

ISSN 2078-9130



ВІСНИК

Національного технічного університету «ХПІ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 1'2019

Харків
2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCES OF UKRAINE

National technical university
"Kharkiv polytechnic institute"

ВІСНИК

**Національного
технічного університету «ХПІ»
Серія: Динаміка і міцність
машин**

№ 1 2019

Збірник наукових праць
Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2019

BULLETIN

**of the National
Technical University "KhPI"
Series: Dynamics and Strength of
Machines**

No. 1 2019

Collection of Scientific papers
The edition was founded in 1961

Kharkiv
NTU "KhPI", 2019

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2019. № 1. 65 с. ISSN 2078-9130

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок, виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 23779-13619Р від 14 лютого 2019 року

Засновник видання Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Мова статей – українська, російська, англійська.

Web-сайт (web-сторінка) наукового видання – <http://jdsd.khpi.edu.ua/>

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

З 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

З 2014 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у індекс Копернікус; індекс ICV (Index Copernicus Value)

З 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в електронну бібліотеку The Vernadsky National Library of Ukraine

З 2001 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в Електронну бібліотеку науково-технічної бібліотеки НТУ «ХПІ»

З 2001 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин» входить в Електронна бібліотека Institutional Repository (eNTUKhPIIR)

Головний редактор

Морачковський О. К., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Morachkovskii, O.K.)

Редакційна колегія

Аврамов К.В., д-р техн. наук, професор, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Avramov, K.V.)

Альтенбах Х., д-р техн. наук, професор, Магдебургський університет імені Отто фон Гюріке, Німеччина (Altenbach, H., Prof.Dr.-Ing.habil. Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Барканов С.М., д-р інж. наук, професор, Інститут матеріалів і конструкцій, Ризький технічний університет, Латвія (Barkanov, E.N.)

Бреславський Д.В., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Breslavsky, D.V.)

Воробйов Ю.С., д-р техн. наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків, Україна (Vorobiov, Yu.S.)

Зінковський А.П., д-р техн. наук, професор, Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України, Київ, Україна (Zinkovskii, A.P.)

Курпа Л.В., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Kurpa, L.V.)

Ларін О.О., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Larin, O.O.)

Львов Г.І., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Lvov, G.I.)

Мартиненко Г.Ю., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Martynenko, G. Yu.)

Міхлін Ю.В., д-р фіз.-мат. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Mikhlin, Yu.V.)

Науменко К., д-р техн. наук, професор, Магдебургський університет імені Отто фон Гюріке, Німеччина (Naumenko, K., Prof.Dr.-Ing.habil. Institut für Mechanik (IFME), Magdeburg, Germany)

Пеллікано Ф., д-р механіки, професор, Університет Модени, Італія (Pellicano, F., Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italy)

Ткачук М.А., д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ», Харків, Україна (Tkachuk, M.V.)

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 09 від 01 листопада 2019 р.

X. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСЬКИЙ, В. КОНКІН

**ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ
У ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ**

У статті поставлено проблему зв'язаного аналізу розподілу електромагнітного та теплового поля, а також напружено-деформованого стану електропровідного тіла. Наведено відповідні функціонали, стаціонарність яких забезпечує знаходження розв'язку. Надані у загальному вигляді системи визначальних рівнянь.

Ключові слова: напружено-деформований стан, варіаційна постановка задачі, метод скінчених елементів, електромагнітне поле, теплове поле, електромагнітні сили.

X. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСКИЙ, В. КОНКИН

**ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

В статье поставлена проблема связанного анализа распределения электромагнитного и теплового поля, а также напряженно-деформированного состояния электропроводного тела. Приведены соответствующие функционалы, стационарность которых обеспечивает нахождение решения. Представлены в общем виде системы разрешающих уравнений.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, вариационная постановка задачи, метод конечных элементов, электромагнитное поле, тепловое поле, электромагнитные силы.

H. ALTENBACH, K. NAUMENKO, D. LAVINSKY, V. KONKIN

**VARIATIONAL FORMULATION OF THE THERMAL DEFORMATION PROBLEMS
OF ELECTRICALLY CONDUCTIVE BODIES IN AN ELECTROMAGNETIC FIELD**

The paper discusses issues concerning the thermal deformation of electrically conductive bodies under the action of the electromagnetic field. Similar problems arise, for example, in the analysis of induction heating processes. Transient electromagnetic field leads to heat release in electrically conductive bodies, and the change in temperature fields leads to a change of stress-strain state of a body. The creation of methods for the quantitative analysis of the stress-strain state of bodies under the action of an electromagnetic field is an urgent scientific problem because such an analysis allows us to evaluate the performance and durability of various structural elements. The modern approach dictates the need to consider three related problems: the problem of spatio-temporal distribution analysis of the electromagnetic field, transient heat-transfer problem and the problem of stress-strain analysis. The analysis of real technical and technological systems can only be done using appropriate numerical methods. In this case, the most universal is the finite element method, which has proven itself both in the analysis of the deformable bodies mechanics and in the analysis of various multiphysical problems. The usage of the finite element method requires an appropriate mathematical formulation of the problem. The mathematical problem formulation in variational form is considered in this article. Examples of corresponding functionals that allow finding solutions to a problem by finite element method are presented in the article. The functionals describing the transient distribution of the electromagnetic field are constructed based on the using of the concept of scalar electric and vector magnetic potentials. The influence of the electromagnetic field on the temperature distribution and the deformation process is taken into account by introducing distributed heat sources and distributed electromagnetic forces. The operation of varying the solution functions – potentials, temperature and displacements – makes it possible to obtain a system of resolving algebraic equations of the finite element method.

Key words: stress-strain state, variational problem formulation, finite element method, electromagnetic field, temperature field, electromagnetic forming.

Вступ. Енергія електромагнітного поля (ЕМП) використовується у багатьох галузях промисловості. Дія ЕМП на електропровідне тіло проявляється у виникненні розподілених електромагнітних сил та розподілених джерел тепловиділення (як наслідок закон Джоуля-Ленца про тепловиділення при протіканні електричного струму), які призводять до змін у тепловому полі тіла. За деяких умов тепловиділення є достатньо інтенсивним, що призводить до значного зростання температури, яке може бути використане у технологічних цілях. Увесь великий клас операцій, заснованих на нагріванні заготовок за допомогою зовнішнього ЕМП прийнято називати індукційний нагрів

[1-3]. Також спільним при подібних операціях є наявність індуктора (джерела ЕМП) та електропровідної заготовки, де збуджуються вихрові струми та відбувається тепловиділення. Індукційний нагрів може проводитись із метою зниження рівня залишкових напружень, впливу на механічні властивості (наприклад, для зменшення межі текучості та модуля пружності), також він використовується у багатьох технологічно-ремонтних операціях. Індукційний нагрів може проводитись за допомогою різних типів індукторів: плоскі одно- та багатовиткові, циліндричні та ін. Так само здійснюється вплив на різноманітні типи заготовок, плоскі, тонкі, об'ємні. Забезпечення довговічності та

працездатності технологічного оснащення систем індукційного нагріву неможливе без вивчення закономірностей розподілу ЕМП, теплового поля, а також полів напружень та деформацій. Таке вивчення повинне базуватись на результатах кількісного аналізу відповідних процесів, тому створення ефективних розрахункових методів кількісного аналізу ЕМП, теплового поля, а також напружено-деформованого стану (НДС) є актуальною задачею у науковому та практичному сенсі.

Математична реалізація. У роботах [4-6] надано повну математичну постановку задач аналізу розповсюдження ЕМП та теплового поля, а також аналізу термо-пружно-пластичного деформування систем контактуючих тіл. Відзначимо, що при розрахунках реальних технічних та технологічних систем всебічний аналіз може проводитись лише із застосуванням чисельних методів. Найбільш поширеним з яких є метод скінчених елементів (МСЕ). Реалізація МСЕ спирається на варіаційні постановки відповідних задач.

Перший етап розв'язання передбачає знаходження просторово-часових розподілів основних векторних компонентів ЕМП. В першу чергу, зменшимо кількість характеристик, які описують розповсюдження ЕМП. Для цього введемо до розгляду векторний магнітний \vec{A} та скалярний електричний φ потенціали:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi. \quad (1)$$

де \vec{B}, \vec{E} – вектори магнітної індукції та напруженості електричного поля. Тоді система фундаментальних рівнянь Максвелла із використанням понять про векторний та скалярний потенціали зводиться до двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \dot{\vec{u}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_c} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{\nabla} \varphi = \vec{J}; \\ \vec{\nabla} \cdot \left[\gamma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{u}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] = \rho_e. \end{cases} \quad (2)$$

де γ, μ_c – електропровідність та магнітна проникність матеріалу,

\vec{J}, ρ_e – вектор густини сили струму та густина розподіленого електричного заряду,

$\dot{\vec{u}}$ – вектор швидкості точки тіла. Наведена система дозволяє аналізувати розподіл ЕМП у рухомих електропровідних тілах, електрофізичні властивості яких є змінними (в залежності від температури тіла (електропровідність та магнітна проникність) та в залежності від рівня напруженості магнітного поля (магнітна проникність для магнетиків)).

Для векторного магнітного та скалярного електричного потенціалів формулюються початкові умови:

$$\vec{A}(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0. \quad (3)$$

Якщо початкові умови для потенціалів формулюються ідентично, то граничні умови мають деякі розбіжності. Якщо ні на якій границі тіла не задані компоненти ЕМП, то у цьому випадку слід розглядати

тіло разом із оточуючим середовищем і моделювати загасання ЕМП на віддаленні, тобто граничні умови можуть бути записані:

$$\vec{A} \Big|_{\infty} = 0; \quad \varphi \Big|_{\infty} = 0. \quad (4)$$

У випадку, коли на якійсь границі тіла задано компоненти ЕМП, то (у квазістаціонарному випадку) граничні умови для потенціалів мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma} = -E_{\Gamma i}, \quad i = 1, 2, 3; \\ \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma} = B_{\Gamma k}, \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5)$$

де позначка Γ означає приналежність відповідної величини до границі тіла.

У випадку нехтування рухом електропровідного тіла, а також змінності його електрофізичних характеристик система (2) спрощується до вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_c \gamma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{\nabla} \varphi = \vec{J}; \\ \Delta \varphi = \rho_e. \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

У даному випадку друге рівняння системи може бути розв'язаним незалежно від першого, тобто задача розділяється на два кроки: знаходження скалярного електричного потенціалу, потім знаходження векторного магнітного потенціалу. Для знаходження векторного магнітного потенціалу достатньо знайти його компоненти, тобто необхідно представити перше з рівнянь (6) по компонентах, одержуємо усього чотири скалярні рівняння, для яких можуть бути сформульовані відповідні функціонали і розв'язок задачі про розподіл ЕМП знаходиться з умови їх стаціонарності. Самі функціонали мають вигляд:

$$ELEC = \int_V \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \rho_e \varphi \right] dV. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} MAG_{(x)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_x + \mu \gamma \frac{\partial A_x}{\partial t} A_x \right] dV; \\ MAG_{(y)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_y + \mu \gamma \frac{\partial A_y}{\partial t} A_y \right] dV; \quad (8) \\ MAG_{(z)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_z + \mu \gamma \frac{\partial A_z}{\partial t} A_z \right] dV; \end{aligned}$$

У подальшому будемо нехтувати внеском скалярного електричного потенціалу (електричного поля) у деформування та тепловиділення, тобто не будемо

розглядати функціонал (7). Розв'язання задачі визначення характеристик ЕМП надає можливість врахувати його дію на теплове поле та процес деформування. Нестационарне розповсюдження теплового поля може бути визначене з умови стаціонарності наступного функціоналу:

$$\text{Temp} = \int_V \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - QT + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} dV + \\ + \int_{A_q} q T dS + \int_{A_\alpha} \frac{\alpha}{2} [T^2 - 2T_\infty T] dV; \quad (9)$$

тут λ – теплопровідність матеріалу;
 ρ – густина матеріалу;
 c – питома теплоємність;
 q – функція теплового потоку;
 α – коефіцієнт конвекційного теплообміну;
 T_∞ – температура навколишнього середовища;

A_q, A_α – області границі тіла на яких задано тепловий потік та умови конвекційного теплообміну відповідно. Тепловиділення при розповсюдженні ЕМП враховується шляхом введення розподілених джерел тепловиділення:

$$Q = \frac{1}{\gamma} (\vec{\nabla} \times \vec{H})^2, \quad (10)$$

де \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля.

Компоненти НДС при пружному деформуванні (в умовах нехтування внеском електричного поля та у відсутності поверхневих струмів) можуть бути визначені з умови стаціонарності потенційної енергії, яку представимо так:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon} \dots^{(4)} \hat{C} \dots \hat{\varepsilon} dV - \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV - \\ - \int_S \vec{p} \cdot \vec{u} dS - \int_V \Delta T \dots^{(4)} \hat{C} \dots \hat{\varepsilon} dV; \quad (11)$$

$$^{(4)}\hat{C} = - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \hat{I} \otimes \hat{I} + \\ + \frac{E}{2(1+\nu)} (e_k \otimes \hat{I} \otimes e^k + e_i \otimes e_k \otimes e^i \otimes e^k). \quad (12)$$

Тут ми врахували дію електромагнітних сил (друга складова), наявність поверхневих розподілених сил (третья складова) та наявність приросту температури (четверта складова).

Розв'язок відшукується з відповідних умов стаціонарності функціоналів (8),(9),(11), причому, для нестационарних ЕМП та теплового поля ці умови повинні виконуватись на кожному кроці за часом – k :

$$\delta(MAG_{(x)}^k) = 0; \quad \delta(MAG_{(y)}^k) = 0; \quad \delta(MAG_{(z)}^k) = 0; \\ \delta(\text{Temp}^k) = 0; \quad \delta U = 0. \quad (13)$$

Шукані змінні задачі: компоненти векторного магнітного потенціалу, температура та переміщення. Тоді умови стаціонарності потребують рівності нулю наступних похідних:

$$\frac{\partial MAG_{(x)}^k}{\partial A_x} = 0; \quad \frac{\partial MAG_{(y)}^k}{\partial A_y} = 0; \quad \frac{\partial MAG_{(z)}^k}{\partial A_z} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \text{Temp}^k}{\partial T} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{u}} = 0.$$

Що призводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих змінних, яку представимо у векторно-матричній формі:

$$[M]\{A_x\} + [M_\gamma] \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial t} \right\} = \{J_x\}; \\ [M]\{A_y\} + [M_\gamma] \left\{ \frac{\partial A_y}{\partial t} \right\} = \{J_y\}; \\ [M]\{A_z\} + [M_\gamma] \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial t} \right\} = \{J_z\}; \quad (15) \\ [\Lambda]\{T\} + [C_T] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} = \{Q\} + \{Q\}^q + \{Q\}^\alpha; \\ [K]\{u\} = \{p\} + \{f_{em}\};$$

тут $[M]$ – «магнітна» матриця;

$[M_\gamma]$ – матриця, аналогічна за змістом матриці теплоємності у задачі теплопровідності;

$[\Lambda]$ – «матриця теплопровідності»;

$[C_T]$ – матриця теплоємності;

$\{Q\}$ – вектор-стовпець внутрішніх джерел тепловиділення;

$\{Q\}^q, \{Q\}^\alpha$ – вектори «теплових поверхневих навантажень» завдяки можливому потоку через поверхню, або завдяки конвекційному теплообміну, усі інші матриці та вектори є східними з тими, що вже розглянуті раніше. Далі наведемо у загальному вигляді вирази для обчислення матриць та векторів, які входять у визначальні співвідношення (15), для випадку ізотропного матеріалу. «Магнітна матриця» одного СЕ:

$$[M]_{(el)} = \int_{V_{(el)}} \{B\}^T [\mu] \{B\} dV_{(el)}, \quad \{B\}^T = \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial y} \quad \frac{\partial N}{\partial z} \right\}^T.$$

$$\text{Матриця } [M_\gamma]: [M_\gamma]_{(el)} = \mu \gamma \int_{V_{(el)}} \{N\}^T \{N\} dV_{(el)}.$$

$$\text{Матриця теплопровідності: } [\Lambda] = \int_V \{B\}^T [\lambda] \{B\} dV.$$

$$\{B\}^T = \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial y} \quad \frac{\partial N}{\partial z} \right\}^T, \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матриця теплоємності:

$$[C_T]_{(el)} = c \rho \int_{V_{(el)}} \{N\}^T \{N\} dV_{(el)}.$$

Вектори внутрішніх джерел тепловиділення та поверхневих «навантажень»:

$$\{Q\} = \int_V Q \{N\}^T dV; \quad \{Q\}^q = \int_V q \{N\}^T dV;$$

$$\{Q\}^\alpha = \int_V \alpha \{N\}^T \{T_\infty\} dV.$$

Для розв'язку у часі розглядається схема, котра на кожному кроці k за часом призводить до наступних рівнянь відносно компонент векторного магнітного

потенціалу та температури:

$$[M^{k-1}]\{A_i^k\} = -[M\gamma^{k-1}] \frac{\{A_i^k\} - \{A_i^{k-1}\}}{\Delta t} + \{J_i^{k-1}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$[\Lambda^{k-1}]\{T^k\} = -\{C^{k-1}\}^T \frac{\{T^k\} - \{T^{k-1}\}}{\Delta t} + \{Q^{k-1}\} + \{Q^{k-1}\}^q + \{Q^{k-1}\}^\alpha.$$

Якщо властивості матеріалу залежать від температури, то на кожному кроці за часом відбувається їх корегування за схемою, подібною до корегування магнітної проникності. Відомо, що властивості матеріалу змінюються в залежності від температури повільно, тож при достатньо малому часовому кроці Δt уточнення значень властивостей матеріалу не буде потребувати більше двох-трьох ітерацій.

У випадку визначення НДС при пружно-пластичному деформуванні розглянемо слабку форму рівнянь рівноваги, розв'язок відшукуємо з умови:

$$G(\hat{\sigma}, \delta \bar{u}) = 0,$$

$$G(\hat{\sigma}, \delta \bar{u}) = \int_V \hat{\sigma} \cdot \delta \bar{\varepsilon} dV - \int_V (\bar{j} \times \bar{B}) \delta \bar{u} dV - \int_{A_p} \bar{p} \cdot \delta \bar{u} dA$$

тут $\delta \bar{u}$ – вектор віртуальних переміщень, який пов'язаний із деформаціями наступним чином:

$$\delta \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \delta \bar{u} + (\bar{\nabla} \delta \bar{u})^T \right].$$

Чисельна процедура розв'язання полягає в наступному. Наприклад, розглядаються два кроки розв'язку n та $n+1$, вважаємо, що на кроці n відомі тензори напружень, пружних та пластичних деформацій, також відомі механічні навантаження та електромагнітні сили. Тоді, необхідність виконання умови стаціонарності на кожному кроці призводить до рівняння:

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + {}^{(4)}\hat{C}^{ep} \cdot \Delta \hat{\varepsilon}, \quad (16)$$

де $\Delta \hat{\varepsilon}$ – тензор прирощення деформацій,

${}^{(4)}\hat{C}^{ep}$ – пружно-пластичний тензор. Наведені варіаційні постановки відповідних задач та наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь можуть бути використаними для створення алгоритмів відповідно до схем МСЕ.

Висновки. Розглянуто проблему аналізу термодеформування електропровідних тіл при дії електромагнітного поля. Наведені варіаційні формулювання задач аналізу розповсюдження основних векторних характеристик електромагнітного поля, нестационар-

ної теплопровідності та пружно-пластичного деформування. Наведені співвідношення є базовими для створення чисельних алгоритмів відповідно до схем методу скінчених елементів.

Список літератури

1. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А., Пауцин Н.А. Савицкий В.В., Ткачук Г.И. Перераспределение остаточных сварочных напряжений при обработке импульсным электромагнитным полем. Проблемы прочности. 2011. № 3. С. 123-131.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.
3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.
4. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.
5. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of materials. 2016. Vol. 48 No. 6. P. 760-767.
6. Bondar' S.V., Lavinskii D.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials. 2011. Vol. 43, № 4. P. 447-454.

Bibliography (transliterated):

1. Stepanov G.I., Babytskii A.I., Mameev I.A., Pacshin N.A., Savickii V.V., Tkachuk G.I. Pereraspredelenie ostatochnykh napryazhenii pri obrabotke impulsnym elektromagnitnym polem. Problemy prochnosti. 2011. № 3. P. 123-131.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.
3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.
4. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.
5. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of materials. 2016. № 48 No. 6. P. 760-767.
6. Bondar' S.V., Lavinskii D.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials. 2011. Vol. 43, № 4. P. 447-454.

Поступила (received) 30.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Альтенбах Хольм (Альтенбах Хольм, Altenbach Holm) – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина, e-mail: holm.altenbach@ovgu.de

Науменко Костянтин (Науменко Константин, Naumenko Konstantin) – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина, e-mail: konstantin.naumenko@ovgu.de

Лавінський Денис (Лавинский Денис, Lavinsky Denis) – кандидат технічних наук, доцент, кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Конкін Валерій (Конкин Валерий, Konkin Valeriy) – кандидат технічних наук, професор, кафедра механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, НТУ «ХПІ», e-mail: 1956kvn@gmail.com

Р.А. БАБУДЖАН, А.Г. АНДРЕЕВ

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТЕЙНЕРА, НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

В данной работе предполагалось выяснить возможность потери устойчивости в типовой конструкции контейнера, проанализировав несколько конфигураций геометрических параметров. Для этого была создана математическая модель, которая совмещает в себе моментную и безмоментную теорию оболочек, а также теорию устойчивости. Были показаны методы параметризации и алгоритмизации решения напряженно-деформированного состояния с помощью пакета программного обеспечения MATLAB. Также в работе представлены значения критических нагрузок, приводящих объект в состояние потери устойчивости, соответствующие определенным параметрам контейнера. Также были представлены сравнения предела текучести материала конструкции со значениями максимальных напряжений в элементах контейнера, вызываемых вычисленными нагрузками. Эти значения позволили сделать вывод об опасных конфигурациях конструкции, при которых стала возможна потеря устойчивости. В работе приведена формализация решения напряженно-деформированного состояния конструкции, имеющая модульную структуру. Данный метод позволяет унифицировать и автоматизировать процесс решения задач подобного рода без использования частных теорий расчета конструкций. Алгоритм решения сходится с типовым алгоритмом нахождения опасных зон конструкции и, благодаря параметризации, может быть применен при решении задачи как в прямой, так и в обратной постановке. После анализа результатов был сделан вывод о состоятельности и актуальности анализа устойчивости конструкции. Результатом работы являются как численные значения критических нагрузок при определенных конфигурациях конструкции, так и общее, качественное представление о прочности типовой конструкции, ее опасных зонах и возможности ее упрочнения посредством добавления новых конструктивных элементов в зоны, наиболее подверженные необратимым деформациям. Результаты приведены в виде графиков, формул, рисунков и таблиц.

Ключевые слова: контейнеры, оболочки вращения, устойчивость, упругость, напряженно-деформированное состояние, перемещения, сопряжение элементов контейнера, моментная теория.

Р.А. БАБУДЖАН, А.Г. АНДРЕЕВ

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ КОНТЕЙНЕРА, ЩО НАВАНТАЖЕНИЙ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМ ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ

У даній роботі передбачалося з'ясувати можливість втрати стійкості в типовій конструкції контейнера, проаналізувавши кілька конфігурацій геометричних параметрів. Для цього була створена математична модель, яка поєднує в собі моментну і безмоментну теорію оболонок, а також теорію стійкості. Були показані методи параметризації та алгоритмізації рішення напружено-деформованого стану за допомогою пакета програмного забезпечення MATLAB. Також в роботі представлені значення критичних навантажень, що призводять об'єкт в стан втрати стійкості, що відповідають певним параметрам контейнера. Також були представлені порівняння межі текучості матеріалу конструкції зі значеннями максимальних напружень в елементах контейнера, що викликаються обчисленими навантаженнями. Ці значення дозволили зробити висновок про небезпечні зміни конструкції, при яких стала можлива втрата стійкості. У роботі приведена формалізація рішення напружено-деформованого стану конструкції, що має модульну структуру. Даний метод дозволяє уніфікувати і автоматизувати процес вирішення завдань подібного роду без використання особливих теорій розрахунку конструкцій. Алгоритм рішення збігається з типовим алгоритмом знаходження небезпечних зон конструкції і, завдяки параметризації, може бути застосований при вирішенні задачі як в прямій, так і в зворотній постановці. Після аналізу результатів було зроблено висновок про спроможність і актуальність аналізу стійкості конструкції. Результатом роботи є як чисельні значення критичних навантажень при певних конфігураціях конструкцій, так і загальне, якісне уявлення про міцність типової конструкції, її небезпечні зони і можливість її зміцнення за допомогою додавання нових конструкційних елементів в зони, найбільш схильні до незворотних деформацій. Результати наведені у вигляді графіків, формул, малюнків і таблиць.

Ключові слова: контейнери, оболонки обертання, стійкість, пружність, напружено-деформований стан, переміщення, сполучення елементів контейнера, моментна теорія.

R.A. BABUDZHAN, A.G. ANDREEV

SUSTAINABILITY ANALYSIS OF A CONTAINER LOADED WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED EXTERNAL PRESSURE

This work has been shown to have the ability to handle the type of container design that has analyzed the geometry configuration parameters. For the whole bull, a mathematical model has been created, that combines moment and momentless theories of shells, as well as theoretical theory. In this work also are shown the methods of parametrization and the algorithms of the solution, which was created with the help of software MATLAB. The work also presents the values of critical loads that bring the object into a state of loss of stability, corresponding to certain parameters of the container. Comparison of the yield strength of the structural material with the values of the maximum stresses in the container elements caused by the calculated loads was also presented. These values led to the

conclusion about the dangerous configurations of the structure, in which the loss of stability became possible. The paper gives a formalization of the solution of the stress-strain state of the structure, which has a modular structure. This method allows to unify and automate the process of solving problems of this kind without using private theories of structural analysis. The solution algorithm converges with the standard algorithm for finding dangerous zones of the structure and, thanks to the parameterization, can be used to solve the problem both in direct and inverse formulations. After analyzing the results, a conclusion was drawn about the consistency and relevance of structural stability analysis. The result of the work is both the numerical values of critical loads at certain configurations of the structure, as well as a general, qualitative idea of the strength of the typical structure, its hazardous areas and the possibility of its hardening by adding new structural elements to the areas most prone to irreversible deformations. The results are presented in the form of graphs, formulas, figures and tables.

Key words: containers, rotation shells, stability, elasticity, stress-strain state, displacements, conjugation of shells, moment theory.

Вступлення. Устойчивость – свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия. При современном применении стали и металлов высокой прочности в инженерных конструкциях упругая устойчивость стала проблемой огромного значения. Применение более современных материалов привело, естественно, к типам конструкций, содержащим гибкие сжатые части: тонкие пластинки и тонкие оболочки. Опыт многих лет исследований динамики и прочности конструкций подсказывает, что такие конструкции могут оказаться опасными не из-за высоких напряжений, превышающих предел прочности, но вследствие недостаточной упругой устойчивости гибких или тонкостенных элементов (1, с 8]).

Целью этого исследования является определение критических напряжений, зависимостей напряжений от нагрузки в каждом элементе конструкции, а также конструктивных особенностей элемента, которые могут привести к потере устойчивости.

Постановка задачи. В данной работе проводится исследование контейнера, нагруженного равномерно распределенным внешним давлением со строго определенным типом закреплений элементов конструкции, а также проводится поиск связей между определенными конструктивными особенностями объекта и потерей им устойчивого состояния. Для этого необходимо разбить задачу на такие этапы.

1. Определить напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции с возможностью параметризации геометрии и нагружения конструкции.

2. Определить критические нагрузки, вызывающие потерю устойчивости каждого элемента конструкции.

3. Выяснить особенности конфигурации конструкции, при которой напряжения, вызванные критическими нагрузками, будут меньше, чем предел текучести материала.

Схема конструкции представлена на рис.1. Материал: Сталь 58, предел текучести $\sigma_T = 2000$ МПа, модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Для численного моделирования был использован пакет прикладных программ MATLAB. Использование данного пакета позволило полностью автоматизировать все расчеты в конструкции, дало возможность параметризовать уравнения а также лишило необходимости ручного вывода аналитических выражений для усилий каждого элемента конструкции. При этом

было решено избежать численных методов решения систем нелинейных уравнений, а также численного дифференцирования уравнений по причине нелинейности искомых выражений, что могло бы привести к большим погрешностям в решении. Исходя из этого, все выражения для прогибов и усилий в элементах конструкции были получены в аналитическом виде, что закрывает вопрос о точности решения. Вопрос о точности теоретических выкладок, использованных в данной работе, был рассмотрен в соответствующей литературе ([2, с 173]).

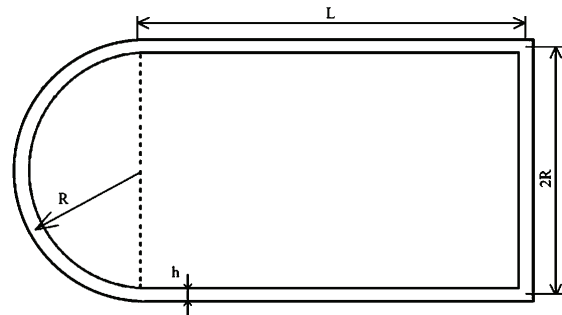


Рисунок 1 – Схема конструкции

Определение НДС. Алгоритм исследования НДС модели:

1. Построение математической модели конструкции.

1.1. Разработка расчетной схемы:

- разделение конструкции на конструктивные элементы;

- классификация конструктивных элементов

1.2. Построение разрешающих уравнений:

- выбор систем координат в конструктивных элементах;

- запись основных уравнений и их общих решений для каждого конструктивного элемента;

- исследование узлов сопряжения и запись геометрических и статических условий сопряжения конструктивных элементов;

2. Реализация методики решения задачи в математической среде программирования.

3. Проведение расчетов, анализ результатов и вывод таблиц конфигураций.

Для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции она была разделена на две составляющие (рис. 2). Левый и правый края рассчитывались независимо друг от друга, опираясь на гипотезы моментной теории пластин ([2, с 201]) и оболочек и

закона сохранения энергии тела. Требование разделить конструкцию обусловлено методологией решения задач теории пластин и оболочек, а именно для построения корректной математической модели. В теории пластин и оболочек рассматривается напряженно-деформированное состояние геометрических примитивов – пластин, оболочек вращения и прочее, а также варианты их защемления. Рассмотрение данной конструкции подразумевает рассмотрение конструкционного элемента в отдельности, а также каждого ее узла. Поскольку задача симметрична относительно оси цилиндрической части оболочки, ключевым является рассмотрение двух узлов – сопряжение цилиндрической оболочки с круглой пластиной и сопряжение сферической и цилиндрической оболочек.

Левый край представляет собой полусферу, жестко защемленную по ободу с цилиндром (см. рис. 2, а). Правый край представляет собой круглую пластину, жестко защемленную по краям с цилиндром (рис. 2, б).

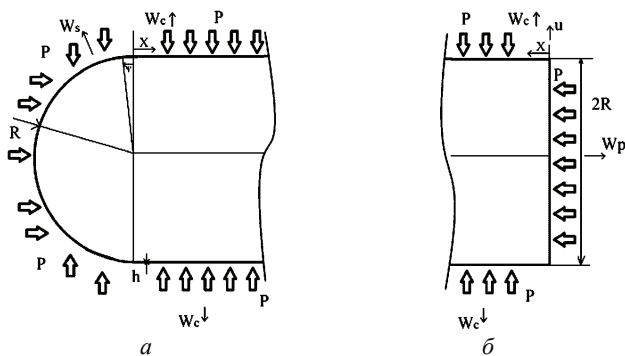


Рисунок 2 – Координатные оси и положительные направления прогибов

Выбор систем координат. Для левого края приняты следующие обозначения: w_s – прогиб в сферической оболочке, ψ – координата угла поворота, w_c – прогиб в цилиндрической оболочке, X – координата изменения прогиба цилиндра по направлению нулевой кривизны. Для правого края приняты следующие обозначения: w_p – прогиб в пластине, r – координата изменения прогиба в радиальном направлении, w_o – прогиб в цилиндрической оболочке, X – координата изменения прогиба цилиндра по направлению нулевой кривизны, u – растяжение пластины.

Запись основных уравнений прогибов и усилий. Для левого и правого участков уравнение краевого эффекта прогиба цилиндрической оболочки выглядит следующим образом ([2, с 209]):

$$d^4 \frac{w_k}{dx^4} + 4w_k = 0.$$

Полный прогиб цилиндра ищется по следующей формуле:

$$w = w_{\text{общее}} + \bar{w} + w_k,$$

где $w_{\text{общее}}$ – общее решение по безмоментной теории ([3, с 531]);

\bar{w} – частное решение;

w_{ks} – краевой эффект ([2, с 209]).

Прогиб цилиндрической оболочки (оба края) находится по следующей формуле:

$$w_c = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D} + \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right);$$

$$w_o = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D} + \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right);$$

где $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$; $D = E \frac{h^3}{12} (1-\nu^2)$.

Дифференциальное уравнение Софи-Жермен для прогиба круглой пластины (см. [2, с 142]):

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw'}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{P}{D},$$

его решение:

$$w' = c_1 + c_2 r^2 + \frac{P r^4}{D 64}$$

([2, с. 173, аналитическое решение дифференциального уравнения из задачи «сплошная шарнирно опертая по контуру пластинка»).

Уравнение растяжения пластины:

$$u = c_5 (1-\nu) \frac{r}{E}$$

([2, с. 105 уравнение 7.33, измененное следующим образом. Убрано второе слагаемое из-за отсутствия отверстия в центре пластины, коэффициент. Параметр A выражен через неопределенную константу $C5$ и физические постоянные в уравнении нормальных напряжений осесимметричной задачи на растяжение).

Дифференциальное уравнение для сферической оболочки ([2, с 208]):

$$d^4 \frac{Q_1}{d\psi^4} + 4Q_1 = 0,$$

где Q_1 – перерезывающая сила в сфере.

Его решение для одного края полусферы [2, с 208]):

$$Q_1 = e^{-\chi x} (c_3 \sin \chi x + c_4 \cos \chi x).$$

Сумма безмоментного ([3, с 531]) и моментного ([2, с 208]) решений для сферы:

$$w_s = R \frac{dQ_1}{d\psi} + P \frac{R^2}{Eh} \frac{1-\nu}{2}.$$

Формулы моментов и усилий для правого края ([2, с 208, с 210]):

$$M_o = -D \frac{d^2 w_o}{dx^2}; \quad M_{pR} = -D \left(\frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_p}{dr} \right);$$

$$Q_{pR}^- = \frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_p}{dr}; \quad Q_p = -D \frac{dQ_{pR}^-}{dr};$$

$$N_o = E \frac{h}{R} e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x).$$

Формулы моментов и усилий для левого края ([2, с 141, с 210]):

$$M_c = -D \frac{d^2 w_c}{dx^2}; \quad Q_c = -D \frac{d^3 w_c}{dx^3};$$

$$\Psi_s = -\frac{1}{Eh} \frac{d^2 Q_s}{d\psi^2}; \quad M_{s1} = -\frac{Ds}{R} \frac{d\Psi_s}{d\psi}; \quad M_{s2} = \nu M_{s1};$$

$$N_o = E \frac{h}{R} e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x); \quad Q_c = -D \frac{d^2 w_c}{dx^2},$$

где Ψ_s – изменение угла наклона касательной к меридиану

Запись условий сопряжения и поиск констант

На правом участке в разрешающих уравнениях имеется пять неизвестных констант. Следовательно, требуется пять условий сопряжения:

$$\begin{aligned} x=0, \quad r=R, \quad w_o &= u; \\ x=0, \quad r=R, \quad \frac{dw_o}{dx} &= -\frac{dw_p}{dr}; \\ x=0, \quad r=R, \quad M_{ox} &= -M_{pr}; \\ x=0, \quad r=R, \quad Q_{ox} &= \sigma_r h; \\ r &= R, \quad w_p = 0. \end{aligned}$$

На левом участке в разрешающих уравнениях имеется четыре неизвестные константы. Следовательно, требуется четыре условия сопряжения:

$$\begin{aligned} x=0, \quad \varphi &= 0, \quad w_c = w_s; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad \frac{dw_c}{dx} = -\frac{dw_s}{d\varphi}; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad M_{cx} = -M_{s1}; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad Q_{cx} = -Q_{s1}; \end{aligned}$$

Анализируя график прогибов (рис. 3) в разных краях конструкции, можно прийти к выводу об уместности разделения конструкции при таком отношении между значениями длины цилиндрической части и

радиусом полусферы контейнера: $Rhl = 0,11541$. При отношении больше данного наложение решений не наблюдается. Это обусловлено значением коэффициента затухания β ([3, с 516]). Ниже приведен график, иллюстрирующий данную зависимость:

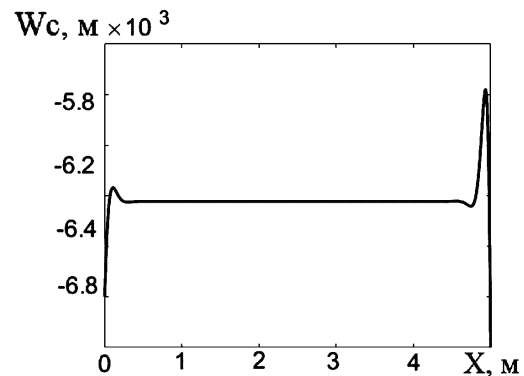


Рисунок 3 – График прогибов в цилиндре при $R = 1, h = 0,1, l = 5, \sigma_{\min} = [\sigma_{\text{стали}}]$

Проверка решения НДС. Как видно из рис. 4, эпюры перемещений в каждом узле сопряжения сходятся. Также при выходе на безмоментную составляющую оболочек вращения можно наблюдать отрицательные прогибы, что свидетельствует о отрицательном направлении нагрузки. Отрицательное направление нагрузки в системах координат, связанных с оболочками подразумевает под собой внешнее нагружение конструкции, которое и требовалось рассмотреть.

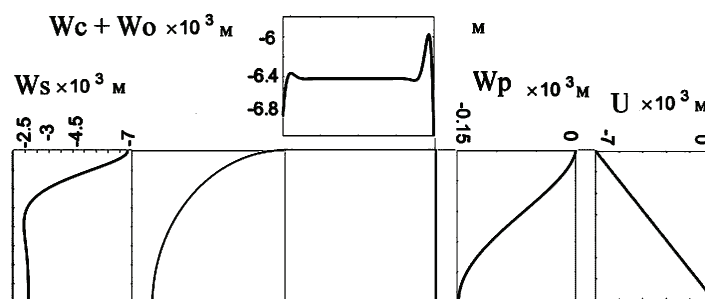


Рисунок 4 – Эпюры прогибов в цилиндре при $R = 1, h = 0,1, l = 5, \sigma_{\min} = [\sigma_{\text{стали}}]$

Реализация решения на базе MATLAB. Как было сказано ранее, на этапе вычислений было решено не использовать табличное представление функций прогибов. Используя символьный аппарат MATLAB([4]), изначально были записаны символьные выражения для всех ключевых уравнений конструкции. После этого были найдены символьные выражения для производных от соответствующих равенств и, как следствие, выражения для усилий каждого элемента конструкции. Затем, воспользовавшись сущностью «равенство» (Determineequality, eq, ==) и функцией символьная замена (symbolicsubstitution, subs(s,old,new)), были определены выражения для граничных условий. Решение системы уравнений относительно констант C1-C9 функцией solve(eqn,var) ([5]),

дало параметризованные выражения для прогибов и усилий в конструкции, где параметрами выступали: нагрузка, геометрические параметры, параметры материала.

Вычисление критических нагрузок в элементах. Изучив особенности данной конструкции, можно сделать вывод о трех возможных неустойчивых состояниях в конструкции: выпучивание полусферы оболочки под действием внешнего давления([1], с. 496), выпучивание цилиндрической оболочки под действием одновременного внешнего поперечного давления и продольных сил([1], с. 480; [7], с. 1031), а также выпучивание круглой пластины под действием сжимающей силы ([1], с. 375; [7], с. 1071). Значения критических нагрузок определяются по формулам:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad N_p = \frac{14,68h^2}{R^2}; \quad Q_s = \frac{2Eh^2}{R^2(3-\mu^2)^2};$$

$$Q_c = \frac{Eh}{R} \left(1 + 0,5 \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n^2 \left(\frac{R}{\pi} \right)^2 + 1} + \frac{h^2}{12R^2(1-\mu^2)} \times \left(n^2 + \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right)^2 \right];$$

$$N_c = -Q_c R,$$

где N_p – сила, сжимающая пластину, Q_s – сила, сжимающая сферу, Q_c – сила, сжимающая цилиндр в радиальном направлении, N_c – сила, сжимающая цилиндр в осевом направлении.

Вычисление напряжений. Найдя выражения для усилий всех элементов конструкции, можно записать выражения напряжений ([6] с. 197, с. 230):

$$\sigma_s = \frac{N_s}{h} \pm 6 \frac{M_{1s}}{h^2}; \quad \sigma_{c1} = 6 \frac{M_{1c}}{h^2}; \quad \sigma_{c2} = 6 \frac{M_{2c}}{h^2};$$

$$\sigma_{pd} = 6 \frac{M_p}{h^2}; \quad \sigma_{pc} = C_s,$$

где σ_s – напряжения в сфере, σ_{c1} и σ_{c2} – напряжения на правом и левом концах цилиндра, σ_{pd} – напряжение в пластине, вызванное ее сжатием, σ_{pc} – напряжение в пластине, вызванное ее изгибом.

Сравнение напряжений при критических нагрузках с пределом текучести материала. Для получения численных значений напряжений во всех элементах конструкции были рассмотрены конфигурации, представленные в табл. 1.

Таблица 1 – Конфигурации конструкции соответствующие минимальные критические нагрузки

№	h_s , м	R_s , м	L_s , м	P , кН
I	0,1	1	2	$1689,3 \cdot 10^6$
II	0,01	1	20	$1,689 \cdot 10^3$
III	0,01	0,1	2	$1,689 \cdot 10^4$

Напряжения, соответствующие различным конфигурациям, представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Напряжения (ГПа) в элементах

№	σ_s	σ_{c1}	σ_{c2}	σ_{pd}	σ_{pc}
I	14,723	18,298	124,45	120,06	22,454
II	0,4276	0,1547	12,617	12,53	0,2605
III	0,133	0,1535	1,2578	1,2536	0,2057

Выводы. Как видно из результатов исследования, потеря устойчивости конструкции возможна при

стечении ряда обстоятельств, а именно при сравнительно малой толщине стенок контейнера и малом радиусе днища. Это подтверждается гипотезами, заложенными в теории устойчивости.

Во всех рассмотренных конфигурациях минимальная сила, требуемая для потери устойчивости, соответствовала критической нагрузке в пластине при ее радиальном сжатии. Однако максимальные напряжения в конструкции возникают именно в месте защемления цилиндрической оболочки и пластины. Это свидетельствует о том, что этот участок защемления – самое опасное место конструкции. С целью упрочнения подобных конструкций может быть рассмотрена установка жестких колец на гранях цилиндрической оболочки, противодействующих сжатию в радиальном направлении.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 570 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для студентов вузов. 2-е изд., перераб. Москва: Высшая школа, 1982. 264 с.
3. Тимошенко С.П., Вoinовский-Кригер Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 625 с.
4. Perform symbolic math computations. URL: mathworks.com/products/symbolic.html
5. MathWorks MATLAB help. function solve(). URL: https://www.mathworks.com/help/symbolic/solve.html
6. Пономарев С.Д. (ред.) и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том 2. Москва: Машгиз, 1958. 975 с.
7. Пономарев С.Д. (ред.) и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том 3. Москва: Машгиз, 1959. 1119 с.

References (transliterated)

1. Timoshenko S.P. Stability of elastic systems. Moscow: State publishing house of technical and theoretical literature. 1955. 570 p.
2. Samul V.I. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: Textbook. manual for university students. 2nd ed., Revised. Moscow: Higher. School, 1982. 264 p.
3. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger Plates and shells. Moscow: Science, 1966. 625 p.
4. Perform symbolic math computations. URL: mathworks.com/products/symbolic.html
5. MathWorks MATLAB help. function solve (). URL: https://www.mathworks.com/help/symbolic/solve.html
6. Ponomarev S.D. (Ed.) and others. Strength calculations in mechanical engineering. Vol. 2. Moscow: Mashgiz, 1958. 975 p.
7. Ponomarev S.D. (Ed.) and others. Strength calculations in mechanical engineering. Vol. 3: Moscow: Mashgiz, 1959. 1119 p.

Поступила (received) 25.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бабуджан Руслан Андреевич (Бабуджан Руслан Андрійович, Babudjan Ruslan Andreevich) – студент, кафедра «Динамика и прочность машин», НТУ «ХПИ», тел.: 0997938503; e-mail: ruslanbabujan100799@gmail.com

Андреев Арнольд Георгиевич (Андреев Арнольд Георгійович, Andreev Arnold' d Georgievich) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин» НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-68-79; e-mail: andreev707@ukr.net.

Д.М. КРАСИЙ, А.Г. АНДРЕЄВ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КОНТЕЙНЕРА, ЩО НАВАНТАЖЕНИЙ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМ ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ

В роботі досліджується стійкість контейнера, що складається з чотирьох елементів: сферичної та циліндричної оболонок, круглої пластини та двох кільцевих ребер, котрі приварені на місці сполучення сферичної з циліндричною оболонкою і циліндричної оболонки з круглою пластинкою. Оболонки та пластинка тонкі: їхня товщина значно менша інших розмірів. Товщина всіх елементів контейнера однакова. Кільця жорсткі на згин але пружні на поворот відносно центру поперечного перерізу. Краї оболонок закріплені від зміщення в напрямі нормалі до поверхні оболонки, що викликає реакції, які швидко затухають при віддаленні від країв, тобто виникає крайовий ефект. Контейнер знаходиться під зовнішнім рівномірно розподіленим тиском. Для дослідження НДС припускається, що лівий та правий краї контейнера не впливають один на одного. Були знайдені критичні сили для кожного елемента контейнера. Значення тиску приймається як найменший з критичних тисків. Була вирішена задача теорії пружності: визначені граничні умови у місцях сполучень оболонок, за допомогою яких знаходяться невідомі константи для розв'язків диференціальних рівнянь прогинів серединної поверхні циліндричної оболонки, розв'язку рівняння сферичної оболонки та розв'язку рівняння Софі Жермен. Коли константи знайдені – виводяться графіки прогинів, моментів, сил та напружень, з яких видно, де у контейнера найбільш вразливі місця. Були отримані найбільші напруження на кожному з елементів, найбільше з яких порівнюється з границею текучості щоб перевірити, чи не починаються пластичні деформації. Для розв'язання диференціальних рівнянь та виводу графіків використовувався програмний комплекс MATLAB. Побудовані епюри прогинів та напружень. Отримані таблиці з максимальними критичними тисками, максимальними прогинами та максимальними напруженнями для кожного з елементів контейнеру. Виявлено, що найбільш вразливим елементом є циліндрична оболонка, бо її критичний тиск – найменший.

Ключові слова: стійкість, сполучення оболонок, НДС контейнеру, рівняння Софі Жермен, крайовий ефект.

Д. М. КРАСИЙ, А. Г. АНДРЕЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТЕЙНЕРА, КОТОРЫЙ НАГРУЖЕН РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе исследуется устойчивость контейнера, который состоит из четырех элементов: сферической и цилиндрической оболочек, круглой пластинки и двух кольцевых ребер, которые приварены на месте сопряжения сферической с цилиндрической оболочкой и цилиндрической оболочки с круглой пластинкой. Оболочки и пластинки тонкие: их толщина гораздо меньше других размеров. Кольца жесткие на прогиб но упругие на поворот относительно центра поперечного сечения. Края оболочек зашпелены от смещения в направлении нормали к поверхности оболочек, что вызывает реакции, которые быстро затухают при отдалении от краев, то есть образуется краевой эффект. Контейнер находится под внешним равномерно распределенным давлением. Для исследования НДС предполагается, что левый и правый края контейнера не влияют друг на друга. Были найдены критические силы для каждого элемента контейнера. Значение давления принимается как наименьшая из критических давлений. Была решена задача теории упругости: определены граничные условия в местах сопряжений оболочек, с помощью которых находятся неизвестные константы для решений дифференциальных уравнений прогибов срединной поверхности цилиндрической оболочки, решения уравнения сферической оболочки и решения уравнения Софи Жермен. Когда константы найдены - выводятся графики прогибов и напряжений, из которых видно, где у контейнера наиболее уязвимые места. Были получены наибольшие напряжения на каждом из элементов, наибольшее из которых сравнивается с пределом текучести, чтоб проверить, не появились ли пластические деформации. Для решения уравнений и построения графиков использовался программный комплекс MATLAB. Построены эпюры прогибов и напряжений. Получены таблицы с максимальными критическими давлениями, максимальными прогибами и максимальными напряжениями для каждого из элементов контейнера. Выявлено, что наиболее уязвимым элементом является цилиндрическая оболочка, потому что ее критическое давление – наименьшее.

Ключевые слова: устойчивость, сопряжения оболочек, НДС контейнера, уравнение Софи Жермен, краевой эффект.

D.M. KRASII, A.G. ANDREEV

SUSTAINABILITY RESEARCHING OF CONTAINER WHICH IS UNDER EVENLY DISTRIBUTED EXTERNAL LOAD

In this work is being explored sustainability of container, which consist of four elements: spherical and cylindrical shells, round plate and two circumferential ribs, which is welded at the interface of spherical with cylindrical shells and cylindrical shell with round plate. Thickness of all construction's elements is equal. Shells and plates are thin: them thickness is much smaller than other sizes. Ribs are rigid on deflection but elastic on rotation is indicative of the center of the transverse. Shells' edges pinched from displacement in the direction normal to the surface of the shells, which means an edge effect is formed. Container is under external evenly distributed load. For Stress-strain state researching assumed that left and right container's edges do not affect each other. Were found

critical loads for each container's elements. Value of pressure is the lowest of critical pressure. Were solved task of elastic strength theory: were defined boundary conditions at the shell's sinter face, by which is being found unknown constants for the solutions of the differential equations of the deflections of the middle surface of the cylindrical shell, the solution of the equation of the spherical shell, and the solution of the Sophie Germain equation. When constants were found – deflection and strain graphs are displayed, where it is possible to find the most vulnerable container's places. Were found the highest strains on each container's elements and the highest of them is comparing with tensile, to check for plastic deformations. To solve equations and build graphs, the MATLAB software package was used. Deflection and strain distribution were plotted. The tables with maximum critical pressures, maximum deflections and maximum stresses for each of the container elements were obtained. The cylindrical shell is found to be the most vulnerable element, since its critical pressure is the lowest.

Key words: sustainability, shell's interface, SSS of container, Sophie Germain equation, edge effect.

Вступ. Вважається, що світовий океан вивчений лише на 2-5%, що вже говорить про космос. Для вивчення морського дна використовується різна апаратура, починаючи від буйків-вимірювачів і закінчуючи справжніми глибоководними роботами. Так як апаратура має кінцевий радіус дії, то необхідно її занурити під воду і, звісно, чим більше глибина - тим більше тиск, який буде на неї діяти. Тому для занурення використовують капсули-оболонки, НДС та стійкість яких необхідно досліджувати, щоб підібрати необхідні параметри конструкції і не втратити дороге обладнання.

Мета роботи. Метою цієї роботи є пошук критичного тиску для контейнера постійної товщини з заданими розмірами. Для отриманого тиску розраховується НДС контейнера, виводяться напруження на кожному з елементів та порівнюється з границею текучості. Важливо, щоб втрата стійкості відбувалася в межах границі текучості, а інакше застосовані методи будуть недейсні.

Побудова математичної моделі. На рис. 1 показаний схематичний вигляд контейнера, геометричні параметри контейнера наведені в табл. 1. Матеріал контейнера – Сталь 40Х, фізичні параметри матеріалу подані в табл. 2.

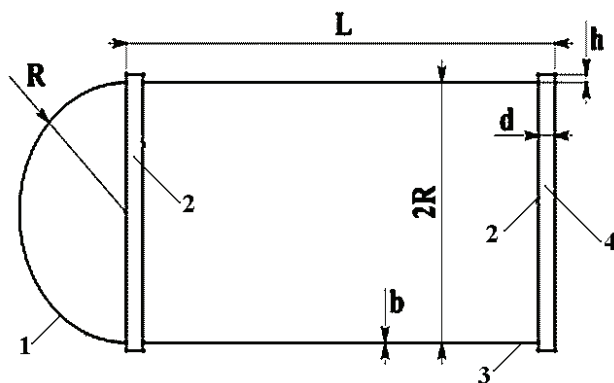


Рисунок 1 – Схематичний вигляд контейнера:
1 – сферична оболонка; 2 – кільцеві ребра;
3 – циліндрична оболонка; 4 – кругла пластинка

Таблиця 1 – Геометричні параметри контейнера

Параметр	Розмір, м
Висота кільця h	0,03
Товщина елементів конструкції b	0,008
Радіус елементів конструкції R	0,5
Довжина циліндричної оболонки L	2
Товщина кільця d	0,08

Таблиця 2 – Фізичні параметри матеріалу

Параметр	Значення
Модуль пружності E , МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коефіцієнт Пуассона μ	0,3
Межа текучості σ_T , МПа	1000

Для дослідження контейнеру на стійкість необхідно розглянути сполучення циліндричної оболонки з пластиною, та сферичної з циліндричною оболонкою [1, с. 273] (рис. 2, 3).

Передбачається, що кільце жорстке на стиснення у центрі поперечного перерізу але є можливість обертатися навколо нього.

На лівому боці сполучення виглядає аналогічно.

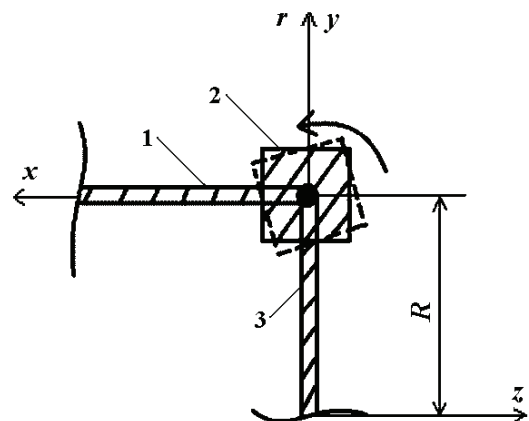


Рисунок 2 – Вигляд сполучення кільця з контейнером на правому боці: 1 – циліндрична оболонка; 2 – кільце; 3 – пластинка

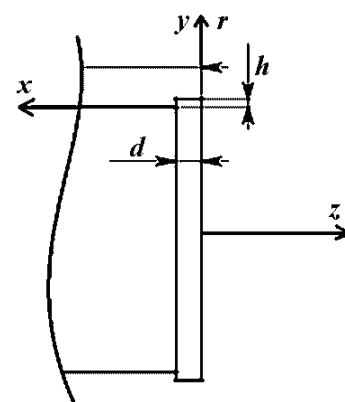


Рисунок 3 – Правий край контейнеру

Розв'язок правого краю. На правому краю треба розв'язати рівняння Софі Жермен [2, с.265] для пластинки та диференціальне рівняння вигнутої сере-

динної поверхні замкнутої кругової циліндричної оболонки [3, с. 190]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = P/D; \quad (1)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = P, \quad (2)$$

де P – тиск, D – циліндрична жорсткість, ∇ – оператор Лапласа, w – прогин оболонки та пластинки.

Розв'язки рівнянь (1) та (2):

$$w^p = C_1 + r^2 C_2 + \frac{Pr^4}{64D}; \quad (3)$$

$$w^o = e^{-\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D}. \quad (4)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} r = R : w_p = 0; \\ x = 0 : w_o = 0; \\ x = 0, r = R : M_x^o - M_r^p = M_x^k; \\ x = 0, r = R : \frac{dw^o}{dx} = \frac{dw^p}{dr}, \end{cases} \quad (5)$$

де w_o , w_p – переміщення циліндричної оболонки та пластинки, M_x^o , M_r^p , M_x^k – моменти циліндричної оболонки, пластинки та кільця.

Кільце додає у третю граничну умову свій момент [4, с.8]:

$$M_x^k = k\theta^k. \quad (6)$$

Розв'язок лівого краю. Розрахункова схема лівого краю контейнеру показано на рис. 4.

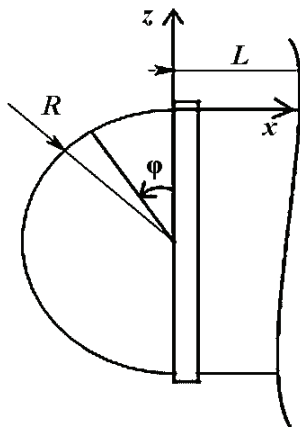


Рисунок 4 – Лівий край контейнеру

На лівому краю можна використати наближене диференціальне рівняння крайового ефекту, виражене через поперечну силу Q [3, 208]:

$$\frac{d^4 Q}{d\varphi^4} + 4\chi^4 Q = 0. \quad (7)$$

Розв'язок рівняння (6) взяти у такому вигляді:

$$Q^s = e^{-\chi\varphi} (C_3 \sin \chi\varphi + C_4 \cos \chi\varphi). \quad (8)$$

За допомогою цього розв'язку можна отримати моментну частину прогину та нормальних сил. Щоб отримати повне рівняння необхідно додати безмоментну частину для прогину та нормальних сил [5, с. 532]:

$$w^{\delta m} = \frac{(1-\mu)PR^2}{2Eh}; \quad N_1^{\delta m} = N_2^{\delta m} = \frac{PR}{2}. \quad (9)$$

Рівняння для циліндру залишається незмінним, тому розв'язок береться у вигляді:

$$w^c = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D}. \quad (10)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} \varphi = 0, x = 0 : w^s = 0; \\ x = 0, \varphi = 0 : k \frac{dw^s}{d\varphi} = M^s - M^c; \\ x = 0, \varphi = 0 : w^c = 0; \\ x = 0, \varphi = 0 : \frac{dw^c}{dx} = \frac{dw^s}{dr}, \end{cases} \quad (11)$$

де $\chi = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)r_o^2}{h^2}}$ – зміна кривизни [3, с. 207];

$M^c = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$ – момент циліндричної оболонки [3, с. 209];

$k = \frac{EI}{r_k^2}$; $\theta = -\frac{dw}{dx}$ – кут повороту кільця;

$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{\sqrt{rh}}}$ – [5, с. 516];

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – циліндрична жорсткість [5, с. 516];

$M^p = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$ – момент пластини [3, с. 140]

$M^s = \frac{D}{EhR} Q^{(3)}$ – момент сферичної оболонки [3, с. 200].

При одночасній дії на контейнер осевого та поперечного тиску не виходить вивести просте рівняння для критичного тиску. В даному випадку для циліндричної оболонки підійде вираз [6, с. 1028]:

$$P_{kp} = \frac{Eh}{R(1-\mu^2)} 0.379 \cdot 10^{-4} = 0,13 \text{ МПа}. \quad (12)$$

Рівняння критичного тиску для сферичної оболонки має вигляд [7, с. 500]:

$$P_{kp} = \frac{2Eh^2}{R^2 \sqrt{3(1-\mu^2)}} = 30,9 \text{ МПа}. \quad (13)$$

Рівняння критичного тиску для кільця [7, с.229]:

$$P_{kp} = \frac{3EI}{r_k^3} = 5,15 \text{ МПа}. \quad (14)$$

З цих трьох тисків необхідно взяти найменший (табл. 3).

Таблиця 3 – Фізичні параметри матеріалу

Елемент конструкції	Тиск, МПа
Циліндрична оболонка	0,13
Сферична оболонка	30,9
Кругла пластинка	5,15

Найменший критичний тиск – 0,13 МПа.

Отриманий тиск необхідно підставити у системи рівнянь та знайти невідомі константи.

Для правого боку:

$$\begin{cases} C_1 = -1,634e^{-2} \\ C_2 = 1,209e^{-1} \\ C_3 = 5,06856e^{-4} \\ C_4 = 2,085057e^{-5} \end{cases} \quad (15)$$

Для лівого боку:

$$\begin{cases} C_1 = 1.69e^{-5} \\ C_2 = 2,09e^{-6} \\ C_3 = -1044 \\ C_4 = 1255 \end{cases} \quad (16)$$

Графіки прогинів показані на рис. 5, 6.

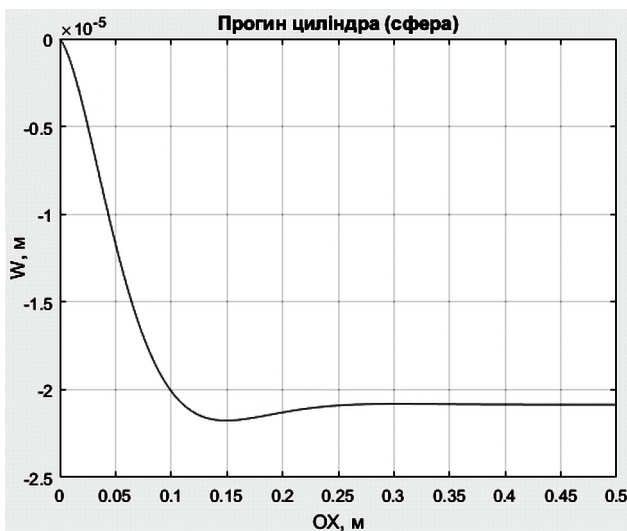


Рисунок 5 – Прогин циліндричної оболонки, що сполучена зі сферичною

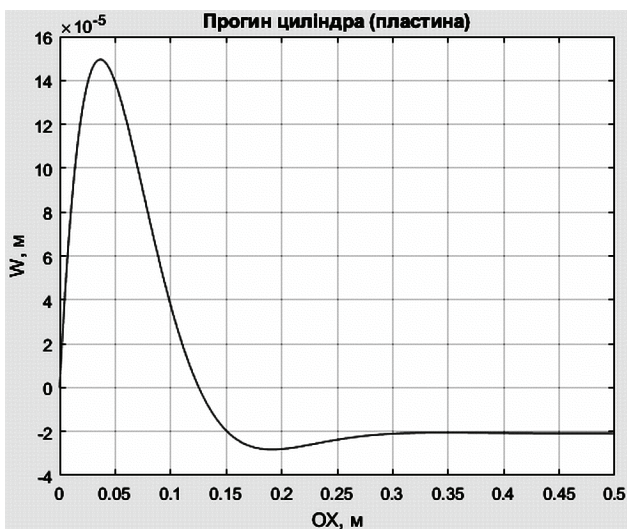


Рисунок 6 – Прогин циліндричної оболонки, що сполучена з пластинкою

З графіків видно, що прогин швидко згасає та на відстані менше ніж радіус оболонки, він стає постійним. Аналогічно можна сказати й про зусилля, наприклад, моменти.

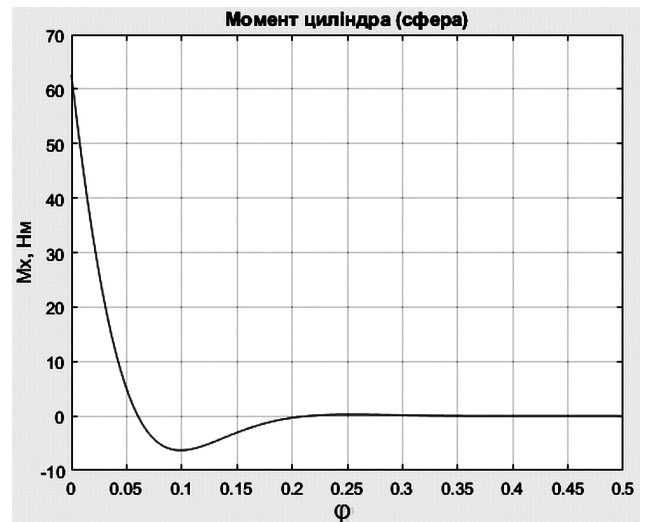


Рисунок 7 – Момент циліндричної оболонки

Тепер необхідно знайти напруження в елементах конструкції, та порівняти їх за границею текучості матеріалу.

Максимальні напруження у сфері [8, с. 213]:

$$\sigma_{\varphi}^{\max} = \frac{N_{\varphi}^{\max}}{h} \pm \frac{6M_{\varphi}^{\max}}{h^2} \quad (17)$$

Максимальні напруження у циліндрі [8, с. 213]:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x^{\max}}{h^2} \quad (18)$$

Максимальні напруження у пластинці [5, с. 59]:

$$\sigma_r^{\max} = \frac{6M_r^{\max}}{h^2} \quad (19)$$

Напруження максимальне у сполученні циліндричної оболонки з пластинкою. Воно дорівнює:

$$\sigma^{\max} = 368 \text{ МПа} < \sigma_{\text{тек}}; \quad (20)$$

Схематичне зображення епюр та таблиці зі значеннями у деяких місцях показані на рис. 8, 9, та в табл. 3, 4.

Таблиця 3 – Значення прогинів

Точка прогину (рис. 8)	Значення прогину, м × 10 ⁵
1	0,72
2	0,65
3	14,95
4	1600

Таблиця 4 – Значення максимальних напружень

Точка напруження (рис. 9)	Значення напруження, МПа
1	15,4
2	12,2
3	368
4	368

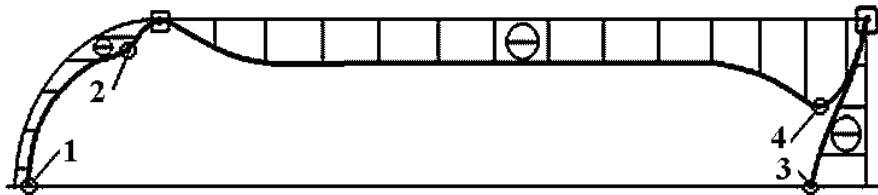


Рисунок 8 – Схема деформації контейнеру

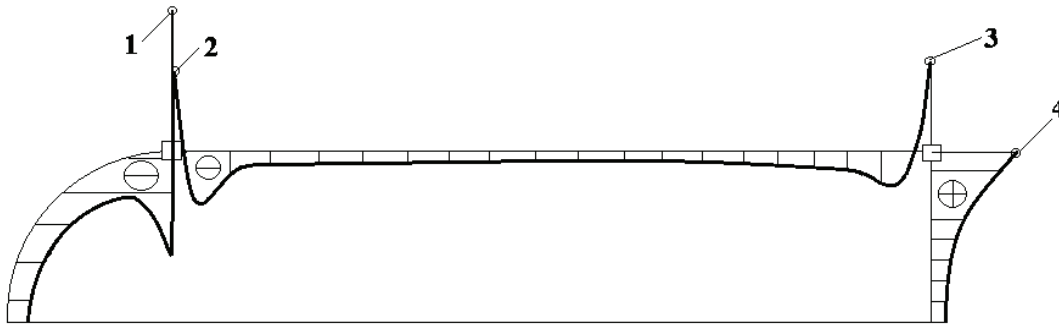


Рисунок 9 – Розподіл напружень в контейнері

Висновки. В роботі досліджено НДС контейнера, що навантажений рівномірним тиском. Виявлено, що при заданих розмірах, при досягненні критичного тиску контейнер втрапить стійкість, при цьому знаходяться у пружному стані.

В рамках дослідження побудовані графіки зусиль та переміщень елементів контейнера. Побудовані епюри та таблиці з напруженнями та прогинами у деяких точках. Побудована таблиця критичних тисків для кожного елемента. З таблиць видно, що найбільш вразливими елементами є циліндрична оболонка та пластинка.

Список літератури

1. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения / под ред. Л.И. Лурье. Москва: Наука, 1968. 456 с.
2. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Учебник для университетов, издание третье. Москва: Высшая школа, 1976. 272 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности, издание второе, переработанное. Москва: Высшая школа. 1982. 264 с.
4. Биргер И.А. Прочность устойчивость колебания, Том 2. Москва: Машиностроение, 1968. 464 с.
5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки, издание второе. Москва: Наука, 1966. 625 с.
6. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении, Том 3. Москва: Машгиз, 1959. 1119 с.

7. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем, издание второе. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 570 с.

8. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении, Том 2. Москва: Машгиз, 1958. 975 с.

Bibliography(transliterated)

1. Chernina V.S. Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniya, pod redaktsiyey L. I. Lur'ye. Moscow: Nauka, 1968. 456 p.
2. Amenzade YU.A. Teoriya uprugosti. Uchebnik dlya universitetov, izdaniye tret'ye. Moscow: Vysshaya shkola, 1976. 272 p.
3. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti, izdaniye vtoroye, pererabotannoye. Moscow: Vysshaya shkola. 1982. 264 p.
4. Birger I.A. Prochnost' ustojchivost' kolebaniya, Tom 2. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 464 p.
5. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki, izdaniye vtoroye. Moscow: Nauka, 1966. 625 p.
6. Ponomarev S.D. Raschety na prochnost' v mashinostroyenii, Tom 3. Moscow: Mashgiz, 1959. 1119 p.
7. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh sistem, izdaniye vtoroye. Moscow: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko- teoreticheskoy literatury, 1955. 570 p.
8. Ponomarev S.D. Raschety na prochnost' v mashinostroyenii, Tom 2. Moscow: Mashgiz, 1958. 975 p.

Надійшла (received) 21.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Красій Данило Максимович (Красий Данило Максимович, Danylo Krasii) – студент, кафедра Динаміки та міцності машин НТУ «ХПІ», тел.:(093)-493-10-29, e-mail: krasiydm@gmail.com

Андрєєв Арнольд Георгійович (Андреев Арнольд Георгиевич, Andreev Arnol'd Georgievich) – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Динаміки та міцності машин» НТУ «ХПІ», тел.:(057) 707-68-79; e-mail: andreev707@ukr.net.

С.В. КРАСНИКОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ТФО С ТУРБИНОЙ 500 МВт

Проведен анализ собственных колебаний системы турбоагрегат-фундамент-основание с турбиной мощностью 500 МВт в частотном диапазоне приближенном к частоте колебаний электромагнитной природы от генератора. Объектом исследования является система турбоагрегат-фундамент-основание. Для исследования выбрана система с паровой турбиной, которая содержит несколько типовых корпусов. Для моделирования и проведения численных расчетных исследований использован метод конечных элементов. Построены геометрические и конечно-элементные модели системы турбоагрегат-фундамент-основание с учетом особенностей взаимодействия гибких корпусов турбины с фундаментом. Проведены расчеты собственных колебаний. Получены собственные частоты и формы колебаний. Полученные результаты дают качественную оценку причин повышенной вибрации отдельных элементов рассматриваемой системы.

Ключевые слова: вибрация, паровая турбина, система турбоагрегат-фундамент-основание, метод конечных элементов, собственные частоты и формы колебаний, фундамент.

С.В. КРАСНИКОВ

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ ТФО З ТУРБІНОЮ 500 МВт

Проведено аналіз власних коливань системи турбоагрегат-фундамент-основа. Система включає до себе залізобетонний фундамент, парову турбіну потужністю 500 МВт з п'яти корпусів, генератор та чотири конденсатори. Для дослідження обрана система з паровою турбіною, що містить кілька типових корпусів. Актуальність проведеного дослідження зумовлена наявністю у системах турбоагрегат-фундамент-основа з великим часом експлуатації та зі значним відпрацюванням базового ресурсу підвищених рівнів вібрації. З іншої сторони актуальність та новизна результатів пов'язана з відсутністю попередніх досліджень з наведеного об'єкту та предмету досліджень. Розглядається система з паровою турбіною, що має чотири типових однакових гнучких корпуса та один жорсткий корпус великої ваги. Було розглянуто власні коливання системи турбоагрегат-фундамент-основа у частотному діапазоні наближеному до частоти коливань електромагнітної природи від генератора. Об'єктом дослідження є система турбоагрегат-фундамент-основа. Для моделювання та проведення чисельних розрахункових досліджень використаний метод скінчених елементів. Побудовано геометричні та скінчено-елементні моделі системи турбоагрегат-фундамент-основа з урахуванням особливостей взаємодії гнучких корпусів турбіни з фундаментом. Моделювання фундаменту виконано за допомогою системи з стрижневих та масових скінчених елементів. Жорсткий корпус парової турбіни та генератор моделювались за допомогою системи масових скінчених елементів. Найбільш гнучкі корпуса парової турбіни моделювались за допомогою системи з оболонкових, стрижневих та масових скінчених елементів. Основа моделювалась за допомогою системи жорсткостей та граничних умов. Конденсатори моделювались за допомогою системи жорсткостей та граничних умов. Особливістю розрахункових моделей є докладне трьохвимірне моделювання гнучких корпусів парової турбіни. Застосована методика моделювання є унікальною та дозволяє проводити докладний аналіз з власних коливань всієї системи. Проведено розрахунки власних коливань. Отримано власні частоти й форми коливань. Отримані результати дають якісну оцінку власних коливань окремих елементів розглянутої системи турбоагрегат-фундамент-основа та системи у цілому. Результати розрахунків було використано при дослідженні причин підвищеної вібрації системи турбоагрегат-фундамент-основа та її окремих елементів.

Ключові слова: вібрація, парова турбіна, система турбоагрегат-фундамент-основа, метод скінчених елементів, власні частоти та форми коливань, фундамент.

S.V. KRASNIKOV

MODELING AND ANALYSIS OF OWN OSCILLATIONS OF THE TFB WITH TURBINE 500 MW

The analysis of the own oscillations of the turbounit- foundation-base system is carried out. The system includes a reinforced concrete foundation, a 500 MW turbine with five bodies, a generator and four condensers. To study the chosen system with a steam turbine, which contains several typical buildings. The relevance of the study is due to the presence of turbounit-foundation-base systems with a long operating time and a significant development of the base resource of increased levels of vibration. On the other hand, the relevance and novelty of the results is due to the lack of previous research on the given object and subject of research. A system with a steam turbine with four typical identical flexible housings and one rigid body of high weight is considered. The system of turbine-base-base in the frequency range close to the frequency of oscillations of electromagnetic nature from the generator was considered. The object of the study is a turbo-base-base system. The method of finite elements is used for modeling and conducting numerical calculations. The geometric and finite-element models of the turbo unit-foundation-base system are constructed taking into account the features of the interaction of flexible bodies of the turbine with the foundation. The modeling of the foundation is done using a system of core and mass finite element. The rigid body of the steam turbine and the generator were modeled using a system of massive finite elements. The most flexible bodies of the steam turbine were modeled using a shell, core and mass finite element system. The basis was modeled using the system of stiffness and boundary conditions. Capacitors were modeled using a system of stiffness

© С.В. Красников, 2019

and boundary conditions. The peculiarity of the calculation models is the detailed three-dimensional modeling of flexible bodies of the steam turbine. The applied simulation technique is unique and allows us to carry out a detailed analysis of the system's own oscillations. The calculations of proper oscillations have been carried out. Own frequencies and forms of oscillations are obtained. The obtained results give a qualitative estimation of the internal oscillations of separate elements of the considered system of the turbo-aggregate-foundation-base and the system as a whole. The results of the calculations were used in the study of the causes of increased vibration of the turbo unit-foundation-base system and its individual elements.

Key words: vibration, steam turbine, turbounit-foundation-base system, finite element method, own frequencies and forms of oscillations, foundation.

Введение. Энергетический комплекс развитых стран базируется на использовании атомной и возобновляемой энергетики. Значительная часть атомных электростанций использует в качестве основных элементов энергетических установок системы турбоагрегат-фундамент-основание (ТФО). В качестве турбин для этих систем используются системы мощностью 500 МВт и более. Первоначально энергоблоки атомных электростанций отечественного производства использовали системы ТФО с турбинами мощностью 500 МВт. Отечественные энергоблоки используют турбины, которые были разработаны ПОАТ «Харьковский турбинный завод» имени С.М. Кирова (сейчас АО «Турбоатом») на рубеже 1960-1970 годов коллективами ученых и инженеров г. Харькова под общим управлением генерального конструктора паровых и газовых турбин Юрия Фёдоровича Косяка. Современное развитие паровых турбин этого направления было продолжено коллективами авторов под руководством д.т.н. Бойко А.В., д.т.н. Солодова В.Г., д.т.н. Воробьева Ю.С., д.т.н. Шульженко Н.Г., д.т.н. Жовдака В.А., генерального конструктора АО «Турбоатом» Левченко Е.В., главного конструктора паровых турбин Швецова В.Л. и его заместителей Гришина Н.Н., Кожешкурта И. И.. Значительный вклад внесли несколько поколений рядовых сотрудников с большим стажем, опытом и навыками решения научных и практических задач. Многие из них по разным причинам ушли от задач турбиностроения, но благодаря ветеранам и новому поколению АО «Турбоатом» имеет ресурсы и возможности наращивания производства и проектирования новых турбоагрегатов. В силу негативных процессов в нашем обществе, развитию энергетического комплекса, строительству новых энергоблоков и производству новых турбогенераторов уделяется недостаточно внимания. Это согласуется с общими планами стран, которые относят к развитым. Согласно планам этих стран к 2040 году планируется полное прекращение выработки энергии атома на Украине. Что возможно при полной потере промышленных ресурсов и превращении страны в аграрно-сырьевой придаток. Это позволит странам с выработанными научными и прочими ресурсами называться развитыми, но не отвечает интересам страны, в которой мы живем. Новые изменения в нашей стране дают надежду на позиционирование ее развития, в частности в области промышленности и энергетики. Это несомненно повысит уровень жизни граждан и приведет к созданию турбин нового поколения и ступенчатой модернизации имеющего парка систем ТФО, в частности с турбинами 500 МВт и выше. При проектировании турбин 500 МВт было решено множество задач,

которые обеспечили их длительную эксплуатацию. Однако на данном этапе большая часть турбин мощностью 500 МВт уже выработали свой проектный ресурс. При этом часть турбин имеют повышенную вибрацию, характер которой позволяет сделать выводы о значительном влиянии на их значения вибрации от электромагнитной составляющей генератора. Исследования в этой области на стадии проектирования не выполнялись в достаточном объеме. Однако они представляют значительную актуальность [1-4].

Цель работы. Необходимо провести моделирование и анализ собственных колебаний системы ТФО с турбиной 500 МВт соответствующих частоте вибрации от электромагнитной составляющей генератора. Объектом проведенных исследований является система ТФО с наиболее гибкими элементами турбины 500 МВт. Предметом исследования являются характеристики собственных колебаний системы ТФО с наиболее гибкими элементами турбины.

Математическая модель. Для моделирования и получения характеристик собственных колебаний используется метод конечных элементов. Основной функционал в общем виде:

$$L(t, O, q) = R(t), \quad (1)$$

где O – различные состояния связи корпуса турбины с фундаментом,

L – уравнение Лагранжа 2-го рода,

q – обобщенные перемещения,

R – внешние силы.

В методе конечных элементов [5-7] выражение (1) обычно записывается в следующем матричном виде:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (2)$$

где M – матрица масс,

C – матрица демпфирования,

K – матрица жесткости.

Собственная частота системы p_j определяется из формулы (3):

$$\det[K - p_j^2 M] = 0. \quad (3)$$

Описание расчетной модели. На основе ранее разработанных геометрических моделей фундамента и корпуса цилиндра низкого давления был построен ряд конечно-элементных моделей [8 - 13]. Для проведения расчетов выбрана модель из 27040 узлов и 23165 конечных элементов. Внешний вид моделей показан на рис. 1. Фундамент моделировался системой стержневых элементов. Наиболее гибкие части турбины моделировались системой пластин, стержней и масс. Жесткие части турбины и генератор моделировались системой масс.

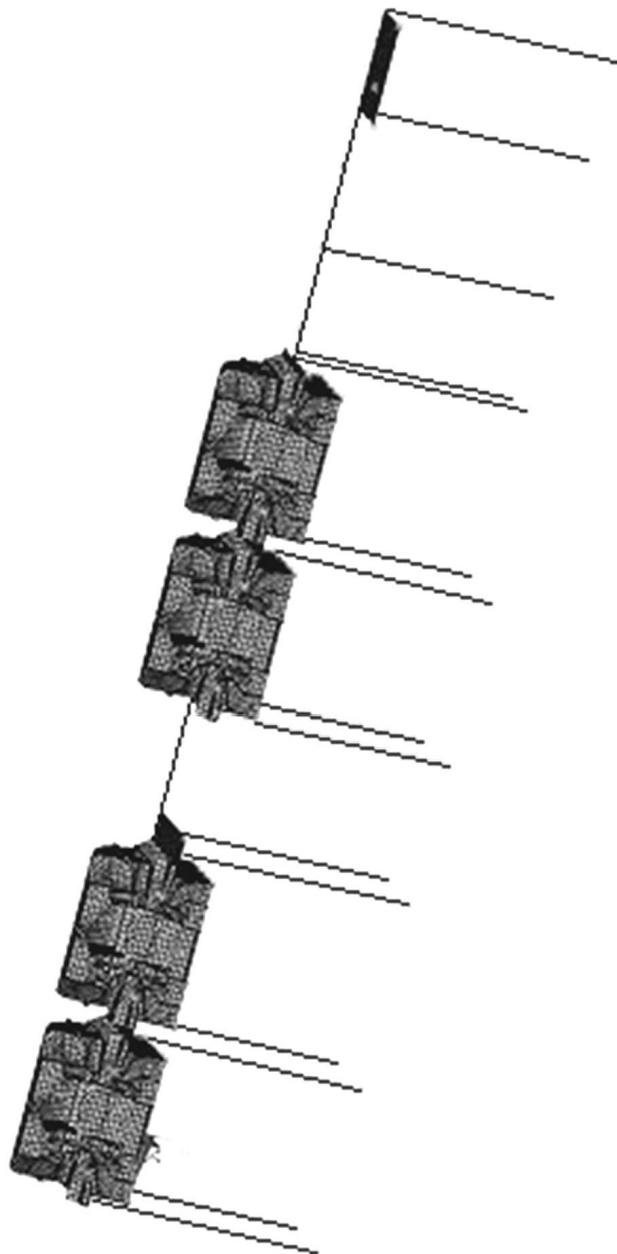


Рисунок 1 – Расчетная модель системы ТФО с турбиной 500 МВт

Связь гибких частей турбины с фундаментом моделировалось системой жесткостей, которая учитывает особенности взаимодействия турбины с фундаментом [14 - 21].

Результаты численных исследований. Были проведены расчеты собственных колебаний системы ТФО вблизи частоты соответствующей частоте вибрации от электромагнитной составляющей генератора. Результаты расчетов представлены в табл. 1 и на рис. 2 – 6.

Таблица 1 – Собственные частоты для системы турбоагрегат фундамент-основание в диапазоне 98 - 102 Гц, Гц

№	Частота	№	Частота	№	Частота
1	98,000	11	99,483	21	101,01
2	98,317	12	99,697	22	101,01
3	98,598	13	100,16	23	101,01
4	98,731	14	100,17	24	101,05
5	99,048	15	100,25	25	101,31
6	99,303	16	100,29	26	101,51
7	99,374	17	100,58	27	101,61
8	99,383	18	100,67	28	101,73
9	99,421	19	100,91	29	101,82
10	99,451	20	100,94	30	101,93

Из табл. 1 видно, что в районе 100 Гц имеется достаточно много собственных частот. Из рис. 2-6 видно, что большая часть собственных форм характеризуется локальными колебаниями пластин верхней части наиболее гибких корпусов турбины. При этом большое количество собственных форм соответствуют кратным собственным частотам. В связи с тем, что гибкие корпуса турбины абсолютно идентичны, то наличие кратных частот связано с различной жесткостью фундамента в местах опирания на него корпусов турбины. Фактически имеет место «расстройка колебаний». Касательно наиболее близких к частоте 100 Гц собственных колебаний можно отметить следующее. На рис. 2 показана собственная форма на частоте 100,16 Гц, которая определяется интенсивными колебаниями торцевой стенки и стенки над опорой подшипника крышек корпусов турбины наиболее удаленных от генератора. Аналогичные формы колебаний для корпусов наиболее близких к генератору имеют собственные формы колебаний для частоты 100,17 Гц (рис. 3).

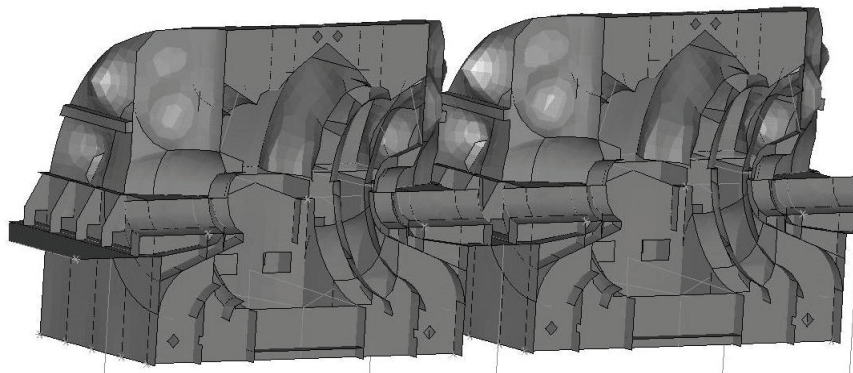


Рисунок 2 – Собственная форма колебаний на частоте 100,16 Гц

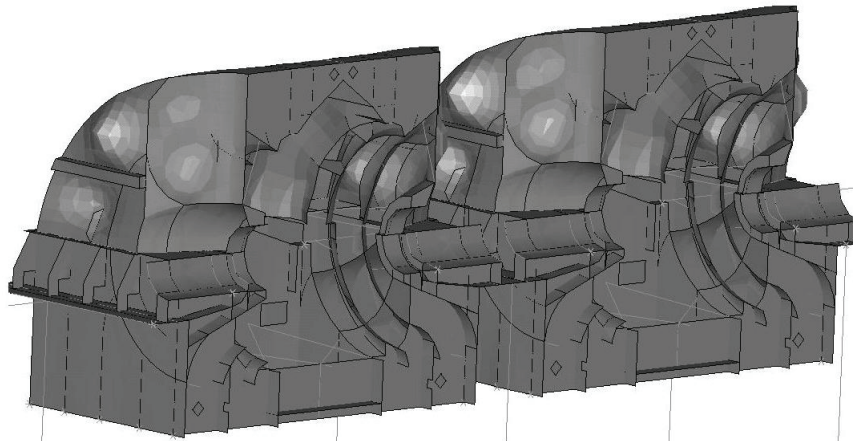


Рисунок 3 – Собственная форма колебаний на частоте 100,17 Гц

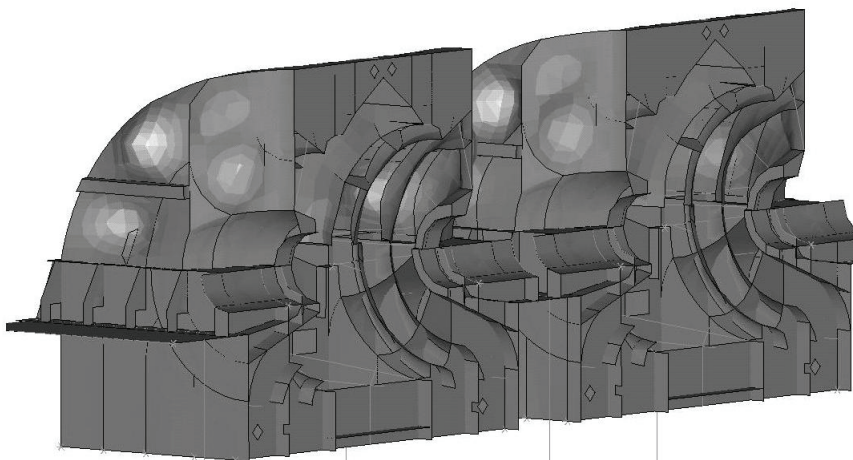


Рисунок 4 – Собственная форма колебаний на частоте 100,25 Гц

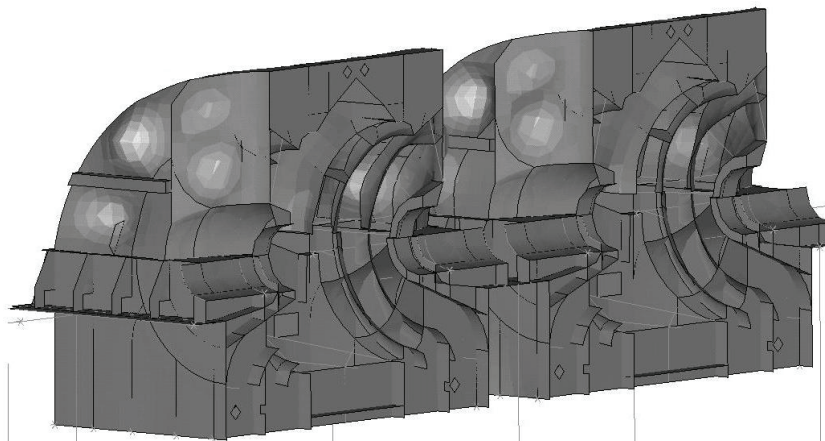


Рисунок 5 – Собственная форма колебаний на частоте 100,29 Гц

Собственные формы на частотах 100,25 Гц и 100,29 Гц (рисунки 4 и 5, соответственно) практически совпадают с приведенными на рисунках 2 и 3. Отличие наблюдается в перераспределении максимумов амплитуд между стенками верхних частей корпусов турбины. Приведенная на рис. 6 собственная форма на частоте 100,68 Гц также характеризуется колебаниями стенок корпусов соответствующим опорам валопровода 1, 2, 7, 8. Остальные собственные формы колебаний в указанном диапазоне частот имеют по-

добный характер показанным на рис. 2 - 6 формам собственных колебаний.

Выводы. В результате моделирования и анализа собственных колебаний системы ТФО определены места повышенной вибрации на частотах близких к частоте возмущения колебаний электромагнитной природы от генератора. Полученные результаты позволяют оценить причины и места повышенной вибрации наиболее гибких корпусов турбины.

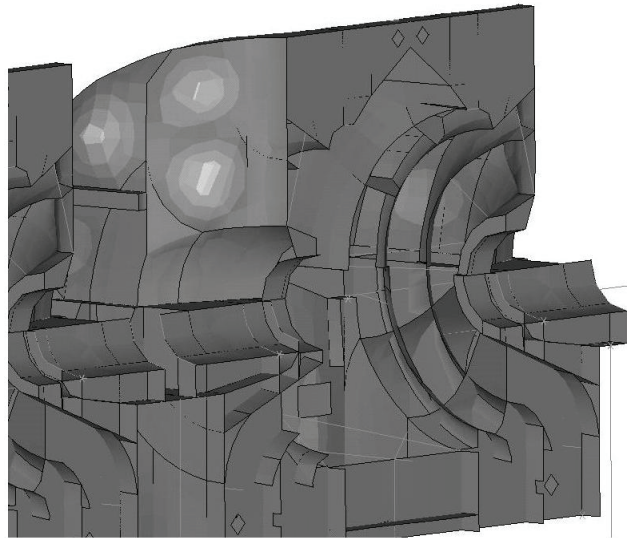


Рисунок 6 – Собственная форма колебаний на частоте 100,68 Гц

Список литературы

1. *Косяк Ю.Ф.* и др. Паротурбинные установки атомных электростанций / ред. *Косяк Ю.Ф.* Москва: Энергия, 1978. 312 с.

2. *Трояновский Б.М.* Турбины для атомных электростанций. Москва: Энергия, 1978. 182 с.

3. *Левченко Е.В., Швецов В.Л., Кожешкурт И.И., Лобко А.Н.* Опыт ОАО «ТурбоАтом» в разработке и модернизации турбин для АЭС. СПб: Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. 2010. № 3. С. 5-11.

4. *Субботин В.Г., Левченко Е.В., Швецов В.Л.* Паровые турбины ОАО «Турбоатом» для тепловых электростанций. Харьков: Вестник НТУ «ХПИ». 2009. № 3. С. 6-17.

5. *Еременко С.Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Основа, 1991. 271 с.

6. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984. 428 с.

7. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan. 2009. 104 p.

8. *Назаренко С.А., Ткачук Н.А.* Обзор некоторых ключевых направлений исследований ученых НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций. Харьков: Вестник НТУ «ХПИ». 2017. № 39. С.49-56.

9. *Ларін А., Чумаченко О.* Співпраця запорізьких авіадвигунобудівних підприємств з провідними вченими України в галузі динамічної міцності в 1950-1970-х рр. Харків: Дослідження з історії техніки. 2016. № 23. С.72-78.

10. *Жовдак В.А., Красников С.В., Степченко А.С.* Решение задачи статистической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров. Харьков: Проблемы машиностроения. 2004. Т.7, № 3. С. 39 – 47.

11. *Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He and Lei Xiao* A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction. Düsseldorf: ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. 2014. no. V01BT27A041. P. 1-8.

12. *Alan Turnbull* Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. London: The Royal Society. 2014. no. 20140254. P. 1-19.

13. *Chowdhury Indrajit, Dasgupta P. Shambhu* Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press. 2009. 616 p.

14. *Рунов Б.Т.* Исследование и устранение вибрации

паровых турбоагрегатов. Москва: Энергоиздат, 1982. 352 с.

15. *Yu M., Feng N., Hahn E. J.* An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters. Journal of Sound and Vibration. 2016. Vol. 365. P. 182-198.

16. *Xu X.P., Han Q.K., Chu F.L.* Nonlinear vibration of a generator rotor with unbalanced magnetic pull considering both dynamic and static eccentricities. Archive of Applied Mechanics. 2016. Vol. 86. P. 1521-1536.

17. *Jalali M.H., Ghayour M., Ziaei Rad S., Shahriari B.* Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation. 2014. Vol. 53. P. 1-9.

18. *Zhang Yang, Yanlong Jiang, Guoyuan Zhang* Bending fault evaluation for the HP-IP rotor system of the nuclear steam turbine based on the dynamic model. Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. P. 3364-3379.

19. *Minli Yu., Ningsheng Feng, Eric J. Hahn* Corrigendum to “An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters”. J. Sound Vib. 2016. Vol. 365. P. 182-198.

20. *Minli Yu, Jike Liu, Ningsheng Feng, Eric J. Hahn* Experimental evaluation of a quasi-modal parameter based rotor foundation identification technique. J. Sound Vib. 2017. Vol. 411. P. 165-192.

21. *Красников С.В.* Моделирование и анализ вибрационных характеристик корпуса паровой турбины большой мощности. Харьков: Вестник НТУ «ХПИ». 2017. № 39. С.23-26.

Bibliography (transliterated)

1. *Kosyak Yu.F.* and other Paroturbinnye ustanovki atomnykh elektrostantsii / red. *Kosyak Yu.F.* [Steam turbine installations of atomic power plants]. Moscow: Energiya. 1978. 312 p. [in Russian].

2. *Troyanovskii B.M.* Turbiny dlya atomnykh elektrostantsii [Turbines for nuclear power plants]. Moscow: Energiya, 1978. 182 p. [in Russian].

3. *Levchenko E.V., Shvetsov V.L., Kozheshkurt I.I., Lobko A.N.* Opyt OAO «TurboAtom» v raz-rabotke i modernizatsii turbin dlya AES [Experience of OJSC “TurboAtom” in the development and modernization of turbines for nuclear power plants.], Energeticheskie i teplotekhnicheskie protsessy i oborudovanie. SantPeterburg. 2010. № 3. P. 5-11 [in Russian].

4. *Subbotin V.G., Levchenko E.V., Shvetsov V.L.* Parovye turbiny OAO "Turboatom" dlya teplovykh elektrostantsii [Tur-

boatom steam turbines for thermal power plants]. Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI". Kharkiv: 2009. № 3. P. 6-17 [in Russian].

5. *Eremenko S.Yu.* Metody konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tel [Finite-element methods in mechanics of deformable bodies.]. Kharkiv: Osnova, 1991. 271 p. [in Russian].

6. *Gallager R.* Metod konechnykh elementov. Osnovy [The finite element method. Basedata]. Moscow: Mir, 1984. 428 p. [in Russian].

7. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan, 1984. 104 p.

8. *Nazarenko S.A., Tkachuk N.A.* Obzor nekotorykh klyuchevykh napravlenii issledovaniy uchenykh NTU «KhPI» v oblasti dinamiki konstruktivnykh. [Review of the main directions of research of scientists of NTU "KhPI" in the field of dynamics of constructions]. Visnik NTU «KhPI». Kharkiv: 2017. № 39. P. 49-56 [in Russian].

9. *Larin A., Chumachenko O.* Spivpratsya zaporiz'kikh aviadvigunobudivnykh pidpriemstv z providnimi vchenimi Ukraïni v galuzi dinamich-noï mitsnosti v 1950-1970-kh rr. [Cooperation Zaporizhzhya aviation engine-building companies with the leading scientists of Ukraine in the field of dynamic strength in the 1950-1970.] Doslidzhennya z istorii tekhniki. Kharkiv: 2016. № 23. P. 72-78 [in Ukrainian].

10. *Zhovdak V.O., Krasnikov S.V., Stepchenko O.S.* Reshenie zadachi statisticheskoi dinamiki ma-shinostroitel'nykh konstruktivnykh s uchetom slu-chainogo izmeneniya parametrov [The solution of the problem of the statistical dynamics of the machine-building constructions taking into account a random change in parameters. Kharkiv: Engineering problems]. Problemy mashinostroeniya. Kharkiv: 2004. № 3. P. 39-47 [in Russian].

11. *Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He and Lei Xiao* A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction. ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition, Düsseldorf: 2004. V01BT27A041. P. 1-8.

12. *Alan Turnbull* Corrosion pitting and environmental

assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, London: The Royal Society. 2014. № 20140254. P. 1-19.

13. *Chowdhury Indrajit, Dasgupta P. Shambhu* Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press, 2009. 616 p.

14. *Runov B.T.* Issledovanie i ustranenie vib-ratsii parovykh turboagregatov [Research and elimination of the vibration of the steam turbine units]. Moscow: Energoizdat, 1982. 352 p. [in Russian].

15. *Gallager R.* Metod konechnykh elementov. Osnovy [The finite element method. Basedata]. Moscow: Mir, 1984. 428 p. [in Russian].

16. *Xu X.P., Han Q.K., Chu F.L.* Nonlinear vibration of a generator rotor with unbalanced magnetic pull considering both dynamic and static eccentricities. Archive of Applied Mechanics. 2016. № 86. P. 1521-1536.

17. *Jalali M.H., Ghayour M., Ziaei Rad S., Shahriari B.* Dynamic analysis of a high speed rotor-bearing system. Measurement: Journal of the International Measurement Confederation. 2014. № 53. P. 1-9.

18. *Zhang Yang, Yanlong Jiang, Guoyuan Zhang* Bending fault evaluation for the HP-IP rotor system of the nuclear steam turbine based on the dynamic model. Journal of Vibroengineering. 2017. № 19. P. 3364-3379.

19. *Minli Yu., Ningsheng Feng, Eric J. Hahn* Corrigendum to "An equation decoupling approach to identify the equivalent foundation in rotating machinery using modal parameters" J. Sound Vib. 2016. № 365. P. 182-198.

20. *Minli Yu, Jike Liu, Ningsheng Feng, Eric J. Hahn* Experimental evaluation of a quasi-modal parameter based rotor foundation identification technique. J. Sound Vib. 2017. № 411. P. 165-192.

21. *Krasnikov S.V.* Modelirovaniye i analiz vib-ratsionnykh kharakteristik korpusa parovoi turbiny bol'shoi moshchnosti [Modeling and analysis of the vibration characteristics of a high-power steam turbine hull]. Visnik NTU «KhPI». Kharkiv: 2017. № 39. P. 23-26 [in Russian].

Надійшла (received) 04.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Красніков Сергій Васильєвич (Красніков Сергій Васильєвич, Krasnikov Sergij Vasyl'ovych) кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет: тел. (+038057) 707-37-30; e-mail: vsevavr@yandex.ru

А.О. ЛОВСЬКА

ВПЛИВ ТИСКУ НАСИПНОГО ВАНТАЖУ НА СТІЙКІСТЬ КОНТЕЙНЕРА ПРІ ПЕРЕВЕЗЕННІ ЗАЛІЗНИЧНИМ ПОРОМОМ

Визначено тиск насипного вантажу на стіни контейнера при перевезенні у складі комбінованого поїзда на залізничному поромі. В якості розрахункового використаний метод Кулона з корегуванням Синельникова. Дослідження проведені стосовно контейнера типорозміру 1СС, завантаженого зерном. Враховано, що перевезення контейнера здійснюється на залізничному поромі «Герои Шипки», акваторією Чорного моря. При визначенні тиску враховано динамічне навантаження, яке діє на контейнер при коливаннях залізничного порому в умовах бортової хитавиці. При цьому розглянуто три схеми переміщень контейнера, розміщеного на вагоні-платформі при коливаннях залізничного порому: відсутність переміщень вагона-платформи та контейнерів відносно початкового положення при коливаннях залізничного порому (I схема); наявність переміщень вагона-платформи при коливаннях залізничного порому з урахуванням нерухомості контейнерів відносно рами вагона-платформи (II схема); наявність переміщень вагона-платформи відносно палуби та контейнерів відносно рами вагона-платформи (III схема). Отримані результати враховано при визначенні стійкості контейнера відносно рами вагона-платформи. Визначено кути крену залізничного порому при яких забезпечується стійкість контейнера відносно рами вагона-платформи. Встановлено, що стійкість контейнера відносно рами вагона-платформи забезпечується при кутах крену залізничного порому – до 10° (I схема), до 8° – (II схема), до 6° (III схема). Це викликає необхідність удосконалення схеми взаємодії контейнера з вагоном-платформою для забезпечення безпеки перевезень залізничним поромом. Проведені дослідження сприятимуть підвищенню безпеки перевезень контейнерів у складі комбінованих поїздів на залізничних поромом.

Ключові слова: контейнер, навантаження конструкції, стійкість, комбінований транспорт, залізнично-поромні перевезення.

А.А. ЛОВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НАСЫПНОГО ГРУЗА НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНТЕЙНЕРА ПРИ ПЕРЕВОЗКЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫМ ПАРОМОМ

Определено давление насыпного груза на стены контейнера при перевозке в составе комбинированного поезда на железнодорожном пароме. В качестве расчетного использован метод Кулона с корректировкой Синельникова. Исследования проведены относительно контейнера типоразмера 1СС, загруженного зерном. Учтено, что перевозка контейнера осуществляется на железнодорожном пароме "Герои Шипки", акваторией Черного моря. При определении давления учтена динамическая нагрузка, действующая на контейнер при колебаниях железнодорожного парома в условиях бортовой качки. При этом рассмотрены три схемы перемещений контейнера, расположенного на вагоне-платформе при колебаниях железнодорожного парома: отсутствие перемещений вагона-платформы и контейнеров относительно начального положения при колебаниях железнодорожного парома (I схема); наличие перемещений вагона-платформы при колебаниях железнодорожного парома с учетом неподвижности контейнеров относительно рамы вагона-платформы (II схема); наличие перемещений вагона-платформы относительно палубы и контейнеров относительно рамы вагона-платформы (III схема). Полученные результаты учтены при определении устойчивости контейнера относительно рамы вагона-платформы. Определены углы крена железнодорожного парома при которых обеспечивается устойчивость контейнера относительно рамы вагона-платформы. Установлено, что устойчивость контейнера относительно рамы вагона-платформы обеспечивается при углах крена железнодорожного парома – до 10° (I схема), до 8° – (II схема), до 6° (III схема). Это вызывает необходимость совершенствования схемы взаимодействия контейнера с вагоном-платформой для обеспечения безопасности перевозок железнодорожным паромом. Проведенные исследования будут способствовать повышению безопасности перевозок контейнеров в составе комбинированных поездов на железнодорожных паромом.

Ключевые слова: контейнер, нагружение конструкция, устойчивость, комбинированный транспорт, железнодорожно-паромные перевозки.

A.O. LOVSKA

INFLUENCE OF BULK CARGO PRESSURE ON CONTAINER STABILITY DURING TRANSPORTATION BY RAILROAD FERRY

Efforts of bulk cargo expansion on the walls of the container during transportation as a part of a combined train by rail ferry are determined. The Coulomb method with Sinelnikov correction was used as the calculation. Studies have been conducted on a grain loaded 1C container. It is considered that the transportation of the container is carried out on the railway ferry "Heroes of Shipka", the waters of the Black Sea. Dynamic loading, which acts on the container during fluctuations of the railway ferry in the conditions of onboard swing, is taken into account in determining the forces of decomposition. At the same time three schemes of movements of the container placed on the wagon platform during fluctuations of the railway ferry are considered: absence of movements of the wagon platform and containers relative to the starting position during the fluctuations of the railway ferry (I scheme); the presence of dis-

placements of the wagon-platform during the fluctuations of the railway ferry, taking into account the immobility of the containers relative to the frame of the wagon-platform (scheme II); the presence of displacement of the platform wagon relative to the deck and containers relative to the frame of the wagon platform (scheme III). The results obtained are taken into account in determining the stability of the container relative to the frame of the wagon platform. The angles of roll of the ferry at which the stability of the container relative to the frame of the wagon platform are determined. It is established that the stability of the container relative to the frame of the wagon platform is provided at the angles of roll of the ferry – up to 10° (I scheme), up to 8° – (II scheme), up to 6° (III scheme). This necessitates the improvement of the interaction scheme of the container with the wagon platform to ensure the safety of carriage by rail. The researches carried out will help to increase the safety of transportation of containers as part of combined trains by rail ferries.

Key words: container, load design, stability, combined transport, railroad ferry.

Вступ. Забезпечення конкурентоспроможності залізничного транспорту зумовлює необхідність впровадження в експлуатацію комбінованих транспортних систем. Відомо, що однією з найбільш перспективних та поширених серед таких є контейнерні перевезення.

Мобільність контейнера зумовлює навантаження його конструкції при перевезенні різними видами транспорту: залізничним, автомобільним, авіаційним та морським. Введення в експлуатацію транспортного коридору новий «Шовковий шлях», який сполучив Україну з Китаєм, забезпечило можливість слідування поїздів комбінованого транспорту морем на залізничних поромках (рис. 1 [1, 2]).

Важливо зазначити, що нормативна база щодо проектування та розрахунку контейнерів не висвітлює належним чином питань їх перевезень на залізничних поромках морем у складі комбінованих поїздів.

Тому, для забезпечення безпеки перевезень контейнерів, розміщених на вагонах-платформах морем необхідним є дослідження їх стійкості при коливаннях залізничного порому.



Рисунок 1 – Завантаження вагонів-платформ з контейнерами на залізничний пором

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Визначення тиску насипного вантажу на стіни вагона при перевезенні залізничним поромом проводиться у [3]. При цьому динамічне навантаження, яке спричиняє додатковий вплив на бокову стіну кузова вагона визначено шляхом диференціювання закону руху морської хвилі. Рух морської хвилі завданий у вигляді синусоїдального закону. Тобто до уваги не прийняті енергетичні складові коливального процесу.

Розрахунок тиску насипного вантажу на кузов напіввагона проводиться у [4]. Однак питанню визначення стійкості вагона при перевезенні морем в роботі уваги не приділено.

Оцінка дії насипного вантажу на стіни кузова вагона висвітлена у [5-7]. При цьому навантаженість кузова досліджено методами математичного та комп'ютерного моделювання. Однак визначення тиску насипного вантажу на стіни кузова при перевезенні на залізничному поромі авторами не проводиться.

Визначення динамічної стійкості вантажу при завантаженні та транспортуванні контейнером проводиться у [8]. Дослідження проведені стосовно тарноштучного вантажу.

Заходи щодо завантаження та кріплення сталевих рулонів у контейнерах при залізнично-водних перевезеннях розглянуті у [9].

Особливості проектування контейнерів для перевезення довгомірних вантажів висвітлюється у [10]. Наведений розрахунок на міцність несучих елементів контейнера при дії на його стіни навантажень від труб, який реалізовано за методом скінчених елементів.

При цьому в розглянутих роботах не приділяється уваги питанню визначення тиску насипного вантажу на стіни контейнера.

Обґрунтування впровадження в експлуатацію контейнерів для перевезення фруктів та овочів проводиться у [11]. Зазначені основні вимоги, які встановлюються для таких контейнерів. Наведені результати розрахунку на міцність контейнера при основних експлуатаційних режимах навантаження.

Однак визначення тиску від перевозимого вантажу на стіни контейнера в роботі не проводиться.

Вплив центру ваги контейнера на метacentричну висоту судна досліджується у [12]. Запропонований алгоритм оцінки впливу положення центру ваги контейнера на остійність контейнеровоза.

Визначенню стійкості контейнера у складі комбінованого поїзда при перевезенні морем у роботі уваги не приділяється.

Мета статті. Метою статті є висвітлення особливостей впливу тиску насипного вантажу на стійкість контейнера при перевезенні у складі комбінованого поїзда залізничним поромом. Для досягнення зазначеної мети розв'язані такі завдання:

– визначено тиск насипного вантажу на стіну контейнера при перевезенні у складі комбінованого поїзда залізничним поромом;

– визначено стійкість контейнера відносно рами вагона-платформи при перевезенні у складі комбінованого поїзда залізничним поромом.

Викладення основного матеріалу статті. Визначення тиску насипного вантажу на стіни контейнера, розміщеного на вагоні-платформі здійснене для випадку кутових переміщень залізничного порому відносно повздовжньої осі (еквівалент коливань бічна хитавиця в «Динаміці вагонів»), як випадку найбільшої навантаженості конструкції контейнера (рис. 2).

При цьому визначення тиску насипного вантажу проводилося для контейнера, розміщеного на крайньому від фальшборта вагоні-платформі, верхньої палуби залізничного порому.

Для визначення тиску на стіни контейнера використано метод Кулона з корегуванням Синельникова [3]:

$$p = \gamma h \frac{\cos^2(\rho - \alpha)}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin \rho \sin(\rho - \alpha)}{\cos \alpha}}\right]^2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

де γ – об'ємна вага вантажу, кН/м³;

h – висота розміщення вантажу, м;

ρ – кут внутрішнього тертя (для ідеально сипучого середовища дорівнює куту природного відкосу [3]).

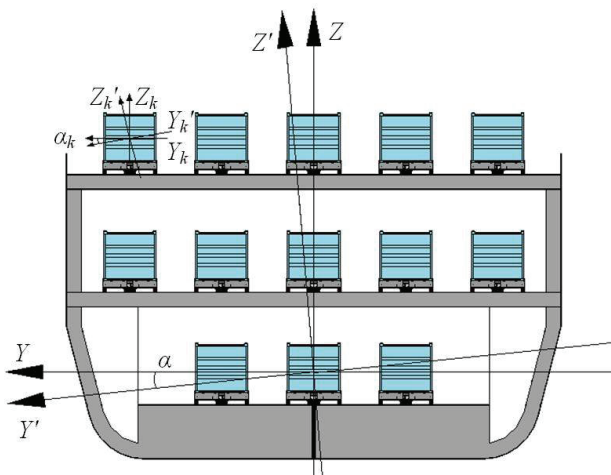


Рисунок 2 – Схема переміщень залізничного порому, завантаженого контейнерними поїздами, відносно повздовжньої осі

Схема переміщень контейнера, розміщеного на вагоні-платформі при коливаннях залізничного порому наведена на рис. 3. При цьому в якості насипного вантажу розглянуто зерно, як один з найбільш поширених типів насипних вантажів, що перевозяться у контейнерах.

При кутових переміщеннях контейнера відносно повздовжньої осі до уваги також прийняте динамічне навантаження, оскільки воно спричиняє додатковий силовий вплив на вантаж та стіни контейнера.

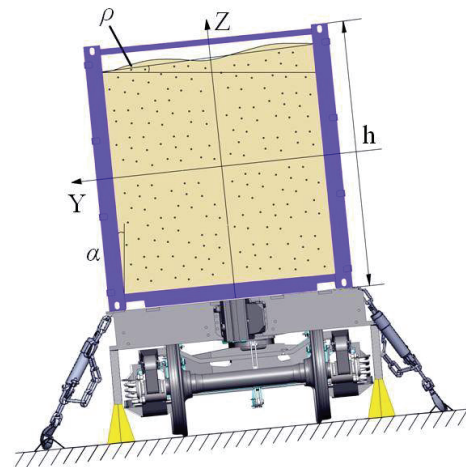


Рисунок 3 – Схема переміщень контейнера, розміщеного на вагоні-платформі при коливаннях залізничного порому

У зв'язку з тим, що вантаж має розподілення відносно стіни контейнера додатковий тиск визначається:

$$F_{\text{доп}} = \frac{F_{\theta}}{S_{\kappa}}, \quad (2)$$

де F_{θ} – динамічне навантаження, яке діє на вантаж, кН;

S_{κ} – площа бокової стіни контейнера, м².

З урахуванням цього для визначення тиску насипного вантажу на стіни контейнера використана формула:

$$p = \gamma h \frac{\cos^2(\rho - \alpha)}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin \rho \sin(\rho - \alpha)}{\cos \alpha}}\right]^2 \cos \alpha} + F_{\text{доп}}. \quad (3)$$

Динамічне навантаження, яке діє на контейнер при перевезенні залізничним поромом визначено за методикою, наведеною у [13].

При цьому розглянуто три схеми переміщень контейнера, розміщеного на вагоні-платформі при коливаннях залізничного порому:

1) відсутність переміщень вагона-платформи та контейнерів відносно початкового положення при коливаннях залізничного порому (I схема);

2) наявність переміщень вагона-платформи при коливаннях залізничного порому з урахуванням нерухомості контейнерів відносно рами вагона-платформи (II схема);

3) наявність переміщень вагона-платформи відносно палуби та контейнерів відносно рами вагона-платформи (III схема).

Результати розрахунків у вигляді залежностей прискорень, які діють на контейнер від кута крену залізничного порому наведені на рис. 4.

Враховано, що перевезення контейнера здійснюється залізничним поромом «Герой Шипки», акваторією Чорного моря.

Розрахунки проведені стосовно контейнера типу розміру 1СС, масою брутто 24 т.

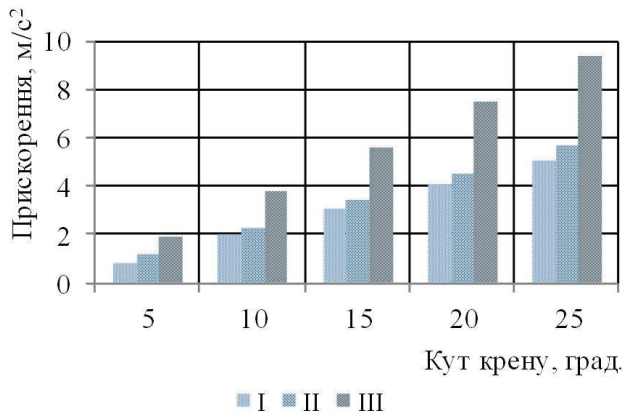


Рисунок 4 – Прискорення, які діють на контейнер при перевезенні залізничним поромом

Отримані результати враховано при визначенні тиску насипного вантажу на стіни контейнера та його стійкості відносно рами вагона-платформи.

Для забезпечення стійкості рівноваги контейнера відносно рами вагона-платформи повинна виконуватися умова [13, 14]:

$$k_c = \frac{M_{\text{відн}}}{M_{\text{пер}}} \geq 1, \quad (4)$$

де $M_{\text{відн}}$ – величина відновлюючого моменту;

$M_{\text{пер}}$ – величина перекидаючого моменту.

$$M_{\text{пер}} = p'_k \cdot \frac{h'_k}{2} + M_{\text{бр}} \cdot (g \cdot \sin \alpha + \ddot{q}_k) \cdot \frac{h'_k}{2} + (P_p \cdot S_\sigma) \cdot \frac{h'_k}{2}, \quad (5)$$

$$M_{\text{відн}} = P_{\text{бр}} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{B_k}{2} + n_\phi \cdot (M_{\text{бр}} \cdot (g \cdot \sin \alpha + \ddot{q}_k)) \cdot \frac{h_\phi}{2}, \quad (6)$$

де p'_k – рівнодіюча вітрового навантаження на бокову поверхню контейнера;

h'_k – висота контейнера;

$M_{\text{бр}}$ – маса брутто контейнера;

α – кут нахилу контейнера;

\ddot{q}_k – прискорення, яке діє на контейнер при ку-

тових переміщеннях відносно повздовжньої осі;

P_p – тиск насипного вантажу;

S_σ – площа бокової стіни контейнера;

$P_{\text{бр}}$ – вага брутто контейнера;

B_k – ширина контейнера;

n_ϕ – кількість фітингових упорів на які здійснюється обпирання контейнера при кутових переміщеннях відносно повздовжньої осі;

h_ϕ – висота фітингового упора.

Результати проведених розрахунків наведені на рис. 5.

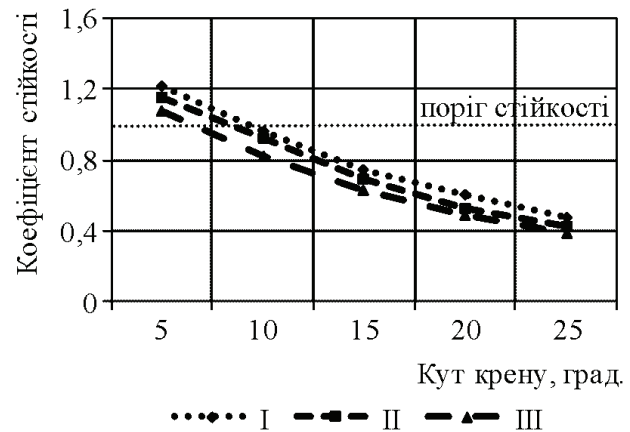


Рисунок 5 – Залежність коефіцієнту стійкості контейнера відносно рами вагона-платформи від кута крену залізничного порому

Проведені розрахунки дозволяють зробити висновок, що стійкість контейнера відносно рами вагона-платформи забезпечується при кутах крену залізничного порому при I схемі коливаль – до 10° , при II – до 8° , при III – до 6° . Це викликає необхідність удосконалення схеми взаємодії контейнера з вагоном-платформою для забезпечення безпеки перевезень залізничним поромом.

Висновки з дослідження і перспективи, подальший розвиток у даному напрямку.

1. Визначено тиск насипного вантажу на стіну контейнера при перевезенні у складі комбінованого поїзда залізничним поромом. В якості розрахункового застосований метод Кулона з корегуванням Синельникова. При визначенні тиску враховано динамічне навантаження, яке діє на контейнер при перевезенні залізничним поромом та спричиняє додатковий вплив на насипний вантаж;

2. Визначено стійкість контейнера відносно рами вагона-платформи при перевезенні у складі комбінованого поїзда залізничним поромом. Встановлено, що стійкість контейнера, розміщеного на вагоні-платформі забезпечується при кутах крену залізничного порому до 10° (I схема), до 8° (II схема), до 6° (III схема).

Проведені дослідження дозволяють зробити висновок про необхідність удосконалення схеми взаємодії контейнера з вагоном-платформою при перевезенні залізничним поромом. Це сприятиме дотриманню безпеки перевезень контейнерів морем, а також підвищенню ефективності експлуатації комбінованих перевезень.

Список літератури

1. Новый старый маршрут: присоединилась ли Украина к Новому шелковому пути. URL: <https://delo.ua/business/novyj-staryj-marshrut-prisoedinilas-li-ukraina-k-novomu-shelkovo-337144/> 19.12.2017.
2. Южный «Шелковый путь» из Украины в Китай открыт. URL: <http://seafarers.com.ua/ukrainian-silk-path-open/6517/> 19.01.2016.
3. Землезин И.Н. К оценке нагрузок распора сыпучих грузов в условиях транспортировки вагонов на морских

паромах. Сб. «Исследование динамики вагонов» Труды ЦНИИ МПС. 1965. Вып. 307. С. 37-63.

4. *Ловська А.О.* Визначення зусиль розпору насипного вантажу на стіни кузова напіввагону при перевезенні залізничним поромом. Збірник наукових праць УкрДАЗТ. 2014. Вип. 143. С. 54-57.

5. *Сенько В.И., Пуцято А.В.* Оценка воздействия перевозимых сипучих грузов на кузова вагонов. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта им. акад. В. А. Лазаряна. 2009. №30. С. 214-222.

6. *Фомін О.В.* Впровадження круглих труб в несучі системи напіввагонів з забезпеченням раціональних показників міцності. Науковий журнал «Технологический аудит и резервы производства». 2015. № 4/1(24). С. 83-89.

7. *Fomin O.V., Lovska A.O., Plakhtii O.A., Nerubatskyi V.P.* The influence of implementation of circular pipes in load-bearing structures of bodies of freight cars on their physico-mechanical properties. Scientific Bulletin of National Mining University. 2017. Iss. 6. P. 89-96.

8. *Evandro C. Bracht, Thiago A. de Queiroz, Rafael C.S. Schouery, Flávio K. Miyazawa* Dynamic cargo stability in loading and transportation of containers. IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). 2016, 21-25 Aug.

9. *Hongxia Lv, Zhengjiang Yang, Yushuang Zhou* Measures of Loading and Securing Steel Coils in Containers in Rail-Water Combined Transport. ICTE. 2013, October.

10. *Панасенко Н.Н., Яковлев П.В.* Проектирование контейнеров для морской перевозки длинномерных труб. Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология. 2014. № 3. С. 97-107.

11. *Khadjimukhametova Matluba Adilovna, Rakhmatov Zafar Xasanovich* Development of improved technical means for transportation fruits and vegetables. European science review. 2016. P. 175-177.

12. *Царик Р.С., Акмайкин Д.А.* Оценка влияния положения центра тяжести контейнера на метacentрическую высоту контейнерова. Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. № 6 (40). С. 58-70. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-6-58-70

13. *Lovska A.* Simulation of loads on the carrying structure of an articulated flat car in combined transportation. International Journal of Engineering & Technology. 2018. № 7 (4.3). P. 140-146.

14. *Ловська А.О.* Визначення навантаженості контейнерів у складі комбінованих поїздів при перевезенні залізничним поромом. Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. 2017. Вип. 6 (72). С. 49-60.

References (transliterated)

1. *Novyyi staryiy marshrut: prisoedinilas li Ukraina k Novomu shelkovomu puti.* URL: <https://delo.ua/business/novyyi-staryi-marshrut-prisoedinilas-li-ukraina-k-novomu-shelkovo-337144/> 19.12.2017.

2. *Yuzhnyiy «Shelkovyyi put» iz Ukrainyi v Kitay otkryit.* URL: <http://seafarers.com.ua/ukrainian-silk-path-open/6517/19.01.2016>.

3. *Zemlezin I.N.* K otsenke nagruzok raspora syipuchih грузов v usloviyah transportirovki vagonov na morskikh paromah. Sb. «Issledovanie dinamiki vagonov» Trudy TsNII MPS. 1965. Vol. 307. P. 37-63.

4. *Lovska A.O.* Vznachennya zusul rozporu nasipnogo vantzhu na stini kuzova napivvagonu pri perevezenni zaliznichnim poromom. Zbirnik naukovih prats UkrDAZT. 2014. Vol. 143. P. 54-57.

5. *Senko V.I., Putyato A.V.* Otsenka vozdeystviya perevozimyyih sipuchih грузов na kuzova vagonov. Vestnik Dnepropetrovskogo natsionalnogo universiteta zheleznodorozhnogo transporta im. akad. V.A. Lazaryana. 2009. № 30. P. 214-222.

6. *Fomin O.V.* Vprovadzheniya kruglih trub v nesuchi sistemi napivvagoniv z zabezpechenniam ratsionalnih pokaznikov mitsnosti. Naukoviy zhurnal «Tehnologicheskii audit i rezervy proizvodstva». 2015. № 4/1(24). P. 83-89.

7. *Fomin O.V., Lovska A.O., Plakhtii O.A., Nerubatskyi V.P.* The influence of implementation of circular pipes in load-bearing structures of bodies of freight cars on their physico-mechanical properties. Scientific Bulletin of National Mining University. 2017. Iss. 6. P. 89-96.

8. *Evandro C. Bracht, Thiago A. de Queiroz, Rafael C.S. Schouery, Flávio K. Miyazawa* Dynamic cargo stability in loading and transportation of containers. IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). 2016, 21-25 Aug.

9. *Hongxia Lv, Zhengjiang Yang, Yushuang Zhou* Measures of Loading and Securing Steel Coils in Containers in Rail-Water Combined Transport. ICTE. 2013, October.

10. *Panasenko N.N., Yakovlev P.V.* Proektirovanie konteynerov dlya morskoy perevozki dlinnomernykh trub. Vestnik Astrahanskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta. Seriya: Morskaya tehnika i tehnologiya. 2014. № 3. P. 97-107.

11. *Khadjimukhametova Matluba Adilovna, Rakhmatov Zafar Xasanovich* Development of improved technical means for transportation fruits and vegetables. European science review. 2016. P. 175-177.

12. *Tsarik R.S., Akmaykin D.A.* Otsenka vliyaniya polozheniya tsentra tyazhesti konteynera na metatsentricheskuyu vyisotu konteynerovoza. Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova. 2016. № 6 (40). С. 58-70. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-6-58-70.

13. *Lovska A.* Simulation of loads on the carrying structure of an articulated flat car in combined transportation. International Journal of Engineering & Technology. 2018. № 7 (4.3). P. 140-146.

14. *Lovska A.O.* Vznachennya navantazhenosti konteyneriv u skladi kombinovanih poyzdiv pri perevezenni zaliznichnim poromom. Nauka ta progres transportu. Visnik Dni-propetrovskogo natsionalnogo universitetu zaliznichnogo transportu imeni akademika V. Lazaryana. 2017. Vol. 6 (72). P. 49-60.

Hadziuvna (received) 08.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ловська Альона Олександрівна (Ловская Алена Александровна, Lovska Alyona Oleksandrivna) – кандидат технічних наук, Український державний університет залізничного транспорту, доцент кафедри вагонів; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: alyonaLovskaya.vagons@gmail.com.

В.Г. МАРТИНЕНКО, М.І. ГРИЦЕНКО

РОЗРОБКА ЗДВОЄНОЇ ЛОПАТКИ ОСЬОВОГО ВЕНТИЛЯТОРА ІЗ ПІДВИЩЕНИМИ АЕРОДИНАМІЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Представлений комплексний підхід до профілювання вінця лопаток робочого колеса, оцінки аеродинамічних характеристик повітряного потоку, а також статичних і динамічних міцнісних параметрів нової здвоєної лопатки робочого колеса вентилятора ВО-21Д на заміну тілесної лопатки, що не відповідає вимогам зміненого опору шахтної мережі. Аеродинамічний аналіз циклічно симетричної скінченно-об'ємної моделі проточної частини вентиляційної установки, що включає в себе робоче колесо, спрямляючий апарат і дифузор, дозволив підтвердити ефективність розроблених профілів здвоєних лопаток робочого колеса вентилятора, а також визначити аеродинамічні навантаження на лопатки. Ці навантаження разом з відцентровими силами від обертання ротора вентиляційної установки були використані для скінченно-елементного аналізу його статичної міцності і відстройки від резонансних режимів, що підтвердило працездатність розробленої конструкції і можливість її використання на практиці.

Ключові слова: профілювання, аеродинаміка, динамічна міцність, шахтна мережа, метод скінченних елементів.

В.Г. МАРТЫНЕНКО, Н.И. ГРИЦЕНКО

РАЗРАБОТКА СДВОЕННОЙ ЛОПАТКИ ОСЕВОГО ВЕНТИЛЯТОРА С ПОВЫШЕННЫМИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Представлен комплексный подход к профилированию венца лопаток рабочего колеса, оценке аэродинамических характеристик воздушного потока, а также статических и динамических прочностных параметров новой сдвоенной лопатки рабочего колеса вентилятора ВО-21Д взамен телесной лопатки, не соответствующей требованиям изменившегося сопротивления шахтной сети. Аэродинамический анализ циклически симметричной конечно-объемной модели проточной части вентиляторной установки, включающей в себя рабочее колесо, спрямляющий аппарат и диффузор, позволил подтвердить эффективность разработанных профилей сдвоенных лопаток рабочего колеса вентилятора, а также определить аэродинамические нагрузки на лопатки. Данные нагрузки вместе с центробежными силами от вращения ротора вентиляторной установки были использованы для конечно-элементного анализа его статической прочности и отстройки от резонансных режимов, что подтвердило работоспособность разработанной конструкции и возможность ее использования на практике.

Ключевые слова: профилирование, аэродинамика, динамическая прочность, шахтная сеть, метод конечных элементов.

V.G. MARTYNYENKO, M.I. HRYTSENKO

DEVELOPMENT OF A TWIN BLADE OF THE AXIAL FAN WITH EXTENDED AERODYNAMIC CHARACTERISTICS

The paper presents a comprehensive approach to profiling the impeller blades, assessing aerodynamic characteristics of an air flow, as well as static and dynamic strength parameters of a new twin blade of the VO-21D fan impeller instead of a solid blade that does not meet the requirements of the changed mine network resistance. The approach uses the finite-volume method for performing the computational fluid dynamics analysis and the finite-element method for providing the results of the structural strength analysis. The profiling process allow to get a dense blading structure with a high pressure rise. The aerodynamic analysis of a cyclically symmetric finite-volume model of the flow passage of the main ventilation fan installation, including the impeller, the straightener and the diffuser, allowed to confirm an effectiveness of the developed profiles of the twin blades of the fan impeller, as well as to determine aerodynamic loads on the blades. These loads, in a combination with the centrifugal forces of rotation of the rotor of the fan installation, were used for the finite-element analysis of its static strength and detuning from resonance modes, which confirmed an operability of the developed design and a possibility of its use for the practical purposes. The proposed methodology illustrates the way for the least expensive adaptation of the fan installation to restricted requirements of the mine ore due to changed mine network conditions. This technique can be used by engineers and scientists who are handling the problem of an adaptation of the already produced fan structures to the updated working conditions as well as a creation of new units with some unique aerodynamic parameters. In addition to this, the paper is a good illustration of the possibilities of the profiling tool used for creating the twin blades profiles as well as method to determining their static and dynamic structural strength.

Key words: profiling, aerodynamics, dynamic strength, mine net, finite element method.

Вступ. Вентилятор головного провітрювання шахти розраховується на встановлені значення опору шахтного поля. У разі зміни опору провітрюваної мережі (наприклад, при завалі вироблення або включенні додаткової вентиляційної установки на іншому виході шахти) вентилятор припиняє свою роботу на оп-

тимальному режимі, що тягне за собою істотне зниження його коефіцієнта корисної дії і продуктивності [1].

Це призводить до необхідності зміни номінальної точки роботи вентиляторної установки (тобто, співвідношення перепаду тиску за нею до її продуктивно-

сті). При збереженні конструкції та параметрів установки й двигуна незмінними найбільш перспективним та оптимальним є шлях заміни лопаток робочого колеса на нові із вдосконаленим профілем пера. В той же час, процедура їхнього проектування є нетривіальною інженерною задачею, оскільки для підвищення перепаду тиску, який розвивається вентиляторною установкою, доводиться прибігати до кардинальних рішень.

Одне з таких рішень було застосоване до шахтного осевого вентилятора ВО-21Д, що призначений для провітрювання закритих та діючих шахт, рудників та тунелів. Це рішення з підвищення робочого тиску вентилятора полягало у тому, щоби замінити тілесні одинарні лопатки оригінальної конструкції, що пред-

ставлена на рис. 1, *а*, на здвоєні листові, таким чином звузивши проточні канали та подвоївши кількість аеродинамічних профілів. На цьому рисунку показана вентиляторна установка типу ВО-Д [2] на якій цифрою 1 позначена роторна група, що включає в себе вал на підшипникових опорах і робоче колесо зі знімними лопатками, розраховане на обертання зі швидкістю 750 об/хв; 2 – корпус; 3 – рама; 4 – кок; 5 – вхідна коробка; 6 – дифузور (не показаний і знаходиться праворуч від малюнка); 7 – електродвигун; 8 – сполучна муфта; 9 – гальмо.

На рис. 1, *б* представлена роторна група з новими здвоєними лопатками, розробленими фахівцями Інженерно-технічного центру «Донвентилятор».

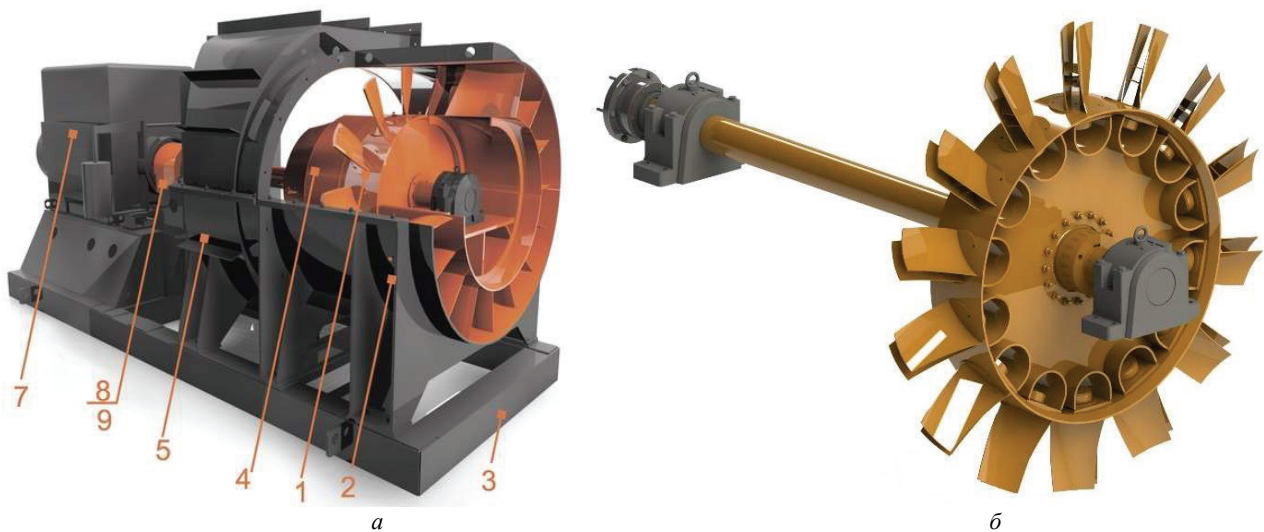


Рисунок 1 – Вентиляторна установка ВО-21Д: *а* – загальна конструкція вентиляторної установки з тілесними лопатками; *б* – ротор вентилятора з новими здвоєними лопатками

Задача проектування такого здвоєного аеродинамічного профілю ускладнюється ще й тим, що його використання тягне за собою підвищення загальної ваги лопатки і, як результат, відцентрових навантажень на її посадочний вузол. Окрім того, навантаженість проточної частини профілю за рахунок аеродинамічних сил може стати порівняною із відцентровими, що також потребує перевірки.

1. Методи розв'язання задачі та розрахункові моделі. Для оцінки параметрів продуктивності вентилятора використовувався метод скінченних об'ємів [3], а для визначення його міцності – метод скінченних елементів [4], застосування яких є найбільш оптимальним у випадку складних геометричних моделей і великого числа конструктивних елементів.

З метою оцінки аеродинамічних характеристик вентиляційної установки була побудована скінченно-об'ємна розрахункова модель (рис. 2), що складається з секторів циклічної симетрії проточної частини робочого колеса (РК), вінця спрямляючого апарату (ВСА) і дифузора (Д). На вході робочого колеса був заданий масовий розхід, а на виході з дифузора – повний тиск, що дорівнює одній атмосфері. При цьому об'єм повітря, що відповідає робочому колесу, вважався оберто-

вим, а інші об'єми – нерухожими.

На рис. 3, *а* показана повна розрахункова модель для проведення аналізу статичної та динамічної міцності ротора вентилятора ВО-21Д з урахуванням дії навантажень від відцентрових та аеродинамічних сил і власної ваги. Для отримання точної картини розподілу напружень в лопатці РК була побудована розрахункова модель, що складається з сектора циклічної симетрії РК з більш дрібною скінченно-елементною сіткою (рис. 3, *б*), до якої додаються навантаження від відцентрової сили і тиску потоку повітря.

Для передачі тиску на поверхні пера лопатки використовувалась технологія односпрямованої взаємодії рідини та твердих тіл (one-way fluid-structure interaction), застосована також в роботі [5], завдяки якій вузлові значення тиску, отримані з відповідних поверхонь скінченно-об'ємної моделі, інтерполюються на поверхневій вузли скінченно-елементної моделі.

2. Розрахунок аеродинамічної схеми вентилятора зі здвоєними лопатками. Для розрахунку аеродинамічних параметрів потоку повітря були використані його стандартні властивості при кімнатній температурі. З метою моделювання турбулентного руху в потоці була застосована двопараметрична модель тур-

булентності «k-epsilon», використання якої є найбільш обґрунтованим для розрахунків проточних частин осевих вентиляторних установок [1].

На рис. 4, а та 4, б представлені графіки розподі-

лу вектору швидкостей та скалярних значень повного тиску в проточній частині вентиляторної установки для середнього меридіонального перерізу.

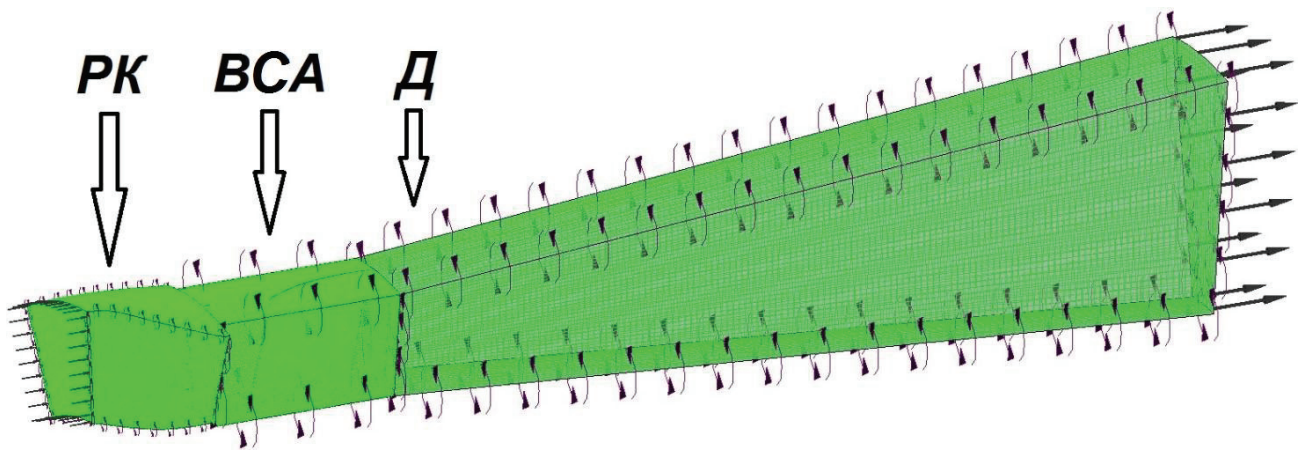


Рисунок 2 – Розрахункова модель потоку повітря у вентиляторній установці

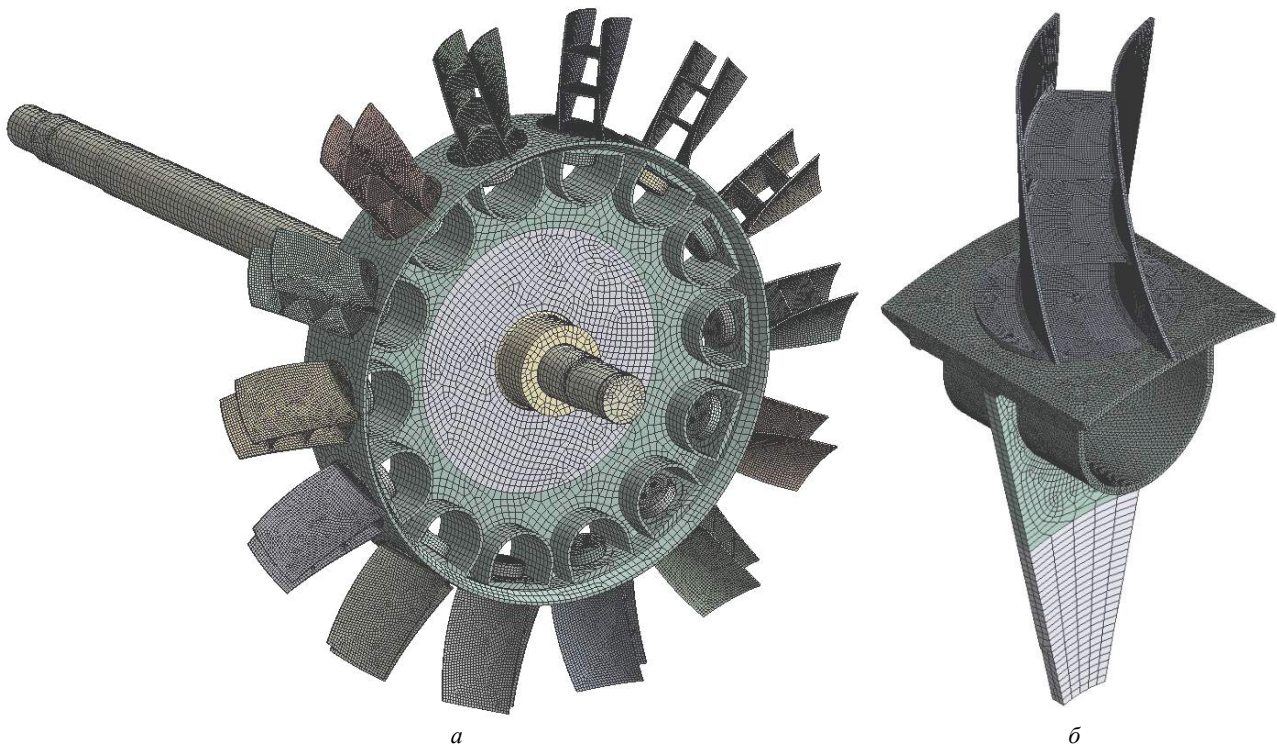


Рисунок 3 – Розрахункова модель ротора вентилятора: а – цілого ротору; б – сектору циклічної симетрії РК

Оцінка напрямів руху повітря та локальних вихрових процесів дозволяє визначити найбільш навантажені та важливі зони проточної частини, а також встановити ефективність профілів лопаток робочого колеса та спрямляючого апарату, що особливо важливо після виконання процесу двовимірного моделювання при переході до тривимірної розрахункової моделі.

3. Оцінка міцності конструкції робочого колеса. Оцінка статичної міцності для сталевих та алюмінієвих елементів виконувалась за критерієм Мізеса [6]. У відповідності до нього еквівалентні напруження

розраховуються наступним чином:

$$\sigma_{\text{eqv}} = \{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]\}^{0,5}, \quad (1)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження.

При цьому сам критерій міцності полягає у неперевищенні максимальними еквівалентними напруженнями визначеної границі міцності $[\sigma]$:

$$\sigma_{\text{eqv}}^{\text{max}} \leq [\sigma], \quad (2)$$

а запасом міцності вважається відношення цих двох величин: $\eta = [\sigma] / \sigma_{\text{eqv}}^{\text{max}} \geq 1$.

На рис. 5, а і рис. 5, б показані контурні графіки розподілу еквівалентних за Мізесом напружень в РК вентилятора. Як видно з графіків, максимальне значення напружень досягається в галтельному переході

від місця кріплення лопатки до циліндричної поверхні хвостовика і становить $(\sigma_{\text{eqv}})_{\text{max}} = 157$ МПа. З урахуванням границі текучості сталі 09Г2С, з якої виготовлена лопатка, що становить $\sigma_T = 325$ МПа, запас міцності ротора вентилятора ВО-21Д зі здвоєними лопатками становить значення $n \approx 2$.

Таким чином, ротор вентилятора ВО-21Д зі здвоєними лопатками має достатній запас міцності для

надійної роботи на номінальних режимах.

На рис. 5, в показана згинна форма власних коливань ротора вентилятора, яка відповідає власній частоті 37,74 Гц.

Перші шість частот власних коливань ротора складають наступні значення: 12,98 Гц; 37,74 Гц; 55,64 Гц; 87,61 Гц; 112,1 Гц; 169,08 Гц.

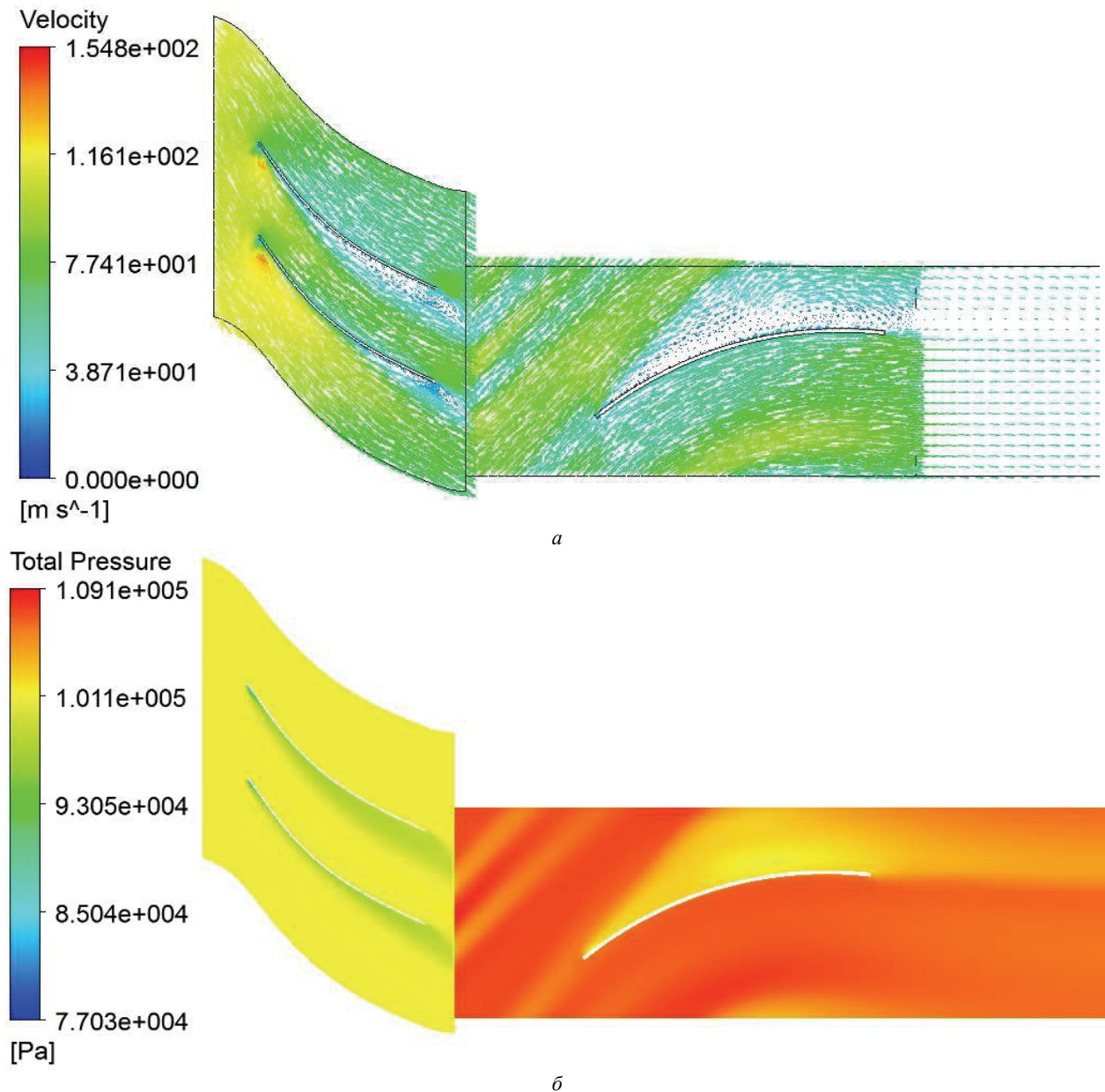


Рисунок 4 – Графіки розподілу параметрів потоку в проточній частині вентиляторної установки в меридіональному перерізі: а – векторний графік розподілу швидкостей потоку; б – контурний графік розподілу тиску в стаціонарній системі координат

Відстройка частот власних коливань ротора від кратностей частоти збуджуючого навантаження оцінювалась за формулою [7]:

$$\Delta f_{ij} = [(f_i - j \cdot \nu) / \nu] \cdot 100\%, \quad (3)$$

де i – номер власної частоти (ВЧ);

j – кратність частоти збуджуючого навантаження;

Δf_{ij} – запас відстройки;

f_i – власна частота коливань ротора;

$\nu = \omega / 2\pi$ – частота збудження.

Рівні такої відстройки представлені в табл. 1.

Як видно з таблиці, ротор вентилятора ВО-21Д з новими здвоєними лопатками має відстройку від резонансних режимів більше 20%, що свідчить про достатній рівень усунення динамічних явищ в вентиляторі [7].

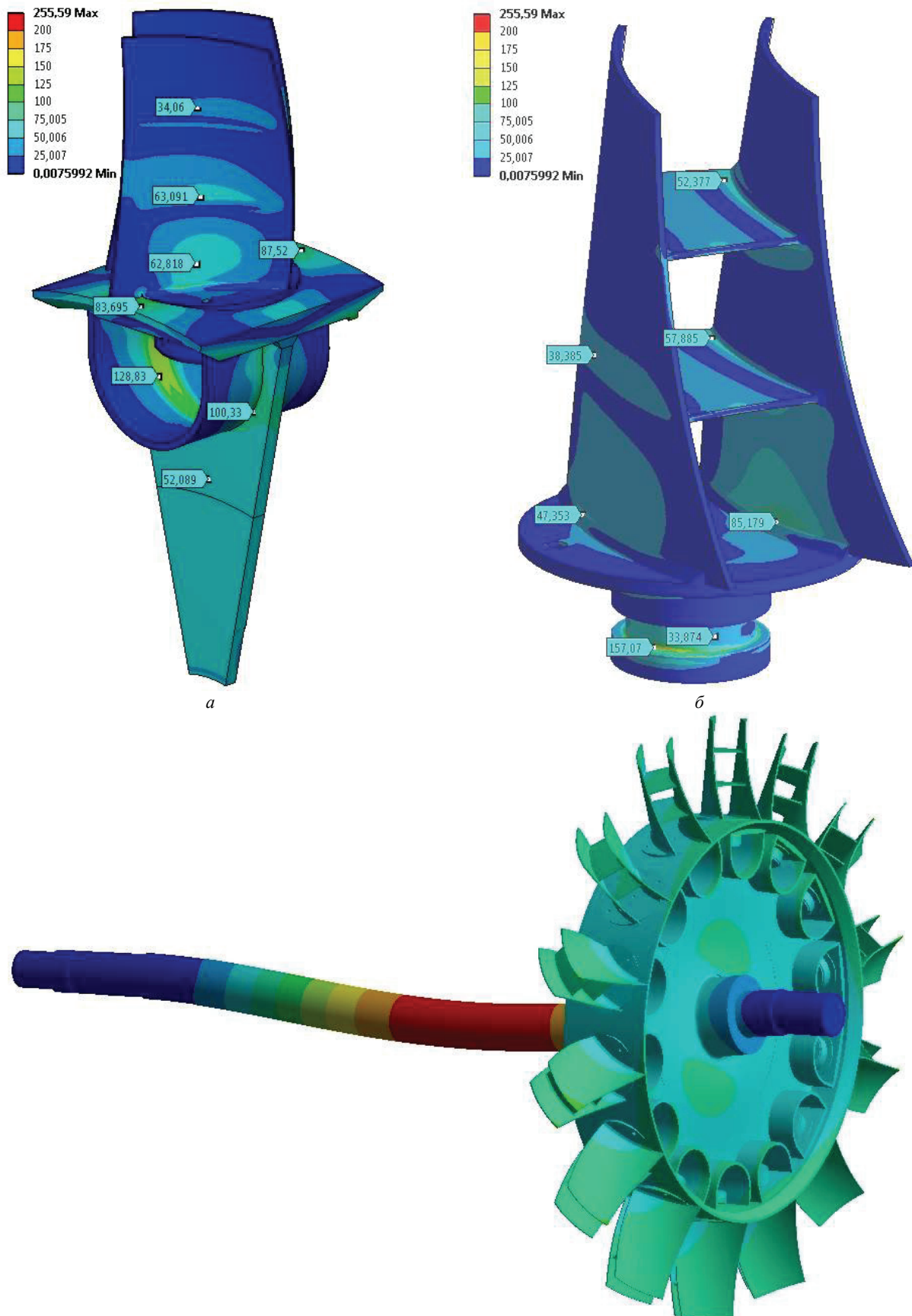


Рисунок 5 – Результати міцнісного аналізу: *a* – контурний графік еквівалентних напружень в РК; *б* – контурний графік еквівалентних напружень в лопатці; *в* – згинна форма власних коливань ротора

Таблиця 1 – Аналіз резонансів у алюмінієвій лопатці

№ ВЧ	Відносна відстройка ВЧ від кратностей частоти збуджуючого навантаження (КЗН), %					
	1 КЗН	2 КЗН	3 КЗН	4 КЗН	5 КЗН	6 КЗН
1	22,12	122,1	222,1	322,1	422,1	522,1
2	126,4	26,4	73,5	173,5	273,5	373,5
3	233,8	133,8	33,84	66,16	166,1	266,1
4	425,6	325,6	225,6	125,6	25,6	74,3
5	572,6	472,6	372,6	272,6	172,6	72,6
6	914,4	814,4	714,4	614,4	514,4	414,4

Висновки. Нові здвоєні лопатки робочого колеса вентилятора ВО-21Д задовольняють змінені вимоги до його продуктивності при збереженні високого коефіцієнта корисної дії.

Результати розрахунку аеродинаміки проточної частини вентилятора свідчать про низький рівень турбулентності і відсутність в ній вихрових потоків.

Оцінка напружено-деформованого стану колеса і лопатки встановила високий коефіцієнт запасу вентилятора, що дозволяє забезпечити для нього як статичну, так і динамічну міцність.

Модальний аналіз ротора і зіставлення його власних частот з кратностями частоти збуджуючого навантаження показують достатній рівень їх відстройки від резонансних режимів.

Таким чином ротор вентилятора ВО-21Д зі здвоєними лопатками забезпечує необхідні аеродинамічні параметри, а також є статично і динамічно міцним.

Список літератури

1. *Брусилловский И.В.* Аэродинамика осевых вентиляторов. Москва: Машиностроение, 1984. 240 с.
2. Донвентилятор. Вентиляторы главного проветривания серии ВО-Д. URL: <https://donvent.com/ru/node/34> (дата звернення: 05.09.2019).
3. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980. 618 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.

5. *Мартыненко В.Г., Гриценко Н.И.* Анализ статической и динамической прочности осевого вентилятора с учетом аэродинамических свойств потока и неоднородности температурного поля. Проблемы машиностроения. 2015. Т. 18, № 4/1. С. 44-52. URL: <http://journals.uran.ua/jme/article/view/57509> (дата звернення: 05.09.2019).

6. *Тимошенко С.П.* Сопrotivление материалов. Том 1. Элементарная теория и задачи. Москва: Наука, 1965. 364 с.

7. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Том 6. Защита от вибрации и ударов: *Фролова К.В.* (ред.). Москва: Машиностроение, 1981. 456 с.

References (transliterated)

1. *Brusilovsky I.V.* Aerodinamika osevykh ventilyatorov [Aerodynamics of axial fans]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1984. 240 p.
2. Donvent. Main ventilation fans of the VO-D series. Available at <https://donvent.com/ru/node/34> (accessed 05.09.2019).
3. *Rouch P.* Vychislitel'naya gidrodinamika [Computational fluid dynamics]. Moscow, Mir Publ., 1980. 618 p.
4. *Zienkiewicz O.* Metod konechnykh elementov v tekhnike [The finite element method in engineering science]. Moscow, Mir Publ., 1975. 541 p.
5. *Martynenko V.G., Hrytsenko N.I.* Analiz staticheskoy i dinamicheskoy prochnosti oseвого ventilyatora s uchotom aerodinamicheskikh svoystv potoka i neodnorodnosti temperaturного polya [Analysis of the static and dynamic strength of an axial fan, taking into account the aerodynamic properties of the flow and the heterogeneity of the temperature field]. Problemy mashinostroyeniya [Problems of machine building]. 2015, vol. 18, no. 4/1, pp. 44-52. Available at <http://journals.uran.ua/jme/article/view/57509> (accessed 05.09.2019).
6. *Tymoshenko S.P.* Soprotivleniye materialov. Tom 1. Elementarnaya teoriya i zadachi. [Strength of materials. Volume 1. Elementary theory and problems]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 364 p.
7. Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 6. Zashchita ot vibratsii i udarov [Vibrations in the technique. Handbook in 6 volumes. Vol. 6. Protection from vibration and shock]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1981. 456 p.

Надійшла (received) 05.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Мартыненко Володимир Геннадійович (Мартыненко Владимир Геннадьевич, Martynenko Volodymyr Gennadiyovych) – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший викладач кафедри Динаміки та міцності машин; Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9471-0905>; e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com

Гриценко Микита Ігорович (Гриценко Никита Игоревич, Hrytsenko Mykyta Ihorovich) – ТОВ «ІТЦ «Донвентилятор», директор; Харків, Україна; e-mail: nikitahrytsenko@gmail.com

С.Ю. МИСЮРА, Н.В. СМЕТАНКИНА, Е.Ю. МИСЮРА

РАЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРЫШКИ ГИДРОТУРБИНЫ ДЛЯ АНАЛИЗА МЦНОСТИ

Кришка гидротурбины е просторовоу циклично-симетричноу конструкциеу, що складається з тонкостінних оболонок обер-тання, об'єднаних n -ребрами – меридіональними пластинами складної конфігурації. Оскільки кришка являє собою просторову конструкцію, що складається з тонкостінних елементів, застосовується теорія тонких пластин і оболонок.

Задача полягає у дослідженні НДС вихідної та модифікованої кришки поворотно-лопатевої гидротурбины при дії статичного осесиметричного навантаження і розв'язується методом скінченних елементів.

Дослідження НДС таких конструкцій починається з побудови моделі сектору, з яких складається досліджуваний об'єкт. При побудові моделі сектора спочатку задаються ключові точки в площині ребра, за якими будуються лінії, потім створюється модель ребра. Для отримання оболоноквих частин конструкції і повної моделі сектору лінії перетину ребра і поверхонь оболонок повертаються за і проти годинникової стрілки на кут $360/(2n)$, де n – кількість секторів.

На границях сусідніх секторів виконуються умови циклічної симетрії.

Модель розбивається на скінченні елементи (трикутний пружний оболонковий скінченний елемент з трьома вузлами), після чого на границях з сусідніми секторами вводяться умови циклічної симетрії, а також умови закріплення та навантаження конструкції.

Метоу роботи є створення методики розрахунку просторових циклично-симетричних конструкцій (кришки гидротурбины) з радіальними ребрами.

Розрахунки кришки поворотно-лопатевої гидротурбины виконані для штатного режиму роботи, враховуючи вагові та розподілені гідравлічні навантаження. Виявлено, що у вихідній та модифікованій конструкціях максимальні напруження виникають в ребрах, які розташовані в коробі, де проходять лопатки направляючого апарату та не перевищують допустимих значень.

Отримані результати демонструють можливість проведення оптимізації кришок методами нелінійного математичного програмування на стадії проектування з метоу поліпшення їх міцності, зниження матеріаломісткості без погіршення експлуатаційних і технологічних характеристик.

Ключові слова: кришка, поворотно-лопатева гидротурбина, штатний режим роботи, оптимізація.

С.Ю. МИСЮРА, Н.В. СМЕТАНКИНА, Е.Ю. МИСЮРА

РАЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРЫШКИ ГИДРОТУРБИНЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ

Крышка гидротурбины является пространственной циклическо-симметричной конструкцией, которая состоит из тонкостенных оболочек вращения, объединенных n -ребрами – меридиональными пластинами сложной конфигурации. Поскольку крышка представляет собой пространственную конструкцию, которая состоит из тонкостенных элементов, применяется теория тонких пластин и оболочек.

Задача заключается в исследовании НДС исходной и модифицированной крышки поворотно-лопаточной гидротурбины при действии статической осесимметричной нагрузки и решается методом конечных элементов.

Исследование НДС таких конструкций начинается с построения модели сектора, из которых состоит исследуемый объект. При построении модели сектора сначала задаются ключевые точки в плоскости ребра, по которым строятся линии, затем создается модель ребра. Для получения оболочечных частей конструкции и полной модели сектора линии пересечения ребра и поверхностей оболочек поворачиваются по и против часовой стрелки на угол $360/(2n)$, где n – количество секторов.

На границах соседних секторов выполняются условия циклической симметрии.

Модель разбивается на конечные элементы (треугольный упругий оболочечный конечный элемент с тремя узлами), после чего на границах с соседними секторами вводятся условия циклической симметрии, а также условия закрепления и нагрузки конструкции.

Целью работы является создание методики расчета пространственных циклическо-симметричных конструкций (крышки гидротурбины) с радиальными ребрами.

Расчеты крышки поворотно-лопастной гидротурбины выполнены для штатного режима работы, учитывая весовые и распределены гидравлические нагрузки. Виявлено, что в исходной и модифицированной конструкциях максимальные напряжения возникают в ребрах, которые расположены в коробе, где проходят лопатки направляющего аппарата и но они не превышают допустимых значений.

Полученные результаты демонстрируют возможность проведения оптимизации крышек методами нелинейного математического программирования на стадии проектирования с целью улучшения их прочности, снижения материалоемкости, без ухудшения эксплуатационных и технологических характеристик.

Ключевые слова: крышка, поворотно-лопастная гидротурбина, штатный режим работы, оптимізація.

RATIONAL MODELLING OF HYDROTURBINE COVER FOR AN STRENGTH'S ANALYSIS

A hydroturbine cover is a spatial cyclic-symmetrical structure consisting of thin-walled rotation shells forming n -ribs or meridional plates of complex configuration. Since the cover is a spatial structure consisting of thin-walled elements, the theory of thin plates and shells is used.

The problem consists in an investigation of stress-strain state of the initial and modified cover of a rotary-blade hydraulic turbine under the influence of a statistical axisymmetric load and it is solved by the finite element method.

This investigation starts with the construction of a sector model, which forms a hydroturbine cover. At constructing a sector model the key points in the plane of the edge are defined forming the lines, and then an edge model is created. To obtain the shell parts of the structure and the complete sector model, the intersection lines of the ribs and shell surfaces are rotated clockwise and counterclockwise by $360^\circ/(2n)$, where n is the number of sectors. Cyclic symmetry conditions are satisfied at the borders of neighboring sectors.

The model is divided into finite elements (triangular elastic shell finite element with three nodes is used). Then cyclic symmetry conditions and fixing and loading conditions of the structure are introduced at the borders with neighboring sectors.

The goal of this paper is to develop a methodology for calculating spatial cyclically symmetric structures (hydroturbine cover) with radial ribs.

Calculations for a rotary-blade hydraulic turbine have been performed for a fully functioning state, taking into account the weight and distributed hydraulic loads. It has been established that the maximal stresses occur in the ribs, which are located in the box, where the blades are moved, and do not exceed the permissible (limiting) values in the initial and modified constructions. The obtained results demonstrate the possibility of optimizing covers using nonlinear mathematical programming methods at the design stage in order to improve their strength, decrease a material consumption without reducing working and technological characteristics.

Key words: cover, rotary vane hydraulic turbine, fully functioning state, optimization.

Вступ. В останні роки, у зв'язку з конкуренцією, що загострилася на ринку енергетичного устаткування, різко зріс рівень вимог до його ефективності і надійності. Крім того, на ряді ГЕС, які працювали більше 35 років, енергетичні показники не відповідають сучасному рівню. Ця проблема вирішується шляхом реконструкції та заміни фізично зношеного та морально застарілого обладнання [1-4].

Особлива увага приділяється несучим конструкціям і робочим колесам турбіни, які знаходяться під динамічним впливом потоку води. До несучих конструкцій відноситься кришка гідротурбіни, яка представляє собою просторову конструкцію, що складається з тонкостінних тіл обертання (обичайок), підкріплених системою часто розташованих ребер – меридіональних багатозв'язних пластин. Вона не тільки обмежує зверху проточну частину турбіни, а й є несучою конструкцією, що сприймає значні навантаження від масових сил і гідродинамічного тиску, а також від радіального навантаження з боку ротора турбіни. Її кріплення до статора здійснюється великою кількістю вібростійких болтів з контрольованим затягуванням [4, 5]. Основна вимога при проектуванні кришки робочого колеса турбін – забезпечення міцності і жорсткості при мінімальній металоемності [5-7].

Оскільки кришка гідротурбіни є складною просторовою конструкцією, для розрахунку параметрів її напружено-деформованого стану (НДС) застосовується метод скінченних елементів (МСЕ) [8-11]. Перевагою цього методу є те, що він дозволяє прогнозувати НДС та коливання конструкції за різних умов експлуатації, регулюючи параметри поля потоку відповідно до конкретних умов роботи. Тому метод має важливе значення для оптимізації конструкції гідротурбін, а також стабілізації роботи на гідроелектростанціях.

У роботі [11] проведено на основі МСЕ аналіз НДС кришки гідротурбіни за допомогою програмного

забезпечення ANSYS. МСЕ використовується для розрахунку напружень на кришці. Ці розрахунки були зроблені для максимально можливого навантаження в робочому стані «LCI Quick Shut Down». Результати розрахунку еквівалентних напружень та деформацій порівнюються з існуючими результатами з огляду на безпечність конструкції.

У статтях [12, 13] описані методики та пакети прикладних програм, розроблені для досліджень динамічного НДС кришки гідротурбіни під впливом гідродинамічного навантаження та ваги вузлів та деталей, які розміщені на її поверхні. Задачу розв'язано у тривимірній постановці із застосуванням теорії гіперсингулярних рівнянь та поєднання МСЕ і методу граничних елементів.

Важливо точно прогнозувати деформаційні та вібраційні характеристики гідротурбінної конструкції для стабільної роботи, коли турбіна працює під змінним навантаженням потокового поля. У роботі [14] запропоновано методологію аналізу деформації кришки та амплітуди вібрацій у гідротурбінній системі Френсіса з високим типом. Складні поля потоку моделюються за допомогою комп'ютерної динаміки рідини (CFD). Аналіз деформацій кришки турбіни здійснено МСЕ. Результати розрахунку порівнюються з експериментальними результатами, демонструють добру узгодженість.

Методика аналізу НДС кришки поворотного лопаткової гідротурбіни. Кришка гідротурбіни є просторовою циклічно-симетричною конструкцією, що складається з тонкостінних оболонок обертання, об'єднаних n -ребрами – меридіональними пластинами складної конфігурації. Дослідження НДС таких конструкцій починається з побудови моделі сектору, з яких складається досліджуваний об'єкт. На границях сусідніх секторів виконуються умови циклічної симетрії.

При побудові моделі сектора спочатку задаються ключові точки в площині ребра, за якими будуються лінії, потім створюється модель ребра. Для отримання оболонкових частин конструкції і повної моделі сектору лінії перетину ребра і поверхонь оболонок повертаються за і проти годинникової стрілки на кут $360/(2n)$, де n – кількість секторів.

Оскільки кришка являє собою просторову конструкцію, що складається з тонкостінних елементів, для яких відношення товщини елементів конструкції до характерного розміру не перевищує $1/10$, застосовується теорія тонких пластин і оболонок.

Для розв'язання задачі статичного аналізу НДС використовується МСЕ. Роздільна система рівнянь записується у вигляді

$$[K]\{u\}=\{F\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості; $\{u\}$ – вектор вузлових переміщень; $\{F\}$ – компоненти вектора сил, що визначають вплив зовнішніх навантажень [14].

Для розв'язання задачі використовується трикутний пружний оболонковий скінченний елемент з трьома вузлами. Елемент в кожному вузлі має шість ступенів свободи: переміщення в напрямку осей X , Y , Z і повороти навколо осей X , Y , Z . Геометрія, розташування вузлів I , J і K і координатна система елемента показані на рис. 1.

Модель розбивається на скінченні елементи, після чого на межах з сусідніми секторами вводяться умови циклічної симетрії, а також умови закріплення та навантаження конструкції.

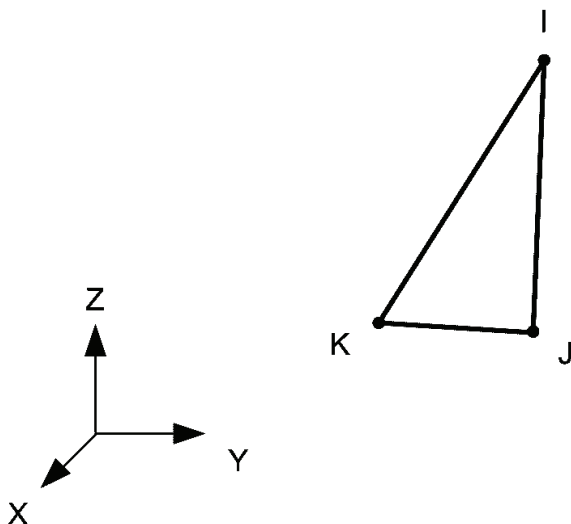


Рисунок 1 – Геометрія елемента

Чисельне дослідження НДС кришки поворотно-лопатевої гідротурбіни. Опис об'єкта. На рис. 2 показана схема кришки поворотно-лопатевої гідротурбіни. Для розміщення механізмів і зниження маси вузла в ребрах передбачені круглі отвори. У кільцевих пластинах створені фігурні отвори в вигляді профілю лопатки, які призначені для демонтажу та ремонту окремих лопаток без повного розбирання направляючого апарату.

Кришка має наступні габаритні розміри: діаметр – 3,44 м, висота – 1,05 м.

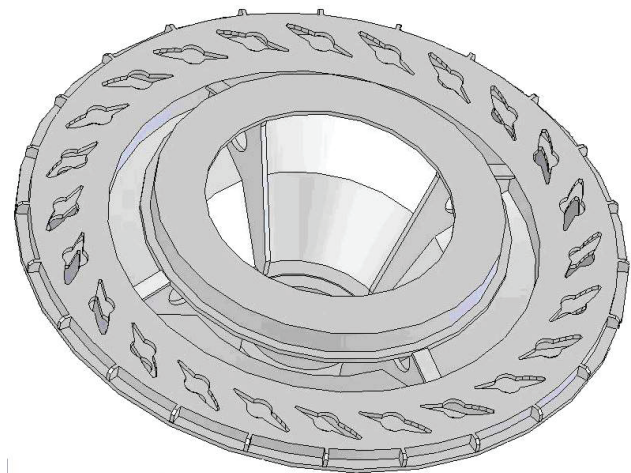


Рисунок 2 – Кришка поворотно-лопатевої гідротурбіни

Кришка виготовляється з листового прокату сталі Ст20 або його аналога ASTM A516 Gr.60.

Механічні властивості матеріалу такі: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності; $\nu = 0,3$ – коефіцієнт Пуассона; $\rho = 7850$ кг/м³ – густина матеріалу; $\sigma_T = 215$ МПа – межа текучості; $\sigma_B = 430$ МПа – тимчасовий опір; $[\sigma] = 0,5 \cdot \sigma_T = 107,5$ МПа – допустимі напруження.

Розрахункова модель. Для розв'язання задачі визначення НДС при дії статичного осьосиметричного навантаження розрахункова схема прийнята у вигляді сектора кришки з кутом розчину 90° і умовами симетрії на краях (рис. 3).

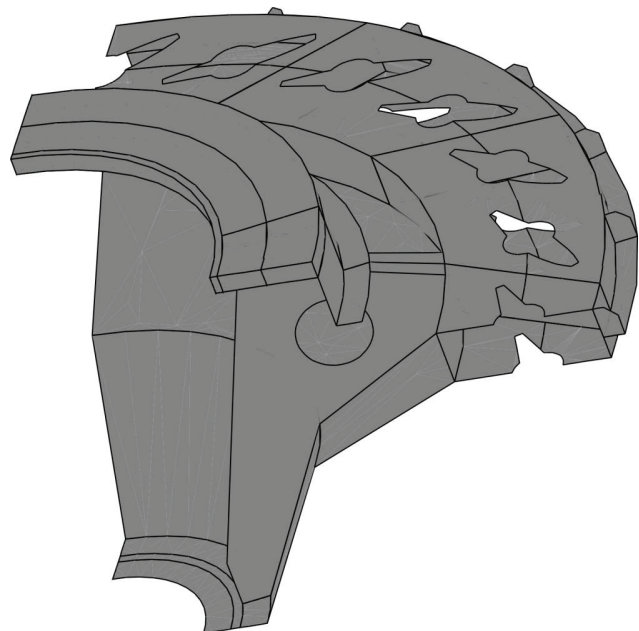


Рисунок 3 – Сектор кришки гідротурбіни

Вводяться умови закріплення кришки по опорній поверхні фланця, що з'єднує її з статорним кільцем, яке вважається абсолютно жорстким, уздовж окружності, на якій розташовані шпильки фланцевого з'єднання.

Вага генератора і робочого колеса $P = 2,45 \cdot 10^5$ Н

прикладена до поверхні верхнього кільця у вигляді еквівалентного тиску (рис. 4).

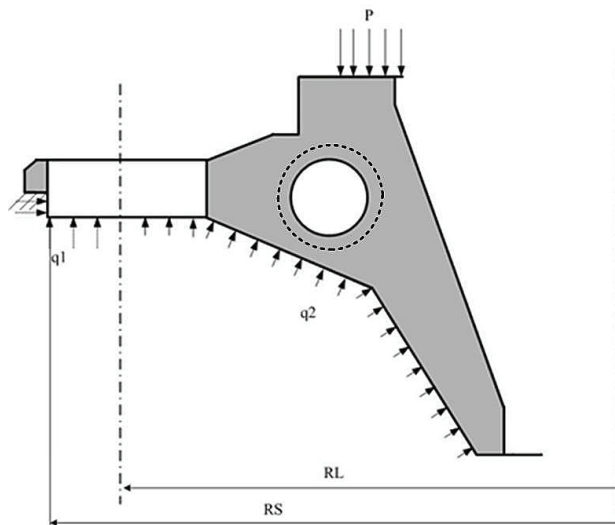


Рисунок 4 – Схема навантаження і закріплення конструкції

У штатному режимі до днища прикладено гідралічний тиск $q_2 = 0,0965$ МПа.

При аварійній зупинці турбоагрегату тиск в відповідному водопроводі від радіуса кола RL , на якому розташовані лопатки направляючого апарату, до радіуса кола, на якому розташовані шпильки фланцевого з'єднання RS , різко підвищується від q_2 до $q_1 = 0,1254$ МПа. Тому чисельні результати наведені саме для цього випадку.

Пунктиром вказано модифікацію отвору в кришці гідротурбіни для розташування обладнання та зменшення ваги. Радіус збільшено в 1,5 рази.

Скінченноелементна модель сектора кришки гідротурбіни показана на (рис. 5).

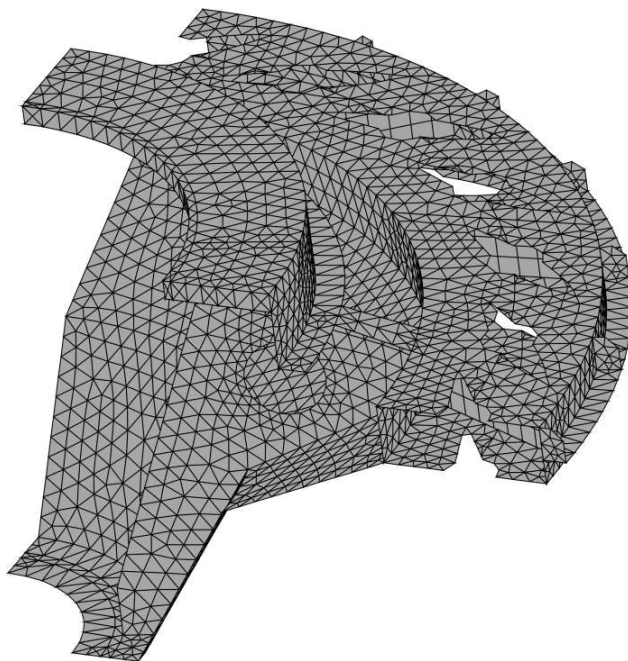


Рисунок 5 – Скінченноелементна модель сектора кришки гідротурбіни

Аналіз НДС. Розподіл осьових переміщень в конструкції кришки при штатному режимі роботи показано на рис. 6.

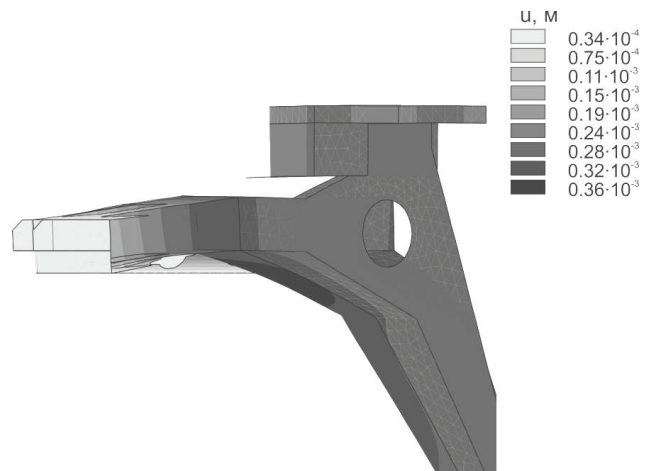


Рисунок 6 – Розподіл осьових переміщень при штатному режимі роботи

На рис. 7 дано розподіл інтенсивності напружень в конструкції кришки при штатному режимі роботи.

В результаті розрахунку вихідної конструкції отримані значення інтенсивності напружень і осьових переміщень.

При цьому отримуємо $\sigma_{\max} = 30,1$ МПа, а $u_{\max} = 0,36 \cdot 10^{-3}$ м.

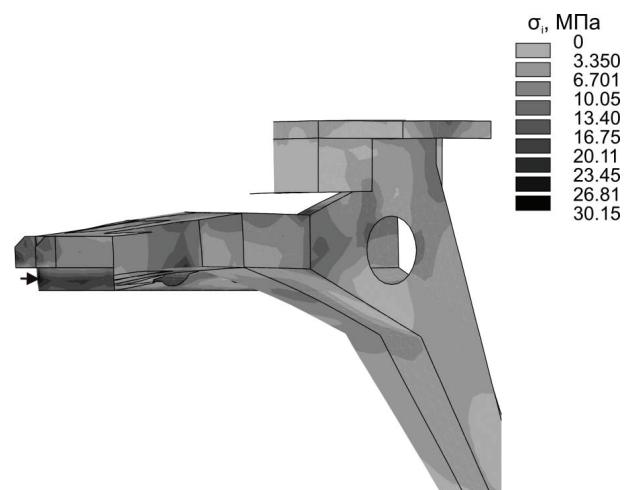


Рисунок 7 – Розподіл інтенсивності напружень в секторі в штатному режимі роботи

Максимальні напруження виникають в ребрах, які розташовані в коробі, де проходять лопатки направляючого апарату.

Стрілкою (\rightarrow) показана зона, в якій спостерігається концентрація найбільших напружень.

Розподіл осьових переміщень в конструкції кришки при штатному режимі роботи при модифікації отвору показані на рис. 8.

На рис. 9 дано розподіл інтенсивності напружень в конструкції кришки при штатному режимі роботи при модифікації отвору.

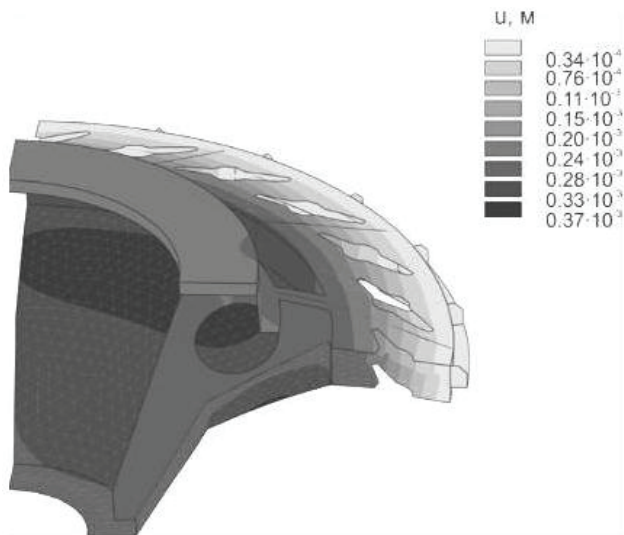


Рисунок 8 – Розподіл осевих переміщень при штатному режимі роботи при модифікації отвору

В результаті розрахунку вихідної конструкції отримані значення інтенсивності напружень і осевих переміщень. Їх найбільші значення є такими: $\sigma_{\max} = 52,1$ МПа, а $u_{\max} = 0,37 \cdot 10^{-3}$ м, що не перевищують допустимі.

Таким чином, конструкція має резерви для зниження маси та подальшого удосконалення її форми мето.

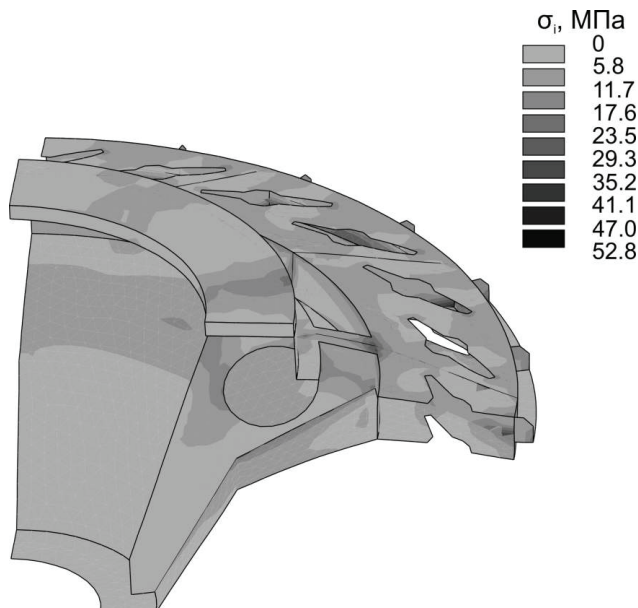


Рисунок 9 – Розподіл інтенсивності напружень при штатному режимі роботи при модифікації отвору

Висновки. Розроблено скінченно-елементну методику розрахунку просторових циклічно симетричних конструкцій з радіальними ребрами.

На основі представленої методики проведено аналіз НДС вихідної та модифікованої кришки поворотно-лопатевої гідротурбін.

Розрахунки кришки поворотно-лопатевої гідротурбіни виконані для штатного режиму роботи. При цьому враховувалися вагові та розподілені гідравлічні

навантаження.

Максимальні напруження не перевищують допустимих значень, як у вихідній конструкції, так і у модифікованій.

Отримані результати демонструють можливість проведення оптимального проектування кришок методами нелінійного математичного програмування на стадії проектування з метою поліпшення їх міцності, зниження матеріаломісткості без погіршення експлуатаційних і технологічних характеристик.

Список літератури

1. Серков В.С. Роль, задачи и проблемы развития стандартизации в обеспечении безопасности объектов гидроэнергетики. Гидротехническое строительство. 2010. № 7. С. 60-63.
2. Лобановский Ю.И. Автоколебания напорных систем и разрушение гидроагрегатов. Гидротехническое строительство. 2010. № 7. С. 39-45.
3. Иванченко И.П., Воеводин С.И., Прокопенко А.Н. Натурные исследования гидродинамических нагрузок, действующих на крепеж крышки турбины. Гидроэнергетика. 2012. № 3 (28). С. 5-11.
4. Авдюшенко А.Ю., Черный С.Г., Чирков Д.В. Метод расчета осевых и радиальных нагрузок на рабочее колесо гидротурбины в нестационарном потоке. Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 4. С. 3-23.
5. Сметанкина Н. В., Мисюра С.Ю., Линник А.В. Влияние предварительно напряженного состояния на частоты несущих конструкций гидротурбин. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2018. Т. 1, № 38. С. 42-48.
6. Веремеенко И.С., Кантор Б.Я., Медведовская Т.Ф., Ржевская И.Е., Андриященко С.А. Прочность, динамика несущих конструкций и рабочих колес радиально-осевых гидротурбин. Авиационно-Космическая техника и технология. 2005. № 9 (25). С. 97-101.
7. Кантор Б. Я., Андриященко С.А., Мисюра С.Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния крышки гидротурбины и возможностей совершенствования ее конструкции. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2010. № 69. С. 58-67.
8. Zhang L., Sun K., Luo Q.-J. Hydrodynamic design of diversion cover for a tidal-stream hydro turbine. Journal of Harbin Engineering University. 2007. Vol. 28, No 7. P. 734-737.
9. Chen Z., Wang J., Liu H. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery. J. Fluids Eng. 1999. Vol. 121, No 4. P. 804-807.
10. Bisen D., Shukla S., Sharma P.K. Optimization and Simulation of Hydro-Turbine Nozzle in Based on Ansys Analysis. Int. J. of Advance Engineering and Research Development. 2014. Vol. 1, iss. 10. P. 5-13.
11. Angra S., Kumari M., Kumar V. Structural Analysis of Hydro-Turbine Head Cover Using Ansys. Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 1-15.
12. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free hydroelastic vibrations of hydro turbine head covers. Int. J. Eng. and Advanced Research Technology. 2015. Vol. 1, No 1. P. 45-50.
13. Strelnikova E.A., Medvedovskaya T.F., Medvedeva E.L., Linnik F.V., Zelenskaya O.N. Use of computer technologies in modernization of head covers for ПЛІ 20-B-500 Kaplan turbines. J. Mech. Eng. 2018. Vol. 21, No 1. P. 35-44.
14. Jia Y., Li F.-Ch., Wei X.-Zh., Li X.-B., Li Zh.-H. A method for analysis of head cover deformation and vibration amplitude in Francis hydro-turbine system by combination of

CFD and FEA. J. of Mechanical Science and Technology. 2017. Vol. 31, iss. 9. P. 4255-4266.

References (transliterated)

1. *Serkov V. S.* Rol, zadachi i problemy razvitiya standartizatsii v obespechenii bezopasnosti obektov gid-roenergetiki. *Gidrotehnicheskoe stroitelstvo*. 2010. № 7. P. 60-63.
2. *Lobanovskij Yu. I.* Avtokolebaniya napornyh sistem i razrushenie gidroagregatov. *Gidrotehnicheskoe stroitelstvo*. 2010. № 7. P. 39-45.
3. *Ivanchenko I.P., Voevodin S.I., Prokopenko A.N.* Naturnye issledovaniya gidrodi-namicheskikh nagruzok, dejstvuyushih na krepezh kryshki turbiny. *Gidroenergetika*. 2012. № 3 (28). P. 5-11.
4. *Avdyushenko A.Yu., Chyornyj S.G., Chirkov D.V.* Metod rascheta osevyh i radialnyh nagruzok na rabochee koleso gidroturbiny v nestacio-narnom potoke. *Vychislitelnye tehnologii*. 2013. Vol. 18, № 4. P. 3-23.
5. *Smetankina N.V., Misyura S.Yu., Linnik A.V.* Vliyanie predvaritelno naprya-zhennogo sostoyaniya na chastoty nesushih konstrukcij gidroturbin. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya: Dinamika i micnist mashin. Kharkiv: NTU «KhPI». 2018. Vol. 1, № 38. P. 42-48.
6. *Veremeenko I.S., Kantor B.Ya., Medvedovskaya T.F., Rzhetskaya I.E., Andryushenko S.A.* Prochnost, dinamika nesushih konstrukcij i rabochih koles radialno-osevyh gidroturbin. *Aviacionno-kosmicheskaya tehnika i Tehnologiya*. 2005. № 9 (25). P. 97-101.
7. *Kantor B.Ya., Andryushenko S.A., Misyura S.Yu.* issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kryshki

gidroturbiny i voz-mozhnostej sovershenstvovaniya ee konstrukcii. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya: Dinamika i micnist mashin. Kharkiv: NTU «KhPI». 2010. № 69. P. 58-67.

8. *Zhang L., Sun K., Luo Q.-J.* Hydrodynamic design of diversion cover for a tidal-stream hydro turbine. *Journal of Harbin Engineering University*. 2007. Vol. 28. No 7. P. 734-737.
9. *Chen Z., Wang J., Liu H.* Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery. *J. Fluids Eng.* 1999. Vol. 121, No 4. P. 804-807.
10. *Bisen D., Shukla S., Sharma P.K.* Optimization and Simulation of Hydro-Turbine Nozzle in Based on Ansys Analysis. *Int. J. of Advance Engineering and Research Development*. 2014. Vol. 1, iss. 10. P. 5-13.
11. *Angra S., Kumari M., Kumar M.* Structural analysis of hydroturbine head cover using ANSYS. *Int. J. of Mechanical and Mechatronics Engineering*. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 1-15.
12. *Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K.* Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers. *Int. J. Eng. and Advanced Research Technology*. 2015. Vol. 1, No 1. P. 45-50.
13. *Strelnikova E.A., Medvedovskaya T.F., Medvedeva E.L., Linnik F.V., Zelenskaya O.N.* Use of computer technologies in modernization of head covers for PL 20-B-500 Kaplan turbines. *J. Mech. Eng.* 2018. Vol. 21, No 1. P. 35-44.
14. *Jia Y., Li F.-Ch., Wei X.-Zh., Li X.-B., Li Zh.-H.* A method for analysis of head cover deformation and vibration amplitude in Francis hydro-turbine system by combination of CFD and FEA. *J. of Mechanical Science and Technology*. 2017. Vol. 31, iss. 9. P. 4255-4266.

Надійшло (received) 18.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Місюра Сергій Юрійович (Мисюра Сергей Юрьевич, Misura Serhii Yuriyovich) – кандидат технічних наук, науковий співробітник відділу вібраційних і термоміцнісних конструкцій, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5048-1610>; (057)349-47-04; e-mail: misurasy@gmail.com

Сметанкіна Наталія Володимирівна (Сметанкина Наталья Владимировна, Smetankina Natalia Volodymyrivna) – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу вібраційних і термоміцнісних конструкцій, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9528-3741>; (057)349-47-19, 349-47-55; e-mail: nsmet@ipmach.kharkov.ua, nsmetankina@ukr.net

Місюра Євгенія Юрійівна (Мисюра Евгения Юрьевна, Misiura Ievgeniia Iuriivna) – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5208-0853>; (057)702-04-05; e-mail: misuraeu@gmail.com

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО УДАРУ КОНУСА ПО ПІВПРОСТОРУ

З використанням основних положень теорії Г. Герца про механічний удар твердих тіл розглянуто динамічну взаємодію пружного конуса з пружним півпростором, обмеженим плоскою поверхнею. Досліджено випадок, коли вісь конуса обертання перпендикулярна до границі півпростору, а початковою точкою контакту тіл є вершина конуса. Для опису місцевих деформацій тіл в зоні їх взаємодії використано відомий розв'язок вісесиметричної статичної контактної задачі теорії пружності, побудований І.Я. Штаерманом. Задача співудару тіл зведена до диференціального рівняння другого порядку з квадратичною нелінійністю. Одержано дві форми аналітичного розв'язку цієї нелінійної задачі Коші. В першій використано Ateb-синус, а в другій – еліптичний косинус. Встановлено рівнозначність отриманих форм розв'язку, тобто можливість заміни однієї форми на іншу. Для обчислення значень Ateb-синуса методом лінійної інтерполяції подана спеціальна таблиця, а також запропонована аналітична апроксимація його елементарними функціями. Показана узгодженість результатів, до яких призводять ці два способи наближеного розрахунку значень Ateb-синуса. Виведена також наближена формула для обчислення значень еліптичного косинуса і підтверджена її вірогідність. За результатами розв'язання задачі удару отримано формули, що описують зміну у часі: зближення центрів мас тіл, сили ударної взаємодії, радіуса кругової площадки контакту та контактного тиску. Відзначено, що тиск нескінченний в центрі площадки, де вершина конуса контактує з півпростором. Проведено порівняння результатів, до яких призводять дві аналітичні форми розв'язку та числове комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння стискання тіл, підданих удару. Встановлена гарна узгодженість числових результатів, одержаних різними способами. Досліджено вплив кута конусності на основні параметри динамічної взаємодії тіл. Показано, що збільшення кута конусності тіла, яке вдаряє, призводить до зменшення максимального динамічного стискання тіл і тривалості їх взаємодії та до зростання максимуму сили удару при сталому значенні її імпульсу. Наведено числовий приклад розрахунку, де матеріалом кінцевого тіла вибрано сталь, а матеріалом нерухомого півпростору – гуму. Задачі такого типу виникають при розрахунках параметрів удару куска мінеральної сировини по футерованому гумою валку вібраційного класифікатора.

Ключові слова: механічний удар, пружне кінцеве тіло, пружний півпростір, теорія Г. Герца, аналітичний розв'язок, Ateb-синус, еліптичний косинус.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО УДАРА КОНУСА ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

С использованием основных положений теории Г. Герца о механическом ударе твердых тел рассмотрено динамическое взаимодействие упругого конуса с упругим полупространством, ограниченным плоской поверхностью. Исследован случай, когда ось конуса вращения перпендикулярна к границе полупространства, а начальной точкой контакта тел является вершина конуса. Для описания местных деформаций тел в зоне их взаимодействия использовано известное решение осесимметричной статической контактной задачи теории упругости, построенное И.Я. Штаерманом. Задача соударения тел сведена к дифференциальному уравнению второго порядка с квадратичной нелинейностью. Получено две формы аналитического решения этой нелинейной задачи Коши. В первой использовано Ateb-синус, а во второй – эллиптический косинус. Установлена равнозначность полученных форм решений, то есть возможность замены одной формы на другую. Для вычисления значений Ateb-синуса методом линейной интерполяции представлена специальная таблица, а также предложена аналитическая аппроксимация его элементарными функциями. Показана согласованность результатов, к которым приводят эти два способа приближенного расчета значений Ateb-синуса. Выведена также приближенная формула для вычисления значений эллиптического косинуса и подтверждена ее достоверность. По итогам решения задачи удара получены формулы, которые описывают изменение во времени: сближения центров масс тел, силы ударного взаимодействия, радиуса круговой площадки контакта и контактного давления. Отмечено, что давление бесконечно в центре площадки, где вершина конуса контактирует с полупространством. Проведено сравнение результатов, к которым приводят две аналитические формы решения и численное компьютерное интегрирование дифференциального уравнения сжатия тел, подвергнутых удару. Установлено хорошее согласование численных результатов, полученных разными способами. Исследовано влияние угла конусности на основные параметры динамического взаимодействия тел. Показано, что увеличение угла раствора конического тела, которое ударяет, приводит к уменьшению максимального динамического сжатия тел и продолжительности их взаимодействия, а также к увеличению максимума силы удара, при постоянном значении ее импульса. Приведен численный пример расчета, где материалом конического тела принято сталь, а материалом неподвижного полупространства – резину. Задачи такого типа возникают при расчетах параметров удара куска минерального сырья по футерованному резиной валку вибрационного классификатора.

Ключевые слова: механический удар, упругое коническое тело, упругое полупространство, теория Г. Герца, аналитическое решение, Ateb-синус, эллиптический косинус.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE ELASTIC IMPACT PROBLEM FOR A CONE OVER A HALF-SPACE

Using the main provisions of the theory of H. Hertz on the mechanical impact of solids, the dynamic interaction of an elastic cone with an elastic half-space bounded by a flat surface is considered. The case is investigated when the axis of the cone of rotation is perpendicular to the boundary of the half-space, and the initial point of contact of the bodies is the vertex of the cone. To describe the local deformations of bodies in the zone of their interaction, the well-known solution of the axisymmetric static contact problem of the theory of elasticity, constructed by I. Ya. Shtaermann, is used. The problem of the collision of bodies is reduced to a second-order differential equation with quadratic nonlinearity. Two forms of analytical solution of this nonlinear Cauchy problem are obtained. The first uses the Ateb-sine, and the second uses the elliptical cosine. The equivalence of the obtained forms of solutions is established, that is, the possibility of replacing one form with another. To calculate the values of the Ateb-sine using the linear interpolation method, a special table is presented, and an analytical approximation by its elementary functions is proposed. The consistency of the results to which these two methods of approximate calculation of the Ateb-sine values are shown is shown. An approximate formula for calculating the values of the elliptical cosine is also derived and its reliability is confirmed. As a result of solving the impact problem, formulas were obtained that describe the change over time: the convergence of the centers of mass of the bodies, the forces of impact interaction, the radius of the circular contact area and the contact pressure. It is noted that the pressure is infinite in the center of the site, where the top of the cone is in contact with the half-space. The results are compared, to which two analytical forms of the solution result and numerical computer integration of the differential equation of compression of bodies subjected to impact. Established a good agreement of numerical results obtained in different ways. The effect of the taper angle on the main parameters of the dynamic interaction of bodies is investigated. It is shown that an increase in the angle of a solution of a conical body, which strikes, leads to a decrease in the maximum dynamic compression of bodies and the duration of their interaction, as well as to an increase in the maximum impact force, with a constant value of its momentum. A numerical example of calculation is given, where steel is taken as the material of a conical body, and rubber is used as the material of a fixed half-space. Problems of this type arise when calculating the parameters of impact of a piece of mineral raw materials on rubber-lined rolls of the vibration classifier.

Key words: mechanical shock, elastic conical body, elastic half-space, H. Hertz theory, analytical solution, Ateb-sine, elliptic cosine.

Вступ. Розрахунки міцності деталей при механічному ударі поширені в інженерній практиці, бо вказане короткочасне динамічне навантаження може вивести з ладу елементи конструкцій. Із багатьох наближених теорій удару заслуговує окремої уваги теорія Г. Герца. Вона висвітлена в багатьох виданнях [1-3]. Але там йдеться про удар тіл обмежених поверхнями другого порядку. Це стосується і роботи [4], де одержано аналітичний розв'язок задачі в Атеб-функціях. Поряд з цим варіантом, на практиці зустрічаються випадки, коли точка граничної поверхні одного із тіл, з якої починається процес стискання, є кутковою точкою. Тому далі розглянемо цей особливий випадок що виникає, наприклад, при ударі конуса об плоску перешкоду.

Метою статті є виведення та апробація формул для розрахунку параметрів ударної взаємодії пружного конічного тіла з нерухомим пружним півпростором, обмеженим плоскою поверхнею.

Викладення основного матеріалу. Для досягнення поставленої мети, крім основних положень теорії Г. Герца, використаємо розв'язок статичної осесиметричної задачі теорії пружності, одержаний І.Я. Штаерманом. У відповідності з цим розв'язком [5, с. 188], зближення центрів мас тіл x , при їх стисканні силою P , подається виразом:

$$x = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg} \gamma, \quad (1)$$

у якому:

$$a = \sqrt{\frac{2P}{\pi} (Q_1 + Q_2) \operatorname{tg} \gamma}; \quad Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}; \quad (2)$$

a – радіус області контакту; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл; 2γ – кут конусності одного із тіл (див. рис. 1).

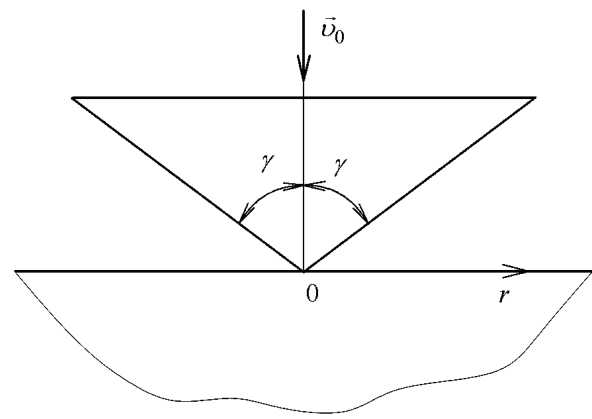


Рисунок 1 – Схема взаємодії тіл

Тиск $p(r)$ має логарифмічну особливість в центрі площадки контакту $r = 0$, бо згідно з [5, с. 188]:

$$p(r) = -\frac{P}{\pi a^2} \ln \left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right). \quad (3)$$

Тут осереднений тиск $p_{cp} = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2 \cdot (Q_1 + Q_2)}$

не залежить від сили P .

Щоб знайти відношення r/a , при якому $p(r) = p_{cp}$, розв'яжемо рівняння:

$$\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} = \frac{1}{e}.$$

Воно має корінь $\frac{r}{a} = \frac{2e}{1+e^2} \approx 0,64805$.

Графік зміни тиску в безрозмірних координатах подано на рис. 2, де $p(0) = \infty$.

Завдяки великому тиску, в зоні контакту не обійтись без пластичних деформацій. Але, аналогічно І.Я. Штаерману, їх не будемо враховувати при динамічному стисканні тіл.

Зближення центрів мас тіл в ході пружного удару $x(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$M \ddot{x} = -\beta x^2, \quad (4)$$

де крапка над x означає похідну за часом t ; M – маса конуса.

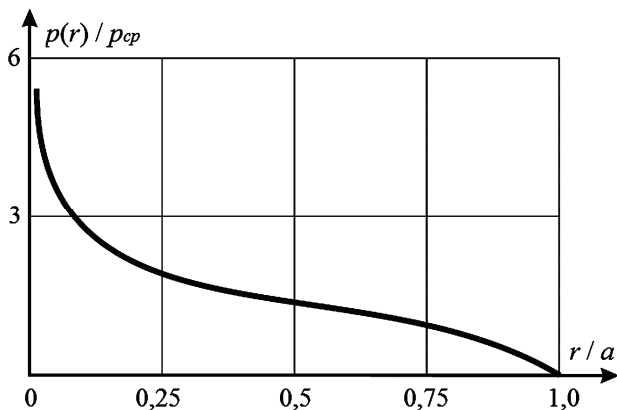


Рисунок 2 – Графік розподілу контактної тиску

Враховуючи (1) і (2), для обчислення коефіцієнта β отримуємо формулу:

$$\beta = \frac{2tg\gamma}{\pi \cdot (Q_1 + Q_2)}.$$

Рівняння (4) розв'язуємо при початкових умовах:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (5)$$

де v_0 – початкова швидкість зіткнення конуса з півпростором.

Розглянемо спочатку процес динамічного стискання тіл. Щоб одержати перший інтеграл рівняння (4) подамо його у вигляді:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\beta}{M} x^2. \quad (6)$$

Проінтегрувавши (6), з урахуванням (5), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\beta}{3M} \sqrt{x_c^3 - x^3}}. \quad (7)$$

Тут:

$$x_c = \left(\frac{3Mv_0^2}{2\beta} \right)^{1/3}.$$

Це максимальне стискання тіл при ударі.

Подальше інтегрування (7), з урахуванням (5), дає:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x_c^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2\beta}{3M}} t. \quad (8)$$

Із (8) переходом до безрозмірної змінної

$y = u \cdot x_c$, одержуємо:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \eta = \frac{v_0 t}{x_c}. \quad (9)$$

Далі можливі дві форми подання x/x_c . Спочатку розглянемо першу з них.

1. Верхня межа інтегралу в лівій частині в (9) виражається через Атеб-синус [6, 7]. Тому:

$$x(t) = x_c \cdot \text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right). \quad (10)$$

Максимальне зближення центрів мас досягається при

$$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) = 1. \quad (11)$$

Воно становить:

$$\max x(t) = x_c = \left(\frac{3Mv_0^2}{2\beta} \right)^{1/3}.$$

Для обчислення сили удару $P(t)$, як функції часу, одержуємо формулу:

$$P(t) = \beta x_c^2 \left[\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \right]^2,$$

причому:

$$\max P(t) = \beta x_c^2.$$

Знаючи $P(t)$, по формулах (2) і (3) потім можна обчислити $a(t)$ і $p(r,t)$, причому $p(0,t)$ буде нескінченним, що підкреслює особливість цієї точки.

Процес стискання закінчується при $t = t_c$, коли виконується умова (11) або:

$$\eta = \frac{v_0 t_c}{x_c} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}.$$

Цей інтеграл виражається через затабульовану в [8, 9] Гама-функцію $\Gamma(z)$ по формулі [10]:

$$I = \sqrt[3]{4} \frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma(5/3)}.$$

Враховуючи, що $\Gamma(4/3) \approx 0,8929795$, $\Gamma(5/3) \approx 0,9027453$, знаходимо, що $I \approx 1,402182$.

Отже тривалість процесу стискання становить:

$$t_c = 1,402182 \cdot \frac{x_c}{v_0},$$

а тривалість пружного удару дорівнює $t_y = 2t_c$.

Імпульс сили удару $S(P)$ подається інтегралом:

$$S(P) = \int_0^{t_y} P(t) dt = 2\beta x_c^2 \int_0^{t_c} \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) dt,$$

який не виражається в замкнутому вигляді через відомі функції. Але його досить просто обчислити наближено, наприклад, по формулі Сімпсона. При такому варіанті обчислення:

$$S(P) \approx \frac{1}{3} \beta x_c^2 t_c \left[1 + 4 \cdot \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \right] \approx 0,70109 \cdot \left[1 + 4 \cdot \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \right] Mv_0. \quad (12)$$

Оскільки за лінійною інтерполяцією даних в

Таким чином, за розглянутою формою розв'язку, розрахунок параметрів удару пов'язаний з обчисленням значень Атеб-сінуса. Для зручності проведення розрахунків наводимо таблицю цієї функції, запозичену з роботи [11]. Вказаних значень достатньо, щоб методом лінійної інтерполяції проводити відповідні розрахунки. Для порівняння в дужках в табл. 1. Також вказано наближені значення Атеб-сінуса, до яких призводить апроксимація:

$$\text{Sa} \left(2; 1; \frac{3}{2} \eta \right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta < 0,2 \\ 0,2 + 1,0283(\eta - 0,2) - 0,1833(\eta - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - \sin^2 \left[\left(\sqrt{3}/2 \right) \cdot (I - \eta) \right] & 0,8 < \eta \leq I. \end{cases} \quad (13)$$

Таблиця 1 – Значення Атеб-сінуса (в дужках наближені)

10η	10Sa(2,1, 3/2 η)	10η	10Sa(2,1, 3/2 η)
0,0	0,00 (0,00)	7,5	7,12 (7,10)
0,5	0,50 (0,50)	8,0	7,51 (7,51)
1,0	1,00 (1,00)	8,5	7,88 (7,88)
1,5	1,50 (1,50)	9,0	8,22 (8,22)
2,0	2,00 (2,00)	9,5	8,54 (8,54)
2,5	2,50 (2,51)	10,0	8,83 (8,84)
3,0	2,99 (3,01)	10,5	9,10 (9,10)
3,5	3,48 (3,50)	11,0	9,33 (9,33)
4,0	3,97 (3,98)	11,5	9,53 (9,53)
4,5	4,45 (4,46)	12,0	9,70 (9,70)
5,0	4,92 (4,92)	12,5	9,83 (9,83)
5,5	5,39 (5,37)	13,0	9,92 (9,92)
6,0	5,84 (5,82)	13,5	9,98 (9,98)
6,5	6,28 (6,26)	I	10,00 (10,0)
7,0	6,71 (6,68)		

Порівняння результатів підтверджує досить високу точність запропонованої апроксимації.

Зазначимо, що (13) є окремим випадком більш загального наближення, запропонованого в [12].

2. Зупинимось далі на другій формі аналітичного розв'язку поставленої задачі. Щоб отримати її, виразу (9) надаємо вигляд:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{x/x_c}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \eta,$$

звідки одержуємо:

$$\int_{x/x_c}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \eta = I - \eta. \quad (14)$$

Інтеграл в лівій частині цього співвідношення виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду $F(\varphi, K)$ [9]. Тому (14) набуває форму:

$$F(\varphi, \sin 75^\circ) = \sqrt[4]{3}(I - \eta),$$

причому

табл. 1 $\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \approx 0,672$, то, у відповідності з (12), $S(P) \approx 1,967 Mv_0$. Точне значення імпульсу $S(P) = 2Mv_0$, що підтверджує вірогідність одержаних аналітичних розв'язків.

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3} - 1 - (x/x_c)}{\sqrt{3} + 1 + (x/x_c)} = \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right];$$

$\text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]$ – еліптичний косинус.

Отже другою формою аналітичного розв'язку задачі удару є:

$$x(t) = x_c \cdot \left\{ 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]}{1 + \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]} \right\}. \quad (15)$$

Решта параметрів удару, а саме $P(t)$, $a(t)$ і $q(t)$ теж будуть виражатись через еліптичний косинус. Тому зупинимось на обчисленні значень цієї функції. Скористаємось відомою залежністю [13]:

$$\text{cn}(\xi, \sin 75^\circ) = \cos \theta, \quad (16)$$

де

$$\theta = \frac{\pi \xi}{2K} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K}, \quad (17)$$

$$q = \exp \left(-\pi \frac{K'}{K} \right), \quad K = F \left(\frac{\pi}{2}, \sin 75^\circ \right),$$

$$K' = F \left(\frac{\pi}{2}, \sin 15^\circ \right) \text{ – повні еліптичні інтеграли першого роду.}$$

Оскільки [9]: $K = 2,7681$, $K' = 1,5981$, то $q \approx 0,16305 < 1$.

Прискоримо збіжність ряду в (17). Для цього подамо його у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^n \sin \frac{n \pi \xi}{K} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^3}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K}. \quad (18)$$

Оскільки $q < 1$, то другий ряд в правій частині в (18), збігається досить швидко і його суму можна наближено подати одним першим членом. Сума першого ряду в правій частині в (18) виражається в замкнутому вигляді [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^n \sin \frac{n\pi\xi}{K} = \operatorname{arctg} \left(\frac{q \sin \frac{\pi\xi}{K}}{1 - q \cos \frac{\pi\xi}{K}} \right).$$

Таким чином, приходимо до наближеної формули:

$$\theta \approx \frac{\pi\xi}{2K} + 2 \cdot \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{q \sin \frac{\pi\xi}{K}}{1 - q \cos \frac{\pi\xi}{K}} \right) - \frac{q^3}{1+q^2} \sin \frac{\pi\xi}{K} \right]. \quad (19)$$

Перевіримо точність цієї формули. Для цього покладемо $F(\varphi, \sin 75^\circ) = \sqrt[4]{3}(I - \eta) = 1,6468$. Йому в табл. 27 в [9] відповідає $\varphi = 70^\circ$. Тоді $\operatorname{cn}(1,6468; \sin 75^\circ) = \cos 70^\circ = 0,34202$. Якщо користуватись формулою (19), то туди треба задати: $\xi = 1,6468$; $q = 0,16305$; $K = 2,7681$. Для цих чисел одержуємо: $\theta \approx 1,22173$ рад, $\cos \theta = 0,34202$. Отже формули (16), (19) забезпечують високу точність обчислення значень еліптичного косинуса. Якщо вказане значення еліптичного косинуса підставити в (15), то одержимо $x(t)/x_c = 0,1509$. При $\sqrt[4]{3}(I - \eta) = 1,6468$ аргумент $\eta = 0,15088$. Підставивши це η в асимптотичну формулу (13), знаходимо, що $\operatorname{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right) \approx 0,1509$. Тому, згідно з (10), $x(t)/x_c = 0,1509$. Отже обидві форми аналітичного розв'язку дають однакове відношення $x(t)/x_c$, що підтверджує їх рівнозначність.

Після досягнення $x = x_c$ розпочинається процес розтискання тіл. Він проходить на проміжку $t \in (t_c; t_y)$. Оскільки удар пружний, то графіки $x(t)$, $P(t)$ і $p(t)$ симетричні відносно вертикалі $t = t_c$. Тому при розтисканні зберігає чинність розв'язок (15), а у розв'язку (10) треба замінити $\operatorname{Sa}\left(2; 1; \frac{3}{2}\eta\right)$ на

$$\operatorname{Sa}\left[\left(2; 1; \frac{3}{2}(2I - \eta)\right)\right].$$

Таким чином, немає потреби заново розв'язувати рівняння (4) з новими початковими умовами.

Користуючись одержаними аналітичними розв'язками, розглянемо приклад, в припущенні, що удар сталевого конуса масою $M = 0,5$ кг по нерухомому гумовому півпростору відбувається зі швидкістю $v_0 = 3$ м/с. Задачі такого типу виникають при розрахунках удару куску сировини по футерованому валку вібраційного класифікатора [14]. Модуль пружності сталі $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, а коефіцієнт Пуассона $\mu_1 = 0,25$.

Відповідно для гуми приймаємо: $E_2 = 5 \cdot 10^6$ Па, $\mu_2 = 0,5$. Обчислимо основні параметри удару при $\gamma = 70^\circ$. Для вказаних вихідних даних: $Q_1 + Q_2 \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$ 1/Па; $\beta = 1,16607 \cdot 10^7$ Па;

$x_c = 0,008334$ м; $\max P = 809,9$ Н; $t_c = 0,003895$ с. Обчислені трьома способами відношення $x(t)/x_c$ у різні моменти часу вказано в табл. 2.

Таблиця 2 – Значення x/x_c , обчислені трьома способами

t/t_c	η	Значення $x(t)/x_c$		
		формула (10)	формула (15)	числове інтегрування
0,25	0,35055	0,3485	0,3486	0,3487
0,50	0,70109	0,6719	0,6716	0,6716
0,75	1,05164	0,9107	0,9105	0,9106
1,00	1,40218	1,0000	1,0000	1,0000

При використанні формули (10) значення Атеб-синуса знаходили лінійною інтерполяцією табличних даних. Для обчислення значень еліптичного косинуса використовували (16), (19). Числове інтегрування рівняння (4) проводили на комп'ютері. Маємо малі розбіжності результатів в табл. 2, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

Зберігаючи прийняті вихідні дані, з'ясуємо вплив кута конусності на динамічне стискання тіл. Результати розрахунків для трьох значень кута конусності наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення максимумів стискання тіл і сили удару та його тривалості при різних γ

γ , град.	x_c , м	$\max P$, Н	t_y , с
60	0,009720	694,52	0,00909
70	0,008334	809,90	0,00779
80	0,006546	1031,39	0,00612

Як бачимо, зі збільшенням γ зменшується x_c і t_y та зростає $\max P$.

Висновки. Задача пружного удару кінцевого тіла по півпростору має дві форми аналітичного розв'язку. Перша пов'язана з Атеб-синусом, а друга – з еліптичним косинусом. Одержані розв'язки дають розгортку процесу удару в часі. Вони дозволяють також обчислювати максимуми стискання тіл і сили контактної взаємодії та розраховувати тривалість удару.

Список літератури

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва: Стройиздат, 1965. 447 с.
2. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 319 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. Москва: Наука, 1977. 223 с.
4. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар. Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1279). С. 98-103.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 272 с.
6. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. Доповіді Національної академії наук України. Київ: 2007. № 12. С. 37-42.
7. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливань систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.
8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специаль-

ним функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Москва: Наука, 1981. 800 с.

11. Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Малець О.М. Про коливання осцилятора з квадратично-нелінійною жорсткістю. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. Харків: ХНТУСГ, 2017. № 8. С. 177-185.

12. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2017. № 3 (86). С. 34-40.

13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. 1100 с.

14. Надутый В.П., Ягнюков В.Ф., Ягнюкова И.В. Взаимодействие кусков материала с футерованным валком вибрационного классификатора. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2014. № 1 (73). С. 94-99.

References (transliterated)

1. Goldsmith W. Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies. Moscow: Stroyizdat, 1965. 447 p.

2. Kilchevsky N.A. Dynamic contact compression of solids. Blow. Kyiv: Naukova Dumka, 1976. 319 p.

3. Panovko Y.G. Introduction to the theory of mechanical shock. Moscow: Nauka, 1977. 223 p.

4. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Ateb-sine in solving the Hertz problem. Bulletin of NTU «KhPI». Series: Mathemati-

cal modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018. № 3 (1279). P. 98-103.

5. Shtaerman I.Ya. Contact problem of the theory of elasticity. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 272 p.

6. Gricik V.V., Nazarkevich M.A. Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. Kyiv, 2007. № 12. P. 37-42.

7. Pukach P.Ya. Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillations of systems. Lviv: Lviv Polytechnic, 2014. 288 p.

8. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

9. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

10. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. Integraly i rjady. Jelementarnye funkci. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

11. Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V., Malets O.M. On fluctuation oscillator with square nonlinear stiffness. Technical service of agroindustrial, forestry and transport complexes. Kharkiv: KhNTUSG, 2017. No. 8. P. 177-185.

12. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity. Vibrations in technology and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2017. № 3 (86). P. 34-40.

13. Gradstein I.S., Rugik I.M. Table of integrals, sums, rows and works. Moscow: Science, 1962. 1100 p.

14. Naduty V.P., Yagnyukov V.F., Yagnyukova I.V. Interaction of pieces of material with a lined roll of a vibration classifier. Vibrations in technology and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2014. № 13 (73). P. 94-99.

Надійшла (received) 31.01.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ**АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО УДАРУ ТВЕРДИХ ТІЛ**

Аналітичний розв'язок узагальненої задачі механічного удару двох пружних тіл обертання в постановці Г. Герца виражено через періодичний Атеб-синус і його степені. Виведено формули для розрахунку зміни у часі зближення центрів мас тіл, сили ударної взаємодії, радіуса площадки контакту та тиску в її центрі. Одержано компактні формули максимумів вказаних величин, які досягаються в кінці процесу динамічного стискання тіл. Виведена також формула тривалості удару в часі. Відзначено, що тривалість залежить від порядку граничних поверхонь тіл, підданих удару. Для врахування місцевих контактних деформацій тіл в зоні їх взаємодії використано узагальнений розв'язок осесиметричної контактної задачі теорії пружності, побудований І.Я. Штаєрманом для випадку, коли тверді тіла обмежені поверхнями, що мають порядок більший другого. Показано, що із одержаних теоретичних результатів, які стосуються щільного дотику тіл, підданих удару, як окремих випадок, випливають відомі класичні результати, одержані Г. Герцем. Отримано формулу визначеного інтегралу від степені Атеб-синуса, що виражає ударний імпульс. Розглянуто приклад пружного удару тіл, одне з яких обмежене поверхнею четвертого порядку. Для обчислення значень Атеб-синуса рекомендовано використовувати його апроксимацію елементарними функціями. Показано, що числові результати, одержані за допомогою аналітичного розв'язку, з використанням цієї апроксимації, добре узгоджуються з результатами числового інтегрування рівняння удару на комп'ютері. Досліджено вплив геометричних характеристик граничних поверхонь на розрахункові параметри удару, що відбувається з невеликою початковою швидкістю. Враховуючи симетрію характеристик пружного удару, відносно часу їх максимумів, для розрахунку процесу динамічного розтискання тіл, рекомендовано використовувати аналітичні розв'язки, побудовані для етапу стискання тіл. Викладена теорія стосується виключно пружного удару, коли динамічне стискання не призводить до появи пластичних деформацій. Це накладає суттєве обмеження на початкову швидкість удару.

Ключові слова: пружний контактний удар, місцеві деформації, граничні поверхні високих порядків, аналітичний розв'язок, Атеб-синус і його апроксимація елементарними функціями.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОГО УДАРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Аналитическое решение обобщенной задачи механического удара двух упругих тел вращения в постановке Г. Герца выражено через периодический Атеб-синус и его степени. Выведены формулы для расчета изменения во времени сближения центров масс тел, силы ударного взаимодействия, радиуса площадки контакта и давления в ее центре. Получены компактные формулы максимумов указанных величин, которые достигаются в конце процесса динамического сжатия тел. Выведена также формула продолжительности удара во времени. Отмечено, что продолжительность зависит от порядка граничных поверхностей тел, подвергнутых удару. Для учета местных контактных деформаций тел в зоне их взаимодействия использовано обобщенное решение контактной задачи теории упругости, построенное И.Я. Штаєрманом для случая, когда твердые тела ограничены поверхностями, что имеют порядок больший второго. Показано, что из полученных теоретических результатов, которые относятся к плотному касанию тел, подверженных удару, как частный случай, следуют известные классические результаты, полученные Г. Герцем. Получена формула определенного интеграла от степени Атеб-синуса, которая выражает ударный импульс. Рассмотрен пример упругого удара тел, одно из которых ограничено поверхностью четвертого порядка. Для вычисления значений Атеб-синуса рекомендовано использовать его аппроксимацию элементарными функциями. Показано, что числовые результаты, полученные с помощью аналитического решения, с использованием указанной аппроксимации, хорошо согласуются с результатами численного интегрирования уравнения удара на компьютере. Исследовано влияние геометрических характеристик граничных поверхностей на расчетные параметры удара, который происходит с небольшой начальной скоростью. Учитывая симметрию характеристик упругого удара во времени, для расчета процесса динамического разжатия тел рекомендовано использовать аналитические решения, построенные для этапа сжатия тел. Изложенная теория касается исключительного упругого удара, когда динамическое сжатие не приводит к появлению пластических деформаций. Это налагает существенное ограничение на начальную скорость удара.

Ключевые слова: упругий контактный удар, местные деформации, граничные поверхности высоких порядков, аналитическое решение, Атеб-синус и его аппроксимация элементарными функциями.

V.P. OLSHANSKIYY**ANALYTICAL SOLUTION OF THE GENERALIZED PROBLEM OF ELASTIC IMPACT OF SOLIDS**

The analytical solution of the generalized problem of mechanical shock of two elastic bodies of revolution in the formulation of H. Hertz is expressed through the periodic Ateb-sine and its degrees. The formulas for calculating the time variation of the convergence of the centers of mass of bodies, the force of the shock interaction, the radius of the contact area and the pressure at its center are derived. Compact formulas for the maxima of these quantities are obtained, which are achieved at the end of the process of dynamic compression of bodies. The formula for the duration of the impact in time is also derived. It is noted that the duration depends on the order of the boundary surfaces of the bodies subjected to impact. To account for regional informational deformations of bodies in the

zone of their interaction, a generalized solution of the contact problem of the theory of elasticity, constructed by I.Ya. Shtaermann for the case when solids are bounded by surfaces that have an order greater than the second. It is shown that from the obtained theoretical results, which relate to the dense contact of bodies subject to impact, as a special case, the well-known classical results obtained by H. Hertz follow. The formula of a definite integral of the degree of Ateb-sine, which expresses the shock pulse, is obtained. An example of elastic impact of bodies, one of which is limited to a fourth-order surface, is considered. To calculate the values of the Ateb-sine, it is recommended to use its approximation by elementary functions. It is shown that the numerical results obtained using an analytical solution, using this approximation, agree well with the results of numerical integration of the impact equation on a computer. The influence of the geometric characteristics of the boundary surfaces on the design parameters of the impact, which occurs with a small initial velocity, is investigated. Taking into account the symmetry of the characteristics of elastic impact in time, it is recommended to use analytical solutions built for the stage of compression of bodies to calculate the process of dynamic unclamping of bodies. The theory presented deals with exceptional elastic impact, when dynamic compression does not lead to plastic deformations. This imposes a significant limitation on the initial impact velocity.

Keywords: elastic contact shock, local deformations, boundary surfaces of high orders, analytical solution, Ateb-sine and its approximation by elementary functions.

Вступ. Із поширених теорій удару лише дві Г. Герца [1, 2] та М.О. Кільчевського [3, 4] дають можливість обчислювати тривалість удару в часі та зусилля, які виникають при динамічному стисканні тіл. У решті теорій удар вважають миттєвим і використана не сила динамічної взаємодії, а імпульс сили. Застосування Атеб-функцій в теорії механічного удару створює можливість одержати розгортку процесу в часі. Саме така можливість реалізована в [5], де розглянуто удар двох пружних куль, в припущенні, що їх місцеві деформації описуються класичним розв'язком контактної задачі теорії пружності, що належить Г. Герцу. Таке припущення втрачає сенс, коли виступи тіл, в зоні їх динамічної взаємодії обмежені поверхнями не другого, а більш високих порядків або мають кутову точку. Тому доцільно узагальнити результати, одержані в [5], на випадок більш щільного контакту тіл, підданих удару, чим і зумовлена мета роботи.

Метою статті є математичне моделювання процесу механічного удару двох пружних тіл, у яких граничні поверхні в зоні взаємодії можуть мати не лише другий, а і більш високі порядки.

Поставка задачі та її розв'язок. Як і в теорії І.Я. Штаермана [6], припускаємо, що в області ударної взаємодії тіла обмежені поверхнями обертання $z_1 = f_1(r)$ і $z_2 = -f_2(r)$, причому вісь симетрії $r = 0$ проходить по лінії дії динамічних стискаючих сил (див. рис. 1).

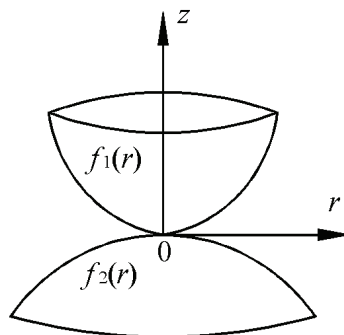


Рисунок 1 – Схема контакту тіл обертання

Нехай при $r = 0$ відмінні від нуля похідні $f_1(r)$ і $f_2(r)$, починаючи з їх $2n$ -го порядку, тобто [6]:

$$f_1^{(j)}(0) = f_2^{(j)}(0) = 0 \text{ при } j < 2n,$$

а

$$f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0) = (2n)!A,$$

де A деяка позитивна стала; $n = 1, 2, \dots$

За цих припущень, як і в теорії Г. Герца, відносно зближення центрів мас тіл $x(t)$ в ході пружного удару описуємо диференціальним рівнянням:

$$M \ddot{x} + \beta x^\alpha = 0, \quad (1)$$

у якому $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\alpha = \frac{2n+1}{2n}$;

$$\beta = \frac{4n}{(2n+1)(Q_1 + Q_2)} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{\frac{1}{2n}}; \quad (2)$$

де $Q_1 = \frac{(1-v_1^2)}{E_1}$; $Q_2 = \frac{(1-v_2^2)}{E_2}$;

m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі;

E_1, ν_1 і E_2, ν_2 – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона їх матеріалів; крапка над x означає похідну за часом t .

На думку автора монографії [1] рівняння (1) може також описувати і пружно-пластичний удар тіл, якщо константи α і β визначити емпіричним шляхом, у випадку коли пластичне деформування охоплює невелику область.

Для пружного удару двох куль з радіусами R_1 і R_2 : $n = 1$, $f_1^{(2)}(0) = \frac{1}{R_1}$; $f_2^{(2)}(0) = \frac{1}{R_2}$; $A = \frac{1}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ із

виразів (2) випливає, що:

$$\alpha = 3/2; \quad \beta = \frac{4}{3(Q_1 + Q_2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Такі значення α і β були використані в [5], у відповідності з теорією контактних деформацій Г. Герца.

Розв'язок рівняння (1) будемо при початкових умовах:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3)$$

де v_0 – швидкість ударного зіткнення тіл.

Щоб одержати перший інтеграл рівняння (1) перетворимо його до вигляду:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\beta}{M} x^\alpha.$$

Подальшим інтегруванням його отримуємо з то-

чністю до сталої c_1 :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{c_1 - \frac{2\beta x^{\alpha+1}}{M \alpha + 1}}.$$

Початкові умови (3) виконуються, коли $c_1 = v_0^2$.

Тому:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\beta x^{\alpha+1}}{M \alpha + 1}}. \quad (4)$$

В момент максимального стиснення: $t = t_c$, $x = x_c$, швидкість зближення тіл $\dot{x}(t_c) = 0$. Для цього моменту часу із (4) отримуємо:

$$x_c = \left(\frac{M v_0^2 \alpha + 1}{2 \beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (5)$$

У випадку $n=1$; $\alpha=3/2$ формула (5) набуває вигляду:

$$x_c = \left(\frac{5M v_0^2}{4\beta} \right)^{2/5},$$

що узгоджується з [2, 5].

У відповідності з (3) і (4) другим інтегралом рівняння (1) є:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\beta y^{\alpha+1}}{M \alpha + 1}}} = t. \quad (6)$$

Переходом до нової безрозмірної змінної інтегрування $u = \frac{y}{x_c}$, замість (6), отримуємо:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{du}{\sqrt{1-u^{\alpha+1}}} = \frac{v_0 t}{x_c}.$$

Тут верхня межа інтегрування виражається через Атеб-синус [7, 8]. Тому зближення центрів мас тіл при їх стисненні описується виразом:

$$x(t) = x_c \cdot \text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right), \quad (7)$$

який узагальнює розв'язок, одержаний в [5], де $\alpha = 3/2$.

Формула (7) дає можливість отримати і розгортку в часі сили удару $P(t)$, бо:

$$P(t) = \beta [x(t)]^\alpha = \beta x_c^\alpha \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right]^\alpha. \quad (8)$$

Максимум сили удару досягається в кінці процесу стиснення і становить:

$$P_c = \beta x_c^\alpha = \beta \left(\frac{M v_0^2 \alpha + 1}{2 \beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \quad (9)$$

Із (9), при $\alpha = 3/2$, впливає відомий результат [2].

Використовуючи (8) та розв'язок з роботи [6], знаходимо, що радіус кругової площадки контакту змінюється за законом:

$$a(t) = \left[\frac{1}{4n} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{Q_1 + Q_2}{A} P(t) \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Зміна тиску в центрі цієї площадки описується виразом:

$$\max p = p(0, t) = \frac{2n+1}{2(2n-1)} \frac{P(t)}{\pi a^2(t)}.$$

Ці величини теж пов'язані з обчисленням Атеб-синуса, бо виражається його степенями.

Процес стиснення закінчується при $t = t_c$, що є коренем рівняння:

$$\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t_c}{x_c} \right) = 1.$$

Цей корінь визначається інтегралом:

$$\frac{v_0 t_c}{x_c} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{\alpha+1}}},$$

який виражається через Гама-функцію $\Gamma(z)$, затабульовану в [9, 10], по формулах [11]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2\alpha+2}\right)}.$$

Тому тривалість у часі процесу стиснення становить:

$$t_c = \frac{x_c}{v_0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2\alpha+2}\right)}. \quad (10)$$

Вона залежить від α або порядку n -граничних поворхонь.

Якщо прийняти до уваги, що $\Gamma(0,4) \approx 2,21825$, а $\Gamma(0,9) \approx 1,06867$, то при $\alpha = 3/2$ ($n = 1$) одержимо:

$$t_c \approx 1,4716 \frac{x_c}{v_0}, \quad (11)$$

що відповідає теорії Г. Герца [2]. Отже, залежність (10) узагальнює відому формулу (11).

Використовуючи (8) і (10) можна знайти ударний імпульс:

$$S(P) = 2 \int_0^{t_c} P(t) dt = 2 P_c \int_0^{t_c} \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right]^\alpha dt.$$

У відповідності з (1), (7):

$$\left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right]^\alpha = \frac{x^\alpha}{x_c^\alpha} = -\frac{M}{\beta x_c^\alpha} \ddot{x}.$$

Тоді:

$$\int_0^{t_c} \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right]^\alpha dt = -\frac{M}{\beta x_c^\alpha} \dot{x} \Big|_0^{t_c}.$$

Оскільки $\dot{x} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_c}\right)^{\alpha+1}}$, $\dot{x}(0) = v_0$; $\dot{x}(t_c) = 0$,

то

$$\int_0^{t_c} \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right]^\alpha dt = \frac{Mv_0}{\beta x_c^\alpha} = \frac{Mv_0}{P_c}. \quad (12)$$

Цей результат можна було б отримати й іншим шляхом, а саме, користуючись відомою теоремою про зміну кількості руху.

Переходом в (12) до нової змінної інтегрування $\xi = \frac{v_0 t}{x_c}$, з урахуванням (5), отримуємо:

$$\int_0^1 \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right) \right]^\alpha d\xi = \frac{Mv_0^2}{\beta x_c^{\alpha+1}} = \frac{2}{\alpha+1}, \quad (13)$$

що спрощує обчислення інтегралів від степенів Атеб-сінуса.

Далі, користуючись теоремою про зміну кінетичної енергії:

$$\int_0^{t_c} P(t) \dot{x}(t) dt = \frac{1}{2} Mv_0^2$$

та виразом (4), легко довести, що:

$$\int_0^1 \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right) \right]^\alpha \sqrt{1 - \left[\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right) \right]^{\alpha+1}} d\xi = \frac{1}{\alpha+1} \quad (14)$$

З метою апробації одержаних розв'язків, розглянемо удар тіла, обмеженого поверхнею обертання $z_1 = Ar^4$, з пружним півпростором, що має плоску граничну поверхню. Для цього випадку $n = 2$; $\alpha = \frac{5}{4}$. Матеріалом півростору та тіла, що вдарає по ньому, вибираємо сталь: $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$. Для вказаного матеріалу, при $A = 500$ 1/м³, коефіцієнт $\beta = 2,82432 \cdot 10^{10}$ Па·м^{3/4}. Обчислимо основні параметри удару, коли $m_1 = 6$ кг, $m_2 = \infty$, $v_0 = 8$ м/с. Для них максимум стискування тіл становить: $x_c = 0,0003361$ м, а максимум сили удару дорівнює $P_c = 1285285,3$ Н. Щоб знайти тривалість процесу удару прийнемо до уваги, що $\Gamma(4/9) \approx 1,99289$, а $\Gamma(17/18) \approx 1,03529$. За цих значень Гама-функції: $t_y = 2t_c = 0,0001274$ с. Обчислені по (7) відношення $\frac{x(t)}{x_c}$ у різні моменти часу t/t_c записано в табл. 1. Поряд вказано результати, до яких призводить числове інтегрування рівняння (1) на комп'ютері. Значення Атеб-сінуса знаходили за наближеною формулою, яка є окремим випадком більш загальної залежності в [11]:

$$\text{Sa} \left(\frac{5}{4}, 1, \frac{9}{8} \eta \right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta < 0,2 \\ 0,1999 + 1,0133(\eta - 0,2) - 0,2213(\eta - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - 1,6 \cdot \sin^2 [0,5929 \cdot (I - \eta)] & 0,8 < \eta \leq I, \end{cases}$$

де $I = 1,5164$.

Таблиця 1 – Обчислені двома способами значення $x(t)$

$\frac{t}{t_c}$	$\eta = \frac{v_0 t}{x_c}$	$\frac{x(t)}{x_c}$, форм. (7)	$\frac{x(t)}{x_c}$, числ. інтегр.
0,00	0,0000	0,0000	0,0000
0,25	0,3791	0,3743	0,3726
0,50	0,7582	0,6966	0,6974
0,75	1,1373	0,9205	0,9205
1,00	1,5164	1,0000	1,0000

Порівняння показує, що одержані двома способами числові результати добре узгоджуються між собою, що підтверджує, вірогідність аналітичного розв'язку.

З'ясуємо далі як зміняться розрахункові характе-

ристики удару зі збільшенням геометричного параметру A . Обчислені x_c , P_c і t_y для різних A наведено в табл. 2.

У випадку, коли: $\alpha = 1$, $\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right) = \sin \xi$;
 $I = \pi/2$ із (13), (14) впливають загальновідомі квадрати:

$$\int_0^{\pi/2} \sin \xi d\xi = 1; \quad \int_0^{\pi/2} \sin \xi \sqrt{1 - \sin^2 \xi} d\xi = \frac{1}{2}.$$

Вирази (13), (14) зберігають чинність, якщо в них замість $\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right)$ записати $\text{Ca} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \xi \right)$, тобто вони стосуються і Атеб-косінуса.

При $t > t_c$ проходить розтискання тіл. Одержані вище розв'язки будуть описувати і цей процес, якщо в них замінити:

$$\text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \frac{v_0 t}{x_c} \right) \text{ на } \text{Sa} \left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2} \left(2I - \frac{v_0 t}{x_c} \right) \right).$$

Графіки $x(t)$ і $P(t)$ симетричні відносно вертикалі $t = t_c$. Тривалість удару $t_y = 2t_c$, бо тривалості процесів стискування і розтискання однакові.

Таблиця 2 – Максимуми зближення тіл і зусилля удару при різних A

$A, \text{м}^3$	$10^4 x_c, \text{м}$	$P_c, \text{Н}$	$10^4 t_y, \text{с}$
500	3,361	1285285,3	1,274
1000	3,630	1189979,8	1,376
2000	3,921	1101907,1	1,486
4000	4,235	1020253,3	1,605

Розрахунки показують, що зі збільшенням геометричного параметру A збільшуються максимум зближення центрів мас тіл і тривалість удару та зменшу-

ється максимум сили удару. Отже, параметри удару залежать від форми граничної поверхні тіл в зоні їх контакту. В межах вказаної точності обчислень добуток $P_c \cdot t_y \approx \text{const}$, що є наслідком сталого ударного імпульсу в розглянутому прикладі.

Висновки. Викладена теорія дає можливість розрахувати параметри удару пружних тіл, обмежених поверхнями обертання, порядок яких не менший, ніж другий. Узгодженість числових результатів, до яких вона призводить, з результатами числового комп'ютерного інтегрування нелінійної задачі Коші, підтверджує вірогідність побудованих аналітичних розв'язків. Вони можуть бути використані і для розрахунку пружно-пластичного удару, якщо константи в диференціальному рівнянні стискання визначати емпіричним шляхом, за умови, що пластичне деформування охоплює невелику область в зоні ударної взаємодії тіл.

Список літератури

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва: Стройиздат, 1965. 447 с.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. Москва: Наука, 1977. 223 с.
3. Кильчевский Н.А. Теория соударений твердых тел. Киев: Наукова думка, 1969. 247 с.
4. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 319 с.
5. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар. Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1279). С. 98-103.
6. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 272 с.
7. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. Доповіді Національної академії наук України. Київ, 2007. № 12. С. 37-42.
8. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливань систем. Львів : Львівська політехніка, 2014. 288 с.

9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

11. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2017. № 3 (86). С. 34-40.

References (transliterated):

1. Goldsmith W. Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies. Moscow: Stroyizdat, 1965. 447 p.
2. Panovko Y.G. Introduction to the theory of mechanical shock. Moscow: Nauka, 1977. 223 p.
3. Kilchevsky N.A. Theory of solid collisions. Kyiv: Naukova Dumka, 1969. 247 p.
4. Kilchevsky N.A. Dynamic contact compression of solids. Blow. Kyiv: Naukova Dumka, 1976. 319 p.
5. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Ateb-sine in solving the Hertz problem. Bulletin of NTU «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018. No 3 (1279). P. 98-103.
6. Shterman I.Ya. Contact problem of the theory of elasticity. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 272 p.
7. Gricik V.V., Nazarkevich M.A. Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraini. Kyiv: 2007. No 12. P. 37-42.
8. Pukach P.Ya. Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillation systems. Lviv: Lviv Polytechnic, 2014. 288 p.
9. Abramovits M., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.
10. Janke E., Jemde F., Ljosh F. Special'nye funkicii. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.
11. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity. Vibrations in technics and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2017. No 3 (86). P. 34-40.

Надійшла (received) 30.05.2019.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

A.V. OROBINSKIY, V.M. PETUKHOV, N.A. AKSENOVA, E.V. NADTOKA

УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ВТУЛКИ ИГОЛЬЧАТОГО ПОДШИПНИКА ПОРШНЕВОЙ ГОЛОВКИ ШАТУНА

В статье проводится исследование подшипникового узла поршневой головки шатуна (ПГШ) транспортных дизелей типа 6ДН 12/2х12. Подшипниковый узел ПГШ содержит двухрядный бессепараторный игольчатый подшипник нестандартной конструкции. Игольчатые подшипники в узле ПГШ часто применяются для конструкций высокооборотных малогабаритных двухтактных двигателей внутреннего сгорания. Отказы подшипника ПГШ проявляются как следствие износов рабочих поверхностей при значительных скоростях вращения коленчатого вала и малых нагрузках. С целью повышения долговечности проводится совершенствование технологий производства его деталей, повышение качества монтажа и обеспечение теплоотвода. Приводится конструкция, полный анализ геометрии и материалов, из которых выполнены основные элементы. Отличительными признаками конструкции являются установка втулки в ПГШ с зазором, обеспечивающим необходимую ее подвижность относительно шатуна, и проворот поршневого пальца в рабочем состоянии в бобышках поршня. Эксплуатационные температуры нагруженной части поверхности дорожек качения обеспечиваются лишь достаточным поступлением смазки. Для смазки дорожек качения и игольчатых роликов во втулке подшипника выполнены четыре радиальных отверстия. Для повышения производительности и понижения стоимости процесса скругления острых кромок отверстий по наружной и внутренней поверхности втулки, эту процедуру предлагается выполнять электро-химическим методом. Для сравнения усталостной прочности втулок, изготовленных по серийной технологии (вручную) и с применением метода электрохимической обработки, были проведены их ускоренные испытания на долговечность, проанализированы результаты. В процессе исследований разработана расчетная схема нагружения втулки. С этой целью изготовлено специальное приспособление для усталостных испытаний. Составлена математическая модель и проанализирован оптимальный выбор режимов. Проведены исследования, позволяющие сделать практически важные выводы об усталостной прочности при изгибе опытных и серийных втулок. Установлено, что электро-химическая технология обработки кромок отверстий не снижает усталостную прочность стали ШХ15-Ш.

Ключевые слова: игольчатый подшипник, поршневая головка шатуна, втулка.

O.V. OROBINSKIY, V.M. PETUKHOV, N.A. AKSENOVA, O.V. NADTOKA

ПРИСКОРЕНІ ВИПРОБУВАННЯ НА ДОВГОВІЧНІСТЬ ВТУЛКИ ГОЛЧАТОГО ПІДШИПНИКА ПОРШНЕВОЇ ГОЛІВКИ ШАТУНА

У статті проводиться дослідження підшипникового вузла поршневої головки шатуна (ПГШ) транспортних дизелів типу 6ДН 12/2х12. Підшипниковий вузол ПГШ містить дворядний бессепараторний голчастий підшипник нестандартної конструкції. Голчасті підшипники в вузлі ПГШ часто застосовуються для конструкцій високооборотних малогабаритних двотактних двигунів внутрішнього згорання. Відмови підшипника ПГШ проявляються як наслідок зносів робочих поверхонь при значних швидкостях обертання колінчастого вала і малих навантажень. З метою підвищення довговічності проводиться вдосконалення технологій виробництва його деталей, підвищення якості монтажу і забезпечення відводу тепла. Наводиться конструкція, повний аналіз геометрії і матеріалів, з яких виконані основні елементи. Відмінними ознаками конструкції є установка втулки в ПГШ з зазором, що забезпечує необхідну її рухливість щодо шатуна, і проворот поршневого пальця в робочому стані в бобишках поршня. Експлуатаційні температури навантаженої частини поверхні доріжок качення забезпечуються лише достатнім надходженням мастила. Для змащення доріжок качення і голчастих роликів у втулці підшипника виконані чотири радіальні отвори. Для підвищення продуктивності і зниження вартості процесу округлення гострих кромок отворів по зовнішній і внутрішній поверхні втулки, цю процедуру пропонується виконувати електрохімічним методом. Для порівняння втомної міцності втулок, виготовлених за серійною технологією (вручну) і з застосуванням методу електрохімічної обробки, були проведені їх прискорені випробування на довговічність, проаналізовані результати. У процесі досліджень розроблено розрахункову схему навантаження втулки. З цією метою виготовлено спеціальне пристосування для втомних випробувань. Складена математична модель та проаналізовано оптимальний вибір режимів. Проведено дослідження, що дозволяють зробити практично важливі висновки про втомну міцність при вигині експериментальних і серійних втулок. Встановлено, що електрохімічна технологія обробки крайок отворів не знижує втомну міцність стали ШХ15-Ш.

Ключові слова: голчастий підшипник, поршнева голівка шатуна, втулка.

A.V. OROBINSKY, V.M. PETUKHOV, N.A. AKSENOVA, E.V. NADTOKA

ACCELERATED DURABILITY TESTS FOR THE NEEDLE BEARING OF A PISTON HEAD

The article investigates the bearing unit of the piston head of the connecting rod (PGS) of 6DN 12/2x12 type diesel transport. The PGS bearing assembly contains a two-row, non-standard needle bearing of a non-standard design. Needle bearings in the PGS assembly are often used for the designs of high-speed small-sized two-stroke internal combustion engines. Bearing failures PGS appear as a result of wear of the working surfaces at significant speeds of rotation of the crankshaft and low loads. In order to increase durability, the production technology of its parts is improved, the quality of installation is improved and the heat sink is provided. A design, a

complete analysis of the geometry and materials of which the basic elements are made is given. Distinctive features of the design are the installation of the sleeve in PGSh with a gap that provides the necessary mobility relative to the connecting rod, and rotation of the piston pin in working condition in the piston bosses. The operating temperatures of the loaded part of the raceway surface are provided only by a sufficient supply of lubricant. To lubricate the raceways and needle rollers in the bearing bush there are four radial holes. To increase productivity and reduce the cost of rounding off the sharp edges of the holes along the outer and inner surface of the sleeve, it is proposed to perform this procedure using the electrochemical method. To compare the fatigue strength of the sleeves manufactured by serial technology (manually) and using the method of electro-chemical processing, their accelerated durability tests were carried out, the results were analyzed. In the process of research, a design scheme for loading the sleeve was developed. For this purpose, a special device for fatigue tests has been manufactured. A mathematical model was compiled and the optimal choice of modes was analyzed. Studies have been carried out that make it possible to draw practically important conclusions about the fatigue strength in bending of experimental and serial bushings. It has been established that the electrochemical technology of processing the edges of the holes does not reduce the fatigue strength of steel SHKh15-Sh.

Keywords: needle bearing, piston head of connecting rod, bushing.

Введение. В двухтактных быстроходных транспортных дизелях 6ДН $\frac{12}{2 \times 12}$, форсированных по литровой мощности выше 40кВт/л, традиционный подшипник скольжения не всегда обеспечивает работоспособность узла поршневой головки шатуна (ПГШ). Это обусловило развитие конструкции ПГШ с игольчатым подшипником, который сочетает в себе малые радиальные размеры со значительной динамической грузоподъемностью. Отказ подшипникового узла ПГШ зачастую приводит к обрыву шатуна. Последнее неизбежно влечет за собой повреждения деталей цилиндра – поршневой группы и, что самое существенное, разрушение блока цилиндров, означающее непригодность двигателя к восстановлению.

В связи с этим, изменения конструкции или технологии производства деталей подшипника требуют оценки их влияния на долговечность подшипникового узла.

Анализ последних исследований. Широкое применение игольчатых подшипников в узле ПГШ характерно для конструкций высокооборотных малогабаритных двухтактных ДВС [1,2]. Здесь, в условиях значительных скоростей вращения коленчатого вала (500...800 рад/с) и сравнительно малых нагрузок, отказы подшипника ПГШ проявляются как следствие износов рабочих поверхностей. В этом случае, резервы повышения долговечности заключаются в совершенствовании технологии производства его деталей, повышении качества монтажа, а так же в обеспечении теплоотвода [3].

Вместе с этим, в литературе отсутствуют примеры конструкций ПГШ с игольчатыми подшипниками транспортных дизелей [4], сведения о наиболее характерных повреждениях [5], методики и результаты ускоренных испытаний как подшипника в целом, так и отдельных его деталей. Ниже приведены результаты ускоренных испытаний на долговечность втулки игольчатого подшипника ПГШ транспортного дизеля 6ДН $\frac{12}{2 \times 12}$.

Цель и постановка задачи. Цель работы состоит в оценке влияния на долговечность втулки игольчатого подшипника ПГШ транспортного дизеля электро – химической технологии обработки ее поверхности.

Достижение этой цели потребовало выполнения следующих этапов исследования:

1. разработки расчетной схемы нагружения втулки и оценки ее нагруженного состояния в зонах появления усталостной трещины;
2. разработки и изготовления приспособления для усталостных испытаний втулки;
3. выбора режимов усталостных испытаний и их проведение.

Основной материал исследований. Подшипниковый узел ПГШ транспортных дизелей типа 6ДН $\frac{12}{2 \times 12}$ содержит двухрядный бессепараторный игольчатый подшипник нестандартной конструкции (рис. 1)

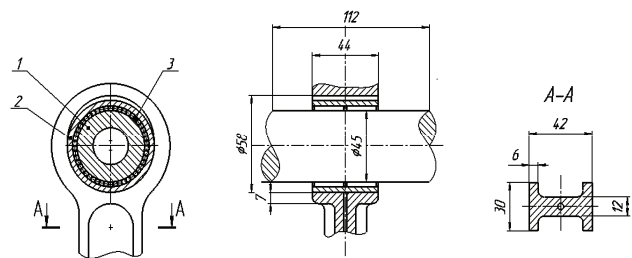


Рисунок 1 – Конструкция узла ПГШ с игольчатым подшипником: 1 – поршневой палец; 2 – втулка; 3 – игольчатые ролики

Наружная поверхность поршневого пальца, изготавливаемого из стали 20Х2Н4А-Ш, используется в качестве внутренних дорожек качения, и имеет глубину цементированного слоя 1,3...1,6 мм, твердость $HRC \geq 61$, параметр шероховатости $Ra < 0,16$ мкм, овальность и бочкообразность – не более 0,005 мм.

Игольчатые ролики (3x21,8), выполненные из стали ШХ15-Ш, стандартные, по 50 шт. в каждом ряду.

Для дорожек качения наружного кольца или, иначе, втулки подшипника (сталь ШХ15-Ш) обеспечивается твердость $HRC 58...62$, шероховатость не хуже $Ra < 0,16$ мкм, а конусность, овальность и седлообразность – не более 0,005 мм. Перечисленные характеристики подшипника указывают на его соответствие классу точности I, что превышает класс точности подшипников (обычно II), применяемых в узлах движения качения [1].

Из существенных отличительных признаков конструкции подшипника необходимо выделить следующие:

- втулка устанавливается в ПГШ с зазором 0,03...0,04 мм, что обеспечивает ее подвижность относительно шатуна;

– поршневой палец в рабочем состоянии проворачивается в бобышках поршня.

Эксплуатационные температуры нагруженной части поверхности дорожек качения изменяются в интервале 140-160 °С, что обеспечивается лишь достаточным поступлением смазки.

Смазка подшипника осуществляется нагретым до температуры 105...115 °С маслом. Через жиклер в шатунной шейке масло под давлением поступает в шатунный подшипник, а затем по каналу в стержне шатуна к ПГШ. Для смазки дорожек качения и игольчатых роликов во втулке подшипника (рис. 2) выполнены четыре радиальных отверстия $\varnothing 5$ мм, сообщающиеся с каналом в стержне кольцевой полостью.



Рисунок 2 – Втулка игольчатого подшипника

По серийной технологии скругление острых кромок отверстий по наружной и внутренней поверхности втулки выполняется вручную. Для повышения производительности и понижения стоимости выполнения этой операции скругление кромок предлагается выполнять электро - химическим методом.

Однако, в литературе отсутствуют данные о влиянии электро - химических технологий на усталостную прочность при изгибных деформациях деталей, изготовленных из стали ШХ15-Ш. Так как, втулка устанавливается в шатун с зазором 0,03...0,04 мм, то в зонах обрабатываемых отверстий изгибные деформации являются доминирующими.

Для сравнения усталостной прочности втулок, изготовленных по серийной технологии и с применением метода электрохимической обработки, были проведены их ускоренные испытания на долговечность.

При работе подшипника втулка передает на шатун сжимающее усилие и деформируется вместе с ПГШ. Так как, конечной целью испытаний является ускоренная оценка технологий скругления кромок отверстий, то основным требованием при выборе схемы нагружения втулки было получение усталостной трещины от кромки отверстия при изгибе наиболее простым способом.

Схема нагружения втулки при испытаниях показана на рис. 3.

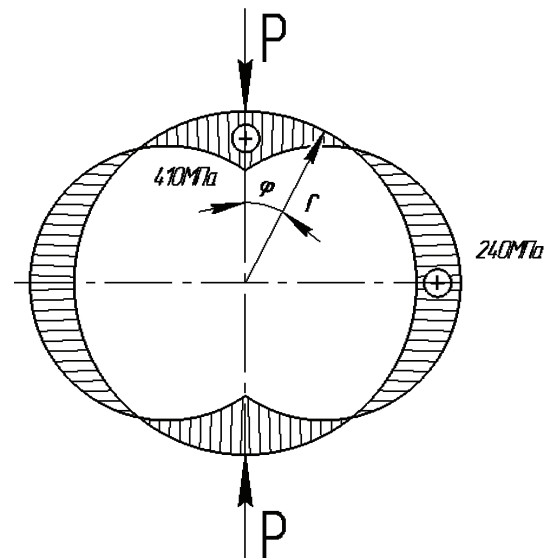


Рисунок 3 – Расчетная схема нагружения втулок ПГШ при испытаниях

Изгибающий момент M , нормальная сила N , перерезывающая сила Q и окружные растягивающие напряжения σ_φ в сечении втулки, отвечающем углу φ , определяются по формулам (1):

$$\begin{aligned} M &= P \cdot r \left(0,32 - \frac{1}{2} \sin \varphi \right); \\ N &= - \frac{P \sin \varphi}{2}; \\ Q &= - \frac{P \cos \varphi}{2}; \\ \sigma_\varphi &= \frac{N}{A} + \frac{M}{r \cdot A} + \frac{M \cdot y}{l} \cdot \frac{r}{r+y}. \end{aligned} \quad (1)$$

где r – средний диаметр втулки;

φ – угол сечения втулки;

P – сила сжатия втулки;

$I = \frac{l \cdot h^3}{12}$ – момент инерции;

$A = l \cdot h$ – площадь продольного сечения втулки;

$|y| \leq \frac{h}{2}$, где h – толщина втулки.

Эпюра σ_φ , соответствующая схеме нагружения втулок ПГШ при испытаниях, построена на растянутых волокнах (см. рис. 3).

Наибольшие растягивающие напряжения σ_φ возникают под силой P на внутренней поверхности втулки и равны 410 МПа при $P = 4,5$ кН. Втулка изготавливается из стали ШХ15Ш, для которой предел усталости при симметричном изгибе $\sigma_{-1} = 640$ МПа.

Так как, втулка термообработывается до твердости HRC=58...62, то эффективный коэффициент концентрации напряжений для круглых отверстий составляет 3 единицы. Следовательно, на внутренней кромке отверстия под силой $P=4,5$ кН, уровень напряжений σ_φ превышает σ_{-1} более, чем в 2 раза.

Схема нагружения реализована с помощью специального приспособления (рис. 4)

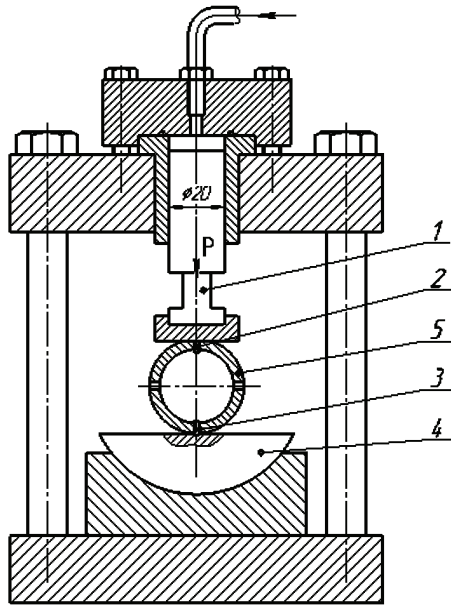


Рисунок 4 – Приспособление для испытаний втулки ПГШ:
1 – плунжер; 2, 3 – штифты; 4 – сферическое основание;
5 – втулка ПГШ

Втулка устанавливается так, что ось двух из четырех отверстий совпадает с осью плунжера 1. Центрирование втулки обеспечивается штифтами 2 и 3, расположенными в отверстиях с зазором 0,05...0,07 мм. Сферическое основание 4 исключает перекок втулки. Параметры циклической нагрузки $P_{\max} = 14,5$ МПа (соответствует $P = 4,5$ кН) и $P_{\min} = 0$ подбирались из условия разрушения серийной втулки за $10^6 \dots 3 \cdot 10^6$ циклов.

Результаты испытаний сравниваемых втулок приведены в табл. 1.

Выполненные исследования позволили рекомендовать втулки со скругленными кромками отверстий электро – химическим методом в серийное производство.

Таблица 1 – Результаты испытаний сравниваемых втулок

Технология скругления кромок	Долговечность в млн. циклов
Серийная (ручная)	1,97; 1,42; 2,4; 0,9
Опытная (электрохимический метод)	5*; 5*; 5*; 3,4

* - втулка снята с испытаний без разрушения

Перспективы дальнейших исследований. Проведение ускоренных усталостных испытаний втулки для оценки их остаточного ресурса.

Выводы. Проведенные исследования позволяют сделать следующие практически важные выводы:

1. При изгибе усталостная прочность опытных втулок выше, чем серийных.
2. Электро – химическая технология обработки кромок отверстий не снижает усталостную прочность стали ШХ15-Ш.

Список литературы

1. Блох М.В., Нехорошев С.А., Оробинский А.В., Потиченко В.А. Контактная нагруженность игольчатого подшипника верхней головки шатуна быстроходного двухтактного дизеля. Проблемы прочности. 1985. № 6. С. 16-20.
2. Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиниста: В 3 т. / Под ред. И.Н. Жестковой. 8-е изд., перераб. и доп. Москва: Машиностроение, 2001. Т. 2. 912 с. ISBN 5-217-02964-1 (5-217-02962-5).
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 576 с.
4. Design and analysis of assembly of Piston, Connecting rod and Crank Shaft / G. Gopal, L. Suresh Kumar, D. Gopinath, Uma Maheshwara Rao. International Journal of Current Engineering and Technology. Vol.6, No.1 (Feb 2016). P. 235-242. E-ISSN 2277 – 4106, P-ISSN 2347 – 5161.
5. Analysis and Optimization of Connecting Rod With Different Materials / Ramesh B. T., Vinayaka Koppad, Hemantha Raju T. World Journal of Research and Review (WJRR). Vol. 4, iss. 1 (Jan 2017). P. 33-39. ISSN: 2455-3956.

Bibliography (transliterated)

1. Blokh M.V., Nekhoroshev S.A., Orobinskiy A.V., Potichenko V.A. Kontaktnaya nagruzhennost' igol'chatogo podshipnika verkhney golovki shatuna bystrokhodnogo dvuktaktnogo dizelya. Problemy prochnosti. 1985. № 6. P. 16-20.
2. Anur'yev V.I. Spravochnik konstruktora-mashinostroytelya: V 3 t. Pod red. I. N. Zhestkovyy. 8-ye izd., Pererab. i dop. Moscow: Mashinostroyeniye, 2001. T. 2. 912 p. ISBN 5-217-02964-1 (5-217-02962-5).
3. Timoshenko S.P., Gud'yer Dzh. Teoriya uprugosti Moscow; Nauka, 1975. 576 p.
4. Design and analysis of assembly of Piston, Connecting rod and Crank Shaft. G. Gopal, L. Suresh Kumar, D. Gopinath and Uma Maheshwara Rao. International Journal of Current Engineering and Technology. Vol. 6, No.1 (Feb 2016). P. 235-242. E-ISSN 2277 – 4106, P-ISSN 2347 – 5161.
5. Analysis and Optimization of Connecting Rod With Different Materials Ramesh B. T., Vinayaka Koppad, Hemantha Raju T. World Journal of Research and Review (WJRR) ISSN:2455-3956, Vol. 4, iss. 1 (Jan 2017). P. 33-39.

Поступила (received) 04.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Оробинский Александр Васильевич (Оробінський Олександр Васильович, Orobinsky Alexandr Vasilyevich) – кандидат технических наук, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, доцент кафедры механики и проектирования машин, тел.: (057) 730-10-52, e-mail: naavoneska@gmail.com.

Петухов Вадим Михайлович (Петухов Вадим Михайлович, Petukhov Vadim Mykhaylovych) – кандидат технических наук, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, доцент кафедры вагонов, тел.: (057) 730-10-35, e-mail: hiitwagen@gmail.com.

Аксенова Наталья Анатольевна (Аксьонова Наталія Анатоліївна, Aksenova Natalya Anatolyevna) – кандидат физико-математических наук, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, доцент кафедры механики и проектирования машин, тел.: (057) 730-10-52, e-mail: naavoneska@gmail.com.

Надтока Елена Владимировна (Надтока Олена Володимирівна, Nadтока Elena Vladimirovna) – кандидат технических наук, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, доцент кафедры механики и проектирования машин, тел.: (057) 730-10-52, e-mail: enadtoka@gmail.com.

В.Б. УСПЕНСКИЙ, Ю.А. КУЗНЕЦОВ, Ю.Э. СУРГАНОВА

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗМЕЩЕНИЯ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ В БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Для обеспечения высокой точности функционирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем в условиях значительной угловой динамики объекта учитывается пространственное разнесение акселерометров в блоке. С этой целью в ходе заводской калибровки необходимо уточнить геометрическое размещение акселерометров относительно приборной системы координат. Существующие методы предполагают реализацию довольно сложных экспериментальных программ движения блока либо использование параметров вращения лабораторного стенда в качестве эталонных значений. Все это может приводить к повышенной погрешности определения искомым параметров и, как следствие, к увеличению ошибки функционирования навигационной системы в целом. В данной работе предлагается простая методика проведения эксперимента с использованием трехосного стола, инвариантная к аддитивным ошибкам измерений акселерометра и не идеальности лабораторного оборудования. Для развития и обоснования предлагаемой методики решаются следующие задачи: разработка модели измерений акселерометров, учитывающая геометрический фактор его размещения; проектирование программы тестовых вращений для трехосного стола и алгоритма обработки измерений; обсуждение источников погрешности методики и возможности ее минимизации; оценка влияния геометрического фактора и разработка модели его компенсации в процессе эксплуатации навигационной системы; экспериментальная проверка методики. По итогам решения перечисленных задач сделаны выводы о необходимости учета геометрического фактора размещения акселерометров в бесплатформенной инерциальной навигационной системе и практической эффективности разработанной методики. Результаты статьи могут быть использованы при проектировании и настройке высокоточных инерциальных навигационных систем.

Ключевые слова: БИНС, акселерометр, size-эффект, калибровка, модель компенсации, трехосный стенд, тестовые вращения.

В.Б. УСПЕНСЬКИЙ, Ю.О. КУЗНЕЦОВ, Ю.Е. СУРГАНОВА

МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗМІЩЕННЯ АКСЕЛЕРОМЕТРІВ У БЕЗПЛАТФОРМЕННІЙ ІНЕРЦІАЛЬНІЙ НАВІГАЦІЙНІЙ СИСТЕМІ

Для забезпечення високої точності функціонування бесплатформенних інерційних навігаційних систем в умовах значної кутової динаміки об'єкта враховується просторове рознесення акселерометрів в блоці. З цією метою в ході заводського калібрування необхідно уточнити геометричне розміщення акселерометрів щодо приладової системи координат. Існуючі методи передбачають реалізацію досить складних експериментальних програм руху блоку або використання параметрів обертання лабораторного стенду як еталонних значень. Все це може призводити до збільшення похибки визначення шуканих параметрів і, як наслідок, до збільшення помилки функціонування навігаційної системи в цілому. У даній роботі пропонується проста методика проведення експерименту з використанням трьохосного столу, інваріантна до адитивної помилки вимірювань акселерометра і не ідеальності лабораторного обладнання. Для розвитку і обґрунтування запропонованої методики вирішуються наступні завдання: розробка моделі вимірювань акселерометрів, що враховує геометричний фактор його розміщення; проектування програми тестових обертань для трьохосного столу і алгоритму обробки вимірювань; обговорення джерел похибки методики і можливості її мінімізації; оцінка впливу геометричного фактору і розробка моделі його компенсації в процесі експлуатації навігаційної системи; експериментальна перевірка методики. В наслідок розв'язання перерахованих завдань зроблені висновки про необхідність врахування геометричного фактору розміщення акселерометрів в бесплатформенній інерціальной навігаційній системі та практичної ефективності розробленої методики. Результати статті можуть бути використані при проектуванні та налаштуванні високоточних інерційних навігаційних систем.

Ключові слова: БИНС, акселерометр, size-ефект, калібрування, модель компенсації, трьохосний стенд, тестові обертання.

V.B. USPENSKIY, Y.O. KUZNIETSOV, Y.E. SURHANOVA

EXPERIMENTAL METHOD FOR DETERMINING PLACEMENT PARAMETERS ACCELEROMETERS IN THE STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEM

To ensure high accuracy of the operation of strapdown inertial navigation systems under conditions of significant angular dynamics of an object, the spatial separation of accelerometers in the unit is taken into account. To this end, during the factory calibration, it is necessary to clarify the geometric location of accelerometers relative to the instrument coordinate system. Existing methods involve the implementation of fairly complex experimental programs for the movement of a block or the use of the rotation parameters of a laboratory test bench as reference values. All this can lead to an increased error in determining the desired parameters and, as a consequence, an increase in the operating error of the navigation system as a whole. In this paper, we propose a simple technique for conducting an experiment using a triaxial desk, invariant to the additive errors in accelerometer measurements and not ideality of labora-

tory equipment. For the development and justification of the proposed methodology, the following tasks are solved: development of a measurement model for accelerometers, taking into account the geometric factor of its location; designing a program of test rotations for a triaxial desk and a measurement processing algorithm; discussion of the sources of error of the method and the possibility of its minimization; assessment of the influence of the geometric factor and the development of its compensation model during the operation of the navigation system; experimental verification of the technique. Based on the results of solving the above tasks, conclusions were drawn on the need to take into account the geometric factor of the placement of accelerometers in a strapdown inertial navigation system and the practical effectiveness of the developed methodology. The results of the article can be used in the design and configuration of high-precision inertial navigation systems.

Keywords: SINS, accelerometers, size-effect, calibration, compensation model, triaxial desk, test rotations.

Введение. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) отличаются высокой информативностью, помехоустойчивостью и надежностью, поэтому были и остаются основным средством автономной навигации. При этом необходимым условием практического использования БИНС является достаточная точность формирования навигационных параметров, которая не должна быть хуже заранее установленного уровня. Для обеспечения высокоточной навигации БИНС оснащаются прецизионными гироскопами и акселерометрами (АК) так называемого навигационного класса. Поскольку стоимость таких датчиков высока, то область использования высокоточных БИНС ограничивается объектами, для которых навигация является критической функцией: авиационная, ракетная техника, подводный транспорт и т.п.

Обязательным этапом подготовки БИНС к эксплуатации является заводская калибровка инерциального измерительного блока (ИИБ) с целью определения систематических погрешностей и их дальнейшей алгоритмической компенсации в ходе функционирования. Задачи калибровки БИНС многообразны и широко рассматриваются в специальной литературе [1-4].

Одной из задачи калибровки, характерной для БИНС, устанавливаемых на объектах с большой угловой скоростью вращения, является оценка фактического расположения акселерометров в ИИБ. Такая оценка необходима, поскольку АК занимают различное пространственное положение в блоке, как, например, в универсальном навигационном комплексе разработки НПП Хартрон–Аркос (рис. 1), и предназначена для приведения измерений АК к одной пространственной точке, для которой в БИНС решается главная задача – задача инерциальной навигации. Одно из первых решений такой задачи содержится в [5], в которой влияние пространственного разнесения АК на точность навигации, вслед за [6], называется «size-effect» (далее S-эффект). Здесь же приведена математическая модель измерений, учитывающая местоположение АК, и один из способов компенсации этого эффекта. Интерес к задаче не исчерпан и в настоящем времени. В качестве примера можно указать работы [7, 8], в которых описываются различные методики оценки параметров расположения АК. Эти методики опираются на имеющееся у авторов лабораторное оборудование, предполагают различные тестовые движения и специфическую алгоритмическую обработку измерений.

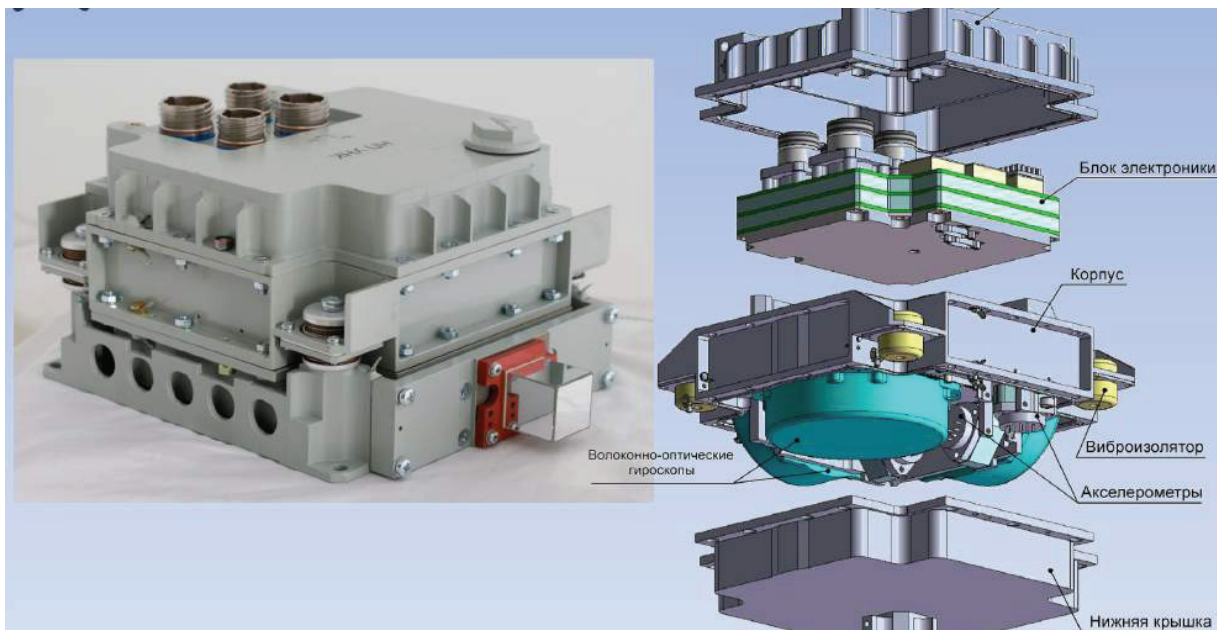


Рисунок 1 – Внешний вид и конструкция универсального навигационного комплекса разработки НПП Хартрон–Аркос [9]

В перечисленных работах для решения задачи калибровки используются, на наш взгляд, неоправданно сложные движения стола. Кроме того, не везде

присутствует анализ влияния прочих погрешностей АК на интересующий результат калибровки. С учетом сказанного в данной статье описывается методика

определения параметров размещения АК, основанная на простейших движениях трехосного поворотного стола и максимально учитывающая погрешности лабораторного оборудования и АК.

Постановка задачи. Рассмотрим трехосный поворотный стол, такой, как, например, на рис. 2. Все три оси вращения стола пересекаются на поверхности планшайбы в одной точке, являющейся неподвижной при любых угловых движениях. С помощью поворотов вокруг осей стола соответственно на углы α, β, γ осуществляется любая требуемая ориентация планшайбы. Кроме того, в динамическом режиме приводы стола способны обеспечивать вращение с заданной угловой скоростью. Также будем считать, что внешняя ось является вертикальной, т.е. параллельной вектору ускорения свободного падения в месте расположения стола.

На планшайбе стола расположен ИИБ, схематично изображенный на рис. 3. С ИИБ свяжем приборную систему координат (СК) с центром в точке П и ортогональными осями $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$, вдоль которых, в частном случае, могут быть расположены АК. Параллельно с приборной построена система координат X_O, Y_O, Z_O с началом в точке О – центром вращения стола. На рисунке условно также изображена внешняя вертикальная ось стола.

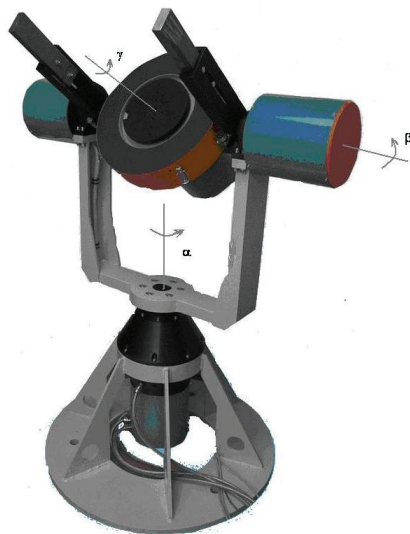


Рисунок 2 – Трехосный поворотный стол для определения параметров размещения АК

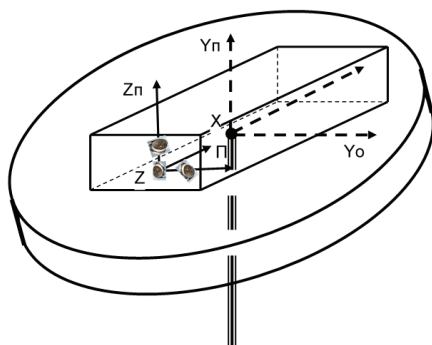


Рисунок 3 – Условное изображение планшайбы с ИИБ

Неформальная постановка задачи состоит в следующем. С помощью специально создаваемых тестовых вращений стола необходимо оценить параметры размещения АК относительно точки П с целью дальнейшей компенсации S-эффекта.

Формализуем задачу. Введем инерциальную СК (ξ, η, ζ) , в которой положение центра приборной СК $\{\Pi\}$ с осями $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$ задается радиус-вектором \vec{r} (рис.4).

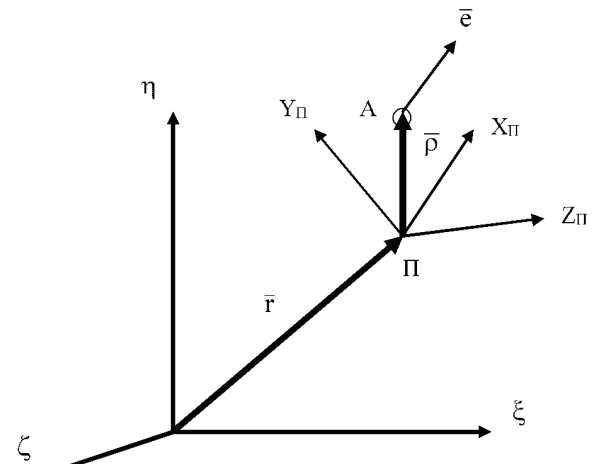


Рисунок 4 – Акселерометр А в приборной $X_{\Pi}, Y_{\Pi}, Z_{\Pi}$ и инерциальной $\xi\eta\zeta$ СК

Положение акселерометра А, в свою очередь, задается радиус-вектором $\vec{\rho}$, неизменным относительно П. Единичный вектор \vec{e} , построенный «из акселерометра», соответствует направлению оси чувствительности (ОЧ) АК и полагается известным.

В этом случае измерение вектора кажущегося ускорения, осуществляемое АК в момент времени t , соответствует выражению [9]

$$A(t) = (\vec{w}_{\Pi}(t), \vec{e}) + \left[\left[\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \times \vec{\rho} \right], \vec{e} \right] + (\vec{\omega}(t), \vec{e}) \cdot (\vec{\omega}(t), \vec{\rho}) - (\vec{\rho}, \vec{e}) \cdot \omega(t)^2 + \Delta a + \xi(t), \quad (1)$$

где $\vec{w}_{\Pi}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) - \vec{g}(t)$ – истинное значение вектора кажущегося ускорения точки П;

\vec{g} – вектор гравитационного ускорения в этой точке;

$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$ – истинное значение углового ускорения

СК $\{\Pi\}$;

$\vec{\omega}(t)$ – истинное значение абсолютной угловой скорости СК $\{\Pi\}$;

Δa – аддитивная погрешность измерения АК, полагаемая постоянной;

$\xi(t)$ – шум с нулевым средним и ограниченной дисперсией.

Все векторные величины в (1), естественно, задаются в какой-либо одной СК.

Далее будем вместо инерциальной СК (ξ, η, ζ) использовать систему координат, вращающуюся вме-

сте с Землей, например, местную географическую. Тогда в (1) \bar{g} следует считать вектором ускорения свободного падения. Пренебрегая в $\bar{\omega}(t)$ вращением Земли, вместо абсолютной будем использовать относительную угловую скорость вращения планшайбы, внося пренебрежимо малую погрешность.

С точки зрения учета инструментальных погрешностей введенная модель измерений (1) является не полной. В ней, в частности, отсутствует погрешность масштабного коэффициента и так называемый «перекос» оси чувствительности, который приводит к тому, что фактическое значение вектора \bar{e} отличается от известного. Полагаем, что перечисленные инструментальные погрешности предварительно определены с помощью известных методик и в данном рассмотрении уже алгоритмически скомпенсированы.

Итак, задача определения местоположения АК в приборной СК, как частная задача калибровки, состоит в следующем. По измерениям $A(t)$ с учетом известной угловой скорости $\bar{\omega}(t)$ необходимо определить радиус-вектор $\bar{\rho}$. После решения этой задачи можно приступить к компенсации S-эффекта в последующей эксплуатации прибора.

Компенсация S-эффекта. Рассмотрение перечисленных задач начнем с модели компенсации S-эффекта, используемой в процессе эксплуатации БИНС. Назначение такой модели состоит в выделении «полезного» слагаемого $(\bar{w}_П(t), \bar{e})$ из измерения $A(t)$ вида (1). Слагаемые в правой части (1), содержащие угловую скорость и угловое ускорение, определяют вклад S-эффекта в погрешность определения кажущегося ускорения точки П.

Обсудим специфические условия такой компенсации:

- процедура компенсации реализуется с частотой интегрирования навигационных уравнений в БИНС, т.е., как правило, с частотой обновления измеряемых данных. Поэтому усреднение шума измерений здесь отсутствует.

- изменение знака угловой скорости, как в случае периодического вращения, не приводит к автокомпенсации ее влияния на показания АК, т.к. она входит в (1) «в квадрате». Таким образом, с одной стороны, S-эффект проявляется только при наличии угловой скорости, с другой – его вклад аккумулируется в процессе всего времени функционирования БИНС. Уместно отметить, что максимальное влияние на точность навигации S-эффект будет иметь при длительных малых угловых колебаниях вида

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(2\pi\nu \cdot t)$$

с высокой частотой ν . В этих условиях приближенную оценку ошибки приращения кажущейся скорости вследствие S-эффекта для времени t можно провести по формуле

$$\Delta\nu = 2\pi^2\theta_0^2 \cdot \nu^2 \cdot t \cdot \rho.$$

К примеру, при частоте колебаний $\nu = 50$ Гц и амплитуде $\theta_0 = 6'$ при удалении АК от центра ПСК на $\rho = 1$ см ошибка приращения кажущейся скорости за

1000 с составит величину 1,5 м/с. При увеличении частоты в 2 раза ошибка увеличится в четыре раза. Отсюда следует, что компенсация S-эффекта является необходимым условием высокоточной работы БИНС в условиях вибраций и высокой угловой динамики объекта.

– в качестве оценки мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}(t)$ для учета S-эффекта используются соответствующие измерения гироскопов. Угловое ускорение непосредственному измерению не доступно. Поэтому для уменьшения его вклада в суммарную погрешность целесообразно располагать акселерометры так, чтобы вектора $\bar{\rho}$ и \bar{e} были параллельны. В этом случае второе слагаемое в правой части будет с точностью до погрешности несоосности близким к нулю, что благоприятно скажется на общей эффективности алгоритма компенсации.

Подытоживая сказанное выше, модель компенсации S-эффекта будет иметь вид (2).

$$(\hat{w}_П, \bar{e}) = \tilde{A} - (\bar{\omega}, \bar{e}) \cdot (\bar{\omega}, \bar{\rho}) + (\bar{\rho}, \bar{e}) \cdot \omega^2, \quad (2)$$

где $(\hat{w}_П, \bar{e})$ – искомая проекция вектора кажущегося ускорения точки П;

$\tilde{A}, \bar{\omega}$ – фактическое измерение АК и вектора угловой скорости соответственно.

Такая модель используется для каждого АК. Очевидно, что для ее использования необходимо для каждого АК знать радиус-вектор положения, т.е. параметр $\bar{\rho}$. Его экспериментальному определению посвящено дальнейшее исследование.

Определение местоположения АК (задача калибровки). В основу решения задачи калибровки полагается модель измерений (1). Ход решения разобьем на отдельные смысловые пункты.

1) Для определения $\bar{\rho}$ из (1), помимо измерений $A(t)$ и $\omega(t)$, в общем случае необходимо знать также и кажущееся ускорение точки $\bar{w}_П(t)$. При произвольном выборе точки П истинное значение кажущегося ускорения в ней, вообще говоря, не известно. Его можно оценить только расчетным способом с использованием измерений угловой скорости.

Чтобы избежать этой процедуры, приводящей к дополнительной погрешности, задачу определения местоположения АК целесообразно решать в СК с осями X_0, Y_0, Z_0 и началом в точке О, относительно которой известно, что $\bar{w}_О(t) = -\bar{g}(t)$, поскольку точка О неподвижна при любых угловых движениях планшайбы. С учетом сказанного, измерения АК можно представить в виде (3).

$$A(t) = -(\bar{g}(t), \bar{e}) + \left[\left[\frac{d\bar{\omega}(t)}{dt} \times \bar{\rho}^o \right], \bar{e} \right] + (\bar{\omega}(t), \bar{e}) \cdot (\bar{\omega}(t), \bar{\rho}^o) - (\bar{\rho}^o, \bar{e}) \cdot \omega(t)^2 + \Delta a + \xi(t), \quad (3)$$

где $\bar{\rho}^o$ – неизвестный радиус-вектор положения АК относительно точки О, при этом искомый вектор $\bar{\rho} = \bar{\rho}^o + \bar{ПО}$, $\bar{ПО}$ – известный вектор с началом в

точке П и концом в точке О (см. рис. 3).

Таким образом, выражение (3) полагается в основу дальнейшего решения задачи.

2) В выражение (3) входит угловое ускорение ИИБ, оценить которое можно либо по текущим данным самого стола, либо путем дифференцирования измерений гироскопов, входящих в ИИБ. В обоих случаях такая оценка будет содержать погрешность.

Чтобы максимально уменьшить влияние углового ускорения на процесс калибровки предлагается использовать в качестве тестового вращения вокруг внешней (неподвижной) вертикальной оси стола с заданной постоянной скоростью $\bar{\omega}_\alpha$. В этом случае фактическое значение углового ускорения, обусловленное погрешностью контроллера стола, стабилизирующего такое вращение, будет пренебрежимо малым, а измерения АК представимы в виде

$$A(t) = -(\bar{g}(t), \bar{e}) + (\bar{\omega}_\alpha, \bar{e}) \cdot (\bar{\omega}_\alpha, \bar{\rho}^0) - (\bar{\rho}^0, \bar{e}) \cdot \omega_\alpha^2 + \Delta a + \xi(t). \quad (4)$$

3) Поскольку в калибровочном эксперименте предполагается использовать одноосное вращение с постоянной скоростью, измерения АК будут иметь периодический характер. В этом случае предлагается проводить усреднение измерений АК на периоде по формуле

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A(t_n),$$

в которой $t_n, n = \overline{1, N}$ – момент времени, соответствующий n-му такту обновления выходной информации АК;

N – количество тактов обновления измерений на одном периоде вращения, соответствующем полному обороту планшайбы вокруг вертикальной оси. Поскольку частота обновления выходной информации с датчиков для БИНС высокочастотных объектов составляет до 3 кГц, значение N достаточно велико, чтобы считать усредненное значение шума нулевым. Таким образом, с учетом усреднения выражение (4) представимо в виде

$$\hat{A} = (\bar{\omega}_\alpha, \bar{e}) \cdot (\bar{\omega}_\alpha, \bar{\rho}^0) - (\bar{\rho}^0, \bar{e}) \cdot \omega_\alpha^2 + (\Delta a - (\hat{g}, \bar{e})), \quad (5)$$

где $\hat{g} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{g}(t_n)$ – вектор с усредненными на периоде вращения компонентами.

Проводимое усреднение на периоде, помимо устранения шума, способствует также уменьшению погрешности калибровки при не идеальной вертикальности внешней оси вращения стола либо ее прецессировании в процессе вращения.

4) Обсудим программу тестовых вращений ИИБ, обеспечивающих решение задачи калибровки.

Все векторные величины в (5) рассматриваются в проекциях на оси X_0, Y_0, Z_0 СК с началом в точке О. Для определения вектора $\bar{\rho}^0$ необходимо, как минимум, три уравнения, порождаемых выражением (5).

Для создания линейно независимой системы последовательно осуществляется три эксперимента, в которых вначале планшайба из исходного положения с помощью осевых приводов (см. рис. 2) последовательно поворачивается на заданный угол $\gamma^{(k)}$ (k -й номер эксперимента) вокруг оси планшайбы, в исходном положении соответствующей орту $\bar{i}_2 = (0, 1, 0)$, затем поворачивается на заданный угол $\beta^{(k)}$ вокруг горизонтальной оси стола с ортом $\bar{i}_3 = (0, 0, 1)$ и затем приводится во вращение с постоянной скоростью ω_α вокруг вертикальной оси стола, также соответствующей орту \bar{i}_2 .

Учитывая такую последовательность поворотов и тот факт, что соответствующие кватернионы из-за выбора осей поворотов будут не собственными, ориентацию приборной СК относительно исходного (горизонтального) положения можно представить в виде кватерниона

$$\Lambda^{(k)}(t) = \Lambda_\alpha(t) \circ \Lambda_\beta \circ \Lambda_\gamma,$$

в котором $\Lambda_\alpha(t) = \cos \frac{\omega_\alpha \cdot t}{2} + \sin \frac{\omega_\alpha \cdot t}{2} \cdot \bar{i}_2$, $\Lambda_\beta = \cos \frac{\beta^{(k)}}{2} + \sin \frac{\beta^{(k)}}{2} \cdot \bar{i}_3$, $\Lambda_\gamma = \cos \frac{\gamma^{(k)}}{2} + \sin \frac{\gamma^{(k)}}{2} \cdot \bar{i}_1$.

Пользуясь правилом преобразования неизменного вектора в повернутый базис, вектор угловой скорости $\bar{\omega}_\alpha^{(k)}$ вращения планшайбы вместе с ИИБ в проекциях на оси ПСК запишем в виде

$$\bar{\omega}_\alpha^{(k)} = \omega_\alpha \cdot \tilde{\Lambda}^{(k)}(t) \circ \bar{i}_2 \circ \Lambda^{(k)}(t), \quad (6)$$

в котором $\tilde{\Lambda}^{(k)}$ – сопряженный кватернион. В данном выражении кватернион Λ уже будет собственным, т.к. соответствует результирующему преобразованию исходного базиса в повернутый базис ПСК. Далее формулу (6) можно представить в виде

$$\bar{\omega}_\alpha^{(k)} = \omega_\alpha \cdot (\cos \gamma^{(k)} \cdot \sin \beta^{(k)} \cdot \bar{i}_1 + \cos \beta^{(k)} \cdot \bar{i}_2 + \sin \gamma^{(k)} \cdot \sin \beta^{(k)} \cdot \bar{i}_3), \quad (7)$$

где $\bar{i}_1 = (1, 0, 0)$. Выражения, стоящие при ортах $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$, отвечают проекциям вектора $\bar{\omega}_\alpha^{(k)}$ на оси ПСК. Заметим, что, несмотря на вращение, проекции вектора угловой скорости на оси ПСК будут постоянными, т.к. блок вместе с планшайбой совершает плоское вращение.

Итак, для трех экспериментов, различающихся набором углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, относительно неизвестного вектора $\bar{\rho}^0$ получим систему уравнений

$$(\bar{W}^{(k)}, \bar{\rho}^0) = \hat{A}^{(k)} - \hat{A}_0^{(k)}, \quad (8)$$

в которых использованы обозначения $\bar{W}^{(k)} = (\bar{\omega}_\alpha^{(k)}, \bar{e}) \cdot \bar{\omega}_\alpha^{(k)} - \omega_\alpha^2 \cdot \bar{e}$ – вычисляемый вектор для k -го эксперимента;

$\hat{A}_0^{(k)} = \Delta a - (\hat{g}, \bar{e})$ – параметр, учитывающий вклад в измерения АК ускорения свободного падения и смещения нуля. Способ измерения этого параметра в ходе калибровки описывается далее.

Таким образом, в качестве тестового можно использовать вращение ИИБ вокруг внешней вертикаль-

ной оси стола с постоянной скоростью ω_α при различных наборах заданных значений углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$. К последним предъявляется требование, чтобы, с учетом (7), уравнения относительно \bar{p}^O (8), выписанные для $k = 1, 2, 3$, были линейно независимыми. Возможность задания таких углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ демонстрируется на конкретном примере.

5) Для того, чтобы решить систему (8), необходимо знать значение параметра $\hat{A}_0^{(k)}$, содержащего принципиально не известную погрешность АК Δa . В этих условиях можно осуществить эксперимент, позволяющий оценить $\hat{A}_0^{(k)}$. Действительно, если в (8) положить $\omega_\alpha = 0$, получим, что усредненные измерения АК будут соответствовать интересующему нас параметру, т.е. $\hat{A}^{(k)} = \hat{A}_0^{(k)}$. Таким образом, параметр $\hat{A}_0^{(k)}$ можно определить экспериментально. Для этого достаточно в неподвижном состоянии планшайбы, развернутой на соответствующие углы $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ усреднить измерения АК.

Если внешняя ось стола идеально параллельна вектору ускорения свободного падения, указанной процедуры будет достаточно. Однако на практике реализовать такое условие невозможно. Анализ показывает, что при не параллельности оси и ускорения свободного падения на величину порядка 5% погрешность определения этого параметра и, соответственно, погрешность всей калибровки будет недопустимо большой. Не вертикальность оси приводит к тому, что во время вращения проекции вектора \hat{g} на ОЧ АК будут меняться по периодическому закону. На рис. 5 приведены измерения АК, экспериментально полученные для наклонной планшайбы. Участки типа «полочка» соответствуют неподвижным состояниям планшайбы длительностью около 5 минут. Эти состояния повторяются после поворота планшайбы вокруг вертикальной оси стола на 45° . При этом амплитуда полученной синусоиды характеризует не вертикальность оси вращения, а средняя линия соответствует параметру $\hat{A}_0^{(k)}$. Таким образом, для получения искомого параметра достаточно провести соответствующий эксперимент и найти среднюю линию представленной синусоиды, осуществив, по сути, усреднение на полном обороте.

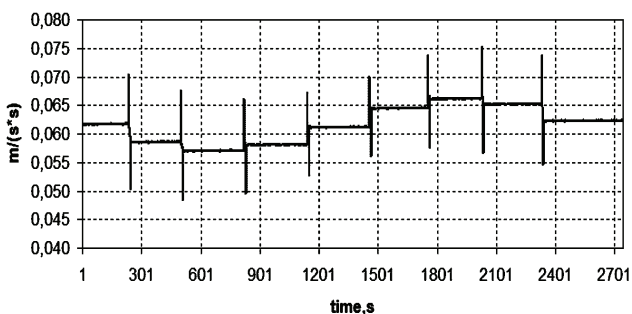


Рисунок 5 – Измерения АК для наклонной планшайбы с поворотами по азимуту

6) Обобщим рекомендации по выбору тестовых вращений ИИБ в виде следующей программы калибровочного эксперимента:

1. Установить блок на планшайбу и для исключения влияния тепловых эффектов хорошо прогреть ИИБ (до установления температур АК). Положить $k = 1$.

2. С помощью третьего и второго приводов реализовать требуемые значения углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ из табл. 1.

3. Провести измерения трех АК в восьми стационарных положениях планшайбы, различающихся углом поворота вокруг внешней оси $\alpha_n = (n-1) \cdot \frac{\pi}{4}$ $n = 1, 2, \dots, 8$. Планшайба фиксируется в каждом положении на 1 минуту, измерения АК усредняются. Положения различаются на 45° . По окончании всей серии измерений для каждого АК вычисляется параметр $\hat{A}_0^{(k)}$, как среднее значение по восьми усредненным точкам.

4. Осуществить вращение с эталонной скоростью ω_α вокруг вертикальной оси стола в течение 5 минут. Для каждого АК регистрируемые измерения усреднять на интервале, соответствующем полному обороту, результат обозначить, как $\hat{A}^{(k)}$.

5. Вычислить $k = k + 1$ и вернуться к п. 2, и так до окончания табл. 1. После окончания эксперимента обработать полученные данные. Ниже приведена таблица с одним из возможных наборов углов поворота планшайбы в калибровочном эксперименте.

Таблица 1 – Набор значений углов поворота планшайбы в калибровочном эксперименте

Номер положения планшайбы k	Значение угла γ	Значение угла β
1	0	0
2	$\pi/4$	0
3	$\pi/4$	$\pi/4$
4	$-\pi/4$	0
5	$-\pi/4$	$-\pi/4$

7) Продемонстрируем решение задачи калибровки описанным выше способом на конкретном примере.

Пусть орты осей чувствительности трех АК в ПСК имеют вид

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0); \bar{e}_2 = (0, 1, 0); \bar{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Искомыми параметрами задачи калибровки являются компоненты радиус-векторов точек расположения АК в СК с осями X_0, Y_0, Z_0 :

$$\bar{\rho}_1^O = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13});$$

$$\bar{\rho}_2^O = (\rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{23});$$

$$\bar{\rho}_3^O = (\rho_{31}, \rho_{32}, \rho_{33}).$$

Для экспериментального определения этих параметров проводится калибровочный эксперимент, описанный выше, для пяти положений планшайбы, определяемых углами γ и β , взятыми из табл. 1. Указанные значения углов, использованные в (7) и (8), порожда-

ют три независимые системы уравнений относительно компонент векторов $\bar{\rho}_1^O, \bar{\rho}_2^O, \bar{\rho}_3^O$ соответственно:

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} = 0, \beta^{(1)} = 0: \quad \rho_{11} &= -\frac{1}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_1^{(1)} - \hat{A}_{01}^{(1)}), \\ \gamma^{(2)} = 0, \beta^{(2)} = \pi/4: \quad -\rho_{11} + \rho_{12} &= \frac{2}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_1^{(2)} - \hat{A}_{01}^{(2)}), \\ \gamma^{(3)} = \pi/4, \beta^{(3)} = \pi/4: \quad -3\rho_{11} + \sqrt{2}\rho_{12} + \rho_{13} &= \frac{4}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_1^{(3)} - \hat{A}_{01}^{(3)}), \\ \gamma^{(2)} = 0, \beta^{(2)} = \pi/4: \quad \rho_{21} - \rho_{22} &= \frac{2}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_2^{(2)} - \hat{A}_{02}^{(2)}), \\ \gamma^{(3)} = \pi/4, \beta^{(3)} = \pi/4: \quad \sqrt{2}\rho_{21} - 2\rho_{22} + \sqrt{2}\rho_{23} &= \frac{4}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_2^{(3)} - \hat{A}_{02}^{(3)}), \\ \gamma^{(4)} = 0, \beta^{(4)} = -\pi/4: \quad \rho_{21} + \rho_{22} &= -\frac{2}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_2^{(4)} - \hat{A}_{02}^{(4)}), \\ \gamma^{(1)} = 0, \beta^{(1)} = 0: \quad \rho_{31} &= -\frac{1}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_3^{(1)} - \hat{A}_{03}^{(1)}), \\ \gamma^{(3)} = \pi/4, \beta^{(3)} = \pi/4: \quad \rho_{31} - \sqrt{2}\rho_{32} - 3\rho_{33} &= \frac{4}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_3^{(3)} - \hat{A}_{03}^{(3)}), \\ \gamma^{(5)} = -\pi/4, \beta^{(5)} = -\pi/4: \quad -\rho_{31} + \sqrt{2}\rho_{32} - 3\rho_{33} &= \frac{4}{\omega_\alpha^2} (\hat{A}_3^{(5)} - \hat{A}_{03}^{(5)}). \end{aligned}$$

Здесь индекс в скобках означает номер соответствующего положения планшайбы из табл. 1;

$\hat{A}_i^{(k)}$ – усредненное на полном обороте вокруг внешней оси измерение i -го АК на этапе вращения;

$\hat{A}_{0i}^{(k)}$ – усредненное на восьми стационарных участках измерение i -го АК в соответствии с п.3 программы эксперимента.

Приведенные системы разрешаются относительно неизвестных тривиальным образом.

Окончательный перерасчет радиус-векторов $\bar{\rho}_i, i=1,2,3$ в ПСК осуществляется по формуле $\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_i^O + \overline{ПО}$, где $\overline{ПО}$ – вектор с началом в точке П и концом в точке О (см. рис. 3).

Таким образом, на примере конкретного набора углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ продемонстрирована возможность определения искомых параметров расположения АК в ПСК по разработанной методике проведения эксперимента.

8) Проанализируем погрешность калибровки по разработанной методике.

Выделим возможные источники погрешности и обсудим их значимость по отдельности:

– погрешность экспериментального оборудования. Основной вклад в результирующую погрешность вносят: не вертикальность внешней оси вращения трехосного стола, погрешность реализации скорости вращения вокруг внешней оси ω_α и не точность реализации поворотов планшайбы на заданные углы $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$. Значимость первого фактора практически устраняется, во-первых, за счет усреднения измерений на полном обороте планшайбы и, во вторых, за счет экспериментального измерения параметров $\hat{A}_0^{(k)}$ в стати-

ческих условиях, учитывающих фактическую проекцию вектора ускорения свободного падения на ось чувствительности АК. Поскольку тестовые вращения осуществляются с постоянной угловой скоростью, то точность ее реализации в высокоточном стенде максимально велика, поэтому практически не искажает результатов калибровки.

Сформулируем задачу оценки погрешности результата калибровки в зависимости от ошибок реализации углов $\delta\gamma$ и $\delta\beta$ приводами углов разворота планшайбы.

Рассмотрим, к примеру, первый АК. Обозначим ошибку определения параметров его размещения, как $\delta\bar{\rho}$. Для ее оценки составим систему

$$\begin{aligned} (\overline{W}^{(1)}, \delta\bar{\rho}) &= \delta\hat{A}^{(1)}; \\ (\overline{W}^{(2)}, \delta\bar{\rho}) &= \delta\hat{A}^{(2)}; \\ (\overline{W}^{(3)}, \delta\bar{\rho}) &= \delta\hat{A}^{(3)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta\hat{A}^{(k)}$ – ошибка усредненного измерения АК в k -ом положении планшайбы, обусловленная ошибками реализации углов $\gamma^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$. Для нее справедливо следующее выражение

$$\delta\hat{A}^{(k)} = (\delta W^{(k)}, \bar{\rho}^O), \quad (10)$$

в котором $\bar{\rho}^O$ – полученная оценка радиус-вектора местоположения, а вектор

$$\delta W^{(k)} = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \bar{\omega}_\alpha^{(k)}} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\omega}_\alpha^{(k)}}{\partial \gamma^{(k)}} \cdot \delta\gamma^{(k)} + \frac{\partial \bar{\omega}_\alpha^{(k)}}{\partial \beta^{(k)}} \cdot \delta\beta^{(k)} \right) \quad \text{вычисляется}$$

с учетом (8) и (7) для каждого $k = 1, 2, 3$.

Таким образом, решая систему (9) с учетом (10) относительно $\delta\bar{\rho}$, получаем оценку погрешности результата калибровки в зависимости от величин $\delta\gamma$ и $\delta\beta$.

Для получения численных оценок рекомендуется проводить анализ по представленной схеме для конкретных условий размещения АК;

– погрешность акселерометров. При решении задачи считается, что масштабный коэффициент и направление ОЧ АК определены заранее с пренебрежимо малой погрешностью. Аддитивная ошибка измерений (смещение нуля АК) вместе с влиянием ускорения свободного падения на АК оцениваются в данной методике экспериментально и учитываются в решении. Поэтому можно считать их влияние не существенным;

– методические погрешности. В разработанном методе не учитывается скорость вращения Земли в центростремительном ускорении относительно точки О, измеряемом АК. Ее вклад в измерение существенно меньше порога чувствительности датчика, поэтому не существен.

9) Предварительные результаты экспериментальной проверки.

Проверка проводилась с использованием одноосного стенда с вертикальной осью вращения. Таким образом, в эксперименте была возможность реализовать только первое положение планшайбы, соответствующее углам $\gamma^{(1)} = 0; \beta^{(1)} = 0$. В соответствии с урав-

нениями из п.7 в этом положении можно определить только параметры ρ_{11} и ρ_{31} .

Было реализовано вращение ИИБ со скоростью 20 °/с. В течение полного оборота планшайбы измерения накапливались, усреднялись и по совершении оборота вычислялись искомые параметры. Результаты определения параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты оценки параметров ρ_{11} и ρ_{31} в условиях одноосного стенда

Число оборотов	Значение параметра $\hat{A}_1^{(1)}$, м/с ²	Значение параметра ρ_{11} , мм	Значение параметра $\hat{A}_3^{(1)}$, м/с ²	Значение параметра ρ_{31} , мм
1	-0,0249	28,271	0,0620	66,457
2	-0,0248	28,177	0,0620	66,508
3	-0,0248	28,096	0,0620	66,532
4	-0,0248	27,996	0,0620	66,537
5	-0,0248	27,984	0,0620	66,522
6	-0,0248	27,953	0,0620	66,524
Среднее значение		28,08		66,51
Средне-квадратическое отклонение (СКО)		0,11		0,03

Статистическая погрешность составляет доли мм, результаты предварительных испытаний удовлетворительные.

Выводы и рекомендации. В работе получена модель компенсации S-эффекта и разработана методика определения геометрических параметров размещения АК в БИНС. Методика основана на использовании прямых измерений АК, накапливаемых на фиксированных интервалах времени, соответствующих полному обороту планшайбы.

Отличительной чертой методики является использование максимально простых динамических режимов трехосного стенда – вращения с постоянной скоростью; инвариантность к аддитивным ошибкам измерений АК (смещению нуля) и погрешности установки стенда (не вертикальности внешней оси); не использование гироскопических измерений для калибровки; линейность (без предварительного упрощения) задачи определения параметров размещения. Перечисленные особенности обуславливают достаточно высокую эффективность методики.

По результатам исследований можно сформулировать следующие рекомендации практического характера:

- поскольку влияние S-эффекта на точность навигации имеет накапливаемый характер и не зависит от знака угловой скорости, максимальный негативный эффект достигается при продолжительных высокочастотных угловых колебаниях БИНС. Таким образом, учет и компенсация S-эффекта в условиях угловой вибрации безусловно необходимы;

- для уменьшения влияния углового ускорения

на точность компенсации S-эффекта акселерометры следует располагать так, чтобы их оси чувствительности пересекались в одной точке, которую и выбрать в качестве центра ПСК.

Список литературы

1. Тювин А.В. Аналитическая юстировка и калибровка инерциального измерительного блока бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 71. www.mai.ru/science/trudy/
2. Nikolaev S.G., Ivshina I.V. Calibration of strapdown inertial navigation systems using output signals of error model. SPbSPU Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems. 2014. Iss. 4. (200). P. 95-105.
3. Gao P., Li K., Wang L., Liu Z. A self-calibration method for tri-axis rotational inertial navigation system. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2018. Vol. 65, iss. 2. P. 1655-1664. DOI: 10.1109/TIE.2017.2733491.
4. Успенский В.Б., Некрасова М.В. Метод калибровки акселерометрического измерительного модуля. Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Збірник наукових праць. Серія: Приладобудування. Київ: 2012. № 44. С. 15-23.
5. Hung J.C., Hunter J.S., Stripling W.W., White H.V. Size Effect on Navigation Using a Strapdown IMU. Technical Report. T-79-73. 1979. 24 p.
6. Fernandez M., Macomber G.R. Inertial Guidance Engineering. 1962. P. 510-511.
7. Емельянец Г.И., Блажнов Б.А., Драницына Е.В., Степанов А.П. О калибровке измерительного модуля прецизионной БИНС и построении связанного с ним ортогонального трехгранника. Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24, № 1 (92). С. 36-48. DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.1.036-048.
8. Козлов А.В., Шаймарданов И.Х. Калибровка внутреннего разнесения чувствительных масс акселерометров БИНС-РТ. Доклад на XXXI конференция памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. 2018. С. 25-34.
9. Створення навігаційних систем для космічних апаратів, ракет-носіїв і безпілотних літальних апаратів [О.Ю. Златкін, В.І. Чумаченко, С.В. Олійник та ін.]. Державне космічне агентство України. 2019. Режим доступу: <http://www.kdpu-nt.gov.ua/uk/content/stvorennya-navigaciyinyh-system-dlya-kosmichnyh-apatativ-raket-nosiyiv-i-bezpylotnyh-litalnyh>.
10. Успенский В.Б., Некрасова М.В. Измерения ускорения и угловой скорости твердого тела с помощью избыточной системы акселерометров. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: 2011. № 63. С. 138-145.

Bibliography (transliterated)

1. Tyuvyn A.V. Analiticheskaya yustirovka i kalibrovka inertsialnogo izmeritelnogo bloka besplatformennoy inertsiальной navigatsionnoy sistemyi. Elektronnyy zhurnal «Trudy MAI». Вып. #71. www.mai.ru/science/trudy/
2. Nikolaev S.G., Ivshina I.V. Calibration of strapdown inertial navigation systems using output signals of error model, SPbSPU Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems. 2014. Iss. 4 (200). P. 95-105.
3. Gao P., Li K., Wang L., Liu Z. A self-calibration method for tri-axis rotational inertial navigation system. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2018. Vol. 65, iss. 2. P. 1655-1664. DOI: 10.1109/TIE.2017.2733491.
4. Uspenskiy V.B., Nekrasova M.V. Metod kalibrovki akselerometricheskogo izmeritelnogo modulya. Natsional'nyy

tekhnichnyy universytet "Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut". Visnyk NTU "KhPI" Zbirkiv naukovih prats. Seriya: Priladobuduvannya. Kyiv, 2012. #44. P. 15–23.

5. *Hung J.C., Hunter J.S., Stripling W.W., White H.V.* Size Effect on Navigation Using a Strapdown IMU. Technical Report. T–79–73. 1979. 24 p.

6. *Fernandez M., Macomber G.R.* Inertial Guidance Engineering. 1962. P. 510–511.

7. *Emelyantsev G.I., Blazhnov B.A., Dranitsyna E.V., Stepanov A.P.* O kalibrovke izmeritel'nogo modulya pretsizionnoy BINS i postroenii svyazannogo s nim ortogonal'nogo trehgranika. Giroskopiya i navigatsiya. 2016. T. 24, #1 (92). P. 36–48. DOI 10.17285/0869–7035.2016.24.1.036-048.

8. *Kozlov A.V., Shaymardanov I.H.* Kalibrovka vnutrennego razneseniya chuvstvitelnykh mass akselerometrov BINS-RT. Doklad na XXXI konferentsiya pamyati vyidayuschegosya

konstruktora giroskopicheskikh priborov N.N. Ostryakova. 2018. P. 25–34.

9. Stvorenniya navigacijnykh system dlya kosmichnykh aparativ, raket-nosiyiv i bezpilotnykh litalnykh aparativ [O.Yu. Zlatkin, V.I. Chumachenko, S. V. Olijnyk ta in.]. Derzhavne kosmichne agenstvo Ukrainy. 2019. Rezhym dostupu: <http://www.kdpu-nt.gov.ua/uk/content/stvorenniya-navigacijnykh-system-dlya-kosmichnykh-aparativ-raket-nosiyiv-i-bezpilotnykh-litalnykh>.

10. *Uspensky V.B., Nekrasova M.V.* Izmereniya uskorennya i uglovy skorosti tverdogo tela s pomoschyu izbytochnoy sistemy akselerometrov. Natsional'nyy tekhnichnyy universytet "Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut". Visnyk NTU "KhPI" Zbirkiv naukovih prats. Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Kharkiv, 2011. # 63. P. 138–145.

Поступила (received) 20.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Успенський Валерій Борисович (Успенский Валерий Борисович, Uspenskyi Valerii Borysovych) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5960-7347>; e-mail: uspensky61@gmail.com

Кузнєцов Юрій Олексійович (Кузнецов Юрий Алексеевич, Kuznetsov Yurii Oleksiiovych) – кандидат технічних наук, доцент, начальник лабораторії, НВП Хартрон–Аркос Лтд; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9290-1700>; e-mail: kuznyetsovy@gmail.com

Сурганова Юлія Едуардівна (Сурганова Юлия Эдуардовна, Surhanova Yuliia Eduardivna) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1825-0088>; e-mail: surganova.julia@gmail.com

ЗМІСТ

<i>Альтенбах Х., Науменко К., Лавінський Д., Конкін В.</i> Варіаційна постановка задач термодформування електропровідних тіл у електромагнітному полі	3
<i>Бабуджан Р.А., Андреев А.Г.</i> Аналіз устійності контейнера, нагуженого рівномірно розподіленним зовнішнім тиском	7
<i>Красій Д.М., Андреев А.Г.</i> Дослідження стійкості контейнера, що навантажений рівномірно розподіленим зовнішнім тиском	12
<i>Красников С.В.</i> Моделирование и анализ собственных колебаний системы ТФО с турбиной 500 МВт	17
<i>Ловська А.О.</i> Вплив тиску насипного вантажу на стійкість контейнера при перевезенні залізничним по- ромом	23
<i>Мартиненко В.Г., Гриценко М.І.</i> Розробка здвоєної лопатки осьового вентилятора із підвищеними аеро- динамічними характеристиками	28
<i>Місюра С.Ю., Сметанкіна Н.В., Місюра Є.Ю.</i> Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для ана- лізу міцності	34
<i>Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.</i> Аналітичний розв'язок задачі пружного удару конуса по півпрос- тору	40
<i>Ольшанський В.П.</i> Аналітичний розв'язок узагальненої задачі пружного удару твердих тіл	46
<i>Оробинский А.В., Петухов В.М., Аксенова Н.А., Надтока Е.В.</i> Ускоренные испытания на долговеч- ность втулки игольчатого подшипника поршневой головки шатуна	51
<i>Успенский В.Б., Кузнецов Ю.А., Сурганова Ю.Э.</i> Методика экспериментального определения парамет- ров размещения акселерометров в платформенной инерциальной навигационной системе	55

CONTENTS

<i>Altenbach H., Naumenko K., Lavinsky D., Konkin V.</i> Variational formulation of the thermal deformation prob- lems of electrically conductive bodies in an electromagnetic field	3
<i>Babudzhan R.A., Andreev A.G.</i> Sustainability analysis of a container loaded with uniformly distributed external pressure	7
<i>Krasii D.M., Andreev A.G.</i> Sustainability researching of container which is under evenly distributed external load	12
<i>Krasnikov S.V.</i> Modeling and analysis of own oscillations of the TFB with turbine 500 MW	17
<i>Lovska A.O.</i> Influence of bulk cargo pressure on container stability during transportation by railroad ferry	23
<i>Martynenko V.G., Hrytsenko M.I.</i> Development of a twin blade of the axial fan with extended aerodynamic characteristics	28
<i>Misura S.Y., Smetankina N.V., Misiura I.E.IU.</i> Rational modelling of hydroturbine cover for an strength's analysis	34
<i>Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.</i> Analytical solution of the elastic impact problem for a cone over a half-space	40
<i>Olshanskiy V.P.</i> Analytical solution of the generalized problem of elastic impact of solids	46
<i>Orobinsky A.V., Petukhov V.M., Aksenova N.A., Nadтока E.V.</i> Accelerated durability tests for the needle bear- ing of a piston head	51
<i>Uspenskiy V.B., Kuznetsov Y.O., Surhanova Y.E.</i> Experimental method for determining placement parameters accelerometers in the strapdown inertial navigation system	55

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»
СЕРІЯ: ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН

Збірник наукових праць

№ 1 2019

Головний редактор: Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор
Технічний редактор: Щепкін О.В., наук. співр.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
НТУ «ХПІ», Фіз. корп. 1-й пов., каф. ДММ.
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: lvovdpm@ukr.net

Підп. до друку 15.11.2019 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,95. Облік.-вид. арк. 9,10.
Тираж 100 пр. 1-й завод 1-50. Зам. № 23. Ціна договірна.

Друкарня ВАТ «Цифра Прінт».
Свідоцтво про Державну реєстрацію А01 № 432705 від 03.08.2009 р.
Адреса: 61166, м. Харків, вул. Данилевського, 30
