7	0	1,194	-566	668	668	0	1042	197	722
4	7	0	1,194	-568	915	915	0	422	174	752
5	7	0	1,194	-568	976	975	0	59	165	709
6	7	0	1,194	-568	981	981	0	-91	161	702
8	7	0	1,194	-568	1015	1015	0	-152	159	692
10	7	0	1,194	-569	1016	1016	0	-155	158	691
хол. констр.	10	0	0,603	-613	1207	1209	0	-46	–	530

Таблица 8 – Данные о процессе посадки второго кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,3 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$\delta'_C \cdot 10^6$ , м	$\delta_D \cdot 10^6$ , м	$F_{CD}$ , МН	$\delta_E \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_e$ макс., МПа
0 ( $F=0$ )	10	0	0,565	-643	0	0	0	4835	370	530
0 ( $F \neq 0$ )	7	0	1,194	-722	0	0	2,500	3841	370	556
0,5	7	0	1,194	-699	0	0	2,500	3262	359	552
1	7	0	1,194	-691	2	0	2,476	2608	338	552
1,5	7	0	1,194	-632	0	20	0,456	1748	316	625
2	7	0	1,194	-612	9	28	0	1198	260	671
2,5	7	0	1,194	-597	139	157	0	665	219	692
3	7	0	1,194	-597	215	215	0	215	196	699
4	7	0	1,194	-597	302	309	0	-442	174	704
5	7	0	1,194	-597	302	305	0	-770	165	663
6	7	0	1,194	-597	307	311	0	-903	161	680
8	7	0	1,194	-597	306	306	0	-940	159	691
10	7	0	1,194	-597	305	299	0	-940	158	692
хол. констр.	10	0	0,557	-623	427	429	0	-834	–	530

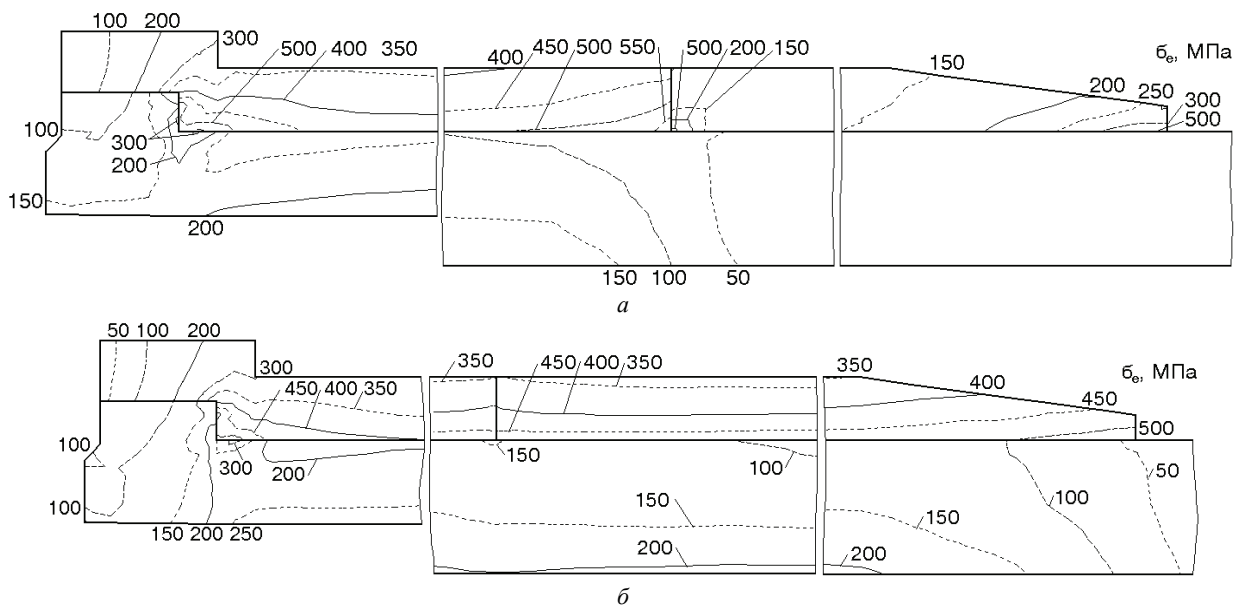


Рисунок 19 – Распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в поперечном сечении трубы с двумя посаженными кожухами в момент начала сборки (а) и в остывшей собранной конструкции (б) при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения

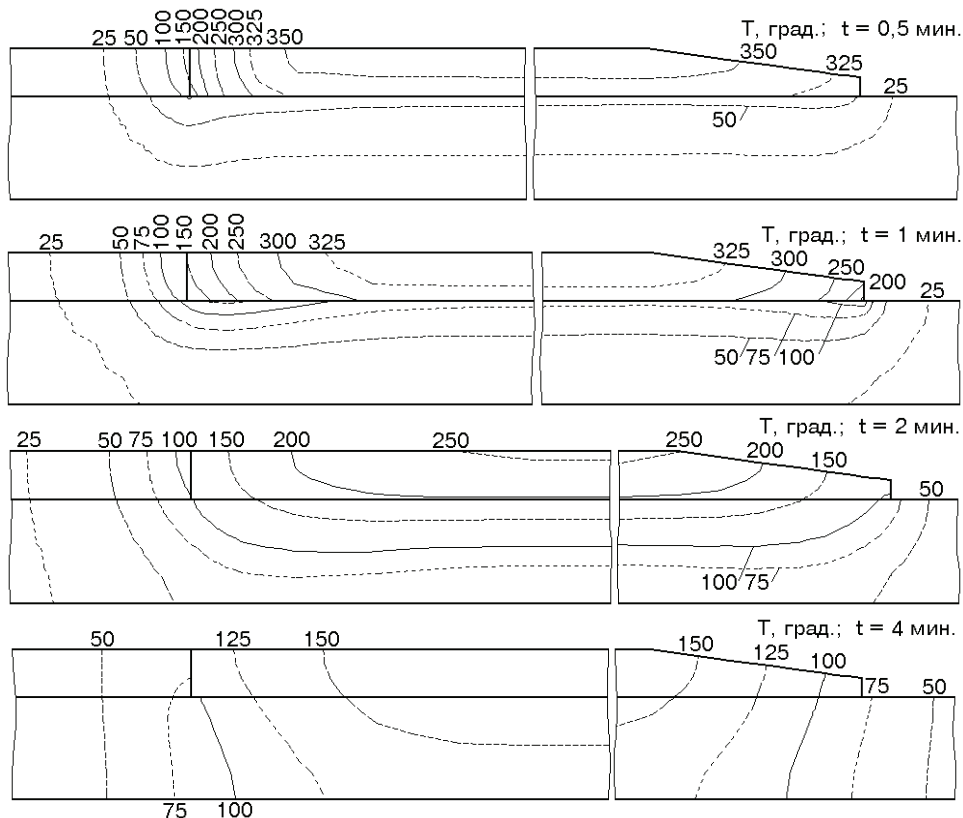


Рисунок 20 – Распределение температур в конструкции в процессе посадки второго кожуха при действии прижимающей силы  $F = 2,5$  МН и отсутствии водяного охлаждения

Было проведено исследование НДС конструкции в процессе посадки второго кожуха при длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,3 м, начало охлаждения через 1 мин. после сборки, начальная температура кожуха 370 град. Схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками А, С. При этом поверхность CD кожуха,

несмотря на действие прижимающей силы, частично отрывается от упора на 0,4 мм. Взаимные перемещения кожуха и трубы в точке С ( $\delta'_C$ ) происходят в течение 7 мин. с начала сборки. После снятия прижимающей силы  $F$  вновь происходят взаимные перемещения деталей, в основном, вблизи точки Е (см. табл. 8).

Также было проведено исследование НДС конструкции в процессе посадки второго кожуха при дейст-

вии прижимающей силы, увеличенной до 3-4,5 МН, длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,3 м, начало охлаждения через 1 мин. после сборки, начальная температура кожуха 370 град.

Согласно расчетным данным, для обеспечения посадки детали, величина прижимающей силы должна

быть 4 – 4,5 МН, длина зоны водяного охлаждения – 0,3 м. Данные о процессе посадки второго кожуха приведены в табл. 9. Распределение напряжений в поперечном сечении трубы после остывания аналогично приведенному на рис. 19.

Таблица 9 – Данные о процессе посадки второго кожуха на трубу при действии прижимающей силы  $F = 4$  МН и длине зоны водяного охлаждения поверхности детали 0,3 м

$t$ , мин.	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$\delta'_C \cdot 10^6$ , м	$\delta_D \cdot 10^6$ , м	$F_{CD}$ , МН	$\delta_E \cdot 10^6$ , м	$T_{\max}$ , °С	$\sigma_{\text{е макс}}$ , МПа
0 ( $F = 0$ )	10	0	0,565	-809	0	0	0	4835	370	530
0 ( $F \neq 0$ )	5	0	1,650	-729	0	0	4,000	3287	370	688
0,5	5	0	1,650	-716	0	0	4,000	2731	360	688
1	5	0	1,650	-714	0	0	4,000	2142	341	701
1,5	5	0	1,650	-639	0	0	1,983	1276	321	828
2	5	0	1,650	-627	0	0	1,558	658	263	864
2,5	5	0	1,650	-601	0	0	1,203	19	230	880
3	5	0	1,650	-583	0	0	0,982	-485	202	878
4	5	0	1,650	-584	0	0	1,043	-1217	176	877
5	5	0	1,650	-583	0	0	1,110	-1581	166	846
6	5	0	1,650	-583	0	0	1,197	-1667	161	865
8	5	0	1,650	-583	0	0	1,321	-1708	159	850
10	5	0	1,650	-583	0	0	0	-1434	158	792
хол. констр.	10	0	0,555	-584	8	8	0	-1252	-	531

**Выводы.** При посадке первого кожуха, согласно расчетным данным, схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками  $A$ ,  $C$  (см. рис. 15,  $a$ ). Смещение кожуха относительно упора трубы (см. табл. 10;  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  в точках  $A$ ,  $B$ ) при отсутствии водяного охлаждения продолжается 5-6 мин., при его наличии – 2 мин. Взаимные перемещения кожуха и трубы в точке  $C$  ( $\delta_C$ ) происходят 7-8 мин. с начала сборки. После снятия прижимающей силы  $F$  вновь происходят взаимные перемещения деталей, в основном, вблизи точки  $C$ . Согласно расчету процесса сборки без учета сил трения кожух после посадки растянут в осевом направлении, если  $\delta_A - \delta_C \leq 0,644$  м. Однако, за счет действия сил трения кожух растянут неравномерно и участок длиной 0,2 – 0,25 м вблизи места приложения силы остается сжатым после сборки и снятия прижимающей силы.

Таблица 10 – Взаимные осевые перемещения трубы и первого кожуха при их сборке в зависимости от длины зоны водяного охлаждения кожуха  $L$

$L$ , м	$\delta_A \cdot 10^6$ , м	$\delta_B \cdot 10^6$ , м	$\delta_C \cdot 10^6$ , м	$F_{AB}$ , МН
0	264	235	-253	0
0,20	40	10	-497	0
0,25	9	0	-614	0,486
0,30	10	0	-643	0,554
0,35	20	0	-700	0,327

При посадке на трубу первого кожуха прижимающая сила в 2,5 МН оказывается недостаточной для гарантированной посадки кожуха вплотную к упору (см. разд. 7.1); согласно расчету, разрыв составляет около 0,2 мм. Применение водяного охлаждения части поверхности кожуха обеспечивает качество сборки, рекомендуемая длина зоны охлаждения  $L$  составляет 0,25-0,35 м (см. табл. 10).  $F_{AB}$  – величина силы, дейст-

вующей на упор трубы на поверхности  $A$ - $B$  со стороны кожуха в остывшей конструкции.

При посадке второго кожуха, согласно расчетным данным, схватывание деталей начинается в момент времени 1 мин. с начала сборки, в 2 мин. контакт наблюдается по всей поверхности между точками  $C$ ,  $D$  (см. рис. 15,  $b$ ). Прижимающая сила в 2,5 МН оказывается недостаточной для гарантированной посадки кожуха вплотную к первому (см. табл. 11;  $\delta'_C$ ,  $\delta_D$  в точках  $C$ ,  $D$ ); согласно расчету, разрыв составляет около 1,2 мм. Применение водяного охлаждения части поверхности кожуха улучшает качество сборки, рекомендуемая длина зоны охлаждения  $L$  составляет 0,3 м, разрыв между кожухами может быть сокращен до 0,43 мм. Согласно расчетным данным, для обеспечения посадки детали, величина прижимающей силы должна быть увеличена до 4-4,5 МН, длина зоны водяного охлаждения – 0,3 м.

Таблица 10 – Взаимные осевые перемещения трубы и второго кожуха при их сборке в зависимости от длины зоны водяного охлаждения кожуха  $L$  и величины прижимающей силы  $F$

$L$ , м	$F$ , МН	$\delta'_C \cdot 10^6$ , м	$\delta_D \cdot 10^6$ , м	$\delta_E \cdot 10^6$ , м	$F_{CD}$ , МН	$\sigma_E$ , МПа	$\sigma'_E$ , МПа
0	2,5	1207	1209	-46	0	708	346
0,2	2,5	791	792	-490	0	708	346
0,3	2,5	427	429	-834	0	708	346
0,4	2,5	525	524	-676	0	708	346
0,3	3,0	297	301	-1098	0	849	415
0,3	3,5	215	215	-1252	0	920	484
0,3	4,0	8	8	-1487	0	991	554
0,3	4,5	0	0	-1777	0,149	1132	623

#### Список литературы

1. Палей М.А., Романов А.Б., Брагинский В.А. Допуски и посадки: Справочник: В 2 ч. Ч. 1. Санкт-Петербург: Политехника, 2001. 576 с.
2. Дунаев П.Ф., Леликов О.П., Варламова Л.П. Допуски и посадки. Обоснование выбора: Учеб. пособие для студен-



тов машиностроительных вузов. Москва: Высшая школа, 1984. 112 с.

3. Справочник машиностроителя. В 6 т. Т. 4. / Под ред. Н.С. Ачеркан. Москва: Mashgiz, 1955. 855 с.

4. Справочник машиностроителя. В 6 т. Т. 6. / Под ред. Э.А. Сател'. Москва: Mashgiz, 1956. 512 с.

5. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении. Москва-Ленинград: Машиностроение, 1968. 168 с.

6. Гаффанов Р.Ф., Шенятский А.В. Управление процессом формировании соединения с натягом, собираемого термическим методом. Вестник Ижевского государственного технического университета. Ижевск: ИжГТУ, 2008. № 3 (39). С. 9-12.

7. Пригорский Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений. Москва: Машиностроение, 1983. 248 с.

8. Серенсен С.В., Козаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Москва: Mashgiz, 1963. 452 с.

9. Решетов Д.Н. Детали машин. Москва: Машиностроение, 1974. 654 с.

10. Зенкин А.С., Арпентьев Б.М. Сборка неподвижных соединений термическими методами. Москва: Машиностроение, 1987. 128 с.

11. Балацкий Л.Т. Усталость валов в соединениях. Киев: Техніка, 1972. 180 с.

12. Балацкий Л.Т. Прочность прессовых соединений. Киев: Техника, 1982. 151 с.

13. Гречишев Е.С., Ильяшенко А.А. Соединения с натягом: расчеты, проектирование, изготовление. Москва: Машиностроение, 1981. 247 с.

14. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.

15. Миллер В.С. Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. Киев: Наукова думка, 1966. 164 с.

16. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. Харьков: Изд-во Харьк. университета, 1965. 227 с.

17. Щепкин А.В. Кинетика напряженного и теплового состояния длинномерных сопрягаемых деталей при сборке с термовоздействием. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. работ. Темат. выпуск: Динамика и прочность машин. Харьков: НТУ «ХПИ». 2002. Вып. 9, т. 9. С. 133-140.

18. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.

19. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. Москва: Недра, 1974. 239 с.

20. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва: Мир, 1979. 392 с.

21. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 344 с.

22. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. Москва: Стройиздат, 1977. 129 с.

23. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. Москва: Высшая школа, 1985. 392 с.

24. Борович Л.С. Бесшпоночное соединение деталей машин. Москва: Mashgiz, 1951. 129 с.

25. Михеев М.А. Основы теплопередачи. Москва-Ленинград: Госэнергоиздат, 1956. 392 с.

#### Bibliography (transliterated)

1. Palej M.A., Romanov A.B., Braginskij V. A. Dopuski i posadki: Spravochnik: In 2 vol. Vol. 1. Sankt-Petersburg: Polith-

nika, 2001. 576 p.

2. Dunaev P.F., Lelikov O.P., Varlamova L.P. Dopuski i posadki. Obosnovanie vybora: Ucheb. posobie dlya studentov mashinostroitel'nyh vuzov. Moscow: Vysshaya shkola, 1984. 112 p.

3. Spravochnik mashinostroitel'ya. In 6 vol. Vol. 4. / Pod red. N.S. Acherkan. Moscow: Mashgiz, 1955. 855 p.

4. Spravochnik mashinostroitel'ya. In 6 vol. Vol. 6. / Pod red. E.A. Satel'. Moscow: Mashgiz, 1956. 512 p.

5. Berniker E.I. Posadki s natyagom v mashinostroenii. Moscow-Leningrad: Mashinostroenie, 1968. 168 p.

6. Gaffanov R.F., Schenyatskij A.V. Upravlenie processom formirovaniy soedineniya s natyagom, sobiraemogo termicheskim metodom. Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta. Izhevsk: IzhGTU, 2008. № 3 (39). P. 9-12.

7. Prigorovskij N.I. Metody i sredstva opredeleniya polej deformacij i napryazhenij. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 248 p.

8. Serensen S.V., Kogaev V.P., Shnejderovich R.M. Nesuschaya sposobnost' i raschety detalej mashin na prochnost'. Moscow: Mashgiz, 1963. 452 p.

9. Reshetov D.N. Detali mashin. Moscow: Mashinostroenie, 1974. 654 p.

10. Zenkin A.S., Arpent'ev B.M. Sborka nepodvizhnyh soedinenij termichesкими методами. Moscow: Mashinostroenie, 1987. 128 p.

11. Balackij L.T. Ustalost' valov v soedineniyah. Kyiv: Tehnika, 1972. 180 p.

12. Balackij L.T. Prochnost' pressovyh soedinenij. Kyiv: Tehnika, 1982. 151 p.

13. Grechishev E.S., Ilyashenko A.A. Soedineniya s natyagom: raschety, proektirovanie, izgotovlenie. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 247 p.

14. Podgornyj A.N., Gontarovskij P.P., Kirkach B.N. and others Zadachi kontaktnogo vzaimodejstviya elementov konstrukcij. Kyiv: Naukova dumka, 1989. 232 p.

15. Miller V.S. Kontaktnyj teploobmen v elementah vysokotemperaturnykh mashin. Kyiv: Naukova dumka, 1966. 164 p.

16. Andreev G.Ya. Teplovaya sborka kolesnyh par. Kharkiv: Izd-vo Khark. universiteta, 1965. 227 p.

17. Schepkin O.V. Kinetika napryazhennogo i teplovogo sostoyaniya dlinnomernykh sopryagaemykh detalej pri sborke s termovozdeystviem. Vestnik NTU "KhPI": Sb. nauch. rabot. Temat. vypusk: Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI". 2002. No 9, vol. 9. P. 133-140.

18. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tehnikе. Moscow: Mir, 1975. 541 p.

19. Zenkevich O., Chang I. Metod konechnykh elementov v teorii sooruzhenij i mehanike sploshnyh sred. Moscow: Nedra, 1974. 239 p.

20. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov. Moscow: Mir, 1979. 392 p.

21. Postnov V.A., Harhurim I.Ya. Metod konechnykh elementov v raschetah sudovyh konstrukcij. Leningrad: Sudostroenie, 1974. 344 p.

22. Rozin L.A. Metod konechnykh elementov v primenenii k uprugim sistemam. Moscow: Strojizdat, 1977. 129 p.

23. Obracov I.F., Savel'ev L.M., Hazanov H.S. Metod konechnykh elementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nyh apparatov. Moscow: Vysshaya shkola, 1985. 392 p.

24. Borovich L.S. Besshponochnoe soedinenie detalej mashin. Moscow: Mashgiz, 1951. 129 p.

25. Miheev M.A. Osnovy teploperedachi. Moskva-Leningrad: Gosenergoizdat, 1956. 392 p.

Поступила (received) 12.10.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Щепкін Олександр Віталійович (Щепкин Александр Витальевич, Schepkin Oleksandr Vitalijovyč) – наук. співр. кафедри «Динаміка та міцність машин» НТУ «ХПІ», e-mail: Sah4199@ukr.net.

Андреев Арнольд Георгійович (Андреев Арнольд Георгиевич, Andreev Arnol'd Georgievich) – канд. техн. наук, доцент кафедри «Динаміка та міцність машин» НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-68-79, e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

*M. ITSKOV, O.O. LARIN***SIMPLE SHEAR: EIGENVECTORS OF CAUCHY-GREEN TENSORS ROTATE AGAINST EACH OTHER**

Simple shear represents a somewhat complex case of deformation although it is very good studied. In this paper, we discuss a new aspect of simple shear which has not been observed before. Rotations of the eigenvectors of the right and left Cauchy-Green tensors with increasing amount of shear under the kinematically defined simple shear are theoretically studied. An analysis has been done within a framework of the nonlinear theory of elasticity. Mathematical processor Maple is used for the calculations and animation of the results. Phenomena of mutually opposite rotations of the eigenvectors of the right and left Cauchy-Green tensors is found that can be important for anisotropic and in particular fibre-reinforced materials. We studied rotations of principal strain directions under the kinematically defined simple shear. Accordingly, eigenvectors of the right and left Cauchy-Green tensors rotate against each other with the increasing amount of shear. Interestingly, the eigenvectors of  $\mathbf{b}$  rotate in the same direction as line elements of the material while the eigenvectors of  $\mathbf{C}$  in the opposite direction. For example, this can be important for anisotropic and in particular fiber reinforced materials. In this case, the direction of the maximal stretch will rotate with respect to reinforcement directions.

**Keywords:** simple shear, rotation, eigenvectors, Cauchy-Green tensors.

*М. ІЦКОВ, О.О. ЛАРИН***ПРОСТИЙ ЗСУВ: ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТЕНЗОРІВ КОШІ-ГРИНА ОБЕРТАЮТЬСЯ ОДИН ПРОТИ ІНШОГО**

Простий зсув являє собою дещо складний випадок деформації, хоча він дуже добре вивчений. У цій роботі ми обговорюємо новий аспект простого зсуву, який раніше не спостерігався. Теоретично вивчаються обертання власних векторів правого та лівого тензорів Коші-Гріна зі збільшенням кількості зсуву під кінематично визначеним простим зсувом. Аналіз зроблено в рамках нелінійної теорії пружності. Математичний процесор Maple використовується для обчислень та анімації результатів. З'являються взаємно протилежні обертання власних векторів правого та лівого тензорів Коші-Гріна, які можуть мати важливе значення для анізотропних і зокрема армованих волокнами матеріалів.

**Ключові слова:** простий зсув, обертання, власні вектори, тензори Коші-Гріна.

*М. ИЦКОВ, А.А. ЛАРИН***ПРОСТОЙ СДВИГ: СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ТЕНЗОРОВ КОШИ-ГРИНА ВРАЩАЮТСЯ ДРУГ ПРОТИВ ДРУГА**

Простой сдвиг представляет собой довольно сложный случай деформации, хотя он очень хорошо изучен. В этой статье мы обсуждаем новый аспект простого сдвига, который ранее не наблюдался. Теоретически исследованы повороты собственных векторов правого и левого тензоров Коши-Грина с увеличением величины сдвига при кинематически заданном простом сдвиге. Анализ проведен в рамках нелинейной теории упругости. Математический процессор Maple используется для расчетов и анимации результатов. Обнаружены явления взаимно противоположных вращений собственных векторов правого и левого тензоров Коши-Грина, которые могут быть важны для анизотропных и, в частности, армированных волокном материалов.

**Ключевые слова:** простой сдвиг, вращение, собственные векторы, тензоры Коши-Грина.

**Introduction.** Simple shear represents a very important case of deformation which can be defined either in terms of stresses or strains. Both definitions generally lead to different deformation states which coincide only in the reference (undeformed) configuration (see, e.g. [1]). The kinematical (strain based) definition of simple shear was first formulated by Rivlin in 1948 [4]. Since then, the so defined simple shear has intensively been studied. Ogden [3] dealt with Lagrangian and Eulerian orientations of principal strain directions. He expressed the double inclination angles of these directions and obtained the bounds for these angles in the reference configuration and in the

case of infinite shear.

In the present paper, we study rotations of these angles with the increasing amount of shear. It appears that the principal directions of the right and left Cauchy-Green tensors (Lagrangian and Eulerian, respectively) rotate against each other. This interesting aspect of simple shear seems to be overseen in literature.

**Simple share.** Consider a rectangular sheet one edge of which is moved parallel to the opposite one so that the distance between edges remains constant (Fig. 1). Let  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$  be position vectors of a material

point of the sheet in its current and reference configuration, respectively, where  $e_i = e^i$  ( $i = 1,2,3$ ) represent orthonormal vectors. Assuming that the deformations of the sheet are homogeneous we can write [4]

$$x^1 = X^1 + \gamma \cdot X^2; \quad x^2 = X^2; \quad x^3 = X^3, \quad (1)$$

where  $\gamma = \tan \phi$  is referred to as the amount of shear while  $\phi$  denotes the shear angle. Thus, the deformation gradient  $F = \text{grad } x$  can be given by  $F = F^i_j \cdot e_i \otimes e^j$ , where the matrix  $[F^i_j]$  is represented by

$$[F^i_j] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

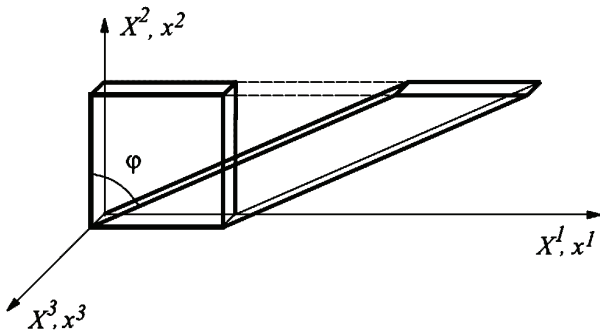


Figure 1 – Simple shear of a rectangular sheet

For the tensor notation and summation convention we refer to [2].

The right and left Cauchy-Green tensors take thus the form

$$C = F^T F = C^i_j e_i \otimes e^j \quad \text{and} \quad b = F F^T = b^i_j e_i \otimes e^j,$$

respectively, where

$$[C^i_j] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [b^i_j] = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

The characteristic equation of these matrices can be written by

$$(1 - \Lambda) [(1 - \Lambda) (1 + \gamma^2 - \Lambda) - \gamma^2] = 0. \quad (4)$$

Eigenvalues of  $C$  and  $b$  are roots of (4) which can be expressed by

$$\Lambda_{1/2} = 1 + \frac{\gamma^2 \pm \sqrt{4\gamma^2 + \gamma^4}}{2} = \left( \frac{\sqrt{4 + \gamma^2} \pm \gamma}{2} \right)^2 \quad \Lambda_3 = 1. \quad (5)$$

The eigenvectors  $N = N^i \cdot e_i$  of  $C$  corresponding to the first two eigenvalues result from the equation system:

$$\begin{cases} \frac{-\gamma^2 \mp \sqrt{4\gamma^2 + \gamma^4}}{2} \cdot N^1 + \gamma \cdot N^2 = 0; \\ \gamma \cdot N^1 + \frac{\gamma^2 \mp \sqrt{4\gamma^2 + \gamma^4}}{2} \cdot N^2 = 0; \\ \frac{-\gamma^2 \mp \sqrt{4\gamma^2 + \gamma^4}}{2} \cdot N^2 = 0. \end{cases}$$

Since the first and second equation are equivalent we only obtain

$$N^2 = \frac{\gamma \pm \sqrt{4 + \gamma^2}}{2} \cdot N^1; \quad N^3 = 0.$$

so that  $N^2 = \sqrt{\Lambda_1} \cdot N^1$  or  $N^2 = -\sqrt{\Lambda_2} \cdot N^1$ . After the normalization this yields the following unit eigenvectors

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_1}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_2}} \cdot e_2; \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_2}} \cdot e_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_1}} \cdot e_2.$$

where we take into account that  $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = 1$ . Applying the above procedure to the third eigenvector corresponding to the eigenvalue  $\Lambda_3 = 1$  we easily obtain:  $N_3 = e_3$ .

The same procedure applied to yields the following unit eigenvectors of  $b$  (see, e.g. [1]):

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_2}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_1}} \cdot e_2; \quad (7)$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_1}} \cdot e_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda_2}} \cdot e_2;$$

$$n_3 = e_3.$$

The inclination angles  $\alpha$  and  $\beta$  of the vectors  $N_1$  and  $n_1$ , respectively, to  $x$ -axis result from

$$\tan \alpha = \sqrt{\Lambda_1} = \frac{\sqrt{4 + \gamma^2} + \gamma}{2}; \quad (8)$$

$$\tan \beta = \sqrt{\Lambda_2} = \frac{\sqrt{4 + \gamma^2} - \gamma}{2}.$$

so that (cf. [3])

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1. \quad (9)$$

In Fig. 2 they are plotted versus the shear angle. Thus, the eigenvectors of  $C$  and  $b$  rotate counterclockwise and clockwise, respectively, and consequently against each other. This rotation is illustrated in Figs. 3 and 4, where the eigenvectors of  $C$  and  $b$  are plotted for various values of the shear angle versus the corresponding deformed configuration of the rectangular sheet. One can also observe that the eigenvectors of  $b$  rotate in the same direction as the edges of the sheet while the eigenvectors of  $C$  in the opposite direction.

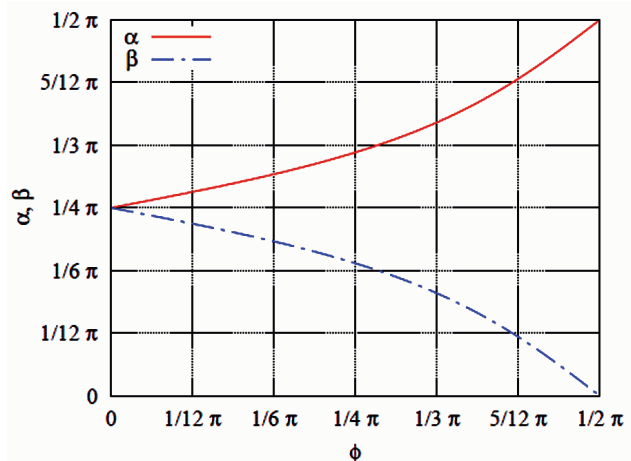


Figure 2 – Inclination angles  $\alpha$  and  $\beta$  of the first eigenvectors of  $C$  and  $b$ , respectively, versus the shear angle  $\phi$

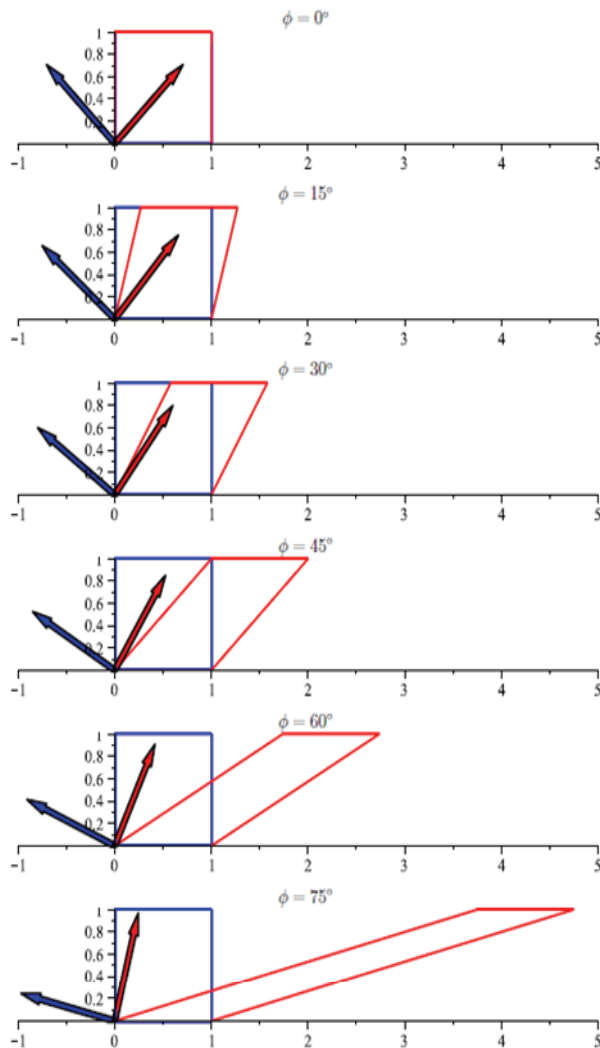


Figure 3 – Positions of the eigenvectors of  $\mathbf{C}$  for various values of the shear angle versus the deformed configuration of the rectangular sheet. The eigenvectors rotate counterclockwise

**Conclusion.** We studied rotations of principal strain directions under the kinematically defined simple shear. Accordingly, eigenvectors of the right and left Cauchy-Green tensors rotate against each other with the increasing amount of shear. Interestingly, the eigenvectors of  $\mathbf{b}$  rotate in the same direction as line elements of the material while the eigenvectors of  $\mathbf{C}$  in the opposite direction. For example, this can be important for anisotropic and in particular fiber reinforced materials. In this case, the direction of the maximal stretch will rotate with respect to reinforcement directions.

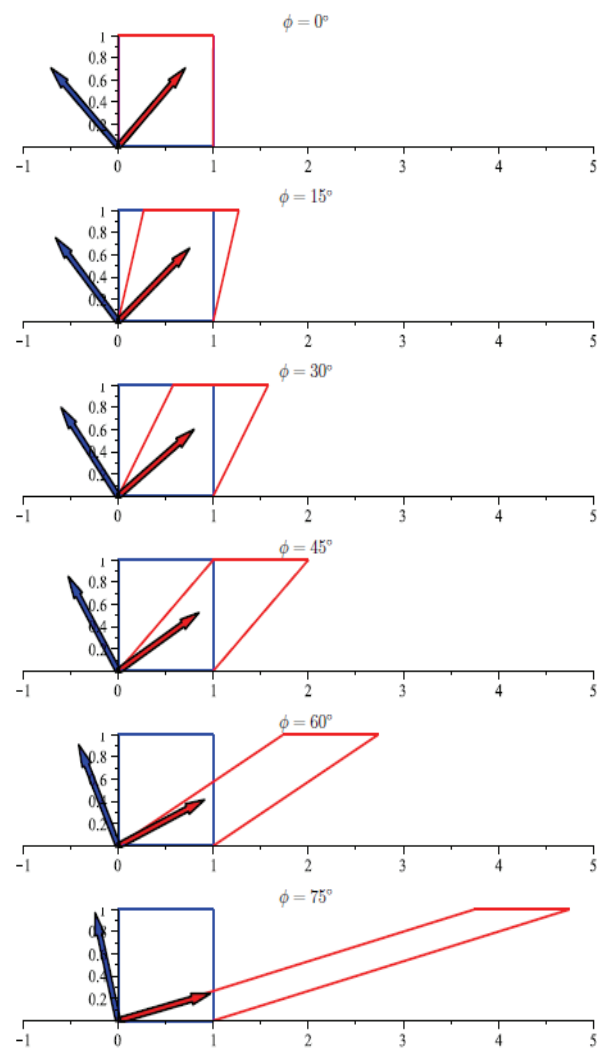


Figure 4 – Positions of the eigenvectors of  $\mathbf{b}$  for various values of the shear angle versus the deformed configuration of the rectangular sheet. The eigenvectors rotate clockwise

#### References

1. Horgan C.O., Murphy J.G. Simple shearing of incompressible and slightly compressible isotropic nonlinearly elastic materials. *Journal of Elasticity*, 98 (2): 205 {221, Feb 2010}.
2. Itskov M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with applications to continuum mechanics*. Mathematical Engineering. Springer, 5th edition, 2019.
3. Ogden R. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2013.
4. Rivlin R. S. Large elastic deformation of isotropic materials part IV, further developments of the general theory. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, A241: 379 {397, 1948}.

Received 08.10.2019

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ларін Олексій Олександрович (Larin Aleksey Aleksandrovich, Larin Oleksiy Oleksandrovych)** – Dynamics and Strength of Machine Department, Kharkiv Polytechnic Institute, Kharkiv, Ukraine; e-mail: alexeya.larin@gmail.com.

**Itskov Mikhail** – Department of Continuum Mechanics, RWTH Aachen University, Aachen, Germany; e-mail: itskov@km.rwth-aachen.de.

## ЗМІСТ

<i>Морачковська І.О., Тимченко Г.М.</i> Лідія Василівна Курпа – видатний вчений–математик і педагог (до ювілею з дня народження) . . . . .	3
<i>Альтенбах Х., Науменко К., Лавінський Д., Конкін В.</i> Задачі нестационарної теплопроводності електропровідних тіл у електромагнітному полі . . . . .	9
<i>Андреев А.Г., Ковалева В.А.</i> Влияние тонкостенности на НДС профильных соединений с натягом . . . . .	14
<i>Бреславський Д.В., Сенько А.В.</i> Пошкоджувальність та руйнування циліндричних твєлів ядерних реакторів . . . . .	19
<i>Грищенко В.М.</i> Схема алгоритму покрокового приведення двох матриць у формі Шура до простого виду . . . . .	24
<i>Красников С.В.</i> Моделирование и анализ колебаний корпуса турбины 500 МВт вблизи основной моды вертикальных колебаний . . . . .	30
<i>Ларін О.О., Потопальська К.Є., Четверікова А.С.</i> Оцінка залишкового ресурсу елементів конструкції насосу енергетичної установки на основі статистичної оцінки втомної міцності з прогнозованим стоншенням корпусних деталей внаслідок корозії . . . . .	35
<i>Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.</i> Вплив нелінійної складової в'язкого опору на тривалість вільних коливань осцилятора . . . . .	41
<i>Ольшанський В.П.</i> До розрахунку вільних коливань дисипативного осцилятора з нелінійною пружністю . . . . .	47
<i>Щепкин А.В., Андреев А.Г.</i> Кинетика напряженного и теплового состояния длинномерных сопрягаемых деталей при сборке с натягом . . . . .	52
<i>Іцков М., Ларін О.О.</i> Простий зсув: власні вектори тензорів Коші-Грі на обернені один проти іншого (англійською мовою) . . . . .	65

## CONTENTS

<i>Morachkovska I., Timchenko G.</i> Lydia Kurpa– Outstanding Scientist Mathematician and Teacher (Dedicated to the Anniversary) . . . . .	3
<i>Altenbach H., Naumenko K., Lavinsky D., Konkin V.</i> The problems of transient heat transfer of electroconductive bodies in the electromagnetic field . . . . .	9
<i>Andreev A.G., Kovaleva V.A.</i> Influence thin-walled factor on the deflected mode of profile joints with interference . . . . .	14
<i>Breslavsky D.V., Senko A.V.</i> Damage and fracture of fuel rods of nuclear reactors . . . . .	19
<i>Grishchenko V.M.</i> The scheme of the algorithm for the step-by-step reduction of two matrices in the form of Schur to a simple form . . . . .	24
<i>Krasnikov S.V.</i> Modeling and analysis of 500 MW turbine casing oscillations near basic vertical oscillation . . . . .	30
<i>Larin O.O., Potopalska K.E., Chetverikova A.S.</i> Assessment of the residual resource of the elements of construction of the pump of the energy installation on the basis of statistical assessment of total strength . . . . .	35
<i>Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.</i> The influence of the nonlinear component of viscous resistance on the duration of free oscillations of the oscillator . . . . .	41
<i>Ольшанський В.П.</i> До розрахунку вільних коливань дисипативного осцилятора з нелінійною пружністю . . . . .	47
<i>Olshanskiy V.P.</i> Calculation of free oscillations of a dissipative oscillator with nonlinear elasticity . . . . .	
<i>Schepkin O.V., Andreev A.G.</i> Kinetics of the strength and thermal state of long-sized interfaced details with tightness application . . . . .	52
<i>Itskov M., Larin O.O.</i> Simple shear: eigenvectors of cauchy-green tensors rotate against each other . . . . .	65

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»  
СЕРІЯ: ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН

Збірник наукових праць

№ 2 2019

Головний редактор: Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор  
Технічний редактор: Щепкін О.В., наук. співр.

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ:** 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.  
НТУ «ХПІ», Фіз. корп. 1-й пов., каф. ДММ.  
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: lvovdpm@ukr.net

Підп. до друку 29.11.2019 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,05. Облік.-вид. арк. 9,20.  
Тираж 100 пр. 1-й завод 1-50. Зам. № 28. Ціна договірна.

---

Друкарня ВАТ «Цифра Прінт».  
Свідоцтво про Державну реєстрацію А01 № 432705 від 03.08.2009 р.  
Адреса: 61166, м. Харків, вул. Данилевського, 30

---