



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях

№ 22'2019

Харків
2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 22 (1347) 2019

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 22 (1347) 2019

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2019

Kharkiv
NTU "KhPI", 2019

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2019. — № 22 (1347) 2019. — 132 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України № 1328 від 21.12.2015 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року»

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до зовнішніх інформаційних систем, зокрема до ICI Journals Master List 2018, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Головний редактор

Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України

Заст. головного редактора

Марченко А. П., д-р техн. наук, проф.

Секретар

Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна

Редакційна колегія серії

Відповідальний редактор:

В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора:

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар:

О. О. Набока, канд. фіз.-мат. наук.

Члени редколегії: Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.; О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.; О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. М. Олексенко, д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ф. Пацегон, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.; А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuhev, Sc. D. in Information Technology, Malaysia.

Editor-in-chief

Sokol E. I., dr. tech. sc., member-cor. of National Academy of Sciences of Ukraine, NTU "KhPI"

Deputy editor-in-chief

Marchenko A. P., dr. tech. sc., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Secretary

Gorbunov K. O., docent, NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

Deputy Executive Editor:

Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

Executive Secretary:

O. O. Naboka, PhD. Phys.-Math. Sci.

Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. M. Oleksenko, Dr. Ped. Sci., PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. I. Pershina, Dr. Phys.-Math. Sci., Docent; A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuhev, Sc. D. in Inf. Tech., Malaysia.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ». Протокол № 9 від 01 листопада 2019 р.

П. М. АНДРЕНКО, І. А. ЄМЕЛЬЯНОВА, Д. Ю. СУБОТА

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ВИЗНАЧЕННЯ НАДІЙНОСТІ РОБОТИ ГІДРАВЛІЧНОГО ПРИВОДА НА СТАДІЇ ПРОЕКТУВАННЯ УНІВЕРСАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ КОМПЛЕКТІВ МАЛОГАБАРИТНОГО ОБЛАДНАННЯ ДЛЯ БЕЗОПАЛУБНОГО БЕТОНУВАННЯ

Методологія визначення надійності побудована на основі результатів досліджень одного з нових технологічних комплектів малогабаритного обладнання для виконання робіт способом мокрого торкретування в умовах будівельного майданчика. В статті наведено результати аналітичних досліджень надійності роботи нового універсального технологічного комплекту малогабаритного обладнання при оснащенні його гідравлічним приводом або механічною системою керування. Комплект розглядається при використанні безопалубного бетонування з аналізом його структурних схем і імовірності безвідмовної роботи обладнання.

Ключові слова: технологічний комплект малогабаритного обладнання, надійність, імовірність безвідмовної роботи, гідропривод, механічна система керування, структурна схема.

П. Н. АНДРЕНКО, И. А. ЕМЕЛЬЯНОВА, Д. Ю. СУБОТА

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРИВОДА НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЛЕКТОВ МАЛОГАБАРИТНОГО ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ БЕЗОПАЛУБОЧНОГО БЕТОНИРОВАНИЯ

Методология определения надежности построена на основе результатов исследований одного из новых технологических комплектов малогабаритного оборудования для выполнения работ способом мокрого торкретирования в условиях строительной площадки. В статье приведены результаты аналитических исследований надежности работы нового универсального технологического комплекта малогабаритного оборудования при оснащении его гидравлическим приводом или механической системой управления. Комплект рассматривается при использовании безопалубного бетонирования с анализом его структурных схем и вероятности безотказной работы оборудования.

Ключевые слова: технологический комплект малогабаритного оборудования, надежность, вероятность безотказной работы, гидропривод, механическая система управления, структурная схема.

P. M. ANDRENKO, I. A. EMELYANOVA, D. YU. SUBOTA

METHODOLOGICAL BASES FOR DETERMINING THE RELIABILITY OF HYDRAULIC DRIVE OPERATION AT THE STAGE OF DESIGNING UNIVERSAL TECHNOLOGICAL KITS OF SMALL-SIZED EQUIPMENT FOR THE OFF-FORMWORK CONCRETING

The methodology for determining reliability is based on the results of studies of one of the new technological kits of small-sized equipment for performing work using the wet shotcreting method at the construction site. The article presents the results of analytical studies of the reliability of the new universal technological kit of small-sized equipment when equipped with a hydraulic drive or mechanical control system. The kit is considered when using off-formwork concreting with the analysis of its structural schemes and the probability of equipment failure.

Key words: technological kit of small-sized equipment, reliability, probability of failure-free operation, hydraulic drive, mechanical control system, block diagram.

Вступ. Ефективність використання *універсальних технологічних комплектів малогабаритного обладнання для безопалубного бетонування* в умовах будівельного майданчика в значній мірі залежить від надійності роботи їх приводів.

Надійність є одним з основних показників технічного рівня машин [1]. Вона є функцією від наступних факторів: конструктивного виконання, режиму роботи обладнання, міцності конструктивних елементів, кваліфікації обслуговуючого персоналу, параметрів навколишнього середовища, стану робочої рідини, наявності засобів технічного діагностування тощо. При проектуванні універсальних комплектів на стадії вибору схемного рішення гідросистеми необхідно визначити гарантований час їх надійної роботи.

Аналіз останніх досліджень. Питанням розрахунку надійності гідравлічних елементів та систем присвячена достатньо велика кількість наукових робіт, наприклад, [2, 3]. Однак, в відомих роботах не розглядаються питання надійності гідравлічних систем будівельних машин та технологічного обладнання для умов будівництва. В цих роботах відзначено, що на сьогодні широке розповсюдження при розрахунку надійності отримав *метод структурних схем*.

З використанням метода структурних схем в статті [4] дана оцінка надійності *мехатронних гідроагрегатів*, а в статті [5] наведено результати порівняльних аналітичних досліджень надійності гідроагрегатів обертання верстатів для намотування обмоток електродвигунів. Врахування умов експлуатації обладнання за допомогою емпіричних коефіцієнтів пропонується в статті [6]. В статті [7] проведено порівняльний аналіз надійності безпоршневих шлангових бетононасосів з двома видами приводів – гідравлічним та механічним при ідентичних умовах їх використання. Встановлено, що більшою надійністю та часом безвідмовної експлуатації характеризується бетононасос із гідравлічним приводом, який увійшов як складова частина у новий технологічний комплект малогабаритного обладнання для умов будівельного майданчика.

За результатами аналізу літературних джерел встановлено, що для оцінки надійності гідравлічних систем на стадії їх проектування цілком правомірно використати метод структурних схем, який прийнято для даного виду обладнання. Таким чином, аналіз надійності гідравлічної системи комплексу, що проектується, дозволить обґрунтовано підійти до його експлуатації в умовах будівництва з позиції встановлення часу безвідмовної роботи такого обладнання.

Постановка задачі. Розробити методику розрахунку нового універсального технологічного комплексу малогабаритного обладнання, що пропонується, з позиції безвідмовної надійної роботи в умовах будівельного майданчика при безопалубному бетонуванні.

Розрахункові дослідження надійності гідравлічної системи комплексу, який розглядається, пропонується виконати з використанням методу структурних схем [2].

Принципову схему нового технологічного комплексу із гідравлічним приводом, представлено на рис. 1.

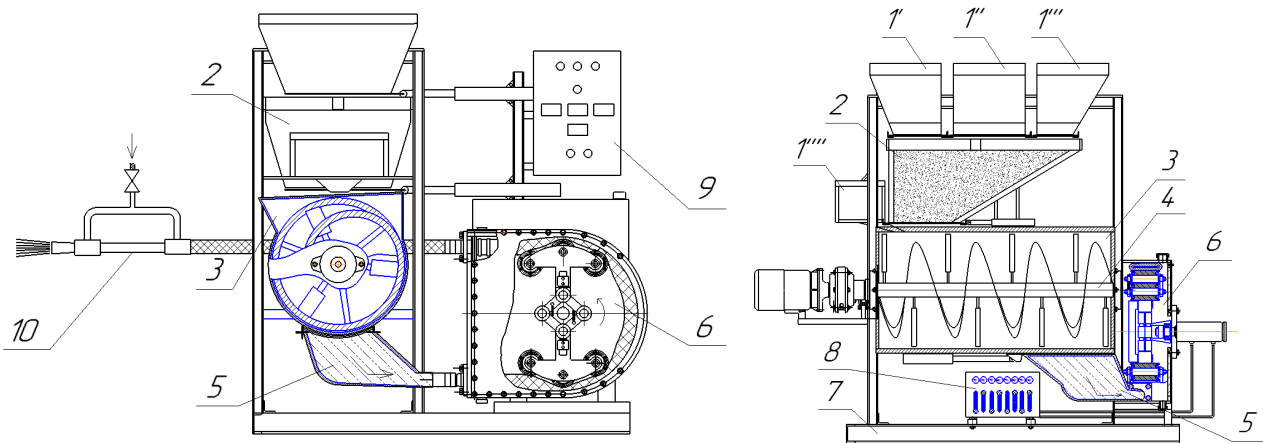


Рис. 1 – Технологічний комплект універсального малогабаритного обладнання для безопалубного бетонування з використанням способу мокрого торкретування: 1', 1'', 1''', 1'''' – дозувальні вузли; 2 – проміжний бункер; 3 – змішувач; 4 – горизонтальний стрічково-лопатевий вал; 5 – приймальний лоток готової бетонної суміші; 6 – універсальний безпоршневий шланговий бетононасос; 7 – загальна опорна рама; 8 – гідророзподільний вузол; 9 – щит керування та автоматизації технологічного комплексу обладнання; 10 – торкрет-сопло з кільцевим насадком.

Комплект складається із дозувального вузла 1, проміжного бункера 2 віддозованих компонентів бетонної суміші, яка готується у бункері-змішувачі 3 із робочим органом 4 у вигляді горизонтального стрічково-лопатевого вала; приймального лотка 5 готової суміші з бункера-змішувача і подачі її в універсальний шланговий бетононасос 6. Усе обладнання технологічного комплексу розміщено на загальній рамі 7. При виконанні торкрет-робіт будівельна суміш із бетононасоса поступає в транспортний трубопровід 8, а далі до робочого торкрет-сопла 9, відкля набризується на поверхню, що бетонується.

Такий комплект складається із окремих машин (обладнання) – модулів, які характеризуються відповідною надійністю при експлуатації і дозволяють використовувати його при різних компоновках складових:

- «дозувальний вузол → проміжний бункер → бетонозмішувач → універсальний безпоршневий шланговий бетононасос → транспортний трубопровід → робоче сопло із кільцевим насадком»;
- «дозувальний вузол → проміжний бункер → бетонозмішувач → лоток подачі готової суміші у бетононасос → універсальний безпоршневий шланговий бетононасос → маніпулятор із робочим соплом»;
- «дозувальний вузол → проміжний бункер → бетонозмішувач → лоток видачі готової суміші».

При цьому, слід акцентувати увагу на перевагах таких комплектів:

- на 25 ... 30 % підвищена продуктивність завдяки суміщенню у часі виконання усіх технологічних операцій;
- можливість виконання одним комплектом в умовах будівельного майданчика повного технологічного циклу усіх операцій.

Визначення надійності. Для оцінки надійності роботи гідравлічного привода нового технологічного комплексу обладнання прийняті наступні умови [8, 9]:

- усі складові елементи технологічного комплексу є одиницями, а відмови елементів незалежні;
- зв'язки між окремими складовими елементами та час їх функціонування відомі;
- однотипні елементи є рівнонадійні, режими їх роботи відповідають номінальним умовам;
- параметри оточуючого середовища відповідають технічним вимогам.

Прийнято, що термін роботи окремих елементів технологічного комплексу визначається за експоненціальним законом розподілення, а ймовірність їх безвідмовної роботи розраховується за залежністю:

$$P(t) = \exp\left(-\sum_1^n \lambda_i t_i\right), \quad (1)$$

де λ_i , t_i – інтенсивність відмов та час справної роботи i – того елементу; n – кількість елементів.

Розрахунок імовірності безвідмовної роботи згідно залежності (1) правомірний для невідновлюваних елементів і систем. Для відновлюваних елементів і систем залежність (1) дає дещо занижені результати, однак, маючи на увазі невизначеність часу відновлення, в подальших розрахунках використовується залежність (1).

При послідовному з'єднанні i – тих елементів, з 1 по n , імовірності їх безвідмовної роботи розраховувати слід відповідно залежності:

$$P(t) = \prod_1^n P_i(t), \quad (2)$$

де $P_i(t)$ – імовірність роботи i – го елементу.

Для системи, яка складається з k паралельних ланцюжків, у кожному з яких n елементів, то імовірність безвідмовної роботи системи знаходиться за залежністю:

$$P(t) = 1 - \prod_1^k \left[1 - \prod_1^n P(t)_i \right], \quad (3)$$

де $P(t)_i$ – імовірність безвідмовної роботи системи з n елементів в залежності від i – го проміжку часу t .

Гідравлічну схему комплексу для безопалубочного бетонування представлено на рис. 2. Паралельно слід розглядати *принципову* схему комплексу (рис. 1) у варіанті, коли його оснащено механічним приводом.

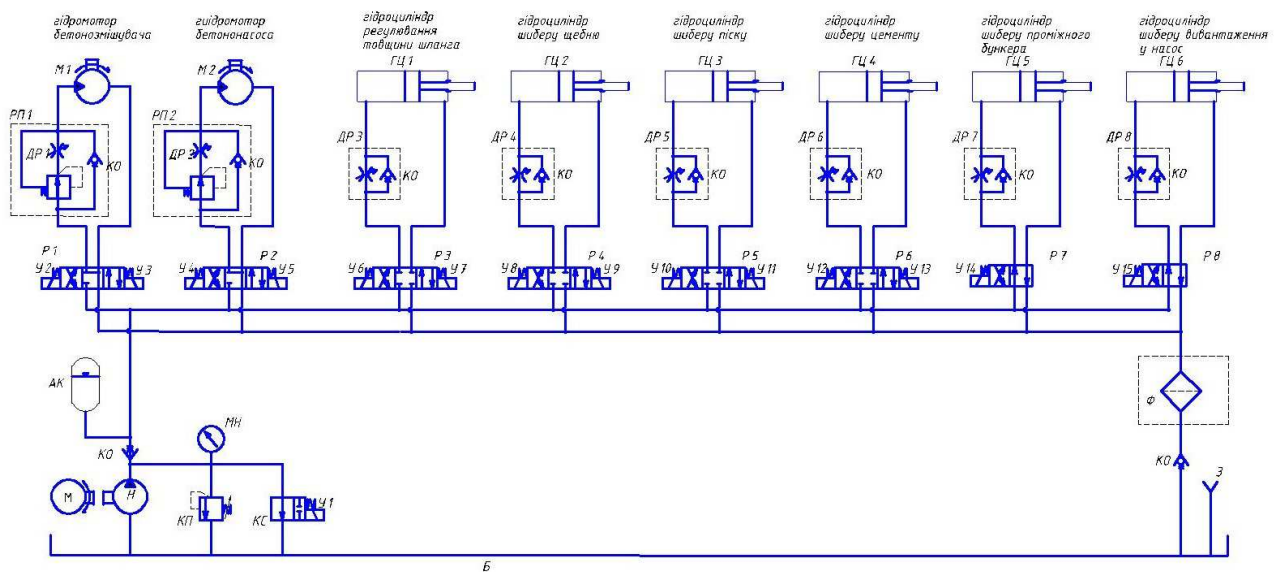


Рис. 2. Гідравлічна схема нового технологічного комплексу:

Б – бак; М – електродвигун; Н – насос; АК – пневмогідравлічний акумулятор; КП – запобіжний клапан; КС – зливний клапан; Ф – фільтр; МН – манометр; Р1, Р2 – гідророзподільники (чотирьохлінійні, трьохпозиційні з електрокеруванням за схемою виконання 34); Р3 – Р6 – гідророзподільники (чотирьохлінійні, трьохпозиційні з електроуправлінням за схемою виконання 44); Р7, Р8 – гідророзподільники (дволінійні, двохпозиційні з електроуправлінням за схемою виконання 574); РП1 – РП2 – регулятор потоку; М1, М2 – високомоментні гідромотори; ДР – дроселі, що регулюються; ГЦ – гідроциліндр; КВ – зворотній клапан; З – залівна горловина.

Технологічний комплект працює наступним чином. Робоча рідина з виходу шестеренного насоса Н через зворотний клапан КВ надходить на входи гідророзподільників Р1, Р2, які управляють роботою бетонозмішувача та бетононасоса (гідромоторами М1 і М2), а також на вхід гідророзподільника Р3 регулятора продуктивності (ГЦ1), і далі на входи гідророзподільників Р4, Р5, Р6, які управляють гідроциліндрами шибєрних затворів (ГЦ2 – ГЦ4), що перекривають відповідно входні отвори бункерів щебеню, піску, цементу. Гідророзподільники Р7 і Р8 управляють роботою гідроциліндрів шибєрів (ГЦ5 і ГЦ6). ГЦ5 перекриває подачу віддозованих сухих компонентів для приготування суміші в бетонозмішувач із стрічково-лопатевим валом. Готова суміш поступає на приймальний лоток при відкритті шибєру гідроциліндром ГЦ6 і далі на вхід бетононасоса. Тиск в гідросистемі підтримується запобіжним клапаном КП, який працює у переливному режимі і контролюється манометром МН.

Лінії зливу всіх гідророзподільників через зливний фільтр Φ та зворотний клапан KO з'єднані з баком B .

При з'єднанні гідромотора $M1$ через гідророзподільник $P1$ з магістраллю живлення та його виходу зі зливом, починає обертатися гідромотор $M1$ та вал стрічково-лопатевого змішувача – відбувається процес приготування суміші. Для зупинки гідромотора $M1$ гідророзподільник $P1$ переводиться в нейтральну позицію. Обертання ротора бетононасоса здійснюється гідромотором $M2$, включенням/виключенням якого управляє гідророзподільник $P2$. Управління частотою обертання гідромоторів $M1$ та $M2$ здійснюється регулюванням дроселів DP регуляторів потоку з зворотним клапаном $P11$ і $P12$ відповідно, які підтримують потрібну витрату робочої рідини через гідромотори.

Особливістю спроектованої гідравлічної схеми є те, що максимальна потужність виконавчих механізмів споживається при роботі $M1$ та $M2$, які працюють постійно. Гідроциліндри $ГЦ1 - ГЦ6$ працюють згідно розробленої циклограми. Тому для підвищення енергетичної ефективності застосовано гідропневматичний акумулятор.

Особливістю розробки технологічного комплексу з механічним приводом для безопалубного бетонування при зведенні об'єктів із монолітного залізобетону є те, що його складові приводяться в дію мотор-редукторами. Причому, обертання валів бетонозмішувача та бетононасоса здійснюється мотор-редукторами великої потужності, а переміщення засувок дозуючих бункерів і регулювання продуктивності бетононасоса здійснюється мотор-редукторами малої потужності.

Для розрахунку надійності технологічного комплексу з гідравлічним і механічним приводами пропонуються структурні схеми (рис. 3, 4).

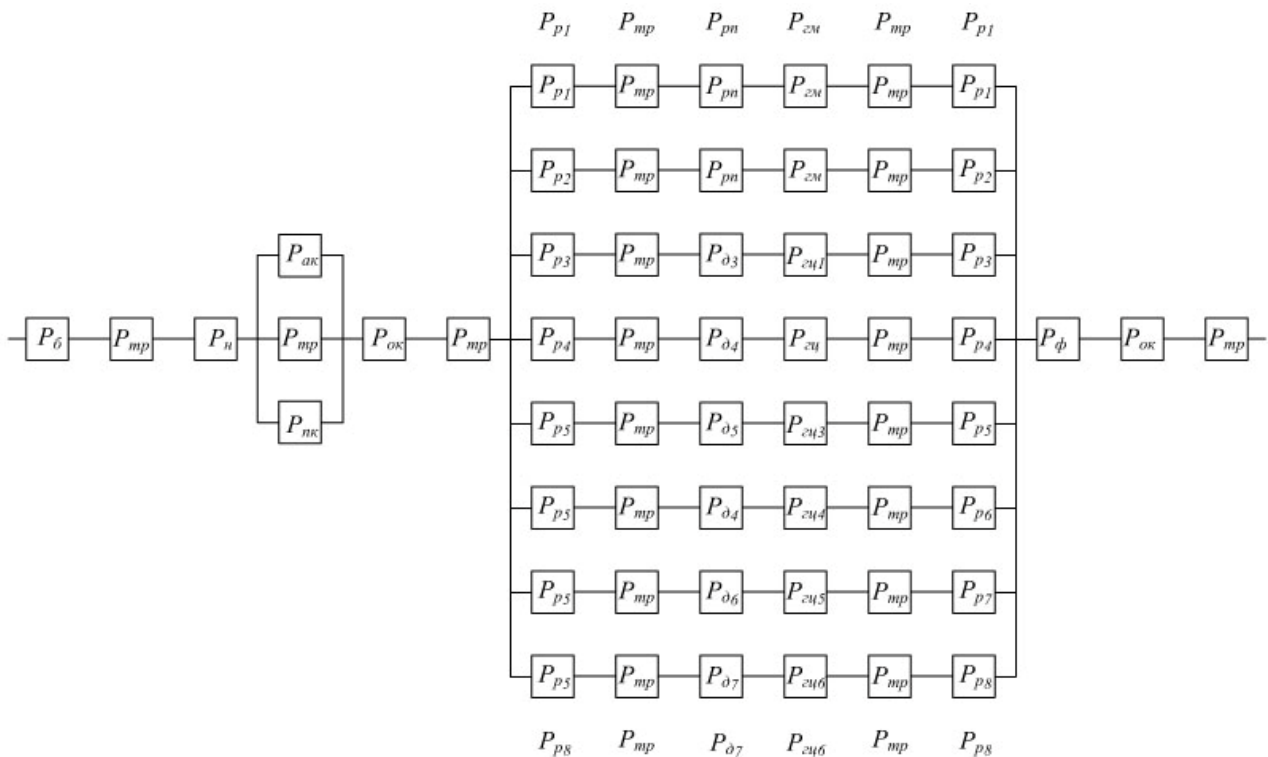


Рис. 3 – Структурна схема нового технологічного комплексу з гідравлічною системою.

На рис. 3 літерою P позначено імовірність безвідмовної роботи елементів гідравлічної схеми нового технологічного комплексу, рис. 2, яка у загальному випадку залежить від часу t , який для скорочення запису не показуємо. Індеси при P позначають відповідний елемент гідравлічної схеми, наприклад: $P_б$ – імовірність безвідмовної роботи бака;

$P_{мр}$ – імовірність безвідмовної роботи трубопроводу ($P_{мр} = 1$) і так далі; ($P_{AK} = 1$), ($P_{\phi} = 1$).

За структурними схемами технологічного комплексу, враховуючи формули (2) і (3), отримано розрахункові залежності імовірності безвідмовної роботи:

– для технологічного комплексу з гідравлічною системою:

$$P_{\Sigma}(t) = P_б P_{мр}^3 P_н (P_{AK} + P_{мр} + P_{кн} - P_{AK} P_{мр} - P_{AK} P_{кн} - P_{кн} P_{мр} + P_{AK} P_{мр} P_{кн}) P_{ок}^2 \times \\ \times \left[2P_p^2 P_{мр}^2 P_{рн} P_{зч} - 4P_p^4 P_{мр}^4 P_{рн}^2 P_{зч}^2 + (6P_i - 15P_i^2 + 26P_i^3 - 15P_i^4 + 6P_i^5 - P_i^6) - \right]$$

$$-\left(2P_p^2 P_{mp}^2 P_{pn} P_{zm} - 4P_p^{4P} P_{mp}^4 P_{pn}^2 P_{zm}^2\right) \left(6P_i - 15P_i^2 + 26P_i^3 - 15P_i^4 + 6P_i^5 - P_i^6\right) P_\phi, \quad (4)$$

де $P_i = P_p^2 P_{mp}^2 P_{op} P_{zu}$;

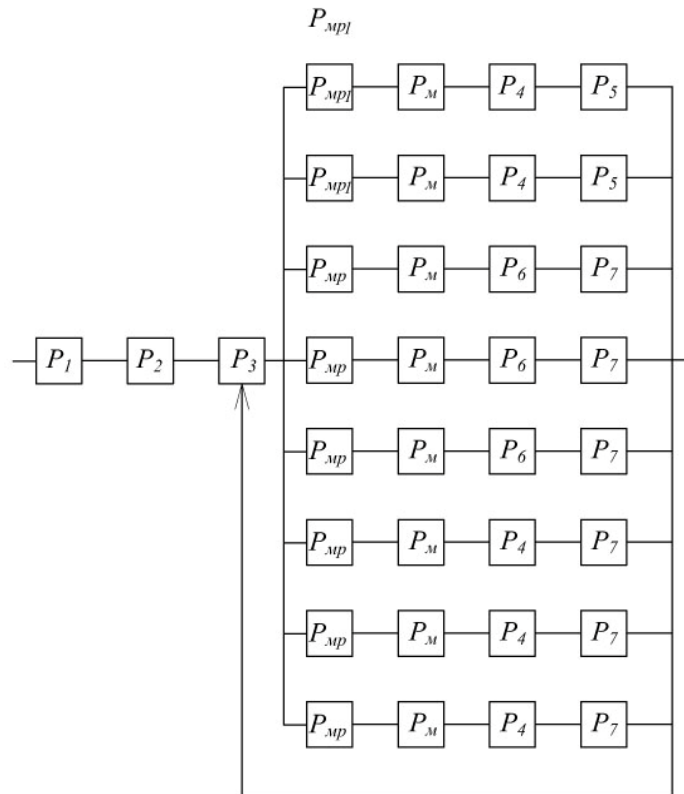


Рис. 4 – Структурна схема нового технологічного комплексу із механічним приводом.

Для структурної схеми рис. 4: P_1 – імовірність безвідмовної роботи пускача; P_2 – імовірність безвідмовної роботи запобіжника; P_{mp1} – імовірність безвідмовної роботи мотор-редуктора бетонозмішувача (бетононасоса);

P_{mp} – імовірність безвідмовної роботи мотор-редуктора бункерів; P_m – імовірність безвідмовної роботи фрикційної муфти; P_4 – імовірність безвідмовної роботи вала; P_5 – імовірність безвідмовної роботи датчика;

P_6 – імовірність безвідмовної роботи засувки; P_7 – імовірність безвідмовної роботи перемикача.

– для технологічного комплексу з електромеханічною системою:

$$P_{\Sigma em}(t) = P_1 P_2 P_3 \left\{ \begin{aligned} &2P_{mp1} P_m P_4 P_5 - (P_{mp1} P_m P_4 P_5)^2 + P_{елз} - 2P_{mp1} P_m P_4 P_5 P_{елз} + \\ &+ (P_{mp1} P_m P_4 P_5)^2 P_{елз} + 9P_j^2 - 9P_j^3 + 6P_j^4 - 6P_j^5 + P_j^6 - \\ &- \left[2P_{mp1} P_m P_4 P_5 - (P_{mp1} P_m P_4 P_5)^2 + P_{елз} - \right. \\ &- 2P_{mp1} P_m P_4 P_5 P_{елз} + (P_{mp1} P_m P_4 P_5)^2 P_{елз} \left. \right] \times \\ &\times (9P_j^2 - 9P_j^3 + 6P_j^4 - 6P_j^5 + P_j^6) \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

де $P_{елз}$ – імовірність безвідмовної роботи електричної лінії зв'язку; $P_j = P_{mp1} P_m P_6 P_7$.

Перспективи подальших досліджень. Основні положення методології, що пропонується для визначення надійної роботи гідравлічного привода універсальних технологічних комплексів малогабаритного обладнання, можуть бути взяті за основу при аналізі експлуатації окремих будівельних машин, які використовуються в умовах будівельних майданчиків та оснащені гідравлічним приводом.

Наочність цієї методології дозволяє рекомендувати її до широкого впровадження оцінки надійної роботи обладнання при виконанні окремих операцій в умовах використання також і комплексів, які задіяні при виконанні підготовчих робіт на будівельних майданчиках з використанням спеціалізованої техніки для земляних ро-

біт. Таким чином, методологія, яка розглядається, може бути корисна при аналізі роботи землерійних та земле-
різно-транспортних машин, вантажопідіймальної техніки та, особливо, вібраційної техніки.

Висновки. Таким чином, залежності (4), (5) дозволяють визначити імовірність безвідмовної роботи техно-
логічного комплексу обладнання, що пропонується, при оснащенні його різними структурними схемами.

Запропонована методологія визначення надійності роботи привода нового технологічного комплексу мало-
габаритного обладнання в умовах безопалубного бетонування з використанням способу мокрого торкретування.

Список літератури

1. OST2 N06-35 – 84. Гидроприводы объемные, пневмоприводы, и смазочные системы. Оценка технического уровня и качества (Отраслевой стандарт). – М. : ВНИИТЭМР, 1985. – 39 с.
2. Сырицын Т. А. Надежность гидро- и пневмопривода. – М. : Машиностроение, 1981. – 216 с.
3. Фінкельштейн З. Л., Андренко П. М., Дмитрієнко О. В. Експлуатація, обслуговування та надійність гідравлічних машин і гідроприводів : навч. посіб. // Під ред. проф. П. М. Андренка. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – 308 с.
4. Батлук В. А., Федоренко І. М. Оцінка надійності мехатронних гідроагрегатів на стадії їх проектування // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2009. – № 5/6(41). – С. 21 – 24.
5. Андренко П. М., Гречка І. П., Хованський С. О., Свинаренко М. С. Оцінка надійності гідроагрегатів обертання на стадії їх проектування / Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь : ТДАУ, 2017. – Вип. 17. – Т. 3. – С. 23 – 32.
6. Ащеулов А. В. Анализ интенсивности отказов гидравлического оборудования // Гидравлика, Пневматика, Приводы. – 2010. – № 1 (3). – С. 8 – 9.
7. Ємельянова І. А., Андренко П. М., Чайка Д. О. Оцінка надійності безпоршневого шлангового універсального бетононасоса на стадії його проектування // Збірник наукових праць українського державного університету залізничного транспорту. – Харків, 2016. – Вип. 162. – С. 5 – 11.
8. Андренко П. М., Лебедєв А. Ю., Дмитрієнко О. В., Свинаренко М. С. // Під ред. проф. П. М. Андренка. – Харків : Видавничий центр НТУ «ХПІ», 2018. – 520 с.
9. Андренко П. М. Методичні вказівки до практичних занять «Вивчення принципу дії, експлуатації та розрахунку надійності гідроапаратів із вібраційною лінеаризацією» з курсу «Надійність та експлуатація гідромашин і гідроприводів» // Уклад. П. М. Андренко. – Харків : НТУ «ХПІ», 2003. – 72 с.

References (transliterated)

1. OST2 N06-35–84. *Gidropriivody ob'emyne, pnevmopriivody, i smazochnye sistemy. Otsenka tekhnicheskogo urovnya i kachestva (Otraslevoy standart)* [State Standard OST2 N06-35–84. Volumetric hydraulic drives, pneumatic drives, and lubrication systems. Assessment of the technical level and quality (Industry-specific standard)]. Moscow, VNIITEMR Publ., 1985. 39 p.
2. Syritsyyn T. A. *Nadezhnost' gidro- i pnevmopriivoda* [Reliability of hydraulic and pneumatic drive]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 216 p.
3. Finkel'shteyn Z. L., Andrenko P. M., Dmitrienko O. V. *Ekspluatatsiya, obslugovuvannya ta nadiynist' gidravlichnikh mashyn i gidropriivodiv : navch. posib. b. Pid red. prof. P. M. Andrenka* [Operation, maintenance and reliability of hydraulic machines and hydraulic drives. : textbook. Ed. by Prof. P. M. Andrenko]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014. 308 p.
4. Batluk V. A., Fedorenko I. M. Otsinka nadiynosti mekhatronnykh gidroagregativ na stadiyi yikh proektuvannya [Reliability evaluation of mechatronic hydroelectric units at the design stage]. *Skhidno-Yevropeys'kyi zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern European Journal of Advanced Technology]. 2009, no. 5/6 (41), pp. 21–24.
5. Andrenko P. M., Grechka I. P., Khovans'kyi S. O., Svyarenko M. S. Otsinka nadiynosti gidroagregativ obertannya na stadiyi yikh proektuvannya [Estimation of reliability of rotary hydraulic units at their design stage]. *Pratsi Tavriys'kogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu* [Proceedings of the Taurida State Agrotechnological University]. Melitopol', TDAU Publ., 2017, no. 17, vol. 3, pp. 23–32.
6. Ashheulov A. V. Analiz intensivnosti otkazov gidravlicheskogo oborudovaniya [Hydraulic equipment failure rate analysis]. *Gidravlika, Pnevmatika, Privody* [Hydraulics, Pneumatics, Drives]. 2010, no. 1 (3), pp. 8–9.
7. Emel'yanova I. A., Andrenko P. M., Chayka D. O. Otsinka nadiynosti bezporshnevogo shlangovogo universal'nogo betononasosa na stadiyi yogo proektuvannya [Reliability assessment of pistonless hose universal concrete pump at its design stage]. *Zbirnyk naukovykh prats' ukrayins'kogo derzhavnogo universitetu zaliznychnogo transportu* [Collection of scientific works of the Ukrainian State University of Railway Transport]. Kharkiv, 2016, vol. 162, pp. 5–11.
8. Andrenko P. M., Lebedev A. Yu., Dmytrienco O. V., Svyarenko M. S. *Nadiynist', tekhnichne diagnostuvannya ta ekspluatatsiya gidro- i pnevmopriivodiv : navch. posib. Pi'd red. prof. P.M. Andrenka* [Reliability, technical diagnosis and operation of hydraulic and pneumatic actuators. Ed. by Prof. P. M. Andrenko]. Kharkiv, Vydavnychyy tsentr NTU «KhPI» Publ., 2018. 520 p.
9. Andrenko P. M. *Metodychni vkazivky do praktychnykh zanyat' «Vyvchennya pryntsypu diyi, ekspluatatsiyi ta rozrakhunku nadiynosti gidroaparativ iz vibratsiynoyu linearyzatsiyeyu» z kursu «Nadiynist' ta ekspluatatsiya gidromashin i gidropriivodiv»*. Uklad. P. M. Andrenko [Methodology instructions for practical lesson on the topic «Studying the operation principles, maintenance, and reliability computation for vibration linearization units» when studying the discipline «Reliability and operation of hydraulic units and drives»]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2003. 72 p.

Надійшла (received) 16.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андренко Павло Миколайович (Андренко Павел Николаевич, Andrenko Pavel Nikolaevich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 240-39-52; e-mail: andrenko1947@gmail.com.

Ємельянова Інга Анатоліївна (Ємельянова Инга Анатольевна, Emelyanova Inga Anatolyevna) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків; тел.: (050) 325-26-84; e-mail: emeljanova-inga@ukr.net.

Субота Дмитро Юрійович (Субота Дмитрий Юрьевич, Subota Dmytro Yuriyovich) – аспірант, Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків; тел.: (067) 787-94-27; e-mail: dm.subota@gmail.com.

Ю. В. БАТЫГИН, С. А. ШИНДЕРУК, Е. А. ЧАПЛЫГИН, Е. Ф. ЕРЁМИНА, А. В. БЕЗРОДНАЯ

**ПЛОСКИЙ КРУГОВОЙ СОЛЕНОИД МЕЖДУ МАССИВНЫМИ БИФИЛЯРНЫМИ
КАТУШКАМИ. РАСЧЁТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ**

Проведен анализ электромагнитных процессов в металле кругового соленоида-индуктора конечной толщины, размещенного между массивными многовитковыми катушками бифиляра с однонаправленными токами, получены расчётные соотношения. Предложенная физико-математическая модель позволяет исследовать влияние полей обмоток бифиляра на электромагнитные процессы в металле индуктора, что необходимо для формулирования условий практической работоспособности исследованной индукторной системы в целом. Найдена аналитическая пространственно-временная зависимость индуцированного тока при возбуждении системы гармоническими токами в массивных обмотках бифиляра. Полученные результаты дают возможность анализа и конкретных вычислений, направленных на поиск условий успешной технической реализации предложенной индукторной системы.

Ключевые слова: бифилярная катушка, индукторная система, электромагнитные процессы, однонаправленные токи, пространственно-временная зависимость, расчетная модель.

**Ю. В. БАТЫГИН, С. О. ШИНДЕРУК, Є. О. ЧАПЛИГІН, О. Ф. ЄРЬОМІНА, О. В. БЕЗРІДНА
ПЛАСКИЙ КРУГОВИЙ СОЛЕНОЇД МІЖ МАСИВНИМИ БІФІЛЯРНИМИ КОТУШКАМИ.
РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ**

Проведено аналіз електромагнітних процесів в металі кругового соленоїда-індуктора кінцевої товщини, розміщеного між масивними багатовитковими катушками біфіляра з односпрямованими струмами, отримані розрахункові співвідношення. Запропонована фізико-математична модель дозволяє досліджувати вплив полів обмоток біфіляра на електромагнітні процеси в металі індуктора, що необхідно для формулювання умов практичної працездатності дослідженої індукторної системи в цілому. Знайдена аналітична просторово-часова залежність індукваного струму при порушенні системи гармонічними струмами в масивних обмотках біфіляра. Отримані результати дають можливість аналізу і конкретних обчислень, спрямованих на пошук умов успішної технічної реалізації запропонованої індукторної системи.

Ключові слова: біфілярна катушка, індукторного система, електромагнітні процеси, односпрямовані струми, просторово-часова залежність, розрахункова модель.

**YU. V. BATYGIN, S. A. SHYNDERUK, E. A. CHAPLYGIN, E. F. YERYOMINA, A. V. BEZRIDNA
FLAT CIRCULAR SOLENOID BETWEEN MASSIVE BIFILAR COILS. ESTIMATED RATIOS**

The aim of this work is to obtain design relationships for the analysis of electromagnetic processes in real metal of a circular solenoid-inductor of finite thickness, located between massive multi-turn coils of a bifilar with unidirectional currents. This work is a consistent continuation of the author's ideas and research aimed at the development and creation of circuits of equipment for magnetic-pulse metal processing. The list of literary sources contains the author's works, where the investigated system was first proposed and, in the framework of accepted idealizations, the characteristics of the proceeding electromagnetic processes were calculated. This work significantly expands the possibilities for subsequent theoretical studies, since it offers a more adequate physical and mathematical model of a planar inductor system with massive windings of a bifilar coil, in the space between which there is a flat multi-turn circular solenoid. The proposed model allows us to study the effect of the fields of bifilar windings on electromagnetic processes in the metal of the inductor solenoid itself, which is necessary to formulate the conditions for the practical operability of the investigated inductor system as a whole. As a result of solving the boundary-value problem of electrodynamics, an analytical spatio-temporal dependence of the current induced in the metal of a planar circular inductor was found when the system was excited by harmonic currents in the massive windings of the bifilar. The obtained result allows analysis and specific calculations aimed at finding the conditions for successful technical implementation of the proposed inductor system.

Key words: bifilar coil, inductor system, electromagnetic processes, unidirectional currents, spatio-temporal dependence, calculation model.

Введение. *Бифиляр* – от латинского «bis» – дважды и «filum» – нить. *Бифилярная катушка* – это катушка индуктивности, предназначенная для накопления энергии магнитного поля, обмотка которой выполнена из двух параллельных изолированных проводников. В общем смысле к бифиляру можно отнести также любую электротехническую конструкцию, состоящую из двух отдельных *однослойных соленоидов*. Геометрически это могут быть *коаксиальные цилиндрические устройства* или плоские параллельные намотки, электрическое соединение которых может быть параллельным или последовательным в зависимости от назначения бифиляра. Следует отметить, что наряду с бифилярными используются также *трифилярные, тетрафилярные, пентафилярные катушки* и так далее, что соответствует намотке тройным, четверным и пятерным проводом.

Во всех случаях использования любых катушек индуктивности как элементов электротехнических систем возникает ряд вопросов, ответы на которые определяют выбор конкретной конструкции и освещают характеристики протекающих электромагнитных процессов.

Анализ последних исследований. Исторический приоритет в создании первых образцов бифилярных катушек принадлежит *Николе Тесла*, потому что научный уровень как у *Исаака Ньютона*. Автор предложения достаточно успешно использовал их для уменьшения реактивных параметров элементов электрических цепей [1]. Современные применения бифиляров, как правило, сконцентрированы в области создания мало индуктивных омических сопротивлений, в работах по созданию импульсных реле и блоков питания электронных устройств [2], а также в разработках датчиков различного назначения, позволяющих осуществить преобразование измеряемого естественного параметра в эквивалентный электрический сигнал [3, 4]. Необходимо отметить и

достижения в технологиях намотки для промышленного приборо- и электроаппаратостроения [5].

Из современных трудов по расчётам катушек разнообразной геометрии можно выделить научную монографию [6], где освещены эффективные и физически адекватные методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Значительное внимание аналитическим вычислениям характеристик электромагнитных процессов в элементарных составляющих техники сильных и сверхсильных полей уделяется авторами издания [7].

Для схем оборудования магнитно-импульсной обработки металлов, описанных в [8], практический интерес представляют исследования плоских индукторных систем, где многовитковый соленоид-индуктор размещается между ветвями бифилярной катушки. Следует отметить, что аналогичное с физической точки зрения устройство было предложено авторами работы [9]. Здесь, в качестве аналогов ветвей бифиляра, можно усмотреть плоские листовые экран и заготовку, между которыми находился источник импульсного магнитного поля. Не вдаваясь в подробности проведенного анализа и выводов, справедливых лишь для конкретной электродинамической структуры, отметим, что более близкими являются исследования, описанные в работах [10, 11]. Авторами впервые была предложена и проанализирована именно плоская система, где многовитковый индуктор размещён между ветвями бифилярной массивной катушки с однонаправленными токами. Недостатком принятой для расчёта физико-математической модели является пренебрежение влиянием металла собственно индуктора на протекающие электромагнитные процессы. Остаётся открытым вопрос о реальных условиях, при выполнении которых результирующая напряжённость возбуждаемого магнитного поля в плоскости размещения соленоид-индуктора будет равна нулю. Для ответа на поставленный вопрос без нарушения адекватности расчётной модели можно положить, что система возбуждается однонаправленными токами в обмотках бифиляра.

Постановка задачи. Цель настоящей работы – получение расчётных соотношений для анализа электромагнитных процессов в реальном металле кругового соленоида конечной толщины, размещённого между массивными многовитковыми катушками бифиляра с однонаправленными токами в плоской индукторной системе.

Научная новизна состоит в получении аналитических зависимостей для характеристик электромагнитных процессов в реальном металле индуктора плоской системы, размещённого между массивными обмотками бифилярной катушки. Конечной целью комплекса проводимых исследований является теоретическое и экспериментальное обоснование практической работоспособности исследуемой индукторной системы.

Расчётные соотношения. Сформулируем принятые допущения.

Расчетная модель исследуемой индукторной системы представлена на рис. 1.

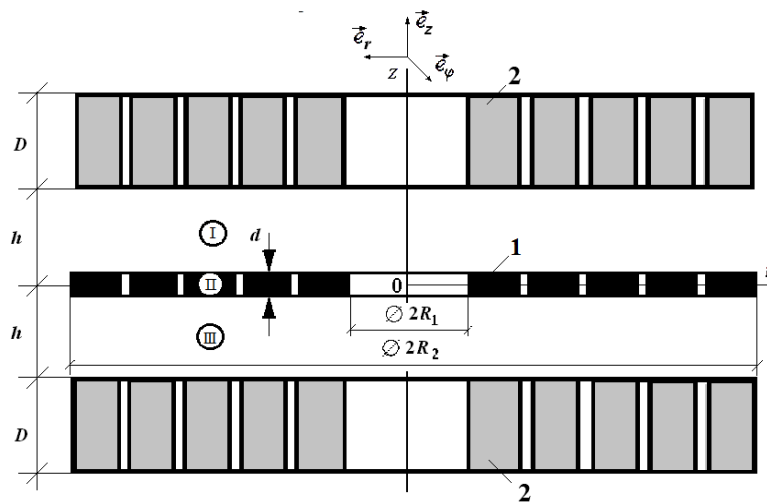


Рис. 1 – Расчётная модель индукторной системы:

1 – плоский многовитковый соленоид-индуктор; 2 – ветви бифиляра – плоские многовитковые соленоиды;
I, II, III – области с однородными электрофизическими характеристиками.

В принимаемой цилиндрической системе координат объект исследования обладает аксиальной симметрией, поэтому частные произведения $\partial \cdot [\cdot] / \partial \varphi = 0$, φ – азимутальный угол.

Расстояния между соленоидом-индуктором и ветвями обмотки бифиляра h достаточно малы, то есть $h \ll R_{1,2}$ ($R_{1,2}$ – внутренний и внешний радиусы обмотки индуктора-соленоида), что позволяет пренебречь краевыми эффектами.

Витки бифилярной катушки достаточно массивны ($D \gg R_{1,2}$) и выполнены из металла с высокой электропроводностью, они плотно прилегают друг к другу, так что их рабочие поверхности со стороны индуктора-соленоида можно считать сплошной поверхностью, выполненной из идеального проводника.

По рабочим поверхностям обмоток бифиляра протекает гармонический ток с однородной по радиусу линейной плотностью

$$j_{\varphi}(t, r, z = \pm h) = j_m \cdot \sin(\omega t) \cdot (\eta(r - R_1) - \eta(r - R_2)),$$

где $j_m = I_m / (R_2 - R_1)$ – амплитуда плотности, I_m – амплитуда тока, ω – циклическая частота, $\eta(r - R_{1,2})$ – ступенчатые функции Хэвисайда [12].

Витки соленоида-индуктора выполнены из металла конечной толщины d с конечной удельной электропроводностью γ и плотно прилегают друг к другу, так что их поверхности можно считать сплошными [7 – 9].

Временные параметры возбуждающего тока удовлетворяют квазистационарному приближению по Ландау $[\omega/c] \cdot l \ll 1$, где c – скорость света в вакууме, l – максимальный размер в системе [7, 8].

В пренебрежении токами смещения уравнения Максвелла ($E_{\varphi} \neq 0$, $H_{r,z} \neq 0$) для возбуждаемых компонент вектора электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, принимают вид [7, 8, 12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = \gamma \cdot E_{\varphi}(p, r, z); & (1) \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_{\varphi}(p, r, z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p, r, z); & (2) \\ \frac{\partial E_{\varphi}(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z); & (3) \end{cases}$$

где p – параметр преобразования Лапласа; $E_{\varphi}(p, r, z) = L\{E_{\varphi}(t, r, z)\}$; $H_{r,z}(p, r, z) = L\{H_{r,z}(t, r, z)\}$; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

В принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками.

В соответствии с рис. 1 можно считать, что таковыми являются:

I – пространство между поверхностями индуктора и верхней обмоткой бифиляра, $z \in \left[\frac{d}{2}, h \right]$;

II – область металла индуктора, $z \in \left[-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2} \right]$;

III – пространство между поверхностями индуктора и нижней обмоткой бифиляра, $z \in \left[-h, -\frac{d}{2} \right]$.

Условию ограниченности радиального распределения векторов электромагнитного поля при $r=0$ и $r=\infty$ удовлетворяет интегральное преобразование Фурье – Бесселя [12].

Так, для $E_{\varphi}(p, r, z)$ можно записать, что

$$E_{\varphi}(p, r, z) = \int_0^{\infty} E_{\varphi}(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (4)$$

где $E_{\varphi}(p, \lambda, z)$ – напряжённость электрического поля в пространстве Фурье – Бесселя; λ – параметр преобразования; $J_1(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка [12].

Из уравнений (1 – 3) с учётом интеграла (4) получим уравнения для лапласова изображения и изображения Фурье – Бесселя азимутальной компоненты напряжённости электрического поля и радиальной составляющей напряжённости магнитного поля в выделенных областях.

Область I, $z \in \left[\frac{d}{2}, h \right]$,

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot (A(p, \lambda) \cdot ch(\lambda z) + B(p, \lambda) \cdot sh(\lambda z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = A(p, \lambda) \cdot sh(\lambda z) + B(p, \lambda) \cdot ch(\lambda z); \end{cases} \quad (5)$$

где $A(p, \lambda)$, $B(p, \lambda)$ – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

Область II, $z \in \left[-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2} \right]$,

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{q(p, \lambda)} \cdot (C(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(q(p, \lambda) \cdot z) + D(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda) \cdot z)); \\ H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda) \cdot z) + D(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(q(p, \lambda) \cdot z), \end{cases} \quad (6)$$

где $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma}$, $C(p, \lambda)$, $D(p, \lambda)$ – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

$$\text{Область III, } z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = \frac{p\mu_0}{\lambda} (F(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda z) + G(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = F(p, \lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda z) + G(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda z), \end{cases} \quad (7)$$

где $F(p, \lambda)$, $G(p, \lambda)$ – неизвестные произвольные постоянные интегрирования.

Неизвестные произвольные постоянные интегрирования в выражениях (5) и (7) найдём из известных граничных условий:

– равенство нулю напряжённостей возбуждаемых электрических полей на идеально проводящих рабочих поверхностях обмоток бифиляра;

– равенство модуля напряжённости возбуждаемых магнитных полей при линейной плотности тока на идеально проводящих рабочих поверхностях обмоток бифиляра.

После выполнения необходимых тождественных преобразований находим следующие зависимости в полостях между поверхностями обмоток бифиляра и индуктора-соленоида.

$$\text{Область I, } z \in \left[\frac{d}{2}, h\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = -j_m \cdot j(p) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot f(\lambda) \cdot \operatorname{sh}(\lambda(h-z)); \\ H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \operatorname{ch}(\lambda(h-z)), \end{cases} \quad (8)$$

где $j(p)$ – *лапласово изображение* временной зависимости возбуждающего тока; $f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_1(\lambda r) r dr$ –

по определению образ его радиального распределения в пространстве Фурье – Бесселя.

$$\text{Область III, } z \in \left[-h, -\frac{d}{2}\right],$$

$$\begin{cases} E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot \operatorname{sh}(\lambda(h+z)); \\ H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{p\mu_0}{\lambda} \cdot \operatorname{ch}(\lambda(h+z)). \end{cases} \quad (9)$$

Из условий непрерывности тангенциальных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах раздела выделенных областей можно найти взаимосвязь между их геометрическими и электрофизическими характеристиками с параметрами интегральных преобразований, а также неизвестные произвольные постоянные интегрирования в выражении (6).

Математические преобразования требуют отдельных комментариев.

Итак, формальные соотношения взаимосвязи имеют следующий вид:

$$\frac{\operatorname{th}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}{q(p, \lambda)} = -\frac{\operatorname{th}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\lambda}. \quad (10)$$

Для неизвестных произвольных постоянных получаем, что

$$\begin{cases} C(p, \lambda) = 0; \\ D(p, \lambda) = -\frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\lambda\left(h - \frac{d}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}. \end{cases} \quad (11)$$

В выражении для $D(p, \lambda)$ следует учесть связь (10). В общем случае эта математическая операция представляется весьма проблематичной. Упростить использование (10) можно, если к допущениям, принятым в постановке задачи, дополнительно положить, что $\left(h - \frac{d}{2}\right) \rightarrow 0$. Отметим, что такое упрощение вполне согласуется с требованием минимально возможных изоляционных зазоров в реальных индукторных системах [7, 8].

С учётом приближённого равенства гиперболических тангенса и синуса для достаточно малых значений аргументов [12] в соотношении (10) и подстановки его в выражение для $D(p, \lambda)$ находим, что

$$D(p, \lambda) = j_m \cdot j(p) \cdot f(\lambda) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}. \quad (12)$$

Найденные произвольные постоянные $C(p, \lambda)$ и $D(p, \lambda)$ подставим в выражение (6) для напряжённости электрического поля в металле внутреннего индуктора. Полученный результат помножим на его удельную электропроводность γ .

После тождественных преобразований и введения новой пространственной переменной находим изображение плотности возбуждаемого тока.

$$j_i(p, \lambda, z) = j_m \mu_0 \gamma (p \cdot j(p)) f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}, \quad (13)$$

где $f(\lambda) = \int_{R_1}^{R_2} r \cdot J_1(\lambda r) dr$ – изображение Фурье – Бесселя для заданного радиального распределения возбуждающего тока на рабочих поверхностях обмоток бифиляра; $\zeta \in \left[-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2}\right]$ – поперечная координата в металле индуктора.

Далее, выполним в (11) обратное преобразование Фурье – Бесселя [12].

Получим, что

$$j_i(p, r, z) = j_m \mu_0 \gamma (p \cdot j(p)) \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)} \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (14)$$

Обратное преобразование Лапласа в выражении (11) с учётом амплитудно-временной гармонической зависимости возбуждающего тока сводится к определению оригинала следующего выражения:

$$(p \cdot j(p)) \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \cdot \zeta\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)} \Leftrightarrow j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) * F(t), \quad (15)$$

где

$$F(t) \Leftrightarrow F(p), \quad F(p) = \frac{\operatorname{sh}\left(\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)}\right)}{q(p, \lambda) \cdot \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \cdot \frac{d}{2}\right)}.$$

Согласно алгоритму обратного преобразования Лапласа дроби, находим [12], что

$$F(t) = \frac{d}{\tau} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot e^{p_k t}, \quad (16)$$

где $p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot \left(\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\lambda \cdot \frac{d}{2} \right)^2 \right)$; $\tau = \mu_0 \gamma \left(\frac{d}{2} \right)^2$ – характерное время диффузии магнитного поля в проводящий слой толщиной $\left(\frac{d}{2} \right)$ [7].

Свёртка функций в правой части выражения (16) с учётом зависимости (13) определяется интегралом вида [12]:

$$j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) * F(t) = j_m \cdot \left(\frac{d \cdot \omega}{\tau} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \int_0^t e^{p_k \cdot (t-x)} \cos(\omega \cdot x) dx. \quad (17)$$

Вычисляя интеграл в (17) для стационарного временного режима $t \gg \tau$, находим, что

$$(j_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) * F(t) \approx \left(2j_m \cdot \frac{\omega \cdot \mu_0 \gamma \left(\frac{d}{2}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \frac{\sin(\omega t - \psi_k)}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + (p_k \tau)^2}}. \quad (18)$$

где $\psi_k = \operatorname{arctg} \left(\frac{p_k}{\omega} \right)$ и отброшено слагаемое, убывающее как $\exp(p_0 t)$.

Выражение (18) подставим в (12), выполним необходимые тождественные преобразования и раскроем ранее принятые обозначения. В конечном итоге получим аналитическую пространственно-временную зависимость тока, индуцированного в металле индуктора:

$$j_i(t, r, z) = 2j_m \cdot \frac{(\omega \tau)}{\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\zeta}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right) \cdot \frac{(-1)^k \cdot \sin(\omega t - \psi_k)}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + \left(\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \left(\lambda \frac{d}{2} \right)^2 \right)^2}} \cdot J_1(\lambda r) \lambda d \lambda. \quad (19)$$

Результат (19) является обобщённым аналитическим решением поставленной задачи, позволяющим проанализировать электромагнитные процессы в реальном металле плоского кругового индуктора, размещённого между массивными обмотками бифилярной катушки. В практических вычислениях выражение (19) трансформируется в несколько аналитических зависимостей, каждая из которых описывает протекающие процессы соответственно условиям выполняемых расчётов.

Перспективы дальнейших исследований. Весьма перспективным в направлении дальнейших исследований видится теоретический анализ электромагнитных процессов в плоских индукторных системах, где индукторы-соленоиды с реальными электрофизическими параметрами обмоток размещают между ветвями массивных бифилярных катушек, с последующим переходом к экспериментам для обоснования практической дееспособности исследованной индукторной системы.

Выводы. Получена аналитическая пространственно-временная зависимость тока, индуцированного в металле плоского кругового индуктора, размещённого между ветвями бифиляра – массивными идеально проводящими многовитковыми катушками.

Полученные результаты позволяют проводить анализ и конкретные вычисления, направленные на поиск условий успешной технической реализации предложенной индукторной системы.

Список литературы

1. Герасимов В. Г., Кузнецов Э. В., Николаева О. В. Электротехника и электроника. Электрические и магнитные цепи. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – 288 с.
2. Шарипов В. М., Полищук Е. С. Мир электроники. Датчики: справочное пособие. – М.: Техносфера, 2012. – 624 с.
3. Тесла Н. Лекции и статьи. – М.: Изд. «Tesla Print», 2003. – 386 с.

4. Ziegler S., Woodward R. C., H. H. C., Borle L. J. Current Sensing Techniques : A Review // IEEE Sensors Journal. – 2009. – Vol. 9. – No. 4. – P. 354 – 376. DOI: 10.1109/JSEN.2009.2013914.
5. Ларин В. П. Технология намотки в приборо- и электроаппаратостроении. Уч. пособие. – СПб. : Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2003. – 56 с.
6. Буль О. В. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. – М. : Академия, 2006. – 336 с.
7. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation. – Berlin : Walter de Gruyter, 2014. – 439 p.
8. Batygin Yu. V., Barbashova M. V., Sabokar O. S. Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies – Switzerland : Springer, 2018. – 94 p. DOI : 10.1007/978-3-319-74570-1.
9. Batygin Yu. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals //Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – № 214 (2). – pp. 390 – 401. DOI : 10.17877/DE290R-945.
10. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Коряк А. А., Довгий А. В. Цилиндрическая индукторная система с внешним бифилярным соленоидом. Расчётные соотношения // Вісник Хмельницького національного університету. – 2019. – № 5 (277) – С. 13 – 18.
11. Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Ерёміна Е. Ф., Борисенко Б. В. Цилиндрическая индукторная система с внешним бифилярным соленоидом. Анализ электромагнитных процессов // Вісник Хмельницького національного університету. – 2019. – № 6 – С. 12 – 19.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М. : «Наука», 1973. – 831 с.

References (transliterated)

1. Gerasimov V. G., Kuznetsov Je. V., Nikolaeva O. V. *Elektrotehnika i elektronika. Elektricheskie i magnitnye tsepi* [Electrical and Electronics. Electric and magnetic circuits]. – Moscow, Energoatomizdat Publ., 1996. 288 p.
2. Sharipov V. M., Polishhuk E. S. *Mir elektroniki. Datchiki : spravocnoe posobie* [The world of electronics. Sensors: reference guide]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2012. 624 p.
3. Tesla N. *Lektsii i stat'i* [Lectures and articles]. Moscow, «Tesla Print» Publ., 2003. 386 p.
4. Ziegler S., Woodward R. C., H. H. C., Borle L. J. Current Sensing Techniques : A Review. *IEEE Sensors Journal*. 2009, vol. 9, no. 4, pp. 354–376. DOI: 10.1109/JSEN.2009.2013914.
5. Larin V. P. *Tekhnologiya namotki v priboro- i elektroapparatostroyenii* [Winding technology in instrument and electrical engineering]. St. - Petersburg, St. - Petersburgskiy gosudarstvennyy universitet aerokosmicheskogo priborostroyeniya Publ., 2003. 56 p.
6. Bul' O. V. *Metody rascheta magnitnykh sistem elektricheskikh apparatov* [Methods of calculation of electrical apparatus magnetic systems]. Moscow, Akademiya Publ., 2006. 336 p.
7. Shneerson G. A., Dolotenko M. I., Krivosheev S. I. *Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Field Generation*. Berlin, Walter de Gruyter, 2014. 439 p.
8. Batygin Yu. V., Barbashova M. V., Sabokar O. S. *Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies*. Switzerland : Springer, 2018. 94 p. DOI : 10.1007/978-3-319-74570-1.
9. Batygin Yu. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014, no. 214 (2), pp. 390–401. DOI : 10.17877/DE290R-945.
10. Batygin Yu. V., Shinderuk S. A., Chaplygin E. A., Koryak A. A., Dovgy A. V. Tsilindricheskaya induktornaya sistema s vneshnim bifilyarnym solenoidom. Raschyotnye sootnosheniya [Cylindrical inductor system with an external bifilar solenoid. Estimated Ratios]. *Visnyk Khmel'nits'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of Khmelnytskyi National University]. 2019, no. 5 (277), pp. 13–18.
11. Batygin Yu. V., Shinderuk S. A., Chaplygin E. A., Eryomina E. F., Borisenko B. V. Cilindricheskaya induktornaya sistema s vneshnim bifilyarnym solenoidom. Analiz elektromagnitnykh protsessov [Cylindrical inductor system with an external bifilar solenoid. Analysis of electromagnetic processes]. *Visnyk Khmel'nits'kogo natsional'nogo universitetu* [Bulletin of Khmelnytskyi National University]. 2019, no. 6, pp. 12–19.
12. Korn G., Korn T. *Spravocnik po matematike* [Math reference]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 831 p.

Поступила (received) 11.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Батыгин Юрій Вікторович (Батыгин Юрий Викторович, Batygin Yuriy Viktorovich) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

Шиндерук Світлана Олександрівна (Шиндерук Светлана Александровна, Shynderuk Svitlana Oleksandrivna) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

Чаплыгин Євген Олександрович (Чаплыгин Евгений Александрович, Chaplygin Evgen Oleksandrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

Єрёміна Олена Федорівна (Ерёміна Елена Фёдоровна, Yeryomina Olena Fedorivna) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 248-52-75; e-mail: elena.yeryomina@gmail.com.

Безрідна Олександра Володимирівна (Безродная Александра Владимировна, Bezridna Oleksandra Volodimirivna) – студентка, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; e-mail: alex25kh@gmail.com.

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ**УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЁННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ. АКТИВНАЯ ВИБРОЗАЩИТА**

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и присоединённой к ней сосредоточенной массы. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние сосредоточенной массы моделируется дополнительной нестационарной сосредоточенной силой (реакцией), приложенной к пластине в точке контакта вместо массы. Управление колебаниями осуществляется с помощью введения дополнительной (управляющей) нагрузки, закон изменения во времени которой подлежит определению. Излагаются результаты решения обратной задачи идентификации управляющего воздействия. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова. Приведены примеры расчетов по определению управляющих воздействий в задачах активного управления нестационарными колебаниями пластины с дополнительной сосредоточенной массой, а также их гашения.

Ключевые слова: пластина средней толщины, сосредоточенная масса, нестационарное нагружение, управление нестационарными колебаниями, обратная задача, интегральные уравнения Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

О. В. ВОРОПАЙ**УПРАВЛІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМИ КОЛИВАННЯМИ ПЛАСТИНИ З ПРИЄДНАНОЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ МАСОЮ. АКТИВНИЙ ВІБРОЗАХИСТ**

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-обпертої по контуру, та приєднаної до неї зосередженої маси. На пластину діє нестационарне навантаження, яке збуджує коливання. Вплив зосередженої маси моделюється додатковою нестационарною зосередженою силою (реакцією), яка прикладена до пластини в місці контакту замість маси. Управління коливаннями здійснюється за допомогою додаткового (керуючого) навантаження, закон зміни у часі якого підлягає визначенню. Викладаються результати розв'язання оберненої задачі ідентифікації керуючого впливу. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова. Наведені приклади розрахунків визначення керуючих навантажень в задачах активного управління нестационарними коливаннями пластини з додатковою зосередженою масою, а також їх гасіння.

Ключові слова: пластина середньої товщини, зосереджена маса, нестационарне навантаження, управління нестационарними коливаннями, обернена задача, інтегральні рівняння Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

A. V. VOROPAY**CONTROLLING NONSTATIONARY VIBRATIONS OF A PLATE WITH ATTACHED CONCENTRATED MASS. ACTIVE VIBRATION PROTECTION**

The mechanical system consists of a rectangular isotropic plate of medium thickness, hinged on the contour, and attached to it concentrated mass. The plate is impacted by nonstationary loading, causing vibrations. The influence of the concentrated mass is simulated by additional nonstationary concentrated force (reaction) applied to the plate at contact point instead of the mass. The vibrations are controlled by inserting additional control force, which variation in time should be determined. The results of solving the controlling force identification inverse problems are presented. The research is reduced to an analysis of the Volterra integral equation system, which is solved numerically using Tikhonov regularizing algorithm. Computational examples of determining control action in problems of controlling nonstationary vibrations of a plate with additional concentrated mass and vibration suppression are given.

Key words: plate of medium thickness, concentrated mass, nonstationary loading, control of nonstationary vibration, inverse problem, Volterra integral equations, Tikhonov regularization algorithm.

Введение и анализ последних исследований. Активное управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. В этом случае задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые могут быть определены из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной *системы управления* и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований. Зачастую *задачи управления* параметрами напряженно деформированного состояния или нестационарными колебаниями посвящены «гашению» колебаний. Одним из наиболее простых и распространенных методов гашения колебаний является использование амортизаторов. Применение амортизаторов или других видов гасителей может относиться как к системам *пассивной виброзащиты*, так и *активной*, в зависимости от того, имеются ли возможности управления этими устройствами.

Обратим внимание на некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций.

Укажем, что в работе [1] описан аналитический метод нахождения частот колебаний механической системы, состоящей из изотропной прямоугольной пластины, а также сосредоточенной массы, пружины и гасителя колебаний, присоединённых к пластине в некоторых точках. В этой работе для описания колебаний пластины также используются ряды ортогональных функций.

В публикации [2] описано численное решение задачи о свободных колебаниях укрепленных панелей с произвольным набором граничных условий, а также несущих множественные сосредоточенные массы и присоединенные жесткости. Такие панели являются основными составляющими элементами кораблей и морских сооружений. Решение основано на методе предполагаемых мод, в качестве функций приближения используются характеристические ортогональные многочлены, обладающие свойствами *балочных функций Тимошенко* и удов-

© А. В. Воропай, 2019

летворяющие заданным краевым условиям. Для пластин применяется *теория Миндлина*, а для ребер жесткости – *теория балок Тимошенко*. Соотношения для собственных значений получаются с помощью *уравнения движения Лагранжа*. Разработан численный метод для анализа свободных колебаний неизолированных плит и жестких панелей, несущих сосредоточенные массы и локально поддерживаемых опорами или пружинами. В работе [3] описаны дальнейшие исследования авторов, в которых на основе предложенного ими метода рассматриваются также задачи о вынужденных колебаниях.

В инженерной практике массивная машина может быть размещена на плите, поддерживаемой балками, которые рассматриваются как упругие граничные условия. Вибрация плит из-за периодического возбуждения массивным оборудованием может вызывать повреждение зданий и являться источником шума. В работе [4] представлен аналитический подход к анализу вибраций прямоугольной пластины, несущей массивный станок с однородными упругими опорами. Машина моделируется распределенной массой. Поперечные перемещения точек пластины определяются как *суперпозиция двойных косинус-рядов Фурье* и нескольких дополнительных функций. Все неизвестные *коэффициенты Фурье* рассчитываются на основе *метода Рэлея – Ритца*. Для проверки предложенного подхода представлены несколько числовых примеров с классическими граничными условиями. Результаты показывают хорошее соответствие между аналитическими результатами и результатами, основанными на анализе *методом конечных элементов (ANSYS)*. Исследовано влияние размера пластины, местоположения машины и жесткости опоры.

Отдельно выделена статья [5], в которой описано аналитико-численное решение для задачи нестационарного нагружения механической системы, состоящей из прямоугольной шарнирно-опертой пластины, и присоединенной к ней сосредоточенной массы с использованием *интегральных уравнений Вольтерра*. Укажем, что в настоящей работе используется аналогичный подход.

В работе [6] рассмотрена механическая система, состоящая из тонкой пластины и присоединенных к ней дискретных масс в виде накладок. Проанализировано влияние толщины и площади пятна контакта накладок на динамическое поглощение вибрации. Показано, что несколько дискретных масс лучше поглощают вибрации во всем частотном диапазоне 0 – 1000 Гц. Кроме того отмечается, что существует оптимальный вес дискретной массы для оптимального поглощения вибраций и оптимальная толщина накладок для данной области, а также оптимальная площадь для данной толщины, в этом случае накладки ведут себя оптимально как динамические поглотители вибраций.

В статье [7] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

Гашение колебаний можно рассматривать как частный случай *управления колебаниями*, когда целью управления является минимизация амплитуд перемещений/деформаций или их полное устранение. В *теории автоматического управления (ТАУ)* часто рассматриваются задачи подобного рода. Известны основные схемы автоматического управления/регулирования (САУ или САР): замкнутая САУ (управление с обратной связью) и разомкнутая САУ.

Замкнутые САУ обладают рядом преимуществ, которые подробно рассмотрены в ТАУ. Такие схемы активно используются в настоящее время и являются основой для создания современных систем управления реального времени. Однако, при управлении высокоскоростными процессами (например, нестационарными колебаниями) построение замкнутых САУ является серьезной задачей, требующей также наличия сложного и дорогостоящего оборудования при построении обратной связи.

В статьях [8, 9] для активного управления колебаниями гибких прямоугольных пластин используется разработанный авторами подход с использованием ТАУ. Управление осуществляется на основе динамического многоканального контроллера, использующего результаты моделирования колебаний пластины, выполненные с помощью метода конечных элементов.

В случае управления нестационарными колебаниями, вызываемыми импульсными (ударными) нагрузками, характер изменения, во времени которых является повторяемым и может быть отдельно изучен на основании решения задач идентификации, возможно построение более дешевых разомкнутых САУ.

Для решения подобных задач целесообразно использовать следующий подход – управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения интегральных уравнений или их систем, к которым могут быть сведены обратные нестационарные задачи.

В работах [10, 11] детально описана возможность идентификации внешних нестационарных воздействий, вызывающих колебания прямоугольных пластин.

Выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований.

В работе [12] представлено решение задачи об управлении нестационарными колебаниями в некоторой точке пластины прямоугольной формы с помощью введения вспомогательной (управляющей) нагрузки.

В данной работе рассматривается возможность управления нестационарными колебаниями механических систем, в которых имеются прямоугольные пластины при импульсном поперечном нагружении. Искомое решение начально-краевой задачи комбинируется из решения, отвечающего воздействию на пластины заданной системы возмущающих нагрузок, и решения, которое соответствует воздействию на пластину дополнительной (управляющей) системы нагрузок. На финишном этапе построения решения используется сглаживающий *функционал А. Н. Тихонова* [13].

Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). Предполагается, что изменение перемещения во времени сосредоточенной массы полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где находится масса, то есть $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы. Требуется управлять нестационарными колебаниями в точке пластины $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$, так чтобы удовлетворить требуемому критерию (заранее сформулированному). В качестве критерия управления может быть выбрано уменьшение амплитуд прогиба, то есть изменение прогиба пластины в точке управления стремится к нулю $w_S(t) \rightarrow 0$ (гашение колебаний) или же колебания в точке управления должны отвечать некоторому требуемому закону изменения во времени $w_S(t) = w_C(t)$ (например, иметь вид синусоиды).

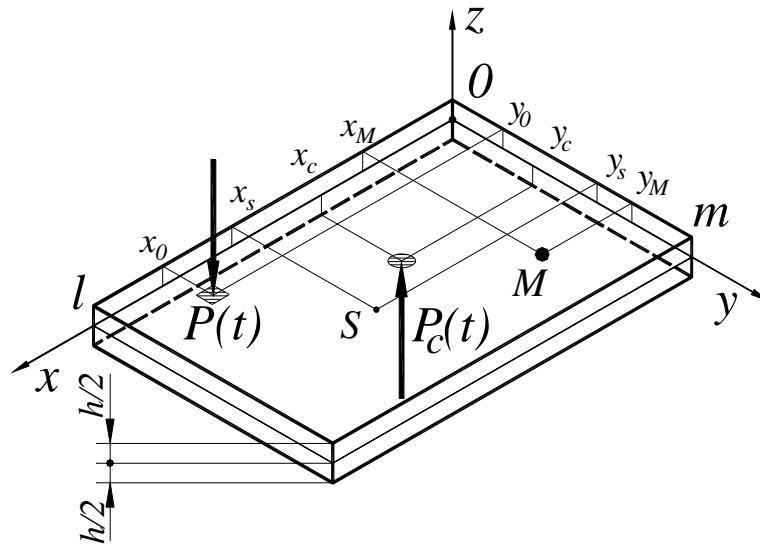


Рис. 1 – Рассматриваемая схема управления нестационарными колебаниями пластины и сосредоточенной массы.

Укажем, что задача решается в общей постановке, когда точки управления (x_S, y_S) и нахождения сосредоточенной массы (x_M, y_M) не совпадают, однако полученное решение будет справедливо и для частного случая, когда точка управления совпадает с точкой присоединения сосредоточенной массы $(x_M = x_S, y_M = y_S)$.

Управление осуществляется посредством приложения к пластине дополнительной (управляющей) нагрузки $P_C(t)$. Задача управления заключается в идентификации закона изменения во времени этой нагрузки $P_C(t)$. Таким образом, для определения закона изменения во времени управляющего воздействия требуется решить обратную нестационарную задачу для механической системы, состоящей из пластины и массы.

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузок (возмущающей и управляющей) и координаты сосредоточенной массы произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина сосредоточенной массы.

Решение задачи управления. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений, которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + P_c(x, y, t) + R(x, y, t); \\ DV^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$ – приведенный модуль сдвига; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; ψ_x ,

ψ_y – углы поворота нормали; ρ , E , ν – упругие постоянные материала пластины; t – время;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \phi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что:

$P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная);

$P_c(x, y, t)$ – управляющее воздействие на пластину (сосредоточенная или распределенная нагрузка);

$R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – реакция пластины на воздействие сосредоточенной массы M .

Описание решения подобных систем и итоговые соотношения приведены в [5].

Для нахождения перемещения сосредоточенной массы $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$, можно записать два интегральных соотношения, рассматривая по отдельности динамику точки пластины и сосредоточенной массы:

$$\begin{cases} w_M(t) = \int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau - \int_0^t P_c(\tau)K_{P_c}(t-\tau)d\tau - \int_0^t R(\tau)K_R(t-\tau)d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_M(t) = \int_0^t R(\tau)\frac{t-\tau}{M}d\tau. \end{cases} \quad (2)$$

После подстановки $w_M(t)$ из второго уравнения в первое система (2) может быть преобразована к следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^t R(\tau)\left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M}\right]d\tau = \int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau - \int_0^t P_c(\tau)K_{P_c}(t-\tau)d\tau. \quad (3)$$

Интегральное уравнение (3) после дискретизации можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{A}_{RM}\mathbf{R} = \mathbf{A}_{PM}\mathbf{P} - \mathbf{A}_{PcM}\mathbf{P}_c, \quad (4)$$

где вектор \mathbf{P} – соответствует известной функции $P(t)$; $\mathbf{P}_c = P_c(t)$; \mathbf{R} – неизвестный вектор, соответствующий $R(t)$; матрицы \mathbf{A}_{RM} , \mathbf{A}_{PM} и \mathbf{A}_{PcM} отвечают соответствующим ядрам уравнения (3).

Матричное уравнение (4) справедливо в случае, когда управляющее воздействие $P_c(t)$ известно. Однако при решении задач управления целью является определение управляющего воздействия. То есть в уравнение (4) входит две неизвестных функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Для их определения необходимо в уравнении (4) перенести неизвестное слагаемое в левую часть уравнения и дополнить его выражением для критерия управления, в которое также войдут две искомые функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Таким образом получается система двух интегральных уравнений Вольтерра, записанная для двух точек пластины – точке, в которой расположена присоединённая сосредоточенная масса $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$, и точке, в которой осуществляется управление согласно требуемого критерия $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$. В матричном виде систему можно записать:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{PM}\mathbf{P} \\ \mathbf{w}_C - \mathbf{A}_{PS}\mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицы, соответствующие ядрам, входящим в интегралы искомых функций, обозначены \mathbf{A}_{ij} , так что индекс $j=1$ отвечает $P_c(t)$; $j=2$ – $R(t)$; $i=1$ – точке (x_M, y_M) ; $i=2$ – (x_S, y_S) ; вектор \mathbf{w}_C – соответствует требуемому критерию управления $w_C(t)$. Причем для случая гашения колебаний можно принять $w_C(t) = -w_S(t)$, тогда $w_C(t) + w_S(t) = 0$.

В результате численно-аналитического решения (5) определяются искомые зависимости $R(t)$ и $P_c(t)$. Решение указанной системы уравнений в силу некорректности осуществляется с использованием *регуляризирующего алгоритма Тихонова* [13].

Существенное влияние на «качество» управления оказывает параметр регуляризации α , содержащийся в регуляризирующем алгоритме Тихонова. В задачах управления этот параметр определяется на основе минимизации по α функционала качества, соответствующего приближению полученных значений прогиба к требуемым значениям критерия:

$$M^\alpha[P_c] = \left\| w_C - A_p P + A_R R^\alpha + A_{Pc} P_c^\alpha \right\|. \quad (6)$$

Также при выборе параметра регуляризации α необходимо вводить и учитывать дополнительные ограничения для управляющих воздействий (ограничения по амплитуде, времени или мощности).

Примеры численных расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью

xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка равномерно распределена по прямоугольной области со сторонами Δx и Δy соответственно и центром (x_0, y_0) , а управляющая нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r с центром (x_C, y_C) . При вычислениях принимались следующие значения:

- модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7890$ кг/м³;
- толщина пластины $h = 0.4$ м; длина $l = 0.6$ м; ширина $m = 0.4$ м;
- число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 2 приведена схема расположения точек при управлении колебаниями. Предполагается, что необходимо обеспечить требуемый закон изменения перемещения в точке пластины $w_C(t)$ в виде синусоиды. Координаты точек:

- $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.1$ м – приложения возмущающей нагрузки;
- $x_C = 0.2$ м, $y_C = 0.15$ м – приложения управляющей нагрузки;
- $x_S = 0.3$ м, $y_S = 0.2$ м – в которой осуществляется управление;
- $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – присоединения сосредоточенной массы.

На рис. 3 показаны графики изменения функционалов «качества» (6) – кривая 1 и «суммарной нагрузки» – кривая 2 в зависимости от параметра регуляризации α . Укажем, что значение параметра регуляризации для удобства отложено на логарифмической шкале.

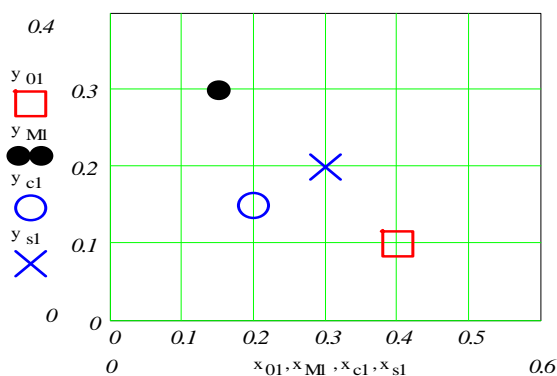


Рис. 1 – Схема нагружения пластины с массой.

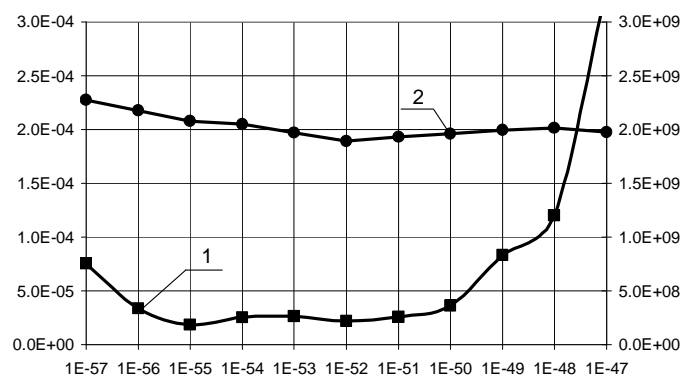


Рис. 2 – К выбору параметра регуляризации.

Из рис. 3 видно, что параметр регуляризации желательно брать меньше $\alpha = 10^{-49}$, а наилучшее «качество» достигается при $\alpha = 10^{-55}$. Однако, можно выделить ещё локальный минимум функционала (6) при $\alpha = 10^{-52}$, который соответствует минимуму функционала суммарной нагрузки и соответствует меньшим значениям управляющего воздействия $P_c(t)$.

При практической реализации активного управления колебаниями целесообразно при выборе параметра регуляризации учитывать не только функционал качества, но и минимизировать «суммарное воздействие», то есть необходимо выбирать компромиссное решение.

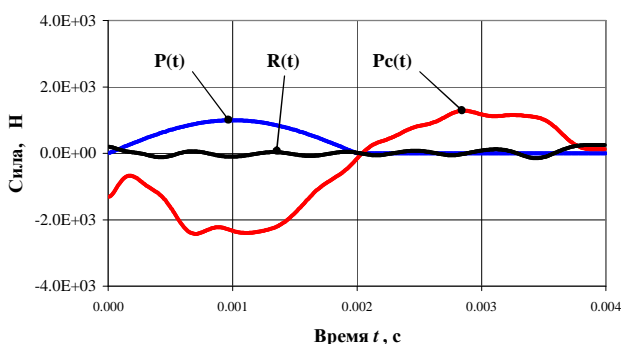


Рис. 4 – Определение реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия при $\alpha = 10^{-52}$.

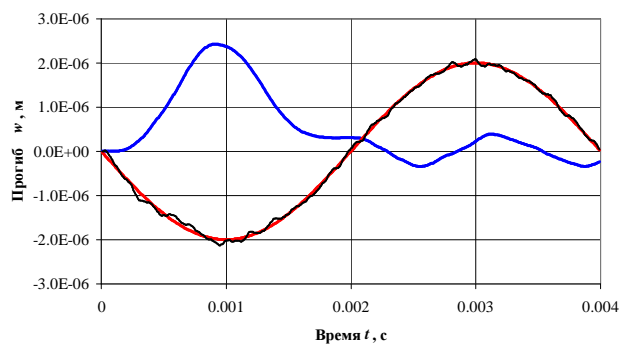


Рис. 5 – Результаты управления при $\alpha = 10^{-52}$.

На рис. 4 показаны изменения нагрузок $P(t)$, $P_c(t)$, $R(t)$:

– возмущающая нагрузка $P(t)$ изменяется в виде полуволны синусоиды с длительностью импульса $2 \cdot 10^{-3}$ секунды;

– определенные в результате решения СИУ (5) значения управляющего воздействия $P_c(t)$ (имеет амплитуды, превышающие возмущающее воздействие) и реакции массы $R(t)$ (величина значительно меньше, чем эквивалентные силы $P(t)$ и $P_c(t)$, измеряемые в ньютонах).

Укажем, что для удобства анализа результатов величины возмущающей и управляющей нагрузок, а также реакции сосредоточенной массы, приведены в виде эквивалентных сил, измеряемых в ньютонах (равномерно распределенные нагрузки, измеряемые в паскалях, были умножены на соответствующие площади контакта, которые предполагались неизменными).

На рис. 5 показаны три кривые изменения перемещения в точке управления:

– требуемое перемещение в точке управления – целевая функция для управления (синусоидальное изменение);

– перемещение в точке управления при воздействии только возмущающей нагрузки;

– результат управления при воздействии возмущающей нагрузки и управляющего воздействия (тонкая кривая – практически совпадает с требуемой кривой, но имеет незначительные отклонения).

Далее представлены результаты расчетов аналогичной задачи, за исключением того, что критерием является гашение колебаний.

Описание рис. 6, рис. 7 и рис. 8 аналогично описанию рис. 3, рис. 4 и рис. 5, соответственно.

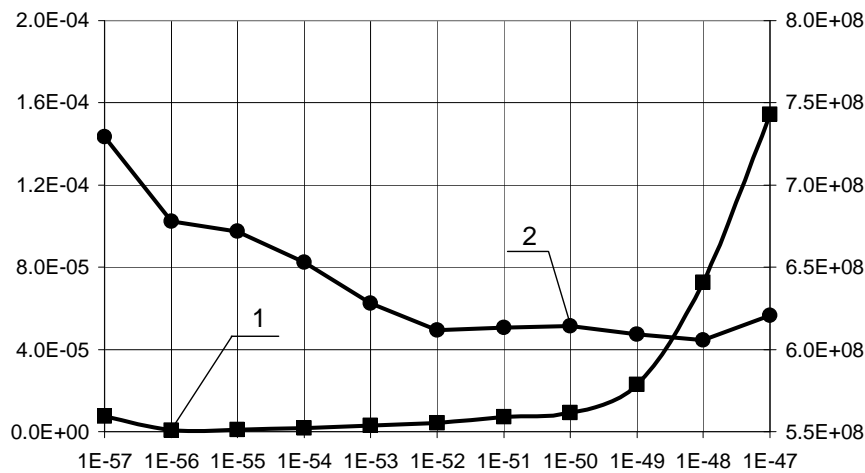


Рис. 6 – К выбору параметра регуляризации.

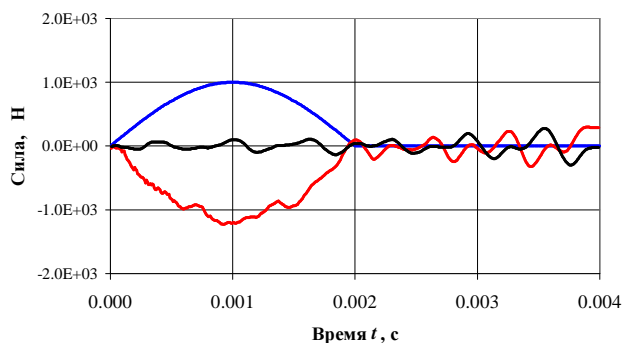


Рис. 7 – Реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия при $\alpha = 10^{-56}$.

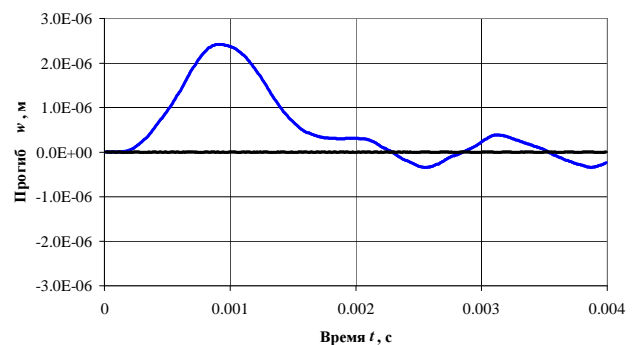


Рис. 8 – Результаты управления при $\alpha = 10^{-56}$.

Выводы. Показана возможность управления нестационарными колебаниями механической системы, состоящей из сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной шарнирно опёртой пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки. На основе представленных результатов можно сделать вывод о том, что предложенная схема управления и алгоритм определения управляющего воздействия при решении обратной задачи для механической системы являются эффективными и достаточно устойчивыми.

Список литературы

1. Das Y. C., Navaratna D. R. Vibrations of a Rectangular Plate With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot. // *J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30 (1). – P. 31 – 36. doi:10.1115/1.3630102.
2. Dae Seung Cho, Byung Hee Kim, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Nikola Vladimird. Free vibration analysis of stiffened panels with lumped mass and stiffness attachments // *Ocean Engineering.* – 2016. – Vol. 124. – P. 84 – 93.
3. Dae Seung Cho, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Byung Hee Kim, Nikola Vladimird. Free and forced vibration analysis of arbitrarily supported rectangular plate systems with attachments and openings // *Engineering Structures.* – 2018. – Vol. 171. – P. 1036 – 1046. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.032>.
4. Lingzhi Wang, Zhitao Yan, Zhengliang Li, Zhimiao Yan. Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Massive Machine with Elastic Supports // *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* – 2016. – Vol. 16. – P. 1550069. – Issue 10. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500698>.
5. Воронай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой // Вестник национального технического университета «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – №47. – С. 42 – 48.
6. Vinayak Ranjan, Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Thin-Walled Structures.* – 2005. – Vol. 43. – Issue 10. – P. 1513 – 1533. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2005.07.001>.
7. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures.* 2005. – Vol. 43. – P. 1513 – 1533.
8. Yang Jingyu, Chen Guoping. Computed Force-Based Sliding Mode Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.* – 2012. – Vol. 6. – Number 1. – P. 385 – 390. <https://doi.org/10.1166/asl.2012.2207>.
9. Yang Jingyu, Chen Guoping. Robust Nominal Model-Based Sliding Mode Robust Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate // *Applied Mathematics & Information Sciences.* – 2013. – Vol. 7(2L). – P. 671 – 678. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/072L42>.
10. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate // *International Applied Mechanics.* – 2003. – Vol. 39(10). – P. 1199 – 1204.
11. Voropai (Voropay) A. V., Yanyutin E. G. Identification of several impulsive loads on a plate // *International Applied Mechanics.* – 2007. – Vol. 43(7). – P. 780 – 785.
12. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – Vol. 41. – P. 4919 – 4926.
13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

References (transliterated)

1. Das Y. C., Navaratna D. R. Vibrations of a Rectangular Plate With Concentrated Mass, Spring, and Dashpot. *J. Appl. Mech.* 1963, vol. 30 (1), pp. 31–36. doi:10.1115/1.3630102.
2. Dae Seung Cho, Byung Hee Kim, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Nikola Vladimird. Free vibration analysis of stiffened panels with lumped mass and stiffness attachments. *Ocean Engineering.* 2016, vol. 124, pp. 84–93.
3. Dae Seung Cho, Jin-Hyeong Kim, Tae Muk Choi, Byung Hee Kim, Nikola Vladimird. Free and forced vibration analysis of arbitrarily supported rectangular plate systems with attachments and openings. *Engineering Structures.* 2018, vol. 171, pp. 1036–1046. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.12.032>.
4. Lingzhi Wang, Zhitao Yan, Zhengliang Li, Zhimiao Yan. Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Massive Machine with Elastic Supports. *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 2016, vol. 16, issue 10, 1550069. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500698>.
5. Voropay A. V. Nestsionarnye kolebaniya plastiny s prisoedinennoy sosredotochennoy massoy [Non-stationary vibrations of a plate with attached concentrated mass]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2008, no. 47, pp. 42–48.
6. Vinayak Ranjan, Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers. *Thin-Walled Structures.* 2005, vol. 43, issue 10, p. 1513–1533. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2005.07.001>.
7. Yang Jingyu, Chen Guoping. Computed Force-Based Sliding Mode Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.* 2012, vol. 6, no. 1, pp. 385–390. <https://doi.org/10.1166/asl.2012.2207>.
8. Yang Jingyu, Chen Guoping. Robust Nominal Model-Based Sliding Mode Robust Control for Vibration of Flexible Rectangular Plate. *Applied Mathematics & Information Sciences.* 2013, vol. 7(2L), pp. 671–678. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/072L42>.
9. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate. *International Applied Mechanics.* 2003, vol. 39(10), pp. 1199–1204.
10. Yanyutin E. G., Voropaj (Voropay) A. V. Identification of the impulsive load on an elastic rectangular plate. *International Applied Mechanics.* 2003, vol. 39(10), pp. 1199–1204.
11. Voropai (Voropay) A. V., Yanyutin E. G. Identification of several impulsive loads on a plate. *International Applied Mechanics.* 2007, vol. 43(7), pp. 780–785.
12. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, vol. 41, pp. 4919–4926.
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyarizuyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 06.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович (Voropay Alexey Valerievich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-52; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО

КРИТЕРИЙ СОХРАНЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Статья посвящена изучению связи между непрерывностью функции и ее второй производной, заданных на оси в некоторой топологии \mathfrak{T} , которая слабее естественной топологии \mathfrak{T}_0 . Рассматриваются дважды дифференцируемые абстрактные непрерывные на оси в некоторой более слабой топологии (в частности почти автоморфные или почти периодические) функции со значениями в банаховом пространстве. В работе представлены критерии \mathfrak{T} -непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) второй производной в зависимости от \mathfrak{T} -непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) самой функции. Для первой производной предполагается только ее существование, обеспечивающее существование второй производной в естественной топологии на оси.

Ключевые слова: непрерывность, равномерная непрерывность, квазиравномерная непрерывность, компактность, почти периодичность, почти автоморфность, дифференцируемость функции, абстрактная функция.

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО

КРИТЕРІЙ ЗБЕРЕЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОСТІ ДРУГОЇ ПОХІДНОЇ ВІД МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Статья посвящена изучению связи между непрерывностью функции и ее второй производной, заданных на оси в некоторой топологии \mathfrak{T} , которая слабее естественной топологии \mathfrak{T}_0 . Рассматриваются дважды дифференцируемые абстрактные непрерывные на оси в некоторой более слабой топологии (в частности почти автоморфные или почти периодические) функции со значениями в банаховом пространстве. В работе представлены критерии \mathfrak{T} -непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) второй производной в зависимости от \mathfrak{T} -непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) самой функции. Для первой производной предполагается только ее существование, обеспечивающее существование второй производной в естественной топологии на оси.

Ключові слова: неперервність, рівномірна неперервність, квазірівномірна неперервність, компактність, майже періодичність, майже автоморфність, друга похідна, абстрактна функція.

S. D. DIMITROVA-BURLAYENKO

CRITERION FOR PRESERVING ALMOST PERIODICITY OF THE SECOND DERIVATIVE OF AN ALMOST PERIODIC FUNCTION

A question on preserving the continuity of a function in the given topology plays an important role in the theory of almost periodic and almost automorphic functions. As known, the almost periodic, almost automorphic functions are respectively uniformly continuous, compact continuous functions in some weaker topology \mathfrak{T} than the natural topology \mathfrak{T}_0 defined on the numerical axis. The present work belongs to this field and is devoted to the study of the relationship between the continuity of a function and its second derivative, defined on an axis in a certain topology, which is weaker than the natural topology. We consider a twice-differentiable abstract continuous function on the axis in some weaker topology (in particular, an almost automorphic or almost periodic function) with values in a Banach space. This study presents the criteria of \mathfrak{T} -continuity (almost periodicity, almost automorphicity) of the second derivative depending on \mathfrak{T} -continuity (almost periodicity, almost automorphicity) of the function itself. If a function is continuous in a weaker topology, then the second derivative is continuous in this topology if and only if it is locally uniformly continuous. Let a continuous almost automorphic function be given and its second derivative exists for any shift and compact. If the second derivative of the limit shift is equal to the limit shift of the second derivative, then the first and second derivatives are continuous almost automorphic functions.

Key words: continuity, uniform continuity, quasi-uniform continuity, compactness, almost periodicity, almost automorphic, second derivative, abstract function.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований автора в области дифференцирования абстрактных функций, начатых в статьях [1 – 3]. В этих работах автором рассмотрены критерии сохранения непрерывности производной функции, заданной на числовой оси, со значениями в банаховом пространстве, которая непрерывна как в естественной топологии, так и в некоторой более слабой топологии на оси. Получены условия, при которых производная непрерывной почти автоморфной (асимптотически почти автоморфной, почти периодической, асимптотически почти периодической) функции остается функцией того же класса.

В теории почти периодических и почти автоморфных функций важную роль играет вопрос о сохранении непрерывности функции в некоторой заданной топологии. Как известно, почти периодические, Левитановские почти периодические, почти автоморфные функции являются соответственно равномерно непрерывными, непрерывными, непрерывными и компактными функциями в некоторой более слабой топологии \mathfrak{T} , чем естественная топология \mathfrak{T}_0 , заданная на числовой оси [4 – 11]. Этому направлению принадлежит и настоящая работа, которая посвящена изучению связи между непрерывностью функции и ее второй производной, заданных на оси в некоторой топологии \mathfrak{T} , слабее естественной топологии \mathfrak{T}_0 . К этой тематике относятся так же результаты об интегрировании почти периодических, Левитановских почти периодических, почти автоморфных функций, о непрерывности решения разностного уравнения $x(t+h) - x(t) = \varphi_h(t)$ ([12 – 15], [4], [5], [6]). В этих работах

было показано, что при определенных условиях из непрерывности первой производной функции f' в топологии \mathfrak{S} следует непрерывность самой функции f в топологии \mathfrak{S} . В обратном направлении долгое время был использован *результат Бохнера* ([16], с. 29) – если производная почти периодической функции равномерно непрерывна на оси, то она почти периодична. Для L – почти периодичности (почти автоморфности) производной L – почти периодической (почти автоморфной) функции также требовалась ее равномерная непрерывность в топологии \mathfrak{S}_0 . В работах ([17], [1], [3]) были найдены критерии \mathfrak{S} – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) первой производной \mathfrak{S} – непрерывной (почти периодической, почти автоморфной) функции. Равномерная непрерывность в *теореме Бохнера* была заменена на $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ –*локальную равномерную непрерывность*.

В настоящей статье представлены критерии \mathfrak{S} – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) второй производной в зависимости от \mathfrak{S} – непрерывности (почти периодичности, почти автоморфности) самой функции. Для первой производной предполагается только ее существование, обеспечивающее существование второй производной в естественной топологии на оси.

Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты. Для более ясного понимания рассуждений сформулируем некоторые определения и результаты, на которые опирается изложение. Многие из них вводились для числовых функций, обобщались на абстрактные функции со значениями в пространствах Банаха. Все рассмотренные функции заданы на числовой оси и принимают значения в *сепарабельном банаховом пространстве* Y .

Аддитивную группу вещественных чисел будем обозначать через \mathfrak{R} . Естественную топологию, определенную множеством открытых интервалов (p, q) , $p, q \in \mathfrak{R}$, обозначим через \mathfrak{S}_0 . Через \mathfrak{S} будем обозначать топологию на \mathfrak{R} , которая слабее \mathfrak{S}_0 ($\mathfrak{S} \prec \mathfrak{S}_0$). Через Y обозначим сепарабельное пространство Банаха, Y^* – его сопряженное, $\langle y^*, y \rangle$ – линейная непрерывная форма на Y , $y \in Y$, $y^* \in Y^*$, $\|y\|$ – норма элемента $y \in Y$.

Введем понятие сдвига функции: если a – число, то $f(t+a) = f_a(t)$ будем называть сдвигом функции $f(t)$. Пусть задана числовая последовательность $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой поточечно сходится последовательность $\{f(t+a_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ к некоторой функции. Этот предел условимся обозначать также через $f_a(t)$, то есть $f_a(t)$ – предельный сдвиг, соответствующий последовательности $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если дано равенство $f_a(t) = g_a(t)$, то будем предполагать, что с обеих сторон существует одна и та же подпоследовательность, на которой достигается равенство, то есть

$$\lim_k f(t+a_{n_k}) = \lim_k g(t+a_{n_k}), \quad \forall t.$$

Определение 1 [18 – 20]. Последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t): \mathfrak{R} \rightarrow Y$ квазиравномерно сходится (то есть *по Арцела*) к функции $f(t): \mathfrak{R} \rightarrow Y$, если сходится поточечно к функции $f(t)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и индекса K существуют индексы M, N ($N > M > K$) такие, что для любого $t \in \mathfrak{R}$

$$\min_{M \leq n \leq N} \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Определение 2 ([20]). Последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(t)$ почти равномерно, если она квазиравномерно сходится вместе с каждой своей подпоследовательностью.

Термин *почти равномерно* предложен Г. М. Фихтенгольцем.

Определение 3 ([21]). Поточечная сходимость последовательности отображений $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ к отображению $f(t)$, заданных на топологическом пространстве X со значениями в банаховом пространстве Y , называется *квазиравномерной сходимостью по Александрову*, если для всякого натурального числа K существует не более чем счетное открытое покрытие $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots\}$ пространства X и такая последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ натуральных чисел, больших K , что $\|f(t) - f_{n_k}(t)\| < \varepsilon$ для всякого $t \in \Gamma_k$.

Предложение 1 ([21]). Пусть задана последовательность непрерывных отображений $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на топологическом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y , поточечно сходящаяся к отображению $f(t)$. Для того чтобы отображение $f(t)$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы сходимость была квазиравномерной согласно определению 3 (то есть квазиравномерной по Александрову).

Определение почти периодической функции введем с помощью критерия Бохнера [22].

Определение 4. Непрерывная функция $f(t)$ называется почти периодической (п.п.ф.), если для любой последовательности $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $-\infty < h_i < \infty$ семейство функций $\{f(t+h_i)\}_{i=1}^{\infty}$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей вещественной оси.

Определение 5 ([11], [23], [7], [3]). Непрерывная функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ называется (непрерывной) почти автоморфной (п.а.ф.), если из любой последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{R}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, что существует (непрерывная) функция $g(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ и

$$\lim_n f(t+x_n) = g(t) \quad \forall t \in \mathfrak{X}, \quad \lim_m g(t-x_m) = f(t) \quad \forall t \in \mathfrak{X}.$$

Определение 6. Пусть топология $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$. Функцию $g(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ будем называть $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной, если для любой пары (ε, x) ($\varepsilon > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$) существует окрестность нуля $U = U_{x,\varepsilon}$ в топологии \mathfrak{S} и окрестность нуля $V = V_{x,\varepsilon}$ в топологии \mathfrak{S}_0 такие, что

$$\sup_{t \in x+U} \|g(t+h) - g(t)\| < \varepsilon \quad \forall h \in V.$$

Заметим, что любая равномерно непрерывная функция в топологии \mathfrak{S}_0 является $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной (для любой топологии $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$).

Определение 7 ([10]). Множество E называется относительно плотным множеством на группе \mathfrak{X} , если существует q элементов c_1, c_2, \dots, c_q таких, что

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i=1}^q (c_i + E).$$

Предложение 2 ([22], [16]). Непрерывная функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ является почти периодической тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$U_\varepsilon(f) = \left\{ \tau \in \mathfrak{X} : \sup_{t \in \mathfrak{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на оси.

Предложение 2 дает возможность ввести топологию $\mathfrak{S}_{U,f}$ на группе с помощью множеств $U_\varepsilon(f)$.

Предложение 3 ([10], [7 – 9], [22]). Каждая почти автоморфная функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ непрерывна в топологии $\mathfrak{S}_{A,f}$, определенной множествами

$$A_{N,\varepsilon} = \left\{ \tau \in \mathfrak{X} : \sup_{t \in N} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \right\},$$

где N – компактное множество чисел, $\varepsilon > 0$.

Предложение 4 ([7]). Пусть задана п.а. функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ и по ней введена топология $\mathfrak{S}_{A,f}$ на группе \mathfrak{X} . Любая компактная функция $g(t)$, заданная на группе \mathfrak{X} , которая непрерывна в топологии $\mathfrak{S}_{A,f}$, является почти автоморфной.

Предложения 3 и 4 выполняют ту же самую роль, что и предложение 2, но только для почти автоморфных функций.

Определение 8. Непрерывную функцию $g(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ будем называть слабо $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной, если для любого $y^* \in Y^*$ числовая функция $\langle y^*, g(t) \rangle$ является $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной.

Например, функция $g(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ является слабо $(\mathfrak{S}_{A,f}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной, если для любого $y^* \in Y^*$ и любой пары (ε, x) ($\varepsilon > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$) существует окрестность нуля $A = A_{x,\varepsilon}(y^*)$ вида

$$A = A_{x,\varepsilon}(y^*) = \left\{ \tau \in \mathfrak{X} : \sup_{t \in N} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \right\},$$

где N ($N \subset \mathfrak{X}$) – компактное множество, и окрестность нуля $V = V_{x,\varepsilon}(y^*)$ в топологии \mathfrak{S}_0 такие, что

$$\sup_{t \in x+A} \left| \langle y^*, g(t+h) - g(t) \rangle \right| < \varepsilon \quad \forall h \in V.$$

Предложение 5 ([1]). Пусть $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ имеет конечную производную в любой точке оси в естественной топологии \mathfrak{S}_0 и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологии \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$). Для непрерывности производной $f'(t)$ в более слабой топологии \mathfrak{S} необходимо и достаточно, чтобы она была $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной.

Замечание 1. Сформулированное предложение отличается только терминологией от опубликованного в работе [1]. Тут использовано введенное понятие $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной функции.

Замечание 2. В работах [6], [12] было показано при определенных условиях, что если производная непрерывна в топологии \mathfrak{S} , то и функция (то есть интеграл) непрерывна в топологии \mathfrak{S} . В предложении 5 показано, что из непрерывности функции в топологии \mathfrak{S} при определенных условиях следует непрерывность производной в топологии \mathfrak{S} .

Предложение 6 ([1]). Пусть функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ имеет конечную производную в любой точке оси \mathfrak{X} в естественной топологии \mathfrak{S}_0 и равномерно непрерывна в более слабой топологии \mathfrak{S} , ($\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$). Для равномерной непрерывности производной $f'(t)$ в более слабой топологии \mathfrak{S} необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(t)$ была равномерно непрерывной на \mathfrak{X} в естественной топологии \mathfrak{S}_0 .

Это предложение – аналог теоремы Бохнера и показывает, что она справедлива для всех топологий \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$), а не только для почти периодических функций.

Предложение 7 ([1]). Пусть непрерывная функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ почти автоморфна и ее производная непрерывна и компактна. Для почти автоморфности $f'(t)$ необходимо и достаточно чтобы $f'(t)$ была слабо $(\mathfrak{S}_{A,f}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной.

Основные результаты. Результаты настоящей работы можно объединить в две группы: в первой используется $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локальная равномерная непрерывность второй производной функции, а во второй группе используется условие $[f_a(t)]'' = [f'']_a(t)$, где $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (то есть, что вторая производная предельного сдвига совпадает с предельным сдвигом второй производной). В первой группе теорем основной результат сформулирован в теореме 1, где почти равномерная непрерывность второй производной в естественной топологии сохраняет и ее \mathfrak{S} – непрерывность. Получены так же критерии почти автоморфности и почти периодичности второй производной.

Теорема 1. Пусть $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ имеет вторую конечную производную $f''(t)$ в любой точке оси в естественной топологии \mathfrak{S}_0 и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологии \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$). Для непрерывности второй производной $f''(t)$ в топологии \mathfrak{S} необходимо и достаточно, чтобы она была $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной.

Доказательство: Необходимость повторяет доказательство предложения 5.

Для доказательства достаточности рассмотрим функцию $\psi_n(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$, определенную формулой:

$$\psi_n(t) = n^2 [f(t+2/n) - 2f(t+1/n) + f(t)], \quad (1)$$

где n – натуральное число.

Запишем функцию $\psi_n(t)$ в виде интеграла

$$\psi_n(t) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_u^{\frac{1}{n}+u} f''(t+v) dv du, \quad t \in x + U_{x,\varepsilon}, \quad n > \frac{2}{\delta}, \quad \delta = \delta_{x,\varepsilon}. \quad (2)$$

Заметим, что

$$f''(t) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_u^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} f''(t) dv du. \quad (3)$$

Оценим разность $\|\psi_n(t) - f''(t)\|$. Из равенств (1) – (3), следует:

$$\begin{aligned} \|\psi_n(t) - f''(t)\| &\leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \int_u^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \|f''(t+v) - f''(t)\| dv du \leq \sup_{v \in (-\delta, \delta)} \|f''(t+v) - f''(t)\|, \\ \sup_{t \in x+U_{x,\varepsilon}} \|\psi_n(t) - f''(t)\| &\leq \sup_{t \in x+U_{x,\varepsilon}, v \in (-\delta, \delta)} \|f''(t+v) - f''(t)\| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерную непрерывность, каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ и числу $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие окрестность $\Gamma_n = \Gamma(x, \varepsilon, \delta_{x,\varepsilon}) = x + U_{x,\varepsilon}$, принадлежащую топологии \mathfrak{S} и номер $n = n_{x,\varepsilon}$, $n > \frac{2}{\delta_{x,\varepsilon}}$ так, что

$$\sup_{t \in \Gamma_n} \|\psi_n(t) - f''(t)\| < \varepsilon.$$

Множество $[-k, k]$ компактно в топологии \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} \prec \mathfrak{S}_0$) и оно покрывается конечным числом окрестностей вида Γ_n . Так как $\mathfrak{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]$, то существует счетное число окрестностей

$$\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \Gamma_{n_3}, \dots, \Gamma_{n_s}, \dots,$$

покрывающих множество \mathfrak{X} и соответствующее им счетное число номеров $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s, \dots$ таких, что

$$\sup_{t \in \Gamma_{n_s}} \|\psi_{n_s}(t) - f''(t)\| < \varepsilon.$$

Вторая производная $f''(t)$ существует и последовательность функций

$$\psi_n(t) = \frac{f\left(t + \frac{2}{n}\right) - f\left(t + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \frac{f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)}{\frac{1}{n}}$$

поточечно сходится к $f''(t)$.

Рассмотрим топологическое пространство $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$. Согласно *определению Александра*, последовательность $\psi_{n_s}(t)$ сходится квазиравномерно ко второй производной $f''(t)$. Последовательность $\psi_{n_s}(t)$ состоит из непрерывных функций в топологии \mathfrak{S} и по *теореме Александра* (предложение 1) ее предел $f''(t)$ является непрерывной функцией в топологии \mathfrak{S} . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ имеет конечную вторую производную $f''(t)$ в любой точке оси в естественной топологии \mathfrak{S}_0 и $f(t)$ непрерывна в более слабой топологии \mathfrak{S} ($\mathfrak{S} \prec \mathfrak{S}_0$). Для равномерной непрерывности второй производной $f''(t)$ в топологии \mathfrak{S} необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной в топологии \mathfrak{S}_0 .

Доказательство: Если $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии \mathfrak{S} , то она равномерно непрерывна и в топологии \mathfrak{S}_0 . Покажем что, если вторая производная равномерно непрерывна в естественной топологии, то она $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывна в любой более слабой топологии \mathfrak{S} . Число $\delta_{x,\varepsilon}$ из определения $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывной функции одно и тоже для всех точек и последовательность $\psi_{n_s}(t)$ сходится равномерно к своему пределу, что видно из неравенства (4), которое выполняется как только $n_s > \frac{1}{\delta}$.

Равномерный предел равномерно непрерывных функций в топологии \mathfrak{S} является равномерно непрерывной функцией в топологии \mathfrak{S} и значит вторая производная равномерно непрерывна в топологии \mathfrak{S} .

Замечание 3. Теорема 2 является аналогом предложения 6. В нем используется первая производная, а тут – вторая производная. Теорема 2 также является аналогом теоремы Бохнера.

Следствие 1. Пусть почти периодическая функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ имеет конечную вторую производную $f''(t)$ в любой точке оси в естественной топологии \mathfrak{S}_0 . Для почти периодичности второй производной $f''(t)$ необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной в топологии \mathfrak{S}_0 .

Доказательство: Если $f''(t)$ почти периодична, то она равномерно непрерывна в топологии \mathfrak{S}_0 .

Для доказательства достаточности на \mathfrak{X} введем топологию $\mathfrak{S}_{U,f}$. Тогда функция $f(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\mathfrak{S}_{U,f}$. Функция $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии \mathfrak{S}_0 . Согласно теореме 2, $f''(t)$ равномерно непрерывна в топологии $\mathfrak{S}_{U,f}$, то есть является почти периодической функцией.

Замечание 4. Следствие 1 утверждает, что теорема Бохнера справедлива, если первую производную заменить на вторую.

Теорема 3. Пусть непрерывная функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ почти автоморфна и ее вторая производная $f''(t)$ непрерывна и компактна. Вторая производная $f''(t)$ почти автоморфна, если она слабо $(\mathfrak{S}_{A,f}, \mathfrak{S}_0)$ – локально равномерно непрерывна.

Доказательство: Рассмотрим интеграл

$$\int_u^v f''(t) dt = f'(v) - f'(u).$$

Норма функции $f''(t)$ измерима и ограничена. Имеет место неравенство

$$\|f'(v) - f'(u)\| \leq |v - u| \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \|f''(t)\|.$$

Следовательно, производная $f'(t)$ равномерно непрерывна. По теореме Бохнера, это в свою очередь дает почти автоморфность первой производной [23]. Далее, к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, применим предложение 7 и получим, что $g'(t)$, то есть $f''(t)$, является почти автоморфной функцией.

Теорема 4. Пусть функция $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ почти периодична и имеет непрерывную и компактную вторую производную $f''(t)$. Тогда, вторая производная $f''(t)$ почти периодична, когда для любой функции $f_a(t)$ ($a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), выполняются условия теоремы 3.

Доказательство: Компактность второй производной гарантирует равномерную непрерывность первой производной. Это в свою очередь дает почти периодичность первой производной [16]. Теперь к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, можно применить теорему 5 [1] и получим, что $g'(t)$, то есть $f''(t)$, является почти периодической функцией.

Теорема 5. Пусть $f(t): \mathfrak{X} \rightarrow Y$ непрерывная почти автоморфная функция, для любого $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $f_a(t)$ дважды дифференцируема и вторая производная $[f_a(t)]''$ компактна. Если для любого индекса a выполнено равенство $[f_a(t)]'' = [f'']_a(t)$, то производные $f'(t)$ и $f''(t)$ являются непрерывными почти автоморфными функциями.

Доказательство: Компактность второй производной гарантирует равномерную непрерывность первой производной. Это в свою очередь дает почти автоморфность первой производной [23]. Теперь к паре функций $g(t)$, $g'(t)$, где $g(t) = f'(t)$, можно применить теорему 3 [3]. Применяя к $g(t) = f'(t)$ теорему 3 [3] получим, что и $g'(t)$, то есть вторая производная $f''(t)$, является равномерной почти автоморфной функцией.

Выводы. В теоремах 1 – 5 и следствии 1 даны критерии \mathfrak{S} – непрерывности (почти автоморфности, почти периодичности) второй производной, когда сама функция является \mathfrak{S} – непрерывной (почти автоморфной, почти периодической). Полученные результаты новые. Некоторые из них обобщают ранее известные теоремы. Возможно перенесение результатов на пространства Фреше Y , где топология задается с помощью счетной возрастающей системы полунорм $p_s(y)$, $p_s(y) \leq p_{s+1}(y)$, $s = 1, 2, 3, \dots$, $y \in Y$, а метрика задается с помощью квазинормы

$$\|y - z\| = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_s(y - z)}{[1 + p_s(y - z)] \cdot 2^s}, \quad y, z \in Y.$$

Список литературы

1. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Условия сохранения непрерывности при дифференцировании функций // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник научных статей. – Х. : Вировец А.П. «Апостроф» – 2011. – С. 332 – 333.
2. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Непрерывность производной в более слабой топологии. «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». Тезисы докладов международной конференции, г. Харьков, 17 – 22 апреля 2011 г. – Х. : Вировец А.П. «Апостроф», 2011. – С. 249 – 250.
3. Dimitrova-Burlayenko S. D. Almost automorphic derivative of an almost automorphic function // Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. «Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics». – 2017. – Vol. 85. – P. 52 – 61. DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-04.
4. Димитров Д. Б., Димитрова С. Д. Почти автоморфность на криволинейный интеграл от почти автоморфной функции // Известия на Съюза на учениците. Серия 5 : «Математика, информатика и физика». – Русе, 2001. – Том 1. – С. 32 – 38.
5. Димитров Д. Б., Димитрова С. Д. Почти автоморфность на криволинейный интеграл в произвольной метрической попространства на Фреше // Известия на ИУ Варна. – 2001. – № 1. – С. 35 – 46.
6. Димитрова С. Д., Димитров Д. Б. Теорема о сохранении непрерывности // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2003. – № 602. – Вып. 53. – С. 77 – 81.
7. Димитрова-Бурлаенко С. Д. Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПИ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2012. – № 27 (2012). – С. 82 – 85.
8. Левин Б. Я. О почти-периодических функциях Левитана // Укр. матем. журнал. – 1949. – № 1. – С. 49 – 100.
9. Марченко В. А. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье // Записки научно исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества. – 1950. – Т. XX. – С. 3 – 32.
10. Reich A. Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität // Math. Z. – 1970 – Vol. 116, issue 3. – P. 218 – 234.
11. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math. – 1965. – 87. – №3. – P. 719 – 751.
12. Димитрова С. Д. Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану функций // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2001. – № 514. – С. 106 – 114.
13. Кадець М. И. Об интегрировании почти-периодической функции со значениями в пространстве Банаха // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Вып. 3. – С. 71 – 74.
14. Болес Басин Р. Обобщение двух теорем М. И. Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти-периодических функций // Матем. Заметки. – 1971. – Вып. 9. – № 3. – С. 311 – 321.
15. Amerio L., Prouse G. Almost-periodic functions and functional equations. – N.Y. : Van Nostrand Reinhold Company, 1971. – 184 p.
16. Zaidman S. Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. – London : Pitman Publ. Ltd., 1985. – 138 p.
17. Любарский М. Г. О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1972. – Вып. 16. – С. 139 – 150.
18. Arzela C. Intorno alla continuita della somma d'infinita di funzioni continue // Rend. R. Accad. Sci. Istit. – Bologna, (1883-1884), pp. 79 – 84.
19. Arzela C. Sulle serie di funzioni. Mem. R. Accad. Sci. Ist. – Bologna, (1899 – 1900). – Serie 5 (8). – pp. 31 – 186 and 701 – 744.
20. Sirvint G. Weak compactness in Banach spaces // Studia Mathematica. – 1957. – № 6. – pp. 71 – 94.
21. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М. : Наука, 1977. – 368 с.
22. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М. : МГУ, 1978. – 205 с.
23. N'Guérékata G. M. Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. – Springer, 2001. – 148 p.

References (transliterated)

1. Dimitrova-Burlayenko S. D. Usloviya sokhraneniya nepreryvosti pri differentsirovani funktsiy [Conditions for maintaining continuity when differentiating functions]. *Sovremennyye problemy matematiki i ee prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh. Sbornik nauchnykh statey* [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies. Collection of scientific papers]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011, pp. 332–333.
2. Dimitrova-Burlayenko S. D. Nepreryvnost' proizvodnoy v boleye slaboy topologii. [Derivative continuity in a weaker topology]. "Sovremennyye problemy matematiki i ee prilozheniya v estestvennykh naukakh i informatsionnykh tekhnologiyakh" [Contemporary problems of mathematics and its applications to natural sciences and information technologies.]. *Tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii. Khar'kov, 17-22 aprelya 2011 g.* [Abstracts of the International conference, Kharkov, April, 17 – 22, 2011]. Kharkov, Virovets A.P. «Apostrof» Publ., 2011, pp. 249–250.
3. Dimitrova-Burlayenko S. D. Almost automorphic derivative of an almost automorphic function. *Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics.* 2017, vol. 85, pp. 52–61. DOI: 10.26565/2221-5646-2017-85-04.
4. Dimitrov D. B., Dimitrova S. D. Pochti avtomorfnost na krivoliniyniya integral ot pocht avtomorfni funktsii [Almost automorphy of curvilinear integral of an almost automorphic function]. *Izvestiya na Syuzu na uchenite. Seriya 5 : «Matematika, informatika i fizika».* Ruse, 2001, vol. 1, pp. 32–38.
5. Dimitrov D. B., Dimitrova S. D. Pochti avtomorfnost na krivoliniyniya integral v proizvolni metricni postranstva na Freshe [Almost automorphy of curvilinear integral in arbitrary metric Frechet spaces]. *Izvestiya na IU Varna* [Reports of the University of Economics – Varna]. 2001, vol. 1, pp. 35–46.
6. Dimitrova S. D., Dimitrov D. B. Teorema o sokhraneni nepreryvosti [The theorem on the preservation of continuity]. *Visnyk Kharkiv'skogo natsional'nogo universytetu. Seriya : Matematika, prykladna matematika i mekhanika* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2003, no. 602, vol. 53, pp. 77–81.
7. Dimitrova-Burlayenko S. D. Pochti avtomorfnye funktsii kak kompaktye nepreryvnye funktsii na topologicheskoy gruppe [Almost automorphic functions as compact continuous functions on a topological group]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2012, no. 27 (2012), pp. 82–85.
8. Levin B. Ya. O pocht-periodicheskikh funktsiyakh Levitana [On Levitan almost-periodic functions]. *Ukr. matem. Zhurnal* [Ukrainian mathematical journal]. 1949, no. 1, pp. 49–100.
9. Marchenko V. A. Metody summirovaniya obobshhennykh ryadov Fur'ye [Summation Methods of Generalized Fourier Series]. *Zapiski nauchno issledovatel'skogo instituta matematiki i mekhaniki KhGU i Khar'kovskogo matematicheskogo obshchestva* [Notes of the Research Institute of mathematics and mechanics of the Kharkov National University and Kharkov mathematical society]. 1950, vol. XX, pp. 3–32.
10. Reich A. Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität. *Math. Z.* 1970, vol. 116, issue 3, pp. 218–234.
11. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups. *Amer. J. Math.* 1965, vol. 87, no. 3, pp. 719–751.

12. Dimitrova S. D. Krivolineyny integral ot pochtii periodicheskikh i pochtii periodicheskikh po Levitanu funktsiy [Curvilinear integral of almost periodic and Levitan almost periodic functions]. *Visnyk Kharkivskogo universytetu. Seriya : Matematika, prykladna matematika i mekhanika* [Bulletin of the V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2001, vol. 514, pp. 106–114.
13. Kadets M. I. Ob integrirovaniy pochtii-periodicheskoy funktsii so znacheniyami v prostranstve Banakha [On the integration of an almost-periodic function with values in a Banach space]. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya* [Functional analysis and its applications]. 1969, issue 3, pp. 71–74.
14. Boles Basit R. Obobshcheniye dvukh teorem M. I. Kadetsa o neopredelennom integrale abstraktnykh pochtii-periodicheskikh funktsiy [A generalization of two theorems by M. I. Kadets on the indefinite integral of abstract almost-periodic functions]. *Matem. Zametki* [Notes in mathematics]. 1971, vol. 9, no. 3, pp. 311–321.
15. Amerio L., Prouse G. *Almost-periodic functions and functional equations*. N.Y., Van Nostrand Reinhold Company, 1971. 184 p.
16. Zaidman S. *Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. London, Pitman Publ. Ltd., 1985. 138 p.
17. Lyubarskiy M. G. O neopredelennom integrale pochtii periodicheskoy po Levitanu funktsii [On the indefinite integral of a Levitan almost periodic function]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1972, vol. 16, pp. 139–150.
18. Arzela C. Intorno alla continuita della somma di 'infinita di funzioni continue. *Rend. R. Accad. Sci. Istit.* Bologna, (1883–1884), pp. 79–84.
19. Arzela C. Sulle serie di funzioni. *Mem. R. Accad. Sci. Ist.* Bologna, (1899–1900), Serie 5 (8), pp. 31–186 and 701–744.
20. Sirvint G. Weak compactness in Banach spaces. *Studia Mathematica*. 1957, no. 6 (1957), pp. 71–94.
21. Aleksandrov P. S. *Vvedeniye v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to the set theory and general topology]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 368 p.
22. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochtii periodicheskie funktsii i differentsial'nyye uravneniya* [Almost periodic functions and differential equations]. Moscow, MGU Publ., 1978. 205 p.
23. N'Guérékata G. M. *Almost Automorphic and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces*. Springer, 2001. 148 p.

Поступила (received) 27.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Дімитрова-Бурлаєнко Світлана Дімова (Димитрова-Бурлаєнко Светлана Димова, Dimitrova-Burlayenko Svetlana Dimova) – кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com.

UDC 629.114.2.073.286

A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV, B. I. KALCHENKO

MATHEMATICAL MODELING OF FREE LIQUID SURFACE MOTION IN TRANSPORTING AGRICULTURAL SEMITRAILER TANKS

Mathematical modeling of the oscillatory process of the longitudinal motion of a machine-tractor unit with a semitrailer tank equipped with a hydraulic liquid mixer is developed. The redistribution of liquid in the tank by the characteristics of Rayleigh surface waves is taken into consideration. The influence of the mixer operation on the total vibrational motion of the liquid in the tank is given. The spectrum of frequencies of free mechanical oscillations is determined, and the corresponding forms of interconnected movements of the elements of a tractor and a tank are analyzed.

Key words: wheeled tractor, tank, hydraulic mixer, free liquid surface, oscillations, resonant frequencies, eigenmode, semitrailer tank.

А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ, Б. І. КАЛЬЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ НАПІВПРИЧІПНИХ ЦИСТЕРН

Виконано математичне моделювання коливального процесу поздовжнього руху машинно-тракторного агрегату з напівпричіп-цистерною, яка має гідравлічний змішувач рідини. Для перерозподілу рідини у цистерні, що викликаний коливаннями оболонки, використано характеристики поверхневих хвиль Релея. Наведено вплив роботи змішувача на загальний коливальний рух рідини в цистерні. Знайдено спектр частот вільних механічних коливань, а також проаналізовано відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів трактора та цистерни.

Ключові слова: колісний трактор, цистерна, гідравлічний змішувач, вільна поверхня рідини, коливання, резонансні частоти, власна форма, напівпричіпна цистерна.

А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОР'ЄВ, Б. И. КАЛЬЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПОЛУПРИЦЕПНЫХ ЦИСТЕРН

Выполнено математическое моделирование колебательного процесса продольного движения машинно-тракторного агрегата с полуприцеп-цистерной, которая имеет гидравлический смеситель жидкости. Для перераспределения жидкости в цистерне, вызванного колебаниями оболочки, использованы характеристики поверхностных волн Рэлея. Показано влияние работы смесителя на общее колебательное движение жидкости в цистерне. Найден спектр частот свободных механических колебаний, а также проанализированы соответствующие формы взаимосвязанных движений элементов трактора и цистерны.

Ключевые слова: колесный трактор, цистерна, гидравлический смеситель, свободная поверхность жидкости, колебания, резонансные частоты, собственная форма, полуприцепная цистерна.

© A. P. Kozhushko, A. L. Grigoriev, B. I. Kalchenko, 2019

Introduction. Transport work in the agricultural sector implies the function of transporting solid or liquid cargoes. Particular attention should be given to liquid cargoes transporting, since the liquid oscillations in the tank can cause a shift of the trailer unit's center-of-mass, which ultimately will result in deterioration of technical, economic and operational indicators of the machine-tractor unit, as well as traffic safety violations.

Nowadays trailer- and semitrailer tanks are used for transporting liquid cargo [1]. The difference is in their functionality. The more widely used aggregate that transports liquid cargo is a semitrailer tank. In the design of such tank, a hydraulic mixer can be found which performs the function of mixing the liquid in the process of a machine-tractor unit driving, thereby producing an additional stimulating effect on the liquid oscillations in the tank. That's why the mathematical modeling of this phenomenon is relevant.

Analysis of previous results. Smoothness of the machine-tractor unit motion are studied in papers [2 – 7], which are aimed at solving the problem of the influence of the oscillating process on technical, economic and ergonomic indicators in a motion modeling process. Nevertheless, the motion of machine-tractor unit with a tank is not considered there. Thus the effect of variable mass on the aggregate as a whole has not been investigated.

A number of scientific papers [8 – 10] study the free and forced liquid oscillations in a tank with a free surface. The researches conducted aim to solve the problems of liquid oscillations by means of mathematical modeling of the process of mass overflowing in tanks (in particular, in fuel tanks) of carrier rockets, which will make it possible to describe and calculate rocket indicators more accurately. The issue of studying free liquid surface is outlined in scientific papers [11 – 12] dealing with transport engineering.

Purpose and objectives of the paper. The above analysis indicates that the materials of this work are relevant. Therefore, the aim of the work is to carry out dynamic analysis of the linearized model by mathematical modeling of the longitudinal motion of a machine-tractor unit with semitrailer tanks, one of which has a hydraulic mixer. The research objective is to analyze their longitudinal eigenmodes of oscillation depending on the level of liquid in the tank, as well as to identify groups of forced oscillations which require a deep mathematical analysis of the nonlinear model of a machine-tractor unit.

Mathematical model. Based on the results obtained in [11], it is known that liquid oscillations in a tank are described using mathematical modeling of Rayleigh surface waves, i.e. partial derivatives. At the same time, the general mathematical description of the machine-tractor unit is based on the ordinary differential equations. The principle of combining these mathematical models is summarized in scientific paper [12, 13], in which the author presents a general discrete model and suggests calculating liquid oscillations by introducing partial oscillators, which have their specific size and weight.

A linear (linearized) model is a model that is devoid of a dynamic component (for example, the longitudinal forces, the coefficients of coupling of the wheels with the road are equal to a constant), but takes into account an interaction between the links of the mechanical system. Thus, it is appropriate to simulate the linear model for studying the properties of the underlying system. The general equation of the oscillating process of a machine-tractor unit with a semitrailer tank (a simplified scheme is shown in Fig. 1) has the following form:

$$M \cdot \ddot{\vec{Y}} + F \cdot \dot{\vec{Y}} + C \cdot \vec{Y} = \vec{0}; \quad (1)$$

$$\vec{Y} = \left(y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C, \varphi_T, \varphi_K, y_{II}, y_3^M, y_4^M, \varphi_{II}, x_1^P, x_2^P, x_3^P, x_{II}, x_T, x_K, x_T^{uu}, x_{II}^{uu}, x_{rot}^c \right)^T, \quad (2)$$

where M is a diagonal inertial matrix composed of masses and moments of inertia; F is the damping matrix; C is the stiffness matrix; $y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C$ describe the vertical motion of the frame, front and rear axles, cabs, tractor seats; φ_T, φ_K take into account the tilt angle of the tractor and cabin; y_{II}, y_3^M, y_4^M are the vertical motion of the platform, the first and second axles of a trailer unit; φ_{II} is the tilt angle of the trailer unit; x_1^P, x_2^P, x_3^P describe the motion of the liquid that participates in the oscillation process; x_T, x_{II} stand for the longitudinal motion of the tractor and the trailer unit; x_K is the longitudinal motion of a cab with a seat; x_T^{uu}, x_{II}^{uu} describe the longitudinal motion of the contact point between the road and the tires on the front wheels of the tractor and the trailer unit; x_{rot}^c is the longitudinal motion of the rotor shaft of the hydraulic mixer. The component x_{rot}^c is taken into consideration when modeling a unit with a hydraulic mixer only. Thus, when comparing the forms of the system's natural oscillations we have a $[1 \times 19]$ vector-column for a machine-tractor unit with a simple semitrailer tank, and a $[1 \times 20]$ one for a unit with a semitrailer tank containing a hydraulic mixer.

When solving equation (1), the matrix F can be neglected since its influence on the resonant zones is not significant. Then equation (1) can be reduced to the following form:

$$M^{1/2} \cdot d^2(M^{1/2} \cdot \vec{Y})/dt^2 + C \cdot M^{-1/2} (M^{1/2} \cdot \vec{Y}) = \vec{0} .$$

Then

$$d^2\vec{Y}^*/dt^2 + C^* \cdot \vec{Y}^* = \vec{0} , \text{ where } C^* = M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} > 0 , \vec{Y}^* = M^{1/2} \cdot \vec{Y} .$$

From the above it follows that the eigenfrequencies ω can be determined from the equation:

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0 .$$

The stiffness matrices C for a machine-tractor unit with a semitrailer tank are given in the block form:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & [C_{TX}^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}] & [C_{\Pi X}^T] \\ [C_{TX}] & [C_{\Pi X}] & [C_X] \end{bmatrix} + C_y \cdot \begin{bmatrix} [C_T^\Psi] & [C_{\Pi\Pi}] & [\Theta_2^T] \\ [C_{\Pi\Pi}^T] & [C_{\Pi\Pi}^\Psi] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x \cdot \begin{bmatrix} [C_T^R] & [\Theta_1] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}^R] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} ; \quad (3)$$

$$C_T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1,2,5,6} c_j^a & -c_1^a & -c_2^a & -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* \\ -c_1^a & c_1^a + c_1^u & 0 & 0 & 0 & -c_1^u L_1 - G_T^1 \psi_T & 0 \\ -c_2^a & 0 & c_2^a + c_2^u & 0 & 0 & c_2^u L_2 - G_T^2 \psi_T & 0 \\ -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & 0 & \sum_{j=5,6,7} c_j^a & -c_7^a & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* \\ 0 & 0 & 0 & -c_7^a & c_7^a & 0 & c_7^a l_7^* \\ c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & -c_1^u L_1 - G_T^1 \psi_T & c_2^u L_2 - G_T^2 \psi_T & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & 0 & \sum_{j=1,2} c_j^a L_j^2 + \sum_{j=5,6} c_j^a l_j^2 + c_x^0 H_T^2 + c_T^u h_T^2 + G_T h_T & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j \\ c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* & 0 & 0 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* & c_7^a l_7^* & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j & \sum_{j=5,6,7} c_j^a l_j^{*2} + c_x^k h_k^2 + G_k h_k \end{bmatrix} ;$$

$$C_{\Pi} = \begin{bmatrix} \sum_{j=3,4} c_j^a & -c_3^a & -c_4^a & G_{\Pi} \psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^a & c_3^a + c_3^u & 0 & -c_3^u L_3 - G_{\Pi}^3 \psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_4^a & 0 & c_4^a + c_4^u & c_4^u L_4 - G_{\Pi}^4 \psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ G_{\Pi} \psi_{\Pi} & -c_3^u L_3 - G_{\Pi}^3 \psi_{\Pi} & c_4^u L_4 - G_{\Pi}^4 \psi_{\Pi} & \sum_{j=3,4} c_j^u L_j^2 + \sum_{k=1}^3 (c_k^p h_k^2 + G_k^p h_k) + c_x^0 H_{\Pi}^2 + c_{\Pi}^u h_{\Pi}^2 + G_{\Pi} h_{\Pi} & -c_1^p h_1 - G_1^p & -c_2^p h_2 - G_2^p & -c_3^p h_3 - G_3^p \\ 0 & 0 & 0 & -c_1^p h_1 - G_1^p & c_1^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2^p h_2 - G_2^p & 0 & c_2^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3^p h_3 - G_3^p & 0 & 0 & c_3^p \end{bmatrix} ;$$

$$C_T^\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_T & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; C_{\Pi}^\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{\Pi} & 0 & 0 & l_{\Pi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; C_{\Pi\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_T & 0 & 0 & l_T l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$C_T^R = \text{diag}(0,0,0,0,0,l_T,0) ; C_{\Pi}^R = \text{diag}(0,0,0,l_{\Pi},0,0,0) ;$$

$$C_X = \begin{bmatrix} \left((1-f_{KR}) \sum_{k=1}^3 c_k^p + c_x^\delta + c_{II}^u \right) & -c_x^\delta & 0 & 0 & -c_{II}^u & 0 \\ -c_x^\delta & c_x^\delta + c_x^k + c_T^u & -c_x^k & -c_T^u & 0 & 0 \\ 0 & -c_x^k & c_x^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_T^u & 0 & c_T^u + c_R & 0 & -c_R \\ -c_{II}^u & 0 & 0 & 0 & c_{II}^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_R & 0 & c_R + f_{KR} \cdot \sum_{k=1}^3 c_k^p \end{bmatrix};$$

$$C_{TX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x^\delta H_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_K - c_x^\delta H_T + c_T^u h_T & -c_x^k h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_K & c_x^k h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_T^u h_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{PIX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1-f_{KR}) \cdot \sum_{j=1}^3 (c_j^p h_j + G_j^p) - G_y - c_x^\delta H_{II} + c_{II}^u h_{II} & -c_1^p \cdot (1-f_{KR}) & -c_2^p \cdot (1-f_{KR}) & -c_3^p \cdot (1-f_{KR}) \\ 0 & 0 & 0 & c_x^\delta H_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{II}^u h_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{KR} \cdot \sum_{j=1}^3 (c_j^p h_j + G_j^p) & -c_1^p \cdot f_{KR} & -c_2^p \cdot f_{KR} & -c_3^p \cdot f_{KR} \end{bmatrix}$$

where $C_T, C_T^\Psi, C_T^R, C_{II}, C_{II}^\Psi, C_{II}^R, C_{TII}$ are the matrices of the stiffness coefficients for the tractor, tank and aggregate as a whole and have the same dimensions $[7 \times 7]$; C_X is the coupling matrix of longitudinal displacements (of dimension $[6 \times 6]$); $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ are zero matrices of dimensions $[7 \times 7], [6 \times 7]$ and $[6 \times 6]$, indicating the absence of a power connection between the corresponding groups of elements; C_{TX}, C_{PIX} are non-square matrices of stiffness coupling having dimension $[6 \times 7]$.

It is necessary to take into consideration the motion of the free liquid surface in a tank with a hydraulic mixer while solving the stiffness matrix. Thereby the equivalent level of liquid h is to be computed as (see [11, 12]):

$$h = S / \left(2 \cdot \sqrt{H \cdot (2R_{II} - H)} \right); \tag{4}$$

$$S = \begin{cases} R_{II}^2 \cdot \arcsin(l/R_{II}) - l \cdot (R_{II} - H) & \text{if } H < R_{II}; \\ \pi \cdot R_{II}^2 - R_{II}^2 \cdot \arcsin(l/R_{II}) - l \cdot (R_{II} - H) & \text{if } H \geq R_{II}; \end{cases} \tag{5}$$

$$l = \sqrt{H \cdot (2R_{II} - H)}, \tag{6}$$

where S is the area of the free liquid surface, which corresponds to the known height of the liquid H in the tank; R_{II} is the radius of the tank.

For modeling the motion of the free liquid surface in a tank with a hydraulic mixer, the equivalent liquid level h_{rot} is equal to

$$h_{rot} = H - H_{rot}. \tag{7}$$

In addition to the above

$$S_{rot} = \begin{cases} R_{rot}^2 \cdot \arcsin(l/R_{rot}) - l \cdot (R_{rot} - H) & \text{if } H < R_{rot}; \\ \pi \cdot R_{rot}^2 - R_{rot}^2 \cdot \arcsin(l/R_{rot}) - l \cdot (R_{rot} - H) & \text{if } H \geq R_{rot}; \end{cases} \tag{8}$$

where H_{rot} is the distance from the bottom of the tank to the axis of the mixer shaft; S_{rot} is the area of the free liquid surface involved in the mixer operation process; R_{rot} is the radius of the rotary blades of the mixer.

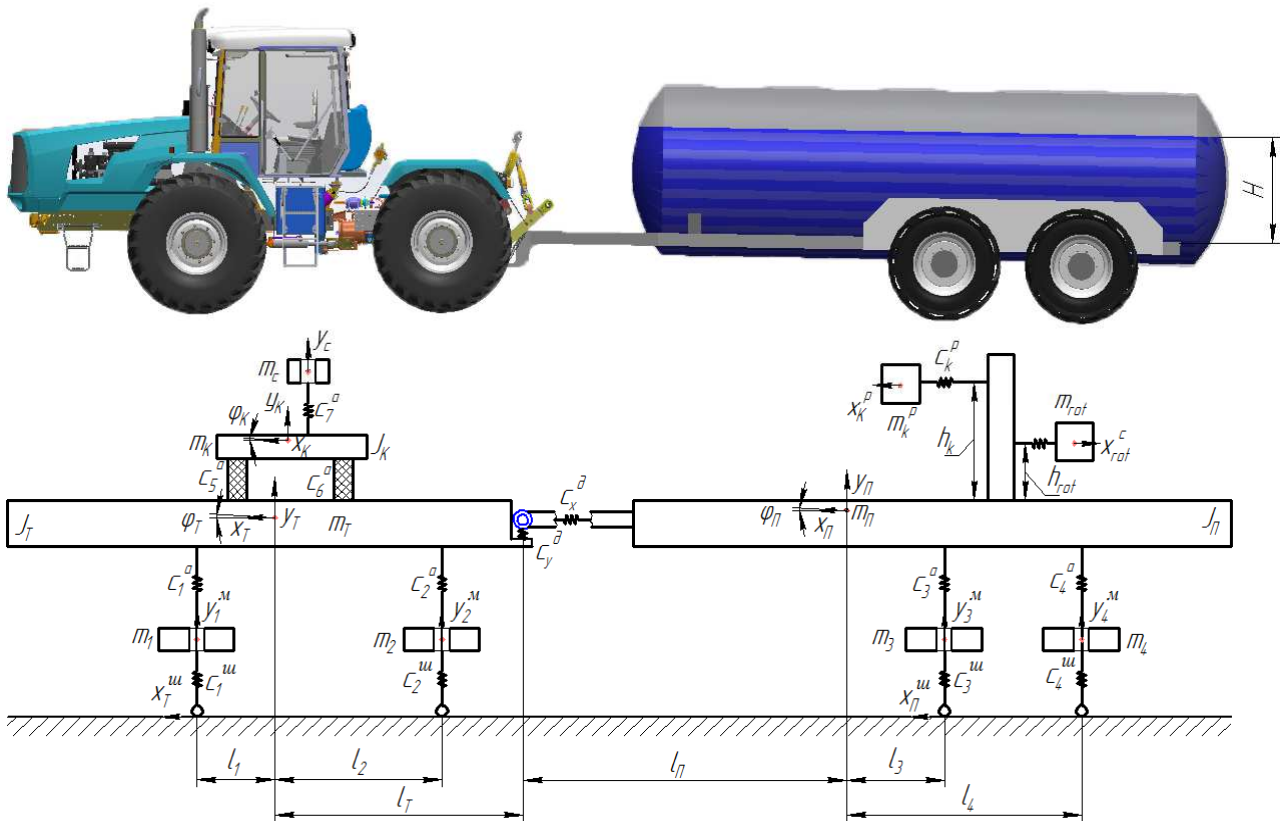


Fig. 1 – Simplified scheme of machine-tractor unit with semitrailer tank.

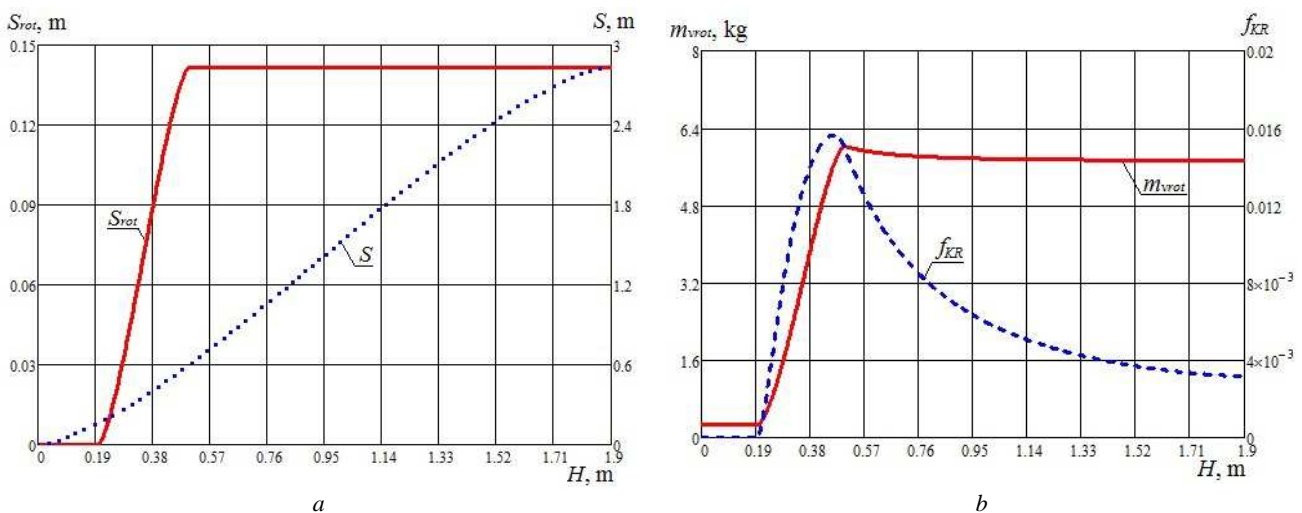


Fig. 2 – Dependences describing the impact of the hydraulic mixer on the tank oscillating system: a – areas of free liquid surfaces; b – reduced weight rotor and the impact factor of the mixer.

The rotor mass m_{vrot} and the coefficient of the influence of the mixer operation on the liquid oscillations f_{KR} depend on the level of the liquid height:

$$J_{rot} + \left(1 + \left(\frac{S_{rot}}{S}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{S_{rot} \cdot L \cdot R_{rot}^2 \cdot \rho}{\cos(\alpha_{rot} \cdot \pi/180)}\right)^2 = m_{vrot} \cdot r_K^2 \cdot i_{rot}^2; \quad (9)$$

$$(0.7 S_{rot}/S) \cdot R_{rot} \cdot \tan(\alpha_{rot} \cdot \pi/180) = f_{KR} \cdot r_K \cdot i_{rot}, \quad (10)$$

where J_{rot} is the inertia moment of the mixer's rotor ($J_{rot} = 0.5 \cdot N_{rot} \cdot m_{rot} \cdot R_{rot}^2$); N_{rot} is the number of mixer shafts; m_{rot} is the mixer mass; L is the semilength of the tank; ρ stands for the liquid density; α_{rot} denotes the angle of blades separation on the mixer shaft; r_K is the radius of wheels of the semitrailer tank; i_{rot} is the gear ratio between the actuator and the mixer shaft.

Thereby, a mathematical setting is developed allowing to model mathematically the motion of the free liquid surface for a machine-tractor unit with a semitrailer tank performing transport work.

Simulation results. The mathematical model developed is used for simulating operation of a 4×4 base wheeled tractor with a broken frame and a nominal traction effort of 40 kN.

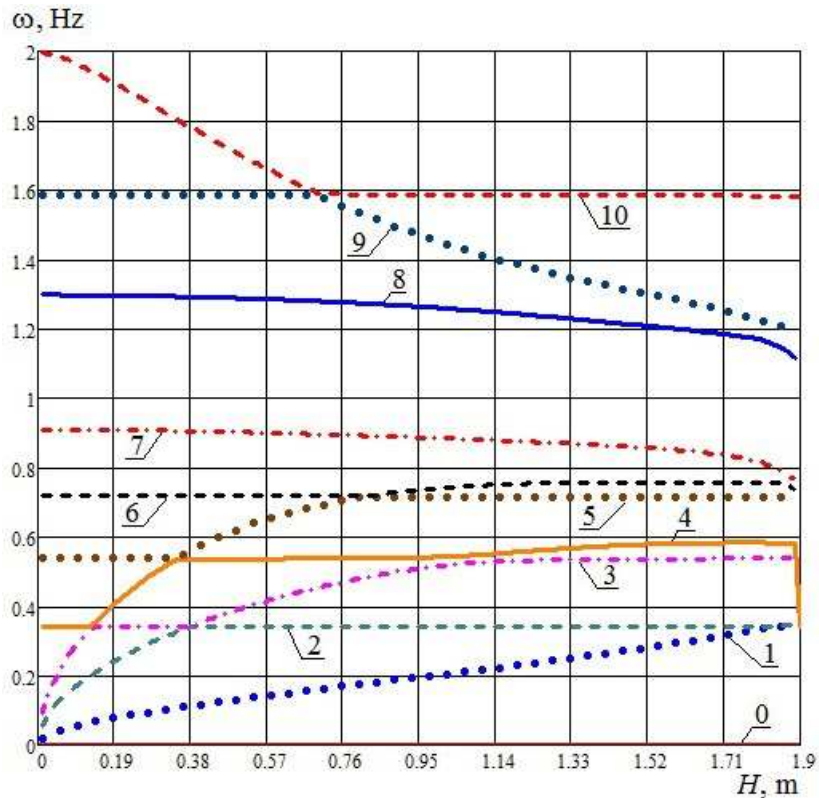


Fig. 3 – The dependence of the eigenfrequencies on the level of the liquid: 1 – 10 – harmonic number.

The semitrailer unit is represented by a tank of volume 20 m^3 and overall dimensions $7 \times 1.9 \text{ m}$. The hydraulic mixer is distanced 0.2 m from the bottom of the tank.

It is known that the resonant frequencies are divided into groups. Simulating the linear model with a mixer, we are interested in groups that affect human health (0 – 2 Hz). The simulation results are presented in Fig. 3.

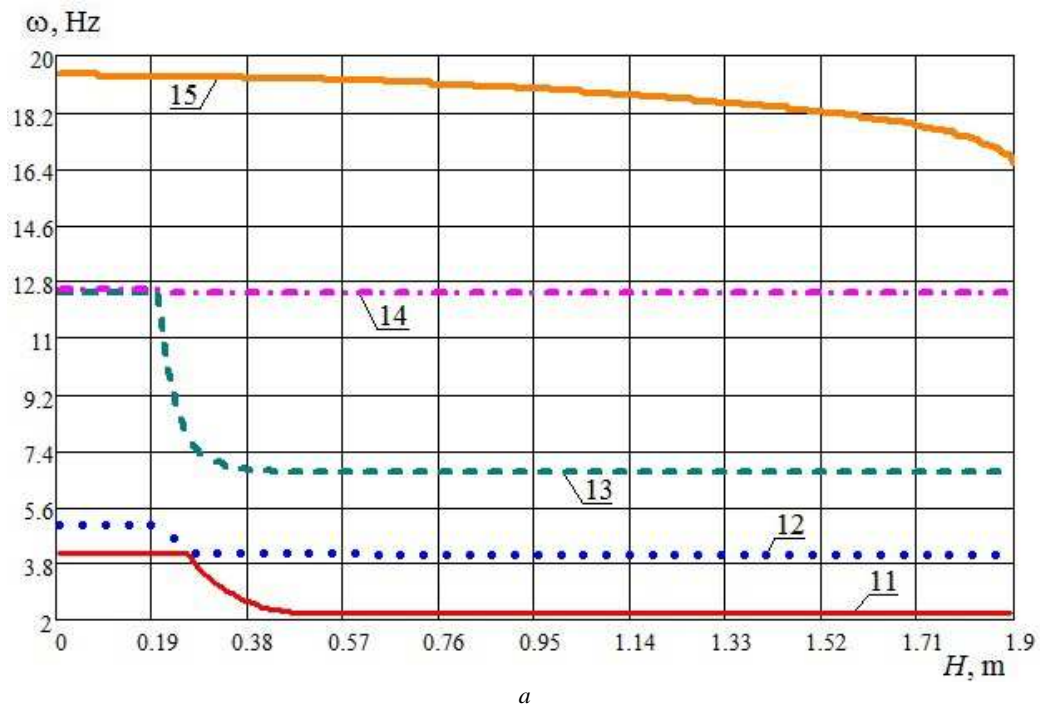


Fig. 4 – Resonant frequencies middle group: a – semitrailer tank.

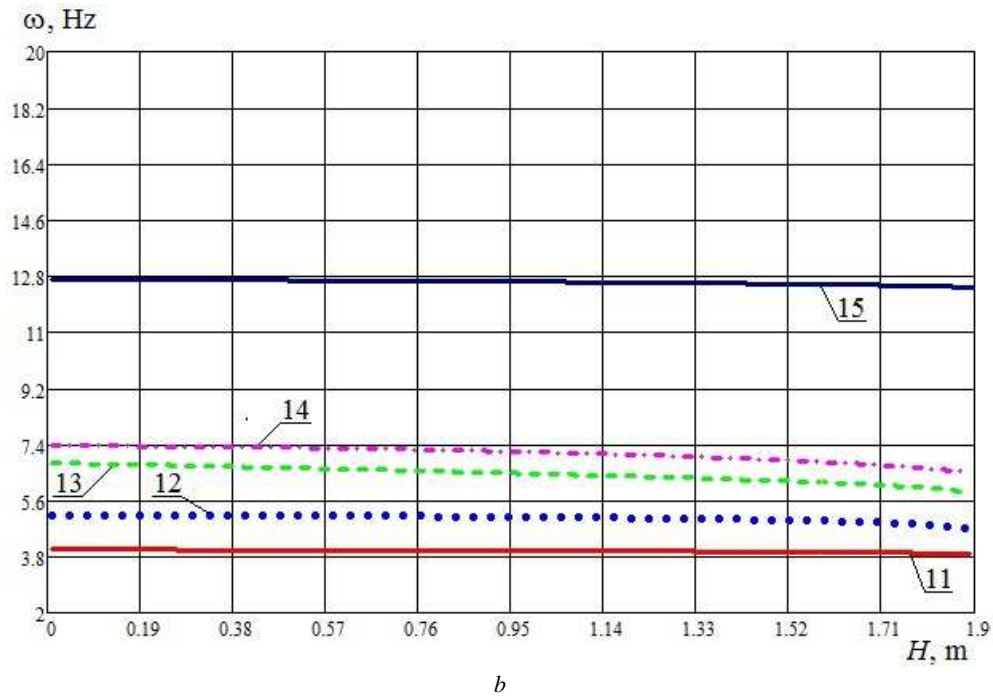


Fig. 4 – Resonant frequencies middle group: b – semitrailer tank with mixer.

In [11] it was determined that the maximum mass redistribution in the tank is observed at $H = 1.5$ m (if $H_{\max} = 1.9$ m). Therefore, it would be appropriate to analyze the component parts to determine the resonant frequencies (Table 1). Evaluating the results of resonant frequencies modeling for a semitrailer tank with and without a mixer, it was determined that its presence significantly influences the group of mid-frequencies (2 – 20 Hz), the research results are presented in Fig. 4.

Table 1 – Resonant frequencies that affect human health

Number	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0,54	0,58	0,72	0,76	0,87	1,22	1,32	1,58
y_T	-0,01	0	0,14	0,01	0,17	0,67	-0,46	0,08
y_1^M	0,01	0,02	-0,03	-0,04	-0,21	0,01	-0,07	-0,04
y_2^M	-0,01	0	0,06	0,01	0,08	0,28	-0,19	0,04
y_K	-0,01	0	0,97	-0,05	-0,14	-0,13	0,07	-0,01
y_C	-0,02	0,01	-0,15	0	0	0	0	0,02
φ_T	0,03	0,07	-0,12	-0,12	-0,64	-0,18	-0,03	-0,13
φ_K	-0,06	0,04	-0,02	-0,03	-0,17	-0,09	-0,02	0,98
y_{Π}	0,01	0,02	-0,02	-0,06	-0,41	0,6	0,55	-0,01
y_3^M	0	0,01	-0,01	-0,01	-0,1	0,15	0,13	0
y_4^M	0	0,01	-0,01	-0,01	-0,1	0,15	0,13	0
φ_{Π}	-0,02	-0,08	0,03	0,11	0,47	-0,02	0,63	0,1
x_1^P	0,05	0,01	-0,01	-0,02	-0,1	0	-0,05	-0,01
x_2^P	-0,29	-0,94	-0,01	-0,02	-0,1	0	-0,04	0
x_3^P	-0,03	0,02	0,03	0,98	-0,18	0	-0,03	0
x_{Π}	-0,12	0,13	0	-0,04	0,08	0	0,05	0
x_T	-0,1	0,12	0	-0,04	0,04	0	0,01	-0,01
x_K	0,93	-0,26	0,01	0,02	0,02	0	0	0,07
x_T^M	-0,05	0,06	0	-0,02	0,02	0	0	-0,01
x_{Π}^M	-0,02	0,02	0	-0,01	0,02	0	0,02	0
x_{rot}^C	-0,08	0,08	0	-0,03	0,03	0	0	-0,01

Analyzing the operation of a hydraulic mixer, it should be noted that it has the maximum impact at the height of liquid $H = 0,45$ m, which can be seen in Fig. 2. The influence of the mixer operation is given by the coefficient value f_{KR} (Fig. 2b).

Evaluating the value of harmonic components (Table 1), harmonics no. 6, 7 are the most important for a machine-tractor unit with a semitrailer tank, since they stand for a rather close connection between cabin vibrations that are harmful for human health and liquid motions in a tank. As it is shown in Fig. 4, the availability of a mixer in the tank impacts the mid frequencies (harmonics no. 11 – 15), which depend on the stiffness indicators of the mechanical system.

The interaction of harmonics is of particular interest and requires further studies (Figs. 3, 4), since they intersect, which indicates the peculiarity of the motion of spectrum of the bundles of linear operators [13].

Conclusions. The linear model of longitudinal oscillations of a wheeled tractor with a semitrailer tank equipped with a hydraulic mixer is presented. The research results of liquid redistribution in the tank are taken into consideration by the analytical dependences for the characteristics of Rayleigh surface waves. The linear model allows analyzing the eigenfrequencies (resonant frequencies) by studying the forms of motions of the oscillatory system components which amplitudes are normalized by their contribution to the total kinetic energy of oscillations.

Bibliography

1. Кожушко А. П. Аналіз конструктивних особливостей причіпних та напівпричіпних цистерн у складі машинно-тракторного агрегату // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2019. – № 5 (1330). – С. 34 – 40. – doi:10.20998/2413-4295.2019.05.05.
2. Singh G. K. Effect of whole-body vibration on vehicle operators: a review // International Journal of Science and Research. – 2014. – № 3 (7). – P. 320 – 323.
3. Servadio P., Marsili A., Belfiore N. P. Analysis of driving seat vibrations in high forward speed tractors // Biosystems engineering. – 2007. – № 97 (2). – P. 171 – 180. – doi: 10.1016/j.biosystemseng.2007.03.004.
4. Miao M., Wang Z. H., Gao S. D., Liu H. F., Mou J. J. Hydromechatronically-integrated simulation on tractor suspension systems // Chinese Journal of Construction Machinery. – 2012. – № 10 (3). – P. 286 – 290.
5. Kotliar A., Gasanov M., Basova Y., Panamariova O., Gubskiy S. Ensuring the reliability and performance criterias of crankshafts // Diagnostyka. – 2019. – 20 (1). – P. 23 – 32. – doi: 10.29354/diag/99605.
6. Кальченко Б. І., Ребров О. Ю., Кожушко А. П., Мамонтов А. Г. Плавність руху як складова динаміки трактора : монографія. – Харків : ФОП Панов А.М., 2018. – 164 с.
7. Кальченко Б. І., Чернявський І. С., Кожушко А. П. Підхід до визначення навантаженості трансмісії колісного трактора при впливі нерівностей поверхні // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. – 2017. – № 8. – С. 49 – 54.
8. Дьяченко М. И., Орлов В. В., Темнов А. Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях // Наука и образование : научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2013. – №. 11. – С. 175 – 192.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 736 с.
10. Hung R. J., Pan H. L., Leslie F. W. Fluid system angular momentum and moment fluctuations driven by gravity gradient or gravity jitter in micro-gravity // J. Flight Sci. Space Rex 1994. – 1994. – № 18. – P. 195 – 202.
11. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
12. Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 27 (1303). – С. 34 – 61.
13. Кожушко А. П., Набока О. О., Григор'єв О. Л. Спектральні ефекти та теореми про властивості пучка симетричних матриць в задачах динаміки складних механічних систем // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 214 – 223.

References (transliterated)

1. Kozhushko A. P. Analiz konstruktyvnykh osoblyvostey prychipnykh ta napivprychipnykh tsystem u skladi mashynno-traktornogo agregatu [Analysis of design features of trailer and semitrailer tanks as parts of the machine-tractor unit]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Novi rishennya v suchasnykh tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies]. 2019, vol. 5 (1330), pp. 34–40, doi:10.20998/2413-4295.2019.05.05.
2. Singh G. K. Effect of whole-body vibration on vehicle operators: a review. *International Journal of Science and Research*. 2014, vol. 3(7), pp. 320–323.
3. Servadio P., Marsili A., Belfiore N. P. Analysis of driving seat vibrations in high forward speed tractors. *Biosystems engineering*. 2007, vol. 97(2), pp. 171–180, doi: 10.1016/j.biosystemseng.2007.03.004.
4. Miao M., Wang Z. H., Gao S. D., Liu H. F., Mou J. J. Hydromechatronically-integrated simulation on tractor suspension systems. *Chinese Journal of Construction Machinery*. 2012, vol. 10 (3), pp. 286–290.
5. Kotliar A., Gasanov M., Basova Y., Panamariova O., Gubskiy S. Ensuring the reliability and performance criterias of crankshafts. *Diagnostyka*. 2019, vol. 20 (1), pp. 23–32, doi: 10.29354/diag/99605.
6. Kal'chenko B. I., Rebrov O. Y., Kozhushko A. P., Mamontov A. G. *Plavnist' rukhu yak skladova dynamiky traktora : monografiya* [Smoothness of motion as a component of tractor dynamics: monograph]. Kharkov, FOP Panov A.M. Publ., 2018. 164 p.
7. Kal'chenko B. I., Chernyavskiy I. S., Kozhushko A. P. Pidkhid do vyznachennya zavantazhenosti transmissiyi kolisnogo traktora pry vplyvi nerivnostey poverkhni [Approach to determination of load of transmission of a wheeled tractor under the influence of surface irregularities]. *Tekhnichnyy servis agropromyslovogo, lisovogo ta transportnogo kompleksiv* [Technical service of agro-industrial, forestry, and transport complexes]. 2017, vol. 8, pp. 49–54.
8. Dyachenko M. I., Orlov V. V., Temnov A. N. Kolebaniya zhidkogo topliva v tsilindricheskikh i konicheskikh emkostyakh [Oscillations of liquid fuel in cylindrical and conical tanks]. *Nauka i obrazovanie : nauchnoe izdanie MGTU im. N. E. Bauman* [Science and education: scientific publication of MSTU N.E. Bauman]. 2013, vol. 11, pp. 175–192.
9. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izd. 5-e, pererabotannoe* [Mechanics of fluid and gas. Ed. 5th, revised]. Moscow, Glavnaya re-

- daktsiya fiziko-matemeticheskoy literatury izdatel'stva "Nauka" Publ., 1978. 736 p.
10. Hung R. J., Pan H. L., Leslie F. W. Fluid system angular momentum and moment fluctuations driven by gravity gradient or gravity jitter in micro-gravity. *J. Flight Sci. Space Res* 1994. 1994, vol. 18, pp. 195–202.
 11. Kozhushko A. P., Grigoriev A. L. Matematychnе modelyuvannya nyz'kочastotnykh kolyvan' v "yazkoyi ridyny v goryzontal'niy yemnosti z vil'noyu poverkhneyu [Mathematical modeling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhniysi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, vol. 3 (1279), pp. 41–51.
 12. Kozhushko A. P., Grigoriev A. L. Modelyuvannya pov'yazanykh kolyvan' kolisnoho traktora ta tsysterny z ridynoyu na pryamomu shlyakhu zi skladnym rel'yefom [Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhniysi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, vol. 27 (1303), pp. 34–61.
 13. Kozhushko A. P., Naboka O. O., Grigoriev A. L. Spektрал'ni efekty ta teoremy pro vlastyivosti puchka symetrychnykh matryts' v zadachakh dynamiky skladnykh mekhanichnykh system [Spectral effects and theorems on symmetric matrix bundle spectrum properties in composite mechanical system dynamical problems]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhniysi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical Univer "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2019, vol. 8 (1333), pp. 214–223.

Received (надійшла) 05.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhusko7@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Кальченко Борис Іванович (Кальченко Борис Иванович, Kalchenko Boris Ivanovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: kabor78@ukr.net.

УДК 62-585.2

Ю. М. КУХТЕНКОВ, Є. С. КРУПА

ДО ПИТАННЯ ПРОЕКТУВАННЯ ПРОТОЧНОЇ ЧАСТИНИ КОМПЛЕКСНОГО ГІДРОТРАНСФОРМАТОРА

Комплексні гідротрансформатори поєднують найкращі властивості гідротрансформатора та гідромуфти і широко використовуються в різних областях техніки: в автомобілебудуванні, тракторобудуванні, в тепловозобудуванні; в транспортному машинобудуванні, в бурових установках для нафтогазових промислів та ін. Вони забезпечують: плавну автоматичну зміну крутного моменту і частоти обертання веденого валу, отже, і швидкості транспортних машин, а в бурових установках – збільшення механічної швидкості проходки; збільшення терміну експлуатації машин завдяки гасінням динамічних навантажень від двигуна і від трансмісії; роботу машини з кращими енергетичними показниками; підвищують надійність і роблять простішим управління машинами. Розрахунок гідротрансформатора може бути двох типів. Перший тип – розрахунок за законами подібності – перерахунок із добре діючого зразка на задані параметри – потужність N , кВт; оберти насосного колеса n , об/хв при досягненні необхідного ККД. Цей розрахунок більш швидкий за часом і гарантує швидке отримання гарних результатів; розрахунок нового гідротрансформатора, якщо не має прототипу. При цьому закладається умова забезпечення необхідної форми зовнішніх характеристик і визначення основних геометричних і кінематичних параметрів гідротрансформатора. Другий тип – це проектування нового гідротрансформатора, пов'язане з розрахунком його зовнішніх характеристик, гідродинамічним розрахунком і графічними побудовами проточної частини з використанням ЕОМ. Для реалізації завдань зазначених етапів на кафедрі гідромашин НТУ «ХПІ» створено математичну модель та пакет програм, який складається із: програми для розрахунку зовнішніх характеристик і гідродинамічного розрахунку; програми розрахунку і побудови форми проточної частини гідротрансформатора – визначення кінематичних і геометричних параметрів на середній лінії струму, підготовки даних і побудови кола циркуляції; програми профілювання лопаток робочих коліс гідротрансформатора – розрахунку геометричних і кінематичних параметрів на граничних лініях струму – побудови скелетних ліній лопаток робочих коліс на поверхні тора і чаші проточної частини; програми розрахунку профілів кінцевої товщини. Наведено опис методів побудови кола циркуляції і профілювання лопаток робочих коліс гідротрансформатора.

Ключові слова: комплексний гідротрансформатор, проточна частина, режимні параметри гідротрансформатора, математична модель, зовнішні характеристики, лопатка робочого колеса, коло циркуляції, коефіцієнт корисної дії.

Ю. М. КУХТЕНКОВ, Є. С. КРУПА

К ВОПРОСУ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ КОМПЛЕКСНОГО ГИДРОТРАНСФОРМАТОРА

Комплексные гидротрансформаторы сочетают лучшие свойства гидротрансформатора и гидромуфты и широко используются в различных областях техники: в автомобилестроении, тракторостроении, в тепловозостроении; в транспортном машиностроении, в буровых установках для нефтегазовых промыслов и др. Они обеспечивают: плавную автоматическую смену крутящего момента и частоты вращения ведомого вала, следовательно, и скорости транспортных машин, а в буровых установках приводят к увеличению механической скорости проходки;

© Ю. М. Кухтенков, Є. С. Крупа, 2019

увеличение срока эксплуатации машин происходит благодаря гашению динамических нагрузок от двигателя и от трансмиссии; работу машины с лучшими энергетическими показателями; повышают надежность и делают проще управление машинами. Расчет гидротрансформатора может быть двух типов. Первый тип – расчет по законам подобия – перерасчет с хорошего действующего образца на заданные параметры – мощность N , кВт; обороты насосного колеса n , об/мин при достижении необходимого КПД. Этот расчет более быстрый по времени и гарантирует быстрое получение хороших результатов; расчет нового гидротрансформатора, если нет прототипа. При этом закладывается условие обеспечения необходимой формы внешних характеристик и определения основных геометрических и кинематических параметров гидротрансформатора. Второй тип – это проектирование нового гидротрансформатора, связанное с расчетом его внешних характеристик, гидродинамическим расчетом и графическими построениями проточной части с использованием ЭВМ. Для реализации задач указанных этапов на кафедре гидромашин НТУ «ХПИ» создана математическая модель и пакет программ, состоящий из: программы для расчета внешних характеристик и гидродинамического расчета; программы расчета и построения формы проточной части гидротрансформатора – определение кинематических и геометрических параметров на средней линии тока, подготовки данных и построения круга циркуляции; программы профилирования лопаток рабочих колес гидротрансформатора – расчета геометрических и кинематических параметров на предельных линиях тока – построения скелетных линий лопаток рабочих колес на поверхности тора и чаши проточной части; программы расчета профилей конечной толщины. Описаны методы построения круга циркуляции и профилирования лопаток рабочих колес гидротрансформатора.

Ключевые слова: комплексный гидротрансформатор, проточная часть, режимные параметры гидротрансформатора, математическая модель, внешние характеристики, лопатка рабочего колеса, круг циркуляции, коэффициент полезного действия.

YU. M. KUKHTENKOV, E. S. KRUPA

TO THE QUESTION OF THE DESIGN OF THE FLOW PART OF AN INTEGRATED TORQUE CONVERTER

Integrated torque converters combine the best properties of the torque converter and hydraulic clutches and are widely used in various fields of technology such as the automotive, tractor, diesel locomotive building; transport engineering, drilling rigs for oil and gas fields, etc. They provide a smooth automatic change of the torque and speed of the driven shaft, and hence the speed of the transport machines, an increase of the mechanical speed of penetration in drilling rigs, durability of the machine due to the quenching of dynamic loads from the engine and transmission, the work of the machine with the best energy performance, increase reliability and make it easier to control the machines. Calculation of a torque converter can be of two types. The first one is calculation by the laws of similarity, i.e. recalculation of a good working sample for specified parameters such as power N , kW, pump wheel speed when the required efficiency is reached. This calculation is faster in time and guarantees fast achievement of good results, as well as calculation of the new torque converter if there is no prototype. In this case, a condition is set to ensure the necessary form of the external characteristics and to determine the main geometric and kinematic parameters of the torque converter. The second type of calculation consists in designing a new torque converter, in particular calculating its external characteristics, hydrodynamic calculation and graphic construction of the flow part using a computer are considered. To implement the tasks of these stages, a software package has been created at the Hydraulic Machines Department of NTU «KPI», consisting of a program for calculating external characteristics and hydrodynamic calculation, programs for calculating and building the flow section of the torque converter – determining the kinematic and geometric parameters on the middle line of the current, preparing data and building a circle of circulation, programs for profiling the impeller blades of the torque converter – calculating geometrical and kinematic parameters on the current limiting lines – building skeletal lines for the blades of impellers on the surface of the torus and the bowl of the flow part, programs for calculating the finite thickness of the profiles. Methods for constructing a circle of circulation are given and profiling of blades for impellers of a torque converter is described.

Key words: integrated torque converter, flow part, operating parameters of the torque converter, mathematical model, external characteristics, impeller blade, circulation circle, efficiency.

Вступ. Однією з найбільш складних частин гідромеханічної коробки передач є комплексний гідродинамічний трансформатор крутного моменту. Він являє собою гідродинамічну машину, здатну автоматично перетворювати крутний момент двигуна в залежності від навантаження на вихідному валу. Тому автоматизований розрахунок геометричних і кінематичних параметрів гідротрансформатора на основі існуючих математичних моделей рівняння балансу гідравлічної енергії є важливим інженерним завданням [1 – 8].

Математична модель. У загальному випадку рівняння балансу гідравлічної енергії [1 – 8] представляється як різниця напорів насосного H_1 та турбінного H_2 коліс, яка дорівнює сумі гідравлічних втрат $h_{\text{гмп}}$:

$$H_1 - H_2 = \sum h_{\text{гмп}} \quad (1)$$

Рівняння балансу енергії в безрозмірному вигляді встановлює зв'язок між геометричними, кінематичними й енергетичними параметрами гідротрансформатора:

$$\left\{ 2(1 - \eta_{\Gamma}^*) \Delta \bar{\Gamma}_1^* + 2K_z (1 - i^*) - A + \rho_{2,2}^2 i^{*2} B \right\} \bar{\varphi}^2 - 2 \left\{ \Delta \bar{\Gamma}_1^* + K_z (1 - i^*) - A - \left[\eta_{\Gamma}^* \Delta \bar{\Gamma}_1^* - \rho_{2,2}^2 i^{*2} (B - 1) \right] \frac{i}{i^*} \right\} \bar{\varphi} - \left\{ A - \rho_{2,2}^2 i^{*2} (B - 2) \right\} = 0, \quad (2)$$

де використані позначення: $A = 2K_z - \left(\frac{K_z}{\rho_{1,2}} \right)^2 - \rho_{1,1}^2$; $B = \left(\frac{\rho_{1,2}}{\rho_{2,2}} \right)^2 + \left(\frac{\rho_{2,2}}{\rho_{1,3}} \right)^2$.

У цих виразах: η_{Γ}^* – гідравлічний коефіцієнт корисної дії; $\Delta \bar{\Gamma}_1^*$ – безрозмірна різниця циркуляцій на виході з насосного колеса; K_z – коефіцієнт, що враховує скінченне число лопаток насосного колеса; i – передавальне відношення на поточному режимі; $i^* = i_{\text{зад}}^* - \Delta i$ – розрахункове передавальне відношення (яке відповідає режиму нерозрахункового входу на лопатки), де $i_{\text{зад}}^*$ – передавальне відношення, яке задано замовником і відповідає η_{max} , $\Delta i = 0,5 - 1,0$; $\rho_{1,1}$, $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$ – відносні радіуси вхідних кромок на середній лінії

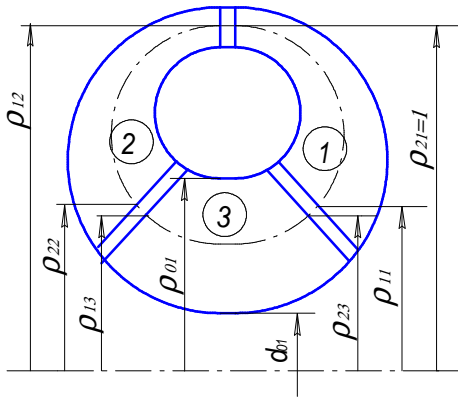


Рис. 1 – Коло циркуляції гідротрансформатора.

Значення витрати насосного колеса на розрахунковому режимі:

$$Q_1^* = \frac{\pi}{4} (\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2) \cdot \varphi_{0,1}^* \cdot D_{2,1}^3 \cdot \frac{\pi \cdot n}{60}, \quad (4)$$

де $\rho_{\max} = \frac{D_{0,1}}{D_{2,1}}$ та $\rho_{\min} = \frac{d_{0,1}}{D_{2,1}}$ – відповідно найбільший і найменший відносні радіуси всмоктуючої воронки;

$D_{2,1}$ – діаметр на виході з насосного колеса.

До основних параметрів зовнішньої характеристики гідротрансформатора, які визначають спільну роботу з двигуном і трансмісією транспортного засобу, відносять:

– значення відносних моментів на насосному \bar{M}_1 , турбінному \bar{M}_2 колесах:

$$\bar{M}_1 = \left[\frac{K_z}{\Delta\Gamma_1^*} - \left(\frac{K_z}{\Delta\Gamma_1^*} - 1 \right) \bar{\varphi} \right] \bar{\varphi}, \quad (5)$$

$$\bar{M}_2 = \left[\frac{K_z i^*}{\eta_\Gamma^* \Delta\Gamma_1^*} + \left(1 - \frac{K_z i^*}{\eta_\Gamma^* \Delta\Gamma_1^*} + \frac{\rho_{2,2}^2 i^{*2}}{\eta_\Gamma^* \Delta\Gamma_1^*} \right) \bar{\varphi} - \frac{\rho_{2,2}^2 i^{*2}}{\eta_\Gamma^* \Delta\Gamma_1^*} \frac{i}{i^*} \right] \bar{\varphi}, \quad (6)$$

де $\Delta\Gamma_1^*$ – безрозмірна різниця циркуляції насосного колеса на розрахунковому режимі;

– гідравлічний коефіцієнт трансформації:

$$k_\Gamma = \frac{M_2}{M_1} = \frac{N_2 \omega_1}{N_1 \omega_2} = \frac{\eta_\Gamma}{i}, \quad (7)$$

де ω_1 – частота обертання насосного колеса, с^{-1} ; ω_2 – частота обертання турбінного колеса; N_1 – потужність на насосному колесі, кВт; N_2 – потужність на турбінному колесі, кВт; η_Γ – гідравлічний коефіцієнт корисної дії

(ККД) трансформатора; η_Γ^* – ККД на розрахунковому режимі; $i = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ – передавальне відношення трансформатора;

– $\bar{\eta}_\Gamma$ – відносний ККД гідротрансформатора:

$$\bar{\eta}_\Gamma = \frac{i \bar{M}_2}{i^* \bar{M}_1},$$

– коефіцієнт прозорості Π :

$$\Pi = \frac{\bar{M}_{1,0}}{\bar{M}_{1,m}}, \quad (8)$$

де $\bar{M}_{1,0}$ – момент насосного колеса на пусковому режимі, Нм; $\bar{M}_{1,m}$ – момент насосного колеса на муфтовому режимі, Нм.

Перерахунок відносної характеристики до розмірної здійснюється на підставі рівняння потужності гідротрансформатора:

$$N_1^* = 1,15 \cdot 10^{-8} \cdot (\rho_{\max}^2 - \rho_{\min}^2) \cdot \gamma \cdot \varphi_{0,1}^* \cdot \Delta\Gamma_1^* \cdot D_{2,1}^5 \cdot n_1^3, \quad (9)$$

де γ – питома вага робочої рідини, кг/м^3 ; n_1 – оберти насосного колеса, хв^{-1} .

Рівняння балансу і рівняння для розрахунку основних параметрів зовнішньої характеристики (5) – (9) є ма-

струму насосного колеса, турбінного колеса і реактора відповідно (рис. 1); $\rho_{2,2}$ – відносний радіус вихідної кромки турбінного колеса; $\bar{\varphi}$ – відносна витрата ($\bar{\varphi} = \varphi / \varphi^* = c_m / c_m^* = Q / Q^*$), відношення коефіцієнтів швидкості, меридіональних швидкостей або витрат на поточному та розрахунковому режимі.

Визначення меридіональної швидкості в насосі $c_{m2,1}^*$, м/с проводиться за рівнянням:

$$c_{m2,1}^* = U_{2,1} \cdot \varphi_{0,1}^*, \quad (3)$$

де $\varphi_{0,1}^*$ – коефіцієнт безрозмірної меридіональної швидкості на вході у всмоктувальну воронку насоса; $U_{2,1}$ – окружна швидкість на виході з насосного колеса.

тематичною моделлю робочого процесу гідротрансформатора. Побудову зовнішніх характеристик при заданні основних параметрів на ЕОМ реалізовано в програмі «TRANS_2.exe» [4] к.т.н. Бондаренко А. В. Зараз ця програма доведена до отримання вихідних даних у графічному вигляді (рис. 2).

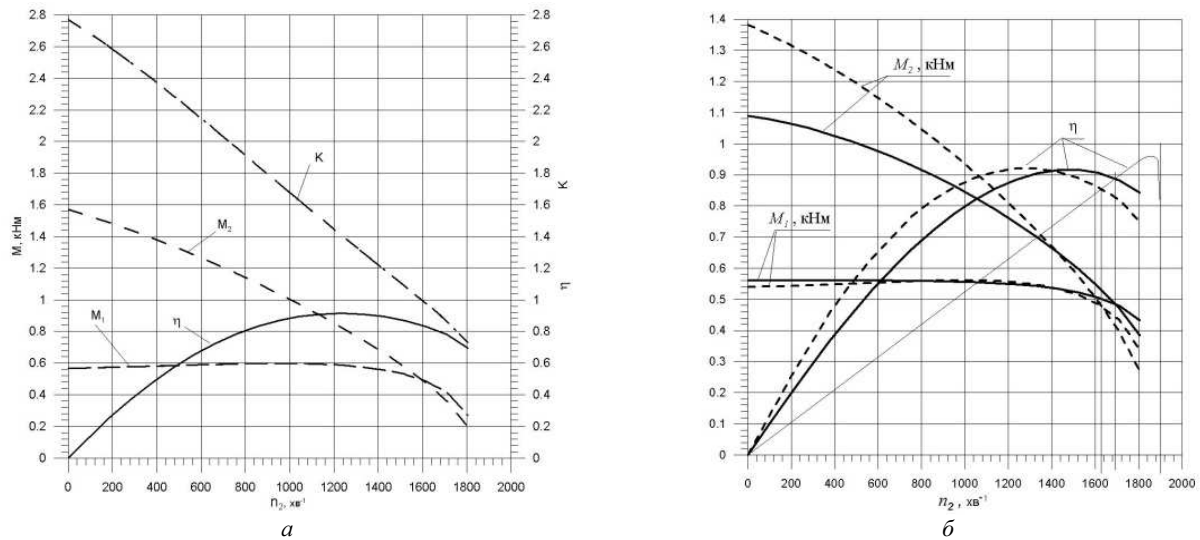


Рис. 2 – Зовнішні характеристики гідротрансформатора: а – відносна; б – розмірна.

Розрахунок і побудова меридіональної проекції проточної частини. Проточна частина гідротрансформатора є порожниною, що знаходиться між двома *тороїдальними поверхнями*: *тором* (внутрішнім обрисом) і *чашею* (зовнішнім контуром). Меридіанний перетин цієї порожнини називається *колом циркуляції*, зображення якого наведено на рис. 3. Габаритні розміри кола циркуляції в радіальному напрямку обмежуються величиною $d_{0,1}$, і величиною активного діаметра, що визначається за результатами розрахунку $D_a = D_{2,1} + b_{2,1}$. Один з граничних обрисів кола циркуляції повинен бути заданий (бажано симетрично щодо вертикальної осі, перпендикулярної до осі гідротрансформатора), інший – побудований за результатами визначення та проміжних значень з дотриманням умов. За технологічними міркуваннями доцільно ставити обрис чаші у вигляді кола. Через симетрії досить будувати верхню, по відношенню до осі трансформатора, половину меридіональної проекції проточної частини, а також одну з половин (ліву чи праву), по відношенню до вертикальної площини симетрії, кола циркуляції. Побудова проточної частини гідротрансформатора виконується на ЕОМ за допомогою програми GEOM.exe [4]. Програма GEOM.exe розраховує геометричні параметри кола циркуляції комплексного гідротрансформатора. У програмі GEOM.exe передбачена візуалізація гідродинамічного розрахунку. На екрані дисплея можна спостерігати обриси кола циркуляції з метою переконатися в їх плавності. Така візуалізація, як приклад, показана на рис. 3. Наведемо покроково побудову кола циркуляції і інших складових з використанням графічного редактора Компас 3D:

– створити (Ctrl+N), «креслення», «сервіс», «параметри», «параметри першого аркуша», «формат», «стандартний А-1 горизонтальний», «ОК»;

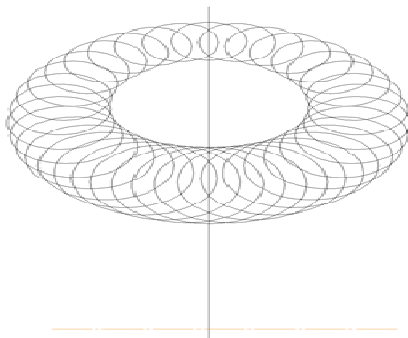


Рис. 3 – Демонстрація плавності контурів кола циркуляції.

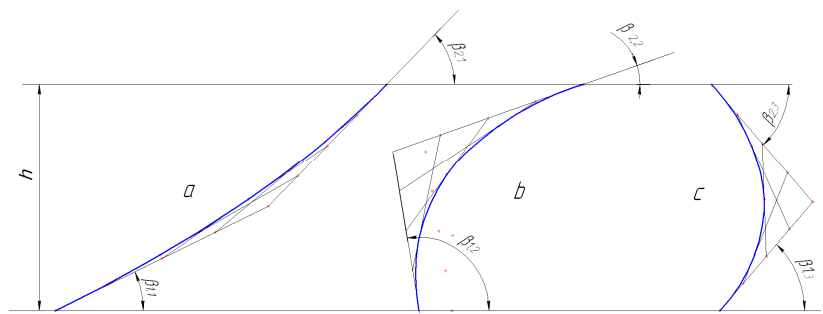


Рис. 4 – Скелетні лінії профілів в розгортці на площину: а – насоса; б – турбіни; с – реактора.

– нанести горизонтальну вісь обертання коліс гідротрансформатора і вертикальну вісь симетрії. На вертикальній осі відкласти розмір і провести коло радіуса;

– розбити коло на 18 частин. Провести промені через точки розбиття, що відповідає прийнятому в розрахунку інтервалу 20° . На кожному промені правої половини кола від точок розбиття відкласти розміри, довжина яких відповідає значенням кута від 90° до -90° . Отримані точки виділити і скопіювати симетрично щодо вертикальної осі симетрії. Через отримане таким чином сімейство точок провести *криву Без'є*, яка є середньою лінією

єю кола циркуляції;

– через точки на середній лінії правої половини кола циркуляції провести дотичні і щодо них симетрично відобразити відповідні точки; отримані точки виділити і скопіювати симетрично щодо вертикальної осі симетрії кола циркуляції. Через отримане таким чином сімейство точок провести криву Без'є, яка є внутрішньою межею кола циркуляції;

– видалити ліву частину отриманого тимчасового кола циркуляції, провести нову вісь симетрії, відступивши вліво на половину необхідного зазору між насосним і турбінним колесом і, щодо неї, скопіювати праву частину рисунка. Таким чином, ми отримуємо коло циркуляції з зазором між насосним і турбінним колесом. З'єднати «розрізані» криві відповідними за товщиною і стилем відрізками прямих. Відкласти від осі обертання відстані до вхідних і вихідних кромek на середній лінії, провести через отримані точки відрізки прямих, відповідні крайкам, проставити всі необхідні розміри;

– у правій частині листа будуюмо графік розподілу циркуляції по колесах гідротрансформатора, умовно відобразивши середню лінію кола циркуляції уздовж вертикальної осі, починаючи з насоса. Величини циркуляцій будуюмо в масштабі, використовуючи дані попередніх розрахунків;

– використовуючи дані про кути входу і виходу лопаток коліс на середній лінії струму кола циркуляції, будуюмо решітки скелетних ліній довільної ширини. Вхідні кути відкладаємо на нижній кромці решітки, а вихідні – на верхній. Поєднавши точки на вхідній кромці з точками на вихідній кромці за допомогою плавної кривої, одержимо форми скелетних ліній коліс гідротрансформатора (рис. 4);

– побудова трикутників швидкостей на вхідних і вихідних крайках лопаток на середній лінії струму виконуємо за даними про компоненти абсолютної швидкості в цих точках.

Профілювання лопаток робочих коліс комплексного гідротрансформатора. У практиці проектування гідротрансформаторів з радіальними турбінами використовується спрощений метод профілювання лопаток, а саме – за середньою лінією каналу. Кромки лопаток виконують паралельними осі обертання. Тому кут лопатки уздовж кожної кромки приймають однаковим, рівним куту лопатки на середній лінії струму.

У комплексних гідротрансформаторах кромки лопаток робочих коліс внаслідок круглої або овальної форми кола циркуляції розташовані не паралельно осі, а похило, тому в різних точках крайок (особливо на крайніх лініях струму) окружні швидкості істотно відрізняються. Різні значення мають також окружні складові абсолютної швидкості $c_{ui,j}$. Ці обставини призводять до необхідності розраховувати кути лопаток $\beta_{i,j}$ на різних лініях струму для розрахунку і побудови профілів.

Для побудови трикутників швидкостей на крайніх лініях струму, на поверхні чаші і тора, слід визначити всі складові швидкостей в точках перетину кромek коліс з цими поверхнями на меридіанній проекції кола циркуляції. Спочатку з креслення кола циркуляції (меридіанній проекції) визначаються діаметри крайок коліс на поверхнях чаші і тора (відповідно $D_{ci,j}$ і $D_{Ti,j}$) і обчислюються (для робочих коліс) окружні швидкості:

$$u_{ci,j} = \frac{D_{ci,j}}{2} \omega_j.$$

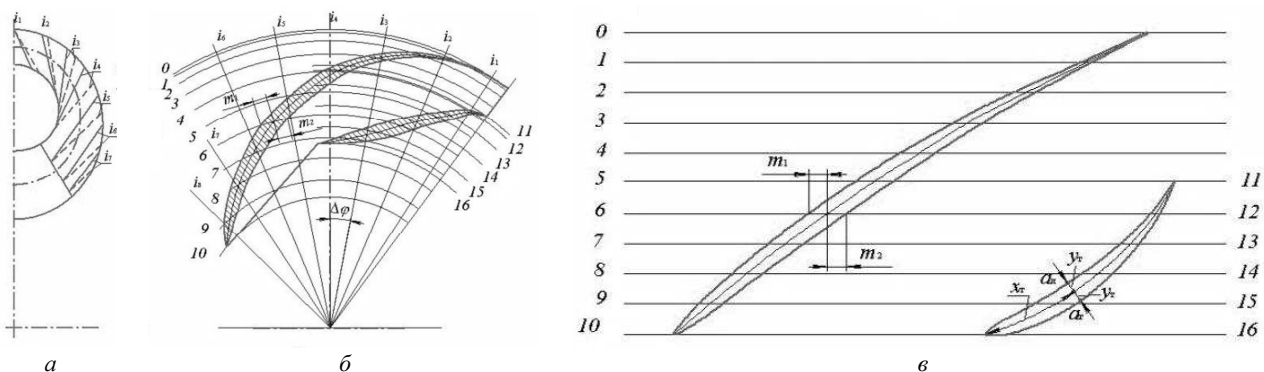


Рис. 5 – Профілювання лопатки насосного колеса гідротрансформатора:
а – меридіональна проекція; б – план лопатки; в – конформна діаграма лопатки кінцевої товщини.

Далі з припущення $c_u r = \text{const}$ уздовж крайок коліс перераховуються окружні складові абсолютної швидкості на лініях струму чаші і тора за значеннями цих складових на середній лінії каналу:

$$c_{uqi,j} = c_{ui,j} \frac{D_{i,j}}{D_{ci,j}}, \quad c_{uTi,j} = c_{ui,j} \frac{D_{i,j}}{D_{Ti,j}}.$$

Меридіональну складову абсолютної швидкості c_m , як і раніше, приймаємо постійною і однаковою на всіх крайках лопатей. Кути входу і виходу на скелетних лініях можна обчислити за формулою, яка може бути отримана з трикутників швидкостей:

- для поверхні чаші – $\beta_{\text{ч}i,j} = \arctg \frac{c_m}{u_{\text{ч}i,j} - c_{u\text{ч}i,j}}$;
- для поверхні тору – $\beta_{\text{Т}i,j} = \arctg \frac{c_m}{u_{\text{Т}i,j} - c_{u\text{Т}i,j}}$

Алгоритм розрахунку геометричних і кінематичних параметрів за вище наведеними рівняннями реалізований в програмі «TOR_ЧАША.exe» [4]. За допомогою програми «PROFILIR.exe» [4] виконується розрахунок товщини профілів. На рис. 5 представлений приклад профілювання лопатки насосного колеса, що включає меридіональну проекцію з радіальними перерізами, план лопатки, профілі кінцевої товщини.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними шляхи дослідження, які пов'язані з використанням уточненого розв'язку рівняння балансу енергії ГТР за рахунок введення коефіцієнтів кінцевого числа лопаток турбінного колеса – K_{zT} та реактора – K_{zP} , а також завданням коефіцієнтів ударних втрат $\psi = f(i)$ для кожного з робочих коліс на основі апроксимації експериментальних даних поліномами 2-го рівня: $\psi = 0,2$ при $i = i^*$, $\psi = 2 - 2,5$ при $i = 0$, $i = 1$.

Висновки: Геометричні і кінематичні параметри комплексного гідротрансформатора, його зовнішні характеристики, побудовані в процесі проектування, свідчать, що запропонована математична модель і методика проектування на ЕОМ дають можливість отримати комплексний гідротрансформатор, який має гарні енергетичні властивості та високий ККД.

Наведено опис методики побудови кола циркуляції і профілювання лопаток робочих коліс комплексного гідротрансформатора за допомогою пакета прикладних програм, що розроблені на кафедрі «Гідравлічні машини» НТУ «ХПІ» [10]. Даний пакет програм дозволяє успішно проектувати високоефективні проточні частини гідротрансформаторів на ЕОМ.

Список літератури

1. Schweitzer J., Gandham J. Computational Fluid Dynamics in Torque Converters : Validation and Application // International Journal of Rotating Machinery. – 2003. – № 9. – P. 411 – 418.
2. Алексапольский Д. Я. Гидродинамические передачи. – Ленинград : MashGiz, 1963. – 272 с.
3. Неня В. Г., Кухтенков Ю. М. Влияние угла выхода лопатки насосного колеса на параметры внешней характеристики гидротрансформатора // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Харків, 2009. – № 4/10(40). – С. 55 – 57.
4. Бондаренко А. В., Зав'ялов П. С., Кухтенков Ю. М. Розрахунок і проектування проточної частини комплексного гідротрансформатора : навч. посіб. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – 52 с.
5. Веретенников А. И., Соловьев В. М., Стримовский С. В., Толстолуцкий В. А., Кошман В. А. Математическая модель рабочего процесса гидротрансформатора // Интегровані технології та енергозбереження. – Харків, 2010. – №3. – С. 50 – 56.
6. Топольник Р. А., Котельников С. Н. Оценка влияния характеристик гидротрансформатора на параметры разгона боевой машины // Известия ТулГУ. Техн. Науки. – 2017. – Вып. 7. – С. 286 – 298.
7. Соловьев В. М., Зав'ялов П. С., Толстолуцкий В. А., Подвойский Ю. А., Имитер А. П. Экспериментальное исследование внешних характеристик комплексного гидротрансформатора с модифицированным колесом реактора // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2011. – № 4/8(53). – С. 51 – 55.
8. Зав'ялов П. С., Соловьев В. М., Подвойский Ю. А. Численное моделирование потока в решетке реактора гидротрансформатора // Пробл. машиностроения. – 2009. – Т. 12. – № 3. – С. 11 – 21.

References (transliterated)

1. Schweitzer J., Gandham J. Computational Fluid Dynamics in Torque Converters : Validation and Application. *International Journal of Rotating Machinery*. 2003, no. 9, pp. 411–418.
2. Aleksapol'skiy D. Y. *Gidrodinamicheskie peredachi* [Hydrodynamic transmissions]. Leningrad, Mashgiz Publ., 1963. 272 p.
3. Neny V. G., Kukhtenkov Y. M. Vliyaniye ugla vykhoda lopatki nasosnogo kolesa na parametry vneshney kharakteristiki gidrotransformatora [Influence of the exit angle of the impeller blade on the parameters of the external characteristics of the torque converter]. *Skhidno-Yevropeys'kyi zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2009, no. 4/10(40), pp. 55–57.
4. Bondarenko A. V., Zav'yalov P. S., Kukhtenkov Y. M. *Rozrakhunok i proektuvannya protochnoyi chastyny kompleksnogo gidrotransformatora : navch. posib.* [Calculation and design of the flow part of an integrated torque converter : textbook]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014. 52 p.
5. Veretennikov A. I., Solov'yov V. M., Strimovskiy S. V., Tolstolutskiy V. A., Koshman V. A. Matematicheskaya model' rabocheho protsessa gidrotransformatora [Mathematical model of the workflow of a torque converter]. *Integrovani tekhnologiyi ta energozberezhennya* [Integrated technologies and energy saving]. Kharkiv, 2010, no. 3, pp. 50–56.
6. Topol'nik R. A., Kotelnikov S. N. Otsenka vliyaniya kharakteristik gidrotransformatora na parametry razgona boevoy mashiny [Estimation of the influence of the characteristics of a torque converter on the parameters of acceleration of a combat vehicle]. *Izvestiya TulGU. Tekhn. Nauki.* [Report of the Tula State University. Engineering]. 2017, vol. 7, pp. 286–298.
7. Solov'yov V. M., Zav'yalov P. S., Tolstolutskiy V. A., Podvoyskiy Y. A., Imiter A. P. Eksperimental'noe issledovanie vneshnikh kharakteristik kompleksnogo gidrotransformatora s modifitsirovannym kolesom reaktora [Experimental study of the external characteristics of a complex hydrotransformer with a modified reactor wheel]. *Skhidno-Yevropeys'kyi zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2011, no. 4/8(53), pp. 51–55.
8. Zav'yalov P. S., Solov'yov V. M., Podvoyskiy Y. A. Chislennoe modelirovaniye potoka v reshetke reaktora gidrotransformatora [Numerical simulation of the flow in the lattice of the reactor of a torque converter]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2009, vol. 12, no. 3, pp. 11–21.

Надійшла (received) 06.05.2019

Кухтенков Юрій Михайлович (Кухтенков Юрий Михайлович, Kukhtenkov Yurii Michaylovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 30-30-629; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.

Крупа Євгеній Сергійович (Крупа Евгений Сергеевич, Krupa Evgeniy Sergeevich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 315-59-42; e-mail: zhekr@ukr.net.

УДК 539.01

Е. А. НАБОКА, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

УТОЧНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ СИНФАЗНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ АКТИВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Для описания колебаний активной механической среды, имеющей дефекты и использующей энергию гистерезисного перехода материала при его расширении в объеме дефектов, уточнена зависимость модуля Ламе всестороннего сжатия от плотности. В результате этого уточнения из известной математической модели упругого континуума выведено новое уравнение типа Клейна – Гордона для продольных колебаний среды, создающих синфазное поле изменения давления и плотности, и волновое векторное уравнение для синфазных продольно-поперечных колебаний, создаваемых неподвижными и движущимися зарядами (токами). Показано, что для этой модели плоские (или сферические) синфазные волны распространяются с одинаковой скоростью, что соответствует известному свойству физического пространства. Получена факторизация волнового векторного уравнения в форме системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Указана причина стабилизации амплитуды синфазных колебаний давления и плотности среды (температурный фактор).

Ключевые слова: активная среда, механические колебания, гистерезис, синфазное поле, модули упругости, волновое уравнение, уравнение Клейна – Гордона, уравнения Максвелла, условие Лоренца, электромагнитное поле, потенциалы поля.

О. О. НАБОКА, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

УТОЧНЕНІ РІВНЯННЯ СИНФАЗНИХ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ АКТИВНОГО МЕХАНІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

З метою описання активного механічного середовища, що має дефекти та використовує енергію гистерезисного переходу матеріалу при його розширенні в об'ємі дефектів, уточнено залежність модуля Ламе всебічного стиснення від щільності. Як результат цього уточнення із відомої математичної моделі пружного континуума виведено нове рівняння типу Клейна – Гордона для поздовжніх коливань середовища, що утворюють синфазне поле зміни тиску та щільності, а також хвильове векторне рівняння для синфазних поздовжньо-поперечних коливань, породжених нерухомими зарядами та зарядами, що рухаються (токами). Показано, що для цієї моделі плоскі (або сферичні) синфазні хвилі розповсюджуються з однаковою швидкістю, що відповідає відомій властивості фізичного простору. Отримано факторизацію хвильового векторного рівняння у формі системи рівнянь Максвелла для електромагнітного поля. Вказано причину стабілізації амплітуди синфазних коливань тиску та щільності середовища (температурний фактор).

Ключові слова: активне середовище, механічні коливання, гистерезис, синфазне поле, модуль пружності, хвильове рівняння, рівняння Клейна – Гордона, рівняння Максвелла, умова Лоренца, електромагнітне поле, потенціали поля.

O. O. NABOKA, A. L. GRIGORIEV

SPECIFIED EQUATIONS OF IN-PHASE ELASTIC VIBRATIONS OF ACTIVE MECHANICAL MEDIUM

The vibrations of active mechanical medium featuring defects and using the energy of the hysteresis transition of the material as it expands inside the defect volumes is described by specifying the dependence of the Lamé bulk modulus on the density. As a result of this specification a new Klein – Gordon type equation describing longitudinal vibrations of the medium, which give rise to an in-phase pressure and density variation field, as well as a vector wave equation for longitudinal and transverse vibrations generated by stationary and moving charges (currents) are derived from the well-known mathematical model of elastic continuum. For this new model the plane (or spherical) in-phase waves are shown to have the same propagation speed which is in good agreement with the known property of physical space. The vector wave equation is factorized in the form of a system of the electromagnetic field Maxwell's equations. The cause for stabilizing the amplitude of pressure and medium density vibrations is indicated (temperature factor).

Key words: active medium, mechanical vibrations, hysteresis, in-phase space, elasticity modulus, wave equation, Klein – Gordon equation, Maxwell's equation, Lorentz condition, electromagnetic field, field potentials.

Введение. Известно, что в наше время основным фактором, влияющим на темпы технического прогресса и повышение качества жизни людей, является дефицит энергии. Переход к ядерной энергетике, как показывает опыт последних лет, не является панацеей, а перспективы управляемого термоядерного синтеза в земных условиях существенно ограничены проблемами извлечения дейтерия (из морской воды) и производства трития (на ускорителях). Поэтому остаётся актуальным поиск принципиально новых источников энергии, который, на самом деле, никогда не прекращался и продолжается в наши дни. Знаменитая формула Эйнштейна [1]

$$E = c^2 \cdot m$$

© Е. А. Набока, А. Л. Григорьев, 2019

указывает на существование внутренней энергии E у любой массы m , и, поскольку коэффициент пропорциональности здесь большой,

$$c^2 \approx 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2,$$

величина этой энергии огромна. Для примера рассмотрим стальную гирьку массой 200 г. Этой массы, если овладеть соответствующей технологией и перевести её в фотоны, будет достаточно, чтобы получать 1 млн киловатт тепловой мощности в течение 7 месяцев. *Сжигание* в гипотетическом фотонном реакторе 36 кг любого вещества закроет все годовые затраты Украины по электрической, тепловой и другим видам энергии.

В то же время, приведенный пример показывает, насколько опасными могут оказаться соответствующие эксперименты с физическим пространством, и проводить их, без необходимой подготовки, не рекомендуется. Наверное, *в современных условиях и передавать людям эту технологию было бы безответственно* [2]. Но это не означает, что данной тематикой не нужно заниматься. Высокие технологии всегда находят *конверсионную составляющую*, имеющую непосредственное прикладное значение, и эта тематика не станет исключением. Напомним, что первым практическим применением ядерной физики была не атомная бомба, а рентгенография, и до 1938-го года все результаты научных исследований публиковались открыто.

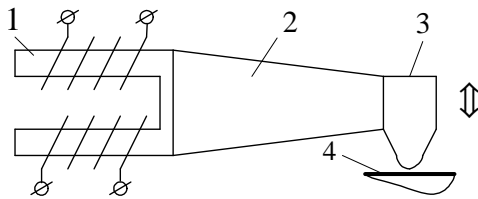


Рис. 1 – Принципиальные схемы устройств для ультразвуковой обработки металлов: 1 – электромагнитный генератор (либо магнитоstrictionный или пьезокварцевый элемент); 2 – волновод; 3 – индентор; 4 – обрабатываемая поверхность.

Использование винтового волновода, колеблющегося синфазно, уменьшает потери на трение и облегчает компоновку устройства.

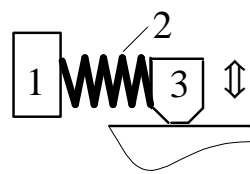


Рис. 2 – Синфазный винтовой титановый соноотрод для гомогенизатора биологического материала.

Указанных рисков можно избежать, если ограничиться работой с абстрактными математическими моделями; так сейчас в основном и поступают. Но в [3 – 6] решили пойти дальше и выполнить математическое (а в перспективе – и физическое) моделирование реальной среды, обладающей свойствами физического пространства. В основу математического моделирования были положены уравнения, описывающие упругую механическую среду, и такой выбор сделан по следующим причинам:

- он отвечал той классической традиции [7 – 9], которую к началу 20-го столетия успели заложить в физическую науку *Джеймс Максвелл* и *Анри Пуанкаре*;
- в любой серьезной научной аудитории найдётся не пустое множество учёных, обладающих механической интуицией, то есть той частью знания, которую трудно формализовать, но именно она помогает решать трудные задачи;
- сплошная механическая среда лучше всего изучена и с ней легко экспериментировать;
- возможные конверсионные приложения будут касаться упругих элементов машин, то есть имеют прямое отношение к широкому кругу инженерных задач (напр., к приводам для передачи механических колебаний, показанным на рис. 1, 2 и описанных в [10]).

Но в отличие от тех задач, которые рассматривали Максвелл и Пуанкаре, новая механическая среда является *активной*. Понятие активной среды пришло в современную науку относительно недавно, в 1970-е годы, причём из биологии; как оказалось, таким свойством обладают ткани сердечной мышцы. В активной среде существует внутренняя энергия, которая используется для поддержания амплитуды колебаний распространяющихся волн. В сердце она имеет химическую природу, а в механической среде, рассмотренной в [3 – 6], – это потенциальная энергия упругопластической деформации (рис. 3). Химические и другие типы реакций не обеспечат необходимую для данного случая скорость релаксации напряжений, поэтому выбор в пользу механической среды, по нашему убеждению, является безальтернативным.

Известно, что с открытием *солитонов*, которые обладают квантовыми и релятивистскими свойствами, появилась надежда вернуть квантовую физику в лоно классической,

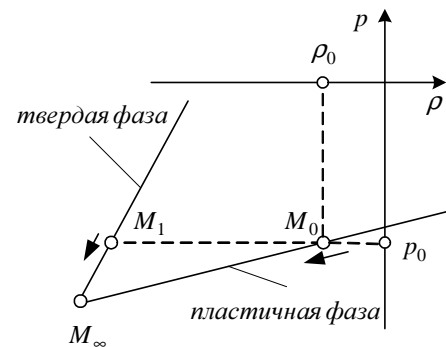


Рис. 3 – Гистерезисный переход вещества среды по пути $M_0 M_\infty M_1$.

Стрелки обозначают направление расширения среды; ρ , p – ее плотность и давление. Точка M_∞ отвечает потере стабильности материи [6].

то есть возвратит физику микромира наглядность,

и, следуя Эрвину Шредингеру, рассматривать её как раздел волновой механики (а если говорить точнее – как нелинейную вибромеханику упругой среды, расширяющейся за счет деформации дефектов).

Постановка задачи. Целью публикации является уточнение и развитие некоторых аспектов теории активной механической среды, изложенных в [3] и цитированной там литературе. В частности, подлежат уточнению следующие моменты:

- уравнения динамических деформаций упругой среды с дефектами;
- уравнения синфазных волновых полей продольных и поперечных деформаций.

В работах [3 – 6] для описания колебаний активной механической среды использовано дифференциальное уравнение

$$\partial(\rho \cdot \partial \bar{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(K \cdot \text{div} \bar{u}) - \text{rot}(G \cdot \text{rot} \bar{u}) + \bar{F}, \quad (1)$$

где $\bar{u}(x, y, z, t)$ – малое упругое смещение точки с координатами x, y, z в момент времени t ; ρ – плотность среды, являющаяся функцией давления p (на рис. 3 этой зависимости отвечает график для пластичной фазы); G – модуль сдвига, пропорциональный плотности, $G = c^2 \rho$; $K = a^2 \rho$ – модуль Ламе объёмного сжатия,

$$K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G;$$

a, c – скорости звука для продольных и поперечных колебаний; μ – коэффициент Пуассона (который в этой модели среды является постоянной величиной); $\bar{F} = \rho \bar{\Psi}$ – поле плотностей сил на границах дефектов.

Уравнение (1) решалось при использовании векторного и скалярного потенциалов в форме

$$\bar{u} = \text{rot} \bar{A} + \text{grad} \varphi, \quad (2)$$

причём потенциалы φ и \bar{A} удовлетворяли волновым уравнениям

$$a^{-2} \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \Delta \varphi + U / K, \quad (3)$$

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A} / \partial t^2 = \Delta \bar{A} + \bar{L} / G, \quad (4)$$

где $\bar{F} = \text{rot} \bar{L} + \text{grad} U$; $\Delta[\cdot], \Delta[\cdot]$ – дифференциальные операторы Лапласа,

$$\Delta \varphi = \text{div} \text{grad} \varphi; \quad \Delta \bar{A} = \text{grad} \text{div} \bar{A} - \text{rot} \text{rot} \bar{A}.$$

После учета дефектов, возможная форма которых показана на рис. 4, 5, уравнение (3) было уточнено и заменено на систему

$$\rho_0 \partial^2 \varphi / \partial t^2 = -p; \quad a^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \text{div} \text{grad} p - (\omega_c / a)^2 (p - p_0), \quad (5)$$

где ω_c – некоторая константа, имеющая размерность круговой частоты и вычисляемая по формулам [4].

Уравнения (5) имеют синфазное решение

$$p = p_0 + p_* \cdot \sin \omega_c t,$$

откуда следовали равенства

$$\rho = \rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_c t, \quad K = K_0 + K_* \cdot \sin \omega_c t, \quad G = G_0 + G_* \cdot \sin \omega_c t,$$

причём коэффициенты, используемые в правых частях этих равенств, были одинаковы для всего колеблющегося объёма и являлись медленно изменяющимися во времени величинами либо константами.

Отсюда в предположении $\omega \ll \omega_c$, где ω – круговая частота анализируемого процесса, после усреднения были получены волновые поля синфазных поперечных колебаний среды вида

$$\bar{u} = \bar{u}_* \cdot \sin \omega_c t, \quad \bar{L} = \bar{L}_* \cdot \sin \omega_c t,$$

причем амплитуды \bar{u}_* удовлетворяли уравнению

$$\rho_* \cdot \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 = -G_* \cdot \text{rot} \text{rot} \bar{u}_*, \quad (6)$$

и равенству $\bar{u}_* = \text{rot} \bar{A}_*$, где

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A}_* / \partial t^2 = \Delta \bar{A}_* + \bar{L}_* / G_*.$$

Далее уравнение (6) получило факторизацию в форме уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot} \bar{E}_* = -c^{-1} \cdot \partial \bar{H}_* / \partial t, & \text{div} \bar{E}_* = 4\pi \cdot q_*, \\ \text{rot} \bar{H}_* = c^{-1} \cdot \partial \bar{E}_* / \partial t + (4\pi / c) \cdot \bar{J}_*, & \text{div} \bar{H}_* = 0, \end{cases}$$

и закона сохранения заряда

$$\text{div} \bar{J}_* + \partial q_* / \partial t = 0,$$

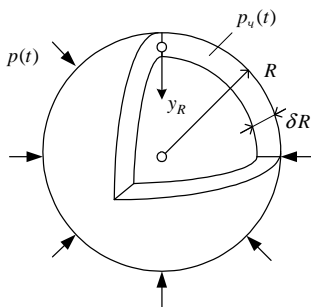


Рис. 4 – Дефект в форме пустотелой оболочки [6].

где величина заряда и плотность тока определяются равенствами

$$q_* = -\text{div } \vec{L}_* / (4\pi), \quad \vec{J}_* = (\partial \vec{L}_* / \partial t) / (4\pi).$$

Однако указанная факторизация, при внешнем сходстве с уравнениями электромагнитного поля, имеет существенный недостаток. Формула для напряженности электрического поля

$$\vec{E}_* = -\text{grad } \Phi_* - c^{-1} \cdot \partial \vec{A}_* / \partial t$$

использует скалярный потенциал Φ_* , который связан с векторным потенциалом \vec{A}_* условием Лоренца

$$\text{div } \vec{A}_* + c^{-1} \cdot \partial \Phi_* / \partial t = 0. \quad (7)$$

С формальной точки зрения появление этого потенциала не противоречит остальным выкладкам и преобразованиям из [4], но физический смысл его остается неясным. Поскольку скорость распространения продольных волн выше,

чем у поперечных колебаний, потенциал Φ_* не может быть связан с потенциалом φ_* , получаемым после усреднения уравнения (3),

$$a^{-2} \cdot \partial^2 \varphi_* / \partial t^2 = \text{div grad } \varphi_* + U_* / K_*.$$

Выход из возникшего противоречия, как всегда это бывает в серьезных случаях, был подсказан самой природой. Но прежде нужно сделать два замечания.

Во-первых, в таком же тупике в свое время оказался и Джеймс Максвелл, который пытался дать механическую интерпретацию своим уравнениям на основе особого устройства упругой среды, которую в его время называли *эфиром*. В конце концов, он справился с этой задачей [7], но остальные физики посчитали его решение слишком сложным, чтобы быть правильным. И с тех пор в их среде укоренилась следующая поговорка:

«В уравнениях Максвелла существенны именно уравнения».

Во-вторых, анализируя поля напряжений и деформаций твёрдого тела, можно найти обоснование для эффектов электромагнетизма. Физики, работавшие после Максвелла, объясняли аналогию по-своему: это, мол, неудивительно, поскольку механика твёрдого поликристаллического тела базируется на уравнениях электромагнитного поля, полученных всё тем же Максвеллом. В этом они правы, но у Максвелла (и у Анри Пуанкаре в монографии [8]) речь шла о другом твёрдом теле, первичном в отношении нашего электромагнетизма и более «тонком» по сравнению с нашими твёрдыми телами. Механика этого тонкого тела также базируется на уравнениях Максвелла, но они справедливы для другого электромагнитного поля, более «тонкого», чем наше. Проблему лучше других понял *Давид Гильберт*, который сформулировал тезис о двойной бесконечности. У материи, по Гильберту [11], имеется иерархическая последовательность вложенных структур \mathbb{k}_j , неограниченная в обе стороны:

$$\dots \subset \mathbb{k}_{-n} \subset \dots \subset \mathbb{k}_{-2} \subset \mathbb{k}_{-1} \subset \mathbb{k}_0 \subset \mathbb{k}_1 \subset \mathbb{k}_2 \subset \dots \subset \mathbb{k}_n \subset \dots$$

Нашему уровню материи соответствует структура \mathbb{k}_0 . Сверхзадача фундаментальной физики – понять, как устроена структура \mathbb{k}_{-1} , несущая наш мир «на своих плечах», и увидеть структуру \mathbb{k}_1 , существование которой поддерживается нашим миром. Первая задача решается в микрофизике, вторая – в космологии.

Схематическое изображение структуры \mathbb{k}_1 показано на рис. 6. Как показывают результаты астрономических исследований, галактики во Вселенной располагаются не хаотично, а образуют своеобразные стенки пузырей, внутри которых светящейся материи нет. Следовательно, естественно предположить, что и структура \mathbb{k}_{-1} устроена аналогичным образом, то есть состоит из ячеек, имеющих тонкие упругие стенки.

Как известно, у тонких оболочек деформации сдвига не возникают, а изгиб и продольное сжатие определяются модулем упругости E . В результате **формальной** реализации такого предположения уравнение (1) приобретет следующий вид:

$$\partial(\rho \cdot \partial \vec{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(E \cdot \text{div } \vec{u}) - \text{rot}(E \cdot \text{rot } \vec{u}) + \vec{F} \quad (8)$$

и, после учета равенства $E = c^2 \rho$, где c – скорость распространения волн упругих (продольных и поперечных) колебаний, приведет к следующим изменениям уравнений (3) и (4):

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \text{div grad } \varphi + U / E, \quad (3a)$$

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = \Delta \vec{A} + \vec{L} / E. \quad (4a)$$

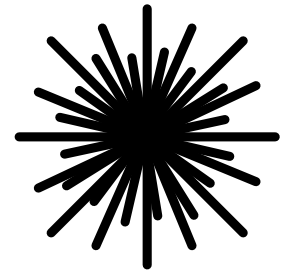


Рис. 5 – Дефект в форме снежинки из кристаллических нитей [6].

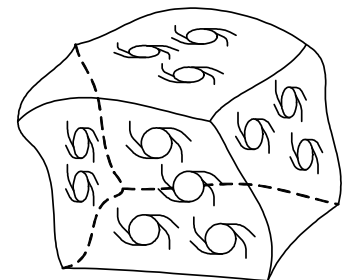


Рис. 6 – Стенки из галактик в силу принципа фрактальности являются моделью для дефектов микромира.

Однако, скалярный потенциал φ обязан также удовлетворять и системе (5), что при выполнении условия $\omega_c \neq 0$ становится невозможным. Следовательно, такая модель не учитывает влияние дефектов и не приводит к образованию синфазного поля колебаний плотности, без чего данное в [5] объяснение эффекта квантования зарядов и приведенное ниже объяснение отсутствия в уравнениях (1) и (8) силы трения становятся несостоятельными.

Вместе с тем следует заметить, что открытая современными астрономами ячеистая крупномасштабная структура Вселенной (рис. 6), а также выявленная ими же высокая скорость движения галактик, позволяет сделать три вывода, полезных для нашего исследования:

- упругий материал среды следует считать пористым, поэтому он имеет коэффициент Пуассона $\mu \approx 0$ (как у пробки);
- пульсации зарядов, сопровождающиеся неизбежными потерями энергии на трение, не приводят к чрезмерному перегреву среды и изменению её упругих свойств;
- гистерезисный переход материала среды (рис. 3) происходит в разных ее точках и не исчерпывает всей запасенной энергии.

Уточненное уравнение колебаний упругого континуума. Примем, как указывалось выше, что коэффициент Пуассона $\mu = 0$. Тогда при статических деформациях модуль Ламе всестороннего сжатия

$$K = 2G,$$

где G – это модуль сдвига. Заметим, что коэффициент 2 в этом равенстве определяется особенностями деформации: при сжатии квадрата упругий материал сжимается в направлении его стороны, а при чистом сдвиге он растягивается в направлении диагонали квадрата, которая в $\sqrt{2}$ длиннее стороны; кроме того, горизонтальная проекция силы в $\sqrt{2}$ раз меньше самой силы.

Учтем, что в известных равенствах

$$K = a^2 \rho \quad \text{и} \quad G = c^2 \rho,$$

где a, c – скорость звука для продольных и поперечных колебаний, соответственно, скорости звука от колебаний плотности не зависят. Кроме того, поскольку плотность ρ зависит от $\text{div } \vec{u}$,

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \text{div } \vec{u}),$$

и не зависит от $\text{rot } \vec{u}$, первое равенство следует уточнить, и считать, что

$$K = c^2 (\rho + \rho_0).$$

Действительно, в равенстве (1) величина скалярного потенциала имеет физический смысл давления среды и при колебаниях дивергенции описывается таким интегралом:

$$K = \int_0^1 a^2 \rho_0 (1 + \theta \cdot \text{div } \vec{u}) d\theta = a^2 \rho_0 \cdot (1 + 0.5 \cdot \text{div } \vec{u}) = 0.5 a^2 (\rho_0 + \rho_0 (1 + \text{div } \vec{u})) = c^2 (\rho_0 + \rho),$$

что и требовалось показать.

Кроме того, как это следует из выкладок работы [6], если влияние дефектов учитывать как равномерно распределенную величину, то

$$\text{div } \vec{\Psi} = -\rho_0 \omega_c^2 \cdot \text{div } \vec{u} \quad \text{и} \quad \text{rot } \vec{\Psi} = -\rho_0 \omega_c^2 \cdot \text{rot } \vec{u},$$

откуда следует равенство,

$$\vec{\Psi} = -\rho_0 \omega_c^2 \cdot \vec{u}, \quad (9)$$

где $\omega_c = \sqrt{\varepsilon_d} \cdot c / R$; ε_d – объёмная доля дефектов; R – средний радиус дефекта.

Для примера, если принять характерные для задач квантовой физики значения $R = 10^{-20}$ м, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\varepsilon_d = 10^{-6}$ (то есть считать, что объёмная доля дефектов примерно такая же, как у материала пробки), то получим синфазную частоту $\omega_c = 3 \cdot 10^{25}$ 1/с, которая превышает частоты покоя электрона и протона.

Если же в анализируемой области среды содержатся еще и заряды, внутри которых плотность (и давление) изменяются по более сложным зависимостям, чем анализируются в этой статье, то их влияние учитываем за счет дополнительного слагаемого вида $(\rho - \rho_0) \vec{\Psi}_q$.

Причем, в этом же слагаемом, в принципе, можно учесть аналогичное влияние дефектов, которые играют роль *микрочарядов* и колеблются с той же синфазной частотой и одинаковой фазой (но, в отличие от зарядов, они относительно среды неподвижны и токов не образуют). В результате получаем «океан отрицательных зарядов», которые равномерно распределены по всей среде. О подобной ситуации в своих моделях рассуждал Поль Дирак [12], но у него вместо микрочарядов фигурировали неподвижные электроны. Известно, что указанные

распределения зарядов не создают суммарных электромагнитных сил, поэтому в теории электромагнитного поля ими пренебрегают. Однако они способны объяснить наблюдаемую асимметрию между стабильными положительными и отрицательными зарядами, которые в нашей части Вселенной в основном представлены протонами и электронами, массы которых различаются почти в 2000 раз. Впрочем, этот важнейший вопрос здесь мы в подробностях освещать не будем, а рассмотрим его в дальнейших публикациях цикла.

В результате указанных уточнений уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \text{grad} \left(c^2 \rho_0 \text{div} \vec{u} \right) + \left[\text{grad} \left(c^2 \rho \text{div} \vec{u} \right) - \text{rot} \left(c^2 \rho \text{rot} \vec{u} \right) \right] - \rho_0 \omega_c^2 \cdot \vec{u} + (\rho - \rho_0) \vec{\Psi}_q,$$

или, если кроме преобразования левой части, в правой части дополнительно учесть гистерезисное трение с коэффициентом трения $k_{mp} \in [0.01; 0.1]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left((\rho - \rho_0) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = c^2 \rho_0 \text{grad} \text{div} \vec{u} + c^2 \Delta \left[\rho \cdot \left(\vec{u} + \frac{k_{mp}}{\omega_c} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \right] - \rho_0 \omega_c^2 \cdot \vec{u} + (\rho - \rho_0) \vec{\Psi}_q. \quad (10)$$

Уравнение (10) связывает между собой два неизвестных поля – скалярное поле плотностей ρ и векторное поле смещений \vec{u} , которые, кроме того, удовлетворяют системе соотношений типа (2) и (5):

$$\rho_0 \partial^2 \varphi / \partial t^2 = -p; \quad c^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \text{div} \text{grad} p - (\omega_c / c)^2 (p - p_0), \quad (11)$$

где $\vec{u} = \text{rot} \vec{A} + \text{grad} \varphi$.

Поэтому, решение системы уравнений (10), (11) проведем по следующему правилу.

Прежде всего, к тем составляющим равенства (10), которые не содержат переменную плотность ρ (то есть, это линейные составляющие данного равенства), применим оператор $\text{div}[\cdot]$, и получим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_0 c^2 \text{div} \vec{u}) = \text{div} \text{grad} (\rho_0 c^2 \text{div} \vec{u}) - \rho_0 \omega_c^2 \text{div} \vec{u}. \quad (12)$$

Учтем, что давление $p = p_0 + 2c^2 \rho_0 \text{div} \vec{u}$, откуда $\rho_0 c^2 \text{div} \vec{u} = \frac{p - p_0}{2}$.

Следовательно, (12) принимает вид уравнения Клейна – Гордона для давления p :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p - \frac{\omega_c^2}{c^2} (p - p_0). \quad (13)$$

В [6] было получено такое же уравнение, но там вместо скорости c в записи уравнения (13) участвует скорость a . Теперь мы видим, что у уравнений (12) и (13) в анализируемой среде используются одинаковые скорости.

Далее займемся слагаемыми (10), содержащими ρ . Уравнение (13) имеет синфазное решение:

$$p = p_0 + p_* \cdot \sin \omega_c t; \quad \text{откуда} \quad \rho = \rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_c t,$$

где ω_c – синфазная частота; ρ_0, ρ_* – это константы. Будем считать, что

$$\vec{\Psi}_q = \vec{\Psi}_* \cdot \sin \omega_c t,$$

тогда и решение уравнения (10) для смещения \vec{u} естественно искать в таком же виде:

$$\vec{u} = \vec{u}_* \cdot \sin \omega_c t,$$

где $\vec{\Psi}_*, \vec{u}_*$ – это амплитуды соответствующих колебаний, которые являются медленно изменяющимися функциями времени и имеют (по крайней мере) частные производные третьего порядка по координатам.

То есть, векторы $\vec{\Psi}_*$ и \vec{u}_* образуют так называемые *волновые поля* синфазных колебаний.

Подставим эти выражения для $\vec{u}, \rho, \vec{\Psi}$ в (10) и применим к обеим частям уравнения операцию усреднения по времени. Для этого вычислим среднее интегральное значение левой части уравнения (10) по промежутку времени $[t-T, t]$, где $T = n 2\pi \omega_c^{-1}$, $n \gg 1$. Несложно видеть, что в результате усреднения первое слагаемое в левой части (10) пропадает, а усреднение второго слагаемого дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{u}_*}{\partial t} \sin \omega_c t + \omega_c \vec{u}_* \cos \omega_c t, \\ \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left((\rho - \rho_0) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) d\tau &= \frac{1}{T} \left(\rho_* \sin \omega_c \tau \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) \Big|_{t-T}^t = \frac{1}{T} \left[\rho_* \left(\frac{\partial \vec{u}_*}{\partial \tau} \sin^2 \omega_c \tau + 0.5 \omega_c \vec{u}_* \sin 2\omega_c \tau \right) \right] \Big|_{t-T}^t = \\ &= \frac{1}{T} \left[0.5 \rho_* \left(\frac{\partial \vec{u}_*}{\partial \tau} \cdot (1 - \cos 2\omega_c \tau) + \omega_c \vec{u}_* \sin 2\omega_c \tau \right) \right] \Big|_{t-T}^t = \frac{1}{T} \left(0.5 \rho_* \cdot \frac{\partial \vec{u}_*}{\partial \tau} \right) \Big|_{t-T}^t = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(0.5 \rho_* \cdot \frac{\partial \vec{u}_*}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=\xi \in [t-T, t]} \approx 0.5 \rho_* \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}_*}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее интегральное значение левой части уравнения (10) составляет $0.5\rho_* \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_*}{\partial t^2}$.

Действуя аналогично, убеждаемся, что линейные слагаемые правой части (10) имеют среднее интегральное значение 0, а нелинейные слагаемые –

$$0.5\rho_* c^2 \Delta [\bar{u}_* + (k_{mp} / \omega_c) \cdot \partial \bar{u}_* / \partial t] \approx 0.5\rho_* c^2 \Delta [\bar{u}_*] \quad \text{и} \quad 0.5\rho_* \bar{\Psi}_*,$$

соответственно. Как видим, по причине высокого значения синфазной частоты, в результате усреднения влияние внутреннего трения на амплитуды синфазных колебаний нивелируется. Но мощность сил трения влияет на характеристики заряда и будет учтена при их моделировании.

В результате приходим к следующему уравнению для амплитудной функции \bar{u}_* синфазных колебаний:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_*}{\partial t^2} = c^2 [\text{grad div } \bar{u}_* - \text{rot rot } \bar{u}_*] + \bar{\Psi}_*,$$

или

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_*}{\partial t^2} - \Delta \bar{u}_* = \frac{1}{c^2} \bar{\Psi}_*. \quad (14)$$

Заметим, что равенство (14) является неоднородным волновым векторным уравнением и описывает группу продольно-поперечных синфазных колебаний упругого континуума, имеющего дефекты. Если принять, что

$$\bar{\Psi}_* = \text{grad } U_* + \text{rot } \bar{L}_*, \quad \text{то и} \quad \bar{u}_* = \text{grad } \varphi_* + \text{rot } \bar{A}_*,$$

причем потенциалы φ_* и \bar{A}_* удовлетворяют известной системе соотношений:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial t^2} = \text{div grad } \varphi_* + \frac{U_*}{c^2}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}_*}{\partial t^2} = \Delta \bar{A}_* + \frac{\bar{L}_*}{c^2}, \quad (16)$$

где уравнение (15) описывает распространение продольной волны изменения амплитуды колебаний (но не давления, а упругого напряжения), а уравнение (16) – распространение продольно - поперечной (при дополнительном условии $\text{div } \bar{L}_* = 0$ – только лишь поперечной) волны изменения амплитуды.

Факторизация волнового уравнения активной механической среды в форме соотношений Максвелла. Под термином *факторизация* в математической и квантовой физике понимают приведение векторных уравнений второго порядка к системе уравнений первого порядка. Потенциалы U_* , \bar{L}_* , используемые в правых частях уравнений (15) и (16), для решения различных задач механики исследуемой среды могут выбираться произвольно. Но если правая часть уравнения (14) отвечает возмущениям, которые вызывают заряды и токи, то эти потенциалы должны удовлетворять трем условиям:

- поле \bar{u}_* за пределами зарядов является несжимаемым (чтобы не нарушить синфазное изменение плотности и нивелировать влияние трения):

$$\text{div grad } \varphi_* = 0, \quad (17)$$

откуда должен следовать закон Кулона для напряженности \vec{E} электрического поля,

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot q, \quad (18)$$

где q – это объемная плотность зарядов, локализованная внутри заряженной области среды,

- закон сохранения заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0; \quad (19)$$

приводит к условию на взаимный выбор потенциалов вида

$$\frac{\partial \varphi_*}{\partial t} + \text{div } \bar{A}_* = 0, \quad (20)$$

которое аналогично условию для потенциалов возмущающих сил,

$$\frac{\partial U_*}{\partial t} + \text{div } \bar{L}_* = 0, \quad (21)$$

где \vec{J} – это объемная плотность токов, вызванных движением зарядов.

- сила, действующая на электрический заряд Q , имеющий скорость \vec{v} , описывается формулой Лоренца

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H} / c) = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H} / c, \quad (22)$$

причем напряженность \vec{H} магнитного поля имеет следующие производные (полученные в известных трудах Фарадея, Савара, Лапласа и Максвелла):

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad \text{div } \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \vec{E}. \quad (23)$$

Чтобы решить аналогичную задачу для представления электромагнитного поля Лоренц отказался от потенциалов φ_* , \vec{A}_* классической теории и использовал специальные потенциалы φ , \vec{A} , связав их калибровочным условием, похожим на (20):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c} \cdot \text{div } \vec{A} = 0, \quad (24)$$

причем для вычисления этих потенциалов он использовал дифференциальные уравнения, похожие на (15), (16):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \text{div grad } \varphi + 4\pi \cdot q, \quad (25)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Delta \vec{A} + \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{J}. \quad (26)$$

После чего для выбора напряженностей \vec{E} и \vec{H} он использовал формулы

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

и показал [13, с. 442; 14], что эти величины удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot q, \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, & \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Мы вправе использовать этот вывод, если укажем связь между напряженностями \vec{E} , \vec{H} и конкретными характеристиками механической среды; при этом необходимо прояснить физический смысл формулы (22) для силы Лоренца. В научной литературе можно найти различные варианты решения этой проблемы.

Так, в [9], где для моделирования эфира использовались нестационарные колебания пассивной механической среды, скорость $d\vec{u}/dt$ смещения среды трактовалась как напряжение \vec{H} (*теория света Неймана*) или как напряжение \vec{E} (*теория света Фарадея*).

Что касается Максвелла, так он трактовал напряженность \vec{E} как смещение \vec{u} , а величину $\partial \vec{E}/\partial t$ назвал *током смещения*; такой термин используется в физике и в наше время.

В работах [5, 6], где для моделирования эфира использовались синфазные колебания активной механической среды, величина \vec{H} отвечала амплитуде $\text{rot } d\vec{u}_*/dt$ колебаний угловой скорости закручивания среды, поэтому второе слагаемое формулы (22) трактовалось как известный *эффект Магнуса*. Однако, как будет показано далее в этом пункте статьи, указанную амплитуду следует вычислять по другой формуле.

Заметим, что если напряженности \vec{E} , \vec{H} получат физическую размерность ускорений [м/с²], то второе слагаемое формулы (22) можно трактовать как известную *силу Кориолиса* [15] (которая, на самом деле, является не реально действующей силой, а релятивистским эффектом). Тогда сумма, стоящая в скобках, объединит амплитуды колебаний для двух ускорений – ускорения заряда относительно среды и ускорения Кориолиса, вызванного вращением среды [15]. Величина Q , используемая в равенстве (22), получит физическую размерность [кг] и определится формулой $Q = \rho_* \cdot V$, где V – это некий средний (или эффективный) объем области, занимаемой зарядом; детально это понятие в данной публикации не анализируется.

Пусть \vec{u}_* является решением уравнения (14). Тогда, как показано в [13], поле $\vec{E} = \vec{u}_*$ также является решением этого уравнения, и в паре с соответствующей функцией \vec{H} удовлетворяет системе уравнений Максвелла, в том числе условию

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \vec{E}.$$

Причем, что полностью соответствует взглядам Максвелла, но противоречит нашим теперешним устремлениям, поле \vec{E} (как и поле \vec{H}) имеет размерность смещения, а нужно иметь поле ускорений. Положение легко исправить, если учесть, что амплитуда колебания ускорений среды определяется формулой

$$\vec{a}_*^c = \partial^2 \vec{u}_* / \partial t^2 - \omega_c^2 \cdot \vec{u}_*,$$

где первое слагаемое мало, и им можно пренебречь.

Для нестационарного поля величина абсолютного ускорения заряда, имеющего скорость \vec{v} , складывается из относительного \vec{a}^c и кориолисового \vec{a}^k ускорения и вычисляется по известному правилу

$$\vec{a} = \vec{a}^c + \vec{a}^k = \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 - \vec{v} \times \text{rot} \partial \vec{u} / \partial t,$$

которому можно придать следующий эквивалентный вид:

$$\vec{a} = \vec{a}^c + \vec{a}^k = \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{\Lambda},$$

где $\vec{\Lambda} = \int \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 dt$ – это первообразная функция для ускорения.

У синфазного поля, пульсирующего с круговой частотой ω_c , процедура усреднения относительного ускорения \vec{a}^c приводит к формуле

$$\vec{a}_*^c = -\vec{u}_* \cdot \omega_c^2 + \partial^2 \vec{u}_* / \partial t^2,$$

где второе слагаемое значительно (на много порядков) меньше первого, и им можно пренебречь.

В результате, амплитуды соответствующих колебаний связаны другим равенством:

$$\vec{a}_* = \vec{a}_*^c + \vec{a}_*^k = -\vec{u}_* \cdot \omega_c^2 + \vec{v} \times \text{rot} \vec{\Lambda}_* \cdot \omega_c^2,$$

где $\vec{\Lambda}_*$ является первообразной функцией для амплитуды колебаний смещения среды, $\vec{\Lambda}_* = \int \vec{u}_* dt$.

Обозначим:

$$\vec{E}_* = -\omega_c^2 \cdot \vec{u}_* = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{A}_* = c \cdot \omega_c^2 \cdot \vec{\Lambda}_*, \quad \vec{H}_* = \text{rot} \vec{A}_*, \quad (28)$$

где потенциалы φ , \vec{A} являются решениями уравнений

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \text{div grad} \varphi + 4\pi \cdot q_*, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Delta \vec{A} + \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{J}_* \quad (29)$$

и удовлетворяют условию Лоренца (24), причем здесь выполняется очевидное равенство $\text{rot} \vec{A}_* = \text{rot} \vec{A}$, откуда следует эквивалентное (28) определение

$$\vec{H}_* = \text{rot} \vec{A}. \quad (30)$$

Тогда сила Лоренца определяется формулой

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E}_* + \vec{v} \times \vec{H}_* / c), \quad (31)$$

напряженности \vec{E}_* , \vec{H}_* удовлетворяют системе уравнений Максвелла,

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E}_* = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_*}{\partial t}, & \text{div} \vec{E}_* = 4\pi \cdot q_*, \\ \text{rot} \vec{H}_* = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_*}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_*, & \text{div} \vec{H}_* = 0, \end{cases} \quad (32)$$

а плотности зарядов $q_* [1/c^2]$ и токов $\vec{J}_* [м/с^3]$ связывает закон сохранения положительных и отрицательных зарядов (в дифференциальной форме, плотность $q_* = q_*^+ + q_*^-$, \vec{V}^\pm – поля скоростей движения этих зарядов):

$$\frac{\partial q_*^\pm}{\partial t} + \text{div}(q_*^\pm \cdot \vec{V}^\pm) = 0. \quad (33)$$

Напомним, что в механике форму, аналогичную (33), имеет закон сохранения массы и уравнение неразрывности сплошной среды.

Соотношения (28) – (33) дают искомую механическую интерпретацию уравнения Максвелла для электромагнитного поля.

Используем эти соотношения и получим формулы для вектора $\vec{\Psi}_* = \vec{\Psi}_*^+ + \vec{\Psi}_*^-$ из правой части уравнения (14), имеющие ясный механический смысл:

$$\vec{\Psi}_* = -\frac{4\pi c^2}{\omega_c^2} \cdot \left[\text{grad} q_* + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{J}_*}{\partial t} \right], \quad \vec{\Psi}_*^\pm = -\frac{4\pi}{\omega_c^2} \cdot \left[c^2 \text{grad} q_*^\pm + q_*^\pm \cdot \frac{\partial \vec{V}^\pm}{\partial t} - \text{div}(q_*^\pm \cdot \vec{V}^\pm) \cdot \vec{V}^\pm \right]. \quad (34)$$

В то же время необходимо заметить, что поле токов \vec{J}_* в общем случае не является соленоидальным, поэтому первое равенство (34) не служит представлением поля $\vec{\Psi}_*$ в виде суммы потенциальной и вихревой части, и получить из него выражения для классических потенциалов U_* , \vec{L}_* проблематично.

Кроме того, формула (34) не учитывает влияние стационарных токов, и это не случайно, поскольку, как это

следует из вида уравнения (14), к любому его решению \vec{u}_* в качестве неизвестной «константы интегрирования» можно прибавить произвольное стационарное соленоидальное поле \vec{u}_*^0 , являющееся решением соответствующей задачи магнитостатики. Добавка \vec{u}_*^0 для уравнения (14) определяется заданием соответствующих начальных условий, а в системе (32) она уже учтена в расчетных уравнениях. В этом смысле уравнения Максвелла (32) лучше, чем уравнение колебаний (14), поскольку в них учтено больше информации о моделируемом процессе, но по сути рассматриваемых здесь вопросов данное обстоятельство ничего не изменяет.

Сказанное выше касается и целесообразной замены первообразной функции $\vec{\Lambda}_*$ на потенциал \vec{A} в определениях (28) и (30). Пусть, для примера, по завершении переходного процесса поля зарядов и токов становятся стационарными. Тогда при условии $t \rightarrow \infty$ значение \vec{A} стабилизируется на постоянном уровне, а модуль вектора $\vec{\Lambda}_*$ возрастает неограниченно. Что объясняется различием определений:

$$\vec{A}_* = \int c \cdot \omega_c^2 \cdot \vec{u}_* dt, \quad \vec{A} = \int [c \cdot \omega_c^2 \cdot \vec{u}_* - c \cdot \text{grad } \varphi] dt;$$

причем это различие не влияет на результат вычисления ротора, но изменяет асимптотику интегрирования.

Колебательная энергия активной среды и температурный фактор. В области T , где заряды и токи зарядов отсутствуют, уравнения (29) для динамических потенциалов становятся однородными,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Delta \vec{A}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi,$$

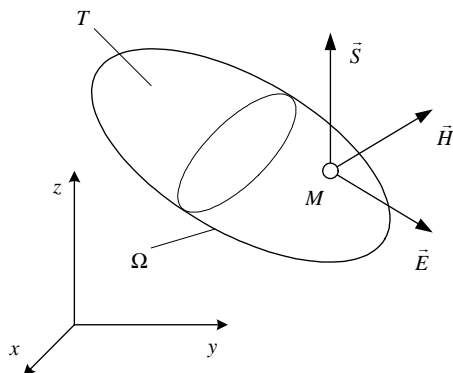


Рис. 7 – Направление вектора переноса энергии синфазных колебаний.

а система уравнений Максвелла (32) принимает вид

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_* = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_*}{\partial t}, & \text{div } \vec{E}_* = 0, \\ \text{rot } \vec{H}_* = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_*}{\partial t}, & \text{div } \vec{H}_* = 0 \end{cases} \quad (35)$$

и соответствует известным уравнениям электромагнитного поля в вакууме [13].

Определим плотность w_c полной механической энергии синфазного поля продольно-поперечных колебаний формулой

$$w_c = k_c \cdot (\vec{E}_*^2 / 2 + \vec{H}_*^2 / 2), \quad (36)$$

где $k_c = \rho_* / \omega_c^2$.

Равенство (36) полезно переписать также и в следующем эквивалентном виде:

$$w_c = \rho_* \cdot ((\vec{v}_E)^2 / 2 + (\vec{v}_H)^2 / 2),$$

где величины \vec{v}_E, \vec{v}_H имеют размерность скоростей и определяются формулами $\vec{v}_E = \vec{E}_* / \omega_c, \vec{v}_H = \vec{H}_* / \omega_c$.

Тогда полная механическая энергия W_c синфазного поля продольно-поперечных колебаний, заполняющего эту область, вычисляется по формуле:

$$W_c = k_c \cdot \iiint_T (\vec{E}_*^2 / 2 + \vec{H}_*^2 / 2) dV. \quad (37)$$

Похожая задача рассматривалась в [4], но система вида (35) отвечала не синфазному полю, а полю поперечных колебаний упругого континуума, и имела другие коэффициенты. Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть T – это некоторая область механической среды с дефектами, свободная от зарядов и токов и ограниченная поверхностью Ω (рис. 7), а полная энергия W_c поля, заполняющего область, вычисляется по формуле (37), где напряжения \vec{E}_* и \vec{H}_* удовлетворяют системе уравнений Максвелла (35).

Тогда мощность $P(t) = \partial W_c / \partial t$, протекающая через границу Ω в момент времени t , равняется потоку $\Pi_\Omega(\vec{S})$ вектора $\vec{S} = (c \cdot k_c) \cdot [\vec{E}_*, \vec{H}_*]$ через поверхность Ω , то есть

$$\partial W_c / \partial t = \oiint_\Omega (\vec{S}, \vec{n}_0) d\sigma,$$

где \vec{n}_0 – внешняя нормаль к поверхности.

Похожий вектор $\vec{S}_* = [\vec{E}_*, \vec{H}_*]$ в теории электромагнитного поля называется вектором энергии (исполь-

зуются также названия *вектор Пойтинга* или *Умова – Пойтинга*).

Для доказательства сформулированной теоремы, как и в [4], вычислим дивергенцию этого вектора:

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = \operatorname{div} [\vec{E}_*, \vec{H}_*] = (\vec{E}_*, \operatorname{rot} \vec{H}_*) - (\vec{H}_*, \operatorname{rot} \vec{E}_*),$$

далее умножаем обе части 1-го уравнения системы (35) скалярно на вектор \vec{H}_* , 3-го уравнения – на вектор \vec{E}_* ,

$$(\vec{H}_*, \operatorname{rot} \vec{E}_*) = -c^{-1} (\vec{H}_*, \partial \vec{H}_* / \partial t), \quad (\vec{E}_*, \operatorname{rot} \vec{H}_*) = c^{-1} (\vec{E}_*, \partial \vec{E}_* / \partial t),$$

и полученные результаты вычтем в указанном ниже порядке:

$$(\vec{E}_*, \operatorname{rot} \vec{H}_*) - (\vec{H}_*, \operatorname{rot} \vec{E}_*) = c^{-1} (\vec{E}_*, \partial \vec{E}_* / \partial t) + c^{-1} (\vec{H}_*, \partial \vec{H}_* / \partial t) = c^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_*^2 / 2 + \vec{H}_*^2 / 2].$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = c^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_*^2 / 2 + \vec{H}_*^2 / 2], \quad \text{откуда} \quad \operatorname{div} \vec{S} = k_c \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_*^2 / 2 + \vec{H}_*^2 / 2].$$

Далее воспользуемся известной *формулой Гаусса – Остроградского* и получим:

$$P_{\Omega}(\vec{S}) = \iiint_{\Omega} (\vec{S}, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \vec{S} dV = k_c \cdot \iiint_T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{E}_*^2}{2} + \frac{\vec{H}_*^2}{2} \right] dV = k_c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_T \left[\frac{\vec{E}_*^2}{2} + \frac{\vec{H}_*^2}{2} \right] dV = \frac{\partial W_c}{\partial t} = P(t).$$

Следовательно, $P_{\Omega}(\vec{S}) = P(t)$, что и требовалось доказать.

Аналогичное утверждение в электродинамике называют *теоремой Умова – Пойтинга* [16].

Заметим, что интеграл (37) описывает не всю колебательную энергию активной механической среды. В одной из дальнейших публикаций мы изучим области, занятые зарядами, и получим формулы для энергии колебаний среды в этих областях. Влияние дефектов, находящихся за пределами зарядов и колеблющихся синфазно с постоянной амплитудой давления p_* , в интеграле (37) также не учитываются. Чему, кроме формальной причины (они не создают напряженностей синфазного поля), можно дать другое объяснение. Плотность w_d энергии продольных колебаний среды, связанных с изменением объема дефектов, определяется очевидной формулой

$$w_d = 0.5 \cdot G_0^{-1} \cdot p_*^2, \quad (38)$$

где величина $G_0^{-1} = 1/(c^2 \rho_0)$ играет роль *коэффициента сжимаемости*; формула (38) фактически повторяет зависимость для энергии газа (или жидкости), равномерно сжимаемых в полости.

Любая энергия задана с точностью до аддитивного слагаемого, определяющего ее начальный или характерный уровень. И поскольку величина p_* не изменяется, то и плотность w_d можно не учитывать.

Но тут необходимо заметить следующее. В физическом пространстве заряды быстро перемещаются по среде и их относительный суммарный объем не велик, а микрочастицы (дефекты) остаются неподвижными. Поэтому тепло, выделяемое при колебаниях дефектов вследствие трения, возникает повсеместно и, априори, способно привести к перегреву всей среды и изменению ее упругих свойств. Но этому препятствуют четыре фактора.

1. В действительности, *тепло не выделяется за пределами дефектов*. Приведем обоснование этого парадоксального утверждения. После стандартного для теории колебаний способа учета внутреннего трения [17] уравнение (13) для давления примет следующий вид:

$$c^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} (p + (\psi_{mp} / \omega_c) \cdot \partial p / \partial t) - (\omega_c / c)^2 (p - p_0), \quad (39)$$

где ψ_{mp} – это коэффициент гистерезисного трения.

Как видим, если давление изменяется по правилу

$$p = p_0 + p_* \cdot \sin \omega_c t,$$

причем величины p_0, p_* являются константами (либо гармоническими функциями, что отвечает области, занятой зарядом), то наличие трения никак не сказывается на колебаниях, и здесь тепло не выделяется.

2. Можно предположить, что в силу действия трения *какое-то тепло выделяется на границах дефектов, но в небольшом количестве*. Поскольку коэффициент трения ψ_{mp} для продольных колебаний значительно меньше, чем коэффициент трения k_{mp} для поперечных колебаний [17], то и тепла выделяется мало.

3. Часть выделившегося тепла утилизирует *информационное поле* [2], где идут процессы, приводящие к уменьшению энтропии.

4. *Повышению температуры среды препятствует компенсирующий фактор, связанный с ее расширением*; давление p_0 в ней медленно падает (рис. 3), что сопровождается снижением температуры. Причем, как это следует из формулы (38), количество тепла, выделяемого при колебаниях дефектов, зависит от квадрата амплитуды p_*^2 , и существует значение амплитуды, при котором эти факторы уравниваются друг – друга. После чего темпера-

тура среды будет оставаться стабильной длительное время, что наблюдаем сейчас в физическом пространстве.

Таким образом, значения амплитуд p_* и ρ_* колебания давления и плотности определяются фактором стабильности температуры среды и зависят от величины производной dp_0/dt .

Механизм, поддерживающий стабильность температуры, включает изменение синфазной частоты колебаний поля, которая при этом остается одинаковой для всей среды. Для его моделирования вместо (39) используется неоднородное уравнение Клейна – Гордона с пульсирующей правой частью:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta(p - (\psi_{mp} / \omega_c) \cdot \partial p / \partial t) - \frac{\omega_c^2}{c^2} (p - p_0 - P^* \cdot \sin(\omega_c^* t)), \quad (40)$$

где амплитуда P^* считается известной величиной, а круговая частота ω_c^* является варьируемым параметром.

Так вблизи атомного ядра эта амплитуда оценивается формулой

$$P^* = (p_0 - p_\infty) \cdot \varepsilon_m,$$

где p_∞ – давление, отвечающее точке M_∞ на рис. 3; ε_m – средний относительный объем, занимаемый ядром.

Тогда в синфазном решении $p = p_0 + p_* \cdot \sin(\omega_c^* t)$ уравнения (40) величины p_* и ω_c^* связывают равенства

$$(\omega_c^2 - \omega_c^{*2}) p_* = \omega_c^2 \cdot P^* \quad \text{или} \quad p_* = \frac{(p_0 - p_\infty) \cdot \varepsilon_m}{1 - (\omega_c^* / \omega_c)^2}. \quad (41)$$

Перспективы дальнейших исследований и выводы. Более подробно указанную связь между динамическими характеристиками среды мы будем изучать в других статьях данного цикла. В завершение этой статьи укажем на следующую возможность, которая вытекает из развиваемой теории. Предположим, что она окажется верной не только для исследуемой активной среды, но и для моделируемого с ее помощью физического пространства. Предположим также, что мы разработаем технологию повышения температуры среды в некоторой области пространства (например, за счет высокочастотных колебаний плазмы на ее границах). Тогда в среде автоматически включится механизм компенсации, значения амплитуд p_* и ρ_* снизятся и, как следствие, которое будем обосновывать в следующих статьях, материальные тела, находящиеся внутри области, уменьшат свою инерционную и гравитационную массы (рис. 8).

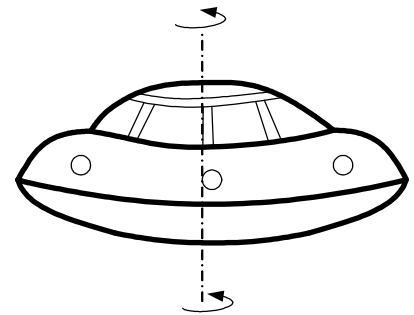


Рис. 8 – Схематическое изображение малоинерционного летающего объекта внутри кокона из плазмы.

При этом можно рассчитывать на то, что если завершить построение новой теории и применить эту технологию со знанием дела, то материя не разрушится, но по некоторым параметрам приблизится к свойствам голограммы. Причем эти изменения будут обратимыми.

Сформулируем краткие выводы по изложенному материалу. В исследуемой активной механической среде наблюдается два вида колебаний:

- продольные, описываемые уравнением Клейна – Гордона (13) и создающие синфазное поле изменения давления (и плотности);
- и синфазные продольно-поперечные, описываемые волновым векторным уравнением (14) или уравнениями Максвелла (32).

Причем:

- плоские (или сферические) продольные и поперечные синфазные волны распространяются с одинаковой скоростью, что соответствует известному свойству физического пространства;
- поток энергии синфазных колебаний можно определять при помощи вектора Умова – Пойтинга;
- амплитуды синфазных колебаний давления и плотности обеспечивают температурное равновесие расширяющейся среды.

В следующих публикациях этого цикла будут представлены такие элементы разрабатываемой (и уточняемой) теории:

- математическая модель механического аналога электрического заряда;
- физические и математические модели инерционной и гравитационной массы для частицы материи;
- математическая модель аналога гравитационного поля;
- физические и математические модели, описывающие спин частицы.

Кроме того, будет дана механическая интерпретация для волны де Бройля, комптоновского радиуса и групповой скорости частицы, а также будут указаны причины, приводящие к возникновению механического аналога для поля ядерных сил, действующих между массивными частицами сферической формы (нуклонами).

Список литературы

1. Вихман Э. Квантовая физика. – М. : Наука, 1974. – 391 с.
2. Григорьев А. Л. Гносеологический анализ целей и основных принципов организации управляемой эволюции белковых тел // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 283 – 293.
3. Ванін В. А., Григорьев А. А. Результаты математического моделирования винтовых волн трансляции в нелинейных упругих континуумах, вибрирующих синфазно // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 27. – С. 57 – 73.
4. Ванін В. А., Григорьев А. А. Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – № 37. – С. 59 – 68.
5. Ванін В. А., Григорьев А. А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 13. – С. 14 – 32.
6. Ванін В. А., Григорьев А. А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2010. – № 69. – С. 35 – 45.
7. Максвелл Дж. Трактат об электричестве и магнетизме. – В 2-х томах. – М. : Наука, 1989.
8. Пуанкаре А. О науке. – М. : Наука, 1983. – 559 с.
9. Лоренц Г. А. Теории и модели эфира. – М. – Л. : ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит-ры и номографии, 1936. – 68 с.
10. Ванін В. А., Григорьев А. А. Моделирование синфазных упругих колебаний в волноводах и сонотродах винтовой формы // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 54 (960). – С. 25 – 38.
11. Рид К. Гильберт. – М. : Наука, 1977. – 361 с.
12. Дирак П. А. М. Воспоминания о необычайной эпохе. – М. : Наука, 1990. – 208 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1966. – 724 с.
14. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М. : Наука, 1983. – 439 с.
15. Кителъ Ч., Найт В., Рудерман Р. Механика. – М. : Наука, 1974. – 415 с.
16. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. – М. : Высшая школа, 1964. – 384 с.
17. Васильев Н. В. Теория колебаний. – К. : Вища школа, 1992. – 430 с.

References (transliterated)

1. Vikhman E. *Kvantovaya fizika* [Quantum Physics]. Moscow, Nauka, 1974. 391 p.
2. Grigor'yev A. L. Gnoseologicheskii analiz tseyli i osnovnykh printsipov organizatsii upravlyayemoy evolyutsii belkovykh tel [Gnoseological analysis of the goals and basic principles of the organization of the controlled evolution of protein bodies]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2019, no. 8 (1333), pp. 283–293.
3. Vanin V. A., Grigor'yev A. A. Rezultaty matematychnoho modelirovaniya vintovykh voln translyatsii v nelineynykh uprugikh kontinuumakh, vibruiyushchikh sinfazno [The results of mathematical modeling of helical translation waves in non-linear elastic continua vibrating in phase]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2012, no. 27, pp. 57–73.
4. Vanin V. A., Grigor'yev A. A. Vektor perenosy energii pri poperechnykh smeshheniyakh uprugoy sredy [Energy transfer vector for transverse displacements of elastic medium]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2010, no. 37, pp. 59–68.
5. Vanin V. A., Grigor'yev A. A. Modelirovaniye sil vzaimodeystviya chastits pri uprugoplasticheskom rasshirenii sredy [Modeling of the interaction forces of particles during elastoplastic expansion of a medium]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2011, no. 13, pp. 14–32.
6. Vanin V. A., Grigor'yev A. A. Volnovyye polya vysokochastotnykh sinfaznykh kolebaniy uprugoy sredy [Wave fields of high-frequency in-phase oscillations of elastic medium]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2010, no. 69, pp. 35–45.
7. Maksvell J. *Traktat ob elektrichestve i magnetizme* [Treatise on Electricity and Magnetism, in 2 volumes]. Moscow, Nauka Publ. 1989.
8. Puankare A. *O nauke* [On Science]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 559 p.
9. Lorentz G. A. *Teorii i modeli efira* [Theories and Models of Ether]. Moscow – Leningrad, ONTI. Glav. red. obshhetekhn. lit-ry i nomografii Publ., 1936. 68 p.
10. Vanin V. A., Grigor'yev A. A. Modelirovaniye sinfaznykh uprugikh kolebaniy v volnovodakh i sonotrodakh vintovoy formy [Modeling in-phase elastic vibrations in helical waveguides and sonotrodes]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2012, no. 54 (960), pp. 25–38.
11. Rid K. *Gil'bert* [Hilbert]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 361 p.
12. Dirac P. A. M. *Vospominaniya o neobychnoy epokhe* [Memoirs of an extraordinary era]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 208 p.
13. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Upravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.
14. Parsell E. *Elektrichestvo i magnetizm* [Electricity and Magnetism]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 439 p.
15. Kitel' Ch., Nayt V., Ruderman R. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 415 p.
16. Nikol'skiy V. V. *Teoriya elektromagnitnogo polya* [Theory of electromagnetic field]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1964. 384 p.
17. Vasil'yev N. V. *Teoriya kolebaniy* [Vibration Theory]. Kyiv, Vishha shkola Publ., 1992. 430 p.

Поступила (received) 26.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: lena622651@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

V. M. OLEKSENKO

TASK SOLVING AS THE BASIS OF MATHEMATICAL PREPARATION OF FUTURE ENGINEERS

The results of the study of the problem of solving mathematical tasks in the preparation of future engineers are revealed. The urgency and importance of the topic is substantiated by the need of Ukrainian enterprises in qualified specialists of engineering specialties and the need of the society to ensure high quality of education. An approach to task solving in higher mathematics is theoretically developed. The peculiarities of its practical implementation are clarified. Guidelines and steps for solving problems are explained. Rules for verifying resolved tasks are produced. The errors that future engineers make when solving tasks are classified. The necessity of making changes to the higher mathematics syllabus at the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" and the introduction of laboratory works using Mathcad, Matlab, Scilab etc. are substantiated.

Key words: task solving, mathematical training, engineers, higher mathematics.

В. М. ОЛЕКСЕНКО

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЯК ОСНОВА МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ

Статтю присвячено найголовнішому аспекту математичної підготовки майбутніх інженерів – розв'язуванню задач. Теоретично розроблено підхід до розв'язування задач з вищої математики. Розкрито особливості його практичної реалізації. Виявлено методичні рекомендації та етапи розв'язування задач. Висвітлено правила перевірки розв'язаних задач. Класифіковано помилки, яких припускаються майбутні інженери під час розв'язання задач. Досліджено структуру практичного заняття для ефективного вирішення поставленої проблеми. Рекомендовано схему самоаналізу викладачем проведеного заняття. Підтверджено високий результат розв'язання математичних задач на студентських заняттях.

Ключові слова: розв'язування задач, математична підготовка, інженер, вища математика.

В. М. ОЛЕКСЕНКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КАК ОСНОВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Статья посвящена важнейшему аспекту математической подготовки будущих инженеров – решению задач. Теоретически разработан подход к решению задач по высшей математике. Раскрыты особенности его практической реализации. Выявлены методические рекомендации и этапы решения задач. Выработаны правила проверки решенных задач. Классифицированы ошибки, которые делают будущие инженеры при решении задач. Исследована структура практического занятия для эффективного решения поставленной проблемы. Рекомендована схема самоанализа преподавателем проведенного занятия. Подтвержден высокий результат решения математических задач на студентских занятиях.

Ключевые слова: решение задач, математическая подготовка, инженер, высшая математика.

Introduction. The urgency of the problem of mathematical training for future engineers is substantiated by the objective need of Ukrainian enterprises in highly qualified engineers and the need of the society to provide high quality technical education. There exist an obvious link between this problem and the important theoretical and practical tasks of specialist training stated in the Law on Higher Education adopted by the Verkhovna Rada of Ukraine. This Law establishes the basic principles of the functioning of the higher education system in order to prepare competitive human capital for the high-tech and innovative development of the country, self-realization of the individual, to provide the needs of society in skilled specialists [1].

Analysis of recent studies. The results of the analysis of recent research and publications indicate that scientists are interested in the problem as a whole (*V. Andrushchenko, V. Kremen* and others) and its individual aspects (*S. Skvortsova, L. Suhina* and others). Academician *V. Andrushchenko* argues for a greater focus on fundamental disciplines. Scientist emphasizes demonstrations of public disregard for them and predicts serious material losses and social miscalculations as a result [2].

The Commission of the European Mathematical Society, which pays close attention to the current problems of mathematical education for young people, adopted at the level of the European document a scheme of parameters by which the contribution of mathematics to the development of personality could be determined. Thinking and algorithms are attributed to the parameters of general development. The analysis of the scheme allows to conclude that there is a connection between the general parameters of personality development and mathematical knowledge and skills, as well as to identify indicators that indicate the applied orientation of mastering mathematical disciplines [3, 4].

The holistic nature of mathematics is based on the intrinsic essence of this science: mathematics is the basis of all accurate natural and scientific knowledge. The main criterion for testing mathematical knowledge is the ability to solve tasks. Task solving is the process of performing actions, or mental operations, aimed at achieving a goal that is set within a problem situation – a task. This process is also an integral part of thinking [5].

There are different approaches to task solving. Abroad, it is believed that in most problem solving theories, the

process itself consists of:

- identification of problem situation;
- resolution of the task;
- finding a solution to the problem.

Such stages of the problem solving process are found in *O. Zelts, K. Duncker, Greeno* and others [5].

The main distinguishing characteristics of work on tasks in the so-called *L. V. Zankov* system are:

- various forms of short recording;
- analytical method of finding a solution;
- different forms of recording the solution;
- research on a task after solving it.

These stages of task solving are revealed in many pedagogical and developmental teaching textbooks.

O. Ovchar demonstrates the need for applied tasks in the study of mathematics and reveals the methods of solving them. It is concluded that solving applied problems systematizes the acquired knowledge and experience, promotes the comprehensive development of mathematical thinking [6].

A new century is a new frontier, a dream, a hope. The logic of real life developments, including university ones, necessitates the introduction of new approaches to task solving. Higher mathematics is the science of the ages, which has its own peculiarities. Moreover, it is a fundamental discipline in technical higher education institutions, which is of immense importance for the engineer.

The purpose of the article is to theoretically develop and reveal a practical implementation of an approach to solving mathematical tasks in the preparation of future engineers.

At the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" (NTU "KHPI") higher mathematics is studied at lectures and practical classes. Experience has shown that the quality of application of theoretical material depends largely on the ability to solve tasks. The main focus is on task solving in practical classes. So, let's explore this kind of training in higher mathematics at the oldest technical university in Ukraine.

It is well known that a practical class is a training session in which the teacher organizes a detailed examination of the students in certain theoretical topic of the discipline and forms the skills of their practical application by making students individually solve practical tasks [1]. Practical classes are modeled on the basis of the psychological characteristics of future specialists, their level of knowledge in the course of school, professional choice. The following structure of the practical lesson was justified:

1. *Upgrading students' basic knowledge, skills and competences to successfully complete their tasks.*

It is carried out on the basis of the following methods and techniques: setting a problem task, identifying knowledge and skills needed to solve the problem, purposeful activity.

2. *Motivation of educational activity.*

The main impetus for the implementation of a specific practical assignment is the students' awareness of the practical importance of the knowledge, skills and abilities they need to learn in the classroom, for future work in the specialty.

3. *Communication to students of the topic, goals and objectives of the practical work.*

It emphasizes the nature of the independent task, how to approach it, how the results of each student's work will be evaluated.

4. *Independent performance of students' tasks under the supervision of the teacher.*

The complexity of pedagogical treatment of students at this stage is that they have different training, different abilities, which determines the different pace of academic work. All this requires an individual approach to students, differentiation of tasks.

5. *Generalization and systematization of student work results.*

After solving the problems, students analyze the results, organize them using diagrams, tables and more.

6. *Students' report on methods of solving problems, theoretical substantiation of the obtained results.*

On the basis of the obtained results, analysis, comparison, generalization in the form of regularities, conclusions, rational methods of solving problems, the individual work of students is comprehensively evaluated. In particular, the following factors are included in the evaluation of a solved problem:

- what concepts, theorems, facts are involved in the process of solving the problem;
- what are the ways of solving problems;
- how to activate your brainstorming activity.

7. *Summary of the lesson.*

Students report what they have learned in the classroom. The teacher focuses on studying what subject and, in general, where the knowledge acquired today is applied.

8. *Homework.*

You are constantly advised on how to do your homework better.

How to check your homework without wasting time when there are a large number of students in a group? Obviously, without checking the quality of the assimilation of the material, the overall level of training of specialists is reduced. It takes more than 5 minutes for a teacher to review homework and make appropriate entries in his journal. If students ask questions individually, this time is increased three or more times. With today's syllabuses, this situation can lead to negative consequences.

The following rules must be followed to ensure that such work is effectively controlled and effective.

1. Create multiple microgroups. The number is determined by the teacher. Later, if necessary, it is possible to re-compose microgroups to include students with different levels of cognitive abilities. Determine the leader of the microgroup.

2. Motivation of educational activity of each microgroup, promotion of a purpose, comprehension of a form of realization of self-control and self-assessment in all topics which are studied.

3. Getting tasks. Setting terms for finishing them.

4. Identification by the leader of gaps in knowledge when performing homework in such a microgroup. A relatively formed self- assessment.

5. Consultation of the microgroup leaders with the teacher.

6. Student consultation with the microgroup leaders and teacher. Rediscovering gaps in students' knowledge in the course of homework on the same topic by leaders of microgroups.

7. Checking the adequacy of self-assessment of each student belonging to a microgroup by all the microgroup members; setting jointly the grade for each member of the microgroup and the overall score of the microgroup.

8. Supervision of work of microgroups by the teacher. Creating a standard that requires self-control. An analysis of the journals that microgroup leaders provide to the teacher before the class begins. Differentiated work of the teacher with students who have poorly mastered the subject and those who are successful in studying the material.

The advantage of such a technique is that the gaps in knowledge of even those students who have been ill for a long time are eliminated. Practice has shown that only the activity of students in the realization of purpose, self-control, use of knowledge, skills promotes the conscious mastering of educational material by students, forms the ability to think and work independently.

Teacher's introspection of the conducted class facilitates the improvement of the quality of training during practical classes. It is recommended to conduct self-examination according to the following scheme:

1. Characterization of learning opportunities of group students.

2. Students' understanding of the basic concepts, theorems, rules, studied in this topic. What were the tasks of the education, training and development of the students the lesson was designed for?

3. Thoughtful selection of training material, including typical tasks, for the whole class.

4. Argumentation for choice of structure of employment, forms and methods of organization and stimulation of educational and cognitive activity of student, control and self-control.

5. Teaching students the methods of creative cognitive activity.

6. Vocational guidance.

7. The system of repetition of students' educational material.

8. Ensuring students complete their homework.

9. Personal contribution of the teacher and the real contribution of students to mastering the topic.

10. Evaluation of the results of the lesson. Factors that positively and negatively influence the preparation and conduct of the practical training. Suggestions: what to do personally to increase the effectiveness of a practical training course.

The effectiveness of studactive classes in solving the problem of higher mathematics training has been proved. High results are gained by following the technology of studactive classes, including powerful motivation of educational activity, permanent and frequent feedback, individual research, analysis and presentation of scientific and educational information. At studactive classes knowledge is obtained in a conscious and active way, based on research, beliefs, professional orientation. Responsibility is reached immediately. By such conditions future specialists realize what benefits knowledge gives to them and their society and consequently the level of knowledge quality is rising [7 – 10].

A decisive condition for solving a new task is finding an effective strategy for solving it. At the same time, it is known that many students are trying to implement the first or better known strategy, or under the influence of individual fragments of the task, attempt to perform any action with data or numbers. This is largely due to the fact that in modern learning conditions effective methods of solving students' tasks are formed quite often spontaneously. In order to teach the future engineer to solve problems, one must first teach him the approach in which the task acts as an object of careful study, and its solution – as an object of design and invention, a habit of reasoning that gives rich fruits: it develops that special mathematical ingenuity that can help in a variety of situations. Sometimes it can even do an unexpected service,

allowing you to confidently recover a partially forgotten formula. Learning how to "see" and inventively solve problems requires theoretical knowledge, ingenuity and the ability to think.

Our research has shown that the success of mathematical calculations is greatly facilitated by the following methodological recommendations for the step-by-step solution of the task.

The first stage. Study and comprehend the condition of the task. Find out what the calculations are, what the problem is, and the conditions under which it is to be solved. The student analyzes the problem.

The second stage. Develop the ability of the student to schematically record the task. The consequences of the task analysis should be recorded. The verbal form is little effective. Schematic recording is the widespread use of signs, symbols, drawings etc. The schematic record captures only what is needed to solve the task, and discards all other details that are in the task condition. The step is skipped for simple tasks or when the answer becomes apparent after analysis.

The third stage. Make a plan for solving the problem, find a method for solving it. Identify the type of problem it belongs to and apply the corresponding theorem, rule etc.

The fourth stage. Completing the task.

The fifth stage. Checking the resolved task. The student must make sure that the solution is correct and that it satisfies all the requirements of the task.

The sixth stage. Analysis of the solution of the problem. Find out if there is another, more rational way to solve, whether the task can be summarized, what conclusions can be drawn from this solution, determine the interdependence and the relationship between the values given in the task and the found.

Our extensive experience in teaching mathematics has highlighted students' common mistakes in solving tasks. Those relating to linear algebra and analytical geometry can be found in the textbook [11]. We classify all the errors that students make into three types.

First. Recording errors. As a rule, they arise due to inattention.

Example. $(\sin x) = \cos x$. A derivative sign is omitted when differentiating a function.

Second. Substantial errors. They usually occur when students move on to solving problems without studying the theoretical material.

Example. An error can occur when deriving the equations of tangent and normal to the graph of the function $y = x^{1/2}$ at the origin.

Third. All other errors.

How a student will learn higher mathematics, how he / she will solve the tasks depends on the student, the level of knowledge of school mathematics. What will be the learning depends largely on the teacher, his professional training, erudition, ethics and even appearance. The quality of training of future engineers depends on the scientific and methodological literature, didactic material, equipment of the auditorium with modern computers and more.

We live in computer times. Ukrainians own smartphones or iPhones and have 24/7 access to a computer. Even a large proportion of schoolchildren carry gadgets. Well-known companies in the world have fantastic computer technology. A few years later, they predict mass production of gadgets that will be able to execute commands provided by the owner's opinion. Not by pressing keys, not by voice, but by thought.

Is higher mathematics syllabus outdated? Isn't teaching higher mathematics far behind such rapid global progress?

As a result of the analysis of the syllabuses at the Department of Higher Mathematics, the NTU "KPI" it was concluded that they have not changed substantially in the last 25 years. The changes involved a significant reduction in hours with a reduction in mathematical content. The studied material was also regrouped or part of it was assigned for students' self-learning. During this period, some subjects were lost at the department. The part of the content of the liquidated disciplines was introduced as separate sections of "Higher Mathematics", such as, for example, Linear Algebra and Analytical Geometry. At the same time, much of the important mathematical material has disappeared, such as, for example, mathematical statistics, despite the well-known applied nature of problems in probability theory and mathematical statistics.

Therefore, we suggest a major revision of the syllabuses in higher mathematics and other mathematical subjects, eliminate unnecessary duplication of school mathematics, get rid of some topics, enrich the discipline with new sections, taking into account the wishes of specialized departments. Today, you can offer first year students, such as 123 Computer Engineering majors, to solve some problems using Mathcad. Such engineering software allows you to make important calculations and analyze them. The mathematical preparation of future engineers will only benefit from such an innovation. Moreover, the necessary material and technical base exists in the NTU "KPI".

Deploying Mathcad requires no additional workload. Introduce changes to the syllabus by replacing some of the lab classes. The contents can be reduced by assigning some topics in the sections "Derivative of a function of a single variable" or "Linear algebra and analytic geometry" for students' self-learning providing them with study guides with accessible and detailed material.

We also propose to use the Matlab platform, specially designed for engineers and scientists, when studying higher mathematics. We pay attention to Scilab – a package of applied mathematical programs for engineering, technical and scientific calculations. This is the most comprehensive of the available Matlab alternatives [5].

The prospect of further exploration in this direction is a more detailed study of the students' typical mistakes in solving problems and methods of their elimination.

Conclusions. Thus, task solving is a complex and necessary process for future engineers. Learning to solve them is a common problem of the student and the teacher. Our approach to task solving takes into account not only the features of higher mathematics, but also the professional orientation and specialization of the engineer. The well-researched structure of the practical class allows you to form the skills and competencies that are necessary for successful completion of the tasks. It has been found out that self-analysis of the conducted lesson by the teacher helps to increase the quality of knowledge. The scheme of such introspection is recommended. The guidelines and steps of solving the tasks are disclosed. The rules for quick checking the out-of-class unsolved tasks are suggested. All the mistakes that students make when solving tasks are divided into three types, such as writing errors, content errors and others. The proposition to change syllabuses in mathematical subjects at the NTU "KPI" is substantiated. We suggest to eliminate unnecessary duplication of school mathematics, get rid of some topics, enrich the discipline with new sections of modern mathematics. Moreover, we recommend to introduce into the educational process laboratory work using Mathcad, Matlab, Scilab etc. The high efficiency of studactive classes in solving this problem is highlighted.

Bibliography

1. Закон України «Про вищу освіту». – Голос України. – 6 серпня 2014. – № 148 (5898). – С. 9 – 19.
2. Андрущенко В. П. Роздуми про освіту : статті, нариси, інтерв'ю. – К. : Знання України, 2005. – 804 с.
3. Олексенко В. М. Інноваційні підходи до викладання математичних дисциплін // Нові технології навчання : наук.-метод. зб. – К. : НМЦ "Немішаєве", 2014. – Вип. 80. – С. 6 – 9.
4. Башмаков М. И. Мы учим и учимся математике в нашем общем доме – Европе // Математика в школе. – 2002. – № 1. – С. 3 – 6.
5. Wikipedia. Problem solving. – Режим доступа : https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_solving. – Дата обращения : 05 октября 2019.
6. Овчар О. Методи розв'язування прикладних задач // Молодь і ринок. – 2010. – № 10 (69). – С. 145 – 150.
7. Oleksenko V. Innovative Trend of Acquiring and Mastering Knowledge by Students // International Letters of Social and Humanistic Sciences. – Switzerland, 2015. – V. 65. – P. 88 – 95.
8. Oleksenko V. Technology of Mastering Educational Material in Universities // World Scientific News. – Poland, 2016. – V. 42. – P. 119 – 131.
9. Oleksenko V. Features of knowledge quality of university students in Ukraine // International Letters of Social and Humanistic Sciences. – Switzerland, 2017. – V. 76. – P. 36 – 42.
10. Oleksenko V. Modern Classes at Universities. In: Perspective directions of development of philology, linguistics and communication study : collective monograph. – Nelson, New Zeland, Aotearoa Publishing, 2018. – P. 4 – 18.
11. Олексенко В. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : підруч. [для студ. вищ. техн. навч. закл.]. – Харків : НТУ «ХПІ», 2006. – 372 с.

References (transliterated)

1. Zakon Ukrainy «Pro Vyshhu osvitu» [On higher education]. *Golos Ukrainy* [Voice of Ukraine]. August, 6, 2014, no. 148 (5898), pp. 9–19.
2. Andrushhenko V. P. *Rozdumy pro osvitu : statyi, narysy, interv'u* [Reflections on education: articles, essays, interviews]. Kyiv, Znannya Ukrainy Publ., 2005. 804 p.
3. Oleksenko V. M. Innovatsiyni pidkhody do vykladannya matematychnykh dystsyplin [Innovative approaches to teaching mathematical disciplines]. *Novi tekhnologiyi navchannya : nauk.-metod. zb.* [New teaching technologies : scientific and methodological digest]. Kyiv, NMC "Nemishaev" Publ., 2014, vol. 80, pp. 6–9.
4. Bashmakov M. I. My uchim i uchimsya matematike v nashem obshhem dome – Evrope [We teach and study mathematics in our common home – Europe]. *Matematika v shkole* [Mathematics at school]. 2002, no. 1, pp. 3–6.
5. Wikipedia. Problem solving. Available at : https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_solving (accessed : 5 October 2019).
6. Ovchar O. Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach [Methods for solving applied problems]. *Molod' i rynek* [Youth and the market]. 2010, no. 10 (69), pp. 145–150.
7. Oleksenko V. Innovative Trend of Acquiring and Mastering Knowledge by Students. *International Letters of Social and Humanistic Sciences*. Switzerland, 2015, vol. 65, pp. 88–95.
8. Oleksenko V. Technology of Mastering Educational Material in Universities. *World Scientific News*. Poland, 2016, vol. 42, pp. 119–131.
9. Oleksenko V. Features of knowledge quality of university students in Ukraine. *International Letters of Social and Humanistic Sciences*. Switzerland, 2017, vol. 76, pp. 36–42.
10. Oleksenko V. Modern Classes at Universities. In : *Perspective directions of development of philology, linguistics and communication study : collective monograph*. Nelson, New Zeland, Aotearoa Publishing, 2018. pp. 4–18.
11. Oleksenko V. M. *Liniyna algebra ta analitychna geometriya : pidruch. [dlya stud. vysh. tekhn. navch. zakl.]*. [Linear algebra and analytical geometry : textbook [for students of higher technical educational institutions]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2006. 372 p.

Received (надійшла) 28.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Олексенко Вячеслав Михайлович (Олексенко Вячеслав Михайлович, Oleksenko Viacheslav Mykhaylovych)
– кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ УДАРУ ТІЛ З СИНГУЛЯРНОЮ ТОЧКОЮ НА ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ**

Складено та зведено до безрозмірної форми інтегральне рівняння сили удару двох пружних тіл обертання, одне з яких має особливу точку на поверхні контакту, де кривизна граничної поверхні є нескінченною. При постановці задачі динамічного стискання тіл використано припущення Г. Герца, зроблені ним при створенні власної теорії квазістатичного удару твердих тіл, і відомий розв'язок вісесиметричної статичної контактної задачі теорії пружності, побудований І. Я. Штаерманом. Методом послідовних наближень за третьою ітерацією одержано наближений розв'язок інтегрального рівняння сили удару та подано у вигляді степеневого ряду. Цей ряд згорнуто в замкнуту форму наближеним методом Шенкса, внаслідок чого отримано компактний аналітичний розв'язок задачі удару. Він зручний для проведення інженерних розрахунків і описує зміну в часі сили удару та хід стискання і розтискання тіл. Одержано також компактні формули для обчислення максимумів сили удару та зближення центрів мас тіл, а також формули для розрахунку тривалостей процесу динамічного стискання та всього удару. Щоб не вийти за межі пружної постановки задачі, рекомендовано використовувати викладену теорію при малих швидкостях зіткнення тіл (до 5 м/с). Основний акцент в роботі зроблено на складання та розв'язання інтегрального рівняння не чисельними, а аналітичними методами. Висока точність отриманого розв'язку підтверджена малими відхиленнями результатів, до яких він призводить, від результатів чисельного інтегрування рівняння удару на комп'ютері. Відносна похибка не перевищує 0,5 %. Показано, що одержані формули можна також використовувати для апроксимації періодичних Атеб-функцій, через які виражається точний розв'язок цієї задачі удару. Наближені розв'язки служать добрим наближенням вказаних спеціальних функцій в першій чверті їх періоду. Наведено приклади розрахунків з обговоренням отриманих чисельних результатів і проведено порівняння з чисельними даними інших публікацій. Встановлено збіжність чисельних результатів, одержаних різними методами, чим підтверджена адекватність розробленої моделі пружного удару тіл обертання, при наявності на поверхні одного з них особливої точки.

Ключові слова: удар, особлива точка, теорія Г. Герца, інтегральне рівняння, апроксимація Атеб-функцій.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УДАРА ТЕЛ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА**

Составлено и сведено к безразмерной форме интегральное уравнение силы удара двух упругих тел вращения, одно из которых имеет сингулярную точку на поверхности контакта, где бесконечна кривизна граничной поверхности. При постановке задачи динамического сжатия тел использованы допущения Г. Герца, сделанные им при создании собственной теории квазистатического удара твердых тел, и известное решение осесимметричной статической контактной задачи теории упругости, построенное И. Я. Штаерманом. Методом последовательных приближений, после трех итераций, получено приближенное решение интегрального уравнения силы удара и представлено в виде степенного ряда. Этот ряд свернут к замкнутой форме приближенным методом Шенкса, вследствие чего получено компактное аналитическое решение задачи удара. Оно удобно для проведения инженерных расчетов и описывает изменение во времени силы удара и процессы сжатия и разжатия тел. Получены также компактные формулы для вычисления максимумов силы удара и сближения центров масс тел, а также формулы для расчета продолжительностей процесса динамического сжатия и всего удара. Чтобы не выйти за пределы упругой постановки задачи, рекомендовано использовать изложенную теорию при малых скоростях столкновения тел (до 5 м/с). Основной акцент в работе сделан на составление и решение интегрального уравнения не численно, а аналитическими методами. Высокая точность полученного решения подтверждена малыми отклонениями результатов, к которым оно приводит, от результатов численного интегрирования уравнения удара на компьютере. Относительная погрешность не превышает 0,5 %. Показано, что полученные формулы можно также использовать для апроксимации периодических Атеб-функций, через которые выражается точное решение этой задачи удара. Приближенные решения служат хорошим приближением указанных специальных функций в первой четверти их периода. Приведены примеры расчетов с обсуждением полученных результатов и проведено сравнение с численными данными других публикаций. Установлено соответствие численных результатов, полученных разными методами, чем подтверждена адекватность разработанной модели упругого удара тел вращения при наличии на поверхности одного из них особой точки.

Ключевые слова: удар, особая точка, теория Г. Герца, интегральное уравнение, аппроксимация Атеб-функций.

V. P. OLSHANSKIY**APPROXIMATE SOLUTION OF THE INTEGRAL EQUATION OF BODY SHOCK WITH A SINGULAR POINT ON THE SURFACE OF THE CONTACT**

The integral equation of the impact force of two elastic bodies of revolution, one of which has a singular point on the contact surface, where the curvature of the limiting surface is infinite, is compiled and reduced to a dimensionless form. In formulating the problem of dynamic compression of bodies the assumptions, introduced by G. Hertz when developing his own theory of quasistatic impact of solids, and the well-known solution of the axisymmetrical static contact problem of the theory of elasticity, constructed by I. Ya. Shtaerman, are used. By the method of successive approximations, after three iterations, an approximate solution to the integral equation of the impact force is obtained and is presented in the form of a power series. This series is reduced to a closed form by the approximate Shanks method, which results in a compact analytical solution of the impact problem. It is convenient for engineering calculations and describes the change in time of the impact force and the processes of compressing and unclenching of bodies. Compact formulas are also obtained for calculating the maximums of the impact force and the approach of the centers of mass of the bodies, as well as formulas for calculating the durations of the dynamic compression process and the entire impact. In order not to go beyond the limits of the elastic statement of the problem, it is recommended to use the theory presented at low speeds of collision of bodies (up to 5 m/s). The main emphasis in the work is on the formulation and solution of the integral equation by analytical methods rather than numerically. The high accuracy of the solution obtained is confirmed by small deviations of the results to which it leads from the results of numerical integration of the shock equation on a computer. The relative error does not exceed 0.5 %. It is shown that the obtained formulas can also be used to approximate periodic Ateb-functions through which the exact solution to this impact problem is expressed. Approximate solutions serve as a good approximation of these special functions in the first quarter of their period. Examples of calculations are given, with a discussion of the results obtained, and comparisons are made with the numerical data of other publications. The correspondence of numerical results obtained by different methods is established, which confirms the relevance of the developed model of elastic impact of bodies of revolution in the presence of a singular point on the surface of one of them.

Key words: shock, singular point, G. Hertz theory, integral equation, approximation of the Ateb-function.

© В. П. Ольшанський, 2019

Вступ і огляд літератури. Незважаючи на малу тривалість процесу в часі, механічний удар може характеризуватись великими силами динамічної взаємодії тіл, що призводить до руйнування елементів конструкцій. Тому розрахункам на міцність при ударі приділяється належна увага в курсах опору матеріалів [1 – 3]. Але там удар вважають миттєвим і використовують в розрахунках не *силу удару*, а її *імпульс*. Фактично розглядають не сам *процес удару*, а його *наслідки*, тобто коливання тіл, спричинені ударом [4, 5]. Як правило, розрахунки на удар в опорі матеріалів ґрунтуються не на диференціальних або інтегральних рівняннях, а на енергетичних співвідношеннях.

У більш сучасних і більш адекватних моделях удару, де використовують інтегральні рівняння, їх розв'язують *чисельними методами*. Це досягають заміною інтегралів на скінченні суми [6 – 9]. Із небагатьох публікацій, в яких будували наближені аналітичні розв'язки інтегральних рівнянь, вкажемо на [10, 11]. В монографії [11] одержано такий розв'язок для випадку удару пружних тіл, обмежених гладкими поверхнями другого порядку. Фактично там одержано наближений вираз другого інтегралу диференціального рівняння сили удару в *класичній задачі Г. Герца*. Але, на практиці зустрічаються і більш складні варіанти граничних поверхонь тіл, де викладена теорія втрачає чинність. Наявність особливої точки на поверхні контакту тіл, про яку йдеться в цій роботі, потребує складання нового інтегрального рівняння сили удару, що відрізняється від відомих показником *нелінійності*, та побудови його аналітичних розв'язків, чим і зумовлена мета цієї роботи.

Метою статті є виведення інтегрального рівняння сили удару двох пружних тіл, одне з яких має особливу точку на поверхні контакту, побудова його наближеного аналітичного розв'язку та аналіз його точності.

Для досягнення поставленої мети використана *квазістатична теорія удару пружних тіл*, створена Г. Герцем, та *інтегральний метод* розв'язання динамічної задачі. Проведено перетворення складеного інтегрального рівняння до рекурентного співвідношення. В якості наближеного розв'язку прийнято третє ітераційне наближення, яке потім перетворено до замкнутого виразу *методом Шенкса*. В ході проведення розрахунків проаналізована точність одержаного аналітичного розв'язку задачі.

Виведення та перетворення інтегрального рівняння сили удару. Розглянемо контактну взаємодію пружних тіл, де одне з них обмежене поверхнею обертання $z = Ar^{3/2}$, в якій константа $A > 0$, r – радіальна координата (рис. 1).

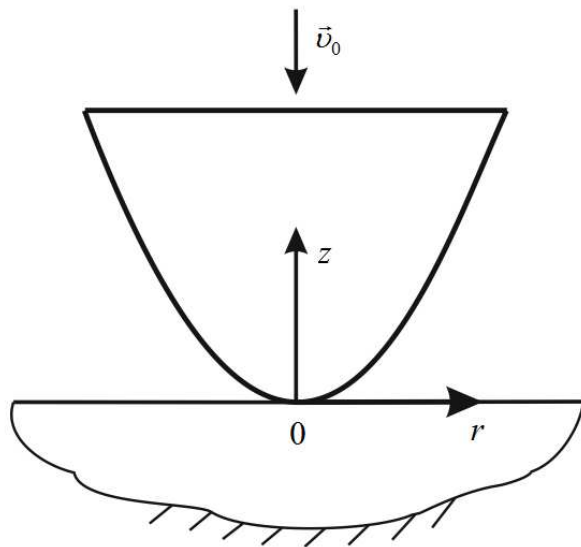


Рис. 1 – Схема зіткнення тіл.

ассона матеріалів тіл, задіяних в ударі; $\Gamma(z)$ – *Гама-функція*.

Якщо початкова швидкість зіткнення тіл v_0 , то за теорією Г. Герца [11], при виконанні залежності (1), інтегральне рівняння сили удару має вигляд:

$$K P^{3/5} = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1. \quad (2)$$

Тут $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі; t – час.

Рівняння (2) лівою частиною відрізняється від того, що розв'язували в [11], тому одержаний там зв'язок втрачає чинність.

Щоб надати рівнянню (2) безрозмірну форму, введемо нові змінні:

Оскільки показник $3/2 < 2$, то кривизна граничної поверхні обертання нескінченна в точці $r = 0$, з якої розпочинається взаємодія тіл при стисканні.

У відповідності з *розв'язком І. Я. Штаєрмана* [12], зближення центрів мас тіл x , під дією стискаючої сили P , описується виразом:

$$x = K P^{3/5}, \quad (1)$$

де

$$K = \frac{3}{2} J_1 A \left(\frac{Q_1 + Q_2}{3A J_2} \right)^{3/5}; \quad Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2};$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\sqrt{2} \Gamma(3/2)} \approx 1,1918140;$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{\xi^2 \sqrt{\xi} d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2^{3/2} [\Gamma(7/4)]^2}{\Gamma(7/2)} \approx 0,718884;$$

E_1, E_2, μ_1, μ_2 – *модулі пружності та коефіцієнт Пуассона*

$$P(t) = \alpha f(\tau), \quad t = \beta \tau, \quad (3)$$

де α, β – позитивні сталі; $f(\tau)$ – невідома функція.

Підставивши (3) в (2), отримуємо:

$$f^{3/5}(\tau) = \frac{\beta v_0}{K \alpha^{3/5}} \tau - \frac{\alpha^{2/5} \beta^2}{MK} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1. \quad (4)$$

Константи приймемо такими, щоб:

$$\frac{\beta v_0}{K \alpha^{3/5}} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{\alpha^{2/5} \beta^2}{MK} = 1.$$

Ця умова виконується, коли:

$$\alpha = \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{5/8}; \quad \beta = \left(\frac{M K^{5/3}}{v_0^{2/3}} \right)^{3/8}. \quad (5)$$

Перетворене таким чином безрозмірне інтегральне рівняння (4) зводиться до ітераційного співвідношення:

$$f_{n+1}(\tau) = \left(\tau - \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f_{n-1}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right)^{5/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Побудова наближеного розв'язку інтегрального рівняння. Поклавши в (6) $f_0(\tau) = 0$, одержуємо:

$$f_1(\tau) = \tau^{5/3}; \quad f_2(\tau) = \left(\tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} \right)^{5/3} = \tau^{5/3} \left(1 - \frac{9}{88} \tau^{8/3} \right)^{5/3}.$$

Оскільки на етапі динамічного стискання тіл $\tau \in (0; \tau_c)$, де $\tau_c \approx 1,61064$, то $9\tau_c^{8/3}/88 < 1$.

Тому далі скористаємося біноміальним рядом:

$$\left(1 - \frac{9}{88} \tau^{8/3} \right)^{5/3} \approx 1 - \frac{15}{88} \tau^{8/3} + \frac{45}{7744} \tau^{16/3} - \dots,$$

і надамо другому наближенню вигляд:

$$f_2(\tau) \approx \tau^{5/3} - \frac{15}{88} \tau^{13/3} + \frac{45}{7744} \tau^7 - \dots \quad (7)$$

Підставивши (7) в (6), за третьою ітерацією, одержуємо наближений розв'язок інтегрального рівняння:

$$f(\tau) \approx f_3(\tau) \approx \left(\tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} + \frac{135}{26752} \tau^{19/3} - \frac{5}{61952} \tau^9 \right)^{5/3}. \quad (8)$$

Щоб надати виразу (8) більш компактну форму, скористаємося методом Шенкса [11], за яким сума ряду S пов'язана з сумою його n – членів S_n наближеною залежністю [13]:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}, \quad (9)$$

де a_n і a_{n+1} n – й і $(n+1)$ – й члени ряду.

Покладемо в (8):

$$S_n = \tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3}; \quad a_n = -\frac{9}{88} \tau^{11/3}; \quad a_{n+1} = \frac{135}{26752} \tau^{19/3}.$$

Підставивши ці вирази в (9), отримуємо:

$$S \approx \tau - \frac{9}{88} \tau^{11/3} + \frac{1215 \tau^{19/3}}{88(135 \tau^{8/3} + 2736)} = \tau - \frac{342 \tau^{11/3}}{11(15 \tau^{8/3} + 304)}.$$

В результаті наближений розв'язок (8) набуває замкнену форму:

$$f(\tau) \approx \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15 \tau^{8/3} + 304} \right)^{5/3}.$$

Враховуючи її та вирази (3) і (5), для обчислення сили удару, на етапі стискання тіл, отримуємо формулу:

$$P(t) \approx \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{5/8} \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15 \tau^{8/3} + 304} \right)^{5/3}. \quad (10)$$

Точний розв'язок цієї задачі удару пов'язаний з *Ateb-синусом* і подається добутком [14]:

$$P(t) = \left(\frac{x_c}{K}\right)^{5/3} \cdot \left[\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \right]^{5/3}, \quad (11)$$

у якому:

$$x_c = \left(\frac{4M v_0^2 K^{5/3}}{3}\right)^{3/8}; \quad \eta = \frac{v_0 t}{x_c}.$$

У підсумку (11) зводиться до співвідношення:

$$P(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^{5/8} \left(\frac{M v_0^2}{K}\right)^{5/8} \left[\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \right]^{5/3}. \quad (12)$$

Із виразів (10), (12) випливає, що:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \left(\frac{3}{4}\right)^{3/8} \left(\tau - \frac{342}{11} \frac{\tau^{11/3}}{15\tau^{8/3} + 304} \right). \quad (13)$$

Оскільки $\tau = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/8} \eta$, то апроксимація (13) зводиться до наступної:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \eta - \frac{114}{11} \frac{\eta^{11/3}}{5\eta^{8/3} + 76}.$$

Далі їй надаємо більш зручний для обчислень вигляд:

$$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}}. \quad (14)$$

Це наближення має чинність в першій чверті періоду Атеб-синуса $\eta \in [0, \eta_c]$, де $\eta_c \approx 1,44593$.

Інформація про похибки наближення (14) при різних η надана в табл. 1, де також вказано більш точні значення Атеб-синуса, запозичені з [14], які вважаємо умовно точними.

Таблиця 1 – Наближені та точні значення Атеб-синуса

η	$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$		η	$\text{Sa}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$	
	формула (14)	таблиця в [14]		формула (14)	таблиця в [14]
0,2	0,200	0,200	1,0	0,872	0,872
0,4	0,395	0,395	1,2	0,960	0,960
0,6	0,579	0,579	1,3	0,985	0,986
0,8	0,742	0,742	1,4459	0,998	1,000

Найбільша похибка апроксимації (14) в цій таблиці досягається при $\eta = \eta_c$ і становить 0,2 %.

По аналогії з (14), для апроксимації Атеб-косинуса в першій чверті його періоду $\eta \in [0, \eta_c]$ можна використовувати формулу:

$$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) = f(\eta) \approx \eta_c - \eta - 0,13636 \frac{(\eta_c - \eta)^{11/3}}{1 + 0,06579(\eta_c - \eta)^{8/3}}. \quad (15)$$

Її максимальна похибка теж становить 0,2 %. В цьому переконують результати розрахунків, записані в табл. 2, де додатково також вказано наближені значення Атеб-косинуса, до яких призводить відома апроксимація [15, 16]:

$$\text{Ca}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\eta\right) \approx 1 - \frac{2}{1+\alpha} \ln \left[\text{ch}\left(\frac{1+\alpha}{2}\eta\right) \right], \quad \text{при } \alpha = \frac{5}{3}, \quad (16)$$

і гібридне наближення:

$$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right) \approx \begin{cases} 1 - 1,2 \sin^2(\sqrt{5/3} \cdot (\eta)) & \text{при } 0 \leq \eta \leq 0,5 \\ f(\eta) & \text{при } 0,5 < \eta \leq \eta_c. \end{cases} \quad (17)$$

Таблиця 2 – Наближені та точні значення Ateb-косинуса

η	$\text{Ca}\left(\frac{5}{3}, 1, \frac{4}{3}\eta\right)$			
	формула (15)	формула (16)	формула (17)	таблиця в [14]
0,0	0,998	1,000	1,000	1,000
0,2	0,973	0,974	0,974	0,974
0,4	0,896	0,898	0,896	0,896
0,6	0,775	0,782	0,775	0,775
0,8	0,619	0,636	0,619	0,619
1,0	0,439	0,469	0,439	0,439
1,2	0,245	0,290	0,245	0,245
1,3	0,146	0,197	0,146	0,146
1,4459	0,000	0,058	0,000	0,000

Із розглянутих кращим наближенням є (17). Воно забезпечує точність в три значущих цифри після коми, якщо вважати умовно точними результати в [14].

Враховуючи апроксимацію (14) та залежності (1), (11), зміни у часі сили удару та зближення центрів мас тіл при стисканні описуємо компактними формулами:

$$P(t)/P_c \approx \left(\eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}} \right)^{5/3}; \quad (18)$$

$$x(t)/x_c = \eta - 0,13636 \frac{\eta^{11/3}}{1 + 0,06579\eta^{8/3}}, \quad (19)$$

в яких $P_c = \left(\frac{4M v_0^2}{3K} \right)^{5/8}$; $x_c = \left(\frac{4}{3} M v_0^2 K^{5/3} \right)^{3/8}$; $\eta = \frac{v_0 t}{x_c}$.

Максимуми P_c і x_c досягаються при $\eta = \eta_c$.

Формули (18) і (19) можна використовувати і для розрахунку процесу удару на етапі розтискання тіл, що проходить на проміжку $\eta \in (\eta_c; 2\eta_c)$. Але перед використанням в них треба замінити η на $2\eta_c - \eta$.

Числові результати, їх порівняння і обговорення. Для проведення розрахунків приймаємо: $m_1 = 0,7$ кг; $m_2 = \infty$; $v_0 = 3$ м/с; $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_1 = 0,25$; $E_2 = 7,5 \cdot 10^6$ Па; $\mu_2 = 0,5$; $A = 5 \text{ м}^{-1/2}$. Вказаним числовим даним відповідає $K = 1,36119 \cdot 10^{-4} \text{ мН}^{-5/3}$. Розраховані максимуми становлять: $x_c = 8,5173 \cdot 10^{-3}$ м; $P_c = 986,2159$ Н, при тривалостях стискання $t_c = 0,004105$ с і удару $t_y = 0,008210$ с.

Обчислені по формулі (19) відношення $x(t)/x_c$ записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення $x(t)/x_c$

η	$x(t)/x_c$		η	$x(t)/x_c$	
	формула (19)	Чисельне інтегрування		формула (19)	Чисельне інтегрування
0,3615	0,3582	0,3582	1,4459	0,9977	1,0000
0,7230	0,6826	0,6826	1,8074	0,9148	0,9149
1,0845	0,9148	0,9149	2,1689	0,6826	0,6826

Для порівняння, тут вказано більш точні відношення $x(t)/x_c$, запозичені з роботи [14], де вони отримані чисельним інтегруванням рівняння удару на комп'ютері. Як бачимо, розбіжності наближених і точних результатів не суттєві. В табл. 4 записано обчислені двома способами відношення $P(t)/P_c$ для різних t .

Таблиця 4 – Значення $P(t)/P_c$

η	$P(t)/P_c$		η	$P(t)/P_c$	
	формула (18)	Чисельне інтегрування		формула (18)	Чисельне інтегрування
0,3615	0,1807	0,1807	1,4459	0,9962	1,0000
0,7230	0,5292	0,5292	1,8074	0,8621	0,8622
1,0845	0,8621	0,8622	2,1689	0,5292	0,5292

При $\eta = 1,4459$ похибка наближеного розв'язку в табл. 3 більша, ніж в табл. 2, але вона не перевищує 0,4 %, що підтверджує досить високу точність наближеного аналітичного розв'язку задачі удару.

Перспективи подальших досліджень. Одержаний у статті наближений розв'язок стосується інтегрального рівняння, що описує удар тіл обертання, обмежених поверхнями низького порядку, які мають сингулярну точку. Але викладений метод дає можливість знаходити і наближені аналітичні розв'язки інтегральних рівнянь, які описують більш щільний контакт тіл при їх ударі, коли граничні поверхні мають високий порядок. Отже, в перспективі доцільно побудувати розв'язки більш загальних інтегральних рівнянь, які теж слугуватимуть апроксимації періодичних Атеб-функцій.

Висновки. Наявність сингулярної точки на поверхні контакту одного із тіл, задіяних в ударі, змінює показник нелінійності в інтегральному рівнянні сили удару, порівняно з класичним варіантом теорії Г. Герца. Побудований тут наближений аналітичний розв'язок нового інтегрального рівняння є досить точним і компактним. Він дає можливість аналізувати плинність у часі сили удару та зближення центрів мас тіл, а також обчислити максимальні значення вказаних параметрів. Одержаний розв'язок можна також використовувати для наближеного обчислення значень періодичних Атеб-функцій, через які виражається точний аналітичний розв'язок розглянутої задачі удару, бо він є *апроксимацією туну Паде* для названих спеціальних функцій.

Список літератури

1. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзків Т. Б. Опір матеріалів. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с.
3. Шкельов Л. Т., Станкевич А. М., Пошивач Д. В. Опір матеріалів. – Київ : Вінок, 2011. – 456 с.
4. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Сравнение прогибов консольной балки при ударе, вычисленных по теориям Кокса и Сен-Венана // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2012. – № 4 (68). – С. 94 – 97.
5. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Calculation of the dynamic deflection of a beam on inelastic impact by the Cox and Saint-Venant theories // Strength of Materials. – 2013. – Vol. 45. – Issue 3. – P. 361 – 368. DOI: 10.1007/s11223-013-9466-x
6. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – Москва : Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва : Машиностроение, 1970. – 734 с.
8. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков : Мисьдрук, 2011. – 376 с.
9. Ольшанський В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанський С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Мисьдрук, 2012. – 320 с.
10. Петренко М. П. Про наближений розв'язок уточненого функціонального рівняння теорії удару // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7. – № 5. – С. 565 – 568.
11. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.
12. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М. – Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.
13. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 244 – 249.
14. Ol'shanskii V. P., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface // East-European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – Vol. 1/7 (97). – P. 25 – 32. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155854
15. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. – 2000. – Vol. 11. – no. 10. – P. 1535 – 1542. DOI: 10.1016/S0960-0779(99)00076-4
16. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a Sum of Noninteger-Order Nonlinearities // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 1. – Article ID- 649050. – 20 p. DOI: 10.1155/2012/649050.

References (transliterated)

1. Pysarenko G. S., Kvitka A. L., Umans'kyi E. S. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2004. 655p.
2. Gumyak L. I., Gutsulyak Yu. V., Yuzkiv T. B. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Lviv, New World Publ., 2005. 364 p.
3. Shkelyov L. T., Stankevych A. M., Poshyvach D. V. *Opir materialiv* [Strength of Materials]. Kyiv, Svitanok Publ., 2011. 456 p.
4. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Sravnenie progibov konsol'noy balki pri udare, vychislennykh po teoriyam Koksa i Cen-Venana [Comparison of cantilever beam deflection at impact, calculated according to the theories of Cox and Saint-Venant]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyi naukovy-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technology and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnytsia, 2012, no. 4 (68), pp. 94–97.
5. Ol'shanskii V. P., Ol'shanskii S. V. Calculation of the dynamic deflection of a beam on inelastic impact by the Cox and Saint-Venant theories. *Strength of Materials*. 2013, vol. 45, Issue 3, pp. 361–368. DOI: 10.1007/s11223-013-9466-x
6. Timoshenko S. P., Yang D. H., Weaver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 472 p.
7. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
8. Smetankina N. V. *Nestatsionarnoye deformirovaniye, termouprugost' i optimizatsiya mnogoslonykh plastin i tsilindricheskikh obolochek* [Unsteady deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2011. 376 p.
9. Ol'shanskii V. P., Tishhenko L. N., Ol'shanskii S. V. *Kolebaniya stержney i plastin pri mekhnicheskoy udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2012. 320 p.
10. Petrenko M. P. Pro nablyzhenyy rozv'yazok utochenogo funktsional'nogo rivnyannya teorii udaru [On the approximate solution of a refined functional equation of impact theory]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 1961, vol. 7, no. 5, pp. 565–568.
11. Kyl'chevskiy N. A. *Dinamicheskoye kontaktnoye szhatie tverdyykh tel. Udar* [Dynamic contact compression of solids. Hit]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 319 p.
12. Shtaerman I. Ya. *Kontaktmaya zadacha teorii uprugosti* [Contact problem of the theory of elasticity]. Moscow – Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 272 p.
13. Ol'shansk'yy V. P. Porivnyannya nablyzhenykh rozvyazkiv integral'nogo rivnyannya syly udaru til v teorii Hertsa [Comparison of approximate solutions to impact strength integral equation in the framework of Hertz theory]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2019, no. 8 (1333), pp. 244–249.

14. Ol'shanskii V. P., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *East-European Journal of Enterprise technologies*. 2019, no. 1/7 (97), pp. 25–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155854
15. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000, vol. 11, no. 10, p. 1535–1542. DOI: 10.1016/S0960-0779(99)00076-4
16. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a Sum of Noninteger-Order Nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, vol. 1, Article ID-649050, 20 p. DOI: 10.1155/2012/649050

Надійшла (received) 17.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasily Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ОБМЕЖЕНУ ТРИВАЛІСТЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА З НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКИМ ОПОРОМ

Показано, що при дії сили степеневно-нелінійного в'язкого опору лінійно пружний осцилятор може мати область застою вільних коливань, як і при дії сили сухого тертя Кулона. Тоді, отримавши задане початкове відхилення від положення рівноваги, такий осцилятор здійснює обмежену кількість розмахів, тобто його вільні коливання проходять на скінченному проміжку часу, що зазвичай спостерігається на практиці. В цьому принципова відмінність коливань розглянутого нелінійного осцилятора від класичного дисипативного лінійного, де вільні затухаючі коливання тривають у часі до нескінченності, бо відсутня область застою. З'ясовано умови, коли сила нелінійного в'язкого опору призводить до появи області застою. Наведено приклади розрахунків вільних коливань і проведено порівняння результатів, одержаних різними способами.

Ключові слова: вільні коливання, нелінійно-в'язке тертя, можливість застою коливань, метод енергетичного балансу.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Показано, что при действии силы степенного нелинейного вязкого сопротивления линейно упругий осцилятор может иметь область застоя свободных колебаний, как и при действии силы сухого трения Кулона. Тогда, получив заданное начальное отклонение от положения равновесия, такой осцилятор совершает ограниченное количество размахов, то есть его свободные колебания происходят на конечном промежутке времени, что обычно наблюдается на практике. В этом принципиальное отличие колебаний рассмотренного нелинейного осциллятора от классического диссипативного линейного, где свободные колебания продолжают до бесконечности, поскольку отсутствует область застоя. Определены условия, когда сила нелинейного вязкого сопротивления приводит к появлению области застоя. Приведены примеры расчетов свободных колебаний и проведено сравнение результатов, полученных разными способами.

Ключевые слова: свободные колебания, нелинейно-вязкое трение, возможность застоя колебаний, метод энергетического баланса.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

ON LIMITED DURATION OF OSCILLATIONS OF FREE OSCILLATOR WITH NONLINEAR VISCOUS RESISTANCE

It is shown that under the action of the force of nonlinear viscous resistance, a linearly elastic oscillator can have a stagnation region of free oscillations, as under the action of the Coulomb's dry friction force. Then, having received a given initial deviation from the equilibrium position, such an oscillator performs a limited number of swings, i. e., its free oscillations occur over a finite period of time, which is usually observed in practice. This is the fundamental difference between the oscillations of the considered nonlinear oscillator and the classical dissipative linear one, where free oscillations continue infinitely, since there is no stagnation region. The conditions are determined when the force of nonlinear viscous resistance leads to the appearance of a stagnation region. Examples of calculations of free oscillations are given and the results obtained by applying different methods are compared.

Key words: free oscillations, nonlinear-viscous friction, the possibility of stagnation of oscillations, the energy balance method.

Вступ. Як відомо, зміна *амплітуд вільних коливань у часі в лінійного в'язкопружного осцилятора* відбувається за експоненціальним законом, а тривалість коливань не обмежена у часі. На практиці вільні коливання будь-якого осцилятора завжди зводяться до обмеженої кількості розмахів, а розбіжність теорії з практикою час-то намагаються пояснити додатковою наявністю *сили сухого тертя*. Але виявляється, що за певних обставин обмежену кількість розмахів нелінійний в'язкопружний осцилятор може мати і при відсутності сили сухого тертя. З'ясування умов такої можливості складає предмет даної роботи.

Огляд літературних джерел. Вільні затухаючі коливання лінійного в'язкопружного осцилятора висвітлені

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2019

в багатьох виданнях з теоретичної механіки [1, 2] та теорії коливань [3, 4]. В [4] розглянуто вільні коливання осцилятора при спільній дії лінійного в'язкого опору і сили сухого тертя. Розв'язок задачі подано на фазовій площині. Спільна дія сил лінійно в'язкого опору та сили сухого тертя Кулона вивчалась також в [5, 6]. В цих публікаціях методом припасовування побудовано точні розв'язки диференціального рівняння руху та одержано наближені розв'язки задачі методом енергетичного балансу. Порівняння чисельних результатів, одержаних двома способами, підтвердило придатність наближеного методу до розрахунку вільних затухаючих коливань. Метод енергетичного балансу раніше застосовано в [7] до аналізу руху осцилятора при наявності нелінійної сили в'язкого опору. Саме цю методику використаємо і в даній роботі, складаючи баланс енергій за один розмах осцилятора. Зазначимо, що в [7] складали баланс енергій за один цикл коливань.

Диференціальне рівняння обвідної графіка коливань і його розв'язок. Рівняння вільних коливань осцилятора має вигляд:

$$m \ddot{x} + K |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

де m, c – відповідно маса і жорсткість осцилятора; K – коефіцієнт в'язкого опору; $v \geq 0$ – показник нелінійності опору; $x(t)$ – відхилення осцилятора від положення рівноваги $x = 0$; крапка над x означає похідну за часом t .

За твердженням автора [7] рівняння (1) не може бути розв'язане аналітично в замкненій формі. Тому тут теж обмежимося наближеним аналізом коливального процесу.

Розглянемо i -й розмах коливань з екстремальними відхиленнями $x = -a_{i-1}$ і $x = a_i$, причому $a_i < a_{i-1}$. Зміна потенціальної енергії $\Delta\Pi$ на цьому проміжку руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{2} (a_i^2 - a_{i-1}^2) < 0. \quad (2)$$

Робота сили в'язкого опору A_{OP} визначається інтегралом:

$$A_{OP} = -K \int_{-a_{i-1}}^{a_i} |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) dx,$$

який обчислимо наближено. Для цього, дотримуючись [7], припускаємо, що закон руху залишається таким як і при відсутності опору, тобто:

$$x(t) = -a \cos(\omega t), \quad a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i), \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Тоді:

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad dx = \dot{x} dt = a\omega \sin(\omega t) dt; \quad A_{OP} = -K (a\omega)^{v+1} \int_0^{\pi/\omega} (\sin \omega t)^{v+1} dt.$$

Інтеграл тут виражається через *Гама-функцію* $\Gamma(z)$ по формулі [8]:

$$\int_0^{\pi} (\sin z)^{v+1} dz = \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}.$$

Тому:

$$A_{OP} \approx -K a^{v+1} \omega^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}. \quad (3)$$

Щоб вивести диференціальне рівняння обвідної лінії, наближено прийmemo, що:

$$a_i - a_{i-1} \approx \frac{\pi}{\omega} \frac{da}{dt}. \quad (4)$$

Враховуючи (2) і (4), одержуємо:

$$\Delta\Pi \approx ca \frac{\pi}{\omega} \frac{da}{dt}. \quad (5)$$

Оскільки за умовою енергетичного балансу $\Delta\Pi = A_{OP}$, то, прирівнявши праві частини виразів (3) і (5), приходимо до рівняння:

$$\frac{da}{dt} = -ba^v, \quad (6)$$

$$\text{в якому: } b = \frac{K\omega^{v+1}}{\pi c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}.$$

Позначивши символом a_0 початкове відхилення осцилятора на першому розмаху, інтегруванням (6) отримуємо:

$$a = \begin{cases} \left[a_0^{1-v} - b(1-v)t \right]^{1-v} & \text{при } v \neq 1, \\ a_0 \exp(-bt) & v = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Підкреслимо, що у випадку $v = 1$ маємо: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(2) = 1$; $b = \frac{K}{2m}$. Одержаний наближено вираз a в (7) співпадає з точним.

На думку автора [7] практична цінність формули (7) полягає в тому, що, використовуючи її, значення констант v і b можна знайти обробкою експериментальних осцилограм, а потім задіяти їх у розрахунках вимушених, в тому числі резонансних, коливань. Доповнюючи цей вислів, підкреслимо і важливу теоретичну значимість формули (7). Із неї при $0 \leq v < 1$ випливає, що вираз в квадратних дужках може дорівнювати нулю: $a_0^{1-v} - b(1-v)t = 0$. Це рівняння має корінь:

$$t_0 = \frac{a_0^{1-v}}{b(1-v)},$$

яким обмежена тривалість руху осцилятора, тобто коливальний рух його проходить лише на обмеженому проміжку часу $t \in (0; t_0)$. Такої властивості осцилятор немає при $v \geq 1$. Таким чином, доводиться говорити про існування області застою осцилятора з в'язким опором, окремий випадок якого $v = 0$ відповідає дії сили сухого тертя.

Використовуючи (7), можна обчислити екстремальні відхилення осцилятора, які зменшуються в ході руху. Так в кінці i -го розмаху екстремальне відхилення становить:

$$a_i = \begin{cases} \left[a_0^{1-v} - b(1-v)\frac{i\pi}{\omega} \right]^{1-v} & v \neq 1, \\ a_0 \exp\left(-\frac{K}{2} \frac{i\pi}{\sqrt{cm}}\right) & v = 1. \end{cases} \quad (8)$$

У випадку $0 \leq v < 1$ кількість повних розмахів n обмежена нерівністю:

$$n \leq \text{ціла частина } \frac{a_0^{1-v}\omega}{\pi(1-v)b},$$

яка відноситься до наближених результатів.

Рекурентні співвідношення для розрахунку амплітуд розмахів. Вище використовували наближені вирази $\Delta\Pi$ і $A_{OП}$ при складанні диференціального рівняння обвідної графіка коливань. Але розрахунки можна проводити і без спрощення виразу $\Delta\Pi$. Тоді енергетичний баланс подається рівнянням:

$$a_i + a_{i-1} = 2a_{i-1} - \lambda(a_i + a_{i-1})^v, \quad (9)$$

у якому:

$$\lambda = \frac{K\omega^v}{2^v c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}. \quad (10)$$

Рівняння (9) дає можливість обчислити a_i , якщо відомо значення a_{i-1} . Для довільних v його розв'язок доводиться будувати чисельним методом. Наприклад, можна використати ітераційну схему Ньютона, за якою:

$$A_{ij+1} = A_{ij} - \frac{A_{ij} + \lambda A_{ij}^v - 2a_{i-1}}{1 + \lambda v A_{ij}^{v-1}} = \frac{2a_{i-1} - \lambda(1-v)A_{ij}^v}{1 + \lambda v A_{ij}^{v-1}}; \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad A_{i0} = 2a_{i-1}; \quad A_i = a_i + a_{i-1}. \quad (11)$$

де A_i – величина i -го розмаху.

Обчисливши з заданою точністю A_{ij+1} , далі легко знайти a_i , бо $a_i = A_{ij+1} - a_{i-1}$.

Поряд з цим існують такі значення ν , для яких рівняння (9) зводяться до рекурентного співвідношення. Розглянемо їх окремо.

Випадок $\nu = 0$. Для нього (9) переходить в:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2K}{c}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Це відоме точне рекурентне співвідношення виконується при дії сили сухого тертя, коли зона застою становить $|x| \leq K/c$.

Випадок $\nu = 1/3$. Рівняння (9) набуває вигляд:

$$z_i^3 + \lambda z_i - 2a_{i-1} = 0. \quad (12)$$

$$\text{Тут } z_i = \sqrt[3]{a_i + a_{i-1}}; \quad \lambda = \frac{K}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{\omega}{2}}.$$

Інтерполяцією табличних даних в [9] знаходимо, що: $\Gamma(7/6) \approx 0,927723$; $\Gamma(5/3) \approx 0,902745$. Тому:

$$\lambda \approx 1,44572 \frac{K}{c} \sqrt[3]{\frac{\omega}{2}}.$$

Розв'язок кубічного рівняння (12) подається формулами Кардано [10]:

$$z_i = \sqrt[3]{a_{i-1} + \sqrt{Q_i}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q_i} - a_{i-1}}, \quad (13)$$

$$\text{де } Q_i = a_{i-1}^2 + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^3.$$

Обчисливши z_i , далі легко знайти a_i , бо $a_i = z_i^3 - a_{i-1}$.

Випадок $\nu = \frac{1}{2}$. Рівняння (9) зводиться до квадратного:

$$y_i^2 + \lambda y_i - 2a_{i-1} = 0,$$

у якому:

$$y_i = \sqrt{a_i + a_{i-1}}; \quad \lambda = \frac{K}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Згідно з таблицею в [9, 11] $\Gamma(5/4) \approx 0,906402$; $\Gamma(7/4) \approx 0,919063$. Тому:

$$\lambda \approx 1,23605 \frac{K}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Значення a_i подається рекурентним співвідношенням:

$$a_i = \left(\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 + 2a_{i-1}} - \frac{\lambda}{2} \right)^2 - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Випадок $\nu = 1$. Рівняння (9) стає лінійним, з якого випливає рекурентне співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

причому $\lambda = \frac{K\pi\omega}{4c} = \frac{K\pi}{4\sqrt{cm}}$. Тут прийняли до уваги що в (10) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Підкреслимо, що при $\nu = 1$ існує точний розв'язок задачі:

$$a_i = a_{i-1} \exp\left(-\frac{K\pi}{2\sqrt{cm}}\right) = a_{i-1} \exp(-2\lambda).$$

Похибка формули (15) визначається похибкою апроксимації:

$$\exp\left(-\frac{K\pi}{2\sqrt{cm}}\right) \approx \frac{4\sqrt{cm} - K\pi}{4\sqrt{cm} + K\pi}.$$

В [6] обчислено, що при $\lambda = 0,15$ похибка цієї апроксимації становить 0,229%, а при $\lambda = 0,25$ – 1,078%.

тобто для малих λ наближена формула (15) цілком придатна для розрахунків.

Випадок $\nu = 2$, що називають гідродинамічним або турбулентним демпфуванням [7]. Рівняння (9) зводиться до квадратного:

$$\lambda \xi_i^2 + \xi_i - 2a_{i-1} = 0,$$

у якому:

$$\xi_i = a_i + a_{i-1}; \quad \lambda = \frac{K\omega^2}{4c} \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{K}{3m}.$$

Тут враховували, що $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Екстремальні відхилення на i -ому розмаху пов'язані рекурентним співвідношенням:

$$a_i = \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{\lambda}a_{i-1}} - \frac{1}{2\lambda}a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Воно не залежить від жорсткості осцилятора c .

Рівняння (9) має замкнений аналітичний розв'язок і при $\nu = 3$, бо зводиться до кубічного:

$$\xi_i^3 + \frac{1}{\lambda}\xi_i - \frac{2}{\lambda}a_{i-1} = 0,$$

де $\lambda = \frac{K\omega^3}{8c} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3K\pi\omega^3}{63c}$.

За формулами Кардано отримуємо співвідношення:

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}a_{i-1} + \sqrt{S_i}} - \sqrt[3]{\sqrt{S_i} - \frac{1}{\lambda}a_{i-1}} - a_{i-1},$$

в якому:

$$S_i = \frac{1}{\lambda^2} \left(a_{i-1}^2 + \frac{1}{27\lambda} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Отже для розглянутих ν можна обійтись без ітерацій в (11).

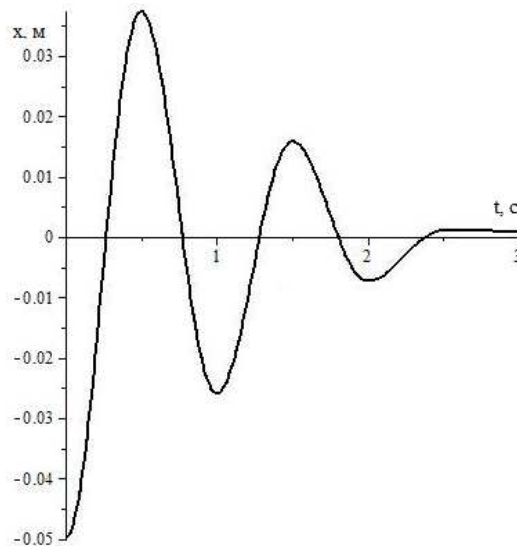
Чисельні результати та їх порівняння. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1$ кг, $c = 4\pi^2$ Н/м, $K = 0,4$ Н/(с/м)²; $a_0 = 0,05$ м і різні значення ν .

Приклад 1. Задаємо $\nu = 0,3$. Користуючись формулами (8) і (13), знаходимо послідовності амплітуд до повної зупинки осцилятора. Їх запишемо в табл. 1.

Таблиця 1 – Послідовності амплітуд коливань при $\nu = 0,3$

i	Формула (8)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10^2 a_i$, м		
0	5,000	5,000	5,000
1	3,799	3,798	3,798
2	2,714	2,711	2,711
3	1,758	1,752	1,752
4	0,952	0,942	0,942
5	0,331	0,313	0,314

Для порівняння, в останній колонці табл. 1 вказано значення a_i , одержані чисельним інтегруванням диференціального рівняння (1) на комп'ютері. Їх можна вважати умовно точними. Як бачимо, формула (13) дає більш точні результати, ніж формула (8). Графік коливань осцилятора, що відповідає прийнятним числовим даним, подано на рис. 1. Чисельне інтегрування рівняння (1) підтверджує, що після п'яти розмахів, з перетином положення $x = 0$, осцилятор попадає в область застою.

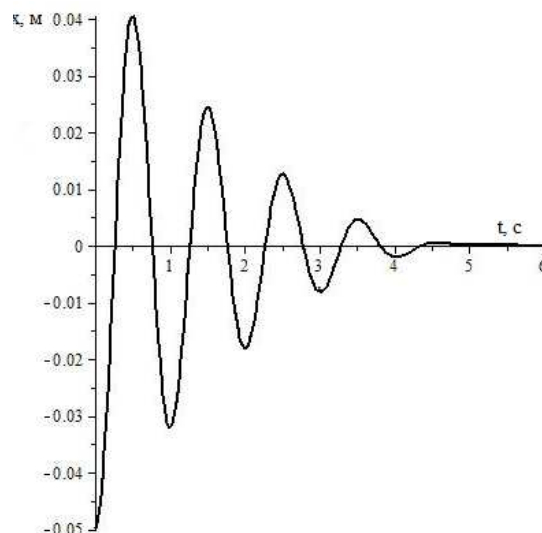
Рис. 1 – Графік коливань при $\nu = 0,3$.

Приклад 2. Проведемо аналогічні розрахунки при $\nu = 0,5$. Результати обчислень заносимо в табл. 2.

Таблиця 2 – Послідовності амплітуд коливань при $\nu = 0,5$

i	Формула (8)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10^2 a_i$, м		
0	5,000	5,000	5,000
1	4,057	4,055	4,056
2	3,212	3,209	3,210
3	2,465	2,462	2,462
4	1,818	1,813	1,813
5	1,268	1,262	1,263
6	0,818	0,810	0,811
7	0,465	0,457	0,458
8	0,212	0,202	0,203
9	0,057	0,046	0,046
10	$2,6 \cdot 10^{-4}$	–	–

І в цьому випадку формула (14) має більшу точність, ніж формула (8), яка дає хоч і малий, але зайвий останній розмах. У табл. 2 спадання амплітуд повільніше, ніж у табл. 1. Графіки коливань, одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері при $\nu = 0,5$ подано на рис. 2.

Рис. 2 – Графік коливань при $\nu = 0,5$.

Розрахунки підтвердили, що у випадку $0 \leq \nu < 1$ вільні коливання осцилятора мають обмежену кількість розмахів, як і при дії сили сухого тертя. Якщо ж $\nu \geq 1$, то кількість розмахів і тривалість коливань необмежені.

Таблиця 3 – Наближені та точні значення амплітуд при $\nu = 2$

i	Формула (17)	в [14]	i	Формула (17)	в [14]
	Значення $20Ka_i$			Значення $20Ka_i$	
0	3,301	3,301	6	1,418	1,420
1	2,701	2,704	7	1,296	1,298
2	2,286	2,290	8	1,192	1,194
3	1,982	1,986	9	1,104	1,106
4	1,750	1,753	10	1,029	1,030
5	1,567	1,570	11	0,963	0,964

Приклад 3. З метою з'ясування похибок наближеного методу при $\nu > 1$, проведемо порівняння чисельних результатів, до яких призводить формула (16) і точний розв'язок рівняння (1) при $\nu = 2$. Його в [12] виражено через функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [13]. Тут скористаємося точними чисельними даними роботи [14], зведеними там в таблицю при $K = 0,5 \text{ Н/(с/м)}^2$. Для випадку $m = 1 \text{ кг}$ формулі (16) надаємо вигляд:

$$2Ka_i = \sqrt{9 + 12(2Ka_{i-1})} - 3 - 2Ka_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Одержані при $2Ka_0 = 0,3301$ результати заносимо в табл. 3.

Порівняння підтверджує, що метод енергетичного балансу має невеликі похибки і при $\nu > 1$.

Перспективи подальших досліджень. В моделі коливань використали одночленний вираз сили опору, вважаючи, що вона пропорційна степеню швидкості руху. Викладений наближений метод дослідження дозволяє розглядати і більш складні варіанти опору. Тому перспективою подальших досліджень передбачено вивчення особливостей вільних коливань осцилятора, в якого сила опору складається з лінійного та нелінійного доданків, що буде узагальненням результатів, одержаних в цій роботі.

Висновки. Методом енергетичного балансу виведено наближені формули для розрахунку амплітуд вільних затухаючих коливань нелінійного осцилятора з різними варіантами в'язкого опору.

Встановлено умови, коли лінійно пружний осцилятор з в'язким тертям має обмежену кількість розмахів при вільних коливаннях.

Проведено порівняння чисельних результатів, одержаних різними методами, і показано узгодженість наближених і умовно точних результатів, отриманих чисельним комп'ютерним інтегруванням диференціального рівняння руху осцилятора.

Список літератури

1. Кузьо І. В., Зін'ко Я. А., Ванькович Т.-Н. М. Теоретична механіка. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Лойцянський Л. Г., Лур'є А. І. Курс теоретической механіки. – Москва : Дрофа, 2006. – 720 с.
3. Василенко М. В., Алексеичук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
4. Бабаков І. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
5. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Коливання дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2015. – 116 с.
6. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
7. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Ленинград : Машиностроение, 1976. – 320 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М. : Наука, 1981. – 800 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М. : Наука, 1974. – 832 с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
12. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функція Ламберта в задаче колебаний математического маятника // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.
13. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функція Ламберта в задачах баллистики матеріальної точки. – Харків : Издатель Савчук В.О., 2013. – 204 с.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.

References (transliterated)

1. Kuzio I. V., Zin'ko Y. A., Van'kovych T.-N. M. *Teoretychna mekhanika* [Theoretical mechanics]. Kharkiv, Folio Publ., 2017. 780 p.
2. Loytsyanskiy L. G., Lurie A. I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [The course in theoretical mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 720 p.
3. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
4. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
5. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. N. *Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2015. 116 p.
6. Ol'shans'kyy V. P., Tishhenko L. N., Ol'shans'kyy S. V. *Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.

7. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
9. Abramovits A., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
10. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p.
11. Yanke E., Emde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
12. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika* [The Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnstsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 18 (1061), pp. 116 – 119.
13. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [The Lambert function in ballistic problems of a material point]. Kharkiv, Savchuk V.O. Publ., 2013. 204 p.
14. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.

Надійшло (received) 11.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

UDC 519.6

I. I. PERSHYNA, I. A. TOKMAKOVA

OPTIMAL CHOICE OF PLANES FOR PLACING TOMOGRAMS IN COMPUTED TOMOGRAPHY

The solution of the problem of reconstructing the internal structure of a three-dimensional body by the known tomograms produced by a computer tomograph using interflatation of functions and blending approximation is proposed. The known methods of approximating functions of one and two variables by interpolation type piecewise constant splines using means and medians are also considered. The paper presents an algorithm for optimizing the choice of the planes in which the tomograms produced by a computer tomograph are placed. The case is considered when all the tomograms are parallel to each other. The algorithm developed uses approximations of objects by classical piecewise constant splines. The internal structure of a three-dimensional body (density or absorption coefficient) is assumed to be given by a function of three variables of the form $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, where g is an arbitrary function, provided that f is a monotone function on a closed segment. The method of optimal choice of the planes for placing the tomograms is implemented using MathCad computer software.

Key words: tomograms, piecewise constant splines, interflatation, blending approximation.

Ю. І. ПЕРШИНА, І. А. ТОКМАКОВА

ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ПЛОЩИН, НА ЯКИХ РОЗМІЩЕНІ ТОМОГРАМИ, В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ

Представлено розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа, за допомогою інтерфлетатції функцій та мішаної апроксимації. Розглянуто також відомі методи наближення функцій однієї та двох змінних кусково-сталими сплайнами інтерполяційного типу, з використанням середніх та медіан. В статті пропонується алгоритм оптимізації вибору площин, на яких розміщені томограми, що поступають з комп'ютерного томографа. Розглядається випадок, коли всі томограми паралельні одна одній. Запропонований алгоритм використовує наближення об'єктів класичними кусково-сталими сплайнами. При побудові алгоритму істотно використовується припущення про те, що внутрішня структура тривимірного тіла (щільність або коефіцієнт поглинання) є функцією від трьох змінних вигляду $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, де g – довільна функція, при умові, що f – монотонна функція на замкнутому відрізку. Представлена чисельна реалізація методу оптимального вибору площин, на яких лежать томограми, в системі комп'ютерної математики MathCad.

Ключові слова: томограма, кусково-сталі сплайни, інтерфлетатція, мішана апроксимація.

Ю. И. ПЕРШИНА, И. А. ТОКМАКОВА

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПЛОСКОСТЕЙ, НА КОТОРЫХ РАЗМЕЩЕНЫ ТОМОГРАММЫ, В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Представлено решение задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным томограммам, поступающим от компьютерного томографа, с помощью интерфлетации функций и смешанной аппроксимации. Рассмотрены также известные методы приближения функций одной и двух переменных кусочно-постоянными сплайнами интерполяционного типа, с использованием средних и медиан.

© I. I. Pershyina, I. A. Tokmakova, 2019

В статье предлагается алгоритм оптимизации выбора плоскостей, на которых размещены томограммы, поступающие от компьютерного томографа. Рассматривается случай, когда все томограммы параллельны друг другу. Предложенный алгоритм использует приближения объектов классическими кусочно-постоянными сплайнами. При его разработке существенно используется предположение о том, что внутренняя структура трехмерного тела (плотность или коэффициент поглощения) является функцией от трех переменных вида $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, где g – произвольная функция, при условии, что f – монотонная функция на замкнутом отрезке. Представлена численная реализация метода оптимального выбора плоскостей, на которых лежат томограммы, в системе компьютерной математики MathCad.

Ключевые слова: томограмма, кусочно-постоянные сплайны, интерфлетация, мешаная аппроксимация.

Introduction and analysis of previous results. In recent years a new scientific direction, known as *computer aided tomography*, has been developing rapidly infiltrating into various branches of human knowledge. A lot of scientists in their innovative works link computer aided tomography to a new computational diagnostics methods, namely *the method of computed tomography (CT)*, which consists in computational reconstruction of functions of two and more variables by their known line integrals (over a sequence of straight lines) or their plane integrals (over a sequence of planes). The method of computed tomography allows studying the internal structure, physical properties or chemical composition of an object by the characteristics of the radiation passing through the object (*transmission tomography*) or emitted by the object itself (*emission tomography*).

A dramatic increase in the popularity of CT is due to the invention and improvement of medical tomographs (in particular the X-ray tomographs) and also to the fact that in most cases the results can't be obtained by any methods other than CT. In about 20 recent years five generations of X-ray computer tomographs have been created. Mathematical modeling of computer tomographs plays a crucial role in their constructing, wherein mathematical models of tomographs' various nodes are developed and studied using various optimization methods.

Nowadays tomographic methods are used in medicine, astronomy, astrophysics and physics of the atmosphere of the Earth, for plasma diagnostics, radiolocation, optics, geology, when analyzing the heat exchange in the ocean top layer, in geology, geophysics, physiology, object quality non-destructive testing (flaw detection), microscopy and in many other branches of modern science and technology.

In [1] the problem of reconstructing the internal structure of a 3D body by the known tomograms in a system of section planes is solved using interflation functions. In [2] blending approximation is used for solving the problem of 3D computer tomography. These are high accuracy methods. In [1] and [2] the tomograms produced by a computer tomograph are assumed to be situated in equidistant parallel planes.

In the present paper the method for optimal choosing the planes in which the tomograms are placed is proposed. The method allows to choose optimally the planes, which are, for example, perpendicular to the Ox coordinate axis, for any 3D body described by the formula $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, where g is an arbitrary function and f is a monotone function of one variable.

The known methods for approximating functions of one variable by piecewise constant splines.

Interpolation type piecewise constant splines of one variable.

There are three types of operators approximating continuous functions of one variable by piecewise constant functions (*splines of order 0*) [3 – 6]. The simplest one is approximating by interpolation type operators, which replace the approximated function $g(t)$, $t \in E$, by its value $g\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)$ on each interval of partition (t_{k-1}, t_k) , i.e.

$$Sg(t) = g\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

The approximation error for these splines is estimated as follows:

$$e_{n,0,\infty}(g) \leq M \left(\frac{\Delta}{2}\right)^\alpha, \quad \forall g \in Lip_M \alpha; \quad \Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}),$$

$$e_{n,0,\infty}(g) = \inf_{g_{n,0} \in S_{n,0}} \|g - g_{n,0}\|_{L_p[0,1]}.$$

The function g is Lipschitz of order $\alpha: 0 < \alpha \leq 1$: $g \in Lip_M \alpha$, on a segment $I = [a, b]$, where the class of Lipschitz functions is defined as follows:

$$Lip_M \alpha := \left\{ g \in C[a, b] : |g(t) - g(t')| \leq M |t - t'|^\alpha, \quad t, t' \in I \right\}, \quad Lip \alpha := \bigcup_{M > 0} Lip_M \alpha.$$

Note that $Lip_M \alpha$ is a space of linear functions with the half-norm given by the formula:

$$|g|_{Lip \alpha} := \inf_M \{M | g \in Lip_M \alpha\} \quad \text{or} \quad |g|_{Lip \alpha[a, b]} = \inf_{x, y \in [a, b]} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Piecewise constant splines of one variable using means.

In this case the approximation operator replaces the approximated function $g(t)$ by its mean value over the parti-

tion interval (t_{k-1}, t_k) : $\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) dt$, i.e.

$$Sg(t) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) dt, \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

The approximation error here is given by:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty E} \leq \omega(g, \Delta)_{C(E)}, \quad \forall g \in C(E), \quad \omega(g, \Delta)_{C(E)} = \max_{\substack{t', t'' \in E \\ |t' - t''| \leq \Delta}} |g(t') - g(t'')|.$$

For a continuous Lipchitz function the above error estimates are reduced to the following simple formula:

$$\omega(g, \Delta)_C = M \Delta^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Piecewise constant splines of one variable using medians.

For this approach the non-linear approximation operator $Sg(t)$ replaces the approximated function $g(t)$ by its median on each partition interval (t_{k-1}, t_k) , i.e.

$$Sg(t) = \frac{\left[\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2}, \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

For the error of approximation of a function $g(t) \in C(E)$ by the median the following inequality holds:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t) - Sg(t)| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \left| g(t) - \frac{\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t)}{2} \right|, \\ \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t) - Sg(t)| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) - \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t)}{2} \right| = \frac{B}{2n}, \end{aligned}$$

where $B = \text{Var}_{[0,1]} g = \max_{0 \leq t \leq 1} g(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} g(t)$ is the variation of g on $[0, 1]$.

The best approximation by piecewise constant splines of one variable using medians.

These are the non-linear operators $Sg(t)$ replacing the approximated function $g(t)$ by its median

$$\frac{\left[\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2},$$

on each partition interval (t_{k-1}, t_k) , when the nodes t_k are chosen such that

$$\frac{\left[\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right]}{2} = M = \text{const}, \quad \forall k.$$

The best approximation by piecewise constant splines using medians admits the following error estimate in the L_∞ norm:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty E} \leq \frac{M}{2n}, \quad \forall g \in C(E).$$

Approximation of $g(x, y) \in C[E^2]$ by piecewise constant splines.**Interpolation type piecewise constant splines of two variables.**

There exist five types of operators approximating continuous functions of two variables by piecewise constant functions (splines of order 0). The simplest method of approximation is by interpolation type operators replacing the approximated function $g(x, y)$ by its values $g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right)$ computed at the center of each partition rectangle

$(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$, i.e.

$$Sg(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad (x, y) \in (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The error of approximation by these operators is:

$$\|g - Sg\|_{C(E^2)} = O\left(M\left(\frac{\Delta}{2}\right)^\alpha\right), \quad \Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}, y_l - y_{l-1}\}, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Piecewise constant splines of two variables using means.

When approximating by piecewise constant splines of two variables using means, the approximation operator replaces the given function $g(x, y)$ by its mean over respective partition rectangle $(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$:

$$m_{k,l}(g) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \frac{1}{y_l - y_{l-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Thus the approximation operator is given by the formula:

$$Sg(x, y) = m_{k,l}(g), \quad (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The approximation error in this case is determined by the inequality:

$$\|g - Sg\|_{L_\infty[E^2]} \leq \omega(g, \Delta)_C = O(M\Delta^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \forall g(x, y) \in C(E^2).$$

Piecewise constant splines of two variables using medians.

For this type of approximation a non-linear approximation operator $Sg(x, y)$ replaces the approximated function $g(x, y)$ by its median on a partition rectangle $(x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$:

$$med_{k,l}(g) = \frac{1}{2} \left[\max_{\substack{x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ y_{l-1} \leq y \leq y_l}} g(x, y) + \min_{\substack{x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ y_{l-1} \leq y \leq y_l}} g(x, y) \right].$$

Thus

$$Sg(x, y) = med_{k,l}(g), \quad (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l).$$

The approximation error in this case is:

$$\|g - Sg\|_{C(E^2)} = O\left(\frac{M}{2n}\right).$$

When constructing such non-linear approximation operators the best approximation can be determined. To this end the partition (i.e. the partition nodes (x_k, y_l)) are to be found for which the approximation is the best possible.

Blending approximation by interpolation type piecewise constant splines of two variables.

This type of operators for approximating a function of two variables $g(x, y)$ are given by the formulae:

$$OIg(x, y) = (OI_1 + OI_2 - OI_1OI_2)g(x, y);$$

$$OI_1g(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, y\right), \quad x_{k-1} < x < x_k; \quad OI_2g(x, y) = g\left(x, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad y_{l-1} < y < y_l;$$

$$OI_1OI_2g(x, y) = g\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{l-1} + y_l}{2}\right), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad y_{l-1} < y < y_l.$$

Application of such approximation operators produces the error:

$$\|g - OIg\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

in case $\|g - OI_1g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon)$, $\|g - OI_2g\|_{C(E^2)} = O(\varepsilon)$.

Blending approximation [7] by piecewise constant splines of two variables using means.

This type of approximation operator is given by the formulae:

$$Sg(x, y) = (S1 + S2 - S1S2)g(x, y),$$

where

$$S1g(y) = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = \overline{1, n};$$

$$S2g(x) = \frac{1}{y_l - y_{l-1}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, \eta) d\eta, \quad y_{l-1} < y < y_l, \quad l = \overline{1, n}.$$

The operators $S1S2g$ are determine as in (1).

$$z(x) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} c_i \leftarrow f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ c \end{array} \right. \end{cases}$$

a

	0
0	0.01
1	0.03
2	0.05
3	0.07
4	0.09
5	0.11
6	0.13
7	0.15
8	0.17
9	0.19

b

Fig. 1 –MathCad screen: a – function $z(x)$; b – values of $z(x)$ at nodes x_i .

MathCad program for optimal choosing the planes for placing the tomograms. Let a given 3D body is described by the formula $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, where g is an arbitrary function and f is a monotone function of one variable.

Consider the method for optimal choosing the planes on the example of a monotone function of one variable $f(x)$. The algorithm is implemented using the MathCad computer software.

$$\begin{aligned} b &:= z(x) \\ J(x) &:= \max(b) \\ \text{Given} \\ x_0 &= 0 \\ x_n &= 1 \\ z(x)_0 &= z(x)_1 \\ z(x)_1 &= z(x)_2 \\ z(x)_2 &= z(x)_3 \\ z(x)_3 &= z(x)_4 \\ z(x)_4 &= z(x)_5 \\ z(x)_5 &= z(x)_6 \\ z(x)_6 &= z(x)_7 \\ z(x)_7 &= z(x)_8 \\ z(x)_8 &= z(x)_9 \end{aligned}$$

a

$$W := \text{Minerr}(x)$$

	0
0	0
1	0.316
2	0.447
3	0.548
4	0.632
5	0.707
6	0.775
7	0.837
8	0.894
9	0.949
10	1

b

Fig. 2 –MathCad screen: a – function $J(x)$; b – optimal nodes W .

Let, for example, $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$. We choose 10 nodes on the interval $[0, 1]$:

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad n = 10, \quad i = \overline{1, n}.$$

The nodes represent the planes in which the tomograms produced by a computer tomograph are placed. These planes are assumed to be perpendicular to the Ox coordinate axis.

We introduce the function $z(x)$ describing the difference of the values of the function $f(x)$ at two successive nodes (fig. 1).

Next we solve the system of equations (fig. 2, a) and determine the optimal distribution of nodes W (fig. 2, b).

In fig. 2 $J(x)$ describes the maximal deviation between the mentioned values of the function $z(x)$. We construct a piecewise constant spline with the optimal nodes W . The results are shown in fig. 3.

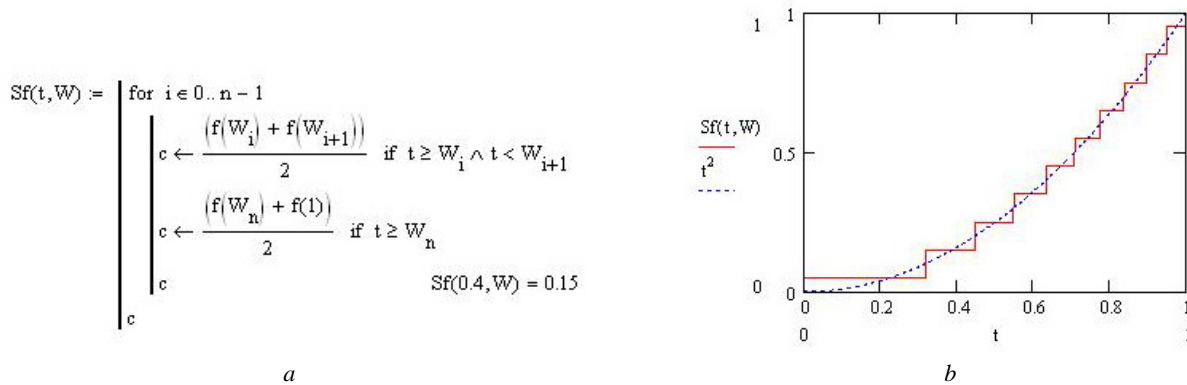


Fig. 3 – MathCad screen of a spline with the optimal nodes W :
a – analytical representation; b – graphical representation.

Thus, we get the optimal placement of the tomograms in the planes perpendicular to the Ox coordinate axis on the interval $[0, 1]$. The optimal nodes in this case are given by the column W (fig. 2).

Perspectives of further research. The perspective application of the algorithm presented in the paper, as seen by the authors, is for reconstructing the internal structure of a 3D body by function interflatation or blending approximation in the case when the tomograms are in the planes perpendicular to the coordinate axes [1], as well as when arbitrary planes are chosen [10], and also when the internal heterogeneity of the body structure is used essentially [7 – 9].

Conclusions. An algorithm for optimal choosing the planes for placing the tomograms in the 3D computed tomography in the case when all the tomograms are parallel to each other is presented. The internal structure of the reconstructed 3D body (density or absorption coefficient) is assumed to be given by a function of three variables of the form $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$, where g is an arbitrary function, provided that f is a monotone function on a closed segment.

Piecewise constant splines of one variable are used for approximation. The method proposed is implemented using the approach developed in [5].

Bibliography

1. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетатії функції // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. – С. 67 – 71.
2. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерліантантами з використанням трапецевидних елементів // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь, 2011. – № 2. – С. 59 – 70
3. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 350 с.
4. De Vore R. A. Nonlinear approximation // Acta numerica. – 1998. – Vol. 7. – P. 51 – 150. DOI: 10.1017/S0962492900002816.
5. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія – К.: Наукова думка, 2017. – 314 с.
6. Першина Ю. І., Пасічник В. О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3(66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
7. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ. – 2008. – С. 85 – 86.
8. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of Discontinuous Functions of Two Variables with Unknown Discontinuity Lines (Rectangular Elements) // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50. – Issue 4. – P. 594 – 602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
9. Литвин О. М., Першина Ю. І., Сергієнко І. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.
10. Першина Ю. І., Шилін В. О., Пасічник В. О. Розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин // Штучний інтелект. – Київ, 2015. – № 3-4(69-70). – С.60 –70.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Pershina I. I. Matematychna model' vidnovlennya tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi tryioch grup pererizanykh ploshhyn z vykorystannyam interfletatsiyi funktsiyi [Mathematical model of restoration of three-dimensional objects by their tomograms on a system of three groups of cut planes using an interflatation function]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
2. Lytvyn O. M., Pershina I. I. Nablyzhenia rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystannyam trapet-

- sevydnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous spline-interlinants using trapezoidal elements]. *Tavrishnyy visnyk informatyky ta matematyky* [Tavrichnyi Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2011, no. 2, pp. 59–70.
3. Korneychuk N. P. *Splayny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. M: Nauka, 1984, 350 p.
 4. De Vore R. A. Nonlinear approximation. *Acta numerica*. 1998, vol. 7, pp. 51-150. DOI: 10.1017/S0962492900002816.
 5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Pershyna I. I. *Teoriia rozryvnykh splainiv ta yii zastosuvannia v kompiuternii tomografii* [The theory of discontinuous splines and its application in computed tomography]. Monohrafiia. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2017. 314 p.
 6. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzheniya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynamy metodom minimaksa [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by the minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of the KhNTU]. Kherson, 2018, no. № 3(66), vol. 2, pp. 82–87.
 7. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychni modeliuvannia v kompiuternii tomografii z vykorystanniam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computed tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi "Teoriya ta metody obrobky signaliv"* [Proceedings of the second international conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, 2008. pp. 85–86.
 8. Lytvyn O. N., Pershyna Y. I., Sergienko I. V. Estimation of Discontinuous Functions of Two Variables with Unknown Discontinuity Lines (Rectangular Elements). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, vol. 50, issue 4, pp. 594–602. DOI: 10.1007/s10559-014-9647-z.
 9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I., Sergienko I. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovery of discontinuous functions of two variables when discontinuity lines are unknown (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
 10. Pershyna I. I., Shylin V. O., Pasichnyk V. O. Rozv'yazannya 3D zadachi komp'yuternoyi tomografii za vidomymy tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn [Solution of 3D problem of computed tomography using known tomograms on arbitrary plane system]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence] 2015, no. 4, pp. 60–70.

Received (надійшла) 06.05.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 630-07-43; e-mail: irina777111@ukr.net.

УДК 629.7.05:531.38

Ю. А. ПЛАКСИЙ, І. О. ГОМОЗКОВА**АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМА ОРІЄНТАЦІЇ Р. МІЛЛЕРА НА ЧОТИРЬОХЧАСТОТНІЙ ЕТАЛОННІЙ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА**

Запропоновано нове аналітичне представлення компонент кватерніона орієнтації твердого тіла у вигляді алгебраїчної суми добутків тригонометричних функцій кутів, що одночасно змінюються у часі. З оберненого кватерніонного кінематичного рівняння отримані аналітичні вирази для компонент вектора кутової швидкості, що відповідають такому обертальному руху. Для задачі оцінювання точності алгоритмів безплатформеної орієнтації сформовано еталонну модель обертання, яка включає аналітичні вирази для ідеальних сигналів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат. Для декількох наборів частот отримано чисельні реалізації еталонної моделі, побудовані траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Проведено чисельний аналіз похибки дрейфу для алгоритму орієнтації четвертого порядку з використанням у якості проміжних параметрів компонент вектора орієнтації, приріст якого на такті обчислюється алгоритмом Р. Міллера при різних значеннях коефіцієнтів. Показано, що алгоритм Р. Міллера з новим набором коефіцієнтів забезпечує меншу накопичену похибку дрейфу у порівнянні з традиційним алгоритмом і оптимізованим під кінцевий рух.

Ключові слова: кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації, похибка дрейфу.

Ю. А. ПЛАКСИЙ, И. А. ГОМОЗКОВА**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА ОРИЕНТАЦИИ Р. МИЛЛЕРА НА ЧЕТЫРЕХЧАСТОТНОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Предложено новое аналитическое представление компонент кватерниона ориентации твердого тела в виде алгебраической суммы произведений тригонометрических функций углов, одновременно изменяющихся во времени. Из обращенного кватернионного кинематического уравнения получены аналитические выражения для компонент вектора угловой скорости, которые отвечают такому вращательному движению. Для задачи оценивания точности алгоритмов бесплатформенной ориентации сформирована эталонная модель, которая включает аналитические выражения для идеальных сигналов датчиков угловой скорости в виде квазикоординат. Для нескольких наборов частот получены численные реализации эталонной модели, построены траектории в конфигурационном пространстве параметров ориентации. Проведен численный анализ погрешности дрейфа для алгоритма ориентации четвертого порядка с использованием в качестве промежуточных параметров компонент вектора ориентации, приращение которого на такте вычисляется алгоритмом Р. Миллера при разных значениях коэффициентов. Показано, что алгоритм Р. Миллера с новым набором коэффициентов обеспечивает меньшую накопленную погрешность дрейфа по сравнению с традиционным алгоритмом и оптимизированным под конечное движение.

Ключевые слова: кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации, погрешность дрейфа.

© Ю. А. Плаксій, І. О. Гомозкова, 2019

YU. A. PLAKSIY, I. A. HOMOZKOVA

THE ERROR ANALYSIS OF R. MILLER ORIENTATION ALGORITHM ON A FOUR-FREQUENCY REFERENCE MODEL OF A RIGID BODY ROTATION

A new analytical representation of the rigid body orientation quaternion components in the form of an algebraic sum of products of trigonometric functions of angles that simultaneously change in time is proposed. From the inverted quaternion kinematic equation, analytical expressions for the components of the angular velocity vector are obtained, which correspond to such rotational motion. For the problem of error analysis of SINS orientation algorithms, a reference model has been formed that includes analytical expressions for ideal signals of angular velocity sensors in the form of quasicordinates. For several sets of frequencies, numerical implementations of the reference model were obtained, trajectories in the configuration space of orientation parameters were constructed. A numerical analysis of the drift error for the fourth-order orientation algorithm was performed using the components of the orientation vector as intermediate parameters, the increment of which is calculated by the R. Miller algorithm for various values of coefficients. It is shown that the R. Miller algorithm with a new set of coefficients provides a smaller accumulated drift error compared with the traditional algorithm and one optimized for conical motion.

Key words: quaternion, reference model, test motion, quasicordinates, trajectories in configuration space, algorithm of orientation, drift error.

Вступ. Розглядається задача оцінювання точності визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БНС), коли кватерніони орієнтації на такті обчислюються спеціальним алгоритмом, на вхід якого подаються ідеальні сигнали з виходів вимірювачів кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [1] на такті $t \in [t_{n-1}, t_n]$:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}(t)$ на осі зв'язаної системи координат. На теперішній час розроблено велику кількість алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації в умовах первинної інформації (1), основаних на різних підходах [2 – 4]. Один з таких підходів базується на використанні проміжних параметрів, таких, як *вектор орієнтації* (в термінології [1] – *вектор Ейлера*) і відповідних формул розкладень в ряд тригонометричних функцій синуса і косинуса половинного кута *Ейлера*. Значний внесок в розробку алгоритмів визначення вектора орієнтації різного порядку в Україні належить *А. Панову* [5, 6]. Ним була розроблена низка алгоритмів, що використовують первинну інформацію (1), яка відноситься до різних тактів зйому. Такі алгоритми автором названі *багатокроковими*. Недоліками таких алгоритмів є необхідність «розгону» алгоритму на перших кроках обчислень, а також значна загрузка автономного обчислювача на такті обчислень [1]. В умовах сучасного розвитку приладного забезпечення навігаційних систем, підвищення швидкодії обчислювачів і застосування їх для високодинамічних об'єктів інтерес представляють алгоритми, що використовують інерціальну інформацію всередині такту обчислень. Такі алгоритми основані на поліноміальній апроксимації кутової швидкості всередині такту [7, 8]. Так, відомий *алгоритм Р. Міллера* [7] використовує квадратичну модель кутової швидкості, в результаті чого приріст вектора орієнтації на такті $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^1 \times \vec{\theta}_n^3) + \beta\vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (2)$$

де $\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$, а вихідні сигнали гіроскопів

$$\vec{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt, \quad \vec{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt, \quad \vec{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$$

формуються всередині такту обчислень в точках зйому первинної інформації $t_{n-1}+1/3\Delta T$, $t_{n-1}+2/3\Delta T$, $t_{n-1}+\Delta T$, ΔT – тривалість такту обчислень. Для традиційного алгоритму коефіцієнти $\alpha = 33/80$, $\beta = 57/80$.

Оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації звичайно пов'язане з використанням для цієї мети спеціальних тестових рухів твердого тіла, для яких орієнтація і компоненти вектора кутової швидкості можуть бути представлені в аналітичному вигляді. В роботі [9] наведена аналітична модель конічного руху, названа «*SPIN-CONE*» моделлю. Оскільки для аналітичних тестових рухів локальна або накопичена похибка алгоритму представляється в аналітичному вигляді, можна використати це для оптимізації алгоритмів орієнтації під конкретний тестовий рух. Оптимізація алгоритмів орієнтації під конічний рух шляхом спеціального «налаштування» коефіцієнтів алгоритму без зміни його структури була запропонована Р. Міллером в 1983 році. Оптимізація основана на отриманні аналітичного виразу для похибки алгоритму у вигляді степеневого ряду з подальшим визначенням невідомих коефіцієнтів α , β , виходячи з умови відсікання вищих членів ряду. Інша методика, яка реалізує по суті той же підхід, була представлена *М. Ігнагні* в 1990 р. [10]. В оптимізованому під конічний рух алгоритмі Р. Міллера значення коефіцієнтів в алгоритмі (2) такі: $\alpha = 36/80$, $\beta = 54/80$. Методика оптимізації алгоритмів орієнтації під регулярну прецесію і конічний рух, що основана на мінімізації асимптотичних оцінок похибки обчислювального дрейфу, була реалізована А. Пановим в роботах [11 – 13]. В роботах [14, 15] представлена удосконалена методика оптимізації алгоритмів орієнтації і наведені результати досліджень з оптимізації алгоритмів в умовах узагальненого конічного руху [10], регулярної прецесії і випадкового кутового руху.

Оскільки конічний рух і регулярна прецесія є досить специфічними випадками кутового руху твердого тіла,

для яких існують аналітичні розв'язки відповідної системи динамічних і кінематичних рівнянь, практичний інтерес представляє отримання методичних оцінок точності алгоритмів орієнтації, в тому числі оптимізованих під конкретний рух, на більш складних обертальних рухах. В даній роботі в якості такого узагальненого руху пропонується нова еталонна модель обертання твердого тіла, основана на чотирьохчастотному представленні кватерніона орієнтації.

Постановка задачі. Розглядається обертальний рух твердого тіла навколо його центру мас, який описується системою динамічних рівнянь Ейлера:

$$I_1 \dot{\omega}_1(t) - (I_2 - I_1) \omega_2(t) \omega_3(t) = M_1(t), \quad (1, 2, 3), \quad (3)$$

де I_i , $i = 1, 2, 3$ – моменти інерції твердого тіла; $M_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора головного моменту; ω_i , $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ на зв'язані осі; (1, 2, 3) – символ кругової перестановки індексів, і кінематичного кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0,5 \Lambda(t) \circ \omega(t), \quad (4)$$

де $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ – кватерніон орієнтації; $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ – кватерніон кутової швидкості; \circ – символ кватерніонного множення.

Необхідно отримати новий чотирьохчастотний розв'язок системи рівнянь (3), (4) у вигляді аналітичних залежностей $\omega_i = \omega_i(k_1, k_2, k_3, k_4, t)$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_j = \lambda_j(k_1, k_2, k_3, k_4, t)$, $j = \overline{0, 3}$ і побудувати основу на цьому розв'язку аналітичну еталонну модель обертання твердого тіла у вигляді сукупності квазікоординат (1):

$$\theta_{ni}^* = \theta_{ni}^*(k_1, k_2, k_3, k_4, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ і модельного кватерніона орієнтації $\Lambda(t)$, що відповідає цим кутовим рухам. Далі для чисельної реалізації еталонної моделі на заданому інтервалі часу необхідно оцінити накопичену похибку орієнтації, обчислену алгоритмом визначення кватерніонів орієнтації четвертого порядку з використанням алгоритму Р. Міллера (2) при різних значеннях коефіцієнтів α і β .

Чотирьохчастотне представлення кватерніона орієнтації і еталонна модель обертання твердого тіла. Методика отримання аналітичних еталонних моделей детально описана в [16]. Вона ґрунтується на прийнятому представленні компонент модельного кватерніона орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ у вигляді алгебраїчних сум добутків тригонометричних функцій (синусів та косинусів) кутів лінійних поворотів $k_i t$, $i = 1, 2, 3, 4$, і використанні оберненого кінематичного рівняння (4) для нормованого кватерніона $\Lambda(t)$ у вигляді:

$$\vec{\omega}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (6)$$

де $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон.

Представимо аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (4) у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \lambda_1(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) - \sin(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \cos(k_4 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_4 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \lambda_3(t) &= \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t). \end{aligned} \quad (7)$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – задані частоти.

Кінематична модель (7) у випадку $k_1 = k_4$ і перепозначень $\varphi/2 = k_1 t$, $\psi/2 = k_2 t$, $\vartheta/2 = k_3 t$ перетворюється на кінематичну модель послідовності поворотів на кути Кривола φ , ψ , ϑ [17]. Однак, на відміну від моделі послідовності поворотів, кінематична модель (7) передбачає одночасні повороти твердого тіла на кути $2k_1 t$, $2k_2 t$, $2k_3 t$, $2k_4 t$.

Нескладно перевірити, що представлення модельного кватерніона орієнтації (7) забезпечує автоматичне виконання умови $\|\Lambda(t)\| = 1$. Тоді, згідно оберненого кінематичного рівняння (6), отримаємо після нескладних перетворень, що проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= (k_1 + k_4) \cdot (\cos(2k_2 t) \cdot \sin(2k_3 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t) - \sin(2k_2 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t)) + \\ &\quad + 2k_2 \cdot \cos(2k_3 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t) + 2k_3 \cdot \cos((k_1 - k_4)t); \\ \omega_2(t) &= (k_1 + k_4) \cdot (\cos(2k_2 t) \cdot \sin(2k_3 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t) + \sin(2k_2 t) \cdot \sin((k_1 - k_4)t)) + \\ &\quad + 2k_2 \cdot \cos(2k_3 t) \cdot \cos((k_1 - k_4)t) - 2k_3 \cdot \sin((k_1 - k_4)t); \\ \omega_3(t) &= (k_1 - k_4) + (1/2) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\cos((2k_2 + 2k_3)t) + \cos((2k_2 - 2k_3)t)) - 2k_2 \cdot \sin(2k_3 t). \end{aligned} \quad (8)$$

Отриманий аналітичний розв'язок рівнянь обертання (3), (4) відповідає початковим умовам $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{\omega}(0) = (2k_3, 2k_2, 2k_1)$. Відмітимо, що $\vec{\omega}(0)$ не залежить від частоти k_4 .

Для отримання умов реалізації обертального руху твердого тіла з компонентами вектора кутової швидкості (8) необхідно розв'язати зворотню задачу динаміки, тобто визначити проекції вектору моменту, який призводить до такого обертального руху твердого тіла з моментами інерції I_1, I_2, I_3 , треба знайти похідні від проекцій кутової швидкості і разом з виразами (8) підставити в ліву частину динамічних рівнянь (3).

Еталонна модель обертання, що основана на чотирьохчастотному розв'язку. В основу еталонної моделі обертання полягають аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (7) і квазікоординат (1) в умовах, коли значення частот k_1, k_2, k_3, k_4 задані. Останні можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимації реального руху конкретного об'єкта.

Щоб отримати аналітичні вирази для квазікоординат, спочатку знайдемо компоненти вектора позірною повороту

$$\bar{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) = \int_0^t \bar{\omega}(t) dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Враховуючи отримані вирази для компонент вектора кутової швидкості, в результаті після нескладних перетворень маємо:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\sin((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t)/(2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ & - \sin((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t)/(2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4) + \sin((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t)/(2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ & - \sin((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t)/(2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4) + 2(\cos((2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1)/(2k_2 + k_1 - k_4) + \\ & + 2(\cos((2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1)/(2k_2 - k_1 + k_4) + k_2(-(\cos((k_1 - k_4 + 2k_3)t) - 1)/(k_1 - k_4 + 2k_3) - \\ & - (\cos((k_1 - k_4 - 2k_3)t) - 1)/(k_1 - k_4 - 2k_3)) + 2k_3 \cdot \sin((k_1 - k_4)t)/(k_1 - k_4); \\ \theta_2(t) &= (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (-(\cos((2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1)/(2k_3 + 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ & - (\cos((2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1)/(2k_3 + 2k_2 + k_1 - k_4) - (\cos((2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4)t) - 1)/(2k_3 - 2k_2 - k_1 + k_4) - \\ & - (\cos((2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4)t) - 1)/(2k_3 - 2k_2 + k_1 - k_4) + 2\sin((2k_2 - k_1 + k_4)t)/(2k_2 - k_1 + k_4) - \\ & - 2\sin((2k_2 + k_1 - k_4)t)/(2k_2 + k_1 - k_4) + k_2(\sin((k_1 - k_4 + 2k_3)t)/(k_1 - k_4 + 2k_3) + \\ & + \sin((k_1 - k_4 - 2k_3)t)/(k_1 - k_4 - 2k_3)) + 2k_3 \cdot (\cos((k_1 - k_4)t) - 1)/(k_1 - k_4); \\ \theta_3(t) &= (k_1 - k_4)t + (1/4) \cdot (k_1 + k_4) \cdot (\sin((2k_2 + 2k_3)t)/(2k_2 + 2k_3) + \sin((2k_2 - 2k_3)t)/(2k_2 - 2k_3) + \\ & + 2k_2(\cos(2k_3t) - 1)/(2k_3)). \end{aligned} \quad (10)$$

Значення квазікоординат (1) тепер можна отримати в аналітичному вигляді або чисельно з формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Чисельна реалізація чотирьохчастотної еталонної моделі обертання. Реалізуємо запропоновану чотирьохчастотну модель для деяких значень частот, такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с на інтервалі часу 200 с.

На рис. 1 представлені залежності квазікоординат θ_{ni}^* від часу для значень частот моделі $k_1 = 0,150$, $k_2 = 0,151$, $k_3 = 0,075$, $k_4 = 0,152$. Отримані траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведені на рис. 2.

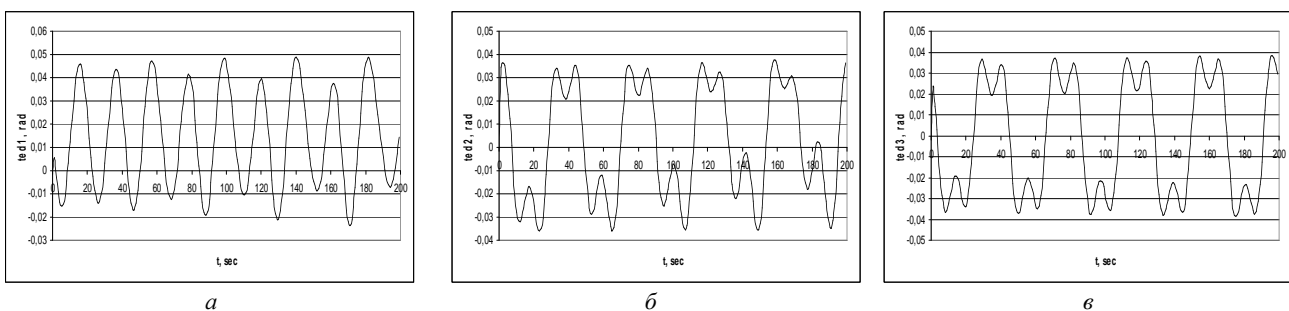


Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для чотирьохчастотної еталонної моделі при $k_1 = 0,150$, $k_2 = 0,151$, $k_3 = 0,075$, $k_4 = 0,152$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

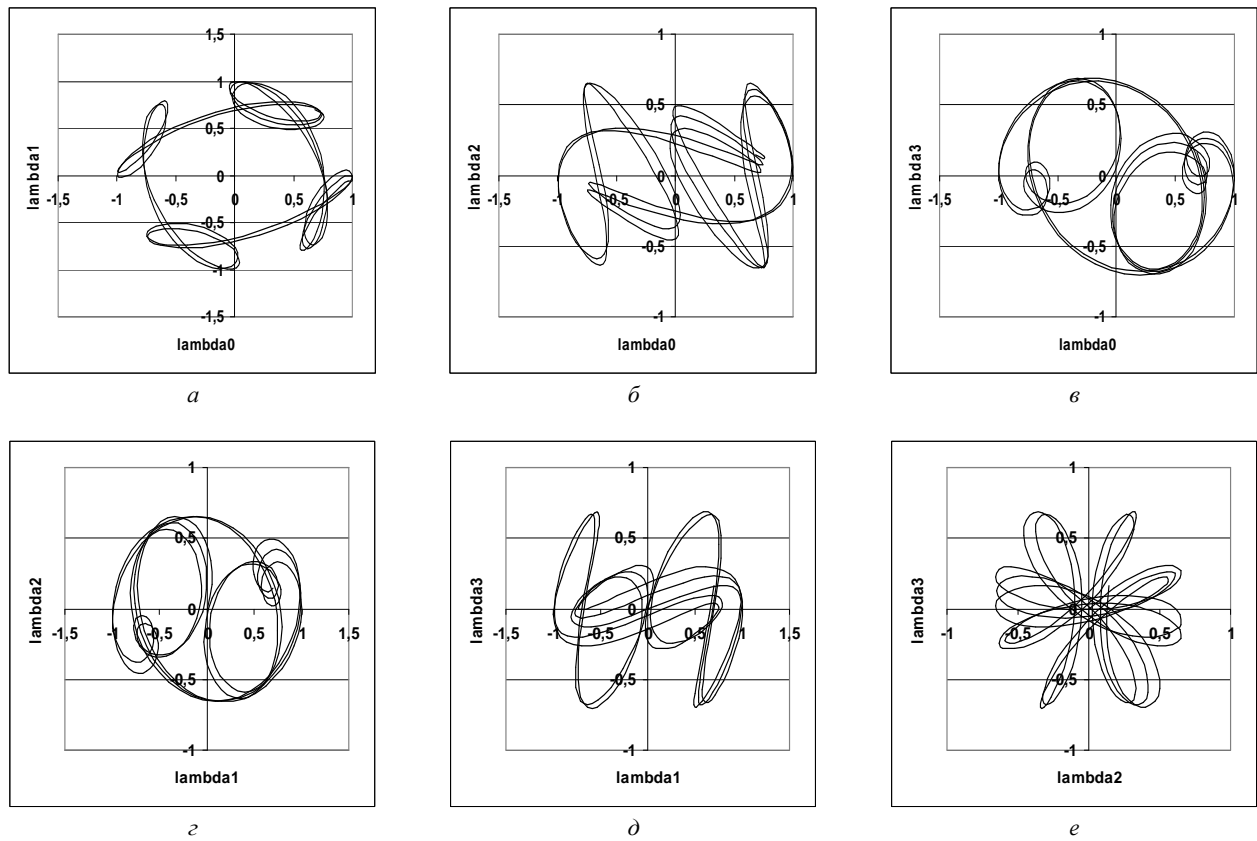


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при $k_1 = 0,150$, $k_2 = 0,151$, $k_3 = 0,075$, $k_4 = 0,152$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$; г – $\lambda_2(\lambda_1)$; д – $\lambda_3(\lambda_1)$; е – $\lambda_3(\lambda_2)$.

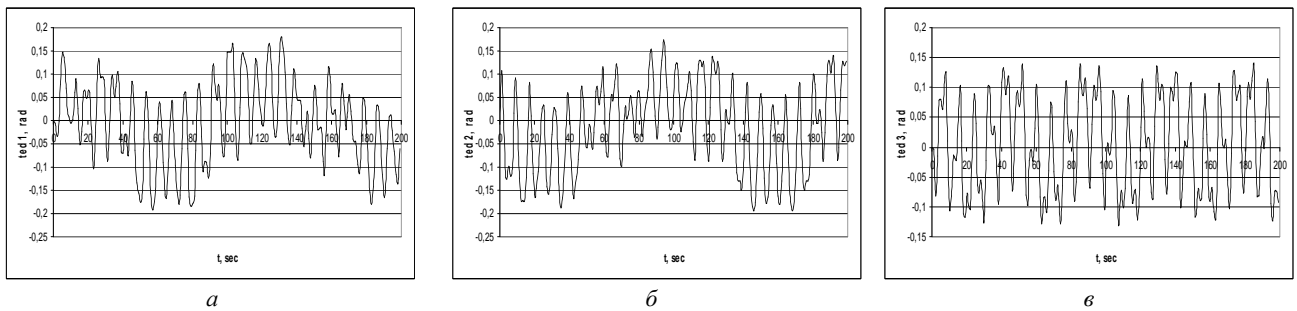


Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для чотирьохчастотної еталонної моделі при $k_1 = 0,550$, $k_2 = 0,425$, $k_3 = 0,355$, $k_4 = 0,500$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

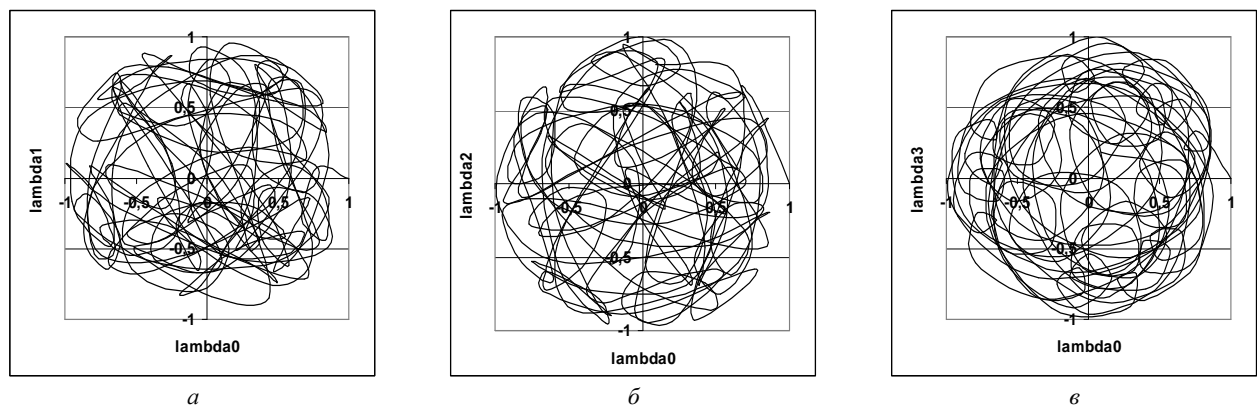


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при $k_1 = 0,550$, $k_2 = 0,425$, $k_3 = 0,355$, $k_4 = 0,500$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$.

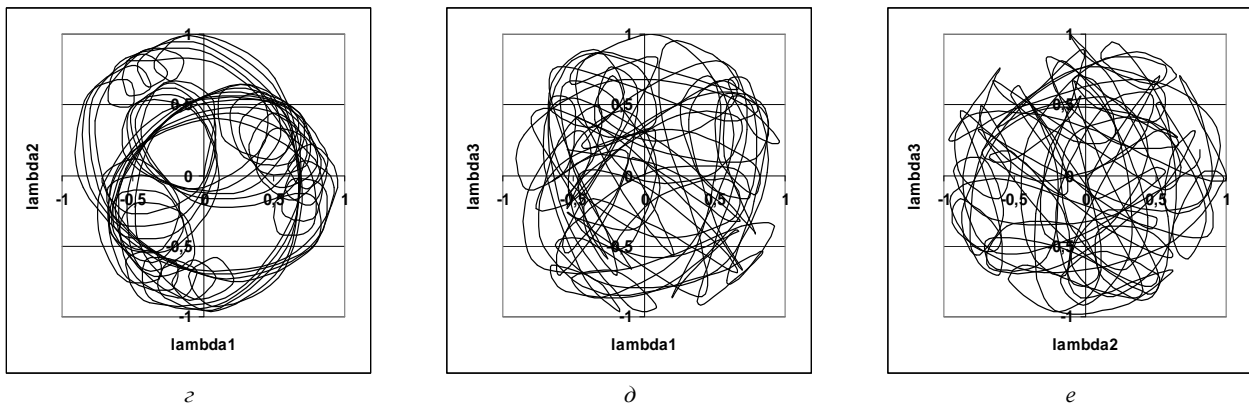


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для чотирьохчастотної еталонної моделі при $k_1 = 0,550$, $k_2 = 0,425$, $k_3 = 0,355$, $k_4 = 0,500$: $z - \lambda_2(\lambda_1)$; $d - \lambda_3(\lambda_1)$; $e - \lambda_3(\lambda_2)$.

Для значень частот $k_1 = 0,550$, $k_2 = 0,425$, $k_3 = 0,355$, $k_4 = 0,500$ результати реалізації чотирьохчастотної еталонної моделі у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 3 та рис. 4.

Точносний аналіз алгоритму орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі. Застосуємо запропоновану чотирьохчастотну еталонну модель для оцінювання точності алгоритму визначення кватерніона орієнтації четвертого порядку, в якому приріст вектора орієнтації на такті $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою Р. Міллера (2) для різних значень коефіцієнтів α , β . Для оцінювання точності алгоритму визначення кватерніона орієнтації в якості похибки будемо визначати неусувну похибку орієнтації – накопичений дрейф обчисленого трієдру осей відносно його істинного положення, яке задається еталонною моделлю. Для цього використаємо методику визначення дрейфу, запропоновану в [2].

На рис. 5, а представлена залежність похибки дрейфу від часу на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с, отримана з кроком $\Delta t = 0,1$ с на чотирьохчастотній еталонній моделі при $k_1 = 0,550$, $k_2 = 0,425$, $k_3 = 0,355$, $k_4 = 0,500$ для традиційного алгоритму орієнтації (2) при $\alpha = 33/80$, $\beta = 57/80$. Для порівняння на рис. 5, б наведена залежність похибки дрейфу від часу, що отримана у випадку оптимізованого алгоритму Р. Міллера при $\alpha = 36/80$, $\beta = 54/80$. Отримано, що оптимізований алгоритм призводить до меншої похибки дрейфу.

Розглянемо інший варіант коефіцієнтів α і β в формулі Р. Міллера. Оскільки має місце умова $\alpha + \beta = 9/8$, сформуємо новий алгоритм, де покладемо $\alpha = 0$, $\beta = 1,125$, тобто перепишемо формулу (2) у вигляді:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + (9/8) \cdot \vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (12)$$

Оцінимо похибку накопиченого дрейфу алгоритму визначення кватерніонів, коли приріст вектора орієнтації на такті обчислюється за формулою (12). Залежність похибки дрейфу від часу у цьому випадку представлена на рис. 5, в. Отримали, що у випадку значень коефіцієнтів $\alpha = 0$, $\beta = 9/8$ в (2) похибка дрейфу менша за похибку як традиційного алгоритму Р. Міллера, так і оптимізованого алгоритму.

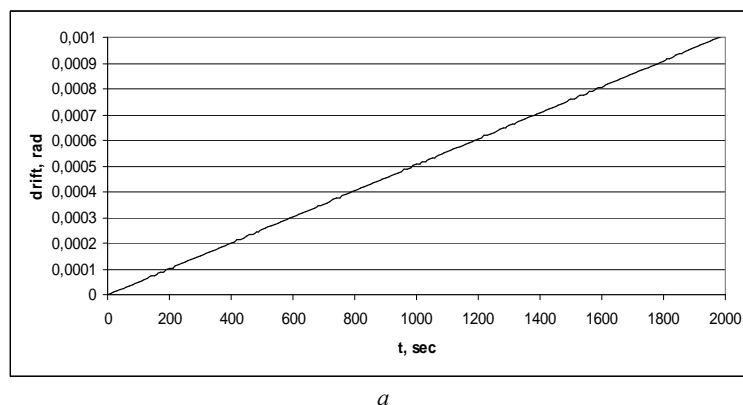
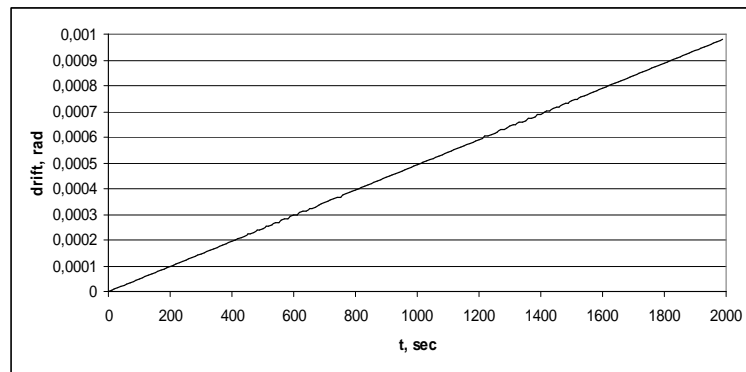
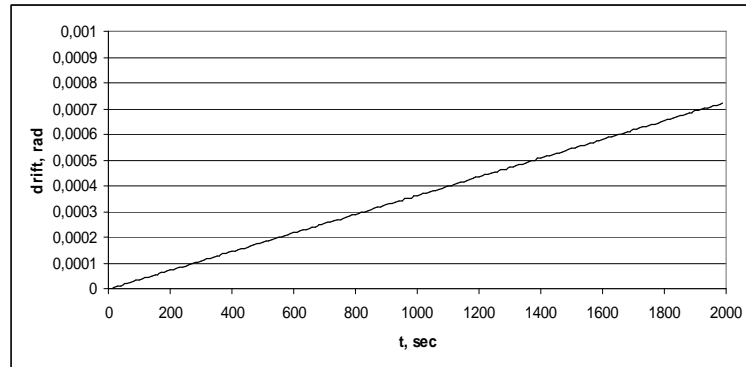


Рис. 5 – Залежність похибки дрейфу від часу для алгоритму 4-го порядку, отримані у випадку:
а – традиційного алгоритму Р. Міллера.



б



а

Рис. 5 – Залежність похибки дрейфу від часу для алгоритму 4-го порядку, отримані у випадку: б – оптимізованого алгоритму Р. Міллера; а – алгоритму (12).

Таблиця 1 – Значення накопичених похибок дрейфу, обчислені для алгоритму Р. Міллера

Алгоритм Р. Міллера (12)	Дрейф, рад
Традиційний, при $\alpha = 33/80$, $\beta = 57/80$	$1,006 \cdot 10^{-3}$
Оптимізований під конічний рух, при $\alpha = 36/80$, $\beta = 54/80$	$0,982 \cdot 10^{-3}$
Алгоритм (12) при $\alpha = 0$, $\beta = 9/8$	$0,722 \cdot 10^{-3}$

Для порівняння в табл. 1 наведені кінцеві значення накопичених похибок дрейфу, обчислені для класичного алгоритму Р. Міллера ($\alpha = 33/80$, $\beta = 57/80$), оптимізованого під конічний рух алгоритму ($\alpha = 36/80$, $\beta = 54/80$) та алгоритму (12) при $\alpha = 0$, $\beta = 9/8$.

Висновки. Запропоновано нову аналітичну модель обертання твердого тіла, яка основана на чотирьохчастотному представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями лінійних кутів. На відміну від відомих випадків інтегрованості в квадратурах системи рівнянь обертання твердого тіла (регулярної прецесії, конічного руху) таку модель можна вважати більш узагальненим випадком обертального руху. Запропоновану модель покладено в основу еталонної моделі обертання твердого тіла, для чого вона була доповнена аналітичними виразами для квазікоординат. Реалізація еталонної чотирьохчастотної моделі була використана в якості тестового руху для оцінювання похибки дрейфу алгоритму визначення кватерніонів орієнтації четвертого порядку з використанням в якості проміжних параметрів вектора орієнтації, приріст якого на такті обчислюється за алгоритмом Р. Міллера. Показано, що для алгоритму Р. Міллера із значеннями коефіцієнтів $\alpha = 0$, $\beta = 9/8$ накопичена похибка дрейфу менша, ніж це має місце для традиційного алгоритму і оптимізованого під конічний рух алгоритму.

Список літератури

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1998. – Vol. 21. – No. 1. – P. 19 – 28.
4. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К. : Наук. думка, 1995. – 280 с.
5. Панов А. П. Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Космич. исслед. на Украине. – К. : Наук. думка, 1974. – Вып. 5. – С. 76 – 82.

6. Панов А. П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып. 47. – С. 59 – 71.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1983. – Vol. 6. – No. 4. – P. 287 – 291.
8. Плаксий Ю. А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – X. : НТУ «ХПІ», 2013. – №58 (1031). – С. 168 – 177.
9. Savage P. G. Strapdown System Performance Analysis. // Advances In Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO Lecture Series. – 2004. – RTO-EN-SET-064. – P. 3-1 – 3-28.
10. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1990. – Vol. 13. – No. 2. – P. 363 – 369.
11. Панов А. П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гироск. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112.
12. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
13. Панов А. П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычислений кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52.
14. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. Optimization of strapdown attitude algorithms // Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24 – 25, 1995. – P. 110 – 121.
15. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input // Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28 – 29, 1996. – P. 3 – 12.
16. Плаксий Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель обертання твердого тіла прецесійного типу // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – X. : НТУ №ХПІ. – 2013. – № 37(1010). – С. 141 – 147.
17. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М. : Наука, 1976. – 672 с.

References (transliterated)

1. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Application of quaternions in problems of rigid body orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.
3. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1998, vol. 21, no. 1, pp.19–28.
4. Panov A. P. *Matematicheskie osnovy teorii inertsiyal'noy navigatsii* [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1995. 280 p.
5. Panov A. P. Dvushagovye algoritmy vychisleniy parametrov orientatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]. *Kosmich. issled. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no. 5, pp. 76–82.
6. Panov A. P. Asimptoticheskie otsenki pogreshnostey metodov vychisleniya parametrov orientatsii tverdogo tela [Asymptotic error estimates for methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]. *Kibernetika i vychisl. Tekhnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1980, vol. 47, pp. 59–71.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1983, vol. 6, no. 4, pp. 287–291.
8. Plaksy Yu. A. Stepenivi algoritmy vyznachennya kvaternioniv orientatsiyi ta yikh interpoliyatsiyi modyfikatsiyi [Degree algorithms for determining quaternions of orientation and their interpolation modifications]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashyn* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 58 (1031), pp. 168–177.
9. Savage P. G. Strapdown System Performance Analysis. // *Advances In Navigation Sensors and Integration Technology, NATO RTO Lecture Series*. 2004, RTO-EN-SET-064, pp. 3-1 – 3-28.
10. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1990, vol. 13, no. 2, pp. 363–369.
11. Panov A. P. Optimizatsiya metodov vychisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions for conic vibrations of a rigid body]. *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
12. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1987, vol. 73, pp. 3–9.
13. Panov A. P. Adaptivnye pretsessionnye algoritmy vychisleniy kvaternionov vrashheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]. *Kibernet. i vychisl. tekhn* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, pp. 47–52.
14. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. Optimization of strapdown attitude algorithms. *Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24–25, 1995*. pp. 110–121.
15. Gusinsky V. Z., Lesyuchevsky V. M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G. T. New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input. *Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28–29, 1996*. pp. 3–12.
16. Plaksy Yu. A. Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' obertannya tverdogo tila pretsesiyogo typu [Precession-type solid rotation reference trigonometric quaternion model]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147.
17. Ishlinskiy A. Yu. *Orientatsiya, giroskopy i inertsiyal'naya navigatsiya* [Orientation, gyros and inertial navigation]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 672 p.

Надійшла (received) 10.07.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Плаксий Юрій Андрійович (Плаксий Юрий Андреевич, Plaksy Yuriy Andriyovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksy.yu@gmail.com.

Гомозкова Ірина Олександрівна (Гомозкова Ирина Александровна, Homozkova Iryna Oleksandrivna) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: arinhomozkova@gmail.com.

T. S. POLYANSKAYA, O. O. NABOKA

NUMERICAL SOLUTION OF A SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE HILBERT KERNEL BY THE METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES

In the paper the method of discrete singularities is used for constructing a discrete mathematical model of a first kind singular integral equation with the Hilbert kernel in the case when the auxiliary conditions introduced to ensure the uniqueness of solution to the equation are given by functionals. The existence of the unique solution to the discrete model is proved and the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the initial singular integral equation is estimated under some smoothness assumptions.

Key words: singular integral equations, method of discrete singularities, Hilbert kernel, discrete model.

T. С. ПОЛЯНСКАЯ, О. О. НАБОКА

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЯДРОМ ГІЛЬБЕРТА

На основі методу дискретних особливостей побудовано дискретну математичну модель сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром Гільберта у випадку, коли додаткова умова, що дозволяє отримати єдиний розв'язок цього рівняння, є функціонал. Доведена однозначна розв'язність дискретної моделі і дана оцінка швидкості збіжності розв'язку дискретної задачі до точного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння при деяких припущеннях гладкості.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей, ядро Гільберта, дискретна модель.

T. С. ПОЛЯНСКАЯ, Е. А. НАБОКА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

На основе метода дискретных особенностей построена дискретная математическая модель сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Гильберта в случае, когда дополнительное условие, позволяющее получить единственное решение этого уравнения, есть функционал. Доказана однозначная разрешимость дискретной модели и дана оценка скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению сингулярного интегрального уравнения при некоторых предположениях гладкости.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей, ядро Гильберта, дискретная модель.

Introduction. *Singular integral equations* arise frequently when solving applied physical, mechanical, and engineering problems. In particular, the problem on the distribution of the surface-current density over a narrow circular strip antenna is reduced to a singular integral equation with *the Hilbert kernel* [1]. In this paper we study a singular integral equation with the Hilbert kernel in the case when the auxiliary condition ensuring the existence and uniqueness of the solution is given by a functional. We develop the mathematical framework of a numerical method for solving this equation, which is based on the well-known *discrete singularities method* [2, 3, 4].

Characteristic singular integral equation (SIE) with Hilbert kernel. Let $L_{[0,2\pi]}^2$ be *the Hilbert space* of

2π – periodic functions endowed with the scalar product $(u, v) = \int_0^{2\pi} u(\varphi)\overline{v(\varphi)}d\varphi$; denote $L_{[0,2\pi]}^{2,0}$ the subspace of $L_{[0,2\pi]}^2$

consisting of its elements that are orthogonal to the unity, i.e. satisfy the equality: $\int_0^{2\pi} u(\varphi)d\varphi = 0$.

We introduce the operator

$$(Hu)(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u(\varphi) d\varphi.$$

The integral in the right-hand part of the identity is singular with the Hilbert kernel. *The Cauchy principal value* of this integral can be computed for any 2π – periodic function $u(\varphi) \in L_{[0,2\pi]}^2$. In case the function $u(\varphi)$ is *Holder continuous*, then $(Hu)(\theta)$ is Holder continuous as well. The operator H takes $L_{[0,2\pi]}^2$ into $L_{[0,2\pi]}^{2,0}$, it is bounded and its norm equals one [2, 3, 4].

Consider the characteristic SIE for the unknown function $u(\varphi) \in L_{[0,2\pi]}^2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u(\varphi) d\varphi = f(\theta). \quad (1)$$

In (1) $f(\theta) \in C^{\mu,\gamma}$ is a given 2π – periodic function; $C^{\mu,\gamma}$ stands for the class of μ – times continuously differentiable

functions which μ -th derivatives satisfy the Holder condition with the exponent γ ($0 < \gamma \leq 1$).

From the above it follows that for the characteristic SIE to have a solution it is necessary that $f(\theta) \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$, i.e.

$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$. Moreover, without any auxiliary assumptions imposed on the function $u(\varphi)$ it is impossible to prove the uniqueness of this solution [2, 4]. Sometimes, when solving problems arising in the theory of diffraction of waves the auxiliary assumption ensuring the uniqueness of the solution is introduced in the form of the functional:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + G(\varphi) \right\} u(\varphi) d\varphi = C, \quad (2)$$

where α and C are given constants, $G(\varphi)$ is a given sufficiently smooth 2π -periodic function such that

$$h \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + G(\varphi) \right\} d\varphi \neq 0. \quad (3)$$

After introducing the linear substitution $u(\varphi) = w(\varphi) + \frac{C}{h}$, condition (2) becomes homogeneous. Since the operator H cancels the constant, equation (1) preserves under this substitution. The aforesaid enables us to study equation (1) supplemented by the following homogeneous condition:

$$\hat{G}u \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + G(\varphi) \right\} u(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4)$$

Denote by $\Lambda(G)$ the subspace of $L_{[0,2\pi]}^2$ which elements satisfy condition (4). If limited to the pair of spaces

$$(\Lambda(G), L_{[0,2\pi]}^{2,0}), \quad (5)$$

the operator H has a bounded inverse. Hence, problem (1), (4) admits a unique solution for any right-hand part $f(\theta) \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$ [3].

Problem setting for a complete SIE with the Hilbert kernel.

We are looking for a solution $u(\varphi)$ of the complete SIE with Hilbert kernel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) u(\varphi) d\varphi = f(\theta), \quad (6)$$

where $f(\theta)$ and $K(\theta, \varphi)$ are given functions 2π -periodic in θ and φ , $f(\theta) \in C^{\mu, \gamma}$, $K(\theta, \varphi) \in C^{\mu, \gamma}$ in each variable uniformly with respect to the other variable. Moreover, in physical applications the functions $f(\theta)$ and $K(\theta, \varphi)$ satisfy the properties:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) d\theta \equiv 0. \quad (7)$$

We assume that equation (6) admits a unique solution, which satisfies auxiliary condition (4), and that (3) holds. We also choose $G(\varphi) \in C^{\mu, \gamma}$ in (3).

The necessary condition for equation (6) to have a solution is

$$\int_0^{2\pi} \left\{ f(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) u(\varphi) d\varphi \right\} d\theta = 0, \quad (8)$$

where $u(\varphi)$ is the solution to the equation. We arrive at condition (8) by taking $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) u(\varphi) d\varphi$ to the right-hand

part of equation (6) and assuming that the difference $f(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) u(\varphi) d\varphi$ belongs to $L_{[0,2\pi]}^{2,0}$. Properties (7) imply that condition (8) holds for any function $u(\varphi)$ and provides no additional restriction on the solutions to the equation.

We introduce the operator K : $(Ku)(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi) u(\varphi) d\varphi$. From (7) it follows that $(Ku)(\theta) \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$. Hence,

the operator $H + K$ takes $L_{[0,2\pi]}^2$ into $L_{[0,2\pi]}^{2,0}$. Moreover, if restricted to the couple of spaces (5), this operator admits a bounded inverse. Indeed, since the operator H is continuously invertible in the couple of spaces (5), its index in this

couple of spaces equals zero and it does not change after adding the compact operator K to H [5]. Thus the index of the operator $H + K$ restricted to the couple of spaces (5) is zero. Since for a given right-hand part $f(\theta) \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$ equation (6) has a unique solution from $\Lambda(G)$, the restriction of the operator $H + K$ to the couple of spaces (5) possesses a unique bounded inverse operator $(H + K)^{-1}$, which means that problem (6), (4) admits a unique solution for any right-hand part $f(\theta) \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$.

Quadrature formulae and discretization of complete SIE. Let $S_n(\varphi)$ denote a trigonometric polynomial of degree n . We introduce the system of points on a unit circle:

$$\varphi_k^{(1,n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n; \quad \varphi_k^{(2,n)} = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Below we list several useful properties of $S_n(\varphi)$ [2, 4]:

$$1. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(\varphi_k^{(i,n)}), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Note, that formula (9) holds for any trigonometric polynomials of the degree less than or equal to $2n$ [2].

$$2. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\varphi - \varphi_j^{(2,n)}}{2} S_n(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \text{ctg} \frac{\varphi_k^{(1,n)} - \varphi_j^{(2,n)}}{2} S_n(\varphi_k^{(1,n)}), \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \tag{10}$$

$$3. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(\varphi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| d\varphi = -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_n(\varphi_k^{(1,n)}) \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \cos \left[m \left(\varphi_k^{(1,n)} - \varphi_0 \right) \right] \right\}. \tag{11}$$

Denote by $(P_n^{(i)}g)(\varphi)$ the trigonometric interpolation polynomial of a continuous 2π -periodic function $g(\varphi)$ of degree n with the interpolation nodes $\varphi_k^{(i,n)}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$; $i = 1, 2$.

We are looking for the solution $u_n(\varphi)$ to problem (6), (4) in the form of a trigonometric polynomial of degree n . In most cases, when simply replacing the functions $f(\theta)$ and $K(\theta, \varphi)$ by their interpolation polynomials $(P_n^{(2)}f)(\theta)$ and $(P_{n_\varphi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}K)(\theta, \varphi)$ and substituting $u_n(\varphi)$ instead of $u(\varphi)$ in (6), the resulting approximate SIE is unsolvable. The

cause of this problem is that, with rare exceptions, both $\int_0^{2\pi} (P_n^{(2)}f)(\theta) d\theta \neq 0$ and $\int_0^{2\pi} (P_{n_\varphi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}K)(\theta, \varphi) d\theta \neq 0$ and the necessary condition for the SIE to have a solution does not hold. That is why we search for $u_n(\varphi)$ as a solution to the following regularized equation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u_n(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (P_{n_\varphi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}K)(\theta, \varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_{n_\varphi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}K)(\theta, \varphi) d\theta \right\} u_n(\varphi) d\varphi = \\ = (P_n^{(2)}f)(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n^{(2)}f)(\theta) d\theta, \end{aligned} \tag{12}$$

supplemented by the condition:

$$\hat{G}_n u_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + (P_n^{(1)}G)(\varphi) \right\} u_n(\varphi) d\varphi = 0. \tag{13}$$

For problem (12), (13) the necessary condition of the existence of a solution obviously holds.

Condition (3) for problem (12), (13) becomes

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + (P_n^{(1)}G)(\varphi) \right\} \neq 0.$$

It is easy to verify that for a smooth function $G(\varphi)$ there exist $h^0 > 0$ and $N > 0$ such that $|h_n| > h^0$ for $n > N$. Below we assume $n > N$.

To construct the system of linear algebraic equations (SLAE) approximating problem (6), (4) it is necessary to introduce an additional (regularizing) unknown by the formula:

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (P_n^{(2)}f)(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_{n_\varphi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}K)(\theta, \varphi) u_n(\varphi) d\varphi \right\} d\theta. \tag{14}$$

Then equation (12) takes the form:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} u_n(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(P_{n\varphi}^{(1)} P_{n\theta}^{(2)} K \right) (\theta, \varphi) \right\} u_n(\varphi) d\varphi + \beta_n = \left(P_n^{(2)} f \right) (\theta), \quad (15)$$

and the necessary condition for its solvability becomes:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(P_n^{(2)} f \right) (\theta) - \beta_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_{n\varphi}^{(1)} P_{n\theta}^{(2)} K \right) (\theta, \varphi) u_n(\varphi) d\varphi \right\} d\theta = 0. \quad (16)$$

Clearly, any solution $u_n(\varphi)$ to (12) also solves (15) with β_n computed by (14). The opposite is also true: if $\{u_n(\varphi), \beta_n\}$ is the solution to (15), than it satisfies condition (16) and $u_n(\varphi)$ solves (12). In this sense equations (12) and (15) are equivalent.

We are now in position to construct the system of linear algebraic equations (SLAE) equivalent to equation (15) supplemented by condition (13) by the method of discrete singularities. Since both left and right-hand parts of equation (15) feature trigonometric polynomials of degree n , this equation is equivalent to the following system of $2n+1$ equations:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_j^{(2,n)}}{2} u_n(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(P_{n\varphi}^{(1)} K \right) (\varphi_j^{(2,n)}, \varphi) \right\} u_n(\varphi) d\varphi + \beta_n = \left(P_n^{(2)} f \right) (\varphi_j^{(2,n)}), \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \quad (17)$$

Using quadrature formulae (9), (10), (11) to compute the integrals in system (17) and condition (13), we arrive at the following SLAE with respect to the unknowns $u_n(\varphi_k^{(1,n)})$, $k = 0, 1, \dots, 2n$ and β_n :

$$\begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\varphi_k^{(1,n)} - \varphi_j^{(2,n)}}{2} + K(\varphi_j^{(2,n)}, \varphi_k^{(1,n)}) \right\} u_n(\varphi_k^{(1,n)}) + \beta_n = f(\varphi_j^{(2,n)}), & j = 0, 1, \dots, 2n; \\ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \cos(\varphi_k^{(1,n)} - \alpha) - G(\varphi_k^{(1,n)}) \right\} u_n(\varphi_k^{(1,n)}) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Note that the number of the unknowns of system (18) equals the number of its equations.

From the above discussion it follows that system (18) is equivalent to problem (12), (13), i.e. the solution $u_n(\varphi)$ to problem (12), (13) is represented by the interpolation polynomial which values at the interpolation nodes satisfy system (18).

Below we prove that problem (12), (13) and, hence, system (18) admits a unique solution for n sufficiently large.

Auxiliary spaces and operators. We introduce the following spaces:

– $\Lambda(G_n)$ – the subspace of $L_{[0,2\pi]}^2$ which elements satisfy the condition:

$$\hat{G}_n v \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + \left(P_n^{(1)} G \right) (\varphi) \right\} v(\varphi) d\varphi = 0;$$

– Π_n – the subspace of $L_{[0,2\pi]}^2$ consisting of all the trigonometric polynomials of degree less than or equal to n ;

$$\Lambda_n(G_n) \equiv \Lambda(G_n) \cap \Pi_n; \quad \Pi_n^0 \equiv \Pi_n \cap L_{[0,2\pi]}^{2,0}.$$

Denote $f_n^R(\theta) = \left(P_n^{(2)} f \right) (\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_n^{(2)} f \right) (\theta) d\theta$. We introduce the operator K_n^R :

$$\left(K_n^R u_n \right) (\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(P_{n\varphi}^{(1)} P_{n\theta}^{(2)} K \right) (\theta, \varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_{n\varphi}^{(1)} P_{n\theta}^{(2)} K \right) (\theta, \varphi) d\theta \right\} u_n(\varphi) d\varphi \in \Pi_n^0.$$

Using the above operator notations (12) is reduced to

$$\left(H + K_n^R \right) u_n = f_n^R.$$

The operator $H + K_n^R$ maps $\Lambda_n(G_n)$ into Π_n^0 . Below we show that for sufficiently large n the operator $H + K_n^R$ restricted to the couple of spaces

$$\left(\Lambda_n(G_n), \Pi_n^0 \right), \quad (19)$$

admits a continuous inverse, and thereby prove the unique solvability of problem (12), (13) and, hence, SLAE (18). We use the following statement [6]:

Theorem 1. Let X and Y be linear normed spaces, and $\tilde{X} \subset X$ and $\tilde{Y} \subset Y$ be their finite dimensional subspaces such that $\dim \tilde{X} = \dim \tilde{Y}$. Consider the equations:

the exact one

$$Tx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

and the approximate one

$$\tilde{T}\tilde{x} = \tilde{y} \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y}),$$

where T and \tilde{T} are linear operators, $T : X \rightarrow Y$, $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

If the following conditions hold:

a) the operator T is continuously invertible in (X, Y) ,

b) $p = \|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \|T - \tilde{T}\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}} < 1$,

then the approximate equation admits a unique solution $\tilde{x}^* \in \tilde{X}$ for any right-hand part $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Moreover, if $x^* \in X$ is the exact solution of the equation $Tx = y$ and $\delta = \|y - \tilde{y}\|_Y$, then

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X} (1-p)^{-1} [\delta - p\|y\|_Y].$$

However, we can't apply Theorem 1 directly for proving the existence of the operator inverse to $H + K_n^R$ in the couple of spaces (19) since $\Lambda_n(G_n)$ is not a subspace of $\Lambda(G)$.

Proof of SLAE solvability. We first consider an auxiliary problem consisting of equation

$$(H + K)u^{(n)} = f, \tag{20}$$

supplemented by the condition

$$\hat{G}_n u^{(n)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln \left| \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right| + (P_n^{(1)}G)(\varphi) \right\} u^{(n)}(\varphi) d\varphi = 0.$$

which means that $u^{(n)}(\varphi) \in \Lambda(G_n)$.

Lemma 1. There exists $N^* \geq N$ such that for $n > N^*$ the operator $H + K$ admits a continuous inverse in the couple of spaces

$$(\Lambda(G_n), L_{[0,2\pi]}^{2,0}). \tag{21}$$

The proof of Lemma 1 is based on the estimate $|(\hat{G}_n - \hat{G})w| \leq \frac{d}{n^{\mu+\gamma}} \|w\|$, where $w \in L_{[0,2\pi]}^2$, d is a constant depending on G only.

Below we use the notation $(H + K)_n^{-1}$ for the operator inverse to $H + K$ in the couple of spaces (21).

Lemma 2. For any non-zero element $g \in L_{[0,2\pi]}^{2,0}$ there exists $\tilde{N}(g) \geq N^*$ such that if $n > \tilde{N}(g)$ then

$$\|(H + K)^{-1}g - (H + K)_n^{-1}g\| \leq \frac{d}{qn^{\mu+\gamma}} \|g\| \cdot \|(H + K)^{-1}\|_{L_{[0,2\pi]}^{2,0} \rightarrow \Lambda(G)},$$

where $q > 0$ is a constant depending on g , $(H + K)^{-1}$ is the operator inverse to $H + K$ in the couple of spaces (5).

Corollary. There exists a constant $D > 0$ such that $\|(H + K)_n^{-1}\|_{L_{[0,2\pi]}^{2,0} \rightarrow \Lambda(G_n)} \leq D$ for all $n > N^*$.

The corollary follows immediately from Lemma 2 and the property [5]: if the sequence of linear bounded operators $\{T_n\}$ converges or is at least bounded for each element of the space, then it is uniformly bounded, i.e. the sequence of the norms $\|T_n\|$ is bounded.

Since $\Lambda_n(G_n) \subset \Lambda(G_n)$, we can now apply the results of Theorem 1 for proving the unique solvability of problem (12), (13).

Arguing as in [2], we derive the following estimates:

$$\|(H + K) - (H + K_n^R)\|_{\Lambda_n(G_n) \rightarrow L_{[0,2\pi]}^{2,0}} = \|K - K_n^R\|_{\Lambda_n(G_n) \rightarrow L_{[0,2\pi]}^{2,0}} \leq \frac{B}{n^{\mu+\gamma}}, \quad \|f - f_n^R\| \leq \frac{b}{n^{\mu+\gamma}},$$

where B and b are constants which depend on K and f respectively.

Let now $N^{**} > N^*$ be such that for any $n > N^{**}$ we have

$$p_n \equiv \|K - K_n^R\|_{\Lambda_n(G_n) \rightarrow L_{[0,2\pi]}^{2,0}} \cdot \|(H + K)_n^{-1}\|_{L_{[0,2\pi]}^{2,0} \rightarrow \Lambda(G_n)} \leq DB \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} < 1.$$

Then by Theorem 1, for any $n > N^{**}$ equation (12) admits a unique solution $u_n(\varphi)$ in the couple of spaces (19). Besides, if $u^{(n)}(\varphi)$ is the solution to (20) in the couple of spaces (21), then for $n > N^{**}$ the following estimate holds:

$$\|u^{(n)} - u_n\| \leq \frac{D}{(1-p_n)n^{\mu+\gamma}} (b + DB\|f\|).$$

Finally we get the following result:

Theorem 2. *There exists $N_1 \geq \max\{N^{**}, \tilde{N}(f)\}$ such that for any $n > N_1$ equation (12) admits a unique solution in the couple of spaces (19) (and, hence, SLAE (18) admits a unique solution as well). Moreover, the following estimate holds:*

$$\|u - u_n\| \leq \|u - u^{(n)}\| + \|u^{(n)} - u_n\| \leq \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \left\{ \frac{d}{q} \|f\| \cdot \|(H + K)^{-1}\|_{L^2_{[0,2\pi]} \rightarrow \Lambda(G)} + \frac{D}{1-p_n} (b + DB\|f\|) \right\} \equiv \delta_n,$$

where $u(\varphi)$ is the solution to equation (6) in the couple of spaces (5), $\delta_n = O\left(\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\right)$ for $n \rightarrow \infty$.

Taking into account properties (7) we arrive at the following estimate for the regularizing unknown:

$$|\beta_n| \leq \sigma_n,$$

where $\sigma_n = O\left(\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\right)$ for $n \rightarrow \infty$ and depends on $f(\theta)$ and $K(\theta, \varphi)$ only.

Conclusions. We study the numerical solution of a singular integral equation with Hilbert kernel by the method of discrete singularities in the case when the auxiliary condition ensuring the existence of a unique solution to the equation is given by a functional. The system of linear algebraic equations approximating the singular integral equation considered is constructed. It is proved that this system admits a unique solution under some smoothness conditions imposed on the right-hand part of the singular integral equation and the kernel of its regular part, and some assumptions on the functional. Moreover, the mean rate of convergence of the approximate solution to the exact one is estimated.

Bibliography

1. Neganov V. A., Klyuev D. S. Singular integral equations with the Hilbert kernel in theory of narrow circular strip antennas // *Doklady Physics*. vol. 51. – no. 3. – 2006. – pp. 122 – 124.
2. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков : ХНУ, 1991. – 67 с.
3. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков : ХНУ, 1992. – 145 с.
4. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков – Херсон, 2001. – 92 с.
5. Рисс Ф., Секефал'ви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М. : Мир, 1979. – 587 с.
6. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанского университета, 1980. – 231 с.

References (transliterated)

1. Neganov V. A., Klyuev D. S. Singular integral equations with the Hilbert kernel in theory of narrow circular strip antennas. *Doklady Physics*. 2006, vol. 51, no. 3, pp. 122–124.
2. Gandel' Y. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh zaryadov. Ucheb. posobie. Ch. I* [Mathematical problems of the method of discrete charges. Tutorial. Part I]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1991. 67 p.
3. Gandel' Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems of the method of discrete currents. Textbook. Part II]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1992. 145 p.
4. Gandel' Y. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Textbook. Part I]. Kharkov, V. N. Karazin Kharkov National University Publ., 2001. 92 p.
5. Riss F., Sekefal'vi-Nad' B. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures in mathematical analysis]. Moscow, Mir Publ., 1979. 587 p.
6. Gabdulkaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. Kazan, Izd. Kazanskogo. Universiteta Publ., 1980. 231 p.

Received (надійшла) 06.05.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.

В. И. ПОЛЯНСКИЙ

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ СНИЖЕНИЯ ЭНЕРГОЕМКОСТИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Предложен новый теоретический подход к раздельному определению составляющих силы резания при точении, обусловленных процессами собственно резания и трения на передней и задней поверхностях режущего инструмента в общей энергоемкости механической обработки, с использованием экспериментальных данных о тангенциальной и радиальной составляющих силы резания и условном угле сдвига обрабатываемого материала. Это позволило привести в соответствие теорию и практику процесса резания, уточнить теоретические решения, полученные с использованием формулы профессора Зворыкина К. А. для определения условного угла сдвига обрабатываемого материала, и на этой основе установить условия уменьшения энергоемкости и силы резания. Показано, что при точении резцами из гексанита-Р детали из стали 45 энергоемкость "чистого" резания значительно превышает предел прочности на сжатие обрабатываемой стали. Это указывает на существование резервов снижения интенсивности трения в зоне резания, а, соответственно, параметров силовой напряженности резания.

Ключевые слова: точение, сила резания, режущий инструмент, плоскость сдвига, трение, прочность.

В. І. ПОЛЯНСЬКИЙ

ТЕХНОЛОГІЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗНИЖЕННЯ ЕНЕРГОЄМНОСТІ ПРИ МЕХАНІЧНІЙ ОБРОБЦІ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Запропоновано новий теоретичний підхід до роздільного визначення складових сили різання при точінні, обумовлених процесами "чистого" різання й тертя на передній і задній поверхнях різального інструменту в загальній енергоємності механічної обробки, з використанням експериментальних даних тангенціальної та радіальної складових сили різання й умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу. Це дозволило привести у відповідність теорію і практику процесу різання, уточнити теоретичні рішення, отримані з використанням формули професора Зворикіна К. А. для визначення умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу, і на цій основі встановити умови зменшення енергоємності та сили різання. Показано, що при точінні різцями з гексаніта-Р деталі зі сталі 45 енергоємність "чистого" різання значно перевищує межу міцності на стиск оброблюваної сталі. Це вказує на існування резервів зниження інтенсивності тертя в зоні різання, а, відповідно, параметрів сигової напруженості різання.

Ключові слова: точіння, сила різання, різальний інструмент, площина зсуву, тертя, міцність.

V. I. POLYANSKY

TECHNOLOGICAL REGULARITIES OF REDUCED ENERGY CAPACITY IN THE MECHANICAL TREATMENT OF MACHINE DETAILS

A new theoretical approach to the separate determination of the components of the cutting force during turning due to the processes of "clean" cutting and friction on the front and rear surfaces of the cutting tool in the total intensity of machining using the experimental data of the tangential and radial components of the cutting force and the conditional shear angle of the material being processed is proposed. This made it possible to align the theory and practice of the cutting process, clarify the theoretical solutions for which the conditional shear angle of the material being processed is determined using the formula by Professor K. A. Zvorykin, and on this basis establish the conditions for reducing energy intensity and cutting force. It is shown that when turning with hexanit-R cutters on a detail from steel 45, the energy intensity of "clean" cutting significantly exceeds the compressive strength of the steel being worked. This indicates the existence of reserves to reduce the intensity of friction in the re-zone, and, accordingly, the parameters of the power cutting intensity.

Key words: turning, cutting force, cutting tool, shear plane, friction, strength.

Введение. Методы обработки материалов резанием из всех известных методов формообразования поверхностей деталей машин являются наименее энергоемкими, обеспечивающими высокие показатели качества, точности и производительности обработки, получившие широкое применение в производстве. Наименьшей энергоемкостью обладают *методы обработки материалов резанием лезвийными инструментами*. Резание абразивными инструментами характеризуется большей энергоемкостью, хотя и применяется в основном на финишных технологических операциях, где окончательно формируются параметры качества и точности обрабатываемых поверхностей. Поэтому важным направлением повышения эффективности операций финишной обработки следует рассматривать применение вместо процессов шлифования абразивными инструментами современных лезвийными инструментами с износостойкими покрытиями, а также изготовленными из синтетических сверхтвердых материалов (СТМ), которые характеризуются относительно низкой интенсивностью трения с обрабатываемым материалом и соответственно низкой энергоемкостью обработки. Данная работа посвящена определению условий снижения энергоемкости и силы резания при лезвийной механической обработке.

Анализ последних исследований. Вопросам снижения энергоемкости и силы резания в научно-технической литературе постоянно уделяется большое внимание [1 – 3]. В настоящее время накоплен значительный практический опыт в этом направлении. Разработаны эффективные технологические процессы резания современными сборными лезвийными твердосплавными и керамическими инструментами с износостойкими покрытиями зарубежного производства, позволяющими уменьшить силы и температуру резания, повысить качество и производительность обработки. Благодаря применению этих инструментов появилась возможность реализовать условия высокопроизводительного высокоскоростного резания, обеспечивающего высокие показате-

тели качества обрабатываемых поверхностей. Это открывает широкие возможности эффективного применения данных инструментов на ряде финишных операциях взамен процессов шлифования. Однако в настоящее время отсутствуют математические зависимости, позволяющие отдельно учесть энергии резания и трения на задней и передней поверхностях лезвийного инструмента в общем энергетическом балансе процесса механической обработки. В результате это ограничивает возможности дальнейшего поиска путей снижения энергоемкости и повышения качества и производительности обработки, что требует разработки новых математических моделей определения параметров силовой напряженности механической обработки.

Постановка задачи. В настоящей работе необходимо установить аналитические зависимости основных параметров силовой напряженности механической обработки и на их основе количественно определить доли энергий резания и трения в общем энергетическом балансе процесса механической обработки. Это позволит аналитически описать энергоемкость обработки, составляющие силы резания, обусловленные собственно резанием и трением на задней и передней поверхностях лезвийного инструмента в процессе обработки, и условия по их уменьшению, что открывает новые возможности выбора оптимальных параметров режима резания и характеристик режущего инструмента.

Математическая модель. В работе [4] установлена аналитическая зависимость для определения энергоемкости (условного напряжения резания σ) при механической обработке с учетом лишь процесса резания:

$$\sigma = \frac{\sigma_{сжс}}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (1)$$

где $\sigma_{сжс}$ – предел прочности на сжатие обрабатываемого материала, Н/м²; β – условный угол сдвига обрабатываемого материала.

Очевидно, чем больше угол β , тем меньше условное напряжение резания σ . При условии $\beta \rightarrow 45^\circ$ имеет место $\sigma \rightarrow \sigma_{сжс}$. Данная зависимость справедлива для лезвийной обработки. Так, при отсутствии трения образующейся стружки с передней поверхностью резца при точении угол $\beta = 45^\circ$, а $\sigma = \sigma_{сжс}$ (как и при растяжении или сжатии прямолинейного образца).

В реальных условиях процесса точения присутствует трение образующейся стружки с передней поверхностью резца – его доля в общем энергетическом балансе процесса обработки равна $\alpha_{мп} = (\sigma - \sigma_{сжс}) / \sigma$. Тогда с учетом зависимости (1), имеем $\alpha_{мп} = 1 - \operatorname{tg} \beta$. Соответственно, доля собственно резания составляет $\alpha_{рез} = 1 - \alpha_{мп} = \operatorname{tg} \beta$. При условии $\beta \rightarrow 45^\circ$ справедливо: $\alpha_{мп} \rightarrow 0$, а $\alpha_{рез} \rightarrow 1$ (что соответствует 100 %).

Зависимость (1) получена без учета трения на задней поверхности резца, которое, как установлено экспериментально, оказывает существенное влияние на силовую и, соответственно, тепловую напряженности процесса резания. Поэтому важно аналитически установить зависимости, увязывающие параметры силовой напряженности процесса резания с интенсивностью трения одновременно на задней и передней поверхностях резца, поскольку в научно-технической литературе данные зависимости отсутствуют. Для этого следует обратиться к расчетной схеме процесса стружкообразования при резании металлов, предложенной профессором К. А. Зворыкинским [1] еще в конце 19 века, но не утратившей своей значимости и в настоящее время, так как расчеты условного угла сдвига обрабатываемого материала β , по-прежнему, производятся по его формуле:

$$\beta = 45^\circ + \frac{\gamma - \psi}{2}, \quad (2)$$

где γ – положительный передний угол режущего инструмента; ψ – условный угол трения сходящей стружки с передней поверхностью инструмента.

Однако, как показывает практика, при этом имеет место значительное расхождение расчетных и экспериментальных значений угла β – расчетные значения всегда больше экспериментальных. Поэтому с целью дальнейшего совершенствования формулы (2) в настоящей работе разработана математическая модель определения параметров силовой напряженности процесса резания с учетом аналитической зависимости для установления условного угла сдвига обрабатываемого материала β [4, 5]:

$$K_{рез} = \operatorname{tg} 2\beta, \quad (3)$$

где $K_{рез} = P_z / P_y$ – коэффициент резания; P_z , P_y – тангенциальная и радиальная составляющие силы резания, Н.

Если в качестве параметров P_z и P_y рассматривать экспериментальные значения тангенциальной и радиальной составляющих силы резания, то установлено, что расчетные значения угла β принимают достаточно

большие значения, превышающие экспериментальные данные. Следовательно, коэффициент резания $K_{рез} = P_z / P_y$ должен принимать меньшие значения, определяемые отношением лишь составляющих силы резания, участвующих в формировании процесса стружкообразования при резании, без учета сил, возникающих в процессе трения обрабатываемого материала с задней поверхностью режущего инструмента.

Раздельное определение составляющих силы резания, обусловленных собственно резанием и трением на задней и передней поверхностях лезвийного инструмента в процессе механической обработки. Тангенциальную P_z и радиальную P_y составляющие силы резания следует представить в виде (рис. 1):

$$P_z = P_{z1} + P_{z2} + P_{zmp}; \quad (4)$$

$$P_y = P_{y1} + P_{y2} + P_{ymp}, \quad (5)$$

где P_{z1} , P_{y1} – составляющие силы резания, участвующие в образовании сдвига материала вдоль условной плоскости сдвига O_1A_1 , Н; P_{z2} , P_{y2} – составляющие силы резания, участвующие в образовании сдвига материала вдоль условной плоскости сдвига O_2A_2 , Н; P_{zmp} , P_{ymp} – составляющие силы трения, возникающей в процессе трения обрабатываемого материала с задней поверхностью режущего инструмента, Н.

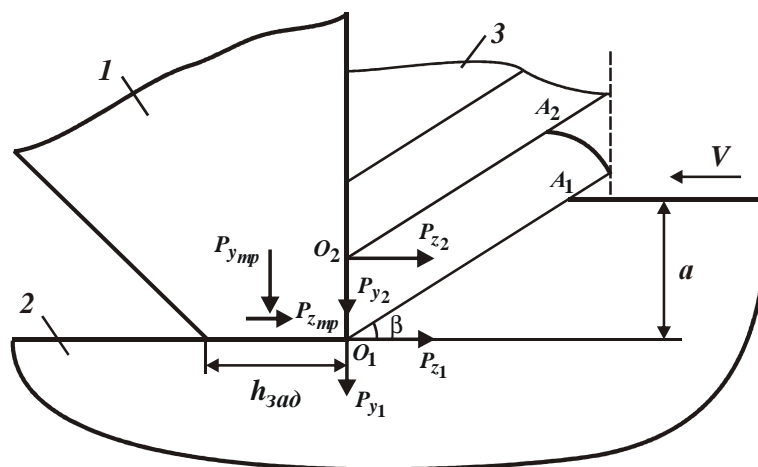


Рис. 1 – Расчетная схема параметров силовой напряженности процесса резания при точении:
1 – резец; 2 – обрабатываемый материал; 3 – образующаяся стружка.

Очевидно, в образовании сдвига материала вдоль условной плоскости сдвига O_1A_1 участвуют составляющие силы резания P_{z1} , P_{y1} , P_{y2} , а составляющая силы резания P_{z2} с физической точки зрения фактически не принимает участия в формировании угла β и поэтому ее можно не учитывать в расчетах. Также в первом приближении можно принять: $P_{z1} = P_{z2}$; $P_{y1} = P_{y2}$. Тогда с учетом зависимости (4) имеем:

$$K_{рез} = \frac{P_{z1}}{2P_{y1}}. \quad (6)$$

Как видно, значения $K_{рез}$ в 2 раза меньше аналогичных значений, рассчитанных по зависимости (3). Зависимость (6) содержит три неизвестные величины: $K_{рез}$, P_{z1} , P_{y1} . Коэффициент резания $K_{рез}$ можно определить по зависимости (3), располагая экспериментальным значением условного угла сдвига обрабатываемого материала β . Для определения составляющих силы резания P_{z1} и P_{y1} следует воспользоваться зависимостями (4) и (5), представляя их в виде:

$$P_z = 2P_{z1} + P_{zmp}; \quad (7)$$

$$P_y = 2P_{y1} + P_{ymp}. \quad (8)$$

С учетом зависимостей (6) и (8), а также $f = P_{zmp} / P_{ymp}$ зависимость (7) преобразуется так:

$$P_z = 4K_{рез} \cdot P_{y1} + f \cdot (P_y - 2P_{y1}), \quad (9)$$

где f – коэффициент трения на задней поверхности инструмента.

Откуда:

$$P_{y1} = \frac{P_z - f \cdot P_y}{2 \cdot (2 \cdot K_{pez} - f)}. \quad (10)$$

Из зависимости (6) можно определить P_{z1} :

$$P_{z1} = 2 \cdot K_{pez} \cdot P_{y1}. \quad (11)$$

Соответственно, из зависимостей (7) и (8) определяются P_{zmp} и P_{ymp} :

$$P_{zmp} = P_z - 2P_{z1}; \quad (12)$$

$$P_{ymp} = P_y - 2P_{y1}. \quad (13)$$

Приведенные зависимости справедливы при главном угле резца в плане $\varphi = 0$. При условии $\varphi > 0$ вместо составляющих силы резания P_y и P_{y1} в зависимостях необходимо рассматривать составляющие силы резания $P_{xy} = P_y / \cos \varphi$ и $P_{xy1} = P_{y1} / \cos \varphi$, образующиеся в плоскости xoy . Тогда

$$P_{xy1} = \frac{P_z - f \cdot P_{xy}}{2 \cdot (2K_{pez} - f)}; \quad (14)$$

$$P_{z1} = 2 \cdot K_{pez} \cdot P_{xy1}; \quad (15)$$

$$P_{zmp} = P_z - 2P_{z1}; \quad (16)$$

$$P_{xymp} = P_{xy} - 2P_{xy1}; \quad (17)$$

$$K_{pez} = \frac{P_{z1}}{2P_{xy1}}. \quad (18)$$

Таким образом, располагая экспериментальными значениями параметров P_z , P_y , f и K_{pez} , по зависимостям (14) – (18) можно определить параметры P_{z1} , P_{y1} , P_{zmp} , P_{ymp} и K_{pez} .

Результаты расчета параметров силовой напряженности механической обработки. В качестве примера рассмотрим процесс точения резцом из *гексanita*–*P* (с главным углом резца в плане $\varphi = 45^\circ$) цилиндрической детали из *стали 45* [6]. В табл. 1 приведены экспериментальные значения составляющих силы резания P_z , P_y и P_{xy} для различных длин площадок износа на задней поверхности резца $h_{зад}$ (подача $S = 0,07$ мм/об.; глубина резания $t = 0,2$ мм). Экспериментально установлено, что условный угол сдвига обрабатываемого материала $\beta = 20^\circ$. Тогда с учетом зависимости (3) коэффициент резания $K_{pez} = 0,84$. Коэффициент трения на задней поверхности резца определяется отношением разностей тангенциальных P_z составляющих силы резания (для $h_{зад} = 0,2$ мм и $h_{зад} = 0,1$ мм) и радиальных P_y составляющих силы резания (для тех же пар $h_{зад} = 0,2$ мм и $h_{зад} = 0,1$ мм), табл. 1.

Таблица 1– Значения параметров силовой напряженности процесса механической обработки

$h_{зад}$, мм	P_z , Н	P_y , Н	P_{xy} , Н	P_{z1} , Н	P_{xy1} , Н	P_{zmp} , Н	P_{xymp} , Н	α_{pez}	α_{mp}
0,05	110	50	70,7	53,8	32	2,4	6,7	0,49	0,51
0,1	140	100	141			32,4	77	0,38	0,62
0,2	200	220	311			92,4	247	0,27	0,73
0,3	260	340	480			150,4	416	0,2	0,8
0,4	320	460	650			212,4	586	0,165	0,835
0,5	370	580	820			262,4	756	0,145	0,855
0,6	440	720	1018			332,4	954	0,122	0,878

Как следует из табл. 1, эти разности составляющих силы резания остаются неизменными и для пары значений $h_{зад} = 0,3$ мм и $h_{зад} = 0,2$ мм; а так же для $h_{зад} = 0,4$ мм и $h_{зад} = 0,3$ мм; для $h_{зад} = 0,5$ мм и $h_{зад} = 0,4$ мм; для $h_{зад} = 0,6$ мм и $h_{зад} = 0,5$ мм. Следовательно, коэффициент трения не зависит от длин площадок износа на задней поверхности резца $h_{зад}$ и остается постоянной величиной, примерно равной $f = P_{zmp} / P_{xymp} = 0,35$. Иными

словами, отношение приращений составляющих силы резания P_z и P_{xy} с увеличением длины площадки износа на задней поверхности резца $h_{зад}$ остается постоянным, равным 0,35.

Подставляя в зависимости (14) – (17) экспериментальные значения P_z , P_{xy} , f и $K_{рез}$ для $h_{зад} = 0,05$ мм (табл. 1), получаем: $P_{xy1} = 32$ Н; $P_{z1} = 53,8$ Н; $P_{zмп} = 2,4$ Н; $P_{xyмп} = 6,7$ Н.

Из зависимости (6) следует, что коэффициент резания равен

$$K_{рез} = \frac{53,8 \text{ Н}}{2 \cdot 32 \text{ Н}} = 0,84.$$

Соответственно, коэффициент трения на задней поверхности резца составляет

$$f = \frac{2,4 \text{ Н}}{6,7 \text{ Н}} = 0,35,$$

то есть расчеты выполнены правильно. В данном случае сила трения, возникающая на задней поверхности резца, незначительна.

Следовательно, тангенциальная составляющая силы резания P_z обусловлена в основном условиями сдвига обрабатываемого материала вдоль условных плоскостей сдвига O_1A_1 и O_2A_2 . При этом $P_{z1} = P_{z2}$.

Радиальная составляющая силы резания P_y обусловлена в основном условиями трения обрабатываемого материала с передней поверхностью резца. При этом $P_{y1} = P_{xy2}$.

Как видно, тангенциальная составляющая силы резания P_z при $h_{зад} = 0,05$ мм примерно в одинаковой степени зависит от условий резания и трения. Для определения коэффициента трения, возникающего на передней поверхности резца, следует воспользоваться аналитической зависимостью [4]:

$$K_{рез} = ctg(\psi - \gamma). \quad (19)$$

Очевидно, сравнивая значения коэффициента резания $K_{рез}$, определяемые зависимостями (3) и (19) с учетом равенства $ctg(\psi - \gamma) = tg[90^\circ - (\psi - \gamma)]$, приходим к формуле (2) проф. К. А. Зворыкина.

Сравнивая значения $K_{рез}$, определяемые зависимостями (6) и (19), приходим к зависимости:

$$2 \cdot tg\beta = ctg(\psi - \gamma). \quad (20)$$

При значениях $\beta = 20^\circ$ и $\gamma = -11^\circ$ (согласно приведенного выше расчета для точения стали 45 резцами из гексанита-Р), исходя из зависимости (20), условный угол трения сходящей стружки с передней поверхностью инструмента принимает значение $\psi = 21^\circ$, а коэффициент трения $f = tg\psi = 0,38$. Это соответствует экспериментально установленным значениям коэффициента трения, возникающего на задней поверхности резца ($f = 0,35$). Таким образом, зависимость (20) приводит в соответствие теорию и практику резания материалов.

Если же расчет условного угла трения сходящей стружки с передней поверхностью инструмента ψ произвести по формуле (2) проф. К. А. Зворыкина для $\beta = 20^\circ$ и $\gamma = -11^\circ$, то получим: $\psi = 61^\circ$; $f = tg\psi = 1,8$. Это не соответствует действительности, поскольку, как известно из курса физики, коэффициент трения $f < 1$, а угол $\psi < 45^\circ$. Этим, собственно, и определяется ограниченность применения формулы (2) проф. К. А. Зворыкина для расчета условного угла сдвига обрабатываемого материала β , поскольку условный угол трения сходящей стружки с передней поверхностью инструмента ψ не должен принимать несуществующие значения, превышающие 45° .

С увеличением $h_{зад} > 0,05$ мм составляющие силы резания P_{z1} и P_{xy1} остаются примерно неизменными, а составляющие силы резания $P_{zмп}$ и $P_{xyмп}$ – увеличиваются, причем, $P_{xyмп}$ – более интенсивно (табл. 1). Поэтому энергия трения в общем энергетическом балансе процесса обработки будет увеличиваться, превышая энергию собственно резания. Так, при $h_{зад} = 0,05$ мм доля энергии резания равна:

$$\alpha_{рез} = \frac{P_{z1}}{P_z} = \frac{53,8 \text{ Н}}{110 \text{ Н}} = 0,49.$$

Соответственно, доля энергии трения равна: $\alpha_{мп} = 1 - \alpha_{рез} = 1 - 0,49 = 0,51$.

Аналогично определяются значения $\alpha_{рез}$ и $\alpha_{мп}$ для других значений $h_{зад}$ (табл. 1). Как видно, чем больше

значение $h_{зад}$, тем больше $\alpha_{тр}$ и меньше $\alpha_{рез}$.

Энергоемкость обработки (условное напряжение резания) определяется зависимостью $\sigma = P_z / S_{срез}$, где $S_{срез} = S \cdot t$ – площадь поперечного сечения среза, мм². Для условий собственно резания:

$$\sigma_{рез} = P_{z1} / S_{срез} = 53,8 \text{ Н} / (0,07 \text{ мм} \cdot 0,2 \text{ мм}) = 3843 \text{ Н} / \text{мм}^2.$$

Как видно, энергоемкость собственно резания в несколько раз превышает предел прочности на сжатие обрабатываемой стали 45 – $\sigma_{сж} \approx 970 \text{ Н} / \text{мм}^2$. Это указывает на существенное влияние условий трения на передней поверхности резца на образование условного угла сдвига обрабатываемого материала β , который для данных условий обработки равен 20°. При условии отсутствия трения на передней поверхности резца (то есть для идеальных условий обработки, соответствующих условиям одноосного сжатия обрабатываемого материала) угол β был бы равен 45°, а $\sigma_{рез} \rightarrow \sigma_{сж}$. Поэтому основным условием уменьшения энергоемкости обработки следует рассматривать снижение интенсивности трения в зоне резания.

Перспективы дальнейших исследований. Автор считает перспективными пути исследования, связанные с определением параметров силовой напряженности процесса резания, отдельным учетом составляющих силы резания, обусловленных процессами собственно резания и трения в общей энергоемкости механической обработки, и на этой основе установление условий уменьшения энергоемкости и силы резания.

Выводы. В работе предложен новый теоретический подход к разделению составляющих силы резания при точении, обусловленных процессами собственно резания и трения на передней и задней поверхностях режущего инструмента в общей энергоемкости механической обработки, с использованием экспериментальных данных тангенциальной и радиальной составляющих силы резания и условного угла сдвига обрабатываемого материала. Это позволило привести в соответствие теорию и практику процесса резания, уточнить теоретические решения, полученные с использованием формулы проф. К. А. Зворыкина для определения условного угла сдвига обрабатываемого материала, и на этой основе установить условия уменьшения энергоемкости и силы резания. Показано, что при точении резцами из гексанита–Р детали из стали 45 энергоемкость собственно резания значительно превышает предел прочности на сжатие обрабатываемой стали. Это указывает на существование резервов снижения интенсивности трения в зоне резания и, соответственно, уменьшения энергоемкости и других параметров силовой напряженности процесса резания.

Список литературы

1. Бобров В. Ф. Основы теории резания металлов. – М. : Машиностроение, 1975. – 343 с.
2. Лолодзе Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. – М. : Машиностроение, 1982. – 320 с.
3. Силин С. С. Метод подобия при резании материалов. – М. : Машиностроение, 1979. – 152 с.
4. Новиков Ф. В., Якимов А. В. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения. В десяти томах. – Т. 1. «Механика резания материалов». – Одесса : ОНПУ, 2002. – 580 с.
5. Новиков Ф. В. Основы математического моделирования технологических процессов механической обработки : монография. – Днепр : ЛИРА, 2018. – 400 с.
6. Новиков Ф. В., Якимов А. В. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения. В десяти томах. – Т. 3. «Резание материалов лезвийными инструментами». – Одесса : ОНПУ, 2003. – 546 с.

References (transliterated)

1. Bobrov V. F. *Osnovy teorii rezaniya metallov* [Fundamentals of the theory of metal cutting]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 343 p.
2. Loladze T. N. *Prochnost' i iznosostoykost' rezhushhego instrumenta* [Strength and wear resistance of cutting tool]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 320 p.
3. Silin S. S. *Metod podobiya pri rezanii materialov* [The method of similarity when cutting materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 152 p.
4. Novikov F. V., Yakimov A. V. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroeniya. V desyati tomakh. Tom. 1. "Mekhanika rezaniya materialov"* [Physical and mathematical theory of material processing and engineering technology. In ten volumes. Vol. 1. «Mechanics of material cutting»]. Odessa, ONPU Publ., 2002. 580 p.
5. Novikov F. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mekhanicheskoy obrabotki : monografiya* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Technological Processes of Mechanical Processing : monograph]. Dnepr, LIRA Publ., 2018. 400 p.
6. Novikov F. V., Yakimov A. V. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroeniya V desyati tomakh. Tom. 3. "Rezaniye materialov lezviynymi instrumentami"* [Physical and mathematical theory of material processing and engineering technology. In ten volumes. Vol. 3. "Cutting materials with blade tools"]. Odessa, ONPU Publ., 2003. 546 p.

Поступила (received) 20.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянський Володимир Іванович (Полянський Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich) – кандидат технічних наук, Генеральний директор, ТОВ «Імперія металів», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

А. П. ТАРАСЕНКО, С. Н. ТРОХИМЧУК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПОЛИНОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВА ОДНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ

В настоящей статье с общетеоретических позиций рассматриваются вопросы, касающиеся определения оператора нормализации изображений множества однотипных объектов и построения соответствующего ему отображения. Предложенный подход построения полинормализатора относится к нелинейным методам цифровой обработки изображений, которые эффективнее традиционных линейных методов и обладают универсальностью. Это указывает на общность в анализе видеоинформации и открывает перспективные направления в дальнейших исследованиях.

Ключевые слова: полинормализация, нормализатор, множество однотипных объектов.

О. П. ТАРАСЕНКО, С. М. ТРОХИМЧУК

ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ПОЛІНОРМАЛІЗАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ МНОЖИНИ ОДНОТИПОВИХ ОБ'ЄКТІВ

У даній статті з загальнотеоретичних позицій розглянуто питання щодо визначення оператора нормалізації зображень множини однотипових об'єктів та побудови відповідального йому відображення. Введено поняття поліноормалізатора та отримані результати відносно його формального опису. Доведено ряд тверджень щодо побудови поліноормалізатора. Запропонований підхід побудови поліноормалізатору відноситься до нелінійних методів цифрової обробки зображень, які є ефективнішими за традиційні лінійні методи, а також універсальними. Це вказує на спільність в аналізі відеоінформації і відкриває перспективні напрями в подальших дослідженнях.

Ключові слова: поліноормалізація, нормалізатор, множина однотипових об'єктів.

A. P. TARASENKO, S. M. TROKHIMCHUK

THEORETICAL PRECONDITIONS OF POLYNORMALIZATION OF IMAGES OF SET OF SAME TYPE OBJECTS

From general-theoretical positions the questions concerning determination of the operator of normalisation of images of a set of the same type objects and construction of the corresponding mapping are considered. The concept of polynormalizer is introduced and the results concerning its formal description are obtained. A number of the statements on polynormalizer constructions are proved. The approach proposed for creating a polynormalizer belongs to nonlinear methods of digital processing of images which are more effective than traditional linear methods as well as universal. This indicates generality in the analysis of video information and opens perspective directions for further researches.

Key words: polynormalization, normalizer, set of the same type objects.

Введение. Традиционные методы нормализации, успешно обрабатывающие изображения одного объекта, находящегося в поле зрения видеодатчика, принципиально не в состоянии проводить анализ группы объектов. В основу существующих алгоритмов нормализации положены линейные методы обработки изображений объектов, которые успешно справлялись с поставленными ранее задачами [1]. С ростом числа объектов, обрабатываемых с помощью монокулярных систем формирования изображений, малоэффективно проводить наращивание типовых специализированных технических устройств, ориентированных на анализ изображений одного объекта. Это приводит к нерациональному использованию подобных систем. Получившие широкое распространение корреляционные методы требуют большого объема вычислений. Выход из этого положения может быть найден путем разработки принципиально новых, в частности, нелинейных методов обработки визуальной информации множества объектов, поскольку потенциально нелинейные методы обладают большей универсальностью и эффективностью, чем линейные.

Целью данной статьи является развитие теоретических основ анализа группы объектов с использованием алгоритмов полинормализации, которые, как показали дальнейшие исследования авторов, обладают нелинейностью, что подтверждает главный подход в использовании нелинейных методов с точки зрения системного анализа.

Исходные предпосылки. Пусть в *трехмерном евклидовом пространстве* R^3 заданы n пространственных объектов $S_i (i = \overline{1, n})$. *Пространственный объект* представляет собой связное множество точек, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью и занимающее определенное положение в пространстве R^3 [2]. Соответствующие объектам S_i центральные проекции [3] на подпространство R^2 обозначим через A_i , где $A_i \in R^2 (i = \overline{1, n})$. На рис. 1 показан пример центральных проекций для трех пространственных объектов. В оптических системах центр проекции соответствует задней узловой точке объектива [4].

Положим, что $A_i (i = \overline{1, n})$ размещены в некоторой замкнутой области D , называемой *полем зрения*, где $D \subset R^2$, если выполняются следующие условия:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \cap D = \bigcup_{i=1}^n A_i; \quad (1)$$

$$\forall i, j = \overline{1, n} : i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset. \quad (2)$$

При этом также полагаем, что плоское изображение $B(x, y)$, регистрируемое фотокамерой (или на экране передающей телевизионной трубки) и соответствующее центральной проекции A пространственного объекта S , описывается уравнением двумерной свертки и представляет собой интенсивность отраженного от объекта светового потока [5, 6].

Определим на подпространстве R^2 *финитные функции* $\tilde{B}_i(x, y)$, однозначно характеризующие объекты S_i , следующим образом:

$$\tilde{B}_i(x, y) \equiv \begin{cases} B_i(x, y) & \forall (x, y) \in A_i; \\ 0 & \forall (x, y) \in R^2 / A_i, \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall i : i = \overline{1, n}.$$

На рис. 1 замкнутые области A_i принято называть [7] *носителями изображений* $B_i(x, y)$, R^2 / A_i – *разностью* R^2 и A_i . Изображения $B_i(x, y)$ ($i = \overline{1, n}$), в силу высказанных выше предложений, являются неотрицательно-определёнными непрерывными функциями и принадлежат пространству $C^2(D)$ дважды дифференцируемых непрерывных функций в области D .

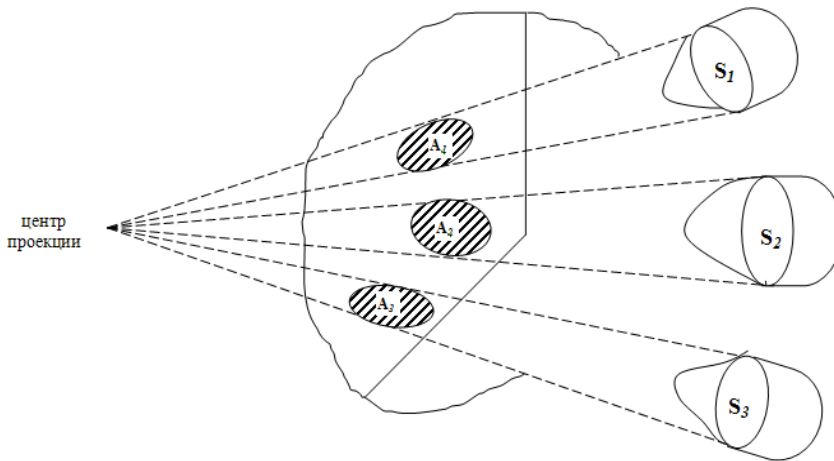


Рис.1 – Центральные проекции для трех пространственных объектов.

Тогда изображение $B(x, y)$ n объектов S_i ($i = \overline{1, n}$), попавших в поле зрения и удовлетворяющих выражениям (1), (2), (3), эквивалентно равенству

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n B_i(x, y). \quad (4)$$

Действие группы G геометрических преобразований в пространстве R^2 на множестве $M = \{B(x, y)\}$ изображений порождает отношение эквивалентности, которому соответствует разбиение множества на непересекающиеся *классы эквивалентности* m_λ , где $\lambda \in N$, N – множество натуральных чисел [8]. Рассмотрим некоторый класс эквивалентности $m \in M$, образованный фиксированным *нормальным (эталонным) изображением*.

$$B_0(x, y) \in m, \exists g \in G : B(x, y) = B_0(g \circ (x, y)) \quad (5)$$

или сокращенно $B = B_0 \circ g$, где « \circ » обозначает действие группы G . Тогда выражение (4), с учетом того, что $B_i(x, y) \in m$,

$$B_i(x, y) = B_0(g_i \circ (x, y)), \quad i = \overline{1, n}$$

и удовлетворяют условиям (1), (2), (3), будет выглядеть следующим образом:

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n B_0(g_i \circ (x, y)). \quad (6)$$

Исследование полинормализатора. В классической теории нормализации изображений все основные оп-

ределения и утверждения были получены для случая, когда в поле зрения D присутствует изображение одного объекта, то есть $B(x, y) = B_0(g_i^0(x, y))$. Поэтому необходимо расширить основные понятия, заложенные в классической теории нормализации, которые бы позволили формализовать процедуру нормализации изображений нескольких объектов.

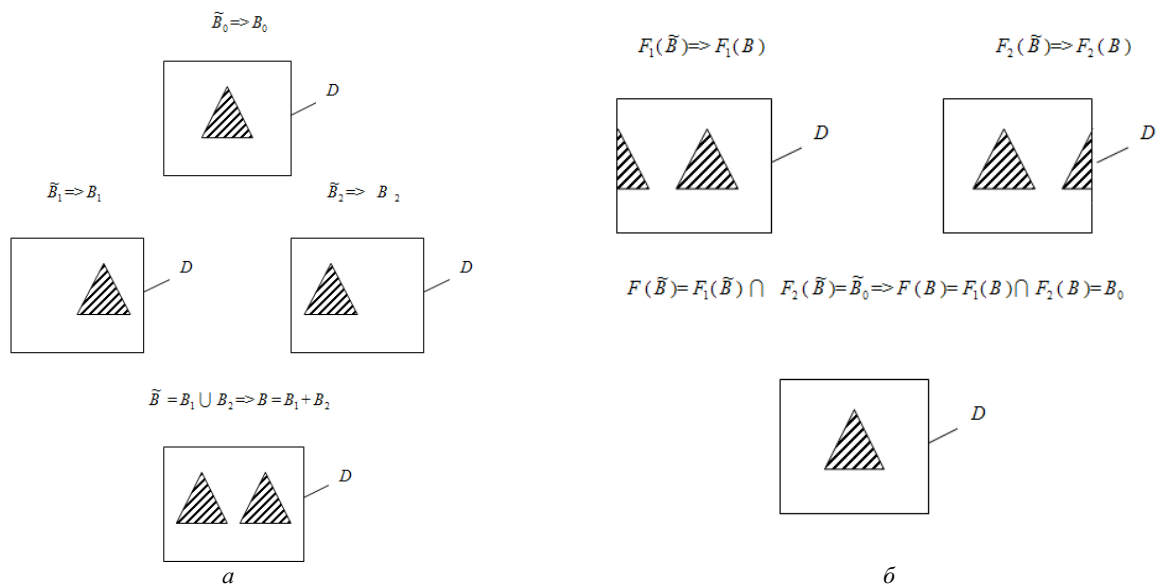


Рис. 2 – Пример полинормализатора F для двух изображений однотипных объектов: a – пример двух однотипных объектов, подверженных группе смещений; b – результат полинормализации.

В содержательном плане задача нормализации изображений нескольких однотипных объектов (полинормализация) заключается в том, чтобы по изображению $B(x, y)$, представленному в виде (6), найти эталонное изображение $B_0(x, y)$.

Под однотипными объектами следует понимать такие трехмерные связанные объекты, центральные проекции которых представляют собой изображения, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности M . Следовательно, необходимо построить такой оператор $F : F(B) = B_0$.

Для этого введем следующие определения.

Определение I. Преобразование $F : M \rightarrow M$ называется π_n – оператором, где $n \geq 1$, если существует такая совокупность π – операторов [7] $F_i, i = \overline{1, n}$, что для любого изображения B , удовлетворяющего (6), выполняется равенство

$$F(B) = \bigcap_{i=1}^n F_i(B), \tag{7}$$

где: $F_i(B) = B \circ \overline{\Phi}_i < B >, \overline{\Phi}_i : M \rightarrow G, i = \overline{1, n}$.

Определение II. Преобразование $F : M \rightarrow M$ называется оператором нормализации изображений нескольких однотипных объектов (полинормализатором), если F есть π_n – оператор и $F(B) \in M_0$, где M_0 – множество эталонных изображений.

На рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий смысл введенных выше определений в случае действия группы смещений.

Для полинормализатора F справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если отображение $F : M \rightarrow M$ является полинормализатором, то существует отображение $\overline{\Phi}_i : M \rightarrow G$, которое удовлетворяет следующему соотношению:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \circ \overline{\Phi}_i < B_i > = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n B_j \circ \overline{\Phi}_i < B_j > .$$

Доказательство. Так как $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ и полинормализатор F является отображением множества M самого

на себя, то воспользуемся следующей теоремой, которая гласит, что образ суммы множеств равен сумме образов этих множеств [9], то есть

$$F(B) = F\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n F(B_i).$$

Для одного изображения B_i полинормализатор F совпадает с нормализатором F . Поэтому [9] существует отображение $\overline{\Phi}_i : M \rightarrow G$, $i = \overline{1, n}$. Окончательно получаем, что

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \circ \overline{\Phi}_i < B_i > = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n B_j \circ \overline{\Phi}_i < B_j >.$$

Таким образом, справедливость утверждения доказана.

Нелинейная процедура построения полинормализатора параметров смещений. До сих пор в теории нормализации изображений рассматривались в основном линейные методы (линейность методов вытекает из решений систем линейных уравнений). Однако при анализе изображений нескольких однотипных объектов возникает определенная трудность применения линейных методов. Это связано, прежде всего, с вырожденностью системы исходных линейных уравнений.

Рассмотрим нелинейную процедуру построения полинормализатора.

Для этого введем следующее функциональное преобразование:

$$\Phi_k(\omega_1) = \int_D e^{k\omega_1 x} B(x, y) ds_{xy}. \quad (8)$$

Так как

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n B_i(x, y) = \sum_{i=1}^n B_0(x + a_i, y + b_i),$$

где a_i и b_i соответственно параметры смещения по оси X и оси Y , то проанализируем выражение (8):

$$\begin{aligned} \Phi_k(\omega_1) &= \int_D e^{k\omega_1 x} \sum_{i=1}^n B_0(x + a_i, y + b_i) ds_{xy} = \sum_{i=1}^n \int_D e^{k\omega_1 x} B_0(x + a_i, y + b_i) ds_{xy} = \\ &= \sum_{i=1}^n e^{-k\omega_1 a_i} \int_D e^{k\omega_1 u} B_0(u, v) ds_{uv} = \Phi_k^0(\omega_1) \sum_{i=1}^n x_i^k, \end{aligned}$$

где $u = x + a_i$, $v = y + b_i$ и

$$\Phi_k^0(\omega_1) = \int_D e^{k\omega_1 x} B_0(x, y) ds_{xy}, \quad x_i^k = e^{-k\omega_1 a_i} > 0 \quad \forall i: i = \overline{1, n}.$$

В результате получаем нелинейную алгебраическую систему n уравнений с n неизвестными:

$$C_k(\omega_1) = C_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad (9)$$

где

$$C_k(\omega_1) = C_k = \Phi_k(\omega_1) / \Phi_k^0(\omega_1) > 0,$$

так как $\Phi_k(\omega_1)$, $\Phi_k^0(\omega_1) > 0$ в силу неотрицательности подынтегральных функций.

Можно заметить, что C_k , $k = \overline{1, n}$ из (9) являются симметрическими многочленами переменных x_i , $i = \overline{1, n}$ и называются *степенными суммами*. Существует определенная связь между степенными суммами C_k , $k = \overline{1, n}$ и элементарными симметрическими многочленами σ_k , $k = \overline{1, n}$ в виде *формулы Ньютона*:

$$c_k - c_{k-1}\sigma_1 + c_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1} c_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0, \quad c_0 = 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Формула Ньютона позволяет последовательно находить выражения для c_k , $k = \overline{1, n}$ через σ_k , $k = \overline{1, n}$, а также выразить элементарные симметрические многочлены σ_k , $k = \overline{1, n}$, зная первые n степенных сумм c_k , $k = \overline{1, n}$.

$$\sigma_1 = c_1;$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(c_1\sigma_1 - c_2) = \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2);$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(c_3 - c_2\sigma_1 + c_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 2c_3)$$

и так далее.

Известно, что с точностью до знака элементарные симметрические многочлены являются коэффициентами некоторого многочлена от одного неизвестного, имеющего старшим коэффициентом единицу. Следовательно,

задачу нахождения решения системы можно свести к задаче нахождения действительных положительных корней некоторого многочлена n -й степени

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0. \quad (10)$$

где $\alpha_i = (-1)^i \sigma_i$, а σ_i являются действительными положительными функциями от $c_1, c_2, \dots, c_i, \forall i: i \leq n$.

В связи с этим рассмотрим вопрос существования положительных корней $f(x)$. Сначала установим число отрицательных корней, воспользовавшись *правилом знаков Декарта*, которое гласит, что число положительных корней (подсчитанное с учетом кратности) уравнения

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0$$

не больше числа перемен знака в последовательности

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

коэффициентов $f(x)$ и может отличаться от него лишь на четное число. Так как при замене x на $-x$ корни уравнения меняют знаки, то воспользовавшись *правилом Декарта*, оценим число отрицательных корней. Для этого проанализируем случаи, когда показатель степени четный и нечетный. Рассмотрим первый случай $n = 2k$. Запишем выражение для $f(x)$ в (10). Имеем

$$f(-x) = (-x)^{2k} + \alpha_1 (-x)^{2k-1} + \alpha_2 (-x)^{2k-2} + \dots + \alpha_{2k} = x^{2k} - \alpha_1 x^{2k-1} + \alpha_2 x^{2k-2} - \dots + \alpha_{2k}$$

или, учитывая, что для нечетных i $\alpha_i = -\sigma_i$, получаем:

$$f(-x) = x^{2k} + \sigma_1 x^{2k-1} + \sigma_2 x^{2k-2} + \dots + \alpha_{2k}. \quad (11)$$

Следовательно, последовательность знаков коэффициентов (11) выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & \dots & + \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \dots & \sigma_{2k}. \end{array} \quad (12)$$

Так как число перемен знаков в последовательности (12) равно нулю, следовательно, число отрицательных корней в уравнении (10) также равно нулю. Для второго случая, когда n – нечетное ($n = 2k + 1$), выражение для $f(-x)$ имеет вид:

$$f(-x) = (-x)^{2k+1} + \alpha_1 (-x)^{2k} + \alpha_2 (-x)^{2k-1} + \dots + \alpha_{2k+1} = -x^{2k+1} + \alpha_1 x^{2k} - \alpha_2 x^{2k-1} + \dots + \alpha_{2k+1}.$$

Учитывая, что для нечетных i $\alpha_i = -\sigma_i$ получаем

$$f(-x) = -x^{2k+1} - \sigma_1 x^{2k} - \sigma_2 x^{2k-1} - \dots - \sigma_{2k+1}. \quad (13)$$

Последовательность знаков коэффициентов (13) равна

$$\begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & - & - & \dots & - \\ -1 & -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & -\sigma_4 & -\sigma_5 & \dots & -\sigma_{2k+1}. \end{array}$$

Следовательно, и для нечетных n число отрицательных корней уравнения также равно нулю. Отсюда можно сделать вывод: корнями уравнения могут быть либо положительные числа, либо положительные и комплексные. Наличие комплексных корней свидетельствует о том, что исходная нелинейная система алгебраических уравнений (9) является переопределенной, то есть число уравнений n больше числа m неизвестных. Это означает, что априорно задаваемое число однотипных объектов не соответствует фактически обрабатываемому или можно предположить о существовании объектов, изображения которых не принадлежат рассматриваемому классу эквивалентности. Следует отметить, что в общем случае для нахождения корней (10) можно использовать различные итерационные методы.

Рассмотрим аналогичную процедуру получения выражения (9), но для вычисления смещений $b_i, i = \overline{1, n}$ по оси Y . Для этого функциональное преобразование (8) видоизменим:

$$\tilde{\Phi}_k(\omega_2) = \int_D e^{k\omega_2 y} B(x, y) ds_{xy}.$$

С другой стороны,

$$\tilde{\Phi}_k(\omega_2) = \tilde{\Phi}_k^0(\omega_2) \sum_{i=1}^n y_i^k,$$

где

$$\tilde{\Phi}_k^0(\omega_2) = \int_D e^{k\omega_2 y} B_0(x, y) ds_{xy}, \quad y_i^k = e^{-k\omega_2 b_i} > 0, \quad \forall i: i = \overline{1, n}.$$

Аналогично системе (9) будет выглядеть и система n уравнений для определения n неизвестных y_i , где

$$y_i = e^{-\omega_2 b_i}, \quad \forall i: i = \overline{1, n};$$

$$D_k(\omega_2) = D_k = \sum_{i=1}^n y_i^k, \quad (14)$$

где $D_k(\omega_2) = D_k = \frac{\bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_2)}{\bar{\Phi}_k(\omega_2)} > 0$, так как $\bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_2), \bar{\Phi}_k(\omega_2) > 0$.

Решая систему уравнений (14) аналогично системе (10) получим корни $y_i, i = \overline{1, n}$. Следовательно, в результате решения подобных систем (10) и (14) имеем наборы параметров смещений $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Естественно, возникает вопрос о соответствии параметров смещений. Применение совместно методов полного перебора и корреляции требует значительных вычислительных затрат.

Для преодоления этого недостатка рассмотрим функциональное преобразование

$$\bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_3) = \int_D e^{k\omega_3(x+y)} B(x, y) ds_{xy}.$$

Это выражение можно представить в виде произведения сомножителей:

$$\bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_3) = \bar{\bar{\Phi}}_k^0(\omega_3) \sum_{i=1}^n p_i^k,$$

где

$$\bar{\bar{\Phi}}_k^0(\omega_3) = \int_D e^{k\omega_3(x+y)} B_0(x, y) ds_{xy}, \quad p_i^k = e^{-k\omega_3(a_i+b_i)} > 0 \quad \forall i, k = \overline{1, n},$$

то есть $p_i = e^{-\omega_3(a_i+b_i)}$ являются функциями сумм соответствующих смещений по оси X и по оси Y . Составим алгебраическую систему уравнений с неизвестными:

$$E_k(\omega_3) = E_k = \sum_{i=1}^n p_i^k,$$

где

$$E_k(\omega_3) = E_k = \frac{\bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_3)}{\bar{\bar{\Phi}}_k^0(\omega_3)} > 0, \quad \text{так как } \bar{\bar{\Phi}}_k(\omega_3), \bar{\bar{\Phi}}_k^0(\omega_3) > 0.$$

Решая ее аналогично (10) и (14) определяем значения

$$s_i^+ = a_i + b_i = -\ln p_i / \omega_3.$$

Теперь определим соответствие между изображениями $B_i(x, y)$ и параметрами их смещений относительно эталонного изображения $B_0(x, y)$, располагая совокупностями $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{s_i^+\}$. Для этого составим подстановку:

$$R = \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k \neq l \Rightarrow i_k \neq i_l; \\ i_k, i_l \leq n. \end{matrix} \quad (15)$$

Поставим в соответствие каждой подстановке вида (15) набор $\{\xi_i\}$, где:

$$\xi_i = (a_{i_1} + b_1, a_{i_2} + b_2, \dots, a_{i_n} + b_n) \quad i = \overline{1, n}!$$

Упорядочивая и сравнивая $\xi_i, i = \overline{1, n}!$ с упорядоченным вектором $\xi_0 = (s_1^+, s_2^+, \dots, s_n^+)$, определяем истинные значения параметров смещений. Число вариантов перебора равно $n!$, где n – количество однотипных объектов, попавших в поле зрения D , и это число намного меньше числа вариантов перебора, используемого при корреляционном методе.

Для сравнительно небольшого числа объектов $n \leq 4$ можно получить в явном виде формулы, необходимые для вычисления параметров смещений этих объектов.

Рассмотрим вначале случай, когда $n = 2$. Тогда система уравнений (9) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = c_1; \\ x_1^2 + x_2^2 = c_2. \end{cases}$$

Откуда, выражая x_2 в первом уравнении и подставляя его во второе, получаем квадратное уравнение. Корни этого уравнения имеют вид:

$$x_{1(1,2)} = \frac{c_1 \pm \sqrt{2c_2 - c_1^2}}{2}. \quad (16)$$

Соответственно, $x_{2(1,2)} = x_{1(2,1)}$ то есть один из корней есть x_1 , а другой – x_2 . Покажем, что дискриминант в (16) является неотрицательным. Действительно,

$$2c_2 - c_1^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Таким образом, решение исходной системы уравнений существует и выражается единственным образом с помощью (16). Аналогичным образом получаются выражения для y_1 , y_2 и p_1 , p_2 . Достаточно проверить два варианта ($2! = 2$), чтобы установить соответствие между параметрами смещений $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ и $\{s_1^+, s_2^+\}$, а именно:

$$\text{1-й вариант} \quad \xi_1 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \rightarrow \xi_0(s_1^+, s_2^+);$$

$$\text{2-й вариант} \quad \xi_2 = (a_2 + b_1, a_1 + b_2) \rightarrow \xi_0(s_1^+, s_2^+).$$

В общем случае вопрос об определении неизвестных в нелинейных системах уравнений вида (9) решается через определение корней многочленов, коэффициенты которых выражаются через левые части этих систем. Определение действительных, а, следовательно, и положительных корней многочленов может осуществляться с помощью последовательно используемых итерационных методов. Последовательно понижая степень построенных многочленов, можно сделать предложенную процедуру определения корней универсальной.

Выводы. В статье предложен обобщенный подход к теории нормализации изображений, который показал возможность расширения понятий нормализации изображений, и доказано существование, а также преобразование оператора нормализации в случае наличия нескольких однотипных объектов. Рассмотрена реализация предложенной теории к практически важной ситуации с определением параметров смещений и представлены все необходимые для этого расчеты.

Список литературы

1. Gorokhovatskiy V. A., Vechirska I. D., Chetverikov G. G. Method for Building of Logical Data Transform in the Problem of Establishing Links between the Objects in Intellectual Telecommunication Systems // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2016. – Vol. 75. – No. 18. – P. 1645 – 1655.
2. Стоян Ю. Г., Гиль Н. И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев : Наукова думка, 1976. – 247 с.
3. Фоли Дж., А. вен Дэм. Основы интерактивной машинной графики. Т. 1. – М. : Мир, 1985. – 367 с.
4. Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. Распознавание и цифровая обработка изображений. – М. : Высшая школа, 1983. – 296 с.
5. Эндрюс Г., Инло Л. Обработка изображений при помощи ЦВМ. – М. : Мир, 1973. – 160 с.
6. Виттих В. А., Сергеев В. В., Соифер В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. – М. : Наука, 1982. – 213 с.
7. Путятин Е. П., Шульгин И. В. К вопросу моделирования механизмов нормализации зрительных образов. // В кн. : Проблемы бионики. – Харьков : Вища школа, 1971. – Вып. 5. – С. 102 – 104.
8. Шафаревич И. П. Основы алгебраической геометрии. – М. : Наука, 1972. – 567 с.
9. Gorokhovatskiy V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2016. – Vol. 75. – No 14. – P. 1271 – 1283.

References (transliterated)

1. Gorokhovatskiy V. A., Vechirska I. D., Chetverikov G. G. Method for Building of Logical Data Transform in the Problem of Establishing Links between the Objects in Intellectual Telecommunication Systems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 18, pp. 1645–1655.
2. Stoyan Yu. G., Gil' N. I. *Metody i algoritmy razmesheniya ploskikh geometricheskikh ob'ektov* [Methods and Algorithms for Placing Plane Geometric Objects]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976. 247 p.
3. Foli Dg., A. ven Dem. *Osnovy interaktivnoy mashinnoy grafiki. T. 1* [Basics of Interaction Computer Graphics. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1985. 367 p.
4. Anisimov B. V., Kurganov V. D., Zlobin V. K. *Raspoznavanie i tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Image Recognition and Digital Processing]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1983. 296 p.
5. Endryus G., Inlo L. *Obrabotka izobrazheniy pri pomoshhi TSVM* [Image Processing by Digital Computer]. Moscow, Mir Publ., 1973. 160 p.
6. Vittikh V. A., Sergeev V. V., Soyfer V. A. *Obrabotka izobrazheniy v avtomatizirovannykh sistemakh nauchnykh issledovaniy* [Image Processing in Scientific Research Automated Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 213 p.
7. Putyatin E. P., Ghul'gin I. V. K voprosu modelirovaniya mekhanizmov normalizatsii zritel'nykh obrazov [On the problem of modeling visual image normalization mechanisms. In : *Problemy bioniki* [Bionics Problems]. Kharkov, Vysshya shkola Publ., 1971, vol. 5, pp. 102–104.
8. Shafarevich I. P. *Osnovy algebraicheskoy geometrii* [Basic Algebraic Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 567 p.
9. Gorokhovatskiy V. A. Efficient Estimation of Visual Object Relevance during Recognition through their Vector Descriptions. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2016, vol. 75, no. 14, pp. 1271–1283.

Поступила (received) 21.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Тарасенко Александр Прокофьевич (Tarasenko Oлександр Прокопович, Tarasenko Alexander Prokofevich) – кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Харківський інститут банківської справи», м. Харків; тел.: (066) 637-25-63; e-mail: tap-top@ukr.net.

Трохимчук Сергей Николаевич (Trokhymchuk Sergii Mikolayovich) – кандидат технічних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-7917-05-45; e-mail: trohimchuk_sn@uipa.edu.ua.

УДК 629.7.017

В. А. УДОВЕНКО, А. И. ГЛАДЫШЕВ**МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПИЛОТАЖНОМ СТЕНДЕ ПОЛЁТА ЛЁГКОГО ВЕРТОЛЁТА В СПУТНОМ СЛЕДЕ ДРУГОГО ВЕРТОЛЁТА**

С помощью моделирования на пилотажном стенде исследуется поведение лёгкого вертолёт в спутном следе тяжёлого вертолёт. Пространственное движение вертолёт рассчитывается в режиме реального времени в рамках нелинейной модели динамики полёта, учитывающей движение фюзеляжа вертолёт как твёрдого тела, динамику несущего и рулевого винтов, маховое движение лопастей винтов. Влияние спутного следа рассчитывается на основе моделей ближнего и дальнего вихревого следа, которые позволяют вычислить возмущающие силы и моменты, действующие на вертолёт в следе. Выполнено моделирование полёта для характерных случаев попадания вертолёт в спутный след другого вертолёт. Результаты моделирования свидетельствуют о значительном влиянии спутного следа на динамику вертолёт.

Ключевые слова: вертолёт, пилотажный стенд, моделирование полёта, спутный след, ближний след, дальний след, аэродинамические характеристики, динамика полёта.

В. О. УДОВЕНКО, А. І. ГЛАДИШЕВ**МОДЕЛЮВАННЯ НА ПІЛОТАЖНОМУ СТЕНДІ ПОЛЬОТУ ЛЕГКОГО ВЕРТОЛЬОТА У СПУТНЬОМУ СЛІДІ ІНШОГО ВЕРТОЛЬОТА**

За допомогою моделювання на пілотажному стенді досліджується поведінка легкого вертолёт у супутньому сліді важкого вертолёт. Просторовий рух вертолёт розраховується в режимі реального часу у рамках нелінійної моделі динаміки польоту, що враховує рух фюзеляжа як твердого тіла, динаміку несучого та рульового гвинтів, маховий рух лопатей. Вплив супутнього сліду враховується на основі моделей ближнього та дальнього вихорового сліду, які дозволяють обчислити збурюючі сили та моменти, що діють на вертолёт у сліді. Виконане моделювання польоту для характерних випадків потрапляння вертолёт в супутній слід іншого вертолёт. Результати моделювання свідчать про значний вплив супутнього сліду на динаміку вертолёт.

Ключові слова: вертолёт, пилотажний стенд, моделювання польоту, супутній слід, ближній слід, дальній слід, аеродинамічні характеристики, динаміка польоту.

V. A. UDOVENKO, A. I. GLADYSHEV**PILOTED SIMULATION OF THE FLIGHT OF THE LIGHT HELICOPTER IN THE WAKE OF ANOTHER HELICOPTER**

Using piloted simulation, the behavior of a light helicopter in a wake of a heavy helicopter is studied. The spatial motion of the helicopter is calculated in the real time mode within a non-linear model of flight dynamic, taking into account the movement of the fuselage of the helicopter as a solid body, the dynamics of main and tail rotors, flapping movement of rotor blades. The influence of the wake is taken into account on the basis of the models of the near and far vortex wake, which allow calculating the disturbing forces and moments acting on the helicopter in the wake. A flight simulation was performed for typical cases of helicopter falling into a helicopter's wake. The simulation results indicate a significant effect of the wake on the dynamics of the helicopter.

Key words: helicopter, piloted simulator, flight simulation, wake, near wake, far wake, aerodynamic characteristics, flight dynamics.

Введение. Исследование поведения вертолёт в *спутном следе* другого вертолёт является актуальной научно-технической задачей. Спутный след *летательного аппарата* может представлять опасность для вертолёт, поскольку вызывает возмущение аэродинамических сил и моментов, нарушение балансировки. В результате возможна потеря управляемости вертолёт.

В настоящее время проводятся исследования спутных следов за самолётами, главным образом, в связи с проблемой увеличения пропускной способности взлётно-посадочных полос аэропортов [1 – 4]. Спутные следы за вертолёт, как известно авторам из обзора литературы, исследуются в меньшей степени, что является не в полной мере оправданным. Работа [5] посвящена созданию математической модели следа вертолёт и расчёту возмущений аэродинамических характеристик вертолёт в следе другого вертолёт. В перечисленных работах основное внимание уделяется исследованию поведения следа во времени и пространстве и его влиянию на аэродинамические характеристики попавшего в след летательного аппарата.

Настоящая работа посвящена исследованию *динамики вертолёт* в спутном следе другого вертолёт, реакции вертолёт на возмущения, вызванные следом, оценке степени опасности данного режима. Поведение вертолёт исследуется в численном моделировании на пилотажном стенде.

Математическая модель динамики вертолёт, реализованная в пилотажном стенде. Пилотажный стенд позволяет имитировать полёт вертолёт на различных режимах полёта и при различных аэродинамических воздействиях. В пилотажном стенде воспроизводится рабочее место пилота в кабине вертолёт, отображается работа приборного оборудования, визуализируется вид из окна кабины, моделируются органы управления вертолёт. Математическая модель вертолёт, реализованная в пилотажном стенде, определяет реакцию вертолёт на внешние и управляющие воздействия в заданных условиях полёта. Изменение во времени параметров полёта сохраняется в файле.

Пространственное движение вертолёт рассчитывается в рамках нелинейной модели динамики полёта, учитывающей движение фюзеляжа вертолёт как твёрдого тела, а также динамику несущего и рулевого винтов

© В. А. Удовенко, А. И. Гладышев, 2019

[6, 7]. Движение винта определяется маховым движением лопастей, которое описывается гармоническим законом.

Лопастки шарнирно подвешены к втулке и считаются абсолютно жесткими. В произвольный момент времени вектор линейной скорости \vec{V} начала *связанной системы координат* (СвСК) $OXYZ$ и вектор угловой скорости вращения фюзеляжа $\vec{\Omega}$ произвольно ориентированы в пространстве. На фюзеляж и винты в общем случае действуют аэродинамические, инерционные, гравитационные, возмущающие силы и моменты.

С кинематической точки зрения, особенностью вертолета является наличие вращающихся лопастей, которые соединены с осью вращения шарнирами, которые позволяют лопасти совершать в пространстве сложное движение. Уравнения движения вертолета описывают движение *центра масс* (ЦМ) фюзеляжа и поворот фюзеляжа относительно ЦМ. В случае произвольного положения начала СвСК, с учётом малых членов первого порядка можно данные уравнения записать в виде:

$$m[\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V}] + m[\vec{\Omega} \times \vec{r}_{ЦМ} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{ЦМ})] = \vec{F}_B + \vec{F}_\Phi + \vec{F}_G + \vec{F}_H + \vec{F}_D + \vec{F}_{возм};$$

$$(J)\vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times (J)\vec{\Omega} + m\vec{r}_{ЦМ} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V}) = \vec{M}_B + \vec{M}_\Phi + \vec{M}_G + \vec{M}_H + \vec{M}_D + \vec{M}_{возм}.$$

Здесь $\vec{r}_{ЦМ}$ – радиус-вектор центра масс фюзеляжа в СвСК; (J) – матрица моментов инерции фюзеляжа; \vec{F}_B, \vec{F}_Φ – аэродинамические силы винтов и фюзеляжа; \vec{F}_G – сила тяжести; \vec{F}_H, \vec{F}_D – нелинейные слагаемые сил, учитывающие угловую скорость винтов и динамику махового движения лопастей; $\vec{F}_{возм}$ – возмущающие аэродинамические силы; $\vec{M}_B, \vec{M}_\Phi, \vec{M}_G, \vec{M}_H, \vec{M}_D, \vec{M}_{возм}$ – соответствующие моменты.

В контур управления моделью вертолета включен автопилот, работающий в режиме демпфирования на изменение углов и угловых скоростей пространственного движения.

Законы отклонения управляющих поверхностей вертолета в каналах тангажа, крена и курса направлены на уменьшение как управляющих воздействий от пилота, так и внешних возмущений (в нашем случае от вихревого следа), и записываются в виде:

$$\Delta\delta_{an} = \frac{1}{T_{p+1}}(i_\alpha \cdot \Delta\alpha + i_{\omega_j} \cdot \omega_j),$$

где $\Delta\delta_{an}$ – отклонение автопилотом управляющей поверхности вертолета в рассматриваемом канале (канал тангажа – продольный χ , канал крена – поперечный η наклон тарелки автомата перекоса, канал курса – угол ϕ_{PB} шага рулевого винта); α – угол пространственного положения вертолёт (тангаж – \mathcal{G} , крен – γ , курс ψ); ω_j – соответствующая компонента угловой скорости вращения вертолета относительно СвСК ($\omega_z, \omega_x, \omega_y$); i_α, i_{ω_j} – передаточные числа автопилота в каналах углов и угловых скоростей; T – постоянная времени инерционного звена первого порядка; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования по времени.

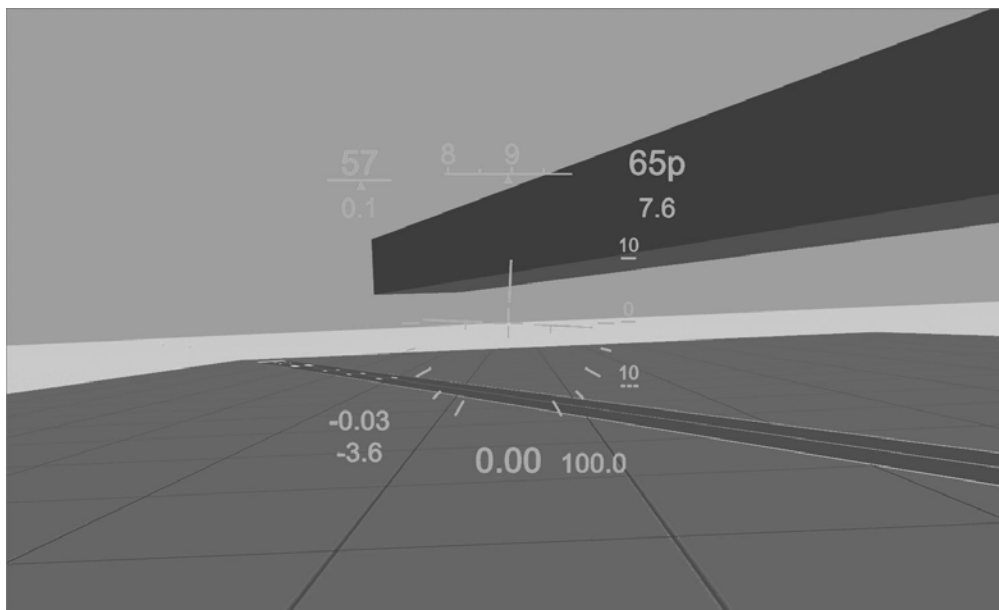


Рис. 1 – Область спутного следа на экране пилотажного стенда.

Расчет аэродинамических характеристик компоновки вертолета в целом в реальном масштабе времени на современных компьютерах не представляется возможным. Поэтому такая задача решается с использованием метода суперпозиций на основе данных об аэродинамических характеристиках фюзеляжа и винтов и их взаимном

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 22 (1347) 2019.

влиянии, полученных путём экспериментов и расчётов, с учётом свойств подстилающей поверхности, ветровых возмущений, турбулентности атмосферы и других факторов.

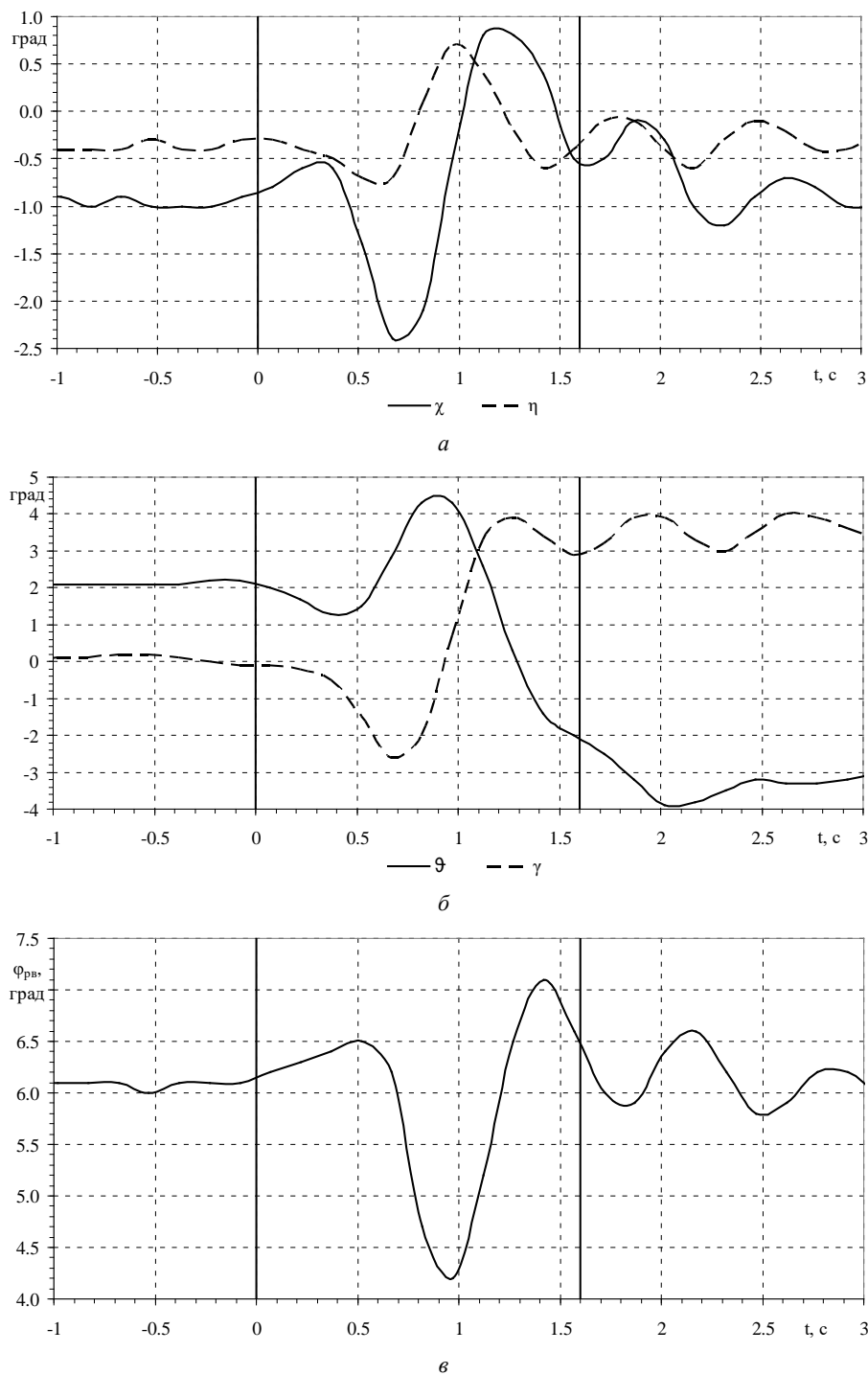


Рис. 2 – Изменение во времени параметров полёта для режима 1: а – углов отклонения тарелки автомата перекоса; б – углов тангажа и крена; в – угла шага рулевого винта.

Спутный след за вертолёт-генератором учитывается на основе модели, предложенной в [5]. Предполагается, что влияние следа имеет место в пределах области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, продольное ребро которого параллельно направлению полёта вертолёт-генератора. Размеры параллелепипеда определяются в результате расчётов в рамках моделей ближнего и дальнего следа. Влияние следа на вертолёт приводит к возникновению приращений вертикальной компоненты аэродинамической силы, компонент аэродинамического момента вдоль продольной и поперечной осей параллелепипеда. На передней грани параллелепипеда, в центре которой располагается вертолёт-генератор, величины данных приращений соответствуют приращениям аэродинамических сил и моментов, действующих на вертолёт в следе, рассчитанным методом дискретных вихрей [8 – 10]. В остальных поперечных сечениях параллелепипеда влияние следа линейно убывает до ну-

левых значений на задней грани.

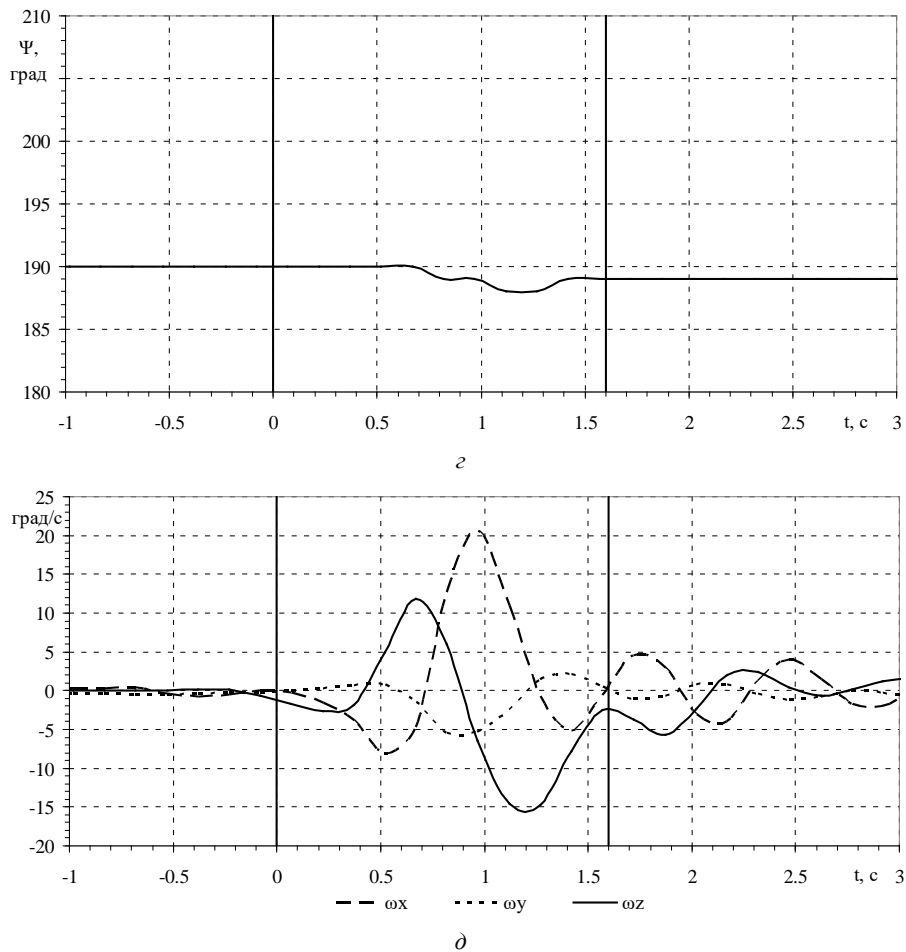


Рис. 2 – Изменение во времени параметров полёта для режима 1: ψ – угла курса; $\dot{\vartheta}$ – компоненты угловой скорости.

Результаты моделирования полёта вертолёта в спутном следе. В настоящей работе рассматривается ситуация, когда влияние спутного следа является наиболее существенным, – попадание лёгкого вертолёта в след тяжёлого вертолёта. Параметры следа соответствуют вертолёту-генератору весом 12000 кг, с радиусом *несущего винта* (НВ) 10,65 м. Исследуемый вертолёт одновинтовой схемы, с вертикальным и горизонтальным оперением, его вес составляет 3300 кг, радиус НВ 5,75 м. Для данного случая размеры области спутного следа были рассчитаны в [5] и составляют 2200 м в продольном, 60 м в боковом, 40 м в вертикальном направлении. На экране пилотажного стенда область спутного следа показывается тёмным цветом (рис. 1).

Моделируются три режима полёта вертолёта в спутном следе.

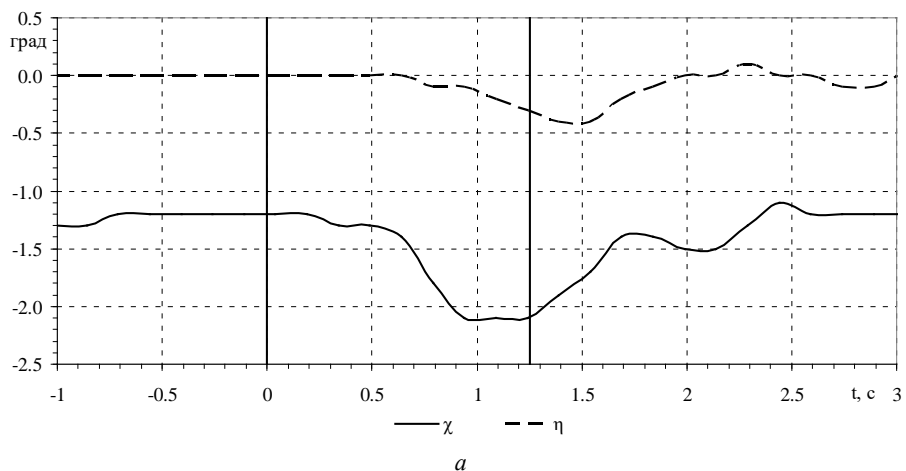


Рис. 3 – Изменение во времени параметров полёта для режима 2: a – углов отклонения тарелки автомата перекоса.

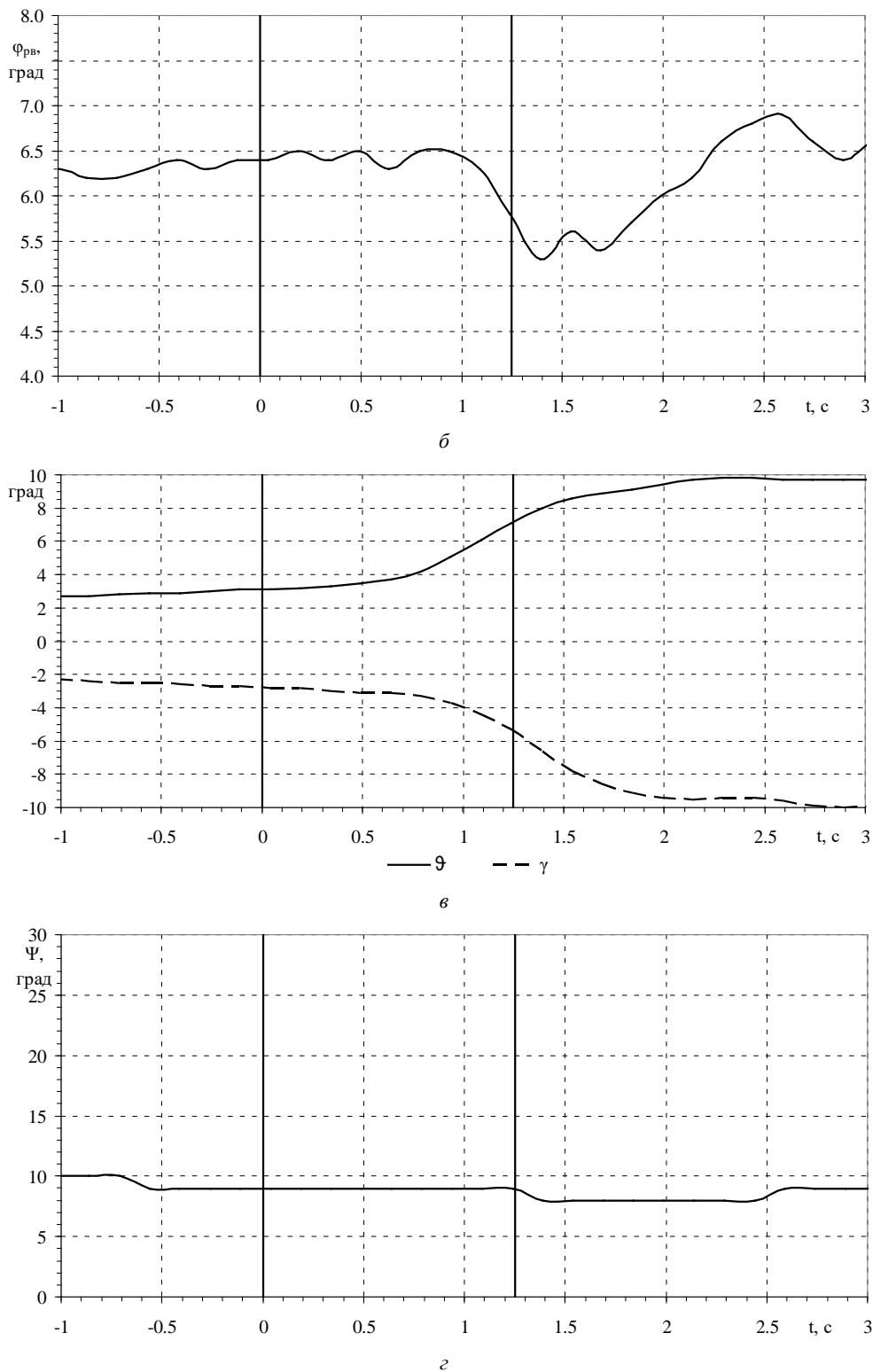


Рис. 3 – Изменение во времени параметров полёта для режима 2: θ – углов тангажа и крена; ψ – угла шага рулевого винта; γ – угла курса.

На режимах 1 и 2 вертолёт влетает в след перпендикулярно продольной оси следа со скоростями 100 км/ч и 160 км/ч соответственно. На режиме 3 вертолёт движется вдоль оси следа от задней до передней его грани со скоростью 150÷180 км/ч. На рис. 2, 3, 4 для режимов 1, 2, 3 соответственно показано изменение во времени параметров полёта: углов отклонения тарелки автомата перекоса в продольном и поперечном направлении χ , η , угла установки рулевого винта φ_{PB} , углов тангажа θ и крена γ , угла курса ψ , компонент угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z . Вертикальными линиями показаны моменты входа вертолёта в область спутного следа и выхода из неё. За момент времени $t = 0$ взят момент входа вертолёта в след.

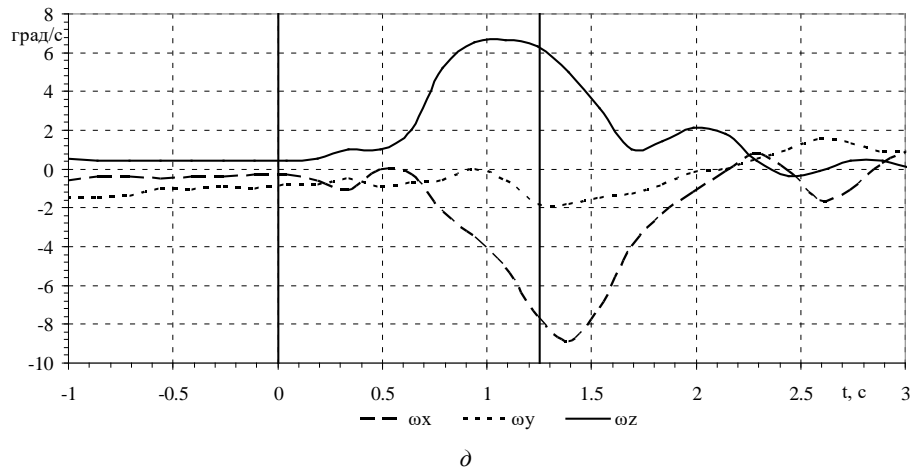


Рис. 3 – Изменение во времени параметров полёта для режима 2: δ – компоненты угловой скорости.

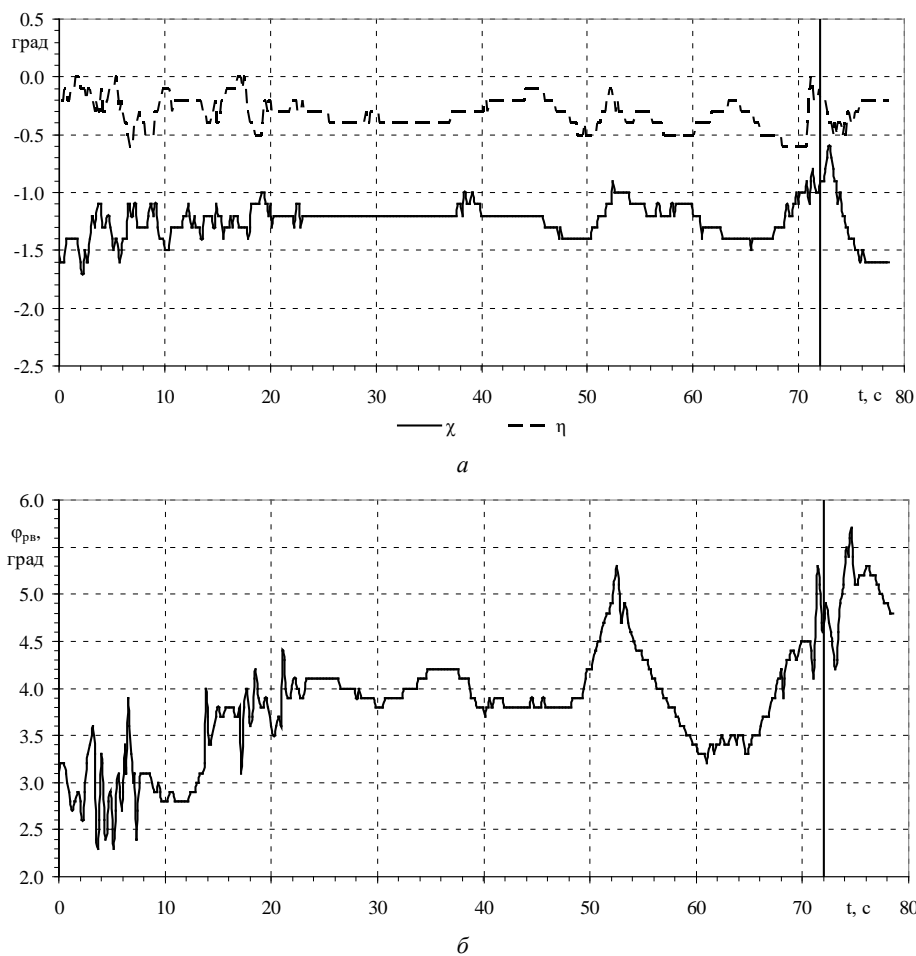


Рис. 4 – Изменение во времени параметров полёта для режима 3: a – углов отклонения тарелки автомата перекося; δ – углов тангажа и крена.

Режимы 1 и 2 соответствуют кратковременному попаданию вертолёта в спутный след. При пролёте через след отсутствовали управляющие воздействия на органы управления вертолётном. Росту отклонений тангажа и крена от балансировочных значений препятствовал автопилот, который работал в режиме демпфирования углов и угловых скоростей вращения вертолёта.

В результате воздействия следа вертолёт претерпел возмущения параметров полёта, которые после выхода из следа благодаря устойчивости вертолёта и работе автопилота были компенсированы со статическим смещением от первоначальных значений. Режим 2 соответствует большей скорости полёта и более кратковременному пребыванию в следе, но при этом большему возмущению углов тангажа и крена. На режиме 1 максимальное отклонение составило для угла тангажа 6° , для угла крена 4° , на режиме 2 – соответственно 7° и 6° . Таким обра-

зом, благодаря свойствам исследуемого вертолёта попадание его в спутный след тяжёлого вертолёта не приводит к опасным последствиям.

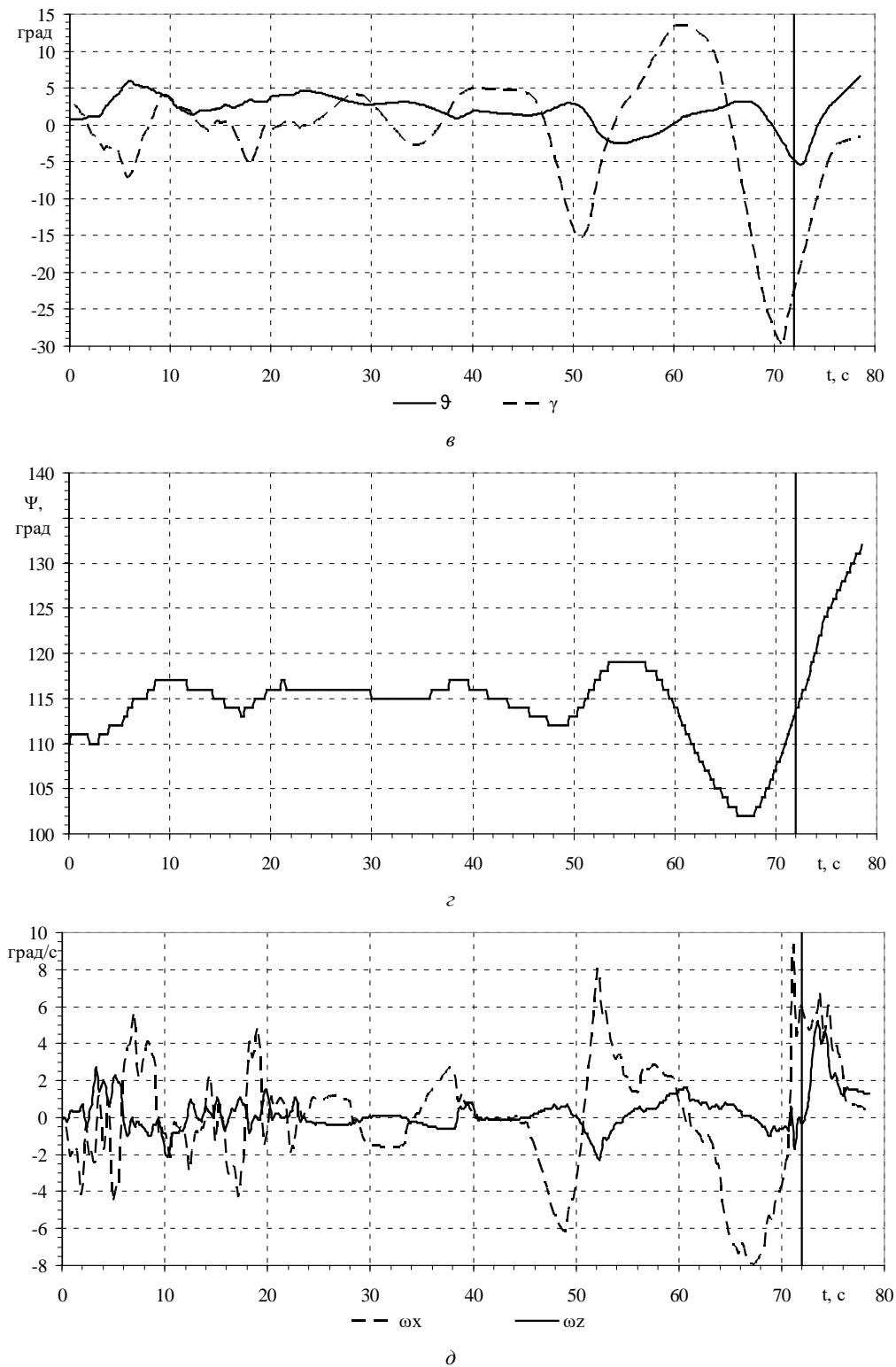


Рис. 4 – Изменение во времени параметров полёта для режима 3: θ – угла шага рулевого винта; ψ – угла курса; ω_x, ω_z – компоненты угловой скорости.

Режим 3 соответствует длительному пребыванию вертолёта в следе. Из графиков видно нарастание возмущений от следа по мере приближения к вертолёту-генератору. Вблизи 45-й и 60-й секунд с момента входа в след данные возмущения приводили к выходу вертолёта из области следа влево, при этом прикладывались управляющие воздействия для возвращения вертолёта в исследуемую область. Максимальные отклонения от установившихся значений для угла тангажа составили 7° , для угла крена достигли 30° . После выхода из области следа

проявилась тенденция к возвращению параметров полёта к балансировочным значениям.

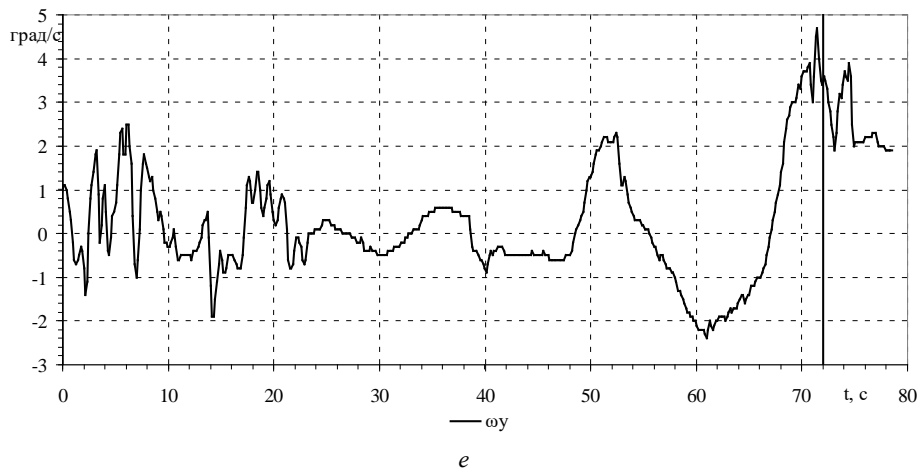


Рис. 4 – Изменение во времени параметров полёта для режима 3: e – компонента угловой скорости ω_y .

Выводы. Разработанный программный комплекс позволяет моделировать и исследовать на пилотажном стенде поведение лёгкого вертолёта в спутном следе тяжёлого вертолёта. Математическая модель спутного следа, реализованная в пилотажном стенде, была разработана на основе моделей ближнего и дальнего вихревого следа за летательным аппаратом. В численном эксперименте процесса имитации полёта подтверждены результаты летного эксперимента в том, что под влиянием спутного следа возникают существенные возмущения параметров полёта. Появляется возможность численной оценки величин этих возмущений и достаточности динамических характеристик системы управления и собственных свойств вертолёта для их парирования. В силу универсальности предложенного подхода может быть исследована динамика вертолётов различных типов при попадании в спутный след.

Список литературы

1. Желанников А. И. Оперативные методы расчёта характеристик вихревого следа за самолётами // Вісник Харк. нац. ун-та. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – Харків, 2009. – № 847. – С. 184 – 190.
2. Хаустов А. А. Модель эволюции спутного следа воздушного судна при полёте на крейсерском режиме // Научный вестник МГТУ ГА. – Москва, 2012. – № 184. – С. 118 – 122.
3. Donaldson C. duP., Bilanin A. J. Vortex Wakes of Conventional Aircraft. – AGARDograph no. 204. – Neuilly sur Seine : AGARD NATO, May 1975. – 80 p.
4. Аубакиров Т. О., Желанников А. И., Иванов П. Е., Ништ М. И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. – Алматы, 1999. – 230 с.
5. Удовенко В. А., Гладышев А. И. Аэродинамические характеристики несущего винта вертолёта в спутном следе другого вертолёта // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків, 2019. – № 8 (1333). – С. 192 – 198.
6. Хлопов Г. І. Радіоелектронні та навчально-тренувальні комплекси для підвищення безпеки польотів. Монографія. – Харків, 2010. – 192 с.
7. Ковалёв Е. Д., Моцарь П. И., Удовенко В. А. Создание нелинейных математических моделей аэродинамики и динамики полёта винтовых аппаратов. // Колега. – 2010. – №1. – С. 20 – 27.
8. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
9. Белоцерковский С. М., Локтев Б. Е., Ништ М. И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолётов. – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.
10. Апарин В. А., Дворак А. В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского. – М., 1986. – Вып. 1313. – С. 424 – 429.

References (transliterated)

1. Zhelannikov A. I. Operativnye metody rascheta kharakteristik vikhrevogo sleda za samoletami [Operational methods for calculating the characteristics of vortex wakes of aircrafts]. *Visnyk Khark. nats. un-ta. Seriya "Matematychnye modelyuvannya. Informatsyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya"* [Bulletin of Kharkiv national univ. Series : Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems"]. Kharkiv, 2009, no. 847, pp. 184–190.
2. Khaustov A. A. Model' evolyutsii sputnogo sleda vozdušnogo sudna pri polete na kreyserskom rezhime [Model of evolution of the aircraft's wake on the cruise flight]. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta grazhdanskoj aviatsii* [Scientific Bulletin of the Moscow state University of Civil Aviation]. Moscow, 2012, no. 184, pp. 118–122.
3. Donaldson C. duP., Bilanin A. J. *Vortex Wakes of Conventional Aircraft*. AGARDograph no. 204, Neuilly sur Seine. AGARD NATO, 1975. 80 p.
4. Aubakirov T. O., Zhelannikov A. I., Ivanov P. E., Nisht M. I. *Sputnye sledy i ikh vozdeystvie na letatel'nye apparaty. Modelirovanie na EVM*. [Wakes and their influence on the aircrafts. Modelling on the computer]. Almaty, 1999, 230p.
5. Udovento V. A., Gladyshev A. I. Aerodinamicheskie kharakteristiki nesushhego vinta vertoletu v sputnom slede drugogo vertoletu [Aerodynamic characteristics of the helicopter main rotor in the wake of another helicopter]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, 2019, no. 8 (1333), pp. 192–198.

6. Khlopov G. I. *Radioelektronni ta navchal'no-treuvial'ni kompleksy dlya pidvyshhennya bezpeky pol'otiv* [Radioelectronic and training complexes for increasing flight safety], Kharkiv, 2010, 192 pp.
7. Kovalev E. D., Motsar' P. I., Udovenko V. A. Sozdanie nelineynykh matematicheskikh modeley aerodinamiki i dinamiki poleta vintokrylykh apparatov [Creating non-linear mathematical models of aerodynamics and dynamics of rotorcraft's flight]. *Kolega* [Colleague]. 2010, no. 1, pp. 20–27.
8. Belotserkovskiy S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'yu* [Separated and non-separated flow of the ideal fluid about thin wings]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p.
9. Belotserkovskiy S. M., Loktev B. E., Nisht M. I. *Issledovanie na EVM aerodinamicheskikh i aerouprugikh kharakteristik vintov vertoletov* [Computer investigation of the aerodynamic and aeroelastic characteristics of helicopter rotors]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 224p.
10. Aparinov V. A., Dvorak A. V. *Metod diskretnykh vikhrey s zamknutyimi vikhrevymi ramkami* [Method of discrete vortices with the closed vortex frames]. *Primenenie EVM dlya issledovaniya aerodinamicheskikh kharakteristik letatel'nykh apparatov. Trudy VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo* [Applicatinos of the computers for the investigation of aircraft's aerodynamic characteristics. Proc. of N. E. Zhukovsij Air Force Academy]. Moscow, 1986, issue 1313, pp. 424–429.

Поступила (received) 28.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Удовенко Володимир Олексійович (Удовенко Владимир Алексеевич, Udovenko Vladimir Alekseevich) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, директор, ТОВ «КБ Аеровотекс», м. Харків; тел.: (066) 288-37-06, (097) 271-33-42; e-mail: uva333@mail.ru.

Гладишев Андрій Іванович (Гладишев Андрей Иванович, Gladyshev Andrei Ivanovich) – інженер-програміст числового експерименту, ТОВ «КБ Аеровотекс», м. Харків; тел.: (095) 889-19-29; e-mail: re-trov@inbox.ru.

УДК 519.6

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗКЛАД ОДНОГО КЛАСУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В роботі отримано спектральні розклади для нестационарних випадкових послідовностей, у яких при вкладанні в гільбертів простір відповідна послідовність у цьому просторі має зображення $x_n = A^n x_0$, за допомогою спектральної теорії несамоспряжених операторів. Ці зображення є аналогом спектральних розкладів стаціонарних випадкових послідовностей, які є суперпозицією станів дискретних осциляторів. В нестационарному випадку для дискретного спектра отримано суперпозицію внутрішніх станів дискретних осциляторів з частотами, які лежать у верхній півплощині, крім того, отримані принципово нові типи спектральних розкладів, коли послідовність зображується у вигляді суперпозиції внутрішніх станів дискретних струн. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: гільбертів простір, нестационарна випадкова послідовність, спектральна теорія несамоспряжених операторів.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе получены спектральные разложения для нестационарных случайных последовательностей, у которых при вложении в гильбертово пространство соответствующая последовательность в этом пространстве имеет представление $x_n = A^n x_0$, с помощью спектральной теории несамоспряженных операторов. Эти представления являются аналогом спектральных разложений стационарных случайных последовательностей, являющихся суперпозицией состояний дискретных осцилляторов. В нестационарном случае для дискретного спектра получена суперпозиция внутренних состояний дискретных осцилляторов с частотами, лежащими в верхней полуплоскости, кроме этого, получены принципиально новые типы спектральных разложений, когда последовательность представляется в виде суперпозиции внутренних состояний дискретных струн. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: гильбертово пространство, нестационарная случайная последовательность, спектральная теория несамоспряженных операторов.

N. V. CHEREMSKAYA

SPECTRAL EXPANSION FOR A CLASS OF NON-STATIONARY RANDOM SEQUENCES

In this paper we obtain spectral decompositions for non-stationary random sequences for which, when embedded in a Hilbert space, the corresponding sequence in this space can be represented $x_n = A^n x_0$ using the spectral theory of non-self-adjoint operators. These representations are analogous to the spectral decompositions of stationary random sequences, which are a superposition of the states of discrete oscillators. In the non-stationary case, for a discrete spectrum, a superposition of the internal states of discrete oscillators with frequencies lying in the upper half-plane is obtained, in addition, fundamentally new types of spectral decompositions are obtained when the sequence is represented as a superposition of the internal states of discrete strings. Also we consider some recommendations for further research.

Key words: Hilbert space, non-stationary random sequence, spectral theory of non-self-adjoint operators.

© Н. В. Черемська, 2019

Вступ. Спектральні розклади випадкових функцій є основою для прикладного аналізу випадкових процесів і послідовностей, через те, що являють собою суперпозицію внутрішніх станів гармонічних осциляторів з дійсними частотами [1]. У випадку, коли умова стаціонарності (в широкому сенсі) порушується, побудова спектральної теорії нестационарних випадкових послідовностей наштовхується на істотні труднощі. Здається, побудова загальної теорії навряд чи здійсниться. Тому більш логічним є напрям, коли виділяються деякі класи нестационарних випадкових функцій. А. М. Колмогоров у своїх роботах [2, 3] вперше використав спектральну теорію несамопрояжених або неунітарних операторів для побудови спектральної теорії стаціонарних випадкових процесів або стаціонарних випадкових послідовностей.

Аналіз останніх досліджень. Для розв'язання задач, для яких припущення щодо статистичної стаціонарності не виконується, використовувались певні узагальнення стаціонарних випадкових функцій, які являють собою адитивні або мультиплікативні збурення стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів, а саме: випадкові функції зі стаціонарними приростами, які використовуються, наприклад, для моделювання атмосферної турбулентності [4, 5, 6], локально-стаціонарні випадкові процеси та локально-однорідні випадкові поля, які використовуються, наприклад, для моделювання поширення електромагнітних хвиль у атмосфері Венери [7, 8, 9] та інші.

Проте, спроба застосування перелічених вище моделей нестационарних процесів для низки задач призводить до великих похибок. Враховуючи вищесказане, актуальною задачею є побудова спектральної теорії нестационарних випадкових послідовностей, яка б не мала цих недоліків.

Постановка задачі. Побудова спектральної теорії нестационарних випадкових послідовностей природно потребує використання спектральної теорії несамопрояжених або квазіунітарних операторів [10, 11, 12]. В даній роботі запропоновано метод отримання спектральних розкладів нестационарних випадкових послідовностей, у яких при вкладанні в гільбертів простір відповідна послідовність у цьому просторі має зображення $x_n = A^n x_0$.

Математична модель. Якщо $A : H \rightarrow H$, H – гільбертів простір – самопрояжений обмежений оператор, то кореляційна функція, яку можна обчислити як відповідний скалярний добуток [13], залежить від суми аргументів (ганкелева випадкова послідовність). Для такої послідовності легко отримати спектральне зображення вигляду:

$$\xi_n = \int_a^b \lambda^n dZ(\lambda),$$

де $Z(\lambda)$ – стандартний випадковий процес з некорельованим приростом.

Якщо послідовність неганкелева, але $\dim(\overline{\text{Im}} A)H < \infty$, то для отримання спектрального розкладу можна застосувати методи теорії несамопрояжених операторів та асоційованих відкритих систем [13]. Трійку $(H, A \in [H, H], \xi_0 \in H)$ називатимемо операторним зображенням випадкової послідовності (тобто у відповідному гільбертовому просторі послідовність має зображення $x_n = A^n x_0$).

Розглянемо два випадки спектра оператора A .

Нехай спектр оператора A дискретний та міститься у верхній комплексній півплощині. Введемо підпростір гільбертова простору $H : E = (\overline{\text{Im}} A)H$. Нехай $\dim E = r < \infty$. Розглянемо дві послідовності некорельованих випадкових величин $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ з нульовими математичними очікуваннями та одиничними дисперсіями $Mz_k \overline{z_j} = \delta_{kj}$, $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Розглянемо сукупність детермінованих функцій $\psi_k(n)$, яка задовольняє системі різницевих рівнянь першого порядку:

$$i\psi_k(n+1) + \lambda_k \psi_k(n) = \sum_{\alpha=1}^r u_k^{(\alpha)}(n) \sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k};$$

$$\psi_k(n)|_{n=0} = \psi_k(0);$$

$$u_{k+1}^{(\alpha)}(n) = u_k^{(\alpha)}(n) - i\sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k} \psi_k(n);$$

$$u_k^{(\alpha)}(n) \Big|_{k=0} = 0, \quad u_k^{(\alpha)}(n) = Mu_k(n) \overline{a_\alpha}, \quad (1)$$

де λ_k – власні числа оператора A , а ω_α – власні числа оператора $2 \operatorname{Im} A$.

Теорема 1. Якщо $x(n, \omega)$ – нестационарна випадкова послідовність, яка має операторне зображення у відповідному гільбертовому просторі вигляду $x_n = A^n x_0$, то є справедливим розкладання:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(n) z_k, \quad (2)$$

де $\Psi_k(n)$ знаходиться із системи (1).

Доведення. Включимо A до операторного комплексу $K = (A, H, g_1, \dots, g_r, J = I)$. Тоді [13] комплекс K можна зобразити у вигляді зчеплення операторних комплексів K_m^\perp , де K_m^\perp – проекція комплексу K на підпростір $H_m^\perp = H_{m-1} \ominus H_m$, де $H_m = H \ominus H_m^\perp$, а H_m^* – зростаюча система скінченновимірних інваріантних підпросторів $H_0^* \subset H_1^* \subset H_2^* \subset \dots$ така, що $\dim(H_{m-1}^* \ominus H_m^*) = 1$ та $\lim_{m \rightarrow \infty} H_m^* = H$. Комплекс K має структуру

$$K_m^\perp = P_m^\perp H = \left(A_m^\perp, H_m^\perp, g_1^{(m)}, \dots, g_r^{(m)}, I \right), \quad A_m^\perp h_m = \lambda_m h_m, \quad g_\alpha^{(m)} = P_m^\perp g_\alpha = \langle g_\alpha, z_m \rangle z_m.$$

P_m^\perp – проекція на підпростір $H_m^\perp = H_{m-1} \ominus H_m$, де $H_m = H - H_m^*$.

Позначимо $z_m(n) = \psi_m(n) z_m$. Маємо для відкритої системи, яка асоційована з комплексом K_m^\perp :

$$\psi_m(n+1) + i \lambda_m \psi_m(n) = -i \sum_{\alpha=1}^r u_{\alpha,m}(n) \langle g_\alpha, z_m \rangle;$$

$$\psi_m \Big|_{n=0} = \psi_{m,0};$$

$$v_{\alpha,m}(n) = u_{\alpha,m}(n) - i \langle g_\alpha, z_m \rangle \psi_m(n).$$

Тоді, використовуючи результати роботи по зчепленню операторних комплексів [10], отримуємо усі твердження теореми, враховуючи, що g_α можна обрати у вигляді $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|} a_\alpha$, де $|\omega_\alpha|$ – власні числа оператора $2 \operatorname{Im} A$. Розглядаючи $2 \operatorname{Im} A = B$, $B = B^*$ та обираючи як базис власні вектори a_α оператора B , маємо:

$$Bu = B \left(\sum_{\alpha=1}^r u_\alpha a_\alpha \right).$$

Через те, що $\omega_\alpha = \operatorname{sign} \omega_\alpha |\omega_\alpha|$ отримуємо:

$$\sum_{\alpha=1}^r \langle \cdot, a_\alpha \rangle B a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r \omega_\alpha \langle \cdot, a_\alpha \rangle a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r E_\alpha \langle \cdot, g_\alpha \rangle g_\alpha.$$

Отже, $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|} a_\alpha$, $\omega_1, \dots, \omega_p > 0$, $\omega_{p+1}, \dots, \omega_r < 0$.

Враховуючи, що елементами гільбертових просторів H та E є випадкові величини, а ортогональність еквівалентна некорельованості, отримуємо твердження теореми.

Розглянемо випадок оператору A , який у відповідному операторному зображенні має нескінченнократний спектр у нулі та скінченновимірний неермітовий підпростір (вольтерів дисипативний оператор).

Включимо оператор A до операторного комплексу $\tilde{K} = (\tilde{A}, \tilde{H}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r, J = I)$, де $\tilde{g}_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|} a_\alpha$ ($\alpha = \overline{1, r}$), $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, тоді за теоремою 8.3 [13] комплекс \tilde{K} є унітарно еквівалентним комплексу

$$K = \left(A, L_{[0,l]}^2, g_1(x), \dots, g_r(x), I \right),$$

де

$$Af(x) = i \int_0^x f(y) g(y) \overline{g(y)} dy, \quad 0 \leq x \leq l; \quad f(x) \in L_{[0,l]}^2; \quad g(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_r(x));$$

$$\int_0^l g(x) \overline{g(x)} dx = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ 0 & \omega_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \omega_r \end{pmatrix}; \quad \sum_{\alpha=1}^r |\theta_\alpha(x)|^2 \equiv 1, \quad (0 \leq x \leq l).$$

Введемо функцію $Z_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x' \leq x \leq x''; \\ 0, & x \notin [x', x''], \end{cases}$ де $\Delta = [x', x'']$ ($0 \leq x' \leq x'' \leq l$);

$$\langle Z_{\Delta_1}(x), Z_{\Delta_2}(x) \rangle = d \langle \Delta_1 \cap \Delta_2 \rangle,$$

де d – довжина інтервалу $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Тоді g_α та $f(x)$ як елементи гільбертового простору $L^2_{[0,l]}$ можна зобразити

$$\text{у вигляді } g_\alpha = \int_0^l \theta_\alpha(x) dZ_{[0,x]}, \quad f = \int_0^l f(x) dZ_{[0,x]}.$$

Рівняння відкритої системи, яка асоційована з комплексом, набуває вигляду:

$$f(n+1, x) - i \left(\int_0^x f(n, y) \sum_{\alpha=1}^r \overline{\theta_\alpha(y)} \theta_\alpha(x) dy \right) = -i \sum_{\alpha=1}^r u_\alpha(n) \theta_\alpha(x);$$

$$f(n, x)|_{n=0} = f_0(x);$$

$$v_\alpha(n) = u_\alpha(n) - i \int_0^l f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy;$$

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) \left[u_\alpha(n) - i \int_0^x f(n, y) \sum_{\alpha=1}^r \overline{\theta_\alpha(y)} dy \right].$$

Таким чином,

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) u_\alpha(n, x), \quad (3)$$

де

$$u_\alpha(n, x) = u_\alpha(n) - i \int_0^l f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy;$$

$$u_\alpha(n, x)|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{du_\alpha(n, x)}{dx} = -if(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Через те, що $\tilde{A} = UAU^{-1}$, де U – унітарний оператор, який відображує $L^2_{[0,l]}$ на H , та вважаючи $Z_x = U z_{[0,x]}$, отримуємо теорему.

Теорема 2. Для кожної послідовності $x_n = A^n x_0$ скінченного квазірангу, де A цілком несамоспряжений оператор зі спектром у нулі, існує спектральна міра z_x ($0 \leq x \leq l$) та множина функцій $\theta_\alpha(x)$ ($\alpha = \overline{1, r}$), яка задовольняє наступним умовам:

$$\langle \Delta_1 z, \Delta_2 z \rangle = d(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

де $\Delta_k z$ ($k = 1, 2$) – прирости z_k відповідно на інтервалах Δ_k ; $d(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ – довжина спільної частини інтервалів Δ_k ;

$$\sum_{\alpha=1}^r |\theta_\alpha(x)|^2 \equiv 1, \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$\int_0^l \theta_\alpha(x) \overline{\theta_\beta(x)} dx = \delta_{\alpha\beta},$$

а послідовність x_n можна зобразити у вигляді:

$$x_n = \int_0^l f(n, x) dz_x, \quad (4)$$

де функція $f(n, x)$ знаходиться із системи рівнянь (3).

Доведення. Через те, що $W(n, m) = i \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(n) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(m)} = i \sum_{\alpha=1}^r E_\alpha \varphi_\alpha(n) \overline{\varphi_\beta(m)}$, де $J_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$E_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \overline{1, p}; \\ -1, & \alpha = \overline{p+1, r} \end{cases}$ та $\varphi_\alpha(n) = \langle A^n x_0, \tilde{g}_\alpha \rangle_H = \int_0^l f(n, x) \overline{g_\alpha(x)} dx$, то в даному випадку

$$g_\alpha(x) = \theta_\alpha(x), \quad f(n, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) u_\alpha(n-1, x).$$

Поклавши $u_\alpha(n) = 0$ та $x = l$, отримуємо, що $\varphi_\alpha(n) = i u_\alpha(n-1, l)$,

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) u_\alpha(n, x);$$

$$u_\alpha(n, x) = u_\alpha(n) - i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy;$$

$$u_\alpha(n) \equiv 0, \quad f(n, y)|_{n=0} = f_0(y);$$

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} = -i f(n+1, x) \theta_\alpha(x);$$

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} = - \sum_{\beta=1}^r \theta_\beta(x) u_\beta(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Таким чином, $W(n, m)$ можна зобразити у вигляді

$$W(n, m) = i \sum_{\alpha=1}^r E_\alpha u_\alpha(l, n) \overline{u_\beta(l, m)},$$

де $u_\alpha(n, x)$ задовольняє наступній системі диференційних різницевих рівнянь:

$$\frac{du_\alpha(n+1, x)}{dx} + \sum_{\beta=1}^r \theta_\beta(x) u_\beta(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)} = 0;$$

$$u_\alpha(0, n) = 0;$$

$$u_\alpha(x, 0) = -i \int_0^x f_0(y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy,$$

а $f_0(x)$ – початковий елемент послідовності $f(n, x) = A^n f_0(x)$ в гільбертовому просторі $L^2_{[0, l]}$. Розв'язання цієї

системи дозволяє знайти функцію $f(n, x)$ в спектральному розкладі $x_n = \int_0^l f(n, x) dz_x$ за формулою:

$$f(n, x) = i \sum_{\alpha=1}^r \frac{du_\alpha(n, x)}{dx} \theta_\alpha(x).$$

Цю формулу легко отримати, використовуючи умову $\sum_{\alpha=1}^r |\theta_\alpha(x)|^2 = 1$ та рівняння

$$u_\alpha(n, x) = -i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy.$$

Перспективи подальших досліджень. Автор вважає, що використовуючи операцію зчеплення операторних комплексів та операторних систем, які асоційовані з операторними комплексами, можна отримати спектральні розклади загального вигляду (коли спектр нестационарної випадкової послідовності міститься на скінчен-

ному інтервалі дійсної осі, кожна точка якого є точкою спектра нескінченної кратності). Аналогічний підхід може бути використано при побудові дискретних випадкових полів, для яких відповідна послідовність в гільбертовому просторі має вигляд $x(n, p) = A_1^n A_2^p x_0$, де A_j – обмежені двічі переставні несамоспряжені оператори. Використовуючи спектральну теорію операторів [14], для $x(n, p)$ можна отримати зображення вигляду

$$x(n, p) = \int_D f(n, \lambda, p, \mu) \xi(d\lambda, d\mu),$$

де $\xi(\Delta_1, \Delta_2)$ – стандартна стохастична міра, яка визначена на прямокутниках $\Delta \subseteq D$, $D = [a, b] \times [c, d]$; $M \xi(\Delta_1, \Delta_2) = S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, де $S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ – площа прямокутників $(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Функція $f(n, \lambda, p, \mu)$ знаходиться з системи диференційно-різницевого рівнянь, яка аналогічна системі (4), а

$$A_1 f(u, v) = i \int_0^u f(\tau_1, v) d\tau_1, \quad A_2 f(u, v) = i \int_0^v f(u, \tau_2) d\tau_2.$$

У випадку, коли у дисипативних операторів A_1 та A_2 з дискретним спектром є спільний ланцюжок підпросторів, то для $x(n, p)$ можна отримати зображення вигляду:

$$x(n, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n, p) z_k(\omega),$$

де $z_k(\omega)$ – некорельовані випадкові величини, а $\psi_k(n, p)$ знаходяться з системи різницевого рівнянь вигляду (2).

Висновки. Таким чином, спектральна теорія несамоспряжених операторів дозволила для нестационарних випадкових послідовностей, які допускають операторні зображення, отримати спектральні розклади.

Ці зображення є аналогом спектральних розкладів стаціонарних випадкових послідовностей, які є суперпозицією станів дискретних осциляторів, амплітуди яких некорельовані між собою та пов'язані функціонально. В нестационарному випадку для дискретного спектра отримуємо суперпозицію внутрішніх станів дискретних осциляторів з частотами, які лежать у верхній півплощині, до того ж, як і в стаціонарному випадку, амплітуди некорельовані, але функціонально зв'язані рекурентним співвідношенням. Слід відзначити, що, крім того, з'являються принципово нові типи спектральних розкладів, коли послідовність зображується у вигляді суперпозиції внутрішніх станів дискретних струн.

Список літератури

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 654с.
2. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений // ДАН СССР. – 1940. – Т.26. – № 1. – С. 6–9.
3. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1940. – Т.26. – №2. – С. 115–118.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. I ч. – М.: Наука, 1965. – 640 с.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. I ч. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496с.
6. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608с.
7. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1. – М.: Мир, 1981. – 279с.
8. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 317с.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548с.
10. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. – М.: Наука, 1966. – 298с.
11. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287с.
12. Kuzhel A. Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996. – 267 p.
13. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 160с
14. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм.ССР. – 1979. – XII. – № 3. – С. 136–140.

References (transliterated)

1. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 654 p.
2. Kolmogorov A. N. *Krivyye v gil'bertovom prostranstve, invariantnyye po otnosheniyu k odnoparametricheskoy grupe dvizheniy* [Curves in Hilbert space invariant with respect to the one-parameter displacement group]. *DAN SSSR* [Repts of the Academy of Science of the USSR]. 1940, vol. 26, no. 1, pp. 6–9.
3. Kolmogorov A. N. *Spiral' Vinera i nekotoryye interesnyye krivyye v gil'bertovom prostranstve* [Wiener spiral and other interesting curves in Hilbert space]. *DAN SSSR* [Repts of the Academy of Science of the USSR]. 1940, vol. 26, no. 2, pp. 115–118.
4. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statisticheskaya gidrodinamika. I ch.* [Stochastic hydrodynamics. Part I]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 640 p.
5. Rytov S. M. *Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku. I ch. Sluchaynyye protsessy* [Introduction to the statistical radiophysics. Part I. Random pro-

- cesses]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 496 p.
6. Tikhonov V. I., Kharisov V. N. *Statisticheskiy analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i system* [Statistical analysis and synthesis of radio-technical devices and systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1991. 608 p.
 7. Isimaru A. *Rasprostraneniye i rasseyaniye voln v sluchayno-neodnorodnykh sredakh. T. 1* [Distribution and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. Vol. 1]. Moscow, Mir Publ., 1981. 279 p.
 8. Isimaru A. *Rasprostraneniye i rasseyaniye voln v sluchayno-neodnorodnykh sredakh. T. 2* [Distribution and scattering of waves in randomly inhomogeneous media. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1981. 317 p.
 9. Tatarskiy V. I. *Rasprostraneniye voln v turbulentnoy atmosfere* [Distribution of waves in turbulent atmosphere]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 548 p.
 10. Livshits M. S. *Operatory, kolebaniya, volny. Otkrytyye sistemy* [Operators, oscillations, waves. Open systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 298 p.
 11. Brodskiy M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavleniya lineynykh operatorov* [Triangular and Jordan representations of linear operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 287 p.
 12. Kuzhel' A. *Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators*. Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1996. 267 p.
 13. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Operator node theory in Hilbert spaces]. Khar'kov, Izd-vo KHGU Publ., 1971. 160 p.
 14. Zolotarev V. A. *O treugol'nykh modelyakh sistem dvazhdy perestanovochnykh operatorov* [On triangular models for system of twice commuting operator]. *DAN Arm. SSR* [Reports of the Academy of Science of Armenian SSR]. 1979, KhP, no. 3, pp. 136–140.

Надійшла (received) 26.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

УДК 519.217

Н. А. ЧИКИНА, И. В. АНТОНОВА

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрен нестандартный метод анализа и прогнозирования медико-социальных временных рядов – метод скрытых моделей Маркова (СММ). Приведены основные теоретические положения математического аппарата цепей Маркова и СММ, проанализированы ограничения применения метода прогнозирования на основе Марковской модели временного ряда, его преимущества и недостатки. Проверка на стационарность временных рядов проводилась с помощью расширенного теста Дики – Фуллера. Рассмотрена процедура построения скрытой Марковской модели ряда первых разностей и методика получения прогнозного значения. Построена 3×3 – модель СММ для первых разностей временного ряда. Скрытые состояния модели получены в результате процедуры кластерного анализа, построен алфавит для их идентификации.

Ключевые слова: прогнозирование, временной ряд, стохастические процессы, метод скрытых моделей Маркова, цепи Маркова, динамические байесовские сети.

Н. О. ЧИКИНА, І. В. АНТОНОВА

ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ПРИХОВАНИХ МОДЕЛЕЙ МАРКОВА

Розглянуто нестандартний метод аналізу і прогнозування медико-соціальних часових рядів – метод прихованих моделей Маркова (ПММ). Наведено основні теоретичні положення математичного апарату ланцюгів Маркова і ПММ, проаналізовані обмеження застосування методу прогнозування на основі Марківської моделі часового ряду, його переваги та недоліки. Перевірка на стаціонарність часових рядів проводилась за допомогою розширеного тесту Дики – Фуллера. Розглянута процедура побудови прихованої Марківської моделі ряду перших різниць і методика отримання прогнозного значення. Побудована 3×3 – модель ПММ для перших різниць часового ряду. Приховані стани моделі отримані в результаті застосування кластерного аналізу, побудований алфавіт для їх ідентифікації.

Ключові слова: прогнозування, часовий ряд, стохастичні процеси, метод прихованих моделей Маркова, ланцюги Маркова, динамічні байесовські мережі.

N. A. CHIKINA, I. V. ANTONOVA

TIME SERIES FORECASTING BY THE METHOD OF HIDDEN MARKOV MODELS

A non-standard method for analyzing and forecasting medical and social time series, namely the Hidden Markov Models method (HMM), is considered. The basic theoretical principles of mathematical apparatus of Markov chains and HMM are presented, the application limitations of forecasting method based on the Markov model of time series, its advantages and disadvantages are analyzed. The time series were tested for stationarity using the Augmented Dickey – Fuller test. The procedure of constructing the Hidden Markov Model for the time series of the first differences and the method for obtaining the predicted value are considered. A 3×3 – HMM model for the time series of the first differences is built. The hidden states of the model are obtained as a result of the Cluster Analysis procedure, an alphabet is constructed for their identification.

Key words: forecasting, time series, stochastic processes, the Hidden Markov Models method, Markov chains, dynamic Bayesian networks.

© Н. А. Чикина, И. В. Антонова, 2019

Введение. *Временной ряд* $\{x_n\}$ можно рассматривать как последовательность регистрируемых сигналов, которые порождаются некоторым случайным процессом. Измерения x_n ($n = 1, 2, \dots, N$), как правило, подвержены шуму, который затрудняет описание процесса, не позволяет получить достоверную информацию об источнике сигналов. Для таких *стохастических процессов* не существует точных математических моделей, что значительно затрудняет анализ и прогнозирование соответствующих временных рядов. Универсальным аппаратом описания подобного рода стохастических процессов является *математический аппарат скрытых моделей Маркова* (СММ). СММ близки к хорошо известным *цепям Маркова*. Модели на базе цепей Маркова относятся к *структурным моделям*, в которых зависимость будущего от прошлого задается в виде некоторой структуры и правил перехода по ней.

Отличие этих двух теорий состоит в том, что СММ рассматривают изучаемый случайный процесс как смесь неизвестных фактических состояний некоторой системы Ω , а значения x_n ($n = 1, 2, \dots, N$) временного ряда как ее выходные значения.

Анализ последних исследований. Наиболее широкое применение СММ нашли при распознавании речи и анализе изображений [1 – 3]. Однако есть и ряд публикаций, в которых моделируются финансовые ряды с целью построения решающих правил торговли на финансовых рынках [4 – 5].

В настоящих исследованиях аппарат СММ рассматривается применительно к анализу и прогнозированию *медико-социальных временных рядов*. Медико-социальные ряды отличаются от финансовых не только количеством измерений, но и частотой измерений в единицу времени, что делает медико-социальные ряды существенно инерционными.

Теория СММ не является новой. Первые публикации по этой теме появились еще в 60 – 70-х годах прошлого века. Но тогда широкого развития эта теория не получила ввиду сложности вычислительной части исследований. Поэтому практические аспекты применения метода СММ к прогнозированию временных рядов проработаны недостаточно.

В настоящее время развивается новый подход к моделированию временных рядов, учитывающий структуру корреляции данных. Это динамические байесовские сети [6 – 7], которые применительно к задаче прогнозирования временных рядов выступают в форме СММ.

Учитывая сказанное выше, актуальной задачей является разработка основ моделирования с целью прогнозирования медико-социальных временных рядов с использованием математического аппарата СММ.

Постановка задачи. Рассмотрим некоторую динамическую систему Ω , которая в произвольный момент времени t может находиться в одном из возможных состояний S_1, S_2, \dots, S_N . В дискретные моменты времени система меняет состояние (возможно, переходя в то же состояние). В этом случае соответствующий случайный процесс представляет собой последовательность событий вида $\{S(t) = S_i\}$ ($i = \overline{1, N}, t = 1, 2, \dots$) (в момент времени t система находится в состоянии S_i). Переходы из состояния в состояние происходят под действием случайных факторов. Известно, что в природе не существует абсолютно не случайных (*детерминированных*) процессов. При этом случайность может доминировать, а может быть такой, которой можно пренебречь. Состояния системы S_i ($i = \overline{1, N}$) в случае одномерного временного ряда характеризуются одним числом. Наиболее важной характеристикой этой цепи событий являются вероятности состояний системы: $p_i(t) = P\{S(t) = S_i\}$. Распределение этих вероятностей – *одномерный закон распределения случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем*. Такой процесс называется Марковской цепью [8].

Полное вероятностное описание системы Ω предполагает задание текущего состояния $S(t)$ и всех предыдущих. В случае Марковского случайного процесса вероятность каждого из состояний $S(t+1)$ системы в будущем зависит лишь от ее состояния $S(t)$ в настоящем, и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние. Другими словами, вероятностное описание такой системы требует знания текущего и предыдущего состояний системы, то есть сводится к виду:

$$P\{S(t+1) = S_j | S(t) = S_i, S(t-1) = S_k, \dots\} = P\{S(t+1) = S_j | S(t) = S_i\}. \quad (1)$$

Далее рассмотрим процессы, при которых правая часть равенства (1) не зависит от t , то есть не зависят от t вероятности перехода (переходные вероятности) из состояния S_i в состояние S_j :

$$a_{ij} = P\{S(t+1) = S_j | S(t) = S_i\}, \quad (2)$$

при этом $a_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^M a_{ij} = 1$. В этом случае цепи Маркова называются *однородными*. Принципиальным в наших исследованиях является наличие стационарного режима в цепи Маркова, то есть такого ее состояния, при котором система Ω продолжает переходить из состояния S_i в состояние S_j , но вероятности этих состояний не за-

висят от t : $p_i(t) = p_i$. Для существования стационарного режима в цепи Маркова ее однородность является необходимым условием.

В случае стационарного режима в однородной Марковской цепи достаточно просто решаются задачи прогнозирования возможных состояний системы Ω в таких формулировках:

– какова вероятность того, что в следующие k дней последовательность смены состояний будет иметь заранее заданный вид?

– какова вероятность того, что система останется в состоянии S_i k дней?

– каково наиболее вероятное число повторений одного и того же состояния в течении k дней и др.

В случае временного ряда $\{x_n\}$, $n = \overline{1, N}$, зададим $\{x(t) = S_i\}$ ($i, t = \overline{1, N}$) как состояние S_i системы Ω в момент времени t . При этом равенство (2) для переходных вероятностей примет вид:

$$a_{ij} = P\{x(t+1) = S_j | x(t) = S_i\}. \quad (3)$$

В основе построения СММ временного ряда лежит основной принцип теории цепей Маркова, но при условии, что фактические (скрытые) состояния Q_i ($i = \overline{1, K}$) системы Ω и их количество не известны, а имеются лишь выходные данные x_n ($n = \overline{1, N}$). Скрытая Марковская цепь также представляет собой некоторую последовательность состояний Q_i ($i = \overline{1, K}$) в дискретные моменты времени. Переход из состояния Q_i в состояние Q_j происходит также случайно с вероятностью a_{ij} (3).

Математическая модель. В случае временного ряда $\{x_n\}$, $n = \overline{1, N}$, построение СММ с целью прогноза его состояний требует задания таких элементов модели [9]:

1. K – количество состояний системы в модели; $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_K\}$ – множество состояний; q_t – состояние системы в момент времени t , $t = \overline{1, N}$.
2. M – количество символов алфавита наблюдаемой последовательности состояний; $V = \{V_1, V_2, \dots, V_M\}$ – алфавит возможных символов.
3. $A = \|a_{ij}\|$ – матрица вероятностей перехода, где $a_{ij} = P\{q_{t+1} = Q_j | q_t = Q_i\}$ ($i, j = \overline{1, K}$, $t = \overline{1, N}$).
4. $B = \|b_i(m)\|$ – матрица вероятностей появления символов V_m ($m = \overline{1, M}$) алфавита V в состоянии Q_i ($i = \overline{1, K}$), то есть $b_i(m) = P\{V_m | q_t = Q_i\}$ – вероятность того, что система, находящаяся в состоянии Q_i в момент времени t , выдаст символ V_m .
5. $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K\}$ – распределение вероятностей начального состояния, где $\pi_i = P\{q_1 = Q_i\}$, то есть π_i – вероятность того, что в начальный момент времени ($t=1$) система находилась в состоянии Q_i ($i = \overline{1, K}$).

Совокупность введенных в пп. 1 – 5 величин (N , K , A , B , π) определяет СММ.

Результаты исследований. В настоящих исследованиях построение СММ выполнялось для временного ряда, впервые рассмотренного авторами в работе [10].

Проверка на стационарность этого ряда дала отрицательный результат. Расчеты были выполнены в среде пакета «Gretl» – *кросс-платформенного программного пакета для эконометрического анализа* [11]. Пакет «Gretl» является программным обеспечением специализированной библиотеки, в которой реализованы численные методы для анализа данных, в том числе, анализа временных рядов.

Проверку на стационарность проводили с помощью *расширенного теста Дики – Фуллера (ADF-теста)* с константой без тренда, или так называемого теста на единичный корень, основанного на оценке значения t – критерия Стьюдента для параметра $(a_1 - 1)$ в уравнении авторегрессионной модели с распределенным лагом [12]:

$$\Delta x_t = a_0 + (a_1 - 1)x_{t-1} + \sum_{i=1}^k a_{i+1}\Delta x_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где a_i ($i = \overline{0, k}$) – коэффициенты модели, Δx_{t-i} ($i = \overline{0, k}$) – первые разности, k – порядок авторегрессионной модели, ε_t – белый шум. Наличие в модели первых разностей Δx_{t-i} , то есть слагаемых, учитывающих значение переменной в предыдущие моменты времени, позволяет тестировать наличие единичного корня в моделях выше первого порядка (в отличие от стандартного теста Дики – Фуллера).

По результатам теста для исходного временного ряда нулевая гипотеза о наличии единичного корня не отвергается, поскольку полученный уровень значимости $p = 0,2562 > 0,05$. Следовательно, ряд не является стационарным. В случае временного ряда первых разностей $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$, $t = \overline{1, N-1}$, оказалось, что гипотеза о наличии единичного корня отвергается, поскольку полученный уровень значимости $p = 0,001013 < 0,05$, что позволяет сделать вывод о стационарности ряда первых разностей. Поэтому построение СММ проводилось для временного ряда первых разностей

$$\{\Delta x_n\}, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (4)$$

На рис. 1 приведены графики исходного временного ряда и ряда (4) его первых разностей.

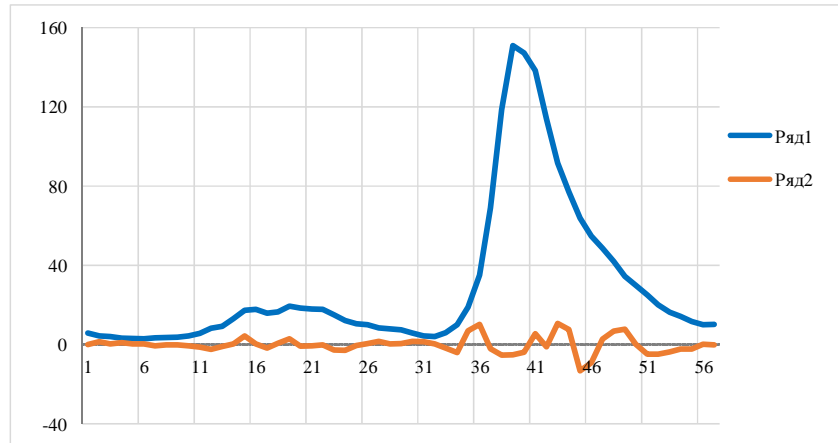


Рис. 1 – Ряд 1 – исходный ряд $\{x_n\}$, $n = \overline{1, N}$, ряд 2 – ряд первых разностей $\{\Delta x_n\}$, $n = \overline{1, N-1}$.

Для определения скрытых Q_i ($i = \overline{1, K}$) состояний модели Маркова временного ряда (4) первых разностей наблюдаемой последовательности состояний был проведен *кластерный анализ значений* этого ряда.

Кластерный анализ проводился на основе иерархической процедуры (*Hierarchical Cluster Analysis*), в которой в качестве методов объединения в кластеры элементов Δx_n временного ряда (4) применялся метод *Between-groups linkage* (все вычисления проводились с помощью ППП SPSS version 23).

Для выбора оптимального числа кластеров была проведена процедура кластеризации по методу *K-Means Cluster Analysis*. Как определить оптимальное число кластеров? Очевидно, при уменьшении числа кластеров увеличивается расстояние внутри кластеров, а, значит, и усредненное внутрикластерное расстояние. Этот показатель делает резкий скачок при переходе от 3-кластерной структуры к 2-кластерной, что говорит в пользу 3-кластерной структуры данных.

Аналогичный результат можно получить при изучении динамики показателя «Coefficients» в процедуре *Hierarchical Cluster Analysis* (ППП SPSS version 23). Для определения оптимального числа кластеров воспользуемся критерием оптимальности, в соответствии с которым на шаге процедуры, где мера расстояния между кластерами увеличивается скачкообразно, процесс объединения в новые кластеры следует остановить, поскольку на следующем шаге были бы объединены кластеры, находящиеся на относительно большем расстоянии друг от друга. В нашем случае этот скачок произошел на шаге 53. Так как $N-1 = 56$, то оптимальное число кластеров, а, значит, и фактических (скрытых) состояний Q_i ($i = \overline{1, K}$) в модели Маркова временного ряда (4) $K = 3$.

На рис. 2 схематично показана суть метода СММ, когда каждому скрытому состоянию Q_i соответствует множество X_i реализаций Δx_n ($n = \overline{1, N_i}$, $i = 1, 2, 3$) временного ряда (4). При этом очевидно,

$$N_1 + N_2 + N_3 = N-1.$$

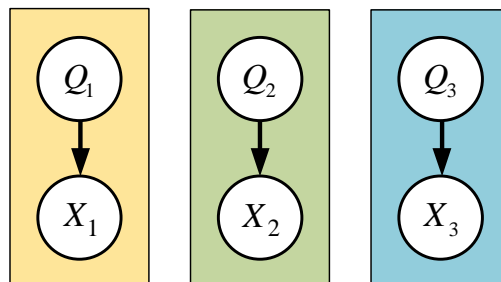


Рис. 2 – Обобщенная схема СММ для случая трех скрытых состояний.

В таблице приведены основные результаты кластерного анализа.

Таблица – Характеристики кластеров ($K = 3$)

Кластер	Количество элементов в кластере	Центр кластера	Расстояния между кластерами, d_{ij}
1	46	-0,90	$d_{12} = 8,32$
2	8	7,42	$d_{13} = 10,30$
3	2	-11,20	$d_{23} = 18,62$

Анализ графика временного ряда первых разностей, построенного по результатам кластерного анализа (представлен на рис. 3), дает возможность остановиться на построении 3×3 – модели СММ, где количество символов алфавита V также равно 3, то есть $V = \{V_1, V_2, V_3\}$. Для создания алфавита V в случае трех скрытых состояний системы воспользуемся следующей традиционной терминологией:

V_1 – «флэт», V_2 – «рост», V_3 – «падение».

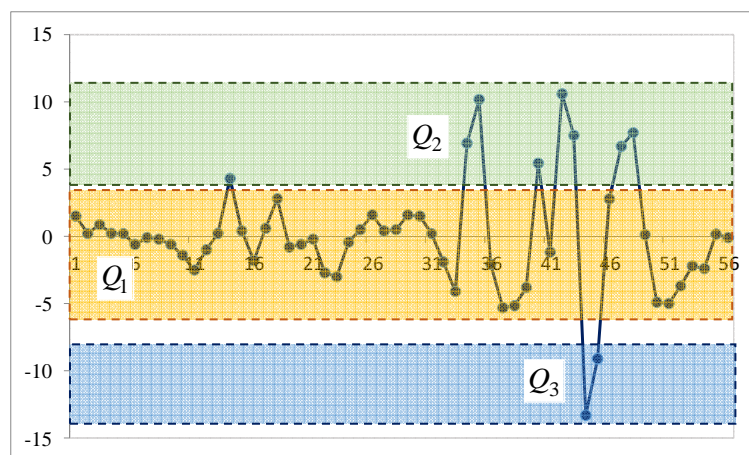


Рис. 3 – Результаты кластерного анализа временного ряда первых разностей.

Для определения начального распределения связей между состояниями Q_i ($i = 1, 2, 3$) модели цепи Маркова примем гипотезу о зависимости возможностей переходов между состояниями модели от соответствующих расстояний между ними. Используя данные об евклидовых расстояниях между центрами кластеров в таблице, определим возможности переходов между состояниями и их направления:

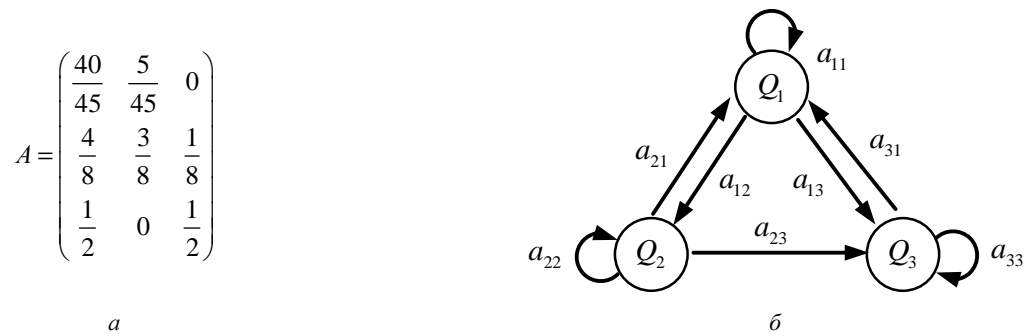
Шаг 1. Устанавливаем возможность перехода для пары состояний, если их центры находятся на минимальном расстоянии или превышают его не более чем на заданный процент. На практике обычно выбирают 50 %-й порог.

Шаг 2. Направление переходов между состояниями определяется в соответствии с близостью к начальному состоянию Q_1 : переход $Q_i \rightarrow Q_j$ возможен, если число переходов $Q_1 \rightarrow Q_j$ больше числа переходов $Q_1 \rightarrow Q_i$. Если направление не определяется однозначно, то допускаются оба варианта направления: $Q_i \rightleftharpoons Q_j$.

Следует заметить, что в построенной по таким правилам модели цепи Маркова допускаются *косвенные и статистически незначимые связи*. Поэтому следует провести уточнение схемы, например, с использованием *статистики Пирсона* [13].

Наличие начального распределения связей дает возможность для скрытых состояний Q_i ($i = 1, 2, 3$) составить матрицу переходных вероятностей $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = P\{q_{t+1} = Q_j | q_t = Q_i\}$, ($t = \overline{1, N}$, $i, j = 1, 2, 3$); q_t – состояние системы в момент времени t . Матрица $A = \|a_{ij}\|$ и граф модели Маркова представлены на рис. 4. Распределение вероятностей начального состояния – $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ – в случае ряда (4) имеет вид: $\pi = \{1, 0, 0\}$.

Построение алфавита V проведем по результатам кластерного анализа, который дает возможность сформировать матрицу $B = \|b_i(m)\|$ вероятностей появления символов V_m ($m = 1, 2, 3$) алфавита V в состоянии Q_i ($i = 1, 2, 3$). В нашем случае (СММ 3×3) это будет единичная матрица.

Рис. 4 – a – матрица переходных вероятностей; b – граф скрытой модели Маркова.

Построенная СММ для ряда (4) первых разностей опирается на два предположения, обусловленные стационарностью этого ряда. Во-первых, текущее состояние модели q_t зависит лишь от предыдущего состояния q_{t-1} . И, во-вторых, вероятность появления некоторого наблюдения $o(t+1)$ в следующий момент времени зависит только от текущего состояния системы q_t и не зависит от предыдущих состояний.

Из рис. 3 видно, что $q_t = q_{56} = Q_1$. Тогда наиболее вероятным состоянием $o(t+1)$ системы будет такой прогнозный результат:

$$a_{11} = P\{q_{57} = Q_1 | q_{56} = Q_1\} = \frac{8}{9}.$$

Вероятность наблюдения цепочки состояний: $O : Q_1 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$ вычисляется таким образом:

$$p(O) = P\{q_{59} = Q_2 | q_{58} = Q_1, q_{57} = Q_1\} = \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{64}{729} \approx 0,088.$$

Выводы. Рассматривалась возможность построения скрытой модели Маркова и прогнозирования состояний медико-социальных систем по соответствующим временным рядам. Для ряда первых разностей построена 3×3 – модель СММ с тремя фактическими (скрытыми) состояниями и алфавитом V размерности 3. Определены способы и формулы для прогнозирования состояния системы в будущем при условии стационарности соответствующего временного ряда.

Список литературы

1. Рабинер Л. Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях : Обзор // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – Москва : Мир, 1989. – Т.77. – №2. – С. 86 – 120.
2. Volger C., Metaxas D. Parallel hidden Markov models for American Sign Language recognition // Proc. 7th International Conference on Computer Vision. – 1999. – pp. 116 – 122. DOI: 10.1109/ICCV.1999.791206.
3. Гультаева Т. А., Попов А. А. Классификация последовательностей с использованием скрытых марковских моделей в условиях неточного задания их структуры // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – Томск : Изд-во ТГУ, 2013. – № 3 (24). – С. 57 – 63.
4. Bhar R., Hamori S. Hidden Markov Models. Applications to financial economic. – New-York : Springer, 2004. – 178 p.
5. Соколов Е. В., Бородин Д. В. Модели прогнозирования цен акций с применением функций Уолша и марковских цепей // Прикладная информатика. – 2010. – № 5 (29). – С. 3 – 12.
6. Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети, логико-вероятностный подход. – СПб.: Наука, 2006. – 728 с.
7. Langseth H., Portinale L. Bayesian networks in reliability // Reliability Engineering and System Safety. – 2007. – vol. 92. – No. 1. – pp. 92 – 108. DOI: 10.1016/j.ress.2005.11.037.
8. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. – Москва : МЦНМО, 2009. – 590 с.
9. Rabiner L. R. A Tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in speech recognition // Proc. IEEE. – 1989. – vol. 77. – No. 2. – pp. 257 – 286. DOI: 10.1109/5.18626.
10. Антонова И. В., Чикина Н. А. Применение методов фрактального анализа к исследованию временных рядов // Вестник НТУ «ХПИ». Серия : Информатика и моделирование. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2015. – № 32 (1141). – С. 4 – 10.
11. Gretl. Библиотека GNU для регрессий, эконометрики и временных рядов. – Режим доступа : <http://gretl.sourceforge.net>. – Дата звертання : 15 жовтня 2019.
12. Dickey David. A., Wayne A. Fuller. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root // Journal of the American Statistical Association. – 1979. – Vol. 74. – No. 366. – pp. 427 – 431.
13. Bishop Y. M. M., Fienberg S. E., Holland P. W. Discrete multivariate analysis : Theory and practice. – Cambridge, MA : M.I.T. Press, 1975. – 557 p.

References (transliterated)

1. Rabiner L. Skrytye markovskie modeli i ikh primenenie v izbrannykh prilozheniyakh : Obzor [Hidden Markov Models and their selected applications : survey]. *Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike* [Proceedings of the Institute of Engineers in electrical engineering and radio electronics]. Moscow, Mir Publ, 1989, vol. 77, no. 2, pp. 86–120.
2. Volger C., Metaxas D. Parallel hidden Markov models for American Sign Language recognition. *Proc. 7th International Conference on Computer Vision*. 1999, pp. 116–122. DOI: 10.1109/ICCV.1999.791206.

3. Gulyaeva T. A., Popov A. A. Klassifikatsiya posledovatel'nostey s ispol'zovaniem skrytykh markovskikh modeley v usloviyakh netochnogo zadaniya ikh struktury [Classification of sequences using Hidden Markov Models in the conditions of rough specification of their structure]. *Vestnik TGU. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Bulletin of the Tomsk State University. Management, computer engineering, and informatics]. Tomsk, Izd-vo TGU Publ., 2013, no. 3 (24), pp. 57–63.
4. Bhar R., Hamori S. *Hidden Markov Models. Applications to financial economic*. New-York, Springer, 2004. 178 p.
5. Sokolov E. V., Borodin D. V. Modeli prognozirovaniya tsen aktsiy s primeneniem funktsiy Uolsha i markovskikh tsepey [Models for predicting share prices using Walsh functions and Markov chains]. *Prikladnaya informatika* [Applied informatics]. 2010, no. 5 (29), pp. 3–12.
6. Tulup'ev A. L., Nikolenko S. I., Sirotkin A. V. *Bayesovskie seti, logiko-veroyatnostnyy podkhod* [Bayesian networks, logical and probabilistic approach]. Sankt-Peterburg, Nauka Publ., 2006. 728 p.
7. Langseth H., Portinale L. Bayesian networks in reliability. *Reliability Engineering and System Safety*. 2007, vol. 92, no. 1, pp. 92–108. DOI: 10.1016/j.res.2005.11.037.
8. Kel'bert M. Ya., Sukhov Yu. M. *Veroyatnost' i statistika v primerakh i zadachakh. T. 2. Markovskie tsepi kak otpravnyaya tochka teorii sluchaynykh protsessov i ikh prilozheniya* [Probability and statistics in examples and problems. V. 2. Markov chains as a starting point of the theory of random processes and their applications]. Moscow, MTsNMO Publ., 2009. 590 p.
9. Rabiner L. R. A Tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in speech recognition. *Proc. IEEE*. 1989, vol. 77, no. 2, pp. 257–286. DOI: 10.1109/5.18626.
10. Antonova I. V., Chikina N. A. Primenenie metodov fraktalnogo analiza k issledovaniyu vremennykh ryadov [Applications of fractal analysis methods to studying time series]. *Vestnik NTU «KhPI». Seriya : Informatika i modelirovanie* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Informatics and modeling]. Kharkov, NTU «KhPI», 2015, no. 32 (1141), pp. 4–10.
11. Gretl. Biblioteka GNU dlya regressiy, ekonometriki i vremennykh ryadov [Gretl. GNU library for regressions, econometrics, and time series]. Available at : <http://gretl.sourceforge.net>. (accessed 15.10.2019).
12. Dickey David. A., Wayne A. Fuller. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*. 1979, vol. 74, no. 366, pp. 427–431.
13. Bishop Y. M. M., Fienberg S. E., Holland P. W. *Discrete multivariate analysis : Theory and practice*. Cambridge, MA : M.I.T. Press, 1975. 557 p.

Поступила (received) 26.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Чікіна Наталія Олександрівна (Чикина Наталия Александровна, Chikina Natalia Aleksandrovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-93; e-mail: nachikina56@gmail.com.

Антонова Ірина Володимирівна (Антонова Ирина Владимировна, Antonova Iryna Vladimirovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-98-33; e-mail: antonova2601@gmail.com.

ЗМІСТ

<i>Андренко П. М., Ємельянова І. А., Субота Д. Ю.</i> Методологічні основи визначення надійності роботи гідравлічного привода на стадії проектування універсальних технологічних комплектів малогабаритного обладнання для безопалубного бетонування.....	3
<i>Батыгин Ю. В., Шиндерук С. А., Чаплыгин Е. А., Ерёмин Е. Ф., Безродная А. В.</i> Плоский круговой соле-ноид между массивными бифилярными катушками. Расчётные соотношения	9
<i>Воропай А. В.</i> Управление нестационарными колебаниями пластины с присоединённой сосредоточенной массой. Активная виброзащита.....	16
<i>Димитрова-Бурлаенко С. Д.</i> Критерий сохранения почти периодичности второй производной от почти пе-риодической функции	23
<i>Kozhushko A. P., Grigoriev A. L., Kalchenko B. I.</i> Mathematical modeling of free liquid surface motion in trans- porting agricultural semitrailer tanks.....	30
<i>Кухтенков Ю. М., Крупа С. С.</i> До питання проектування проточної частини комплексного гідротрансфор- матора	38
<i>Набока Е. А., Григорьев А. Л.</i> Уточненные уравнения синфазных упругих колебаний активной механиче- ской среды.....	44
<i>Oleksenko V. M.</i> Task solving as the basis of mathematical preparation of future engineers	57
<i>Ольшанський В. П.</i> Наближений розв'язок інтегрального рівняння удару тіл з сингулярною точкою на по- верхні контакту.....	62
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Про обмежену тривалість вільних коливань осцилятора з нелінійно в'язким опором	68
<i>Pershyna I. I., Tokmakova I. A.</i> Optimal choice of planes for placing tomograms in computed tomography	75
<i>Плакцій Ю. А., Гомозкова І. О.</i> Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній ета- лонній моделі обертання твердого тіла	81
<i>Polyanskaya T. S., Naboka O. O.</i> Numerical solution of a singular integral equation with the Hilbert kernel by the method of discrete singularities.....	89
<i>Полянський В. И.</i> Технологические закономерности снижения энергоёмкости при механической обработке деталей машин	95
<i>Тарасенко А. П., Трохимчук С. Н.</i> Теоретические предпосылки полинормализации изображений множества однотипных объектов.....	101
<i>Удовенко В. А., Гладышев А. И.</i> Моделирование на пилотажном стенде полёта лёгкого вертолёта в спутном следе другого вертолёта.....	108
<i>Черемська Н. В.</i> Спектральний розклад одного класу нестационарних випадкових послідовностей	116
<i>Чикина Н. А., Антонова И. В.</i> Прогнозирование временных рядов методом скрытых Марковских моделей ...	122

CONTENTS

<i>Andrenko P. M., Emelyanova I. A., Subota D. YU.</i> Methodological bases for determining the reliability of hydraulic drive operation at the stage of designing universal technological kits of small-sized equipment for the off-formwork concreting.....	3
<i>Batygin YU. V., Shynderuk S. A., Chaplygin E. A., Yeryomina E. F., Bezridna A. V.</i> Flat circular solenoid between massive bifilar coils. Estimated ratios	9
<i>Voropay A. V.</i> Controlling nonstationary vibrations of a plate with attached concentrated mass. Active vibration protection.....	16
<i>Dimitrova-Burlayenko S. D.</i> Criterion for preserving almost periodicity of the second derivative of an almost periodic function	23
<i>Kozhushko A. P., Grigoriev A. L., Kalchenko B. I.</i> Mathematical modeling of free liquid surface motion in transporting agricultural semitrailer tanks	30
<i>Kukhtenkov YU. M., Krupa E. S.</i> To the question of the design of the flow part of an integrated torque converter.....	38
<i>Naboka O. O., Grigoriev A. L.</i> Specified equations of in-phase elastic vibrations of active mechanical medium	44
<i>Oleksenko V. M.</i> Task solving as the basis of mathematical preparation of future engineers	57
<i>Olshanskiy V. P.</i> Approximate solution of the integral equation of body shock with a singular point on the surface of the contact.....	62
<i>Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V.</i> On limited duration of oscillations of free oscillator with nonlinear viscous resistance.....	68
<i>Pershyna I. I., Tokmakova I. A.</i> Optimal choice of planes for placing tomograms in computed tomography.....	75
<i>Plaksey YU. A., Homozkova I. A.</i> The error analysis of R. Miller orientation algorithm on a four-frequency reference model of a rigid body rotation	81
<i>Polyanskaya T. S., Naboka O. O.</i> Numerical solution of a singular integral equation with the Hilbert kernel by the method of discrete singularities	89
<i>Polyansky V. I.</i> Technological regularities of reduced energy capacity in the mechanical treatment of machine details.....	95
<i>Tarasenko A. P., Trokhymchuk S. M.</i> Theoretical preconditions of polynormalization of images of set of same type objects	101
<i>Udovenko V. A., Gladyshev A. I.</i> Piloted simulation of the flight of the light helicopter in the wake of another helicopter	108
<i>Cheremskaya N. V.</i> Spectral expansion for a class of non-stationary random sequences	116
<i>Chikina N. A., Antonova I. V.</i> Time series forecasting by the method of Hidden Markov Models	122

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХП».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 22 (1347) 2019

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

Відповідальний за випуск Костякова Е. В.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХП».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид. № 14-19.

Підп. до друку 18.11.2019 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк.
8,75. Тираж 100 пр. Зам. № 200334. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вил Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ.

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях

- Внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.;
- У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включено у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**;
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний об'єм статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний об'єм** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може перевершувати 3-ох осіб. В номері збірника не може міститися більше 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані версії журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронний варіант відразу ж після опублікування стає доступний на сайтах: Серії Вісника, Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та бібліотеки національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt/>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Тел. +38-057-707-60-35