

ISSN 2078-9130



ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 33'2018

Харків
2018

Вісник НТУ «ХПІ» 33'2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCES OF UKRAINE

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

National technical university
"Kharkiv polytechnic institute"

ВІСНИК

**Національного
технічного університету «ХПІ»
Серія: Динаміка і міцність
машин**

№ 33 (1309) 2018

BULLETIN

**of the National
Technical University "KhPI"
Series: Dynamics and Strength of
Machines**

No. 33 (1309) 2018

Збірник наукових праць

Collection of Scientific papers

Видання засноване у 1961 р.

The publication was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2018

Kharkiv
NTU "KhPI", 2018

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2018. – № 33 (1309). – 65 с. – ISSN 2078-9130

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок, виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

У 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

У 2014 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у індекс Копернікус; індекс ICV (Index Copernicus Value): 63.25, режим доступу: <http://journals.indexcopernicus.com/+++++,p24783013,3.html>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Головний редактор

Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України, НТУ «ХПІ», Україна

Заст. головного редактора

Марченко А.П., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна

Секретар

Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна

Редакційна колегія серії

Відповідальний редактор:

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар:

А. Г. Андреев, канд. техн. наук, доц.

Члени редколегії:

К. В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.;

Є. С. Александров, д-р техн. наук, проф.;

Д. В. Бреславський, д-р техн. наук, проф.;

Ю. С. Воробйов, д-р техн. наук, проф.;

А. П. Зиньковський, д-р техн. наук, проф.;

Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.;

Г. І. Львов, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Є. Барканов, д-р інж. наук, проф., Інститут матеріалознавства, Ризький технічний університет, Латвія

К. Науменко, д-р техн. наук, проф., Магдебургський університет імені Отто фон Гюріке, Німеччина;

Ф. Пеллікано, докт. механіки, проф., Університет Модени, Італія

Editor-in-chief

Sokol E. I., dr. tech. sc., member-cor. of NAS of Ukraine, NTU "KhPI", Ukraine

Deputy editor-in-chief

Marchenko A.P., dr. tech. sc., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Secretary

Gorbunov K. O., docent, NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff

Associate editor:

O.K. Morachkovskij, Dr. Tech. Sci.

Executive secretary:

A.G. Andreev, PhD. Tech.Sci., Assistant Prof. (secretary);

Editorial staff members:

K.V. Avramov, Dr. Tech. Sci., Prof.;

E.E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.;

D.V. Breslavskij, Dr. Tech. Sci., Prof.;

Ju.S. Vorobjev, Dr. Tech. Sci., Prof.;

A.P. Zin'kovskij, Dr. Tech. Sci., Prof.;

L.V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.;

G.I. L'vov, Dr. Tech. Sci., Prof.;

Ju.V. Mihlin, Dr. Tech. Sci., Prof.;

N.A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

E. Barkanov, Prof., Dr. sc. ing., Institute of Materials and Structures, Riga Technical University, Latvia

K. Naumenko, Prof., Dr.-Ing. habil., Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Institute of Mechanics, Germany;

Pellicano F., Prof. Associato, Dr. di Ricerca in Meccanica Teorica, Universita di Modena e Reggio Emilia, Italy

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 8 від 02 листопада 2018 р.

Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, С.О. ПАЩЕНКО, В.Б. УСПЕНСЬКИЙ

АЛГОРИТМ ТА ПРОГРАМИ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОХИБОК ВОЛОКОННО-ОПТИЧНИХ ГІРОСКОПІВ, ВСТАНОВЛЕНИХ НА ШТУЧНИХ СУПУТНИКАХ ЗЕМЛІ

Надано опис розроблених алгоритмів та програм, що застосовуються для калібрування волоконно-оптичних гіроскопів, які працюють в умовах тепломінів при русі літального апарату навколоземною орбітою. Наведено математичну постановку задачі нестационарної теплопровідності, яку розв'язано комбінацією методу скінченних елементів та різницевого методу інтегрування за часом. За допомогою розробленого програмного засобу визначено розподіл температур у корпусі супутника та безпосередньо у волоконно-оптичному гіроскопі у вигляді часової залежності. Знайдений розподіл дає змогу, по-перше, обґрунтувати вимоги до наземного калібрування гіроскопів для побудови відповідних компенсуючих моделей; по-друге, використовувати такі моделі в умовах невизначеності поточної температури гіроскопу за причин, скажімо, відмови термодатчика. Таким чином здійснюється мінімізація температурної похибки приладів під час їх функціонування у складі бортових систем орієнтації та навігації та підвищується їхня відмовостійкість.

Ключові слова: алгоритм, програма, нестационарна теплопровідність, штучний супутник Землі, волоконно-оптичний гіроскоп, температурна модель похибок, калібрування.

Д.В. БРЕСЛАВСКИЙ, С.А. ПАЩЕНКО, В.В. УСПЕНСКИЙ

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКАХ ЗЕМЛИ

Представлено описание разработанных алгоритмов и программ, используемых для калибровки волоконно-оптических гироскопов, работающих в условиях тепломінів при движении летательного аппарата по околоземной орбите. Приведена математическая постановка задачи нестационарной теплопроводности, решаемой с помощью комбинации метода конечных элементов и разностного метода интегрирования по времени. С помощью разработанного программного средства определено распределение температур в корпусе спутника и непосредственно в волоконно-оптическом гироскопе в виде временной зависимости. Найденное распределение дает возможность, во-первых, обосновать требования к наземной калибровке гироскопов для построения соответствующих компенсирующих моделей; во-вторых, использовать подобные модели в условиях неопределенности температуры гироскопа, например, по причине отказа термодатчика. Таким образом, производится минимизация температурной погрешности приборов во время их функционирования в составе бортовых систем ориентации и навигации и улучшается их отказоустойчивость.

Ключевые слова: алгоритм, программа, нестационарная теплопроводность, искусственный спутник Земли, волоконно-оптический гироскоп, температурная модель ошибок, калибровка.

D.V. BRESLAVSKY, S.O. PASHCHENKO, V.B. USPENSKY

ALGORITHM AND SOFTWARE FOR MINIMIZATION OF TEMPERATURE ERRORS OF FIBER-OPTIC GYROSCOPES, MOUNTED ON ARTIFICIAL EARTH SATELLITES

The description of the developed algorithms and programs, which are used for calibration of fiber-optic gyroscopes working in the conditions of heat varying during spacecraft's motion in circumterrestrial orbit, is discussed. The mathematical statement for problem of non-stationary heat conduction for the satellite frame and on-board devices is presented. The method of numerical solution is based on the combination of Finite Element Method for boundary value problem and finite difference time integration method for initial one. The developed approach which allows use the parallel calculations in heat problems, is described. The information about developed software is presented by description of main functions written in C++ language. The temperature distribution in dependence on time in the satellite frame and directly in fiber-optic gyroscope's shell is found by use of developed software. Found distribution makes an opportunity at first to justify demands for ground calibration of gyroscopes for obtaining the compensation models. Secondly, the use of similar models in the conditions of uncertain value of gyroscope's temperature, which can be, for example, in the case of heat-sensing device's failure, can be done. The mathematical model of fiber-optic gyroscope snap data is discussed. The hypothesis of the linear dependence of the drift motion from temperature is suggested. The description of calibration algorithm for temperature model of fiber-optic gyroscope is presented. It was concluded that the main influence on the errors of fiber-optic gyroscope measurements is caused by temperature gradient and influence of absolute temperature is not so significant. Thereby, the minimization of temperature error of devices, which are affiliated in orientation and navigation on-board systems, can be performed as well as fail safety of such systems can be increased by use of the presented methods and algorithms.

Key words: algorithm, program, non-stationary heat conduction, artificial Earth satellite, fiber-optic gyroscope, temperature model of errors, calibration.

Вступ. Забезпечення стабільного функціонування систем управління та навігації сучасних космічних

літальних апаратів (КЛА) є практично важливою задачею. Нові умови експлуатації КЛА, зокрема штуч-

них супутників Землі (ШСЗ), пов'язані з застосуванням негерметичних корпусів. При цьому розташовані в них прилади та обладнання знаходяться у більш несприятливих температурних умовах. Це пов'язано з рухом ШСЗ навколоземною орбітою, при якому він періодично знаходиться в областях сонячного нагрівання та остигання у тіні Землі. Працездатність волоконно-оптичних гіроскопів (ВОГ) [1], які є важливим елементом систем управління та навігації, істотно залежить від експлуатаційної температури [1, 2]. Її перевищення над заданим діапазоном може призвести до суттєвих і неприпустимих похибок, та у граничному випадку – до втрати працездатності.

У зв'язку з цим питанням мінімізації температурних похибок ВОГ приділяється велика увага [2-5]. Однак у всіх існуючих на теперішній час роботах застосовано підхід, в якому компенсуючі моделі будуються виходячи з даних щодо вимірюваної датчиком ВОГ температури. Вочевидь, що такі моделі стають непрацездатними при відмові термодатчика.

У даній роботі представлено новий підхід, в якому запропоновано закласти в компенсуючу модель похибок ВОГ дані чисельного моделювання температури в його корпусі та елементах приладів та устаткування, що розміщені в ньому, включно з температурою в самому ВОГ. Чисельне моделювання задачі нестационарної теплопровідності проводиться з застосуванням методу скінченних елементів спільно з різницею методом інтегрування за часом. Це дозволяє з необхідним рівнем точності врахувати всі особливості розподілу теплових потоків та складну геометрію приладу. Визначена залежність змінювання температури від часу застосовується, по-перше, для формування вимог у вигляді робочих діапазонів температури та її градієнту, у яких потрібно проводити наземне калібрування моделей датчиків, по-друге, для використання під час орбітального функціонування систем у компенсуючих моделях, у вигляді спрогнозованої оцінки температури при ймовірній відмові відповідного термодатчика. Все це у сукупності дозволяє мінімізувати остатню похибку гіроскопів та підвищити показники відмовостійкості системи у цілому.

Математична постановка задачі нестационарної теплопровідності корпусу супутника

Розглянемо тривимірну континуальну область з об'ємом Ω , що обмежене деякою поверхнею S .

Для опису процесу перерозподілу теплової енергії у корпусах супутників та приладів застосовано рівняння нестационарної теплопровідності [1, 6]:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

де $k_x = k_x(T)$, $k_y = k_y(T)$, $k_z = k_z(T)$ – коефіцієнти теплопровідності, що є функціями температури; $c = c(T)$, $\rho = \rho(T)$ – розподілена теплоємність та густина матеріалу відповідно, які також є функціями те-

мператури; $f(x, y, z, t)$ – узагальнені об'ємні термодинамічні сили, що моделюють дію теплового джерела.

Вважається, що на поверхні S_3 для задачі нестационарної теплопровідності відповідно мають місце крайові умови Дирихле у вигляді заданого температурного режиму; на поверхні S_4 мають місце крайові умови Неймана, які описують дію теплового потоку; на поверхні S_5 мають місце крайові умови Ньютона-Ріхмана, що описують процеси теплопередачі шляхом конвективного теплообміну; на поверхні S_6 мають місце крайові умови Стефана-Больцмана, що описують процеси теплопередачі шляхом променевого теплообміну:

$$\begin{aligned} T|_{S_3} &= \theta(t) \text{ } ^\circ\text{C}; \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{S_4} &= q(t) \frac{Bm}{M^2}; \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{S_5} &= \alpha_{Conv} \cdot (T_{Env} - T) \frac{Bm}{M^2}; \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{S_6} &= \varepsilon_{Black} \cdot \delta_{SB} \cdot (T_{Env}^4 - T^4) \frac{Bm}{M^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\theta(t)$ – заданий температурний режим, $^\circ\text{C}$; $q(t)$ – заданий тепловий потік, $\frac{Bm}{M^2}$; $\alpha_{Conv} = \alpha_{Conv}(T)$ – коефіцієнт теплопередачі, що залежить від температури, швидкості та густини оточуючого середовища, $\frac{Bm}{M^2 \cdot ^\circ\text{C}}$; T_{Env} – температура оточуючого середовища, $^\circ\text{C}$; $\varepsilon_{Black} = \varepsilon_{Black}(T)$ – коефіцієнт чорноти; $\delta_{SB} = 5.670367 \cdot 10^{-8}$ – константа Стефана-Больцмана, $\frac{Bm}{M^2 \cdot ^\circ\text{C}^4}$.

В початковий момент часу розподіл температурного поля є функцією координат:

$$T(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (3)$$

Програма для моделювання температурних розподілів. Як й у роботі [6], застосуємо для моделювання розподілу температур у корпусі ШСЗ комп'ютерну програму *FEM Temperature* [7], розроблену для розв'язання задач нестационарної та стационарної теплопровідності трьохвимірних тіл. В програмі використовується трилінійний восьмивузловий скінченний елемент. На кожному кроці за часом при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих значень вузлових температур розв'язується методом спряжених градієнтів. При цьому реалізовано блочний алгоритм обчислення матричних та скалярних добутків із можливістю застосування технології розподіленого обчислення за допомогою бібліотеки багатопотоковості Thread стандарту C++ 11 та обчислювальної уніфікованої архітектури GPU-прискорювачів CUDA. Для розв'язання задачі нестационарної теплопровідності застосовано метод скінченних елементів. Отримується варіаційний функціонал за методом Гальоркіна, для якого матриця системи є додатно визначеною. Остаточні перетво-

рення призводять до системи алгебраїчних рівнянь:

$$A \cdot x = b, \quad (4)$$

де A – матриця системи; b – вектор правих частин; x – вектор шуканих невідомих.

Матриця системи повинна бути симетричною та додатно визначеною. Функціонал будується у наступному вигляді:

$$(A \cdot x, x) - (b, x) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Отриманий функціонал є собою додатно визначеною квадратичною формою, а його мінімум є розв'язком системи (4). Пошук мінімуму функціоналу (5) проводиться у два етапи:

1) початкова ітерація. На даному етапі здійснюється вибір початкового вектору пошуку x^0 . Визначення вектору поправки та вектору корекції відповідно:

$$r^0 = b - A \cdot x^0, \quad z^0 = r^0. \quad (6)$$

2) k -та ітерація. Визначення коефіцієнту поправки, уточнення вектору-розв'язку, уточнення вектору поправки, визначення коефіцієнту корекції, уточнення вектору корекції:

$$\alpha_k = \frac{(r^k, r^k)}{(Az^{k-1}, z^{k-1})}; \quad x^k = x^{k-1} + \alpha_k z^{k-1}; \quad (7)$$

$$r^k = r^{k-1} - \alpha_k Az^{k-1}; \quad \beta_k = \frac{(r^k, r^k)}{(r^{k-1}, r^{k-1})};$$

$$z^k = r^k + \beta_k z^{k-1}.$$

Умовою завершення алгоритму є виконання не-

рівності: $\frac{\|r^k\|}{\|b\|} \leq \delta$, де δ – наперед задана похибка.

Наведений алгоритм дозволяє з легкістю реалізувати процес паралельних обчислень [8].

Програмний засіб складається із наступних основних методів:

Input temperature data – функція, яка зчитує фізичні параметри задачі: коефіцієнти теплопровідності, густину матеріалу, коефіцієнт теплоємності, коефіцієнт конвективного теплообміну та початковий розподіл температури, крок інтегрування і кінцевий час розрахунку.

Temperature matrix – функція, в якій формуються елементи локальних матриць теплопровідності, теплоємності, конвекції та променевого теплообміну на елементі, що представляють собою інтеграли від добутків базисних функцій та їх похідних. Формується узагальнений вектор термодинамічних сил.

Temperature assembly – функція знаходження глобальних матриць теплопровідності, теплоємності, конвекції та променевого теплообміну. На підставі вхідної матриці індексів формується глобальна матриця системи, що представляє собою СЛАР і глобальний вектор узагальнених термодинамічних сил.

Output data – функція, що виводить у файл знайдений розподіл температурного поля для кожного тактового моменту часу.

Gradient solve system – функція, яка по отриманій матриці системи проводить розв'язання СЛАР. Для задачі нестационарної теплопровідності глобальна система представляє собою лінійну комбінацію матриць

теплопровідності, теплоємності, конвекції та променевого теплообміну, а вектор правих частин – узагальнений вектор термодинамічних сил.

Визначення температурного поля штучного супутника Землі

Розглянемо результати розв'язання задачі нестационарної теплопровідності корпусу ШСЗ з розташованими у ньому приладами та устаткуванням. Задачу сформульовано наступним чином: розглядається нерухомий корпус супутника, а теплові потоки змінюються за законом косинуса орбітального кута. ШСЗ обертається за круговою орбітою, радіус якої складає 700 км, а час руху складає 90 хв. Закон зміни інтенсивності теплового потоку має такий вигляд:

$$Q = q \cdot \cos(\varphi), \quad \varphi \in (0^\circ, 90^\circ).$$

Детальний опис задачі надано у [6]. Результати розв'язання представлено на рис. 1, 2. Рис. 1 містить залежність температури від часу у точці корпусу на зовнішньому, спрямованому на Сонце, боці, а на рис. 2 цю залежність надано для точок котушки (крива 1) та полімерного волокна ВОГ (крива 2). Із аналізу отриманих результатів видно, що незважаючи на істотне зменшення температурних перепадів та абсолютних значень температури, має місце суттєва часова неоднорідність її значень – від $+44,25^\circ\text{C}$ до $-33,19^\circ\text{C}$.

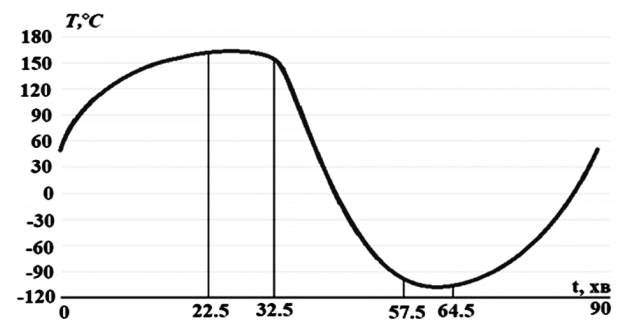


Рисунок 1 – Залежність температури корпусу від часу

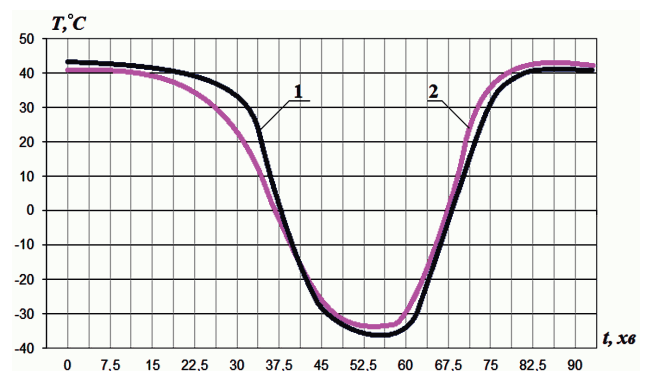


Рисунок 2 – Залежність температури у волоконно-оптичному гіроскопі від часу

Отримані результати представляють собою усталений розподіл температурного поля, що має місце після завершення перехідних процесів, пов'язаних з виводом супутника на орбіту.

Важливо, що отриманий температурний розподіл є циклічним, тобто повторюваним від одного оберту

ШСЗ навколо Землі до іншого. Таким чином, за розглянутих умов бажаного орбітального руху ШСЗ під час планування калібрувальних експериментів для обчислення параметрів температурних моделей ВОГ достатньо реалізовувати нагрів та охолодження приладу у діапазоні від $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Безпосередньо залежність температури, скажімо, котушки, від часу (рис. 2) за умов прив'язування у деякій точці, яка далі вважається початковою, можна використовувати для прогнозування оцінки поточної температури приладу. Така оцінка може використовуватись у компенсуючих моделях в умовах невизначеності щодо фактичної температури, яку, зазвичай, вимірює вбудований термодатчик. Описаний підхід компенсації за температурної програмою забезпечує мінімізацію теплового впливу на похибку ВОГ при апаратній або параметричній відмові термодатчику.

Калібрування температурної моделі ВОГ

Мінімізація похибок поточних вимірів ВОГ в умовах орбітального руху ШСЗ покладається на так звану компенсуючу модель, яка відображає залежність адитивної систематичної похибки виміру від поточного значення внутрішньої температури гіроскопу та її градієнту. Структура такої залежності, зазвичай, вводиться евристично, а її параметри визначаються шляхом оптимальної апроксимації реальних вимірів, отриманих експериментально, модельної функцією. Процедура отримання вихідних даних в лабораторних умовах та їхньої обробки складає задачу калібрування ВОГ.

Миттєві виміри ВОГ можна представити у вигляді

$$\omega(t_k) = \omega^* + \delta\omega(\tau_k, \Delta\tau_k) + \xi(t_k),$$

де t_k – дискретний момент часу, до якого актуалізується вимір; ω^* – дійсне значення абсолютної кутової швидкості, яке вимірюється гіроскопом. В умовах калібрування воно є відомим, в умовах експлуатації – є питомим та визначається із наявних вимірів ВОГ; $\delta\omega(\tau_k, \Delta\tau_k)$ – значення систематичної адитивної похибки, так званого дрейфу ВОГ; $\tau_k, \Delta\tau_k$ – параметри внутрішньої температури ВОГ; ξ – шумова складова вимірів.

В цих умовах мінімізація похибки для кожного дискретного моменту часу складається із алгоритмічного видалення з апаратно отриманого виміру ω прогнозованого за деякою моделлю значення похибки $\delta\omega$, яке, у свою чергу, обчислюється на основі поточного значення температури.

Висунемо гіпотезу щодо залежності дрейфу від температурних параметрів. Нехай така залежність є лінійною

$$\delta\omega(\tau_k, \Delta\tau_k) = K_{00} + K_{10} \cdot \tau_k + K_{01} \cdot \Delta\tau_k, \quad (8)$$

де $\tau_k = \frac{(T_d(t_k) - T^0)}{(T^+ - T^-)}$ – безрозмірна відносна температура;

$\Delta\tau_k = \frac{(\Delta T_d(t_k) - \Delta T^0)}{(\Delta T^+ - \Delta T^-)}$ – безрозмірний градієнт температури; $T^-, T^+, \Delta T^-, \Delta T^+$ – нижні та верхні межі

діапазону калібрування для температури та її градієнту відповідно; $T^0, \Delta T^0$ – середні значення діапазонів; $T_d(t_k)$ – значення внутрішньої температури ВОГ у момент часу t_k ; $\Delta T_d(t_k)$ – обчислене значення градієнту такої температури; K_{00}, K_{10}, K_{01} – коефіцієнти моделі (8), які саме і визначаються під час калібрування ВОГ на підставі експериментальних вимірів ВОГ в умовах примусової зміни зовнішньої температури за допомогою спеціального лабораторного обладнання. Найбільш поширеним методом розв'язання такої задачі є метод найменших квадратів.

Зауважимо, що у загальному випадку модель (8) може представляти собою поліном від $\tau, \Delta\tau$ досить високого ступеню, як, наприклад, у [9]. У даному випадку наведена для прикладу лінійна форма не має принципового значення, оскільки мова йде про загальну технологію алгоритмічної мінімізації температурної похибки.

Центральним моментом вказаної технології є використання результатів, зображених на рис.2.

По-перше, отримані вище дані, а саме, межі діапазонів можливої температури та її градієнту, в яких проводиться калібрування, безпосередньо увійшли в алгоритм (8). По-друге, значення $T_d(t_k)$ внутрішньої температури ВОГ при штатному функціонуванні бортової системи отримується з поточних вимірів вбудованого в ВОГ термодатчика, але при відмові останнього це значення може формуватися безпосередньо із залежності 1 на рис. 2, тобто прогнозуватися на основі розрахункових даних. Істотно, що в останньому випадку якість компенсації може бути дещо нижчою, але вказаний підхід відкриває можливість зберегти у цілому точнісні характеристики при можливих відмовах обладнання у ході орбітального руху.

Для аналізу впливу температурних змін на точність визначення орієнтації та оцінки ефективності підходу, що розроблено, було створено моделюючу програму за функціональною схемою, як на рис. 3.

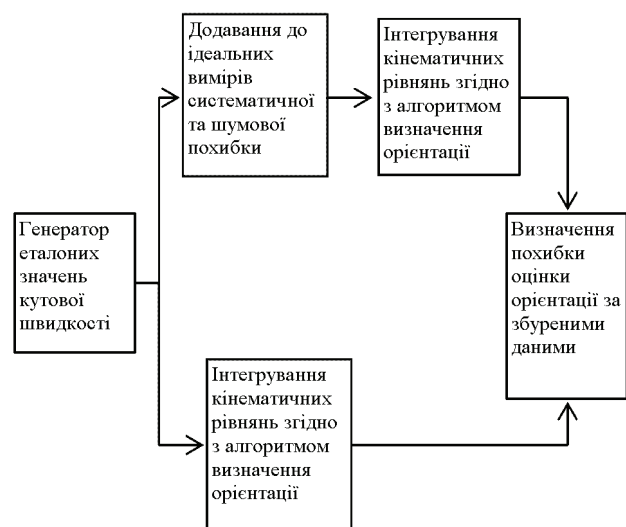


Рисунок 3 – Функціональна схема моделюючої програми

Важливим є те, що систематичні та шумові похибки, які додаються до ідеальних значень при моделю-

ванні, були реальними, тобто отриманими експериментально для ВОГ середнього класу точності у всьому температурному діапазоні. В цих умовах встановлено, що з точки зору похибки ВОГ градієнт температури на порядок впливовіший, ніж сама змінна температура, а ефективність використання компенсуючої моделі за описаною вище технологією дозволяє зменшити швидкість зростання куткової похибки орієнтації у 3-5 разів, ніж за умов відсутності компенсації.

Опис алгоритму

Отже, загальний алгоритм мінімізації температурної похибки можливо представити наступним чином. На першому етапі розв'язується задача нестационарної теплопровідності корпусу супутника з урахуванням значень теплових потоків від сонячного нагрівання та відповідних крайових умов. З урахуванням відповідних теплоізоляцій приладів визначається температура всередині корпусу ВОГ для кожного моменту часу руху ШСЗ навколоземною орбітою. Ця залежність далі використовується, по-перше, для вибору та обґрунтування діапазонів температури та її градієнта, для яких потрібно проводити експериментальну калібровку ВОГ в наземних умовах, по-друге, для прогнозування поточних значень температури у разі відмови термодатчика у процесі функціонування ШСЗ.

Висновки. В статті надано опис алгоритму мінімізації температурних похибок волоконно-оптичного гіроскопу, встановленого на ШСЗ типу «СІЧ-2». Описано програми, що застосовуються для чисельного моделювання. За розв'язанням задачі нестационарної теплопровідності визначено залежність температури всередині корпусу ВОГ від часу. Дана залежність дозволяє в наземних умовах спланувати калібрувальний експеримент у частині вибору температурного діапазону для обчислення параметрів компенсуючої моделі, а в умовах функціонування – замінити реальні виміри вбудованого термодатчика у разі його відмови. Зазначений комплекс заходів забезпечує мінімізацію впливу змінної температури на точність функціонування бортової системи орієнтації та навігації та сприяє підвищенню її відмовостійкості.

Список літератури

1. Черненко В.Д. Оптомеханика волоконных световодов / В.Д. Черненко. – СПб.: Политехника, 2010. – 291 с.
2. Mckenzie, N. Karafolas Fiber optic sensing in space structures: the experience of the European Space Agency, Proc. SPIE 5855 / Mckenzie, N. Karafolas // 17th International Conference on Optical Fibre Sensors, 23 May 2005. – 8 p.
3. Chen X. Study on error calibration of fiber optic gyroscope under intense ambient temperature variation / X. Chen, C. Shen // Appl Opt. – 2012 Jun 10. – Vol. 51 (17). – PP. 3755-62.
4. Xiao T. Temperature Drift Modeling and Compensating of Fiber Optic Gyroscope / T. Xiao, M.H. Pan, G.L. Zhu // Applied Mechanics and Materials. – 2012. – Vols. 220-223. – PP. 1911-1916.
5. Мешковский И.К. Исследование влияния тепловых

воздействий на работу волоконно-оптического датчика угловой скорости / И.К. Мешковский, Г.П. Мирошниченко, А.В. Рупасов, В.Е. Стригалева, И.А. Шарков // XXI Международный конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО "Концерн ЦНИИ Электроприбор", 2014. – С. 191-202.

6. Динамика полета и управление: 50 лет в ХПИ / Д.В. Бреславский, В.Б. Успенский, А.А. Ларин и др. Под общ. ред. Д.В. Бреславского. – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – 488 с.

7. А.с. № 66556. Україна. Комп'ютерна програма "Finite Element Method Temperature" ("FEM Temperature") / Д.В. Бреславський, С.О. Пащенко. – Заявл. 13.05.16, № 67169. – Опубл. 12.07.16.

8. Уильямс Э. Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ / Э. Уильямс // ДМК Пресс. – 2012. – 673 с.

9. Кузнецов Ю.А. Исследование температурной зависимости дрейфа ВОГ / Ю.А. Кузнецов, С.В. Олейник, В.Б. Успенский, Н.Е. Хацько // Радиоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2012. – №2(27). – С. 152–156.

References (transliterated)

1. Chernenko V.D. Optomechanika volokonnykh svetovodov [Optomechanics of optical fibers]. SPb, Politekhnik Publ., 2010, 291 p.
2. Mckenzie, N. Karafolas. Fiber optic sensing in space structures: the experience of the European Space Agency, Proc. SPIE 5855, 17th International Conference on Optical Fibre Sensors, 23 May 2005. 8 p.
3. Chen X, Shen C. Study on error calibration of fiber optic gyroscope under intense ambient temperature variation. Appl Opt. 2012 Jun 10;51(17): 3755-62.
4. Xiao T., Pan M.H., Zhu G.L. Temperature Drift Modeling and Compensating of Fiber Optic Gyroscope, Applied Mechanics and Materials, 2012, Vols. 220-223, pp. 1911-1916.
5. Meshkovskiy I.K., Miroshnichenko G.P., Rupasov A.V., Strigalev V.Ye., Sharkov I.A. Issledovaniye vliyaniya teplovykh vozdeystviy na rabotu volokonno-opticheskogo datchika uglovooy skorosti [Investigation of the influence of thermal effects on the operation of the fiber-optic sensor for angular velocity], XXI Mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam, SPb, OJSC Kontsern "Elektropribor" Publ., 2014, 191-202 p.
6. Breslavskiy D.V., Uspenskiy V.B., Larin A.A. Dinamika poleta i upravleniye: 50 let v KhPI [Dynamics of flight and control: 50 years in KhPI], Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, 488 p.
7. Uilyams E. Parallelnoye programmirovaniye na C++ v deystvii. Praktika razrabotki mnogopotochnykh programm [Parallel Programming in C++ in Action. The practice of developing multi-threaded programs]. Moscow, DMC Press Publ., 2012, 673 p.
8. Kuznetsov YU.A., Oleynik S.V., Uspenskiy V.B., Khats'ko N.Ye. Issledovaniye temperaturnoy zavisimosti dreyfa FOG [Investigation of the temperature dependence of the FOG drift], Zaporizhzhya, Radioelektronika, informatyka upravlinnya, 2012, 152-156 p.
9. Breslavskyy D.V., Pashchenko S.O., Komp'yuterna prohrama "Finite Element Method Temperature" ("FEM Temperature") [Computer program "Finite Element Method Temperature" ("FEM Temperature")], Ukrayina, Zayavl. 13.05.16, № 67169, Opubl. 12.07.16., A. s. № 66556.

Надійшла (received) 30.07.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Бреславський Дмитрій Васильевич, Breslavsky Dmytro Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, НТУ

«ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

Пащенко Сергій Олександрович (Пащенко Сергей Александрович, Pashchenko Serhii Oleksandrovych) – аспірант, НТУ «ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: sergeypaschenkospu@gmail.com.

Успенський Валерій Борисович (Успенский Валерий Борисович, Uspensky Valerii Borysovich) – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, НТУ «ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: uspensky61@gmail.com.

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2018.33.151220>

Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, С.О. ПАЩЕНКО

ПОВЗУЧИСТЬ ТРІЙНИКОВОГО З'ЄДНАННЯ ТРУБОПРОВОДУ ПРИ СПІЛЬНІЙ ДІЇ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВИХ ТА РАДІАЦІЙНИХ ПОЛІВ

У статті надано математичну постановку трьохвимірної задачі повзучості, що відбувається при дії температурно-силових та радіаційних полів. Для розв'язання задачі прийнято метод скінченних елементів, що використовується спільно з різницевим методом інтегрування за часом. Для чисельного аналізу застосовано розроблений програмний комплекс, що використовує восьмивузловий об'ємний скінченний елемент. Досліджено вплив повзучості та радіаційного розпухання на напружено-деформований стан фрагменту системи охолодження ядерного реактору. Встановлено, що отримані розв'язки для задач температурно-силової повзучості та радіаційного розпухання у районі стику труб є принципово відмінними від результатів комплексного розв'язку. Розрахунками виявлено, що вплив радіаційного розпухання істотно уповільнює релаксацію напружень при повзучості та підвищує їхній рівень у місці стику труб.

Ключові слова: повзучість, температура, радіаційне розпухання, рівняння стану, ядерний реактор, трійникове з'єднання трубопроводу, метод скінченних елементів.

Д.В. БРЕСЛАВСКИЙ, С.О. ПАЩЕНКО

ПОЛЗУЧЕСТЬ ТРОЙНИКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ И РАДИАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

В статье представлена математическая постановка трехмерной задачи ползучести, происходящей под действием температурно-силовых и радиационных полей. Для решения задачи принят метод конечных элементов, используемый совместно с разностным методом интегрирования по времени. Для численного анализа применен разработанный программный комплекс, использующий восьмивузловый объемный конечный элемент. Исследовано влияние ползучести и радиационного распухания на напряженно-деформированное состояние фрагмента системы охлаждения ядерного реактора. Установлено, что полученные решения для задач температурно-силовой ползучести и радиационного распухания в районе стыка труб принципиально отличаются от результатов комплексного решения. Расчетами установлено, что влияние радиационного распухания существенно замедляет релаксацию напряжений при ползучести и повышает их уровень в месте стыка труб.

Ключевые слова: ползучесть, температура, радиационное распухание, уравнение состояния, ядерный реактор, тройниковое соединение трубопровода, метод конечных элементов.

D.V. BRESLAVSKY, S.O. PASHCHENKO

CREEP OF T-JOINT OF PIPELINE UNDER JOINT ACTION OF TEMPERATURE-FORCE AND RADIATION FIELDS

The mathematical statement of three-dimensional problem of creep, which is running under the action of temperature, force and radiation fields, is presented in a paper. The total strain is considered as a sum of elastic, temperature, creep and swelling parts. The non-homogeneous temperature fields are considered for determining the strain distribution as well as for obtaining the value of the neutron fluence function. The case of long term deformation under the creep with isotropic properties was analyzed by use of Norton law. The Finite Element Method, which is used jointly with finite differences method for time integration, was accepted for the problem's solution. The volume finite element with eight nodes is used in numerical analysis. The approach uses the algorithm of parallel computing for the system of linear algebraic equations, which is solved by Choletski method. The program complex in C++ programming language was developed in order to realize the method and algorithms. It has been applied for numerical analysis. The influence of creep and radiation swelling on the stress-strain state of the cooling system fragment from nuclear reactor was investigated. The von Mises stress distributions are presented for different cases of nonlinearities both for tube's volume and for the place of stress concentration.

© Д.В. Бреславський, С.О. Пащенко, 2018

It was established that obtained solutions for the separate problems of creep under irregular temperature field and inner pressure as well as for problem of radiation swelling significantly differ from the solution of complex problem with consideration of both effects. It was found by numerical simulation that influence of radiation swelling significantly decreases the stress relaxation in creep conditions and increases the stress level in the place of tubes joint.

Key words: creep, temperature, radiation swelling, constitutive equations, nuclear reactor, t-joint of pipeline, finite element method.

Вступ. Застосування ядерних реакторів (ЯР) для отримання електричної енергії на борту космічного апарату у порівнянні з класичним підходами, що базуються на використанні сонячних панелей, має ряд переваг. По-перше, використання такого типу енергії надає можливість забезпечити автономність космічного апарату, що дозволяє йому ефективно функціонувати на віддалених орбітах, де інтенсивність сонячного потоку є незначною. По-друге, запасу ядерного палива вистачає на десятки років, а отже, стає можливим здійснення місій до віддаленого космосу [1, 2]. Найбільший недолік застосування ЯР у космічному просторі полягає у складності відведення теплової енергії, що утворилася внаслідок розпаду ядерного палива, та складності експлуатації установок такого типу. У зв'язку з тим, що теплообмін у космічному вакуумі відбувається, переважно, за рахунок променевого випромінювання [2], який є набагато менш ефективним у порівнянні з конвективним на один ват за одиницю часу, виникає гостра проблема розробки ефективної системи охолодження. На додаток, деградація матеріалу, що супроводжується опромінюванням за рахунок ядерного розпаду палива та дією сонячних та галактичних променів, характеризується процесами розпухання, що призводить до зміни розмірів виготовлених з них конструктивних елементів [3]. Комплексна дія температурно-силових та радіаційних полів призводить до виникнення процесів повзучості та розпухання, що значним чином скорочують строк експлуатації [4-5]. Дослідження та аналіз деформацій внаслідок повзучості та радіаційного разом з релаксацією напружень дозволяє провести оцінку режимів роботи ЯР та розробити рекомендації щодо покращення умов експлуатації та збільшення терміну довговічності.

Стаття містить математичну постановку задачі повзучості, що відбувається при дії температурно-силових та радіаційних полів. За допомогою розробленого авторами програмного комплексу [6] виконано розрахунки напружено-деформованого стану при повзучості трійникового з'єднання труб системи охолодження ЯР. Проаналізовано вплив температурних деформацій, внутрішнього тиску та радіаційного розпухання матеріалу ЯР на напружено-деформований стан з'єднання за період експлуатації.

Математична постановка задачі

Для опису процесів теплової повзучості та радіаційного розпухання, що мають місце у космічному просторі, задачу повзучості розглянуто у трьохвимірній постановці. Повна система рівнянь містить рівняння рівноваги, геометричні та фізичні співвідношення:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = \bar{X}_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\bar{\varphi}), \quad (1)$$

де $\bar{\varphi}$ – вектор переміщення; σ_{ij} – компоненти тензору напружень; \bar{X}_i – вектор об'ємних навантажень.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - e^{Creep}_{kl} - e^{Temp}_{kl} - e^{Swell}_{kl}),$$

де для компонентів тензорів введено позначення: ε_{ij} – повних деформацій; D_{ij} – пружних констант; e^{Creep}_{kl} – деформації повзучості; e^{Temp}_{kl} – температурної деформації; e^{Swell}_{kl} – деформації розпухання. Індксація $i, j = 1, 2, 3$ відповідає просторовим координатам x, y, z .

Тензор температурних деформацій описує залежність виникнення деформацій від температурного градієнту та має вигляд:

$$e^{Temp}_{ij} = \alpha_{Expn} \cdot \Delta T \cdot \delta_{ij}, \quad (3)$$

де α_{Expn} – коефіцієнт температурного розширення, $^{\circ}\text{C}^{-1}$; ΔT – температурний градієнт, $^{\circ}\text{C}$; δ_{ij} – символ Кронекера. При $i = j$ символ приймає значення одиниці, при $i \neq j$ – нулю.

Тензор деформацій радіаційного розпухання описує залежність виникнення деформацій в залежності від таких чинників, як інтегральний потік заряджених часток, температура та час. Інтегральний потік визначається взаємодією заряджених часток з мікроструктурою матеріалу, що опромінюється, і залежить від ряду факторів: енергії заряджених часток, спектральної густини, густини потоку тощо. Функціональна залежність компонентів тензору швидкості деформації розпухання від швидкості функції інтегрального потоку має вигляд [5]:

$$\dot{e}^{Swell}_{ij} = \frac{1}{3} \dot{S}(\Phi, t, T) \cdot \delta_{ij}, \quad (4)$$

де \dot{S} – швидкість інтегрального потоку.

Для опису процесів повзучості застосовано рівняння стану за гіпотезою течіння Нортгона:

$$\dot{e}^{Creep}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot B \sigma_i^{n-1} S_{ij}, \quad (5)$$

де B, n – константи, що визначаються експериментальним шляхом.

Вважається, що на деякій поверхні S_1 мають місце крайові умови Дирихле у вигляді заданого переміщення, що є функцією часу. На поверхні S_2 мають місце крайові умови Неймана, які описують дію розподілених сил:

$$\bar{\varphi}|_{S_1} = \bar{\varphi}_0; \quad \sigma_{ij} n_j |_{S_2} = h_j. \quad (6)$$

В початковий момент часу значення деформацій повзучості та деформації розпухання мають нульові значення.

$$e^{Creep}_{ij}(0) = 0; \quad e^{Swell}_{ij}(0) = 0. \quad (7)$$

Для задачі термпружності, яка розв'язується для моменту часу $t = 0$, має місце стаціонарний, нерівномірний за координатами розподіл температурного поля:

$$T(x, y, z) = \psi(x, y, z) \text{ } ^\circ\text{C} \quad (8)$$

Розв'язання задачі. Розглянемо елемент системи охолодження, що представляє собою ортогонально з'єднані дві товстостінні труби з внутрішнім радіусом $R_1 = 100$ мм, зовнішнім радіусом $R_2 = 200$ мм, довжиною опорної труби – $L = 350$ мм, висотою втулки – $H = 250$ мм. Фізико-механічні характеристики матеріалу трійникового з'єднання: модуль пружності $E = 1,55 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0,3$. Константи повзучості для рівняння стану (5) мають значення [5]: $B = 3,6 \cdot 10^{-19,9}$ МПа $^{-n} \cdot \text{год}^{-1}$; $n = 4,9$.

Вважається, що з'єднання труб рівномірно навантажене внутрішнім тиском $p_{in} = 70$ МПа, а температурне поле має усталений характер та представляє собою логарифмічний розподіл за радіальним напрямком опорної труби та втулки, де на зовнішньому та внутрішньому радіусах мають місце крайові умови Дирихле у вигляді заданої температури, що складає $T(R_2) = 740$ °К та $T(R_1) = 752$ °К відповідно. Швидкість функції інтегрального потоку представляється у вигляді наступної залежності [5]:

$$\dot{S}(t) = A_s \cdot \beta_s \cdot \left(\alpha_s \cdot \frac{d\Phi_s}{dt} \right)^{\beta_s} \cdot t^{(\beta_s-1)} \cdot e^{\left(0,0235T - \frac{8,35}{(T-630)} - \frac{1782}{(980-T)} \right)}, \quad (9)$$

де A_s , β_s , α_s – константи, що визначені для вищенаведеного матеріалу для заданого діапазону температур: $A_s = 5,33 \cdot 10^{-9}$; $\beta_s = 0,19 + 1,63 \cdot 10^{-3} \cdot T$; $\alpha_s = 2,247 \cdot 10^{-22}$; $\dot{\Phi}_s$ – швидкість нейтронного потоку, що визначає інтенсивність впливу радіаційного опромінювання, де $\dot{\Phi}_s = 15,012 \cdot 10^{22}$ нейтрон/м $^2 \cdot \text{г}$.

Для розв'язання задачі застосовано МСЕ разом з різницевиими методами інтегрування за часом. До розрахунків залучено програмний комплекс, опис якого надано у [6, 8]. Скінченно-елементну модель системи охолодження зображено на рис. 1, а, кількість елементів якої після дослідження на збіжність прийнято рівною 22956. Для розв'язання кінцевої СЛАР задач повзучості та радіаційного розпухання залучено блочний алгоритм Холецького [9].

У зв'язку з тим, що внутрішній тиск є рівномірно розподіленим за внутрішньою поверхнею, доцільно розглянути чверть моделі. Вважається, що на осьових торцях мають місце крайові умови Дирихле у вигляді часткового закріплення. На рис. 1, а зображено скінченно-елементну модель фрагменту системи охолодження, на рис. 1, б – поверхні крайових умов Дирихле, де для вузлів, що потрапляють до зони S_1 , дозволені переміщення вздовж напрямку X та Y , при чому останній відповідає радіальному переміщенню втулки. Для вузлів, що потрапляють до зони S_2 , дозволено переміщення вздовж напрямку Z та X , де останній відповідає радіальному переміщенню опорної труби. Для

вузлів, що потрапляють до зони S_3 , дозволено переміщення вздовж напрямків X та Z , де останній також відповідає за радіальне переміщення втулки. Вузлі, що потрапляють до зони S_4 , знаходяться на з'єднанні двох труб, тому переміщення дозволено за всіма напрямками, окрім Y . Для зони S_5 дозволено переміщення за напрямками X та Y .

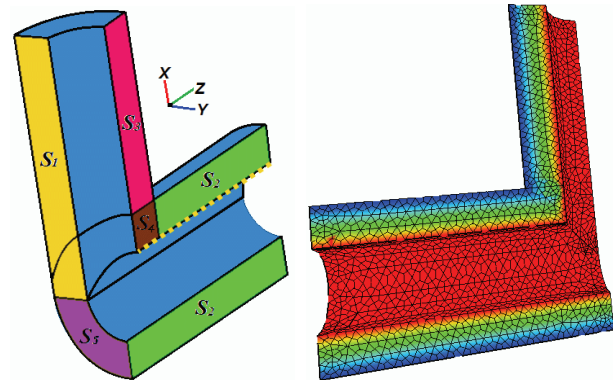


Рисунок 1 – Поверхні крайових умов (а), скінченно-елементна модель з температурним розподілом (б)

Для дослідження і аналізу відокремленого та сумісного впливу факторів повзучості та радіаційного розпухання на розподіл компонентів НДС розв'язано ряд відповідних задач:

1) задача повзучості при чисто механічному навантаженні (поверхні за внутрішнім радіусом опорної труби і втулки навантажені рівномірним тиском 70 МПа);

2) задача повзучості для логарифмічного розподілу температурного поля (зображено на рис. 1, б), що відповідає розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності. Перепад температури за радіальним напрямком становить 12 градусів;

3) задача радіаційного розпухання. Закон для швидкості інтегрального потоку має вигляд (9). Прийнято радіальний розподіл температури, аналогічний заданому в задачі 2;

4) задача повзучості при дії внутрішнього тиску, неоднорідного розподілу температур та радіаційного розпухання.

Усі отримані розв'язки для задач теорії повзучості та радіаційного розпухання отримано для моменту часу 10000 годин.

На рис. 2 надано розподіл інтенсивності напружень вздовж внутрішньої частини опорної труби. Тут крива 3 відповідає розв'язку задачі при дії внутрішнього тиску при $t = 0$, крива 4 – розв'язку задачі повзучості з неоднорідним розподілом температури при $t = 10000$ г (незначні величини напружень), крива 5 – розв'язку задачі повзучості при $t = 10000$ г, крива 1 – розв'язку задачі радіаційного розпухання при $t = 10000$ г, крива 2 – сумісному розв'язку задачі 4 при $t = 10000$ г (спільна дія радіаційного розпухання, теплового поля та внутрішнього тиску). В околі стику труб знаходиться концентратор напружень. Криві інтенсивності напружень побудовано вздовж напрямку пунктирної лінії, що зображено на рис. 1, а.

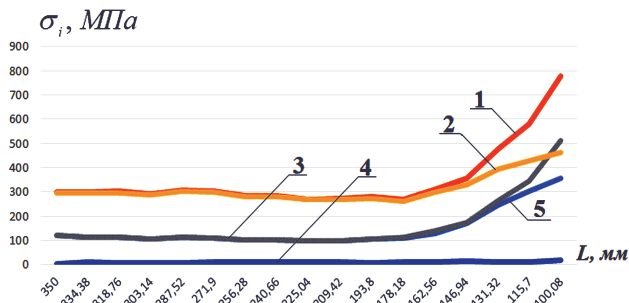


Рисунок 2 – Розподіл інтенсивності напружень вздовж осі труби

На рис. 3 надано залежність максимального значення інтенсивності напружень від часу, де крива 1 – розв’язок задачі повзучості, крива 2 – задачі радіаційного розпухання, крива 3 – комплексний розв’язок задачі повзучості та радіаційного розпухання.

На рис. 4 та 5 представлено карту інтенсивності напружень для розглянутих задач.

Аналіз результатів, наведених на рис. 4 – 5, показує, що має місце неоднорідний розподіл напружень за позовжнім напрямком опорної труби для всіх типів навантажень. Найбільш інтенсивно неоднорідність проявляється для задачі радіаційного розпухання 3 та сумісної задачі 4 – повзучості та радіаційного розпухання. Порівнюючи результати на рис. 5 та 4, б з пружним розв’язком (див. рис. 4, а), можна зробити висновок, що релаксація компонентів НДС за 10000 г є значною.

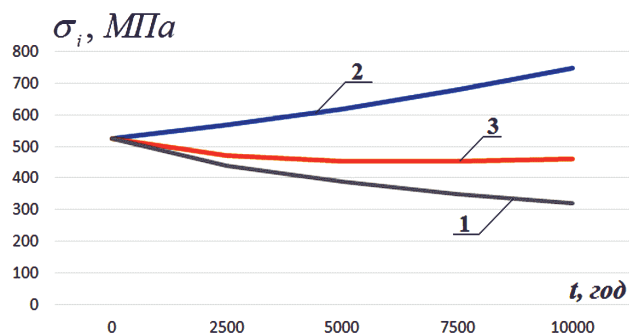


Рисунок 3 – Еволюція інтенсивності напружень у зоні концентратора напружень

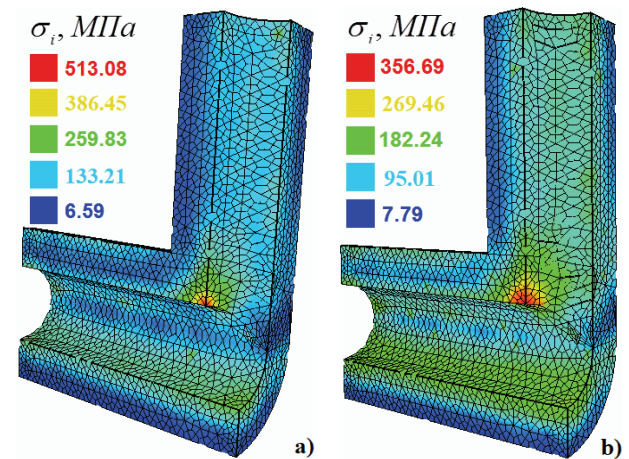


Рисунок 4 – Інтенсивність напружень: пружне деформування при $t=0$ (а), повзучість при $t=10000$ г (б)

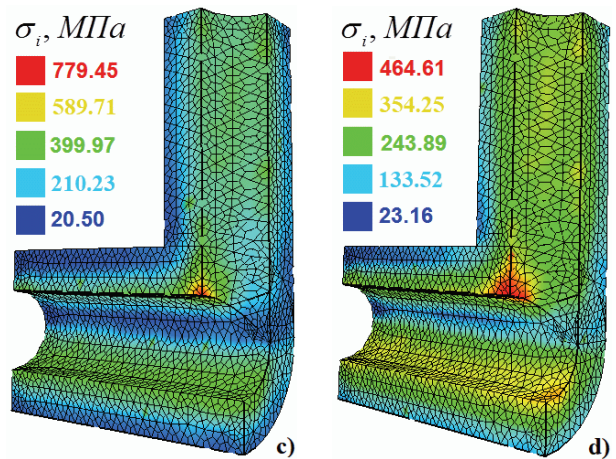


Рисунок 5 – Інтенсивність напружень $t=10000$ г: радіаційне розпухання (а); спільна дія повзучості та розпухання (б)

Варто зазначити, що відмінність розв’язків задач повзучості при дії тільки температурного поля та термопружності у концентраторі напружень не перевищує 0,7 %, а вдалі від концентратора – 0,048 %. У зв’язку з чим на рис. 2 надано тільки розв’язок для задачі повзучості [7]. Зазначимо, що внесок температурних напружень для даного випадку у загальну повзучість з’єднання є незначним.

Для задачі повзучості з’єднання, навантаженого тільки внутрішнім тиском (див. рис. 2, крива 5), релаксація напружень в зоні концентратора є значно більшою у порівнянні з релаксацією цих же компонентів вдалині від нього. На рис. 2 видно, що протягом 10000 годин значення інтенсивності напруження в зоні концентратора зменшилося, приблизно на 200 МПа у порівнянні з пружним розв’язком, в той час, коли для довжини від 350 мм до 165 мм відмінності практично не спостерігається. Цей же результат спостерігається й на рис. 3 (крива 1) Видно, що швидкість релаксації на кінцевий момент розрахунку є дещо меншою у порівнянні з початковим етапом.

Відмітимо, що розподіл компонентів НДС, отриманий шляхом розв’язання задачі за допомогою МСЕ, є близьким до аналітичного розв’язку задачі для товстостінної труби вдалині від концентратора на момент часу.

У порівнянні з результатами розв’язання задачі повзучості, результати, отримані при врахуванні радіаційного розпухання, свідчать, що воно вносить набагато більший внесок у процеси перерозподілу напружень, що призводить до збільшення загального рівня деформацій та може вважатись причиною зменшення довговічності системи охолодження та складових ЯР. Характер зміни інтенсивності напруження в цьому випадку є більш рівномірним за всією моделлю, ніж для задач повзучості. На момент часу кінця розрахунку значення інтенсивності напружень в зоні концентратора та вдалині від нього зросло приблизно, на 300 МПа, що зображено порівнянням кривих 1 та 3 на рис. 2. Характер релаксації тісно пов’язаний зі значенням температури та її градієнтом: для більш стрімких перепадів та високих значень температури інтенсивність радіаційного розпухання може значно зростати.

Співвідношення (9) характеризують найбільш інтенсивну зміну швидкості інтегрального потоку у перші години процесу. Надалі процес переходить до квазіусталеної фази та має практично постійну швидкість. На рис. 6 надано залежність зміни швидкості інтегрального потоку від часу для різних значень температури, що задавались з експлуатаційного інтервалу значень. З рис. 6 видно, що криві практично співпадають. Це говорить про майже ідентичний характер розпухання за всією моделлю. Починаючи з моменту часу приблизно 3000 годин, швидкість інтегрального потоку приймає квазіпостійний характер та мало змінюється за часом. Близькість кривих означає, що характер радіаційного розпухання за всією моделлю є майже ідентичним.

Розподіл інтенсивності напружень, що відповідає комплексному розв'язку задачі повзучості та радіаційного розпухання (крива 2 на рис. 2), характеризується, з одного боку, значною релаксацією у зоні концентратора напружень за рахунок процесів повзучості, а з іншого – значним підвищенням рівня інтенсивності напружень вдалині від концентратора за рахунок процесу радіаційного розпухання. Із порівняння кривих 1 та 2 на рис. 2 видно, що процес повзучості стримує стрімке зростання інтенсивності напружень у зоні концентратора та загалом зменшує її рівень у порівнянні з розв'язками задач теорії пружності та радіаційного розпухання, тобто процес повзучості позитивно впливає на релаксацію компонентів НДС, тим самим зменшуючи потенційно небезпечні рівні напружень у конструкції. Із аналізу кривої 3 на рис. 3 можна зробити висновок, що протягом приблизно 5500 годин, переважно має місце релаксація інтенсивності напружень за рахунок процесу повзучості, після 5500 годин спостерігається поступова компенсація та подальше зростання величини напружень за рахунок радіаційного розпухання.

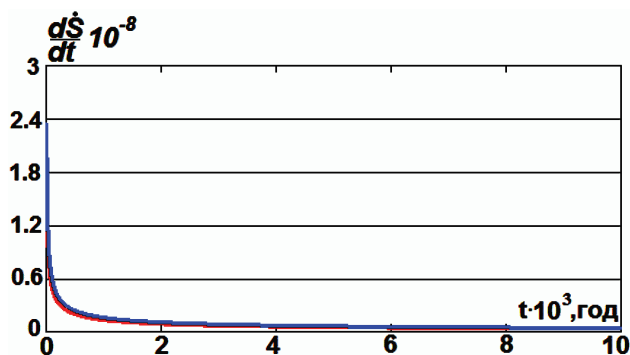


Рисунок 6 – Прискорення інтегрального потоку

Висновки. В статті надано опис прикладу чисельного моделювання процесів повзучості при дії температурно-силових та радіаційних полів у досить розповсюдженому конструктивному елементі – трійниковому з'єднанні труб системи охолодження ЯР. Шляхом аналізу задач з урахуванням тільки одного виду деформування показано їхню роль у загальному процесі. Обговорено результати розв'язання задачі з урахуванням всіх факторів, за яким можливо зробити ви-

сновок щодо існування тісного взаємного впливу процесів повзучості та радіаційного розпухання. Зазначимо, що у розглянутому випадку завдяки різноспрямованим впливам цих факторів спостерігається не таке значне змінювання напружень, ніж при дії кожного фактору окремо. Відомо, що при релаксації напружень у зонах їхньої концентрації з часом відбувається зростання пошкоджуваності. Часто такі процеси є взаємопов'язаними за їхньою швидкістю. Отже, задачі, що розглядаються, у подальшому мають бути доповненими, за умов наявності відповідних експериментальних даних, кінетичними рівняннями для параметру пошкоджуваності. Це дозволить проектувати найбільш безпечні режими роботи трубопроводів ЯР.

Також важливим для практичного використання може бути висновок щодо впливу неоднорідного температурного поля у подібних задачах, в яких враховано вплив деяких факторів. Температурний перепад по стінці труби у даному випадку є незначним та дорівнює 12 °С, тому температурні деформації та напруження не вносять великого внеску до загального напружено-деформованого стану при повзучості. Але перепад температур обумовлює істотне зростання деформацій радіаційного розпухання, яке й може лімітувати термін роботи трубопроводів.

Список літератури

1. Модель космоса: в 2 т. Т.2: Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических станций / Ред. М.И. Панасюк, Л.С. Новиков. – М.: КДУ, 2007. – 1144 с.
2. Санин Ф.П. Космос и технологии / Ф.П. Санин. – М.: Наука, 2003. – 637 с.
3. Frank A. G. Stress and Temperature Dependence of Irradiation Creep of Selected FCC and BCC Steels at Low Swelling / A.G. Frank, T. Mychailo // Journal of ASTM International. – 2004. – Paper ID JA11 1372.
4. Писаренко Г.С. Прочность и пластичность материалов в радиационных потоках / Г.С. Писаренко, В.Н. Киселевский. – К.: Наукова думка, 1979. – 284 с.
5. Бирюков О.В. Длительная прочность элементов касеты насыпного типа для быстрого газохлаждаемого реактора / О.В. Бирюков, А.А. Золочевский, А.Г. Лаврук, О.К. Морачковский, С.М. Школьный // Препринт ХФТИ АН УССР 85-37. – М.: ЦНИИАтоминформ, 1985. – 39 с.
6. Бреславський Д.В. Програмний засіб для розв'язання трьохвимірних задач теорії повзучості методом скінченних елементів / Д.В. Бреславський, С.О. Пащенко // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези XXIII міжнар. наук.-практ. конф., 20-22 травня 2015 р.: у 4 ч. – Ч. 1. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – С. 40.
7. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive equations / J.L. Chaboche // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1693.
8. Бреславський Д.В. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення / Д.В. Бреславський, Ю.М. Коритко, О.А. Татарінова. – Х.: «Підручник НТУ «ХПІ», 2017. – 232 с.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2015. – 636 с.

References (transliterated)

1. Model' kosmosa: v 2.t. T.2: Vozdeystviye kosmicheskoy sredy na materialy i oborudovaniye kosmicheskikh [Space

model: in 2.v. V.2: The impact of the space environment on materials and equipment of space] Red. M.I. Panasyuk, L.S. Novikov. Moscow: KDU, 2007, 1144 p.

2. Sanin F.P. Kosmos i tekhnologii [Space and technology]. Moscow: Nauka, 2003, 637 p.

3. Frank A. G., Mychailo T. Stress and Temperature Dependence of Irradiation Creep of Selected FCC and BCC Steels at Low Swelling. Journal of ASTM International, 2004, Paper ID JA11 1372.

4. Pisarenko G.S., Kiselevskiy V.N. Prochnost' i plastichnost' materialov v radiatsionnykh potokakh [Strength and plasticity of materials in radiation fluxes]. Kiyev: Naukova dumka, 1979, 284 p.

5. Biryukov O.V., Zolocheskiy A.A., Lavruk A.G., Morachkovskiy O.K., Shkol'nyy S.M. Dlitel'naya prochnost' elementov kassety nasypnogo tipa dlya bystrogo gazokhlazhdayemogo reaktora [Long-term strength of elements of a bulk-type cassette for a fast gas-cooled reactor]. Preprint KHFTI AN USSR 85-37. Moscow: TSNIAtominform, 1985, 39 p.

6. Breslavs'ky D.V., Pashchenko S.O. Prohramnyy zasib dlya rozv'yazannya tr'okhvymirnykh zadach teorii povzuchosti metodom skinchennykh elementiv [Software tool for solving three-dimensional problems of the theory of creep by the finite element method]. Informatsiyni tekhnolohiyi: nauka, tekhnika, tekhnolohiya, osvita, zdorov'ya: tezy XXIII mizhnar. nauk.-prakt. konf., 20-22 travnya 2015 r.: u 4 ch. Part 1. Kharkiv: NTU «KHPI», 2015, p. 40.

7. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive equations. International Journal of Plasticity. 2008, Vol. 24. p. 1642-1693.

8. Breslavs'ky D.V., Korytko YU.M., Tatarinova O.A. Proektuvannya ta rozrobka skinchennoelementnoho prohramnoho zabezpechennya [Design and development of finite element software]. Kharkiv: «Pidruchnyk NTU «KHPI», 2017. 232 p.

9. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Binom, 2015, 636 p.

Надійшла (received) 20.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Бреславский Дмитрий Васильевич, Breslavsky Dmytro Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, НТУ «ХПІ»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

Пащенко Сергій Олександрович (Пащенко Сергей Александрович, Pashchenko Serhii Oleksandrovych) – аспірант, НТУ «ХПІ»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: sergeypaschenkospu@gmail.com.

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2018.33.151221>

Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, О.А. ТАТАРИНОВА, Ю.М. КОРИТКО

ПОВЗУЧИТЬ ПАНЕЛЕЙ НАДЗВУКОВИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ПРИ ПЕРІОДИЧНІЙ ДІЇ ТИСКУ ПОВІТРЯНОГО ПОТОКУ

Розглянуто незворотне деформування при аеродинамічному нагріванні та періодичній дії тиску повітряного потоку панелі надзвучового літального апарату. Надано математичну постановку задачі повзучості тонких оболонок обертання, що навантажені нормальним тиском, який має постійну та складову, що періодично змінюється. Використано рівняння стану, що отримуються шляхом застосування асимптотичного розкладання невідомих з подальшим осередненням на періоді змінювання напружень. Наведено приклад чисельного розв'язання задачі деформування нагрітої циліндричної панелі, яка піддана періодичній дії навантаження від поривів повітряного потоку. З застосуванням програмного комплексу для розрахунків повзучості тонких оболонок обертання методом скінченних елементів визначено розподіли компонентів напружено-деформованого стану.

Ключові слова: панель літального апарату, повзучість, повітряний потік, періодичне навантаження, оболонка обертання, метод скінченних елементів.

Д.В. БРЕСЛАВСКИЙ, О.А. ТАТАРИНОВА, Ю.Н. КОРИТКО

ПОЛЗУЧЕСТЬ ПАНЕЛЕЙ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА

Рассмотрено необратимое деформирование при аэродинамическом нагреве и периодическом действии давления воздушного потока панели сверхзвукового летательного аппарата. Приведена математическая постановка задачи ползучести тонких оболочек вращения, нагруженных нормальным давлением, имеющим постоянную и периодически изменяющуюся составляющие. Используются уравнения состояния, которые получаются путем применения асимптотического разложения неизвестных с последующим осреднением на периоде изменения напряжений. Приведен пример численного решения задачи деформирования нагретой цилиндрической панели, подверженной периодическому нагружению от порывов воздушного потока. С использованием программного комплекса для расчетов ползучести тонких оболочек вращения методом конечных

© Д.В. Бреславський, О.А. Татарінова, Ю.М. Коритко, 2018

елементов определены распределения компонентов напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: панель летательного аппарата, ползучесть, воздушный поток, периодическое нагружение, оболочка вращения, метод конечных элементов.

D.V.BRESLAVSKY, O.A. TATARINOVA, JU.N. KORYTKO

CREEP OF SUPERSONIC AIRCRAFT PANELS UNDER THE PERIODIC ACTION OF AIRSTREAM PRESSURE

Irreversible deformation of supersonic aircraft panel under the aerodynamic heating and periodical action of airstream pressure is regarded. The distribution for airstream pressure which is obtained from the solution of aerodynamics problem, was simplified and presented as a cycle with triangular form of pressure increasing-decreasing in a part of period with definite constant static component. The mathematical statement of creep problem for thin shells of revolution loaded by normal pressure having constant and periodically varying components is presented. The theory of finite deflections is used. Equations are derived for the case of conical shell. The constitutive equations, which are obtained by use the method of asymptotic expansions of creep strain and scalar damage parameter with subsequent averaging in a period of stress varying, are used. The form of these equations is similar to Norton law - Rabotnov-Kachanov evolution equation with multipliers represent the influence of periodic loading in each equation. Numerical simulation was performed by use of programming complex for thin shells of revolution creep calculations. It uses the Finite Element Method jointly with finite differences method for time integration. The example of numerical solution of the problem of deformation of heated cylindrical panel made from duralumin alloy and subjected to periodical loading from airstream puffs is presented. The distributions of stress-strain state components were obtained. The numerical results include distribution of normal deflection in the panel after 1000 seconds of flight as well as the von Mises stress relaxation curve. The analysis of obtained data shows the sufficient increasing of normal deflections as well as stress redistributions. The necessity of consideration of current deformed state of the panel in the problem of analysis of airstream flow is discussed.

Key words: aircraft panel, creep, airstream, periodical loading, shell of revolution, Finite Element Method.

Вступ. При польотах літальних апаратів з надзвуковими швидкостями відбувається т.зв. аеродинамічне нагрівання поверхонь їхніх конструктивних елементів [1]. При цьому внаслідок дії підвищених температур та навантажень у матеріалі можуть розвиватись деформації повзучості, які призводять до небезпечного формоутворення, наприклад панелей літального апарату. При їхньому проектуванні оцінювання впливу статичної складової аеродинамічного тиску проводилось в результаті розв'язання задач повзучості пластин у класичній постановці [2].

Реальні умови роботи літального апарату характеризуються спільною дією статичних та періодичних навантажень [3]. Таким чином, повна постановка задачі розрахунку деформованого стану аеродинамічно нагрітої панелі призводить до необхідності врахування деформацій повзучості, які викликані суперпозицією статичних та змінних за часом напружень. У разі швидкого змінювання навантажень з частотами від 1 Гц при коливаннях конструктивного елемента у його матеріалі розвиваються деформації т.зв. динамічної повзучості [4], яка у порівнянні з навантаженням з чисто статичною складовою характеризується значним прискоренням швидкості деформацій та скороченням терміну життя.

Динамічна повзучість панелей літальних апаратів є носить складним процесом, тому на перших етапах його дослідження проводилось експериментально з метою визначення основних якісних та кількісних закономірностей [5-6]. Визначення напружено-деформованого стану та пошкоджуваності при динамічній повзучості панелей літальних апаратів вдалось провести пізніше, з застосуванням методів багатьох масштабів та осереднення на періоді для трансформації вихідної повної системи диференціальних рівнянь [7]. Отриману при цьому початково-крайову задачу було розв'язано чисельно, з застосуванням мето-

дів скінченних елементів та прогнозу-корекції. Розроблений метод розрахунку дозволяв отримувати розв'язки задач динамічної повзучості пластин складної геометрії при дії одно- та полігармонійного навантаження. Проведена верифікація методу та програмних засобів продемонструвала задовільну точність при порівнянні чисельних з експериментальними даними. Наприклад, у монографії [8] наведено результати розрахунків динамічної повзучості панелей зі сплаву OT-4, експериментальні дані для яких описано у роботах [5-6].

Розроблений метод дозволяв виконувати розрахункове оцінювання повзучості тонкостінних елементів при постійному співвідношенні статичної та періодичної складової навантаження з високою частотою, що характерно, наприклад, для врахування вібрацій від двигунів. Між іншим, режими експлуатації літальних апаратів можуть характеризуватись й іншими динамічними впливами, які в умовах аеродинамічного розігріву призведуть до повзучості у конструктивних елементах.

В роботі [9] проведено комплексний аналіз поведінки положистих оболонок при дії трьохвимірною потенційного повітряного потоку, встановлено форму змінювання переміщень за часом при вільних коливаннях при раптовій дії одного повітряного пориву. Такі пориви можуть повторюватись та призводити до періодичного впливу імпульсів напружень, що виникають з малою частотою.

У цій статті надано підхід, що дозволяє проводити оцінювання незворотного деформування розігрітих при надзвукових швидкостях польоту панелей обшивки літальних апаратів від дії напружень, що періодично виникають внаслідок коливань, які обумовлені дією поривів повітряних потоків. Для врахування такої повторної дії навантажень, що можуть призводити до повзучості у матеріалі панелей, як й у роботах [8, 10]

застосовано метод, який базується на перетворенні вихідної системи рівнянь до системи з чисто статичним навантаженням зі спеціальними рівняннями стану. Вони отримуються з застосуванням асимптотичних розвинень та осереднення на періоді [10].

Постановка задачі та метод розв'язання

Як й у роботі [8], для повзучості при періодичному навантаженні розглянемо постановку задачі у масштабі повільного часу. Панель літального апарату розглядається як тонкостінна незамкнута оболонка обертання. Наведемо постановку задачі, виконану з застосуванням основних положень теорії повзучості та теорії оболонок для випадку скінченних прогинів.

У зв'язку з тим, що у розрахунках використовується скінченний елемент конічної оболонки, запишемо відповідні геометричні співвідношення, уточнюючи залежності за рахунок нелінійних додаткових деформацій у серединній поверхні:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij}^l + e_{ij}^n + z\chi_{ij}; \quad e_{11}^l = \frac{\partial u}{\partial s}; \\ e_{22}^l &= \frac{\partial v}{r\partial s} + \frac{u}{r} \cos \alpha + \frac{w}{r} \sin \alpha; \\ e_{12}^l &= \frac{\partial u}{r\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos \alpha; \quad e_{11}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2; \quad (1) \\ e_{22}^n &= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2; \quad e_{12}^n = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right); \\ \chi_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \beta^2} - \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \\ \chi_{12} &= -2 \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \beta} + 2 \frac{\partial w}{r^2 \partial \beta} \cos \alpha - 2 \frac{v}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\sin \alpha}{r}, \end{aligned}$$

де u, v, w – переміщення серединної поверхні оболонки; e^l, e^n, χ – лінійна й нелінійна складові деформації серединної поверхні, змінювання кривизни та крутіння; β та s – координати у серединній поверхні; z – нормальна координата.

Застосуємо варіаційну постановку задачі. Для конічного елемента оболонки основне рівняння, що є еквівалентним статичним рівнянням на будь-якому кроці за часом приймає наступний вигляд:

$$\int_S (b_{ijkl} \varepsilon_{ij}^m \delta \varepsilon_{ij}^m - d_{ijkl} \chi_{ij}^m \delta \chi_{ij}^m) dS - \int_S p \delta w dS - \int_S (N_{ij}^C) \delta \varepsilon_{ij}^m dS + \int_S (M_{ij}^C) \delta \chi_{ij}^m dS = 0, \quad (2)$$

де $\varepsilon_{ij}^m = e_{ij}^l + e_{ij}^n$; p – нормальний тиск; N_{ij}^C, M_{ij}^C – узагальнені силові фактори, які підраховуються за відомими для даного моменту часу деформаціями повзучості; b_{ijkl}, d_{ijkl} – тензори пружних властивостей матеріалу оболонки, S – область, яка зайнята елементом у серединній поверхні.

Зв'язок між компонентами девіатора напружень s_{ij} та деформаціями повзучості c_{ij} конкретизуємо рівняннями стану. Розглянемо випадок дії навантаження $\sigma = \sigma^0 + \sigma^1$ при одночасній дії постійного напруження σ^0 , напруження σ^1 , що змінюється із циклічною часто-

тою $f_1 = 1/T$ за період робочого циклу T . Представляючи напруження σ^1 періодичним рядом Фур'є з коефіцієнтами a_k та b_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma^{\max} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) + b_k \sin \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{\max} \sin \left(\frac{2\pi k}{T} t + \beta_k \right); \end{aligned}$$

$$\sigma^{\max} = \sqrt{(\sigma^{\max} a_k)^2 + (\sigma^{\max} b_k)^2}, \quad \beta_k = \arctg(a_k / b_k)$$

для повного навантаження закон зміни напруження за часом запишемо в такому вигляді:

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^1 = \sigma^0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin \left(\frac{2\pi k}{T} t + \beta_k \right) \right). \quad (3)$$

Надалі, рівняння циклічної повзучості при комбінованому навантаженні приймаємо у вигляді [8]:

$$\dot{c}_{ij} = B g_n \frac{3(\sigma_{ij}^0)^{n-1}}{2(1-\omega)^k} S_{ij}^0; \quad (4)$$

$$\dot{\omega} = D g_r \frac{(\sigma_e^{\omega 0})^r}{(1-\omega)^l}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = 1; \quad (5)$$

$$g_n = \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin(2\pi k \xi + \beta_k) \right)^n d\xi;$$

$$g_r = \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin(2\pi k \xi + \beta_k) \right)^r d\xi,$$

де $M_k = \frac{\sigma_e^{ak}}{\sigma_e^0}$ – коефіцієнти асиметрії циклу напружень; S_{ij}^0 – компоненти девіатора тензора напружень «повільного» руху σ_{ij}^0 .

Для визначення коефіцієнтів M_k , які використовуються в функціях g_n , попередньо обчислюються еквівалентні напруження $\sigma_e^0, \sigma_e^{ak}$.

Сформульована задача розв'язується методом скінченних елементів (МСЕ). Застосовано чотирьохвузловий скінченний елемент тонкої оболонки обертання з сьома ступенями свободи у вузлі. До розрахунків залучено розроблений в НТУ «ХПІ» програмний комплекс для аналізу повзучості оболонкових конструкцій «SCC v 4.8» [8].

Повзучість циліндричної панелі при періодичній дії тиску повітряного потоку.

Розглянемо задачу деформування при періодичній дії повітряного потоку циліндричної панелі (рис. 1), жорстко закріплену з усіх боків. Геометричні розміри оболонки: $\alpha = 4$ м, $\beta = 20^\circ$, $R = 9$ м, $h = 0,002$ м. Оболонка виготовлена з алюмінієвого сплаву D16T та рівномірно нагріта до температури 325°C , фізико-механічні константи при якій дорівнюють: модуль пружності $E = 3,3 \times 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуасону $\nu = 0,3$; константи, що входять до визначального рівняння (4) $B = 2,109 \times 10^{-27}$ (МПа) $^{-n}/\text{с}$, $n = 11,8$. У зв'язку з тим, що розглядається деформування на короткому відрізку часу, який відповідає

польотним умовам, накопичення пошкоджуваності не враховується у розрахунках (приймається $D = 0$).

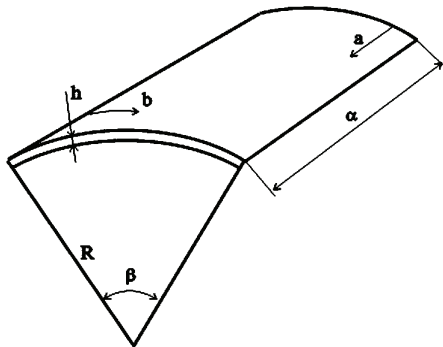


Рисунок 1 – Форма оболонки

Оболонка навантажена сумісною дією статичного навантаження 0,1 МПа та навантаження, що змінюється за формою циклу, наведеного на рис. 2. Її прийнято осередненою, без врахування змінювання напружень при їхньому затуханні. Вважається, що при пориві тиск за 0,2 с доходить до максимального значення у періоді 0,5 МПа, потім за такий ж проміжок часу падає до статичного значення, яке й зберігається протягом 3,6 с.

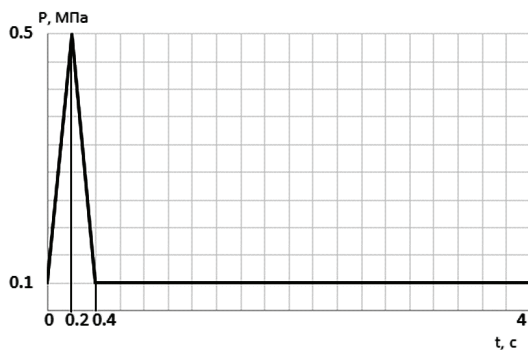


Рисунок 2 – Форма циклу змінювання тиску на оболонку

Після аналізу збіжності даних чисельних розрахунків прийнято скінченноелементну сітку з 200 елементів. Аналізувались режими з та без присутності дії поривів тиску – статичне навантаження тиском 0,1 МПа та періодичне з цим середнім значенням тиску та описаною формою циклу. Розрахунки проведено для часу в 1000 с.

За даними чисельного моделювання встановлено, що при відсутності періодичних поривів тиску повзучість практично не відбувається та зберігається розподіл прогинів, що відповідає пружному деформуванню. Але при врахуванні періодичності дії поривів повітряного потоку має місце повзучість матеріалу оболонки. Результати розрахунків для випадку періодичного навантаження представлено на рис. 3-5.

Форму деформованого стану панелі при $t = 1000$ с у вигляді розподілу нормальних вузлових переміщень представлено на рис. 3, а їхній розподіл за довжиною α у перерізі $\beta = 10^\circ$ – на рис. 4. Максимальне значення прогину має місце у центральному перерізі дорівнює 1,78 мм.

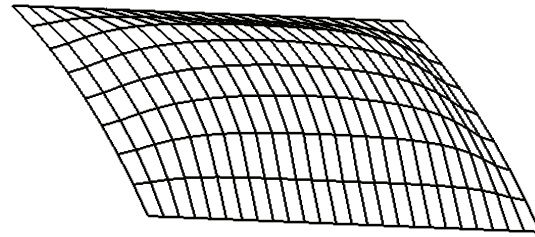


Рисунок 3 – Розподіл нормальних прогинів панелі при $t = 1000$ с

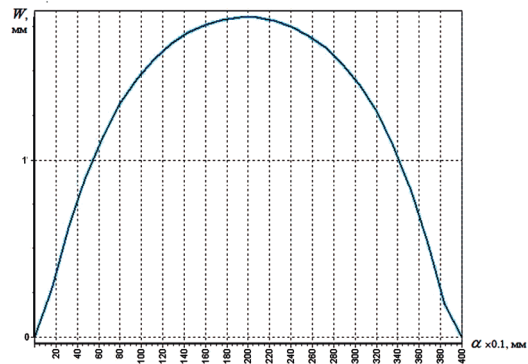


Рисунок 4 – Розподіл нормальних прогинів панелі у перерізі $\beta = 10^\circ$ при $t = 1000$ с

При повзучості матеріалу панелі відбувається істотна релаксація напружень. Як приклад, на рис. 5 наведено графік змінювання у часі максимального значення інтенсивності напружень.

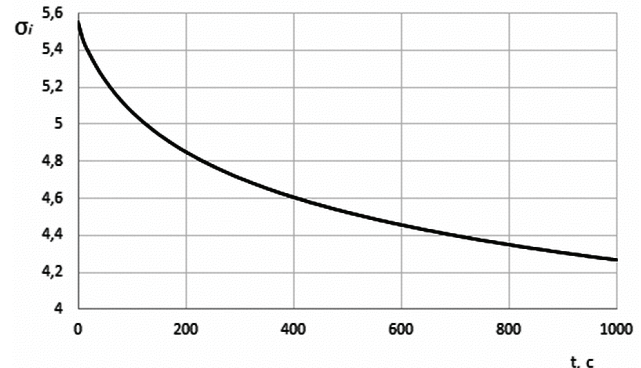


Рисунок 5 – Змінювання у часі максимального значення інтенсивності напружень

Як видно з отриманих результатів, періодичне навантаження панелі тиском від поривів повітряного потоку може призвести до істотних змін у її напружено-деформованому стані.

Висновки. В статті надано підхід до оцінювання напружено-деформованого стану при повзучості тонкостінних оболонок обертання, що навантажені періодичною дією від поривів повітряних потоків. Отриманий розподіл прогинів, що практично дорівнює товщині оболонки, характеризує зміну її поточної форми. Таке змінювання, починаючи з певного моменту, коли їм вже не можливо нехтувати, має бути враховане при розв'язанні аеродинамічної задачі встановлення розподілів тиску при обтіканні оболонки.

Список літератури

1. Бажанов В.Л. Расчет конструкций на тепловые воздействия / В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Сидюков. – М.: Машиностроение, 1969. – 600 с.
2. Миронова А.В. Выпучивание пластинки при неустановившейся ползучести. / А.В. Миронова, И.И. Поспелов // Ученые записки ЦАГИ. – 1981. – Т. 12, № 1. – С. 95-104.
3. Вопросы прочности самолетных конструкций, связанные с нагрузками от струй реактивных двигателей // Экспресс-информация АН СССР. – М.: ВИНТИ, 1957. – Вып. 22-23. – 4 с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
5. Богачев И.Н. Методика оценки механических свойств металлов и сплавов в скоростных воздушных потоках / И.Н. Богачев, Ю.Г. Векслер, В.Г. Сорокин // Физико-химическая механика материалов. – 1970. – № 4. – С. 66-69.
6. Векслер Ю.Г. К динамической ползучести сплава ОТ-4 / Ю.Г. Векслер, А.А. Вайнштейн, В.Г. Сорокин // Проблемы прочности. – 1972. – № 9. – С. 76-79.
7. Бреславський Д.В. Дослідження НДС панелі літака в умовах повзучості при полігармонічному навантаженні / Д.В. Бреславський, В.Н. Бурлаєнко, О.К. Морачковський // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2001. – № 6. – С. 14-17.
8. Бреславський Д.В. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення / Д.В. Бреславський, Ю.М. Коритко, О.А. Татарінова. – Х.: Підручник НТУ «ХП», 2017. – 232 с.
9. Avramov K.V. Dynamic instability of shallow shells in three-dimensional incompressible inviscid potential flow / K.V. Avramov, S.V. Papazov, I.D. Breslavsky // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – № 394. – P. 593-611.
10. Breslavsky D.V. High-temperature creep and long-term strength of structural elements under cyclic loading / D.V. Breslavsky, O.K. Morachkovs'kyi, O.A. Tatarinova // Strength of Materials. – 2008. – Vol. 40, № 5. – P. 531-537.

References (transliterated)

1. Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sidjukov A.M. Raschet konstrukcij na teplovyje vozdejstvija [Calculation of Structures for Thermal Effects]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 600 p.

2. Mironova A.V., Pospelov I.I. Vypuchivanie plastinki pri neustanovivshejsja polzuchesti [Buckling of plate with unsteady creep]. Uchenye zapiski CAGI.

3. Voprosy prochnosti samoletnyh konstrukcij, svjazannye s nagruzkami ot struj reaktivnyh dvigatelej. [Questions of the strength of aircraft structures associated with loads from jets of jet engines]. Ekspres-informacija AN SSSR. Moscow, VINITI Publ., 1957, vol. 22-23, 4 p.

4. Rabotnov Ju.N. Polzuchest' elementov konstrukcij [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p.

5. Bogachev I.N., Veksler Ju.G., Sorokin V.G. Metodika ocenki mehanicheskix svojstv metallov i splavov v skorostnyh vozdušnyh potokah [Method for evaluating the mechanical properties of metals and alloys in high-speed air currents]. Fiziko-himicheskaja mehanika materialov. 1970, vol. 4, pp. 66-69.

6. Veksler Ju.G., Vajnshtejn A.A., Sorokin V.G. K dinamicheskoj polzuchesti splava OT-4 [To the dynamic creep of the OT-4 alloy]. Problemy prochnosti. 1972, vol. 9, pp. 76-79.

7. Breslavskij D.V., Burlaenko V.N., Morachkovskij O.K. Doslidzhennja NDS paneli litaka v umovah povzuchosti pri poligarmonichnomu navantazheni [Investigation of the strain-strain state of the aircraft panel under conditions of creep in a polyharmonic load]. Visnik NTU «HPI». 2001, vol. 6, pp. 14-17.

8. Breslavskij D.V., Koritko Ju.M., Tatarinova O.A. Proektuvannja ta rozrobka skinchennoelementnogo programnogo zabezpečennja [Design and development of finite element software]. Kharkiv, Pidruchnik NTU «HPI» Publ., 2017, 232 p.

9. Avramov K.V., Papazov S.V., Breslavsky I.D. Dynamic instability of shallow shells in three-dimensional incompressible inviscid potential flow. Journal of Sound and Vibration. 2017, vol. 394, pp. 593-611

10. Breslavsky D.V., Morachkovs'kyi O.K., Tatarinova O.A. High-temperature creep and long-term strength of structural elements under cyclic loading. Strength of Materials. 2008, vol. 40, no 5, pp. 531-537.

Надійшла (received) 28.08.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Бреславский Дмитрий Васильевич, Breslavsky Dmytro Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, НТУ «ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

Татарінова Оксана Андріївна (Татаринова Оксана Андреевна, Tatarinova Oksana Andriivna) – кандидат технічних наук, доцент, НТУ «ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com

Коритко Юлія Миколаївна (Корытко Юлия Николаевна, Korytko Julia Nikolaevna) – кандидат технічних наук, доцент, НТУ «ХП»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: juliakorytko@gmail.com

Ю.С. ВОРОБЬЕВ, Р. ЖАНДКОВСКИ, Н.Ю. ОВЧАРОВА, Т.Ю. БЕРЛИЗОВА

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ОХЛАЖДАЕМОЙ ЛОПАТКИ С УЧЕТОМ АКСИАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ОСЕЙ

Исследуется термонапряженное состояние монокристаллической лопатки с вихревой и частично пленочной системами охлаждения. Задача решается в трехмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Известно, что ориентация кристаллографических осей оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений. Когда меняется ориентация кристаллографических осей, происходит перераспределение всех напряжений и изменение всей картины напряженно-деформированного состояния лопатки. Данная работа является продолжением серии работ авторов, в которых рассматривается влияние отклонение азимутальной ориентации кристаллографических осей на термонапряженное состояние монокристаллической охлаждаемой лопатки. Поэтому в данной работе проведено исследование влияния аксиальной ориентации кристаллографических осей, на распределение термоупругих напряжений по объему лопатки. Численные исследования позволили показать изменение максимальных температурных напряжений при повороте кристаллографических осей в плоскости yz вокруг оси x и в плоскости xz вокруг оси y . Из соображений обеспечения прочности лопатки целесообразно ограничить пространственный поворот кристаллографической оси $[001]$ в пределах $12^\circ - 15^\circ$. Эти ограничения аналогичны необходимости обеспечения разброса собственных частот лопатки в пределах $8 - 10\%$. Исследование позволило выявить влияние изменения аксиальной ориентации кристаллографических осей на напряженно-деформированное состояние лопатки. Выполнено обобщение результатов предыдущих исследований на ограничения отклонений кристаллографических осей. Общая картина напряженно-деформированного состояния циклически повторяется при повороте кристаллографических осей на 90° . Места локализации термоупругих напряжений часто совпадают с местами локализации вибрационных напряжений, что создает дополнительную опасность.

Ключевые слова: охлаждаемая лопатка, термоупругие напряжения, кристаллографические оси, аксиальная ориентация, трехмерные модели, метод конечных элементов.

Ю С. ВОРОБІЙОВ, Р. ЖАНДКОВСЬКІ, Н. Ю. ОВЧАРОВА, Т. Ю. БЕРЛІЗОВА

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН МОНОКРИСТАЛІЧНОЇ ОХОЛОДЖУВАНОЇ ЛОПАТКИ З УРАХУВАННЯМ АКСІАЛЬНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ КРИСТАЛОГРАФІЧНИХ ОСЕЙ

Досліджується термопружний стан монокристалічної лопатки з вихровою і частково плівковою системами охолодження. Задача вирішується в тривимірній постановці з використанням методу скінченних елементів. Відомо, що орієнтація кристаллографічних осей істотно впливає на розподіл полів напружень. Коли змінюється орієнтація кристаллографічних осей, відбувається перерозподіл всіх напружень і зміна всієї картини напружено-деформованого стану лопатки. Дана робота є продовженням серії робіт авторів, в яких розглядається вплив відхилення азимутальної орієнтації кристаллографічних осей на термопружний стан монокристалічної охолоджуваної лопатки. Тому в даній роботі проведено дослідження впливу аксиальної орієнтації кристаллографічних осей на розподіл термопружних напружень в об'ємі лопатки. Чисельні дослідження дозволили показати зміну максимальних температурних напружень при повороті кристаллографічних осей в площині yz навколо осі x і в площині xz навколо осі y . З міркувань забезпечення міцності лопатки доцільно обмежити просторовий поворот кристаллографічної осі $[001]$ в межах $12^\circ - 15^\circ$. Ці обмеження аналогічні необхідності забезпечення розкиду власних частот лопатки в межах $8 - 10\%$. Дослідження дозволило виявити вплив зміни аксиальної орієнтації кристаллографічних осей на напружено-деформований стан лопатки. Виконано узагальнення результатів попередніх досліджень на обмеження відхилень кристаллографічних осей. Загальна картина напружено деформованого стану циклічно повторюється при повороті кристаллографічних осей на 90° . Місця локалізації термопружних напружень часто збігаються з місцями локалізації вібраційних напружень, що створює додаткову небезпеку.

Ключові слова: охолоджувана лопатка, термопружні напруження, кристаллографічні осі, аксиальна орієнтація, тривимірні моделі, метод скінченних елементів.

YU. VOROBIEV, R. RZADKOWSKI, N. OVCHAROVA, T. BERLIZOVA

THERMO-STRESSED STATE OF A SINGLE-CRYSTAL COOLED BLADE TAKING INTO ACCOUNT THE AXIAL ORIENTATION OF THE CRYSTALLOGRAPHIC AXES

The thermo-stressed state of a single-crystal blade with vortex and partially film cooling systems is studied. The problem is solved in a three-dimensional formulation using the finite element method. It is known that the orientation of the crystallographic axes exerts a significant influence on the distribution of the stress fields. When the orientation of crystallographic axes changes, the redistribution all of stress is occur and changing the whole picture of stress-strain state of the blade. This work is a continuation of a series of papers by the authors in which the effect of the deviation of the azimuth orientation of the crystallographic axes on the thermo-stressed state of a single-crystal cooled blade is considered. Therefore, in this paper the influence of the axial orientation of the crystallographic axes on the distribution of thermoelastic stresses in the volume of the blade is investigated. Numerical studies have made it possible to show the change in the maximum temperature stresses during the rotation of the crystallographic axes in the yz plane around the x axis

© Ю.С. Воробьев, Р. Жандковски, Н.Ю. Овчарова, Т.Ю. Берлизова, 2018

and in the xz plane around the y axis. For reasons of ensuring the strength of the blade, it is advisable to limit the spatial rotation of the crystallographic axis $[001]$ within $12^\circ - 15^\circ$. These limitations are similar to the need to ensure the spread of the natural frequencies of the blade in the range of 8 to 10%. The study made it possible to reveal the effect of a change in the axial orientation of the crystallographic axes on the stress-strain state of the blade. A generalization of the results of previous studies to the limitations of the deviations of the crystallographic axes is performed. The general picture of a stress-strain state is cyclically repeated when the crystallographic axes are rotated by 90° . Places of localization of thermoelastic stresses often coincide with places of localization of vibration stresses, which creates an additional danger.

Keywords: cooled blade, thermoelastic stresses, crystallographic axes, axial orientation, three-dimensional models, finite element method.

Введение и постановка задачи. Лопатки первых ступеней газотурбинных двигателей (ГТД) работают в условиях высоких температур. Несмотря на использование современных жаропрочных сплавов, необходима система охлаждения, которая существенно усложняет конструкцию лопатки и вызывает концентрацию напряжений. Наибольшее распространение получили монокристаллические жаропрочные сплавы. Лопатки сложной формы изготавливаются с помощью точного литья. Сложный технологический процесс охлаждения литья обеспечивает направленную кристаллизацию материала лопатки. Структура таких сплавов представляет гранецентрированную кубическую решетку [1, 2]. В таких монокристаллах имеется ряд кристаллографических направлений. Обычно выделяют три взаимортогональные кристаллографические оси (КГО) $[001]$, $[010]$, $[100]$. Кристаллографическая ориентация материала лопаток существенно влияет на их механические характеристики. Влиянию ориентации КГО на термоупругие и вибрационные свойства посвящен ряд работ. В большинстве работ рассматриваются лопатки с прямыми охлаждающими каналами, расположенными вдоль продольной оси лопатки. Так в работах [3-5] рассматривается влияние изменения ориентации КГО на термоупругое состояние лопаток, а в работе [6] на их вибрационное состояние. В работе [6] показано влияние ориентации КГО на предел выносливости монокристаллических охлаждаемых лопаток также с прямыми охлаждающими каналами.

Численные исследования. В работах авторов статьи рассматривается монокристаллическая охлаждаемая лопатка, с вихревой системой охлаждения, с

использованием трехмерных моделей и метода конечных элементов. Рис. 1 дает представление о конструкции лопатки, системе охлаждающих каналов, расположении КГО относительно гранецентрированной кубической решетки материала.

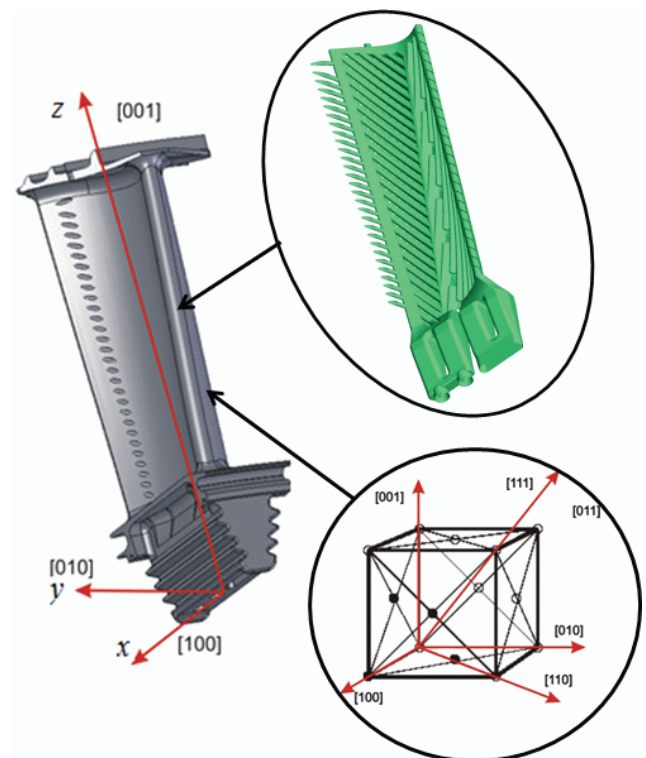


Рисунок 1 – Охлаждаемая лопатка, ее система охлаждения и расположение КГО относительно гранецентрированной кубической решетки материала

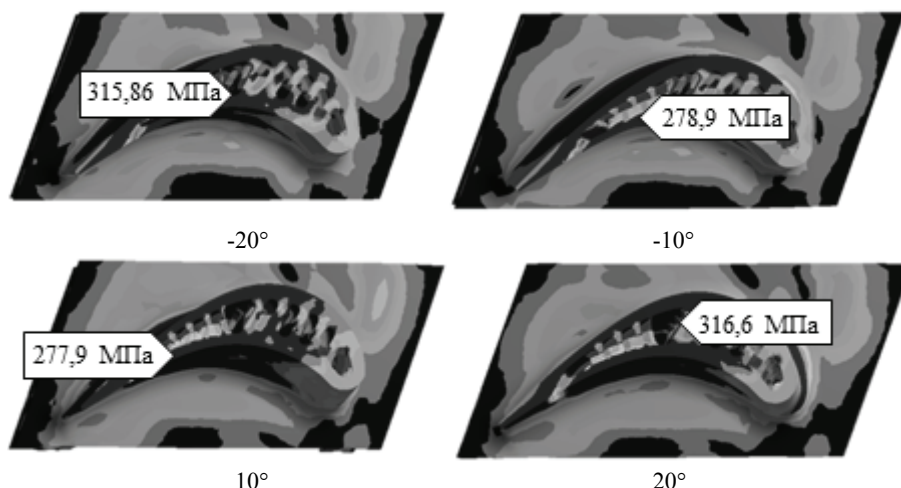


Рисунок 2 – Изменение полей интенсивностей напряжений в поперечных сечениях лопатки при повороте кристаллографических осей на -20° , -10° , 10° , 20° вокруг оси x

Работы [7, 8] посвящены анализу влияния и изменения азимутальной ориентации КГО на термоупругое состояние лопатки и выявления концентрации напряжений. Поэтому в данной работе рассмотрено влияние изменения аксиальной ориентации кристаллографических осей на термонапряженное состояние лопатки.

На рис. 2 приведено изменение распределения термоупругих напряжений в наиболее напряженных поперечных сечениях лопатки при повороте КГО в плоскости yz вокруг оси x .

На рис. 3 показаны зависимости распределения интенсивности напряжений в наиболее напряженных продольных сечениях лопатки при изменении азимутальной ориентации (поворот кристаллографических осей в плоскости xz вокруг оси y , что соответствует кристаллографической оси [010]).

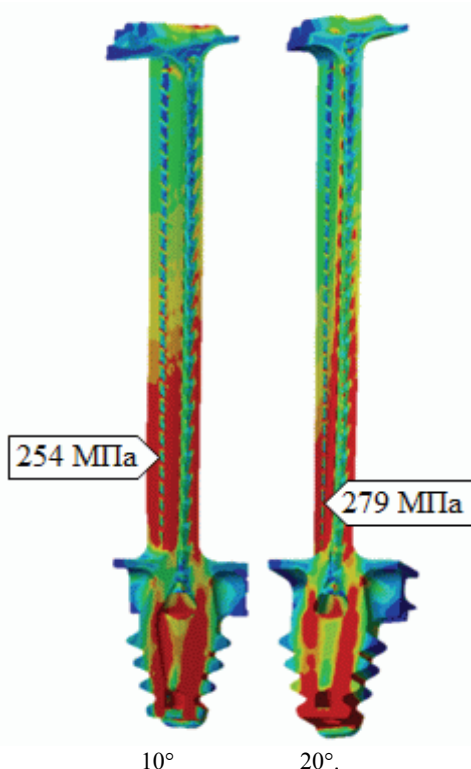


Рисунок 3 – Изменение полей интенсивностей напряжений в продольных сечениях лопатки при повороте кристаллографических осей на 10° , 20° вокруг оси y

На рис. 4 приведены изменения распределения напряжений в продольных сечениях лопатки, но в другой проекции при изменении КГО на углы -10° и 10° относительно оси y .

На основании результатов исследований, часть которых представлена на рис. 2 – 4, можно выявить влияние отклонения кристаллографических осей от азимутальной ориентации.

На рис. 5 представлено изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте КГО вокруг оси x .

На рис. 6 показано влияние максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси y . На графиках видно, что напряженно-деформированное состояние при изменении аксиальной ориентации кристаллографических осей носит периодический характер.

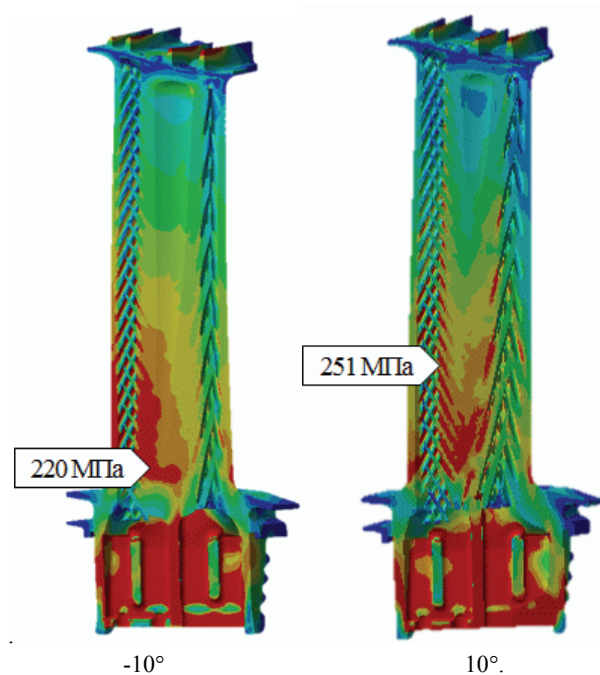


Рисунок 4 – Изменение полей интенсивностей напряжений в продольных сечениях лопатки при повороте кристаллографических осей на -10° , 10° вокруг оси y

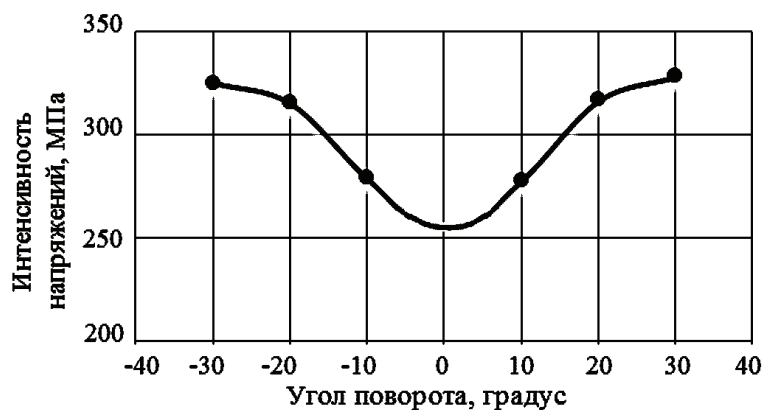


Рисунок 5 – Изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси x

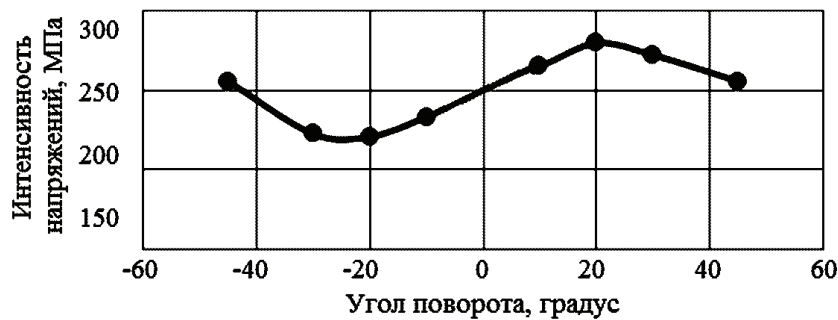


Рисунок 6 – Изменение максимальных интенсивностей напряжений при повороте кристаллографических осей вокруг оси y

Подобные исследования позволяют выявить влияние изменения ориентации кристаллографических осей на напряженно-деформированное состояние лопатки. При повороте кристаллографических осей происходит перераспределение всех напряжений. В лопатках с вихревой системой охлаждения перераспределение напряжений является весьма сложным, так как геометрическая форма каналов меняется от сечения к сечению. На распределение напряженно-деформированного состояния влияют также изменение температурного поля и начальная неоднородность материала. Из соображений обеспечения прочности лопатки [3 - 6] целесообразно ограничить изменение ориентации КГО при изготовлении лопатки, что приведет к ограничению роста максимальных термоупругих напряжений. В работах [7, 8] показано, что изменение азимутальной ориентации КГО определяется условием ограничения на значения изменения угла φ на 12° - 13° (рис. 7).

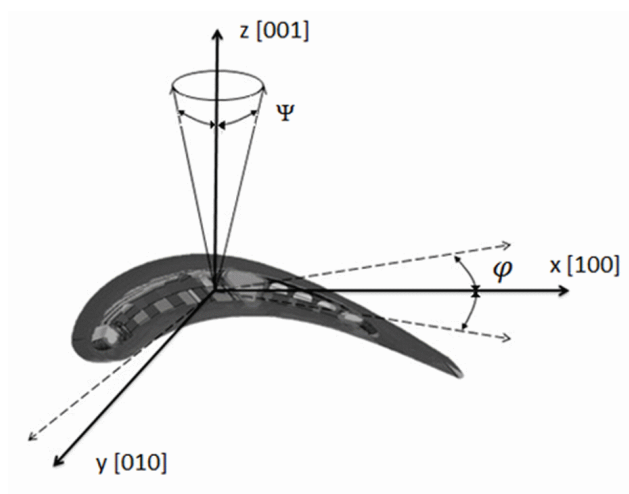


Рисунок 7 – Ограничения поворота кристаллографических осей

Для аксиальной ориентации КГО имеются ограничения на поворот кристаллографической оси [001] на угол ψ , который составляет 12° - 15° . При этом отклонение оси [001] от оси z не должны выходить за пределы конуса с углом ψ (рис. 7).

Аналогичные ограничения на поворот КГО рекомендуются в работах [4, 5] для монокристаллических лопаток с другой конфигурацией охлаждающих каналов. Кроме того, поворот КГО вызывает отклоне-

ние собственных частот лопаток. Чтобы изменения собственных частот лопатки находились в границах допустимого разброса (8 – 10%) необходимы ограничения на отклонения кристаллографических осей [6, 9]. Эти ограничения аналогичны ограничениям на поворот КГО связанным с термоупругими напряжениями.

Выводы. При изменении ориентации кристаллографических осей происходит перераспределение всех напряжений и изменение всей картины НДС лопатки.

Общая картина напряженно деформированное состояние циклически повторяется при повороте кристаллографических осей на 90° (от -45° до $+45^\circ$). При этом максимальные напряжения значительно изменяются. В связи с этим необходимо вводить ограничения на отклонения кристаллографических осей при изготовлении лопатки.

В предыдущих работах [7, 8] выявлено изменение азимутальной ориентации КГО, которое определяется условием ограничения на значения изменения угла φ на 12° - 13° . В данной работе исследовано влияние отклонения аксиальной ориентации кристаллографических осей в охлаждаемой монокристаллической лопатке. Для аксиальной ориентации КГО рекомендуются ограничения на поворот кристаллографической оси [001] на угол ψ , который составляет 12° - 15° . Выполнено обобщение результатов предыдущих исследований на ограничения отклонений кристаллографических осей.

Места локализации термоупругих напряжений часто совпадают с местами локализации вибрационных напряжений [6, 9], что создает дополнительную опасность. Поэтому для оценки прочностной надежности охлаждаемых монокристаллических лопаток необходимо проводить комплексный анализ их динамического напряженного состояния при колебаниях и статического термоупругого состояния.

Список литературы

1. Ножницкий Ю.А. О прочностной надежности монокристаллических рабочих лопаток высокотемпературных турбин перспективных ГТД / Ю.А. Ножницкий, Е.Р. Голубовский // Прочность материалов и ресурс элементов энергооборудования. Тр. ЦКТИ. – СПб, 2009. – Вып. 296. – С. 74–82.
2. Шалин Р.Е. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов / Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов и др. – М.: Машиностроение, 1997 – 336 с.

3. Wolf D.S. Stress analysis of a fist turbin vane using 3-dimantional model with non-linear material behaviour subjected to transient temperatures / D.S. Wolf // AIAA Pap. – 1981 – № 1437. – 5 p.

4. Придорожный Р.П. Расчетное исследование объемного напряженно-деформированного состояния монокристаллической охлаждаемой лопатки турбины / Р.П. Придорожный // Авиационно-космическая техника и технология. – 2002. – Вып. 34. – С. 119-123.

5. Придорожный Р.П. Влияние кристаллографической ориентации на объемное напряженно-деформированное состояние монокристаллической неохлаждаемой лопатки турбины / Р.П. Придорожный, А.В. Шереметьев // Вестник двигателестроения. – 2003. – Вып. 1. – С. 47-51.

6. Придорожный Р.П. Влияние кристаллографической ориентации на спектр собственных колебаний и предел выносливости монокристаллических рабочих лопаток турбин / Р.П. Придорожный, А.В. Шереметьев, А.П. Зиньковский // Проблемы прочности. – 2008. – № 5. – С. 15-27.

7. Воробьев Ю.С. Напряженно деформированное состояние охлаждаемой монокристаллической лопатки ГТД в температурном поле с учетом влияния ориентации кристаллографических осей. / Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова, Р. Жондовски, Т.Ю. Берлизова // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2015. – № 4. – С. 15 - 19. – ISSN 2413-4554.

8. Воробьев Ю.С. Влияние азимутальной ориентации кристаллографических осей на термоупругое состояние лопатки ГТД с вихревой системой охлаждения. / Ю.С. Воробьев, Н.Ю. Овчарова, Р. Жондовски, Т.Ю. Берлизова // Проблемы прочности. – К.: 2016. – № 3. – С. 15-24.

9. Vorobiov Iu.S. Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades / Iu.S. Vorobiov at all / Journal of vibration engineering & technologies. – December 2014. – Vol. 2, No. 6. – P. 537-541.

References (transliterated)

1. Nozhnitskiy YU.A., Golubovski Ye.R O prochnostnoy nadezhnosti monokristallicheskich rabochikh lopatok vysoko-

temperaturnykh turbin perspektivnykh GTD. Prochnost' materialov i resurs elementov energooborudovaniya Tr. TSKTI, Sankt Petersburg: 2009. Vyp. 296. P. 74-82.

2. Shalin R.Ye., Svetlov I.L. at all Monokristally ni-kelevykh zharoprochnykh splavov. Moscow: Mashinostroyeniye, 1997. 336 p.

3. Wolf D. S. Stress analysis of a fist turbin vane using 3-dimantional model with non-linear material behaviour subjected to transient temperatures. AIAA Pap. 1981 No 1437. 5 p.

4. Pridorozhnyy R.P. Raschetnoye issledovaniye ob"yemnogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya monokristallicheskoy okhlazhdayemoy lopatki turbiny. Aviat-sionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya, 2002. Vol. 34. P. 119-123.

5. Pridorozhnyy R.P., Sheremet'yev A.V. Vliyaniye kristallograficheskoy oriyentatsii na ob"yemnoye napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye monokristallicheskoy neokhlazhdayemoy lopatki turbiny. Vestnik dvigatelestroyeniya. 2003. Vol.1. P. 47-51.

6. Pridorozhnyy R.P., Sheremet'yev A.V., Zin'kovskiy A.P. Vliyaniye kristallograficheskoy oriyentatsii na spektr sobstvennykh kolebaniy i predel vynoslivosti monokristallicheskich rabochikh lopatok turbin. Problemy prochnosti. 2008. No 5. P. 15-27.

7. Vorob'yev Yu.S., Ovcharova N.Yu., Zhondkovski R., Berlizova T.Yu. Napryazhenno deformirovannoye sostoyaniye okhlazhdayemoy monokristallicheskoy lopatki GTD v temperaturnom pole s uchetom vliyaniya oriyentatsii kristallograficheskikh osey. Kompessornoye i energeticheskoye mashinostroyeniye. 2015. No 4. P. 15 - 19. ISSN 2413-4554.

8. Vorob'yev Yu.S., Ovcharova N.Yu., Zhondkovski R., Berlizova T.Yu. Vliyaniye azimutal'noy oriyentatsii kristallograficheskikh osey na termouprugoye sostoyaniye lopatki GTD s vikhrevoy sistemoy okhlazhdeniya. Problemy prochnosti. Kyiv: 2016. No 3. P. 15-24.

9. Vorobiov Iu.S. at all Vibration characteristics of cooled single-crystal gas turbine blades. Journal of vibration engineering & technologies. December 2014. Vol. 2, No. 6. P. 537-541.

Почтына (received) 26.09.2018.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Воробієв Юрій Сергійович (Воробьев Юрий Сергеевич, Vorobiov Yuriy) – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу надійності та вібраційної міцності, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Подгорного НАН України, Харків, Україна; e-mail: vorobiev@ipmach.kharkov.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6595-476X>.

Жандковски Ромуальд (Жандковски Ромуальд, Rzadkowski Romuald) – доктор технічних наук, професор, завідувач відділом динаміки та аеропружності, Інститут проточних машин ПАН, м. Гданськ, Польща; e-mail: z3@imp.gda.pl, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0560-1222>.

Овчарова Наталія Юріївна (Овчарова Наталья Юрьевна, Ovcharova Nataliia) – кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник відділу надійності та вібраційної міцності, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Подгорного НАН України, Харків, Україна

Берлізова Тетяна Юріївна (Берлизова Татьяна Юрьевна, Berlizova Tetiana) – кандидат технічних наук, провідний інженер відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Подгорного НАН України, Харків, Україна

В.Ф. ВАСИЛЬЧЕНКО, А.Н. ЛОМАКИН

ИЗМЕРИТЕЛЬ СКОРОСТИ И ДЛИНЫ ЦЕЛЬНОТЯНУТЫХ ТРУБ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Данная работа посвящена разработке бесконтактного измерения скорости и длины цельнотянутых труб,двигающихся неравномерно, на этапе вытяжки и прошивки заготовки, разогретой до температуры около 1200 °С. Для измерений скорости и длины применен радиоволновой метод, потому что из-за особенностей технологического процесса, большой загазованности цеховой атмосферы, большого количества металлической пыли, высоких температур, сильно ограничивается, а в некоторых случаях невозможно, применения контактных, оптических и ультразвуковых методов измерения скорости и длины. Использование передающего модуля частотой 60 ГГц ограничивает влияние приборов друг на друга и уменьшает аппаратную погрешность до уровня половины длины волны, а применение блока аналогового сигнала позволяет программное регулирование усиления и фильтрацию принимаемого сигнала с учетом уровня внешних помех и скорости движения труб. Метод измерения скорости и длины по боковой поверхности уменьшает уровень помех и улучшает точность измерения за счет постоянного расстояния до измеряемого объекта. Модуль согласования сигналов приводит уровни сигналов датчиков начала и конца трубы к уровню ТТЛ с которыми работает аналогово-цифровой преобразователь. Применение АЦП типа USB-6009 позволяет преобразовывать аналоговые сигналы в цифровые с частотой более 20 КГц, что вполне достаточно для измерения скоростей движения на редуцированных станах. Программный комплекс графического программирования LabVIEW автоматизирует процесс вычисления скорости и длины, облегчает визуализацию результатов измерений 10 труб, упрощает перенастройку измерителя на разный сортament труб и позволяет объединить измерители из нескольких станов в единую систему с базой данных изготавливаемой продукцией.

Ключевые слова: скорость, длина, эффект Доплера, LabView, аналоговый сигнал, погрешности измерений, датчики положения, боковая поверхность, обработка сигналов реального времени.

В.Ф. ВАСИЛЬЧЕНКО, О.Н. ЛОМАКИН

ВИМІРЮАЧ ШВИДКОСТІ ТА ДОВЖИИ ЦІЛЬНОТЯГНУТИХ ТРУБ ПО БОКОВІЙ ПОВЕРХНІ

Дана робота присвячена розробці безконтактного вимірювання швидкості і довжини суцільнотягнутих труб, що рухаються нерівномірно, на етапі витяжки та прошивки заготовки, розігрітій до температури близько 1200 °С. Для вимірювань швидкості та довжини застосований радіохвильовий метод, тому що через особливості технологічного процесу, великої загазованності цехової атмосфери, великої кількості металевого пилу, високих температур, сильно обмежується, а в деяких випадках неможливо, застосування контактних, оптичних і ультразвукових методів вимірювання швидкості і довжини. Використання передавального модуля частотою 60 ГГц обмежує вплив приладів один на одного і зменшуються апаратну похибку до рівня половини довжини хвилі, а застосування блоку аналогового сигналу дозволяє програмне регулювання посилення і фільтрацію сигналу з урахуванням рівня зовнішніх перешкод і швидкості руху труб. Метод вимірювання швидкості і довжини по боковій поверхні зменшує рівень перешкод і покращує точність вимірювання за рахунок постійної відстані до вимірюваного об'єкта. Модуль узгодження сигналів призводить рівні сигналів датчиків початку і кінця труби до рівня ТТЛ з якими працює аналогово-цифровий перетворювач. Застосування АЦП типу USB-6009 дозволяє перетворювати аналогові сигнали в цифрові з частотою більше 20 кГц, що цілком достатньо для вимірювання швидкостей руху на редуційних станах. Програмний комплекс графічного програмування LabVIEW автоматизує процес обчислення швидкості і довжини, полегшує візуалізацію результатів вимірювань 10 труб, спрощує перенастроювання вимірювача на різний сортament труб і дозволяє об'єднати вимірювачі з декількох станів в єдину систему з базою даних продукцією, що виготовляється.

Ключові слова: швидкість, довжина, ефект Доплера, LabView, аналоговий сигнал, погрішність вимірювань, датчики положення, бокова поверхня, обробка сигналів реального часу.

V.F. VASILCHENKO, A.N. LOMAKIN

MEASURING THE VELOCITY AND LENGTH OF THE SEAMLESS PIPE AT THE SIDE SURFACES

This work is devoted to the development of contactless measurement of the speed and length of seamless pipes, moving unevenly, at the stage of drawing and flashing the workpiece, heated to a temperature of about 1200 °C. The radio wave method is used to measure the speed and length, because due to the peculiarities of the technological process, the high gas content of the shop atmosphere, a large amount of metal dust, high temperatures, is severely limited, and in some cases it is impossible to use contact, optical and ultrasonic methods for measuring speed and length. The use of the transmitting module with a frequency of 60 GHz limits the influence of the devices on each other and reduces the hardware error to the level of half the wavelength, and the use of an analog signal block allows software gain control and filtering of the received signal, taking into account the level of external noise and the speed of the tubes. The method of measuring speed and length along the side surface reduces the noise level and improves the measurement accuracy due to the constant distance to the object being measured. The signal conditioning module leads the signal levels of the sensors of the beginning and end of the pipe to the level of the TTL with which the analog-to-digital converter operates. The use of the USB-6009 type A / D converter allows you to convert analog signals to digital signals with a frequency of more than 20 KHz, which is quite enough to measure the speeds of movement on reduction mills. The LabVIEW graphical programming software package auto-

mates the process of calculating speed and length, facilitates visualization of measurement results from 10 pipes, simplifies reconfiguration of the meter to a different pipe mix and allows you to combine meters from several mills into a single system with a database of manufactured products.

Keywords: speed, length, Doppler effect, LabView, analog signal, measurement errors, position sensors, side surface, real-time signal processing.

Введение. В основу измерения скорости и длины измерителя заложен эффект Доплера, который заключается в изменении частоты отраженного электромагнитного излучения, если источник излучения и отражатель движутся относительно друг друга. Измеренную доплеровскую частоту легко пересчитать в скорость движения трубы:

$$V = F_{\text{доп}} \frac{\lambda}{2 \cos \alpha},$$

где λ — длина волны Доплеровского измерителя, α — угол между направлением излучения и скорости.

Рассмотрим метод измерения длины трубы. Если

вдоль пути следования трубы имеется фотодатчик, который срабатывает от трубы, то зная время перекрытия датчика $t_{\text{фд}}$, легко высчитать длину трубы

$$L_{\text{тр.}} = V t_{\text{фд}},$$

если труба движется равномерно (рис. 1). Если движение неравномерно, то необходимо знать закон изменения скорости трубы на измерительном интервале (когда перекрыт фотодатчик). В этом случае длина высчитывается интегрированием скорости:

$$L_{\text{ТР}} = \int_{t_n}^{t_k} V(t) dt.$$

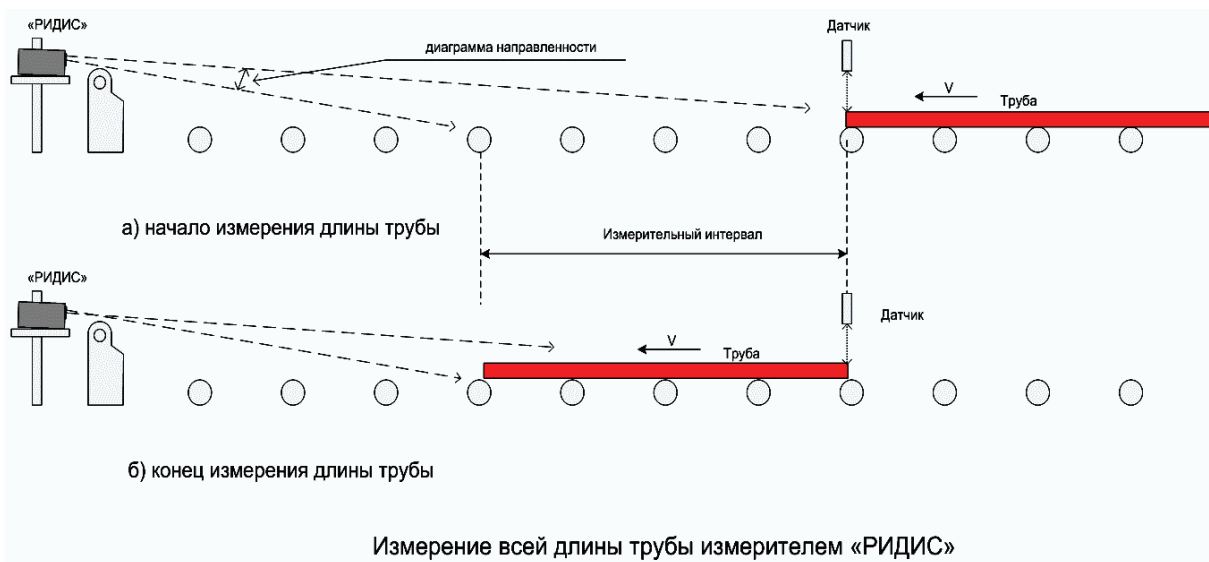


Рисунок 1 – Измерение всей длины трубы

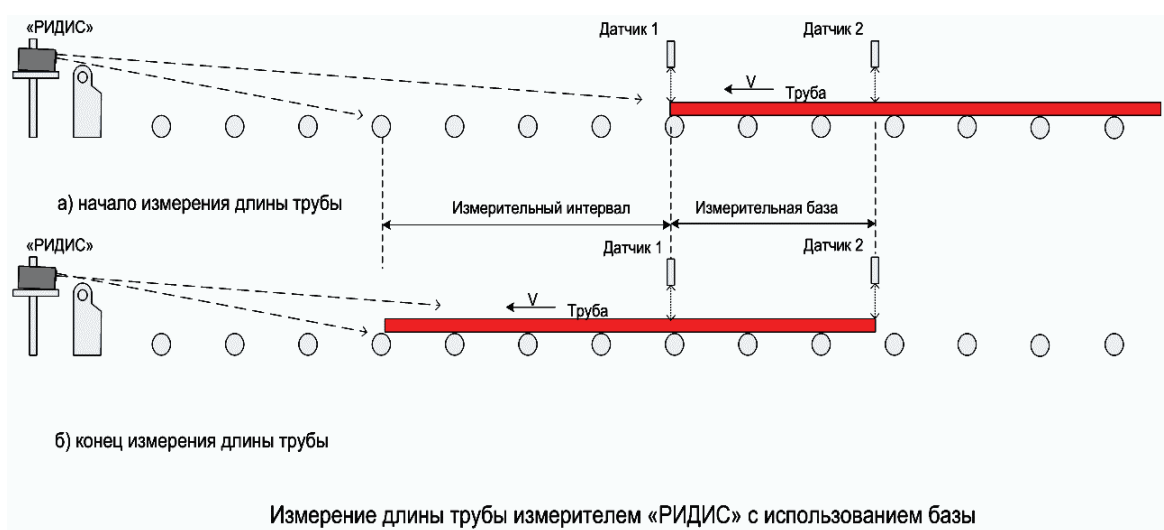


Рисунок 2 – Измерение трубы с использованием базы

Часто конструктивные особенности станов не позволяют производить прямое измерение длины всей трубы. Это когда труба должна пройти в диаграмме

измерителя расстояние равное своей длине. В целях устранения помех от других движущихся объектов (например, от грузов перемещаемых краном, людей и

т.п.), нельзя сильно расширять диаграмму направленности (она имеет форму конуса с углом раскрытия 4,5–6°). Оптимальный измерительный интервал составляет от 3 до 6 метров. А так как максимальная длина труб достигает 12-13 метров и даже больше, поэтому используются дополнительные измерительные базы, которые задаются установкой датчиков положения трубы. Ближний к измерителю датчик дает сигнал начала измерения (по переднему краю трубы), а дальний – конец измерения (по заднему краю).

Скорость движения трубы измеряется относительно измерительного блока (ИБ) и поэтому любая вибрация или дрожание ИБ приводит к погрешностям в измерении скорости движения и длины трубы. Конструкция места установки ИБ предусматривает возмож-

ность регулировки его положения относительно рольганга в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Разработка схемы измерений. Реконструкции редуцирующего стана и существенные изменения характеристик редуцируемых труб позволяет проводить измерение скорости и длины трубы только по боковой поверхности.

Преимущества:

- стабильное расстояние до трубы;
- независимость результатов от толщины стенки;
- допускается колебания объекта измерения;
- универсальная схема построения измерителя;
- дистанционное управление параметрами;
- графическая среда программирования

LabVIEW.

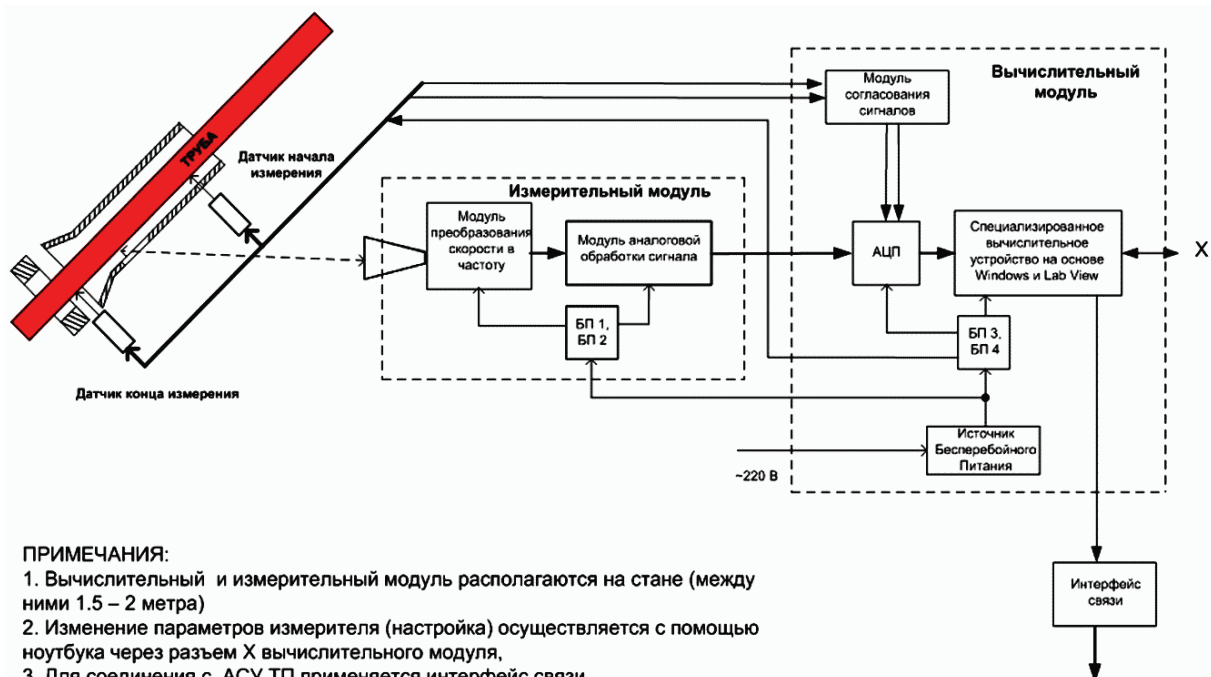


Рисунок 3 – Блок схема измерителя длины по боковой поверхности

В состав измерителя длины входят: измерительный модуль (ИМ), вычислительный модуль (АЦП, модуль согласования, программное обеспечение LabVIEW) и комплект датчиков положения трубы (ДПТ) (тип ВБО-М18-76У... и ФГ24М.2Р). Скорость движения трубы измеряется относительно ИМ и поэтому любая вибрация или дрожание ИМ приводит к погрешностям в измерении скорости движения и длины трубы. Конструкция места установки ИМ предусматривает возможность регулировки его положения относительно рольганга в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Радиоволновой измеритель скорости и длины построен на основе приемопередающего модуля миллиметрового диапазона. В качестве несущего колебания выбрана длина волны 5мм (60 ГГц), которая является не чем иным как линией поглощения атмосферного кислорода. Характерной особенностью этой длины волны является повышенное затухание при распространении. Величина затухания

составляет порядка 12dB/км, что примерно на порядок выше аналогичных характеристик для других частот. Такая повышенная характеристика затухания позволяет существенно уменьшить взаимное влияние приборов как друг на друга, так и не создавать помехи для работы других электронных устройств. Модуль аналоговой обработки сигнала служит для фильтрации и усиления принимаемого сигнала, улучшения соотношения сигнал/шум. Он позволяет программно устанавливать коэффициент усиления сигнала. Вычислительный модуль включает модуль согласования уровней напряжений, поступающих с датчиков начала и конца измерений с TTL уровнями АЦП usb-6009. В измерителях применяются датчики ВБО-М18-76У-9123-С, работающие на «просвет» и размещаются с двух сторон относительно движущейся трубы, или ФГ24М, реагирующие на горячий металл. Датчики ВБО имеют относительно небольшую ширину луча 10-15 мм, но это тоже вклад в общую ошибку измере-

ний. Применение датчиков ФГ24М также не исключает ошибки измерения. Это связано с тем, что такие датчики срабатывают тогда, когда интегральное значение температуры в поле зрения ($2^{\circ}30''$ это ≈ 45 мм/м) превысит порог чувствительности. Интегральное значение зависит от температуры самой трубы и поэтому датчик может срабатывать в различные моменты времени, в зависимости от температуры трубы, что приводит к ошибке порядка нескольких сантиметров. Устранение такой ошибки полностью невозможно, но ее можно существенно уменьшить за счет применения более чувствительных датчиков (300°C) совместно со щелевым экраном. В качестве

интерфейса связи используется промышленный стандарт, применяемый в условиях высокого уровня индустриальных помех RS-485.

Результаты эксперимента. Для обработки аналогового сигнала использовались методы компьютерной обработки на основе программ LabVIEW.

Внешний вид экрана монитора представлен на рис. 4. Программа позволяет измерять длину трубы при различной скорости движения трубы, с разными базами и максимальной длиной. Информация о трубах хранится в файле.

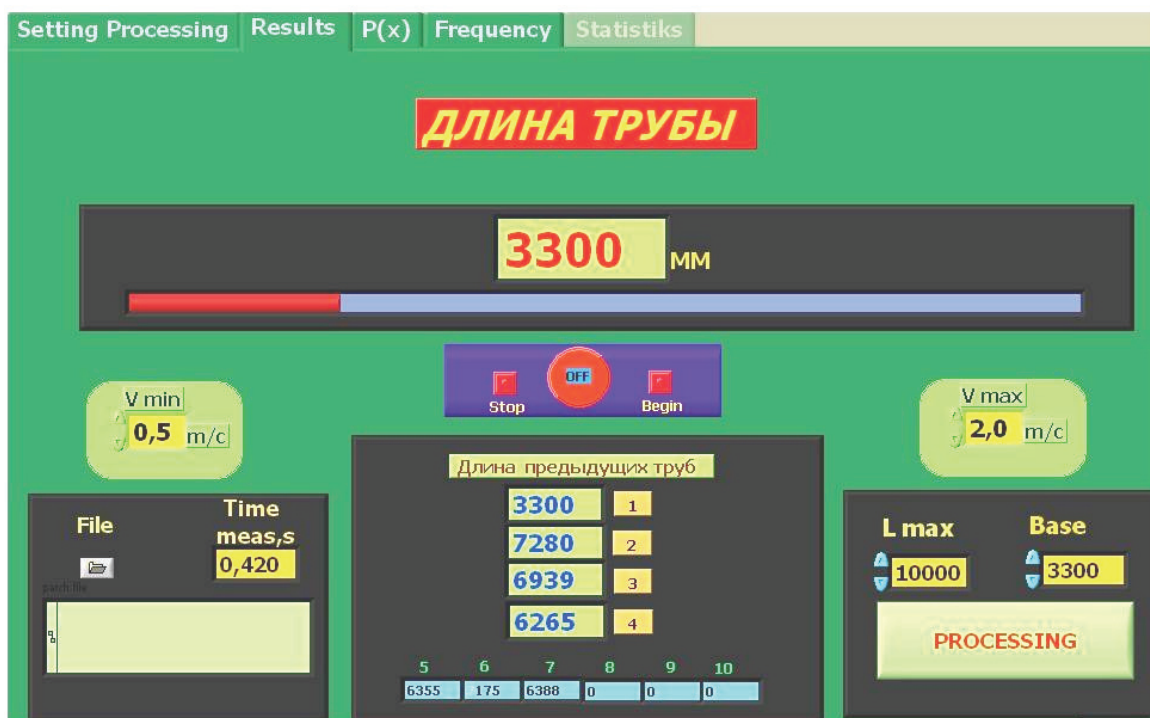


Рисунок 4 – Экран монитора программы на LabVIEW для измерения длины

Анализ ошибок измерений. В ошибку измерения длины трубы входит несколько составляющих, зависящих от метода измерения, характеристик объекта измерения, датчиков фиксации моментов «начало-конец» измерения, метода метрологии. Рассмотрим величины этих ошибок.

1. Ошибка метода измерения, основанного на радиоволновом доплеровском методе, будет составлять 0,1-0,2%. Например, при длине трубы 5000 мм ошибка составляет 5-10 мм (несколько лет эксплуатировался измеритель в ТВЦ-3 с погрешностью 10-20 мм).

2. Ошибки, связанные с объектом измерения. Торцы трубы после редукции, передний торец трубы в меньшей степени, имеют различную форму типа ласточкиного хвоста, размер которого может достигать 100 мм в зависимости от диаметра. Фотодатчики распознать тип хвоста, понятно, не могут, они срабатывают по интегральной характеристике засветки.

3. Фотодатчики имеют конечное время реагирования, и при максимальной скорости редукции трубы может привести к ошибке до 20-30 мм. Кроме того,

факелы, тянущиеся за трубой, вносят свою лепту в ошибку фиксации времени измерения. Таким образом суммарная ошибка фотодатчиков фиксации моментов «начало-конец» измерения, пересчитанная в длину может достигать величины 30-60 мм.

4. Большую роль в оценке точности измерения длины трубы играет метод метрологической поверки. Стандартная методика поверки измерителя длины предполагает наличие поверенных образцов, с помощью которых и проводится поверка. В данном случае, при измерении длины горячей и длинной трубы, может применяться весьма упрощенный метод контроля: собрать все холодные отрезки трубы и провести соответствующие замеры с учетом коэффициентов линейного расширения материала. Это означает, что необходимо регистрировать и температуру в моменты редукции по всей длине трубы. Ошибки, не учитывающий температурный фактор, как показали совместные цеховые эксперименты весьма значительные. Они находятся в линейной зависимости от коэффициента линейного расширения материала, который необхо-

димо с точностью не хуже 0,1%, что для абсолютных измерений весьма существенно. Так для длины трубы 50000 мм величина ошибки определения коэффициента линейного расширения материала составит уже 50 мм.

Подводя итог оценки величины ошибок можно сказать, что ошибки носят случайный характер и правильно их оценивать статистическими величинами, например, среднеквадратическая величина, стандартное отклонение, дисперсия и т.д., которые дают оценку точности для всего диапазона сортамента труб.

Выражение величины ошибки в процентном отношении, характеризует практически абсолютный разброс. Например погрешность измерения 0,1%: так для длины трубы 5000 мм составит величину отклонения 5 мм, для трубы 60 000 мм - 60 мм. А у нас труба сама имеет неопределенность размера +/-50 мм. Сюда добавить ошибки метода измерения, фотодатчиков и получится величина абсолютной ошибки +/- 150 мм, что составит около 6% от 5 000мм. Для длины трубы 60 000 мм эта же абсолютная ошибка будет выражаться величиной 0,5%.

Поэтому мы предложили формулу вычисления ошибки, которая учитывает «постоянную» составляющую ошибок (метод, фотодатчики, неопределенность размера объекта измерения) +/- 150 мм, плюс зависимость результата от длины с коэффициентом 0,005 (0,5%).

Еще раз проанализировав источники ошибок, мы можем снизить «постоянную» ошибку и дополнительный коэффициент, учитывающий длину трубы, с 0,5% до 0,2%. Тогда ошибка для трубы 60 000 мм составит: +/-120 + 120 мм – 0,6%.

Выводы. Эксперименты показали, что, несмотря на достаточно гладкую поверхность реальной трубы, у которой шероховатость меньше $\lambda/8$, отраженный сигнал от поверхности был достаточен для устойчивой работы измерителя в новой конфигурации. Результаты измерений, на наш взгляд, имели несколько великоватый разброс ошибок измерения, что объясняется, во-первых, нехваткой времени на отработку схемы проведения измерений (например, хотелось бы включить два двигателя в зоне измерения, без которых труба на этом участке резко тормозилась, попробовать установку измерителя под разными углами, для определения оптимальной работы с данным измерителем), во-вторых, труба с толщиной стенки 4,5 мм имела по форме концы весьма далекие от идеала. Для постоянной работы по боковой поверхности все эти моменты в дальнейшем будут предусмотрены и ошибка измерения будет сведена к минимуму.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Васильченко Віктор Федорович (Vasilchenko Viktor Fedorovich) – кандидат технічних наук, доцент, Кафедра прикладної математики, НТУ «ХПІ»; тел.: (057) 707-60-32, e-mail: viktor_vasilchenko@i.ua

Ломакін Олександр Миколайович (Lomakin Aleksandr Nikolaevich) – кандидат технічних наук, доцент, кафедра «Динаміка і міцність машин», НТУ «ХПІ»; тел.: (057) 707-68-79, e-mail: anlomakin@i.ua

На наш взгляд, предпочтительно работать по боковой поверхности трубы на выходе редуцированного стана, при этом существует возможность измерять отрезанные куски, заведя в измеритель сигнал, подаваемый на рубку, или начала движения ножниц. В этом случае мы можем определить длины отрубленных концов и одновременно вычислять длину всей трубы после проката без дополнительных ошибок при суммировании отдельных результатов измерения. Кроме того, существует реальная возможность, при условии использования современной аппаратуры для обработки сигналов, работающей в реальном масштабе времени, измерять текущую длину трубы и осуществлять управление рубкой. Эффективный способ улучшения точности – это уменьшение длины волны СВЧ модуля до 2 мм.

Список литературы

1. Коростылев А.А. Теоретические основы радиолокации / А.А. Коростылев, А.Ф. Клюев, Ю.А. Мельник и др. Под ред. В.Е. Дулевича. – М.: Советское радио, 1978.
2. Филькеништейн М.И. Основы радиолокации / М.И. Филькеништейн. – М.: Радио и связь, 1983.
3. Грудев А.П. Технология прокатного производства / А.П. Грудев, Л.Ф. Машкин, М.И. Ханин. – М.: Металлургия, 1994. – 656 с.
4. Данченко В.Н. Технология трубного производства / В.Н. Данченко, А.П. Коликов, Б.А. Романцев, С.В. Самусев. – М., Интернет Инжиниринг, 2002. – 640 с.
5. Трэвис Д. LabVIEW для всех / Д. Трэвис. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 544 с.
6. Евдокимов Ю.К. LabVIEW для инженера: от виртуальной модели до реального прибора. Практическое руководство для работы в программной среде LabVIEW / Ю.К. Евдокимов, В.Р. Линдваль, Г.И. Щербаков. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 400 с.

References (transliterated)

1. Korostylev A.A., Klyuev A.F., Mel'nik Yu.A. i dr. Pod red. Dulevicha V.E. Teoreticheskie osnovy radiolokacii. Moscow: Sovetskoe radio, 1978.
2. Fil'kenshtejn M.I. Osnovy radiolokacii. Moscow: Radio i svyaz', 1983.
3. Grudev A.P., Mashkin L.F., Hanin M.I. Tehnologiya prokatnogo proizvodstva. Moscow: Metallurgiya, 1994. 656 p.
4. Danchenko V.N., Kolikov A.P., Romancev B.A., Samusev S.V. Tehnologiya trubnogo proizvodstva. Moscow: Internet Inzhiniring, 2002. 640 p.
5. Trevis D. LabVIEW dlya vseh. Moscow: DMK Press, 2004. 544 p.
6. Evdokimov Yu.K., Lindval' V.R., Scherbakov G.I. LabVIEW dlya inzhenera: ot virtual'noj modeli do real'nogo pribora. Prakticheskoe rukovodstvo dlya raboty v programnoj srede LabVIEW. Moscow: DMK Press, 2007. 400 p.

Надійшла (received) 30.08.2018

А.О. ЛОВСЬКА

МОДЕЛЮВАННЯ НАВАНТАЖЕНОСТІ КОНТЕЙНЕРА-ЦИСТЕРНИ ПРИ ПЕРЕВЕЗЕННІ У СКЛАДІ КОМБІНОВАНОГО ПОЇЗДА НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ПОРОМІ

В статті проводиться дослідження динамічної навантаженості контейнера-цистерни удосконаленої конструкції при перевезенні на залізничному поромі у складі комбінованого поїзда. Для визначення прискорень, як складової динамічного навантаження, що діє на контейнер-цистерну при коливаннях залізничного порому, складено математичну-модель за методом Лагранжа II роду. До уваги прийняті кутові переміщення залізничного порому відносно повздовжньої осі (крен), як випадку найбільшої навантаженості несучої конструкції вагона-платформи з контейнерами-цистернами, а також забезпечення їх стійкості відносно палуби. Враховано, що вагон-платформа жорстко закріплений відносно палуби, а контейнера-цистерни відносно фітингових упорів та не мають власного ступеня вільності при коливаннях залізничного порому, тобто у коливальному процесі приймає участь тільки наливний вантаж, переміщення якого обмежені стінками котла. Розв'язання математичної моделі здійснено за допомогою метода Рунге-Кутти в середовищі програмного забезпечення MathCad. Визначено максимальне прискорення, яке діє відносно штатного місця контейнера-цистерни при коливаннях залізничного порому. Загальна величина прискорення також враховує горизонтальну складову прискорення вільного падіння, обумовлену кутом крену залізничного порому. Отримані результати враховані при розрахунку на міцність контейнера-цистерни за методом скінчених елементів, реалізованого в середовищі програмного забезпечення CosmosWorks. Встановлено, що максимальні еквівалентні напруження в удосконаленій несучій конструкції контейнера-цистерни не перевищують допустимі. Результати проведених досліджень можуть використовуватися при проектуванні контейнерів-цистерн нового покоління, а також сприятимуть підвищенню ефективності комбінованих перевезень в міжнародному сполученні.

Ключові слова: контейнер-цистерна; несуча конструкція; динаміка; моделювання; міцність; залізнично-поромні перевезення.

А.А. ЛОВСКАЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ КОНТЕЙНЕРА-ЦИСТЕРНЫ ПРИ ПЕРЕВОЗКЕ В СОСТАВЕ КОМБИНИРОВАННОГО ПОЕЗДА НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ПАРОМЕ

В статье проводится исследование динамической нагруженности контейнера-цистерны усовершенствованной конструкции при перевозке на железнодорожном пароме в составе комбинированного поезда. Для определения ускорений, как составляющей динамической нагрузки, которая действует на контейнер-цистерну при колебаниях железнодорожного паромы, составлена математическая модель по методу Лагранжа II рода. Ко вниманию приняты угловые перемещения железнодорожного паромы относительно продольной оси (крен), как случая наибольшей нагруженности несущей конструкции вагона-платформы с контейнерами-цистернами, а также обеспечения их устойчивости относительно палубы. Учтено, что вагон-платформа жестко закреплен относительно палубы, а контейнера-цистерны относительно фитинговых упоров и не имеют собственной степени свободы при колебаниях железнодорожного паромы, то есть в колебательном процессе участвует только наливной груз, перемещения которого ограничены стенками котла. Решение математической модели осуществлено с помощью метода Рунге-Кутты в среде программного обеспечения MathCad. Определено максимальное ускорение, которое действует относительно штатного места контейнера-цистерны при колебаниях железнодорожного паромы. Общая величина ускорения также включает горизонтальную составляющую ускорения свободного падения, обусловленную углом крена железнодорожного паромы. Полученные результаты учтены при расчете на прочность контейнера-цистерны по методу конечных элементов, реализованного в среде программного обеспечения CosmosWorks. Установлено, что максимальные эквивалентные напряжения в усовершенствованной несущей конструкции контейнера-цистерны не превышают допустимые. Результаты проведенных исследований могут использоваться при проектировании контейнеров-цистерн нового поколения, а также будут способствовать повышению эффективности комбинированных перевозок в международном сообщении.

Ключевые слова: контейнер-цистерна; несущая конструкция; динамика; моделирование; прочность; железнодорожно-паромные перевозки.

А.О. LOVSKA

SIMULATION OF LOADS FOR A TANK CONTAINER INCLUDED IN COMBINED TRAINS TRANSPORTED BY TRAIN FERRY

The article deals with the research into dynamic loading of a tank container of improved structure included in a combined train transported by train ferry. In order to define accelerations as a dynamic loading component on the tank container under train ferry vibrations, a mathematical model was built with the method of Lagrange multipliers of the second kind. The research considered angular displacements of the train ferry relative to the longitudinal axle (careen), as the maximum loading of the carrying structure of a flat wagon with tank containers, and also their stability relative to the deck. It was considered that the flat wagon was rigidly fixed relative to the deck, and the tank wagons – relative to the fitting stops and did not have their own degree of freedom under train ferry vibrations, i.e. the only fluid cargo, limited by the tank walls, could vibrate. The mathematical model was solved by the Runge–Kutta

method in the MathCad environment. The maximum acceleration on the normal position of the tank container under train ferry vibrations was defined. The general acceleration value also considered the horizontal component of the free fall acceleration conditioned by the train ferry's angle of heel. The results obtained were considered in the capacity calculation of a tank wagon with the Finite Element Method in the CosmosWorks environment. The calculation showed that the maximum equivalent loads for the improved carrying structure of a tank wagon did not exceed the admissible ones. The results of the research conducted can be applied in designing new generation tank containers; they may also promote higher efficiency of the international combined transportation.

Keywords: tank container; carrying structure; dynamics; simulation; capacity; train ferry transportation.

Вступ. Розвиток конкурентного середовища на ринку залізничних послуг вимагає введення в експлуатацію інтероперабельного рухомого складу для міжнародного сполучення. На сьогоднішній день через територію України проходять три Пан'європейські міжнародних транспортні коридори, які сполучають її з Болгарією, Грузією, Туреччиною, Білоруссю, Польщею та іншими державами, а з 2016 р. ще і з Китаєм транспортним коридором новий «Шовковий шлях», складовою якого є залізнично-поромний маршрут через акваторію Чорного моря.

Одним з найбільш масових та мобільних видів транспортних засобів, що знайшли використання у міжнародному сполученні є контейнери, а також контейнери-цистерни. Інтермодальність контейнерів прогнозує підвищення рівня їх затребуваності при комбінованих перевезеннях.

Для підвищення ефективності перевізного процесу у міжнародному сполученні необхідним є впровадження в експлуатацію контейнерів з покращеними техніко-економічними, експлуатаційними та екологічними характеристиками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Обґрунтування доцільності проектування та впровадження в експлуатацію контейнерів-цистерн, як транспортних засобів наведено в [1]. Розроблено нову оптимізовану конструкцію контейнера-цистерни для перевезення світлих нафтопродуктів.

Особливості випробування металевих та композитних контейнерів під впливом низьких температур наведені у [2]. Визначено, які типи контейнерів доцільно використовувати для перевезення завданої номенклатури вантажів з урахуванням низької температури навколишнього середовища.

Особливості конструкцій та перспективи використання транспортних засобів для рідкого водню розглянуті у [3]. Приведений аналіз конструкції перспективного контейнера-цистерни моделі КЦВ-20/1,2.

Проблеми безпеки та особливості перевезення хімічних наливних вантажів в танк-контейнерах розглянуті у [4].

Особливості розрахунку на міцність танк-контейнера при експлуатаційних режимах навантаження з використанням засобів програмного забезпечення та натурального експерименту наведені у [5].

Особливості створення ідеальних несучих конструкцій залізничних транспортних засобів та вимоги, яким вони повинні відповідати на сучасному етапі розвитку висвітлені у [6].

Дослідження міцності контейнера-цистерни моделі ТК25 та оптимізація його несучої конструкції наведені в [7]. При складанні моделі міцності контейнера-цистерни враховані нормативні величини наван-

тажень, наведені в [8].

Необхідно зазначити, що у розглянутих працях не приділялося уваги питанням дослідження динамічної навантаженості та міцності несучих конструкцій контейнерів-цистерн у складі поїздів комбінованого транспорту при перевезенні залізничним поромом.

Мета статті. Метою досліджень, які наведені в статті є висвітлення особливостей моделювання навантаженості контейнера-цистерни при перевезенні у складі комбінованого поїзда на залізничному поромі.

Викладення основного матеріалу статті. Для підвищення ефективності комбінованих перевезень через міжнародні транспортні коридори запропоновано нову удосконалену конструкцію контейнера-цистерни (рис. 1). Особливістю контейнера-цистерни є те, що несучі елементи каркасу виготовлені з труб круглого перерізу. Це дозволило значно зменшити його масу у порівнянні з контейнером-прототипом [7, 9].

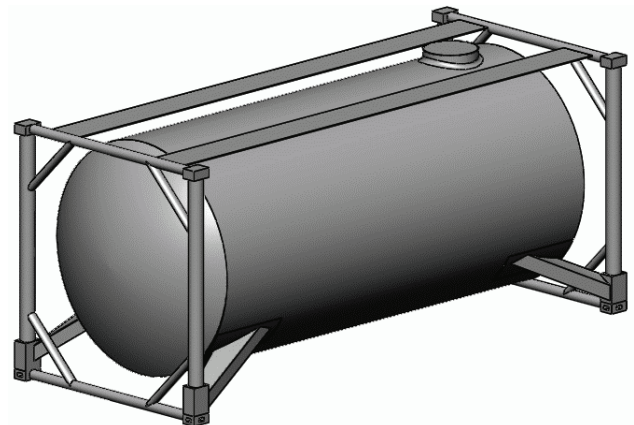


Рисунок 1 – Контейнер-цистерна удосконаленої конструкції

Для визначення динамічних навантажень, які діють на несучу конструкцію контейнера-цистерни у складі комбінованого поїзда при перевезенні на залізничному поромі складено математичну модель (1). До уваги прийняті кутові переміщення вагона-платформи з контейнерами-цистернами навколо повздовжньої осі X на кут θ при коливаннях залізничного порому (еквівалент коливань бічна хитається в «Динаміці вагонів»), як випадку найбільшої навантаженості несучої конструкції вагона-платформи з контейнерами-цистернами, а також забезпечення їх стійкості відносно палуби.

Розрахунки проведені стосовно залізничного порому «Герой Шипки», що рухається акваторією Чорного моря. В якості базової моделі вагона-платформи обрана модель 13-4012.

Ударна дія морських хвиль на корпус залізничного порому з вагонами, розміщеними на його борту до уваги не приймалася. При складанні моделі враховано

трохоїдальний закон руху збурюючої дії [10] (морської хвилі) на залізничний пором з вагонами, розміщеними на його палубах (2) та дисипативну складову, яка виникає при коливаннях залізничного порому в умовах морської хитавиці, а також курсові кути морської хвилі по відношенню до корпусу залізничного порому ($\chi = 0^\circ - 180^\circ$) та вітрове навантаження, що діє на надводну проекцію залізничного порому, вагона-платформи, розміщеного на верхній палубі та контейнерів-цистерн.

На першопочатковому етапі дослідження до уваги прийнятий випадок відсутності переміщень вагона-платформи відносно палуби та контейнерів-цистерн відносно рами вагона-платформи при коливаннях залізничного порому, тобто у коливальному процесі приймає участь тільки наливний вантаж, переміщення якого обмежені стінками котла (рис. 2).

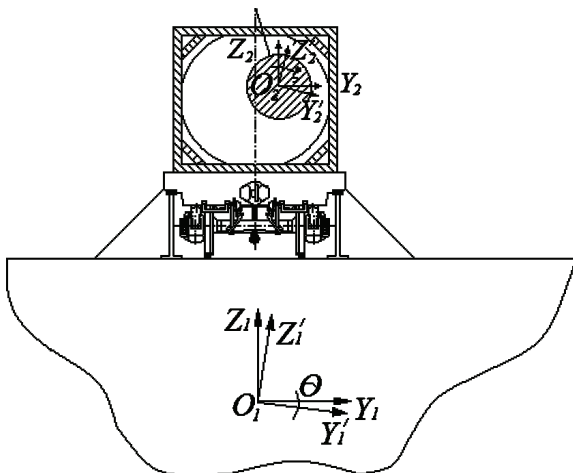


Рисунок 2 – Схема переміщень наливного вантажу в котлі контейнера-цистерни при коливаннях залізничного порому

У якості наливного вантажу прийнятий бензин. Визначення гідродинамічних характеристик наливного вантажу здійснювалося з урахуванням максимально-допустимої завантаженості котла контейнера-цистерни у відповідності з [11]. Рух наливного вантажу описувався сукупністю математичних маятників [12].

Розв'язання математичної моделі здійснено за допомогою метода Рунге-Кутти в середовищі програмного забезпечення MathCad [13, 14].

Результати досліджень дозволили зробити висновок, що максимальні прискорення, які діють на контейнер-цистерну складають близько $0,9 \text{ м/с}^2$ (рис. 3).

Загальна величина прискорення, яке діє на контейнер-цистерну з урахуванням горизонтальної складової прискорення вільного падіння, обумовленої кутом крену залізничного порому, складає близько $2,97 \text{ м/с}^2$ ($0,3g$).

$$\begin{cases} \left(\frac{D}{12 \cdot g} (B^2 + 4z_g^2) \right) \ddot{q}_1 + \left(\Lambda_\theta \cdot \frac{B}{2} \right) \dot{q}_1 = \\ = p' \cdot \frac{h}{2} + \Lambda_\theta \cdot \frac{B}{2} \cdot \dot{F}(t); \\ I_{ij} \cdot \ddot{q}_2 - m_{ij} \cdot c_{ij} \cdot l_{ij} \cdot \ddot{q}_1 + g \cdot m_{ij} \cdot l_{ij} \cdot q_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $q_1 = \theta$ – узагальнена координата, що відповідає кутовому переміщенню залізничного порому відносно поздовжньої осі; $q_2 = \xi$ – узагальнена координата, що відповідає кутовому відхиленню j -го маятника від вертикалі. Початок системи координат розміщений в центрі мас залізничного порому.

для залізничного порому:

D – вагове водовитіснення; B – ширина залізничного порому; h – висота борта залізничного порому; Λ_θ – коефіцієнт опору коливанням; z_g – координата центру ваги залізничного порому; p' – вітрове навантаження; $F(t)$ – закон дії зусилля, яке збурює рух залізничного порому з вагонами, розміщеними на його палубах.

для наливного вантажу:

I_{ij} – момент інерції маятника; m_{ij} – маса j -го маятника у i -му контейнері-цистерні; c_{ij} – відстань від площини $z_i = 0$ до точки закріплення j -го маятника у i -му контейнері-цистерні; l_{ij} – довжина j -го маятника.

$$\begin{aligned} x &= a + R e^{ib} \sin(ka + \omega t), \\ z &= b - R e^{ib} \cos(ka + \omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

де a та b – горизонтальна та вертикальна координати центра траєкторії, за якою обертається частинка, що має на даний час координати x та z ; R – радіус траєкторії, за якою здійснюється оберт частинки; ω – частота морської хвилі; k – частота траєкторії збурюючого зусилля.

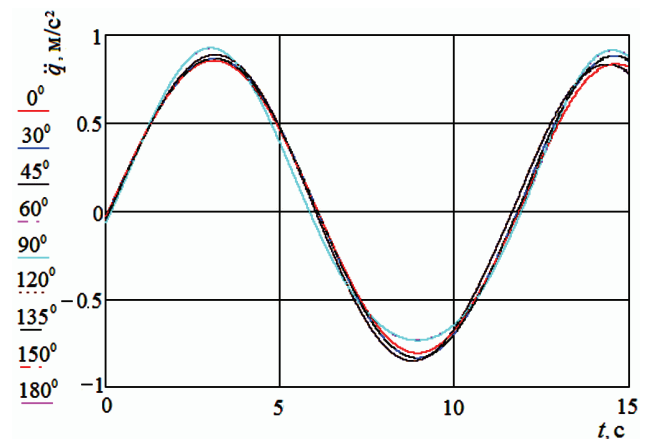


Рисунок 3 – Прискорення, які діють відносно штатного місця розміщення контейнера-цистерни на палубі залізничного порому

Отримана величина прискорення врахована при дослідженні міцності несучої конструкції контейнера-цистерни (рис. 4).

При побудові моделі міцності контейнера-цистерни враховано такі навантаження: вертикальне P_θ , обумовлене вагою бруто контейнера-цистерни, тиск наливного вантажу на котел $P_{вант}$, реакції у зонах опирання фітингів на горизонтальні площини фітингових упорів $P_{он}$, горизонтальні реакції у фітингах P_p на дію динамічного навантаження P_θ .

Для визначення показників міцності контейнера-цистерни застосований метод скінчених елементів. Розрахунок проведений в середовищі програмного забезпечення CosmosWorks.

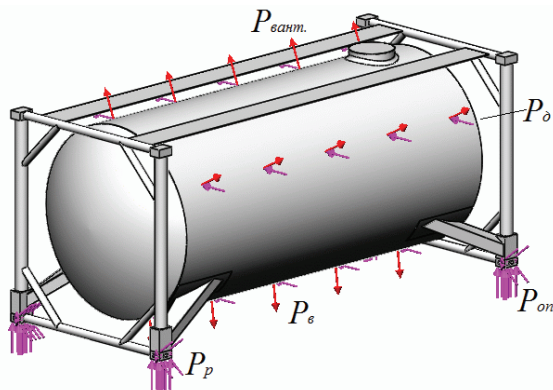


Рисунок 4 – Модель міцності контейнера-цистерни при перевезенні на залізничному поромі у складі комбінованого поїзду

У якості скінчених елементів використані ізопараметричні тетраедри, оптимальна чисельність яких визначена за графоаналітичним методом. Кількість елементів сітки складала 1154094, вузлів – 374473. Максимальний розмір елементу сітки дорівнює 20,0 мм, мінімальний – 4,0 мм, максимальне співвідношення боків елементів – 473,48, відсоток елементів з співвідношенням боків менше трьох – 37,4, більше десяти – 0,704. Мінімальна кількість елементів в колі – 9, співвідношення збільшення розміру елементу – 1,7.

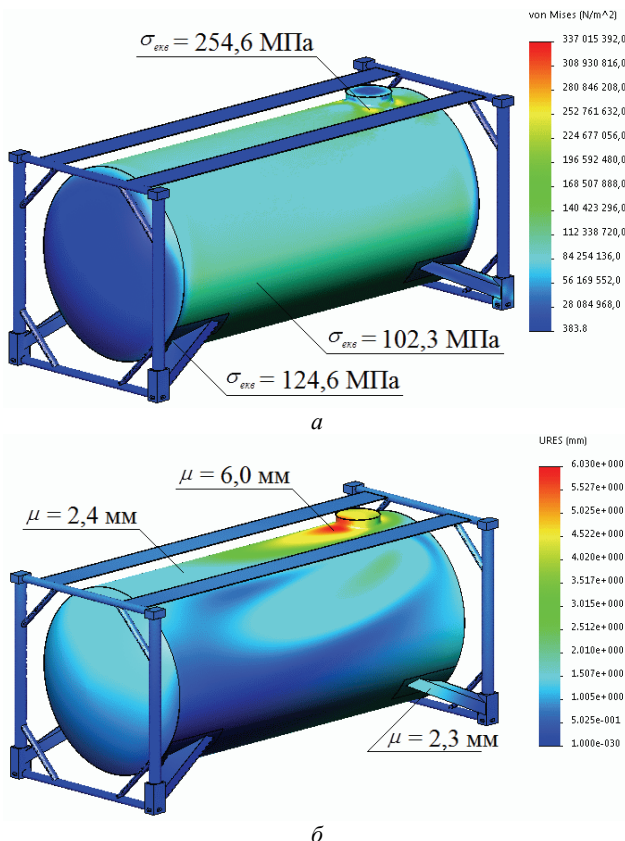


Рисунок 5 – Результати розрахунку на міцність несучої конструкції контейнера-цистерни: а – напружений стан; б – переміщення в вузлах конструкції

Закріплення моделі здійснювалося у зонах обпирання контейнера-цистерни на фітингові упори вагона-

платформи. В якості матеріалу несучої конструкції контейнера-цистерни застосована сталь марки 09Г2С, зі значенням межі міцності $\sigma_B = 490$ МПа та межі плинності $\sigma_T = 345$ МПа [15, 16].

Результати розрахунку наведені на рис. 5. Проведені дослідження дозволили зробити висновок, що максимальні еквівалентні напруження в конструкції контейнера-цистерни викають у зоні розташування завантажувального люка та складають близько 250 МПа, що нижче за напруження плинності матеріалу конструкції майже на 30 %. В зоні взаємодії надбудови для розміщення вертикальної стійки з фітингом максимальні еквівалентні напруження складають близько 140 МПа.

Максимальні переміщення в конструкції контейнера-цистерни також виникають у зоні розташування завантажувального люка та складають 6 мм. У зонах взаємодії опорних елементів котла з підкладними листами максимальні переміщення склали близько 2 мм.

Проведені дослідження дозволяють зробити висновок, що міцність удосконаленої конструкції контейнера-цистерни при перевезенні на залізничному поромі у складі комбінованого поїзда забезпечується.

Наступним етапом дослідження є визначення динамічних навантажень, які діють на контейнер-цистерну з урахуванням наявності власного ступеня вільності відносно рами вагона-платформи при перевезенні на залізничному поромі.

Висновки з дослідження і перспективи, подальший розвиток у даному напрямку.

1. Проведено дослідження динамічної навантаженості несучої конструкції контейнера-цистерни, розміщеного на вагоні-платформі при перевезенні залізничним поромом. Отримано уточнене значення прискорення, яке діє на несучу конструкцію контейнера-цистерни;

2. Визначено максимальні еквівалентні напруження, які діють на несучу конструкцію контейнера-цистерни при перевезенні у складі комбінованого поїзда на залізничному поромі. Встановлено, що міцність контейнера-цистерни при заданій величині динамічного навантаження забезпечується;

3. Проведені дослідження сприятимуть підвищенню ефективності експлуатації комбінованого транспорту через міжнародні транспортні коридори.

Список літератури

1. Мямлин С.В. Перспективные конструкции контейнеров-цистерн для перевозки светлых нефтепродуктов, аммиака и углеводородных газов / С.В. Мямлин, Ю.В. Кебал, С.М. Кондратюк // Залізничний транспорт України. – 2012. – №2. – С. 44-46.
2. Metal and Composite Intermodal Containers in Comparative Cold Tests with Wood Chips / J. Föhr, K. Karttunen, J. Enström [et al.] // Journal of Sustainable Bioenergy Systems. – 2015. – Vol. 05, Iss. 01. – P. 32-39. – doi: 10.4236/jsbs.2015.51003.
3. Черемных О.Я. Создание, совершенствование конструкции, перспектива развития транспортных средств для жидкого водорода / О.Я. Черемных // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – № 3. – С. 1-19. – DOI 10.18698/2308-6033-2017-3-1602
4. Пономаренко М.А. Перевозки химических наливных

грузов в танк-контейнерах: проблемы безопасности и особенности их транспортировки / М.А. Пономаренко, И.А. Рушинов // Транспорт. – 2017. – № 5. – С. 156-160.

5. Makeev S.V. Особенности расчета напряженно-деформированного состояния танка-контейнера с учетом реального нагружения в эксплуатации / С.В. Макеев, П.М. Буленков // Наука – образование – производство: Опыт и перспективы развития : сборник материалов XIV Междунар. науч.-техн. конф., посвященной памяти д-ра техн. наук, проф. Е.Г. Зудова (8–9 февраля 2018 г.): в 2-х т. – Т. 1: Горно-металлургическое производство. Машиностроение и металлообработка. – Нижний Тагил : НТИ (филиал) УрФУ, 2018. – С. 174-184.

6. Fomin O.V. Improvement of upper bundling of side wall of gondola cars of 12-9745 model / O.V. Fomin / Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». – 2015. – No 1. – P.45-48.

7. Ловська А.О. Удосконалення контейнерів-цистерн для перевезення нафтопродуктів шляхом впровадження в їх несучі конструкції круглих труб / А.О. Ловська, О.М. Мельничук, О.В. Фомін // Залізничний транспорт України. – 2015. – № 1. – С. 40-44.

8. Контейнеры для перевозки опасных грузов. Требования по эксплуатационной безопасности. ГОСТ 31232. – [Действителен от 28.03.2005] – Минск: НП РУП «Белорусский государственный институт стандартизации и сертификации (БелГИСС)», 2005. – 6 с.

9. Ловська А.О. Дослідження міцності контейнер-цистерни удосконаленої конструкції при комп'ютерному моделюванні експлуатаційних умов / А.О. Ловська, О.В. Фомін, А.М. Окороків, О.М. Мельничук // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2015. – № 2. – С. 180-188.

10. Луговский В.В. Динамика моря: Избр. вопросы связ. с учением мореходности корабля : Учебник для втузов по специальности «Гидроаэродинамика» / В.В. Луговский. – Л.: Судостроение, 1976. – 199 с.

11. Правила перевозки опасных грузов. К соглашению о международном железнодорожном грузовом сообщении. Том 3 / ОСЖД. 2011. 531 с.

12. Богомаз Г.И. Нагруженность контейнеров-цистерн, расположенных на железнодорожной платформе, при ударах в автостепку / Г.И. Богомаз, Д.Д. Мехов, О.П. Пилипенко, Ю.Г. Черномашенцева // Зб. наук. праць «Динаміка та керування рухом механічних систем» – К.: АНУ, Інститут технічної механіки, 1992. – С. 87-95.

13. Дьяконов В. MATHCAD 8/2000: спец. справ. / В. Дьяконов. – Санкт-Петербург : Питер, 2000. – 592 с.

14. Кирьянов Д.В. Mathcad 13 / Д.В. Кирьянов. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

15. Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колес 1520 мм (несамостоятельных) / М.: ГосНИИВ – ВНИИЖТ, 1996. – 319 с.

16. Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам. ГОСТ 33211-2014. – [Действителен от 22.12.2014] – М.: Стандартинформ, 2016. – 54 с.

References (transliterated)

1. Myamlin S.V., Keбал Yu.V., Kondratyuk S.M. Perspektivnyye konstruksii konteynerov-tsistem dlya perevozki svetlyih nefteproduktov, ammiaka i uglevodorodnyih gazov. Zaliznichnyi transport Ukraini. 2012. No 2. P. 44-46.

2. Metal and Composite Intermodal Containers in Comparative Cold Tests with Wood Chips. J. Föhr, K. Karttunen, J. Enström et al. Journal of Sustainable Bioenergy Systems. 2015. Vol. 05, iss. 01. P. 32-39. doi: 10.4236/jsbs.2015.51003.

3. Cheremnyih O.Ya. Sozdanie, sovershenstvovanie konstruksii, perspektiva razvitiya transportnyh sredstv dlya zhidkogo vodoroda. Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii. 2017. No 3. P. 1-19. DOI 10.18698/2308-6033-2017-3-1602.

4. Ponomarenko M.A., Rusinov I.A. Perevozki himicheskikh nalivnyh грузов v tank-konteynerah: problemy bezopasnosti i osobennosti ih transportirovki. Transport. 2017. No 5. P. 156-160.

5. Makeev S.V., Buylenkov P.M. Osobennosti rascheta napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tanka-konteynera s uchetom realnogo nagruzheniya v ekspluatatsii. Nauka – obrazovanie – proizvodstvo: Opyit i perspektivy razvitiya : sbornik materialov HIV Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati doktora tehnicheskikh nauk, professora E.G. Zudova (8–9 fevralya 2018 g.): in 2 vol. – Vol. 1: Gornometallurgicheskoe proizvodstvo. Mashinostroenie i metallobrabotka. Nizhniy Tagil : NTI (filial) UrFU, 2018. P. 174-184.

6. Fomin, O. Improvement of upper bundling of side wall of gondola cars of 12-9745 model. Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». 2015, No 1. P.45-48.

7. Lovska A.O., Melnichuk O.M., Fomin O.V. Udskonalennya konteyneriv-tsistem dlya perevezennya naftoproduktiv shlyahom vprovadzheniya v yih nesuchi konstruksiyi kruglyh trub. Zaliznichniy transport Ukrayini. 2015. No 1. P. 40-44.

8. Konteynery dlya perevozki opasnyh грузов. Trebovaniya po ekspluatatsionnoy bezopasnosti. GOST 31232. [Deystvitelen ot 28.03.2005] Minsk: NP RUP «Belorusskiy gosudarstvennyi institut standartizatsii i sertifikatsii (BelGISS)», 2005. 6 p.

9. Lovska A.O., Fomin O.V., Okorokov A.M., Melnichuk O.M. Doslidzhennya mitsnosti konteynera-tsistemni udskonalenoyi konstruksiyi pri komp'yuternomu modelyuvanni ekspluatatsiyinih umov. Nauka ta progres transportu. Visnik Dnipropetrovskogo natsionalnogo universitetu zaliznichnogo transportu. 2015. No 2. P. 180-188.

10. Lugovskiy V.V. Dinamika morya: Izbr. voprosyi svyaz. s ucheniem morehodnosti korablya: Uchebnik dlya vtuzov po spetsialnosti «Gidroaerodinamika». Leningrad: Sudostroenie, 1976. 199 p.

11. Pravila perevozok opasnyh грузов. K soglashedeniyu o mezhdunarodnom zheleznodorozhnom грузовом сообщении. Vol. 3 / OSZhD. 2011. 531 p.

12. Bogomaz G.I., Mehov D.D., Pilipchenko O.P., Chernomashentseva Yu.G. Nagruzhenost konteynerov-tsistem, raspolozhennyh na zheleznodorozhnoy platforme, pri udarah v avtostepku. Zb. nauk. prats «Dinamika ta keruvannya ruhom mehanichnih sistem» – Kyiv: ANU, Institut tehnichnoyi mehaniki, 1992. P. 87-95.

13. Dyakonov V. MATHCAD 8/2000: spets. sprav. Sankt-Peterburg : Piter, 2000. 592 p.

14. Kiryanov D.V. Mathcad 13. Sankt-Peterburg: BHV-Peterburg, 2006. 608 p.

15. Normyi dlya rascheta i proektirovaniya vagonov zheleznyh dorog MPS kolei 1520 mm (nesamohodnyh). Moscow: GosNIIV – VNIIZhT, 1996. 319 p.

16. Vagonyi gruzovyye. Trebovaniya k prochnosti i dinamicheskim kachestvam. GOST 33211-2014. – [Deystvitelen ot 22.12.2014] Moscow: Standartinform, 2016. 54 p.

Надійшло (received) 30.07.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ловська Альона Олександрівна (Ловская Алена Александровна, Lovska Alyona Oleksandrivna) – кандидат технічних наук, Український державний університет залізничного транспорту, доцент кафедри вагонів; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: alyonaLovskaya.vagons@gmail.com.

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ДИНАМІЧНИЙ ЕФЕКТ НЕСИМЕТРІЇ СИЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Описано динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної механічної системи з одним ступенем вільності при короткочасному силовому імпульсному навантаженні. Він полягає в тому, що максимальні переміщення системи у напрямі дії прикладеного імпульсу менші, ніж протилежні за напрямом максимальні переміщення розвантаженої системи, при її вільних коливаннях. Показано, що умови прояву ефекту пов'язані не тільки з власними параметрами коливальної системи, а й з тривалістю імпульса. Розглянуто дію двох варіантів силових імпульсів. Перший прямокутний, а другий – у вигляді однієї півхвилі синусоїди.

Ключові слова: динамічний ефект, коливальна система, несиметрична характеристика пружності, силовий імпульс.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

О ДИНАМИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ НЕСИМЕТРИИ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

Описан динамический эффект несимметрии силовой характеристики колебательной механической системы с одной степенью свободы при кратковременном силовом импульсном нагружении. Он состоит в том, что максимальные перемещения системы в направлении действия приложенного импульса меньше, нежели противоположные по направлению максимальные перемещения разгруженной системы, при ее свободных колебаниях. Определены условия, когда имеет место указанное неравенство. Показано, что условия проявления эффекта связаны не только с собственными параметрами колебательной системы, но и с продолжительностью импульса. Рассмотрено действие двух вариантов силовых импульсов. Первый прямоугольный, а второй – в виде одной полу волны синусоиды. Установлено, что высота этих импульсов не входит в условия проявления эффекта. Приведены примеры расчетов. Численные результаты, полученные с применением построенных аналитических решений, подтверждены численным интегрированием дифференциального уравнения движения на компьютере.

Ключевые слова: динамический эффект, колебательная система, несимметричная характеристика упругости, силовый импульс.

V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY

ABOUT THE DYNAMIC EFFECT OF NON-SYMMETRY OF THE POWER CHARACTERISTIC OF AN OSCILLATING SYSTEM UNDER A PULSED

The motion of a nonlinear mechanical system with one degree of freedom under force impulse loading is considered. The elastic characteristic of the system is approximated by segments of two straight lines that have a common point in the equilibrium position with zero displacement. The dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of an oscillating mechanical system is described. It consists in the fact that the maximum displacement of the system in the direction of the applied external pulse is less than the amplitude deviation of the unloaded system in the opposite direction with its free oscillations. Conditions are defined when this inequality holds. To this end, analytical solutions of the differential equations of motion were constructed in the regions of positive (with greater rigidity) and negative (with less rigidity) displacements, and then the solutions were padded. Compact formulas are derived for calculating the maxima of displacements and the time of their attainment. It is shown that the expressions for the maxima can also be derived from the energy relationships, without solving the differential equations of motion. The action of two variants of pulses of finite duration is considered. The first is rectangular, with a constant instantaneous applied force, which also instantly disappears after some time, and the second is sinusoidal - in the form of one half-wave of the sinusoid. It is established that the height of these pulses, that is, the maximum value of the applied force, does not enter into the conditions for the manifestation of the dynamic effect for the adopted kusano linear elasticity characteristic of the system. But the conditions for the manifestation of the dynamic effect are related to the proper parameters of the vibrational system (mass and rigidity), and also depend on the duration of the pulse in time. For relatively long duration of the action of pulses with respect to the period of free oscillations of the oscillator, this effect is not manifested. Numerical examples are given that confirm the adequacy of the derived calculation formulas and illustrate the possibilities of the theory presented. To compare the results, we numerically integrate the differential equation of motion on a computer. It is shown that the results obtained using analytical and numerical solutions of the Cauchy problem are in good agreement, and the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of the oscillating system is manifested for both forms of the pulses considered.

Keywords: The cauchy problem, the analytical and numerical solution, dynamic effect, oscillatory system, asymmetrical elasticity characteristic, power pulse.

Вступ. Інтенсивні короткочасні імпульсні або ударні навантаження можуть бути причиною передчасного руйнування елементів конструкцій. Тому висві-

тленню динаміки елементів конструкцій в умовах вказаних навантажень присвячено багато публікацій, серед яких виділимо [1-4]. В техніці поширені механічні

системи з несиметричною характеристикою пружності. Це системи, де поряд з основним несучим пружним елементом встановлюють додатковий пружний елемент підсилювач або обмежувач руху. Наприклад, у підвісках транспортних засобів такими додатковими елементами можуть бути підресорник або буфер. Про коливальні властивості систем з несиметричною характеристикою пружності йдеться в [5-8] та інших публікаціях. Тут розглядаємо найпростіший варіант силової характеристики, коли вона утворена відрізками двох прямих [6].

Метою статті є становлення умов, за яких проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, коли переміщення системи у напрямі дії імпульсного навантаження менші за протилежні за напрямом переміщення розвантаженої системи.

Основна частина роботи. Рух коливальної системи описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x)]x = P \cdot [H(t) - H(t - \tau)], \quad (1)$$

у якому $c_1 > c_2 > 0$ – характеристики пружності; m – маса системи; $x(t)$ – переміщення системи у часі t ; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$, $H(t - \tau)$ – одиничні функції Хевісайда; τ – тривалість імпульса; крапка над x означає похідну по t .

Вісь ox і сила P спрямовані вертикально вниз.

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Для обчислення додатних переміщень ($x > 0$) використаємо відомі розв'язки задачі (1), (2), надруковані в [7]:

$$x(t) = \begin{cases} x_{CT} (1 - \cos \omega t) & t \leq \tau \\ 2x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2} \sin \omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Тут } x_{CT} = \frac{P}{c_1 + c_2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

Тривалість імпульсу обмежуємо нерівністю $\omega \tau \leq 2\pi$.

Із (3) випливає, що розвантажений осцилятор повертається в положення $x = 0$ при $t = t_*$, причому:

$$t_* = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\tau}{2}.$$

Його швидкість руху в цей момент часу становить:

$$v_0 = \dot{x}(t_*) = -2\omega x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2}. \quad (4)$$

Від'ємні переміщення ($x \leq 0$), при $t > t_*$, описуємо виразом:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_*), \quad (5)$$

$$\text{у якому } \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{m}}.$$

Згідно з (3) максимальне переміщення a_0 системи вниз дорівнює:

$$a_0 = 2x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2} \quad (6)$$

і досягається воно при:

$$t = t_0 = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\tau}{2}.$$

Ці залежності мають чинність при $\tau < \frac{\pi}{\omega}$. Якщо $\tau \geq \frac{\pi}{\omega}$, то $a_0 = 2x_{CT}$ і $t_0 = \frac{\pi}{\omega}$.

На підставі виразів (4) і (5) амплітудне відхилення a_1 системи вгору становить:

$$a_1 = -\frac{v_0}{\omega_1} = 2x_{CT} \frac{\omega}{\omega_1} \sin \frac{\omega \tau}{2}. \quad (7)$$

Воно досягається при:

$$t = t_1 = t_* + \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_1} + \tau \right).$$

Враховуючи (6) і (7), для тривалостей імпульсу $\tau < \frac{\pi}{\omega}$, одержуємо співвідношення:

$$a_1 = \frac{\omega}{\omega_1} a_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}} a_0, \quad (8)$$

із якого видно, що $a_1 > a_0$, тобто проявляється вказаний ефект.

Залежність (8) можна одержати і не розв'язуючи диференціальних рівнянь руху. Для цього варто прирівняти потенціальні енергії системи у крайньому нижньому і крайньому верхньому положеннях. Це призводить до рівняння:

$$\frac{1}{2} (c_1 + c_2) a_0^2 = \frac{1}{2} (c_1 - c_2) a_1^2,$$

з якого випливає формула (8).

Динамічний ефект буде проявлятися і для тривалостей імпульсу $\tau > \frac{\pi}{\omega}$. Щоб знайти граничну тривалість імпульсу $t = t_*$, при якій ефект зникає, використаємо залежність:

$$2x_{CT} \frac{\omega}{\omega_1} \sin \frac{\omega \tau_*}{2} = 2x_{CT}.$$

Звідки отримуємо:

$$\tau_* = \frac{2}{\omega} \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}} \right).$$

Отже, динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється лише для тих тривалостей імпульса, що попадають в проміжок $\tau \in (0; \tau_*)$. Значення τ_* не залежить від величини сили P (висоти прямокутного імпульсу), що є наслідком кусково лінійної характеристики пружності.

Розглянемо *приклад*. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1$ кг; $c_1 = 150$ Н/м; $c_2 = 75$ Н/м; $P = 3$ Н і різні значення τ . Вказаним числовим даним відповідає: $\omega = 15$ с⁻¹; $\omega_1 \approx 8,66025$ с⁻¹; $x_{CT} \approx 0,013333$ м; $\tau_* \approx 0,33682$ с. Одержані числовим інтегруванням на комп'ютері рівняння (1), для трьох значень τ , графіки $x(t)$ нанесені на рис. 1.

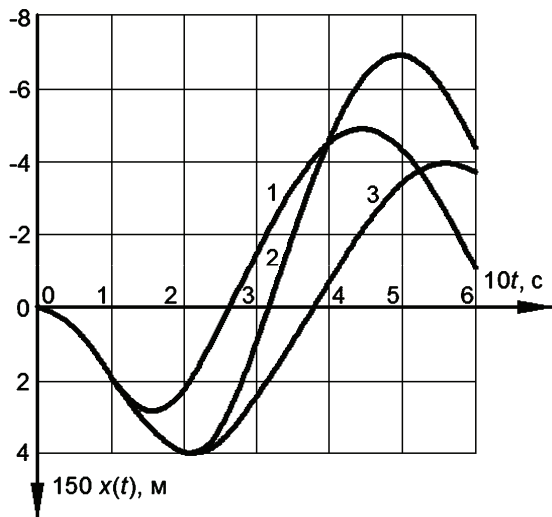


Рисунок 1 – Графіки переміщень осцилятора:
1 – $\tau = 0,10472$ с; 2 – $\tau = 0,20944$ с; 3 – $\tau = 0,33682$ с

Їх можна також побудувати за допомогою аналітичних розв'язків (3) і (5). На графіках, позначених цифрами 1 і 2, амплітудні переміщення системи вгору більші, ніж амплітудні переміщення системи вниз, куди був спрямований силовий імпульс. На графіку, позначеному цифрою 3, амплітудні переміщення вниз і вгору однакові.

На рис. 2 подано графіки $x(t)$, одержані числовим інтегруванням рівняння (1) для двох інших значень τ .

На рис. 2 видно, що динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється при $\tau = 0,3$ с, а при $\tau = 0,38$ с він відсутній. У другому випадку $a_1 < a_0$. Комп'ютерне інтегрування підтвердило висновки із аналітичного розв'язку задачі руху.

Щоб переконатися, що динамічний ефект несиметрії може проявлятися і для інших форм силових імпульсів, розглянемо рух системи, що описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x)]x = P \sin(\lambda t) \cdot \left[H(t) - H\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right], \quad (9)$$

при початкових умовах (2).

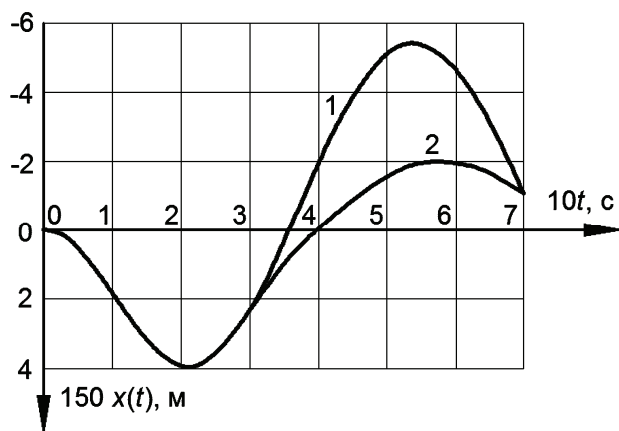


Рисунок 2 – Графіки коливань: 1 – $\tau = 0,3$ с; 2 – $\tau = 0,38$ с

У рівнянні (9) параметр $\lambda \geq \omega$. Він характеризує тривалість імпульсу у вигляді однієї півхвилі синусої-

ди.

В області додатних $x(t)$ переміщення описується виразом:

$$x(t) = \frac{P\lambda}{m\omega(\lambda^2 - \omega^2)} \begin{cases} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\lambda} \sin(\lambda t) & t \leq \frac{\pi}{\lambda} \\ \sin(\omega t) + \sin\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) & t \geq \frac{\pi}{\lambda} \end{cases} \quad (10)$$

Він має чинність, коли $\lambda > \omega$. Якщо $\lambda = \omega$, то розкривши невизначеність в (10), отримуємо:

$$x(t) = \frac{x_{CT}}{2} \begin{cases} \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) & \text{при } t \leq \pi/\omega \\ -\pi \cos(\omega t) & \text{при } t \geq \pi/\omega \end{cases}$$

Похідна від (10) при $t \geq \frac{\pi}{\lambda}$ дорівнює:

$$\dot{x}(t) = \frac{P\lambda}{m(\lambda^2 - \omega^2)} \left[\cos\omega t + \cos\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right].$$

Осцилятор зупиняється, коли:

$$\cos\omega t + \cos\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо час зупинки:

$$t = t_3 = \frac{1}{\omega} \left(\pi - \arctg \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi\omega}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\lambda}\right)} \right). \quad (11)$$

Максимальне відхилення системи вниз в цей момент часу становить:

$$a_0 = \frac{P\lambda}{m\omega(\lambda^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t_3) + \sin\omega\left(t_3 - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right]. \quad (12)$$

Відповідне йому амплітудне відхилення вгору a_1 легко знайти по формулі (8). Воно буде більше, ніж a_0 і досягається при

$$t = t_1 = t_3 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega_1} \right),$$

де t_3 подається виразом (11).

У випадку, коли $\lambda = \omega$, амплітудне відхилення вниз досягається при $\omega t_3 = \pi$ і дорівнює $a_0 = \pi x_{CT}/2$. Для нього по формулі (8) теж маємо $a_1 > a_0$.

Отже, при $\lambda \geq \omega$, динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється і при дії синусоїдального імпульсу.

Приклад. Обчислимо амплітуди a_0 і a_1 при $\lambda = \frac{4}{3}\omega$, зберігаючи попередні значення m, c_1, c_2 і P .

Для прийнятих числових даних $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$. Розвантажений осцилятор, згідно з (11), зробить першу зупинку при $t_3 \approx 0,18326$ с. При цьому він відхилиться вниз від положення $x = 0$ на $a_0 = 0,01749$ м, обчислене по формулі (12). Відхилення вгору становитиме $a_1 = 0,03030$ м при $t_1 = 0,46936$ с. Воно значно більше за a_0 .

З метою порівняння результатів, проведено числове інтегрування рівняння (9) при початкових умовах (2). Одержаний графік $x(t)$ при $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$ позначено цифрою 1 на рис. 3.

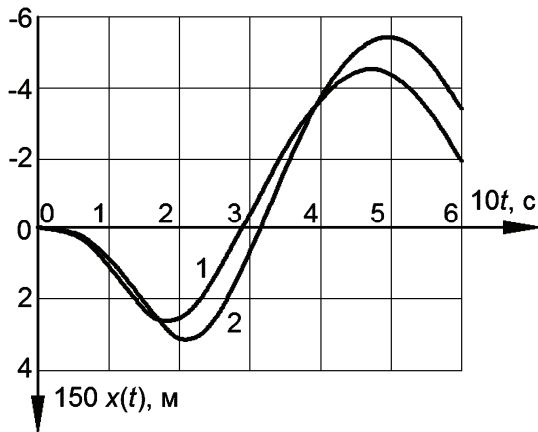


Рисунок 3 – Графік $x(t)$: 1 – $\lambda = 20 \text{ c}^{-1}$; 2 – $\lambda = 15 \text{ c}^{-1}$

Там же цифрою 2 позначено графік $x(t)$, який дає інтегрування при $\lambda = \omega = 15 \text{ c}^{-1}$. У другому випадку маємо більші значення амплітуд переміщень. Результати розрахунку a_0 і a_1 з використанням аналітичних розв'язків цілком узгоджуються з результатами комп'ютерного інтегрування рівняння руху.

Висновки. Дослідження підтвердило, що при короткочасному імпульсному навантаженні системи з несиметричною характеристикою пружності максимальні переміщення системи у напрямі дії імпульсу можуть бути менші за максимальні переміщення у протилежному напрямі. У випадку кусково лінійної силової характеристики цей ефект пов'язаний з тривалістю дії (шириною) імпульсу і не пов'язаний з формою і висотою імпульсу.

Список літератури

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин. – К.: Наукова думка, 1978. – 183 с.
3. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования

элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воронай, А.С. Шарапата. – Х.: ХНАДУ, 2004. – 392 с.

4. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: Миськдрук, 2012. – 320 с.

5. Прочность, устойчивость, колебания : справочник в 3-х тт. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера, Я.В. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

6. Вибрации в технике : справочник в 6-и томах Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.

7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

8. Аврамов К.В. Модели нелинейной механики в прикладных задачах энергетического машиностроения / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин, Ю.А. Ищук и др. – Х.: НТУ «ХПИ», 2006. – 142 с.

References (transliterated)

1. Filippov A.P. Oscillations of deformable systems. Moscow: Mechanical Engineering, 1970. 734 p.

2. Filippov A.P., Kohmanuk S.S., Yanutin E. G. Deformation of structural elements under impact and impulse loads. Kyiv: Naukova Dumka, 1978. 183 p.

3. Yanyutin E.G., Yanchevskii I.V., Voropai A.V., Shara-pata A.S. Problems of impulse deformation of structural elements. Kharkiv: HNADU, 2004. 392 p.

4. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V., Tishchenko L.M. Oscillations of rods and plates during a mechanical shock. Kharkiv: Miskdruk, 2012. 320 p.

5. Strength, stability, oscillations : a handbook in 3 vol. Vol. 3. Ed. I.A. Birger, Y.V. Panovko. Moscow: Machine Building, 1968. 568 p.

6. Vibrations in technology : a handbook in 6 volumes. Vol. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems. Moscow: Mechanical Engineering, 1972. 351 p.

7. Panovko Ya.G. Fundamentals of the Applied Theory of Oscillations and Shocks. Leningrad: Mechanical Engineering, 1976. 320 p.

8. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V., Ischuk Yu.A. and others. Models of nonlinear mechanics in applied problems of power engineering. Kharkiv: NTU «KhPI», 2006. 142 p.

Надійшла (received) 17.04.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ДИНАМІКА ОСЦИЛЯТОРА З ЖОРСТКОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ПРУЖНОСТІ ПРИ ДІЇ СИЛОВОГО ІМПУЛЬСА

Розглянуто рух осцилятора з показником нелінійності $3/2$ при дії ступінчастого та прямокутного імпульсів. Побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку, де для розрахунку переміщень задіяно періодичні Атеб-функції та еліптичний косинус Якобі. Встановлено, що при навантаженні осцилятора миттєво прикладеною сталою силою коефіцієнт динамічності дорівнює $(2,5)^{2/3}$. При дії на осцилятор прямокутного силового імпульсу коефіцієнт динамічності залежить від тривалості імпульсу, але не перевершує $(2,5)^{2/3}$. Визначено такі тривалості, за яких розвантажений осцилятор має найбільшу та найменшу амплітуди коливань. Для спрощення розрахунків, з використанням одержаних розв'язків задачі Коші, складено таблиці, задіяних спеціальних функцій. Наведено приклади розрахунків, які підтверджують вірогідність виведених формул.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, жорстка характеристика пружності, імпульсне навантаження, коефіцієнт динамічності, періодичні Атеб-функції, еліптичний косинус.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

ДИНАМИКА ОСЦИЛЛЯТОРА С ЖЕСТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛОВОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрено движение осциллятора с показателем нелинейности $3/2$ при действии ступенчатого и прямоугольного импульсов. Построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, где для расчета перемещений задействованы периодические Атеб-функции и эллиптический косинус Якоби. Установлено, что при нагружении осциллятора мгновенно приложенной постоянной силой коэффициент динамичности равен $(2,5)^{2/3}$. При воздействии на осциллятор прямоугольного силового импульса коэффициент динамичности зависит от продолжительности импульса и не превышает $(2,5)^{2/3}$. Определены такие продолжительности, при которых разгруженный осциллятор имеет наибольшую и наименьшую амплитуды колебаний. Для упрощения расчетов, с применением полученных решений задачи Коши, составлены таблицы задействованных специальных функций. Приведены примеры расчетов, которые подтверждают достоверность выведенных формул.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, жесткая характеристика упругости, импульсное нагружение, коэффициент динамичности, периодические Атеб-функции, эллиптический косинус.

V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY

DYNAMICS OF AN OSCILLATOR WITH A RIGID CHARACTERISTIC OF ELASTICITY UNDER THE ACTION OF A POWER PULSE

The motion of the oscillator with a non-linearity of the restoring force equal to $3/2$ is considered under the action of a stepped (instantaneously applied constant force) and a rectangular pulse of finite duration of action. An analytic solution of a second-order nonlinear differential equation is constructed, where periodic Ateb-functions and Jacobi elliptic cosine are used to calculate the displacements. The two forms of the analytical solution obtained are equivalent and establish a connection between the used Ateb and elliptic functions. Unlike well-known works devoted to free and forced harmonic oscillations, the oscillator motion caused by impulse dynamic loading is considered here. The aim of the paper is to construct compact formulas for calculating the displacements of a nonlinear system with a rigid elastic characteristic under its nonstationary oscillations. To achieve this goal, integral representations of the above special functions are used, with the subsequent application of their tables. In addition to the known tables of Jacobi functions, it is also suggested to use the tables of Ateb-functions compiled in the work. The dynamic factor of the system is determined. It is established that when the oscillator is loaded instantly with a constant force, the dynamic coefficient is equal to $(2,5)^{2/3} < 2$, which is characteristic of systems with a rigid characteristic of elasticity. It is smaller than for linear systems. When the rectangular force pulse is applied to the oscillator, the dynamic coefficient depends on the pulse duration and does not exceed $(2,5)^{2/3}$. As a result of the study, such lengths of the rectangular pulse are determined, at which the unloaded oscillator has the largest or smallest, equal to zero, amplitudes of the oscillations. In this case, the unloaded oscillator stops moving, that is, it goes into a state of rest. The conditions for achieving extreme amplitudes depend not only on the duration (width), but also on the height of the rectangular pulse, which is characteristic of nonlinear systems. To simplify the calculations, using the constructed analytic solutions of the Cauchy problem, tables of involved special functions are compiled. Examples of calculations are given that confirm the reliability of the derived formulas and illustrate the possibilities of the theory presented. Conclusions in the work are the result of theoretical analysis and calculations.

Keywords: nonlinear oscillator, rigid elasticity characteristic, impulse loading, dynamic coefficient, periodic Ateb-functions, elliptic cosine, integral representations, tables of special functions.

Вступ. Нелінійні механічні коливання з великими амплітудами можуть спричинити передчасне руйнування елементів конструкцій або суттєво скоротити їх робочий ресурс. Тому дослідження закономірностей таких коливань і розробка методів їх гасіння відносяться до актуальних науково-прикладних задач. Незважаючи на значні досягнення в цій галузі механіки [1], щорічно виходить з друку чимало нових наукових статей. Не аналізуючи їх змісту, відзначимо лише монографічні видання [2-5], в яких викладено методи досліджень, існуючі математичні моделі та проаналізовано одержані результати. Звертаємо увагу також на огляд [6], де йдеться про нелінійні коливання систем змінної маси. Такі системи, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. Враховуючи, що у відомих публікаціях, в основному вивчали вільні та вимушені періодичні коливання, на відміну від них, тут розглядаємо рух осцилятора, спричинений дією силового імпульса.

Метою статті є виведення та апробація розрахункових формул для визначення переміщень нелінійного осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульса.

Йдеться про два варіанти силового навантаження. У першому розглядаємо імпульс миттєво прикладеної сталої сили, а в другому – імпульс обмеженої тривалості дії. Для проведення досліджень використовуємо метод припасовування розв'язків, який поширений у нелінійній динаміці. Розв'язки нелінійної задачі Коші будемо з використанням затабульованих спеціальних функцій, що спрощує практичне використання таких розв'язків. Вірогідність виведених формул перевіряємо проведенням числових розрахунків. Щоб придати більшу універсальність теоретичним результатам, їх подаємо в безрозмірній формі.

Викладення основного матеріалу. Будемо розрізняти два варіанти зовнішнього навантаження: дію ступінчастого імпульсу сталої сили та дію прямокутного імпульсу обмеженої тривалості.

1. У першому варіанті навантаження рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{3/2} \operatorname{sign}(x) = P \cdot H(t), \quad (1)$$

при нульових початкових умовах:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Тут m – маса осцилятора; $c > 0$ – характеристика його жорсткості; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда; $x(t)$ – переміщення осцилятора з вихідного положення $x = 0$; t – час; крапка над x означає похідну по t .

Заміною $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$, при $t > 0$, $x > 0$, рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{P}{m} - \frac{c}{m} x^{3/2}. \quad (3)$$

Інтегруванням (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{5m}} \sqrt{x(a^{3/2} - x^{3/2})}. \quad (4)$$

Тут $a = \left(\frac{5P}{2c}\right)^{2/3}$ – максимальне динамічне пере-

міщення осцилятора, при якому $v = 0$.

Якщо врахувати, що статичне переміщення x_{CT} дорівнює $x_{CT} = \left(\frac{P}{c}\right)^{2/3}$, то легко знайти коефіцієнт динамічності K_g . Він становить:

$$K_g = \frac{a}{x_{CT}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \approx 1,842 < 2,$$

тобто він менший, ніж у лінійного осцилятора.

Взявши знак плюс перед радикалом в (4), подальшим інтегруванням цього виразу отримуємо:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{c}{5m}} t &= \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^{3/2} - y^{3/2})}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{\frac{c\sqrt{a}}{5m}} t &= \int_0^{x/a} \frac{dz}{\sqrt{z(1 - z^{3/2})}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переходом до нової змінної інтегрування $z = u^2$; $dz = 2u du$, виразу (5) надаємо форму:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = \omega t, \quad (6)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{c\sqrt{a}}{5m}}$.

Співвідношення (6) дає можливість виразити x через t . При цьому існують два варіанти такої аналітичної залежності. Перший варіант пов'язаний з використанням періодичних Атеб-функцій [9-11]. Із (6) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = Sa^2\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right). \quad (7)$$

Тут $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right)$ – Атеб-синус.

Щоб спростити розрахунки по формулі (7), наводимо табл. 1 задіяної спеціальної функції.

Таблиця 1 – Значення $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right)$

ωt	$10Sa(\dots)$	ωt	$10Sa(\dots)$	ωt	$10Sa(\dots)$
0,00	0,00	0,50	4,92	1,00	8,83
0,05	0,50	0,55	5,39	1,05	9,10
0,10	1,00	0,60	5,84	1,10	9,33
0,15	1,50	0,65	6,28	1,15	9,53
0,20	2,00	0,70	6,71	1,20	9,70
0,25	2,50	0,75	7,12	1,25	9,83
0,30	2,99	0,80	7,51	1,30	9,92
0,35	3,48	0,85	7,88	1,35	9,98
0,40	3,97	0,90	8,22	1,402	10,00
0,45	4,45	0,95	8,54		

Зазначимо, що $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right) = 1$, коли $\omega t = J$, де

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} \approx 1,402182.$$

Щоб поширити табл. 1 на проміжок $\omega t \in (J, 2J)$, треба врахувати, що:

$$Sa\left(2, 1, \frac{3}{2}\omega t\right) = Sa\left[2, 1, \frac{3}{2}(2J - \omega t)\right]. \quad (8)$$

Отже, табл. 1 дає можливість розрахувати переміщення на першому циклі коливань $\omega t \in (0, 2J)$, що потім легко поширити і на інші цикли.

Для отримання другої форми аналітичної залежності x від t , проведемо наступне перетворення в (6):

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \\ &= J - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega t. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = J - \omega t = \tau. \quad (9)$$

Інтеграл в лівій частині виразу (9) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Так, згідно з [12, с. 126]:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 75^\circ), \quad \cos \varphi = \frac{z-1+\sqrt{3}}{1-z+\sqrt{3}}.$$

Тому із (9) отримуємо:

$$\frac{x}{a} = \left[1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right)} \right]^2. \quad (10)$$

Тут $cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, \sin 75^\circ\right)$ – еліптичний косинус Якобі. Для обчислення його значень можна використовувати таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, надруковані в [13, с. 103] і в [14].

Розглянемо приклади розрахунків.

Приклад 1. Обчислимо безрозмірне переміщення осцилятора при $\omega t = 0,9$. Використовуючи табл. 1 і формулу (7), одержуємо $x/a \approx 0,676$. У другій формі аналітичного розв'язку: $\tau \approx 0,5022$; $\sqrt[4]{3}\tau \approx 0,6609$. Для цього аргументу в табл. в [13, с. 103] знаходимо, що $\varphi \approx 35,537$. Тоді $cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, \sin 75^\circ\right) = \cos \varphi \approx 0,8137$ і по формулі (10) одержуємо $x/a \approx 0,676$, що збігається з попереднім результатом.

Приклад 2. Знайдемо відношення x/a , коли $\omega t = 2,6 > J$. Для такого моменту часу $2J - \omega t \approx 0,2044$ і в табл. 1 йому відповідає $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 0,2044\right) \approx 0,2044$. Тоді формула (7) дає $x/a \approx 0,0416$. Якщо для обчислення переміщення використовувати еліптичний косинус, то: $\tau \approx -1,1978$; $\sqrt[4]{3}|\tau| \approx 1,5764$. В табл. в [13, с. 103] знаходимо, що $\varphi \approx 68,255^\circ$. При такому φ $cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right) = \cos \varphi \approx 0,3705$ і по формула (10) дає

$x/a \approx 0,0418$, що було одержано раніше з використанням Аfeb-сінуса.

Розв'язки (7) і (10) мають геометричний образ, а саме графік коливань осцилятора, спричинених миттєво прикладеною силою. Він зображений на рис. 1, де вказано один цикл коливань, що легко поширити і на подальші цикли.

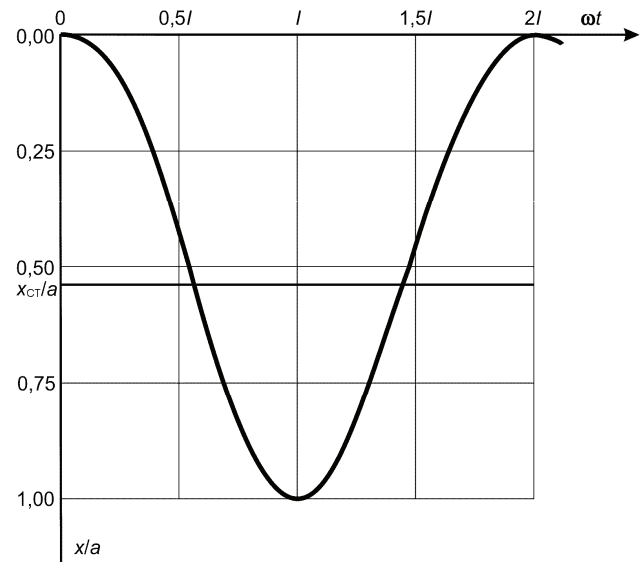


Рисунок 1 – Графік коливань при дії миттєво прикладеної сили

2. Рух осцилятора при дії імпульсу обмеженої тривалості. Його описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{3/2} \text{sign}(x) = P \cdot [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (11)$$

Тут t_1 – час миттєвого розвантаження осцилятора.

Початковими умовами зберігаємо (2). Тому на проміжку $t \in [0; t_1]$ залишаються в силі формули (7) і (10). Переміщення осцилятора в момент його розвантаження дорівнює:

$$\begin{aligned} x_1 = x(t_1) &= a Sa^2\left(2, 1, \frac{3}{2}\omega t_1\right) \text{ або} \\ x &= a \left[1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau_1|, \sin 75^\circ\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau_1|, \sin 75^\circ\right)} \right]^2, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\tau_1 = J - \omega t_1$.

Рух в цей момент часу проходить зі швидкістю:

$$v_1 = v(t_1) = \pm 2a\omega \sqrt{\frac{x_1}{a} \left[1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^{3/2} \right]}. \quad (13)$$

Знак плюс маємо при $\omega t_1 < J$ і мінус – при $J < \omega t_1 < 2J$.

Тому розглянемо спочатку рух осцилятора при $v_1 > 0$, а потім при $v_1 < 0$.

2.1. Припускаємо, що $\omega t_1 < J$. При $t > t_1$ рівняння (11) стає однорідним з початковими умовами $x(t) = x_1$; $v(t) = v_1 > 0$. Розвантажений осцилятор продовжує віддалятися від положення $x = 0$, так що $x(t) > x_1$. Пе-

рший інтеграл однорідного рівняння руху, при вказаних початкових умовах, має вигляд:

$$v = \frac{dx}{dt} = a_* \omega_* \sqrt{1 - (x/a_*)^{5/2}}, \quad (14)$$

де $a_* = a \cdot \lambda$; $\lambda = \left(\frac{x_1}{a}\right)^{2/5}$; $\omega_* = 2 \frac{\sqrt{c\sqrt{a_*}}}{\sqrt{5m}} = 2\omega \sqrt[4]{\lambda}$.

Подальше інтегрування виразу (14) дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{5/2}}} = \int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = \omega_*(t - t_1),$$

або

$$\int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = I_* - \omega_*(t - t_1) = \xi. \quad (15)$$

Тут $I_* = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}}$ потребує окремого обчислення.

Щоб провести його прийемо до уваги, що відношення x_1/a_* близьке до одиниці. Виходячи з цього, замінимо u на $1 - \varepsilon$, де ε мала величина. Далі використаємо апроксимацію:

$$1 - u^{5/2} = 1 - (1 - \varepsilon)^{5/2} = \frac{5}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon\right) + O(\varepsilon^3).$$

У прийнятому наближенні:

$$I_* \approx \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\frac{5}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \arcsin \frac{\sqrt{3(1-x_1/a_*)}}{2}. \quad (16)$$

Якщо застосовувати періодичні Атеб-функції [9–11], то матимемо залежність між I_* і x_1/a_* у вигляді:

$$\frac{x_1}{a_*} = Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} I_*\right), \quad (17)$$

де $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} I_*\right)$ Атеб-косинус. Використовуючи таблицю цієї спеціальної функції, теж можна обчислювати I_* при відомому x_1/a_* . Згадана таблиця буде зручною і для розрахунку переміщень осцилятора, бо із (15) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right). \quad (18)$$

Отже, з метою спрощення розрахунків, наводимо таблицю Атеб-косинуса.

Щоб з'ясувати похибки наближеної формули (16), обчислимо двома способами значення інтеграла I_* . Приймаючи відношення $x_1/a_* = 0,6$, по формулі (16) одержуємо $I_* \approx 0,847$. Якщо використати залежність (17) і провести інтерполяцію даних в табл. 2, то:

$$I_* \approx 0,8 + \frac{0,6 - 0,637}{0,595 - 0,637} \cdot 0,05 \approx 0,844.$$

Одержані значення I_* для деяких відношень x_1/a_* записано в табл. 3.

У чисельниках I_* одержані по формулі (16), а в знаменниках – інтерполяцією даних табл. 3. Маємо гарну узгодженість результатів розрахунку різними способами.

Таблиця 2 – Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right)$

ξ	$10Ca(\dots)$	ξ	$10Ca(\dots)$	ξ	$10Ca(\dots)$
0,00	10,00	0,60	7,87	1,20	2,70
0,05	9,98	0,65	7,52	1,25	2,21
0,10	9,94	0,70	7,16	1,30	1,71
0,15	9,86	0,75	6,77	1,35	1,22
0,20	9,75	0,80	6,37	1,40	0,716
0,25	9,61	0,85	5,95	1,45	0,216
0,30	9,45	0,90	5,52	1,4716	0,000
0,35	9,25	0,95	5,07		
0,40	9,02	1,00	4,61		
0,45	8,77	1,05	4,15		
0,50	8,50	1,10	3,67		
0,55	8,20	1,15	3,19		

Таблиця 3 – Обчислені двома способами значення I_*

$10 x_1/a_*$	6	7	8	9	10
$10 I_*$	$\frac{8,47}{8,44}$	$\frac{7,22}{7,21}$	$\frac{5,81}{5,80}$	$\frac{4,05}{4,04}$	$\frac{0,00}{0,00}$

Співвідношення (15) дає можливість знайти час $t = t_2$, коли осцилятор зупиниться, відхилившись на $x = a_*$. Із нього випливає, що:

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \quad \text{або} \quad \omega t_2 = \frac{I_*}{2\sqrt[4]{\lambda}} + \omega t_1. \quad (19)$$

Підкреслимо, що формула (18) описує рух розвантаженого осцилятора лише на проміжку $t \in (t_1; t_2)$. Подальший його рух, при $t > t_2$, зводиться до вільних коливань з амплітудою a_* відносно положення $x = 0$. Із (12) випливає, що ця амплітуда максимальна, причому $\max a_* = a$, коли $\omega t_1 = J$. Така тривалість імпульсу призводить до найбільшого розгойдування коливань розвантаженого осцилятора. На відміну від лінійних систем, ця тривалість залежить і від величини прикладеної сили, з якою пов'язано значення ω .

Приклад 3. Обчислимо час першої зупинки осцилятора t_2 , якщо $\omega t_1 = 0,8$. Для такої тривалості імпульсу по формулі (12), з використанням табл. 1, одержуємо: $x_1/a \approx 0,564$. Тоді, $\lambda \approx 0,795$; $x_1/a_* = 0,709$ і по формулі (16) знаходимо $I_* \approx 0,710$. Отже, згідно з (19) $\omega t_2 \approx 1,176$. З'ясуємо далі, яким буде відхилення x/a при $\omega t = 1$. Для цього моменту часу $\xi \approx I_* - 2\sqrt[4]{\lambda}(\omega t - \omega t_1) \approx 0,332$. Інтерполяцією чисел в табл. 2 отримуємо: $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right) \approx 0,932$ і по формулі (18) знаходимо $x/a \approx 0,741$.

2.2. Виведемо далі формули для розрахунку руху осцилятора, коли $\omega t_1 > J$, $v_1 < 0$. Помінявши знак у правій частині виразу (14), інтегруванням його отримуємо:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = \omega_*(t - t_1). \quad (20)$$

Тепер: $0 \leq x \leq x_1$.

Проведемо наступне перетворення в (20):

$$\int_{x_1/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} - \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} =$$

$$= J_* - \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \omega_*(t-t_1). \quad (21)$$

Тут

$$J_* = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = I - I_*.$$

Інтеграл $I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} \approx 1,47164$, тому обчис-

лення J_* , по суті, зводиться до обчислення I_* , яким займалися вище.

Вираз (21) набуває вигляд:

$$\int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \zeta = J_* - \omega_*(t-t_1). \quad (22)$$

Він дає можливість знайти час t_2 , коли осцилятор повертається у вихідне положення $x = 0$, бо:

$$\omega_* t_2 = J_* + \omega_* t_1 \text{ або } \omega t_2 = \frac{J_*}{2\sqrt{\lambda}} + \omega t_1. \quad (23)$$

Із (22) випливає також залежність x від t . Вона має вигляд:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right), \quad (24)$$

де $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right)$ – Атеб-синус. Для обчислення його значень теж можна використовувати табл. 2, бо:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right) = Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}(I-\zeta)\right). \quad (25)$$

Приклад 4. Обчислимо час повернення осцилятора у вихідне положення $x = 0$, коли $\omega t_2 = 2$. Для вказаної тривалості дії імпульсу, згідно з (8), $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 2\right) \approx Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 0,8044\right)$. Тоді, методом інтерполяції даних в табл. 1, одержуємо $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 2\right) \approx 0,754$, що після підстановки в (12) дає $x_1/a \approx 0,569$. Цьому відношенню відповідає: $\lambda \approx 0,798$; $x_1/a_* = 0,713$. Для такого x_1/a_* по формулі (16) знаходимо $I_* \approx 0,705$. Оскільки $J_* \approx 1,47164 - 0,705 \approx 0,767$, то за формулою (23) отримуємо $\omega t_2 \approx 2,406$.

Знайдемо положення осцилятора, коли $\omega t = 2,2$. У цей момент часу: $\zeta \approx 0,389$; $I - \zeta \approx 1,083$. В табл. 2, з урахуванням (25), інтерполяцією отримуємо $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right) \approx 0,383$. Подальша підстановка цього значення Атеб-синуса в (24) дає $x/a \approx 0,306$.

Після повернення у вихідне положення розвантажений осцилятор буде продовжувати вільні коливання, якщо $v_1 < 0$. У випадку повернення з нульовою швидкістю, вільних коливань не буде. Із (12) і (13) випливає, що такий стан спокою маємо, коли $\omega t_1 = 2J$.

При цій тривалості імпульсу миттєво розвантажений осцилятор буде знаходитись у нерухомому стані.

Висновки

1. Коефіцієнт динамічності розглянутого осцилятора з жорсткою характеристикою пружності, при дії прикладеної сталої сили, менший двох.

2. Існують дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння коливань осцилятора при дії сталої сили. У перший, переміщення осцилятора у часі виражається через Атеб-синус, а в другій – через еліптичний косинус.

3. Після розвантаження, переміщення осцилятора зручно обчислювати за допомогою складеної таблиці Атеб-косинуса.

4. Існують такі тривалості прямокутного імпульсу, для яких амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора мають найбільше і найменше значення, причому найменше дорівнює нулю, що відповідає стану спокою коливальної системи.

Список літератури

1. Ларин А.А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А.А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Митропольський Ю.А. Избранные труды в 2-х томах / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
4. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П.Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
5. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передаточных машин / В.М. Шатохин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – P. 56-74.
7. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тищенко. – Х.: Міськдрук, 2016. – 264 с.
9. Грицик В.В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій / В.В. Грицик, М.А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 2007. – № 12. – С. 37-42.
10. Сокіл Б.І. Про застосування Атеб-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / Б.І. Сокіл // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 1997. – № 1. – С. 55-58.
11. Кузьо І.В. Теоретична механіка. Динаміка / І.В. Кузьо, Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – Кн. 1. – 442 с.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев // Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
13. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде,

Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

14. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

References (transliterated)

1. Larin A.A. Essays history of development theory of mechanical oscillations. Sevastopol: Weber, 2013. 403 p.

2. Avramov K.V., Michlin Y.V. nonlinear dynamics of elastic. Volume 1: Models, Methods, phenomena. Moscow-Izhevsk: Institute of research of computer, 2010. 704 p.

3. Mitropol'skij Ju.A. Izbrannye trudy v 2-h tomah. Kyiv: Naukova dumka, 2012. 504 p.

4. Pukach P.Y. Qualitative methods of nonlinear vibration systems. Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2014. 288 p.

5. Shatokhin V.M. Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission of machines. Kharkiv: NTU «KhPI», 2008. 456 p.

6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2012. Vol. 6, No 1. P. 56-74.

7. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. The VBK method in calculations of nonstationary oscillations of an oscillator. Kharkiv: Miskdruk, 2014. 264 p.

8. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V., Tishchenko L.M. Dynamics dissipative oscillators. Kharkiv: Miskdruk, 2016. 264 p.

9. Grytsyk V.V., Nazarkevych M.A. Mathematical models and algorithms implementation Ateb functions. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv: 2007. No 12. P. 37-42.

10. Sokil B.I. Pro zastosuvannya Ateb-funkcij dlja pobudovi rozv'jazkiv dejakih rivnjan', jaki opisujut' nelinijni kolivannya odnovimernih seredovishh. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. Kyiv: 1997. No 1. P. 55-58.

11. Kuzio I.V., Vankovich T.-N.M., Zin'ko Ya.A. Theoretical Mechanics. Dynamics. Lviv: Lviv Polytechnic, 2012. Kn. 1st. 442 p.

12. Prudnykov A.P., Brychkov A.A., Marychev O.I. Integrals and series. Elementary functions. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

13. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

14. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

Надійшла (received) 10.04.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

Н.Н. ТКАЧУК, Г.И. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СЛОЕМ

В работе поставлена и решена проблема построения вариационной формулировки задачи о контактном взаимодействии элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. Исследуется контакт системы упругих тел, между которыми размещены прокладки, напыления или слои шероховатости. Предлагается при формировании системы разрешающих уравнений отталкиваться от условий совместимости нормальных перемещений точек контактирующих поверхностей. Альтернативным является модификация вариационного принципа Калькера, в который вводятся дополнительные члены. Эти члены описывают влияние нелинейно упругих материалов или слоев. В итоге получается в общем случае нелинейная система уравнений и неравенств, отличительной особенностью которой является наличие нелинейных слагаемых в условиях совместности перемещений. Эта особенность отличает созданную модель от традиционных, в которых в левой части уравнений и неравенств присутствуют только линейные члены. Структурная нелинейность этих соотношений, обусловленная наличием условий типа неравенств, дополняется также и физической. При этом слагаемые, ответственные за последнюю, присутствуют в соотношениях, описывающих первую. В результате получаем связанные нелинейные условия контактного взаимодействия, в работе называемые структурно–физической нелинейностью. Для решения получаемой системы уравнений и неравенств предлагается сведение физически нелинейной задачи к последовательности физически линейных, но структурно нелинейных задач. Для этого разработаны методы дополнительных зазоров и переменных параметров податливости, а также модификация метода Ньютона–Рафсона. Кроме того, на основе решения сформированной системы соотношений предложено решать также обратные задачи обоснования геометрической формы контактирующих тел или свойств материалов промежуточных слоев. Намечены также критерии для решения задач оптимизации, которые направлены на обеспечение характеристик прочности контактирующих тел. Кроме этого, сформулирована задача коррекции профиля поверхностей контактирующих деталей за счет упругих деформаций от целенаправленной дополнительной внешней нагрузки.

Ключевые слова: напряженно–деформированное состояние, сложнопрофильное тело, контактное взаимодействие, вариационный принцип Калькера, метод дополнительных зазоров, метод переменных параметров податливости.

М.М. ТКАЧУК, Г.І. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ІЗ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИМ ПРОМІЖНИМ ШАРОМ

У роботі поставлено та вирішено проблему побудови варіаційного формулювання задачі про контактну взаємодію елементів машин із нелінійно пружним проміжним шаром. Досліджується контакт системи пружних тіл, між якими розміщено прокладки, напилення або шари шорсткості. Пропонується при формуванні системи розв'язувальних рівнянь відштовхуватися від умов сумісності нормальних переміщень точок контактуючих поверхонь. Альтернативною є модифікація варіаційного принципу Калькера, у який вводяться додаткові члени. Ці члени описують вплив нелінійно пружних матеріалів або шарів. У результаті виходить у загальному випадку нелінійна система рівнянь та нерівностей, відмінною особливістю якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість відрізняє створену модель від традиційних, у яких у лівій частині рівнянь та нерівностей присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка обумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною. При цьому складові, відповідальні за останню, є присутніми у співвідношеннях, що описують першу. У результаті отримуємо зв'язані нелінійні умови контактної взаємодії, які у роботі називаються структурно–фізичною нелінійністю. Для розв'язання отримуваної системи рівнянь і нерівностей пропонується зведення фізично нелінійної задачі до послідовності фізично лінійних, але структурно нелінійних задач. Для цього розроблено методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості, а також модифікації методу Ньютона–Рафсона. Крім того, на основі розв'язання сформованої системи співвідношень запропоновано розв'язувати також обернені задачі обґрунтування геометричної форми контактуючих тіл або властивостей матеріалів проміжних шарів. Намічені також критерії для розв'язання оптимізаційних задач, які спрямовані на забезпечення характеристик міцності контактуючих тіл. Крім того, сформульована задача коригування профілю поверхонь контактуючих деталей за рахунок пружних деформацій від цілеспрямованого додаткового зовнішнього навантаження.

Ключові слова: напружено–деформований стан, складнопрофільне тіло, контактна взаємодія, варіаційний принцип Калькера, метод додаткових зазорів, метод змінних параметрів податливості.

М.М. ТКАЧУК, Г.І. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

CONTACT INTERACTION OF MACHINE ELEMENTS WITH NON–LINEAR ELASTIC INTERMEDIATE LAYER

The work presents a variational formulation of a contact problem for elastic bodies with an intermediate nonlinear contact layer. The layer is introduced in order to model compliant gaskets, coatings and roughness between or on the surface of the machine parts. The

contact conditions in this case incorporate not only the elastic displacements but the local deformations attributed to the contact layer. This additional deformation is determined at every point of the contact surface as a function of the acting normal tractions. This relation is in general nonlinear and can be accounted for by a special term in the complementary energy updating the original Kalker's variational principle. As an outcome the problem acquires besides the structural nonlinearity (i.e. contact) as well the physical nonlinearity. This means that one needs to solve a system comprising both the inequalities and nonlinear equations. This is done by computing consecutive approximations from problem linearizations. The two particular variants of this procedure comprise the method of augmented gap and the method of variable compliance. Newton-Raphson iterations are also considered as an option.

With this model and the numerical analysis method at hand one can solve certain inverse problems. The goal is to justify the geometrical shape of the contacting bodies as well as the physical parameters of the contact layers. The objective criteria enforcing strength and durability in terms of the contact loads are proposed for the optimization. Furthermore deformation components arising from the applied external loads and the corresponding correction of the contact geometry are introduced as an additional design factor.

Keywords: stress-strain state, complex-shaped body, contact interaction, Kalker's variational principle, deflected mode, geometrically-complex body, contact interaction, augmented gap method, method of variable compliance

Введение. Обеспечение конструкционной прочности элементов машин зачастую требует привлечения новых моделей, описывающих условия контактного сопряжения на границе с другими телами, для более адекватного и точного расчета напряженно-деформированного состояния (НДС).

Это обстоятельство обусловлено тем, что большее количество машиностроительных конструкций содержит элементы, находящиеся в условиях контактного силового и кинематического сопряжения. С целью уменьшения контактных давлений в этих зонах проектировщики стремятся использовать в качестве сопрягаемых поверхности близкой, а также частично, фрагментарно или почти совпадающей формы. Это, например, «бочкование» рабочих поверхностей зубьев различных зубчатых передач, модификация поверхностей роликоподшипников, профилирование формы беговых дорожек гидрообъемных передач (ГОП) и поршней двигателей внутреннего сгорания по высоте и в окружном направлении и т.п. Традиционные методы моделирования контактного взаимодействия приводят в таких случаях либо к значительным погрешностям в полученных результатах, либо к чрезмерно громоздким численным моделям. Еще одним существенным фактором является недостаточно адекватное моделирование условий контактного сопряжения на границах тел. Зачастую для этого записывается, например, условие непроникновения для гладких тел в линеаризованном виде. Как один из более адекватных вариантов – учет шероховатости, моделируемой, например, винклеровым слоем, что дает несколько уточненные, но также линеаризованные условия контактного взаимодействия, которые представляют собой условия совместности перемещений ответных точек сопряженных поверхностей.

В то же время сам поверхностный слой шероховатости обладает в общем случае нелинейными свойствами в зависимостях «давление – перемещение», и, кроме того, в зоне контактного взаимодействия может реализовываться контакт со смазочными материалами или через гидродинамический слой, сама поверхность деталей может быть подвергнута химической, механической или температурной обработке, а также размещению между телами упругих прокладок, прослоек, уплотнений, что существенно сказывается на физико-механических характеристиках контактирующих поверхностных слоев. В результате получаемые в итоге

зависимости контактной жесткости (податливости) от давлений, скоростей, температуры, режимов и технологий упрочнения и т.п., базирующиеся на микромеханических моделях, становятся существенно нелинейными. До настоящего времени для формирования этих зависимостей привлекаются либо данные экспериментальных исследований, либо различные упрощенные модели контактного взаимодействия микронеровностей в виде стержней, полусфер и т.п. В этом случае на основе получаемых данных устанавливаются различные модели локальной податливости, которые порождаются микронеровностями поверхности (или другими источниками).

В то же время до настоящего времени отсутствует единая завершенная теория микромеханики контактного взаимодействия, что обусловлено сложной формой микронеровностей, стохастическим распределением их по площади контакта, неоднородностью и анизотропией свойства материала поверхностных слоев деталей и т.п. Однако сразу можно заметить, что уже предложенные до настоящего времени новые модели, описывающие связь «нормальные перемещения – контактные давления», являются существенно нелинейными, т.е. нелинеаризуемыми без потери физической адекватности и численной точности.

Таким образом, в записи условий контактного взаимодействия (непроникновения) появляются нелинейные слагаемые, обусловленные нелинейностью физико-механических характеристик материалов слоев шероховатости. В результате структурная нелинейность задачи дополняется физической. Для решения таких задач, содержащих нелинейные слагаемые в условиях контактного взаимодействия, необходима разработка новых методов и подходов. Более того, требуется разработка новых путей решения обратных задач, т.е. геометрического синтеза таких профилей поверхностей взаимодействующих тел, которые дают возможность управлять (например, минимизировать) контактными давлениями, напряжениями или другими характеристиками, влияющими на конструкционную прочность деталей машин. Эти обстоятельства формируют актуальную научную проблему разработки новых методов и моделей для анализа контактного взаимодействия элементов машиностроительных конструкций с учетом не только структурной, но и дополнительной физической нелинейности, а также геометрического синтеза формы поверхностей и свойств

поверхностных слоев материалов контактирующих тел по критериям контактной прочности.

Решение всех перечисленных проблемных вопросов в полной мере и в завершённом виде до настоящего времени отсутствует. В свою очередь, потребности машиностроения в разработке методов решения данного типа задач переоценить сложно, поскольку их отсутствие нивелирует все преимущества, достигаемые при синтезе новых материалов, форм деталей и технологических операций обработки их поверхностей. В результате сложилось противоречие между потребностями машиностроения, с одной стороны, и возможностями механики, – с другой. Решение этого противоречия предполагает решение комплексной научно-практической проблемы, которая состоит в разработке и реализации новых моделей и методов расчета физически и структурно нелинейных задач определения напряженно-деформированного состояния для обеспечения конструкционной прочности элементов машиностроительных конструкций.

Таким образом, сформулирована актуальная научная и важная для промышленности масштабная проблема обеспечения конструкционной прочности элементов машиностроительных конструкций на основе разработки новых моделей и методов анализа нелинейного поведения материалов на поверхности деталей или в промежуточных слоях в условиях контактного взаимодействия. Это составляет направление исследований, описанных в работе.

Анализ существующих методов и моделей исследований контактного взаимодействия упругих тел при наличии нелинейного упругого промежуточного слоя. Анализ контактного взаимодействия является одним из наиболее важных направлений в механике. Это вызвано как потребностями машиностроения, где мощность во многих случаях передается с помощью механического контакта деталей, так и богатством математических постановок контактных задач. Таким образом, сформировалось целое направление – механика контактного взаимодействия (или контактная механика) [1].

На решение контактных задач в разных постановках были направлены усилия многих исследователей: М.И. Мухелишвили, В.А. Александрова, Г.Я. Попова, В.Л. Рвачева, В.С. Гудрамовича, И.Я. Штаермана и многих других. Ими были задействованы и развиты методы математической физики и функционального анализа, в т.ч. – асимптотические методы [2], методы однородных решений [3], парных уравнений [4], R – функций [5] и т. п.

Вместе с тем бурное развитие в последнее время получили численные методы, связанные с дискретизацией тел методом конечных (МКЭ) [6] и граничных элементов (МГЭ) [7]. Теоретической базой этих численных методов для контактных задач могут быть соответственно вариационные формулировки и граничные интегральные уравнения.

Что касается вариационных постановок, то они, начиная с работы [8], получили существенное развитие на основе теории вариационных неравенств

[9–11]. Эта теория адаптирована для глубокого анализа задач такого типа, поскольку не предусматривает никаких дополнительных гипотез относительно формы и размеров контактных пятен. Само распределение контактного давления, а также форма и размеры контактного пятна не задаются, а определяются, например, из условий экстремума некоторых функционалов. В частности, одним из вариантов такого типа постановок является вариационный принцип Калькера [12]. Он оперирует с функционалом, определенным на множестве неотрицательных распределений контактного давления, на котором, собственно, и ищется его минимум.

Кроме того, возможны самые разнообразные направления развития вариационных постановок [13–19].

Метод граничных элементов как один из вариантов дискретизации граничных интегральных уравнений имеет свои преимущества и недостатки. Первые определяются тем, что с его помощью физическая размерность задачи снижается на единицу. Тем самым резко уменьшается объем дискретизированной модели. С другой стороны, ему присущи и недостатки, связанные с трудностями применения к случаю контакта тел конечных размеров, а также с тем, что в дискретизированной модели приходится оперировать не с редкозаполненной, а с матрицей общего вида.

Разнообразные постановки, формулировки и методы и модели вместе с тем не исчерпывают всего набора факторов, которые нужно учесть. Так, в общей постановке трудно объединять произвольную форму контактирующих тел, нелинейные свойства поверхностных слоев, шероховатости прокладок, напылений, пленок и т. п. В то же время, как показано в работах [20–23], существует определенная корреляция между гранично-элементной постановкой контактной задачи и дискретной формой вариационных формулировок: при определенных условиях дискретизированные их формы совпадают. Это побуждает искать общие формулировки, которые объединяют, с одной стороны, гранично-интегральные и вариационные постановки, а с другой – разные дополнительные факторы. Среди них значительную роль играют произвольность формы распределений зазоров, а также нелинейные свойства приповерхностных, поверхностных или межповерхностных слоев в системе контактирующих тел.

Следовательно, возникла необходимость провести анализ методов исследования влияния формы зазора, свойств промежуточных слоев между контактирующими телами на их взаимодействие, а также базовых дискретизированных формулировок контактных задач. Этот анализ осуществлен без снижения общности (универсальности) на примере шероховатости поверхностных слоев и гранично-элементных дискретизаций граничных интегральных уравнений или вариационных постановок.

Микромеханика контакта: подходы и модели.

Поверхности реальных тел на микроскопическом уровне не являются идеально гладкими, а имеют случайный профиль, который состоит из выпуклостей и

впадин. Это значит, что при первичном контакте сжатие произойдет не на всей номинальной поверхности, а лишь на ее малой части, которая будет увеличиваться по мере роста усилия прижатия в определенной связи с деформациями микронеровностей. Учет влияния шероховатости на характер контактного взаимодействия является фундаментальной задачей, которая, невзирая на существенный прогресс нескольких поколений исследователей за длительную историю, далека от полного решения.

Первые попытки построить модель контакта шероховатых тел связаны с применением теории Герца к отдельным вершинам неровностей. Однако, полученные таким образом теоретические оценки не согласовались с экспериментально установленным законом примерной пропорциональности между величиной прижимного усилия P и площадью пятна контакта A . Противоречие, на которое указал Дж. Арчард [24], состояло в том, что с ростом нагрузки не только увеличивается площадь существующих контактных площадок, но и возникают новые. Им было предложено приближение, согласно которому на неровностях располагаются микронеровности, на которых, в свою очередь, присутствуют еще меньшие микронеровности. Такая модель с ростом числа степеней увеличения в граничном значении давала искомую пропорциональность.

Следующие уточнения теории шероховатого контакта имели целью получение не только качественно верных, но и количественно точных оценок поведения. Для этого были задействованы методы статистического усреднения. Исчерпывающая теория, которая описывает статистические свойства случайных поверхностей, предложена в работе [25]. Однако еще до ее появления Гринвуд и Вильямсон разработали модель контакта, основанную на упрощающих предположениях относительно распределения характеристик неровностей [26].

Теория Гринвуда–Вильямсона допускает большие возможности для уточнения, в частности относительно геометрических свойств случайных поверхностей. Так, при развитии этой модели, предложенной в работе [27], учитывается случайное распределение кривизны вершин неровностей. В дальнейшем отдельные положения модели были пересмотрены как самим Гринвудом [28], так и множеством других авторов. Так, Маккул [29] предложил использовать двухпараметрическое распределение Вейбулла для описания высот неровностей.

В оригинальной теории Гринвуда – Вильямсона контакт отдельных неровностей учитывался независимо. В работах М. Чиаварелла [30, 31] было учтено взаимное влияние от деформаций, вызванных прикладыванием контактных усилий в соседних вершинах.

Отдельные модели [1, 32, 33] содержат режим пластических деформаций. Их наличие обычно отрицается тем, что неровности не увеличивают значения максимального контактного давления относительно среднего значения настолько сильно, чтобы это приводило к существенным пластическим деформациям. Кроме того, даже в случае их возникновения, есть все

основания считать, что все следующие нагрузки после нескольких циклов сминания наиболее нагруженных участков поверхности будут происходить упруго.

В дальнейшем развитие теории шероховатого контакта связано с фрактальной природой геометрии тел. Результаты теоретических исследований [34–36] показали значимость влияния масштабного эффекта топографии поверхностей на прогнозируемое контактное поведение. Чем больше детали фрактальной поверхности учитываются на все более мелком масштабе, тем больше контактное пятно дробится на кластеры микроконтактов. При этом в предельном значении для самоподобной поверхности их количество приближается к бесконечности, при этом полная площадь контакта уменьшается до нуля. Однако реальные системы характеризуются конечными нижней и верхней границами масштабов неравенств, и, соответственно, они являются ключевыми характеристиками случайной топографии. Эти выводы подтверждаются многочисленными исследованиями [37, 38], в том числе проведенными с помощью численного моделирования.

Перссон разработал детальную модель, в которой обосновал обратно–потенциальную зависимость значения контактного давления от величины среднего зазора между прижимаемыми поверхностями [39]. Такое поведение ожидается при умеренном прижатии поверхностей, когда сближение приводит к развитию контакта на большом числе вершин неровностей, но далеко от установления полного контакта. Для проверки основных положений этой теории были проведены численные моделирование, которое подтвердило качественно и вообще также количественно основные оценки [40].

Еще одной величиной, которая отображает свойства шероховатого контакта, является контактная жесткость. Как показал Барбер [41], предложив прямую аналогию между задачей упругого контакта и электрической проводимостью, она непосредственно связана с сопротивлением контактирующих тел [26, 42]. В соответствии с теорией Гринвуда – Вильямсона, равно как и теории Перссона, контактная жесткость прямо пропорциональна прижимному усилию. Однако в ряде других исследований указывается степенная зависимость с показателем от 0,5 к единице [43, 44]. Ключевым параметром, который влияет на точное его значение, является фрактальная размерность поверхности, что нашло отображение в аналитической оценке, предложенной Портом и Поповым [45, 46]. В работе [47] отмечается, что эта зависимость, которая прогнозирует показатель, меньший единицы, справедлива лишь при малых размерах систем, где значимой является лишь наивысшая неровность с фрактальным профилем. В иных же случаях, когда в контакт вступает статистически значимый ансамбль неровностей на большой площади, выполняется линейный закон, который предусматривается классическими теориями.

Наличие микроскопических неровностей вносит существенную коррекцию в характер контактного взаимодействия тел разной формы. Важным случаем для изучения является контакт упругой сферы с номи-

нально плоской шероховатой поверхностью. Гринвуд и Трипп [48] показали, что поведение такой системы согласуется с теорией Герца лишь при достаточно высоких нагрузках, тогда как при меньшем прижимном усилии усредненное распределение контактного давления окажется существенно ниже и распространится на большую площадь по сравнению с оценкой для случая гладких тел. Пастевка и Роббинс [49] изучили изменение действительной площади контакта, установив несколько режимов нагрузки. Сначала (при предельно малых усилиях) поведение поверхностного слоя полностью определяется первой вершиной, которая вошла в контакт. С ростом числа дискретных контактов при умеренных нагрузках соотношения между площадью контакта и силой становятся линейными. И только при очень больших усилиях происходит переход к герцевскому поведению. При этом контакт становится практически сплошным, а размеры круговой зоны контакта подчиняются соотношениям теории Герца. Порт и Попов в работе [50] рассмотрели контактную жесткость. Для этой величины герцевскому закону предшествует фрактальный режим, аналогичный поведению номинально плоских шероховатых тел. При этом этот переход проходит при значительно меньшей нагрузке, чем та, которая необходима для установления сплошного герцевского пятна контакта.

Следовательно, можно отметить, что существует значительное количество теоретически, численно и экспериментально определенных моделей для описания свойств поверхностных слоев контактирующих тел. Применение тех или иных зависимостей определяется конкретными условиями.

Кроме особенностей геометрической формы, приповерхностные слои материала той или иной детали имеют также физико-механические свойства, отличающиеся от свойств материала в глубине детали. Это вызвано не только микроструктурой этих слоев, но и совокупным действием факторов, которые влияют на эти приповерхностные слои при изготовлении (см. выше), а также в условиях реальной эксплуатации.

Таким образом, с точки зрения контактной механики имеем взаимодействие не гладких тел, а тел с нанесенными промежуточными слоями. Физически это приводит к тому, что вместо номинальной площади контакта (как для гладких тел), рассматривается фактическая площадь контакта (то есть совокупность контактных зон микронеровностей). Кроме того, волнистость формирует кластеры фактических площадок контакта, совокупность которых является контурной площадью контакта [51].

Для моделирования контактного взаимодействия шероховатых тел прямое описание всех перечисленных факторов неприменимо, поскольку это приводит к слишком громоздким и неэффективным с точки зрения, например, численного исследования моделей. С другой стороны, учитывая слабое взаимное влияние деформирования отдельных микронеровностей их можно представить в виде псевдослоя, приведя все характеристики микрорельефа к физико-механическим свойствам материала этого слоя. При этом, как правило, такие модели описывают местные деформации

такого псевдослоя, то есть силовое распределенное влияние вызывает в этом слое только местные (локальные) его деформации. Такая модель впервые к рассмотрению была предложена И.Я. Штаерманом [1, 51]. Особенности такого слоя, в отличие от основы Винклера [1, 51], являются:

– нормальное давление, которое действует на внешнюю его поверхность, вызывает не только «локальную» деформацию слоя, но и передается на глубинные слои тела, вызывая «глобальную» деформацию всего тела;

– в общем случае зависимость прогибов (локальных перемещений точек внешней поверхности слоя, условно зафиксированного на внутренней его поверхности) имеет нелинейный характер относительно нормального давления p

$$w = w(p), \quad (1)$$

который во многих случаях [52] заменяется линейной зависимостью (линеаризуется)

$$w = \lambda \cdot p, \quad p = c \cdot w, \quad (2)$$

где λ , c – так называемые контактная податливость и жесткость соответственно.

В итоге следует признать, что дальнейшие исследования контактного взаимодействия шероховатых тел зависят от типа модели, которая связывает микроструктурные свойства приповерхностных слоев материалов деталей, с одной стороны, и моделей местной (локальной) деформации (1), (2), – с другой. На этом рубеже осуществляется переход от микро– к макромеханике контактного взаимодействия.

Как уже было отмечено, для описания свойств слоев шероховатости применяются разнообразные модели. Они достигли на сегодня значительного прогресса. Однако не потеряли применимость также и традиционные подходы, которые базируются или на упрощенных моделях, или на эмпирических данных.

Так, получили распространение стержневая модель Крагельского, эллипсоидальная, двухпараметрическая модель Демкина [1, 51-53]. Среди эмпирических можно выделить модель, которая описана в [52]. Для связи величины обжатия поверхностного слоя w и контактного давления p предложена степенная зависимость

$$w = cp^m, \quad (3)$$

где c, m – параметры, которые зависят от материала детали, микрорельефа его поверхности и технологической операции обработки.

Подводя итоги, можно на основе анализа описанного материала обосновать следующие выводы.

1. На сегодня отсутствуют универсальные модели для учета свойств приповерхностных слоев деталей машиностроительных конструкций, которые бы учитывали все значимые факторы с точки зрения описания контактного взаимодействия.

2. Существует большое количество моделей, которые связывают микро– и макромеханические свойства поверхностных слоев материалов; в общем случае они, как правило, связывают местные (локальные) деформации промежуточных слоев с контактным давлением.

3. Основной преградой к моделированию реальных процессов и состояний при контактном взаимодействии сложнопрофильных тел является отсутствие достаточно универсальной математической модели, которая бы связывала «локальные» и «глобальные» деформативные свойства поверхностных слоев контактирующих тел, причем с учетом вариативности этих свойств.

4. Отсутствуют математические модели, которые бы связывали свойства микроструктуры поверхностных слоев, с одной стороны, и геометрическую форму деталей, – с другой; следовательно, не построены связи микро- и макрогеометрических параметров контактирующих деталей, а, соответственно, сложно исследовать их взаимное влияние.

5. На сегодня отсутствуют математические модели, связывающие все значимые факторы в единой системе разрешающих соотношений для решения задач синтеза геометрической формы контактирующих поверхностей сложнопрофильных тел и свойств промежуточных слоев (шероховатости, пленок, напылений и т. п.) по критериям прочности, долговечности, работоспособности деталей машиностроительных конструкций.

В то же время для частных случаев удастся построить достаточно адекватные модели, которые описывают физико-механические свойства приповерхностных слоев контактирующих тел (типа (1)–(3)). Следовательно, принципиальной проблемой являются как раз методы и модели построения моделей, которые сочетают микро- и макромеханические свойства поверхностных слоев и всего объема контактирующих тел.

Сравнительный анализ методов исследования контактного взаимодействия и геометрического синтеза поверхностей сложнопрофильных тел с учетом физической и структурной нелинейности. Следует заметить, что при исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел (СПТ) [20–23] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. При этом конкурирующими требованиями при решении единичной задачи анализа выступают оперативность и точность.

Для решения подобных задач за последние годы был разработан специальный математический аппарат, основанный на решении нелинейных интегральных уравнений [54–56]. При этом, предлагаемые формулировки зачастую ограничены предположениями, например, относительно формы области контакта. Вместе с тем подобные подходы позволяют учитывать податливость в виде нелинейного слоя Винклера [54,57–60] в том числе в приложении к вопросам изнашиваемости и долговечности трущихся деталей [61–63]. Однако именно подходы, основанные на вариационных принципах [22, 23, 58, 59] являются более гибкими, позволяют учитывать наиболее широкий спектр физических факторов и допускают численную реализацию стандартными методами.

Из всего разнообразия существующих методов решения рассмотрим, в частности, метод Герца и метод конечных элементов, следуя анализу в [20–23]. Метод Герца значительно суживает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако дает возможность проводить достаточно оперативную оценку контактного давления и контактных площадок. Второй применяемый метод конечных элементов обеспечивает высокую точность моделирования для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта СПТ. Таким образом, по критериям «точность – оперативность» эти методы как бы разнесены на противоположные края условно воображаемого интервала показателей «применимость – ресурсозатратность», условно определяя пределы возможностей каждого из критериев. Компромиссным с этой точки зрения является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ): он свободен от требований теории Герца о первичном точечном контакте тел и о представлении локального зазора в соединении тел в виде положительно определенной квадратичной формы от координат, которые задают точки общей касательной плоскости (что существенно расширяет множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия). С другой стороны, в отличие от метода конечных элементов, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает, как отмечалось выше, на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия сложнопрофильных тел метод граничных интегральных уравнений является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимущества первого и второго, и будучи лишен, в значительной степени, их недостатков. Поэтому он может считаться одним из лучших для решения контактных задач.

Методы и модели контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Рассмотрим модификацию МГИУ для исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных тел, ограниченных поверхностями произвольной формы. Решение задач проводится в следующей последовательности:

- формирование разрешающих уравнений для случая контакта гладких тел;
- обобщение полученных соотношений на случай шероховатых тел, в т.ч. с нелинейной характеристикой «перемещения – контактное давление».

Рассмотрим модель контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, следуя [20–23, 64–67]. При исследовании контакта гладких тел несогласованной формы (то есть несовпадающей) [1, 51] в первом приближении при отсутствии трения рассматриваются перемещение точек поверхностей и зазор между ними только в нормальном направлении, и на этой основе определяются кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта базируется на пренебрежении изменением направления

векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [1, 51]. Примером такой модели является теория Герца (в соответствии с ней нормальный зазор между поверхностями приближенно является квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой начального касания тел).

В более общем случае придется учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку O) традиционно располагают на линии действия сжимающей силы \mathbf{P} (рис. 1). Уравнение каждой из поверхностей можно записать в виде $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$ (здесь и далее нижний индекс отвечает номеру тела, к которому относится обозначение), а зазор вычисляется как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$ соответственно.

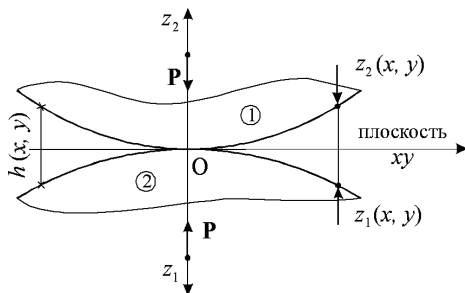


Рисунок 1 – Представление локального зазора между контактирующими телами

В деформированном состоянии под действием силы \mathbf{P} оба тела деформируются и входят в контакт на некоторой площадке (рис. 2). Смещения δ_i являются сближениями тел и не связаны с их деформацией, а смещения u_{z_i} отвечают деформациям, вызванным действием искомого контактного давления.

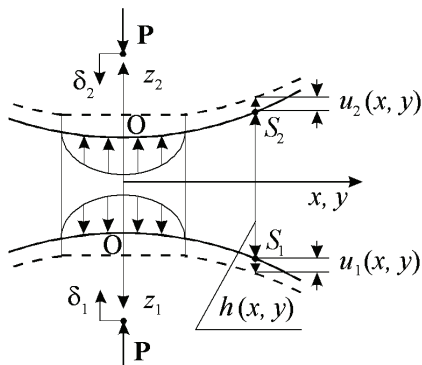


Рисунок 2 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

Такое разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения δ_i являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела. Отмеченное представление вертикальных перемещений при пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости Oxy приводит к следующей общепринятой записи нелинейных

соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (4)$$

Приведенная выше кинематическая модель контактного взаимодействия хорошо согласуется с моделью упругого поведения твердых тел при приложении контактного давления (при условии, что перемещение точек их поверхности в зоне контакта и локальные деформации приближенно эквивалентны перемещениям и деформациям упругого полупространства под действием нормального усилия). Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, которое устанавливает связь между давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рис. 3) [68]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (5)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

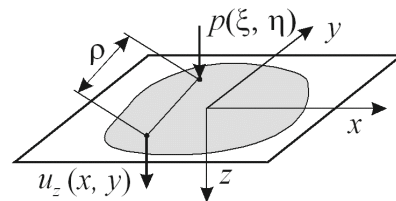


Рисунок 3 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

Распределения контактного давления, которое действует на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, потому в соотношениях (4) неизвестные перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ выражены исключительно через единственную функцию распределения давления p (в дальнейшем искомую):

$$\begin{aligned} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) &= \\ &= \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\nu_i, E_i, i = 1, 2$ – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала каждого из контактирующих тел, а распределение давления $p(\xi, \eta)$ и контактная площадка S являются неизвестными и искомыми.

Для определения контактной площадки и распределения давления в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекаются разные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений усилий набором элементов. Они различаются между собой типом аппрокси-

мации неизвестного контактного давления и способом учета граничных условий. Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие поверхностные смещения, характерные для контакта сложнопрофильных тел. Искомая функция контактного давления представляется суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которой расположены в узлах регулярной сетки шага c , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4, 5), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давления p_n :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$$

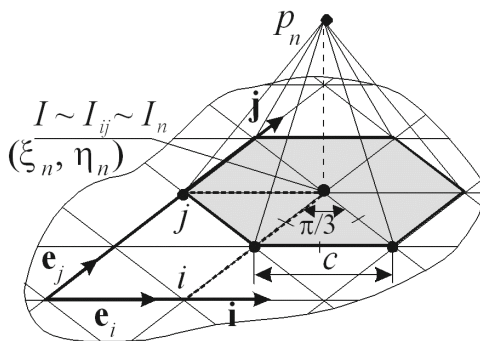


Рисунок 4 – Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

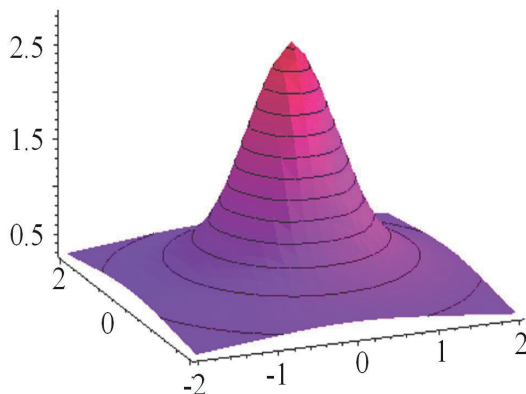


Рисунок 5 – Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 4)

Для нахождения величин усилий в узлах сетки, которые наилучшим образом удовлетворяют граничным условиям, могут быть применены два следующих подхода:

- прямой метод (или метод коллокаций), в котором система разрешающих соотношений получается путем записи условий (4) для заданного набора точек коллокации;
- вариационный метод (принцип Калькера), в рамках которого за действительные принимаются узловы значения контактного давления, которые минимизируют функционал энергии.

Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (6) по виду аппроксимирующего давления. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений

u_z , которые отвечают каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (см. рис. 4) в силу их однородности достаточно вычислить значение поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} \iint_S [p(\zeta, \eta) / \rho] d\zeta d\eta,$$

$$\zeta = c\tilde{\xi}, \quad \mu = c\tilde{\eta}, \quad x = c\tilde{x}, \quad y = c\tilde{y},$$

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} c \sum_m w(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m),$$

где $S = \bigcup_m S_m$; S_m – шестиугольная область пирамидального элемента с вершиной в узле (ξ_m, η_m) , $S^{(1)}$ – шестиугольная область с единичными сторонами, $\hat{p}^{(1)}$ – единичное пирамидальное распределение на ней,

$$w(x, y) = \sum_m \iint_{S^{(1)}} [\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) / \rho] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} -$$

«шаблон» формы распределения перемещений для единичного пирамидального элемента (см. рис. 4, 5).

Можно предложить простой алгоритм вычисления значений этой функции как в отдельных точках, так и на всей плоскости. В работах [20–23] за основу был принят способ, основанный на аналитическом вычислении подынтегральных выражений в (8) для каждого из треугольников, которые составляют базисный шестиугольник (на рис. 4 – окрашен в серое). Таким образом, получаются точные аналитические соотношения для вычисления компонент «шаблона» (см. рис. 5), что является положительным фактором с точки зрения обеспечения точности численного моделирования контактного взаимодействия.

Рассмотрим, следуя [20–23], случай использования для перемещений и контактного давления общей регулярной треугольной сетки, для обозначения узлов которой применяем как сплошную индексацию $\{I_n\}_{n=1}^N$, так и специальную систему отсчета. Оси этой системы направлены вдоль двух ортов e_i и e_j , угол между которыми составляет $\pi/3$ (см. рис. 4). В этом случае любому узлу сетки можно поставить в соответствие целочисленные координаты – индексы (i, j) так, что его радиус – вектор будет вычисляться как

$$r_J = c(e_i \cdot i + e_j \cdot j) \Leftrightarrow J \sim J_{ij}.$$

Используя эту индексацию, можем переписать равенство (7) для узловых точек:

$$u_n = u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) =$$

$$= u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w\left(\frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c}\right) \cdot p_{kl} =$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i - k, j - l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m,$$

которое отображает вычисление матрицы коэффициентов влияния C , связывающей узловы значения перемещений с узловыми значениями контактного дав-

ления. Видно, как по узловым значениям «шаблона» (8) на единичной сетке (для которой $c = 1$) определяются коэффициенты влияния для сеток с другими размерами ячеек c .

Значение коэффициента $w(x_{ij} - \xi_{kl})/c, (y_{ij} - \eta_{kl})/c$ для двух узлов J_{ij} и J_{kl} определяется только их относительным расположением, и, соответственно, разницей индексов i, k и j, l . Таким образом, достаточно вычислить значение «шаблона» (8) для одного единичного пирамидального элемента в узлах отмасштабированной сетки

$$J_{i'j'} : \mathbf{r}_{J_{i'j'}} = c(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j') \rightarrow \\ \rightarrow w_{i'j'} = w(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j'),$$

а по нему уже определяются коэффициенты влияния C_{nm} для действительной сетки

$$C_{nm} = c(\pi E^*)^{-1} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)). \quad (9)$$

Более того, из-за наличия осей симметрии пирамидального элемента и сетки, оказывается достаточно вычислить значения $w_{i'j'}$ только в узком секторе $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$ и сохранить их при численной реализации в виде треугольной или симметричной матрицы ($w_{i'j'} = w_{j'i'}$). Для произвольной пары индексов (i', j') значения $w_{i'j'}$ тогда можно быстро получать путем серии «отображений индексов», как показано на рис. 6. Здесь показана форма области индексов (i', j') , в которой возможно определение коэффициентов $w_{i'j'}$ этим способом по предварительно вычисленным значениям $w = \{w_{i'j'}; 0 \leq i' \leq N_w, 0 \leq j' \leq i'\}$. Исходная область сетки, в которой непосредственно вычисляются коэффициенты «шаблона» (9), указана на рис. 6 штриховкой.

Такой простой прием позволяет в 12 раз уменьшить количество осуществляемых на этом этапе вычислений. К преимуществам вычисления коэффициента влияния по «шаблону», предложенного в [20–23], относится то, что достаточно один раз для всех приложений вычислить и сохранить матрицу w достаточных размеров, а в дальнейшем для используемых сеток разных размеров и густоты необходимо будет только сформировать матрицу коэффициентов влияния без проведения сложных вычислительных операций.

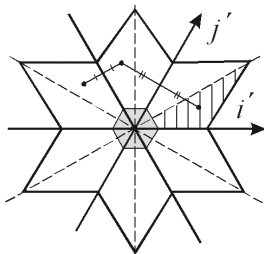


Рисунок 6 – Отображение индексов для вычисления коэффициентов «шаблона»

Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих гладких тел заключается в том, что условия контакта записываются для конечно-

го числа точек. Сформированная при этом система соотношений дает возможность найти узловые значения контактного давления, которые им удовлетворяют. Достаточно субъективным при этом является выбор точек локализации и способ приближенной записи разных условий. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов колокации дает возможность применить для записи соотношений метода выражения (4), согласно которым условия контакта в узлах сетки приобретают вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \text{узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (10)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение, $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения начального зазора.

Другим условием является неотрицательность давления, которое накладывает на искомые узловые значения ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (11)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (12)$$

В условия (4) и их дискретную запись (10) входит сближение тел δ , которое для большинства задач является неизвестным. Добавив в систему разрешающих соотношений уравнения, в котором присутствует величина действующего усилия прижатия P , можно исключить возникающую вместе с этим неопределенность (чаще всего бывает заданным именно оно – усилие), а именно, уравнение получается интегрированием по элементам кусочно-линейно заданного давления:

$$\sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \quad (13)$$

Система соотношений (10)–(13) на практике всегда решается единственным образом относительно неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ , при определении которых наибольшей трудностью является то, что обычно неизвестна информация о форме и размерах области контакта. Поэтому для начала необходимо сделать предположение относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и осуществляют начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают настоящую область контакта. В ходе дальнейшей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значение контактного давления. На каждом ее шаге существует множество N_c , которое состоит из индексов узлов, которые вероятно входят в контакт. Для них должны выполняться уравнения из

системы (10), а также равенство (13):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \quad (14)$$

Последнее равенство в системе (14) записано с учетом условия (12): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (14) образуют систему из $(N_c + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения (СЛАР) относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния C_{nm} и весовых множителей из уравнения (13). Система (14) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут оказаться такими, что нарушают условие (11). Это означает, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества N_c , и проводится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на определенном этапе не будет получено множество индексов N_c , для которого решение системы (14) даст неотрицательное давление в зоне контакта.

В большинстве ситуаций этот результат является окончательным. Однако он все же требует дополнительной проверки на выполнение еще одного типа условий, представленного в (10). Вне зоны контакта не должно возникать взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если в части узлов, которые не вошли в область контакта, не будут выдерживаться неравенства из (6), то их индексы придется включить во множество N_c и повторить итерационную процедуру. Однако, в большинстве случаев, когда начальное приближение области контакта выбрано достаточно большим и покрывает действительное контактное пятно, подобной необходимости возобновления итерационного процесса не возникает. Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой, и проверки выполнения условия (11) оказывается достаточно. Точность результата при этом определяется размером сетки c .

Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта. В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (4) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера, а также Дюво и Лионса [9-11] устанавливают общий принцип, который определяет существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, которые вводятся в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы U в пространстве возможных перемещений, которые отвечают условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой есть соотношения (5), вы-

ражающие перемещения точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется удобнее принять как варьируемые функции распределение контактного давления. В этом случае необходимо воспользоваться отличающимся от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером [12]. Согласно ему для настоящей области контакта и давления, которое действует в соединении тел, достигается минимум полной дополнительной работы Φ среди всех возможных неотрицательных распределений p . Вид функционала и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлены ниже:

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S, \end{cases} \quad (15)$$

где S – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактного давления должны иметь ограниченные носители).

С учетом соотношения (6) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, который зависит от одной лишь неизвестной функции давления p . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (15) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значения минимизированного функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями p на регулярной треугольной сетке. В этом случае S или точно, или приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом приобретает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления p_n . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную формулу с узлами, которые совпадают с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \frac{\sqrt{3} c^2}{2} \sum_i f_i g_i, \quad (16)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, которая является приближением (15), (16):

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^N) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; \\ p_m \geq 0, m = 1, N. \end{cases} \quad (17)$$

Примечательно, что узловые значения $\{p_n\}_{n=1}^N$, получаемые как решения (17), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (10)–(12). В этом случае существует эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это справедливо лишь при использовании формулы (16) для вычисле-

ния интегралов в (15), что не является обязательным.

Преимуществами вариационного подхода является наличие условий, которые единственным образом определяют форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального оправдания применения метода коллокаций.

Модель контакта шероховатых тел. Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие сложнопрофильных тел применима в первом приближении модель упругого слоя, жесткостные свойства которого эквивалентны в некотором смысле свойствам шероховатого поверхностного слоя. Тогда исследуемое тело состоит из двух частей: Ω' – гладкое упругое тело и Ω^\wedge – шероховатый слой, который его покрывает (рис. 7).

При этом между перемещениями точек u_z^Σ поверхности S' , которые участвуют в описании условий контактного взаимодействия, перемещениями гладкого тела u'_z и шероховатого слоя u^\wedge_z существует зависимость $u_z^\Sigma = u'_z + u^\wedge_z$. Здесь u'_z выражается через интегральное соотношение (5). Перемещение же u^\wedge_z описывается соответствующей моделью для шероховатого слоя. Различные аналитические модели контактного слоя рассмотрены в [20–23]. Из простых моделей можно выделить основание Винклера [52]:

$$u^\wedge_z = \lambda p, \tag{18}$$

где λ – податливость слоя (или слоев), которая зависит от свойств материала и качества обработки материала поверхностного слоя исследуемого тела.

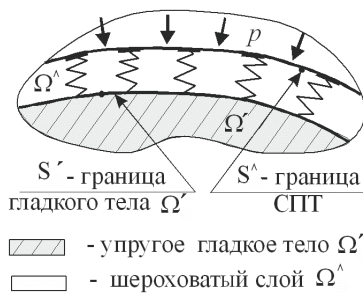


Рисунок 7 – Модель шероховатого сложнопрофильного упругого тела

Модель (18) является достаточно упрощенным вариантом более адекватных и точных зависимостей (например, степенных) между перемещениями и давлением в шероховатом слое. В то же время даже в таком упрощенном виде она вносит качественное изменение в систему взаимодействующих тел, вводя в нее дополнительные элементы. Соответственно, этим эта упрощенная модель и ценна, в связи с чем использована в дальнейших исследованиях как отправная. Учитывая малую толщину слоя Ω^\wedge , в дальнейших соотношениях координаты x, y (см. рис. 1) точек поверхностей S', S^\wedge отождествляются. В то же время в

кинематических соотношениях контакта происходит замена u'_z на u_z^Σ . В силу этого все вышеприведенные соотношения для описания контакта гладких тел остаются по форме такими же, за исключением внесения в матрицу коэффициентов влияния C^Σ дополнительных слагаемых, расположенных на главной ее диагонали:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta = 0, \\ \text{узел } J_n \text{ - в контакте;} \\ \sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta > 0, \\ \text{узел } J_n \text{ - вне зоны контакта,} \end{cases} \tag{19}$$

где $C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}$ – коэффициенты матрицы влияния, C_{nm} – коэффициенты матрицы податливости, которые определяются ранее приведенными соотношениями (9); λ – суммарная податливость шероховатых слоев в соединении шероховатых тел;

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases} \text{ - символ Кронекера.}$$

Добавление к диагональным элементам исходной матрицы податливости положительных слагаемых сохраняет ее положительную определенность.

Тогда результирующие разрешающие соотношения по структуре аналогичны соотношением для гладких тел, однако привнесены дополнительные компоненты от специально введенного упругого основания Винклера. Эффект от введения этого слоя зависит от соотношения податливости этого слоя, который моделирует шероховатость, и гладкого упругого тела, которое этот слой покрывает.

Что касается других разрешающих соотношений (то есть условий неотрицательности узловых значений контактного давления и равенства их суммы интегральному усилию, которое прикладывается к взаимодействующим телам), то они остаются такими же, как и для случая контакта гладких тел.

Общая система уравнений для точек в зоне контакта из уравнений (14):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c}^\Sigma p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \tag{20}$$

Для точек внутри области контакта, как отмечалось, остаются справедливыми соотношения (20), а для точек вне области контакта – (12) и второе из соотношений (19). Аналогичной случаю контакта гладких тел остается и процедура итерационного уточнения области контакта и распределения контактного давления [20–23].

Таким образом, базируясь на методах и моделях, изложенных в [20–23], можно их развивать в дальнейшем для случая нелинейных зависимостей «перемещение – давление» для слоя, расположенного между контактирующими сложнопрофильными телами. Представленные соотношения являются отправными при построении усовершенствованных моделей и ме-

тодов анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с учетом нелинейных характеристик материала промежуточного слоя.

Что касается проблемы синтеза геометрической формы тел при условии контактной прочности, то возможно прямое и непосредственное применение методов функций уровня и погруженной границы, включительно с оптимизацией в контактных задачах и методов переменной плотности или SIMP (изотропного сплошного материала без штрафа) к задаче о контактирующих телах [69–78]. Эти методы предусматривают наложение, как правило, многошаговых итерационных процедур нелинейного программирования на многократное решение задач анализа контактного взаимодействия, которые тоже решаются преимущественно итерационными методами. Следовательно, значительно возрастает количество необходимых для получения решения итераций.

Такой традиционный подход сводит на нет любые усилия по повышению эффективности решения задач анализа. Следовательно, крайне необходимым является разработка нового, альтернативного подхода, в котором предусматривалось бы объединение ряда процедур с прозрачным физическим смыслом, математической формализацией и вычислительной эффективностью. Как раз это и является одной из основных задач этой работы.

Формулировка задач исследования. Обзор существующих методов анализа контактного взаимодействия элементов машин различного назначения с учетом влияния физически нелинейного промежуточного слоя между ними дает основания для следующих выводов.

1. В настоящее время отсутствует полное решение проблемы анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с учетом влияния физически нелинейного промежуточного слоя, которое бы сочетало, с одной стороны, физическую адекватность, а с другой, – высокую точность и оперативность.

2. Традиционные процедуры синтеза геометрической формы сложнопрофильных тел предусматривают многократное решение задач анализа контактного взаимодействия, а, следовательно (см. п. 1), чрезмерно усложняют решение актуальных и важных прикладных задач.

3. Наиболее пригодными для анализа напряженно-деформированного состояния системы сложнопрофильных тел с промежуточными физически нелинейными слоями, как видно из анализа литературных источников, представляется комбинация вариационной постановки типа принципа Калькера, метода граничных интегральных уравнений и дискретная аппроксимация искомых функций с представлением их в виде частичной суммы ряда по базисным функциям с локальным носителем.

Принимая во внимание изложенные обстоятельства, представляется целесообразным развивать и адаптировать к решению прикладных задач анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел (а в дальнейшем – и синтезу их геометрической фор-

мы) существующие авторские разработки [20–23]. Вместе с тем прямое их применение невозможно, поскольку система разрешающих соотношений оказывается не только структурно, но и физически нелинейной.

Модель нелинейного промежуточного слоя.

Если между контактирующими телами находится упругий слой с физически нелинейными характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p), \quad i = 3, 4, \quad (21)$$

то в соотношения (20) войдут дополнительные слагаемые:

$$\sum_j C_{ij} p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i. \quad (22)$$

Здесь $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$ – дополнительные прогибы за счет деформирования слоев на поверхностях контактирующих тел 1 и 2. Это могут быть, например, слои шероховатости, для которых справедливы соотношения [52]

$$w = \lambda p^s. \quad (23)$$

Здесь λ, p – параметры, определяемые микромеханическими характеристиками шероховатости (средняя высота выступов шероховатости R_a , физико-механические характеристики материала и вид механообработки поверхности). Эти параметры могут быть рассчитаны на основе статистических микромеханических моделей контакта шероховатых тел или из экспериментальных данных [51–53].

Получается в общем случае нелинейная система уравнений и неравенств, отличительной особенностью которой является наличие нелинейных слагаемых в условиях совместности перемещений. Эта особенность отличает созданную модель от традиционных, в которых в левой части уравнений и неравенств присутствуют только линейные члены. Структурная нелинейность этих соотношений, обусловленная наличием условий типа неравенств, дополняется также и физической. В результате получаем связанные нелинейные условия контактного взаимодействия, далее в работе называемые структурно-физической нелинейностью.

Таким образом, применение локальной постановки дало возможность резко расширить круг исследуемых объектов механики контактного взаимодействия за счет включения в данный процесс, кроме гладких тел, и тел с линейно-упругим слоем на поверхности [20–23], также и тел с нелинейно-упругим слоем. Важно, что методология формирования разрешающей системы уравнений осталась в целом аналогичной, хотя результат – качественно отличный. Это дает возможность рассматривать случаи контакта гладких тел и тел с линейно-упругим слоем между ними как частные случаи получаемых соотношений.

Постановкой, альтернативной локальной, является вариационная формулировка контактной задачи. В данном случае можно рассмотреть два наиболее перспективных варианта. Первый вариант следует из постановок задач о контактном взаимодействии упругих

тел на основе теории вариационных неравенств [10–19,69]. В исследуемом случае в качестве такого нелинейного упругого тела в системе присутствует слой, материал которого подчиняется закону (23). Преобразовав это соотношение, контактные давления p можно в дальнейшем трактовать как напряжения в тонком контактном слое типа винклера, а, соответственно, можно изменить подход теории вариационных неравенств, сводящей исходную задачу в конечном счете к минимизации функционала полной внутренней энергии исследуемой системы тел (включая и нелинейный слой):

$$I(u) \rightarrow \min. \quad (24)$$

Здесь u – множество распределений перемещений точек взаимодействующих тел, в т.ч. и нелинейно–упругого слоя.

Применяя к этому функционалу (24) процедуру дискретизации, например, по методу конечных элементов, получаем в итоге функционал в виде суммы квадратичной и линейной формы, отвечающих за энергию линейно–упругой части исследуемой системы, и нелинейного слагаемого, соответствующей энергии нелинейно–упругого слоя:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} X^T KX - FX + I^n(X). \quad (25)$$

Процедура линеаризации полученного выпуклого функционала (25) может быть осуществлена методами множителей Лагранжа, штрафа, применением других процедур или путем прямой линеаризации с проекцией на множество ограничений (27). В любом случае такие известные методы обладают тем общим недостатком, что в качестве массива искомых величин (при применении, например, МКЭ) выступают узловые перемещения всех узлов конечно–элементной сетки взаимодействующих тел: и в объеме, и на поверхности. Таким образом, при применении итерационных процедур решения задачи требуется оперирование с большими массивами узловых переменных, в то время как в контактных условиях задействована только та часть узловых перемещений, которая находится в зоне возможного контакта.

Данного недостатка лишен подход, основанный на применении вариационного принципа Калькера [1, 12]. Он формируется относительно искомых контактных давлений, т.е. физическая размерность задачи снижается на единицу. В итоге, расширив известную формулировку принципа Калькера, получаем задачу минимизации функционала дополнительной энергии из

$$\Phi_n \rightarrow \min \quad (26)$$

на неотрицательных давлениях p . Данный выпуклый функционал состоит из суммы квадратичной формы давлений и нелинейной части, соответствующей нелинейно–упругому слою. Применение квадратурных формул переводит задачу (26) к виду

$$Cp + D(p) = \delta - h. \quad (27)$$

Здесь C – матрица коэффициентов влияния (порождается квадратичной частью функционала), $D(p)$ – компонента, порождаемая нелинейной частью функ-

ционала, p – массив значений контактных давлений в узлах квадратурных формул, а δ, h – имеют тот же смысл, что и в (20).

При применении определенного вида квадратурных формул, как это было показано в [20–23], полученные соотношения (27) для случая контакта гладких тел совпадают с соотношениями, полученными в локальной постановке. В то же время вариационная постановка дает возможность более строго обосновать существование, единственность и сходимость численного решения контактной задачи. Помимо этого она обладает математической строгостью, универсальностью и естественным переходом к дискретной форме. С другой стороны, в сравнении с традиционной конечно–элементной постановкой резко снижается размерность массива искомых переменных (т.к. в качестве варьируемых выступают узловые значения давлений на сетке, наброшенной только на поверхность, а не на весь объем, занимаемый СПТ), и во многих случаях это дает возможность поднять оперативность решения задач анализа при сохранении точности получаемых результатов. Данное свойство особенно важно на первых этапах проектных исследований, когда требуется проведение большого объема многовариантных расчетов НДС сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия.

Метод, основанный на использовании вариационного принципа Калькера, естественно подходит к применению в случае контакта полубесконечных тел, деформирование которых от действия нормального давления на поверхности мало отличается от деформирования упругого полупространства. Одним из ограничений при этом является требование значительного превышения габаритов контактирующих тела над размерами пятна контакта. В то же время при невыполнении данного требования можно адаптировать предложенный метод, заменив аналитическое решение задачи Буссинеска для полупространства на функцию Грина для тел конечных размеров. В дискретном варианте это означает замену аналитически вычисляемых компонент матрицы коэффициентов влияния C на численно определяемые (например, при помощи МКЭ). При этом матрица C видоизменяется, однако дополнительные операции потребуются только на этапе формирования системы разрешающих уравнений, не затрагивая этапы решения, которые формируют подавляющую составляющую общего объема решения задачи.

Получение разрешающих уравнений типа (27) является только начальной частью поставленной в работе проблемы. Важнейшим же компонентом является разработка методов решения данной системы соотношений, принципиальным отличием которой от, например, традиционной системы нелинейных уравнений, является то, что неизвестными являются не только искомые узловые переменные, но и состав их множества, поскольку искомой является также и область контакта.

Таким образом, применение традиционных методов решения в данном случае напрямую неприемлемо. С другой стороны, уже существуют методы решения

схожих задач для гладких тел и тел с линейно-упругими слоями, продемонстрировавшие работоспособность и эффективность [20–23]. В связи с этим перспективным является развитие и обобщение данных методов на исследуемый случай.

В частности, систему (27) можно представить в виде

$$Cp = \delta - [h + D(p)], \quad (28)$$

что дает возможность организовать итерационный процесс уточнения решения, трактуя последнее слагаемое в (28) как некоторый дополнительный зазор ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = C^{-1}[\delta - \tilde{h}(p^{(s)})]; \\ \tilde{h}(p^{(s)}) = h + D(p^{(s)}). \end{cases} \quad (29)$$

Соотношения (29) отражают суть метода дополнительных зазоров (МДЗ).

С другой стороны, систему (27) можно представить в виде:

$$[C + \lambda^{\wedge}(p)]p = \delta - h, \quad (30)$$

где переменная контактная податливость $\lambda^{\wedge}(p)$ определяется равенством

$$\lambda^{\wedge}(p) \cdot p = D(p). \quad (31)$$

Это дает возможность организовать итерационный процесс ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = [C^{(s)}]^{-1}[\delta - h]; \\ C^{(s)}(p) = C + \lambda^{\wedge}(p^{(s)}). \end{cases} \quad (32)$$

Соотношения (32) реализуют метод переменных параметров податливости (МППП).

Представленные методы (МДЗ и МППП) сводят исходную структурно-физически нелинейную задачу к последовательности контактных задач для гладких тел или тел с линейно упругим промежуточным слоем между ними. Физическая трактовка этих методов состоит в том, что решение исходной задачи совпадает с решением задачи для контакта гладких тел со специально подобранной коррекцией профиля поверхности (МДЗ) или с винклеровым слоем со специально подобранной неравномерной податливостью (МППП).

Кроме этих методов, возможно применение, например, процедур, аналогичных методу Ньютона-Раффсона, однако дополненных процедурой коррекции множества активных ограничений (т.е. тех узлов, в которых выполняются условия контакта).

Также для минимизации нелинейного функционала Калькера на выпуклом множестве неотрицательных узловых давлениях предложено применять

релаксационные методы, состоящие в реализации алгоритмов для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) типа метода последовательной верхней релаксации (МПВР), дополненного процедурой пошаговой проекции текущего приближения решения на ограничения. Предложены также новые процедуры блочной релаксации с проекцией.

Кроме того, были разработаны новые подходы к качественному анализу и количественному описанию контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. При этом отклик картины распределения контактных давлений на варьирование значимых параметров, фигурирующих в соотношениях для описания их контактного взаимодействия, трактуется в виде двух процессов: изменение формы и размеров пятна контакта, а также изменение формы и размеров купола распределения давлений, опирающегося на данную область контакта. При этом можно определить чувствительность изменения контролируемых областей и распределений на варьирование тех или иных параметров. В первую очередь, это дает представление о тенденции и интенсивности изменения решения задач анализа контактного взаимодействия при изменении определенных величин. Соответственно, определяется множество параметров, путем варьирования в первую очередь которыми целесообразно оптимизировать решение задачи по тому или иному критерию.

Для оценки вклада в общий баланс перемещений в контакте СПТ разработан новый способ их геометрической интерпретации. Он состоит в том, что общее смещение в каждой точке контакта представляется в виде суммы трех слагаемых: первое отвечает за перемещения, вызываемые «глобальным» упругим деформированием гладких СПТ; второе порождается локальным обжатием промежуточного слоя; третье соответствует начальному зазору. Баланс перемещений представляется в виде точки на единичной сфере. При изменении параметров точка на сфере очерчивает характерную траекторию.

Кроме поточечных, введена также и аналогичная интегральная характеристика по всей области контакта.

Таким образом, построены новые характеристики, позволяющие интерпретировать вклад различных составляющих в баланс смещений в контакте СПТ.

В итоге производится построение системы разрешающих соотношений, описывающих структурно-физическую нелинейность в контакте, а также разработка методов их решения, и, кроме того, способов анализа и оценки изменения получаемых решений при варьировании исходных данных. Созданные новые модели, методы и способы лежат в основе последующих разработок. Эти новые результаты, а также решения ряда тестовых задач, описаны в работах [64–67, 80–82].

Сформулированные физически-структурно нелинейные соотношения, а также разработанные методы их решения, послужили основой для разработки методов решения обратных задач. В частности, представляет интерес задача синтеза геометрической формы контактирующих тел с целью формирования заданного распределения контактных давлений p . Для этого предполагается использовать те же соотношения

(20), (22) и (27), что и для решения задач анализа.

Действительно, с формальной точки зрения данные соотношения можно трактовать и относительно набора искомым величин (p, δ) при заданных (h, P) , и наоборот. Таким образом, удается на единой системе соотношений строить как решение задач анализа, так и синтеза.

В то же время прямое удовлетворение всей системы сформированных соотношений не всегда дает приемлемое гладкое решение, в силу чего необходимо обращаться к другим постановкам задач синтеза.

Следует отметить, что рассматривая распределение зазоров h между контактирующими телами как формообразующую информацию, ее можно также трактовать и как управляющую. Управляя распределением h , можно влиять на распределение контактных зон и контактных давлений в контакте. Однако при этом возникает проблема аппроксимации h с использованием базисных функций с локальным носителем. В этих случаях попытки локального варьирования зазора приводят, как правило, к негладкому поведению решения. Это иллюстрируется, например, варьированием первоначального нулевого зазора между плоскими частями поверхностей контактирующих тел: давление в узле при таком варьировании – нулевое в случае изменения зазора «в плюс», номинальное – при отсутствии варьирования, резко возрастающее – при изменении зазора «в минус». Такие «нефизические» осцилляции распределений p при варьировании h вынуждают перейти к альтернативным постановкам. В частности, в работе предложено производить варьирование не h , а p . Даже если варьировать p через узловое значение в разложении функции с локальным негладким носителем, будем получать как реакцию гладкое, хотя и нелокальное, изменение зазора h . Таким образом, этот способ является предпочтительным (именно благодаря гладкости отклика) для решения задачи синтеза благоприятного профиля поверхностей контактирующих тел.

В качестве критерия при этом могут выступать:

$$p_{\max} \rightarrow \min, \sigma \rightarrow \min, w_{\max} \rightarrow \min, \quad (33)$$

где σ – некоторая функция компонент напряженно-деформированного состояния (например, интенсивность напряжений), w – сжатие промежуточного слоя.

В любом из вариантов получаем некоторую проблему типа

$$\tau(h(p)) \rightarrow \min, \quad (34)$$

сформулированную, в конечном счете, «в контактных давлениях», а получаемая форма (распределение h) является «вытекающим» результатом из решения p . Здесь τ – некоторая функция качества, конкретизированная из набора (33) или иным образом определенная, исходя из специфики конкретной решаемой задачи.

Кроме метода формирования благоприятного исходного профиля контактирующих тел, целесообразна также и новая постановка задачи о коррекции этого профиля за счет специально подбираемого дополнительного нагружения и, соответственно, изменения первоначального зазора вследствие деформирования взаимодействующих тел. Такая постановка вызвана

тем, что профиль, благоприятный с той или иной точки зрения при одном уровне нагрузки, перестает быть таковым при его изменении. Это – следствие нелинейности задачи. Кроме того, многие конструкции работают в условиях высоких изменяющихся нагрузок, и подобрать общий благоприятный профиль не всегда представляется возможным. В результате в постановку привносится дополнительная внешняя нагрузка $F_{\text{кор}}$, и она определяется по критерию

$$\tau\{h[p(f, F_{\text{кор}})]\} \rightarrow \min. \quad (35)$$

Таким образом, $F_{\text{кор}} = F_{\text{кор}}(F)$, и различным внешним нагрузкам F соответствует различная дополнительная нагрузка.

Перечисленные выше постановки могут быть обобщены в двух направлениях. Первое направление относится к двойственности системы разрешающих уравнений для анализа контактного взаимодействия (27). Будучи дополнены интегральным соотношением для узловых значений контактных давлений $\sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum_j p_j = P$, где P – величина усилия прижатия, они содержат:

- физико-механические характеристики: «глобальные», порождаемые контактирующими упругими телами, описываемые матрицей коэффициентов влияния C , и «локальные», порождаемые нелинейным упругим слоем и описываемые оператором D ;
- геометрические характеристики, отражаемые набором узловых зазоров h ;
- силовые характеристики (усилие прижатия P);
- статические характеристики (распределение контактных давлений p);
- кинематические характеристики (смещение тела δ).

Прямая формулировка контактной задачи определяет в качестве заданных массивов $\{h, P\}$, а качестве искомым – $\{p, \delta\}$. Формально эти две постановки равноправны, и по исходной системе соотношений для анализа контактного взаимодействия можно ставить и решать обратную задачу синтеза геометрической формы, удовлетворяющему желательному распределению контактных давлений.

Второе направление состоит в трактовке всех входящих в построенные разрешающие соотношения не как постоянных, а как варьируемых величин и распределений. Тогда запись этих соотношений в развернутом виде:

$$\begin{cases} Cp + D(p) \geq \delta - h; \\ 2P = \sqrt{3} \cdot c^2 \sum_i p_i, \quad p_k \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

и в операторном их эквиваленте

$$Z(C, D, p, \delta, h, P) \geq 0 \quad (37)$$

дает возможность ставить и решать ряд новых следующих задач.

1. Определение чувствительности решения задачи анализа к варьированию свойств системы, например, C, D, P, h , причем как при малом, так и при значительном диапазоне такого варьирования.

2. Определение оптимальных значений и распре-

делений одних величин при варьировании других.

3. Определение тенденций изменения решений возникающих задач при изменении варьируемых величин в определенных конечных диапазонах.

4. Анализ влияния стохастического варьирования параметров и распределений, входящих в (27), на параметры и распределения, из них получаемые.

5. Анализ и выявление качественных особенностей, вызываемых учетом тех или иных факторов, привносимых в расчетную модель исследуемой системы, на получаемое решение.

Кроме задачи обоснования рациональной геометрической формы контактирующих тел, поставлены и предложены подходы к решению задачи коррекции условий взаимодействия в области контактирования тел путем приложения управляемой дополнительной нагрузки. За счет действия этой нагрузки вследствие упругой деформации возможно повлиять на текущую форму профиля контактирующих тел, а, соответственно, на распределение зазоров в актуальном состоянии. Таким образом, создается механизм "адаптации" условий контактирования под уровень нагрузки. Это особенно важно для случая тел с частично совпадающей или близкой формой контактирующих поверхностей, а также при изменении характера картины распределения контактных давлений с ростом нагрузки, например, в случае выхода пятна контакта на периферию области возможного контакта. В этих обстоятельствах уровень зазоров, реализованных за счет формообразования поверхностей контактирующих тел, уровень изменения этих зазоров за счет упругой деформации от действия дополнительной системы сил, а также уровень перемещений, вызываемых действием сил контактного взаимодействия, – все они оказываются соизмеримыми. Соответственно, целесообразность применения дополнительного управляемого нагружения, «отслеживающего» уровень основной нагрузки, возрастает по сравнению со случаем контакта сильно несогласованных поверхностей.

С использованием предложенных постановок решен ряд тестовых задач, что продемонстрировало, в конечном итоге, возможность и целесообразность (а также эффективность применения) разработанных методов создания благоприятных профилей поверхностей контактирующих тел, а также выявление качественных особенностей и количественных характеристик изменения решения при случайном или целенаправленном варьировании свойств исследуемой системы взаимодействующих тел с промежуточным нелинейным упругим слоем. Описание решения задач синтеза геометрической формы поверхностей контактирующих тел отражено в статьях [64–67, 80–82].

Выводы. Представленные в работе материалы дают основание для следующих выводов.

1. Получила новую формулировку задача о синтезе геометрической формы контактирующих тел при наличии нелинейного упругого слоя между ними на основе единой взаимообратной системы соотношений для решения задач анализа и синтеза.

2. Усовершенствована вариационная формули-

ровка задачи анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, расширенная, в отличие от известных постановок, на случай наличия между ними нелинейно упругого промежуточного слоя.

3. Разработаны новые методы решения систем нелинейных соотношений, описывающих контакт сложнопрофильных тел при наличии нелинейно-упругого промежуточного слоя. Это методы дополнительных зазоров и переменных параметров податливости. При их применении решение физически и структурно нелинейных соотношений сводится к итерационному уточнению решений для последовательности физически линейных соотношений со специально скорректированным зазором или податливостью слоя. Таким образом, задача сводится к ряду подзадач, для которых процедура решения уже известна.

4. Разработаны новые постановки задачи об оптимизации формы поверхностей контактирующих тел, сформулированные, в отличие от традиционных, не «в зазорах», а «в контактных давлениях». Этим самым удастся избежать негладкостей при решении поставленных задач.

5. Впервые в общем виде поставлена задача о контактном взаимодействии с учетом варьирования всех величин и распределений, что дает возможность оценивать тенденции и количественные характеристики изменения решения при стохастическом, заданном или целенаправленном изменении этих величин и распределений.

Разработанные и описанные в работе подходы, методы и модели были использованы для решения ряда прикладных задач, описанных в статьях [64–67, 80–82]: о контактном деформировании податливого мягкого материала, обоснование формы беговых дорожек гидрообъемной передачи танковой трансмиссии, о влиянии модификации геометрической формы рабочих поверхностей зубчатых передач на их нагруженность контактным давлением, о влиянии шероховатости и волнистости на характер контактного взаимодействия по плоскости разъема полуматриц прессформ. В результате решения данных задач установлен ряд закономерностей и тенденций изменения напряженно-деформированного состояния и контактного взаимодействия между элементами исследуемой системы тел при варьировании их формы, свойств и нагрузок, а на этой основе разработаны рекомендации по обоснованию рациональных проектно-технологических решений. Они переданы на ряд предприятий и учтены при проектировании, технологической подготовке производства и изготовлении элементов военной и гражданской техники, технологической оснастки, трансмиссий, защитных изделий.

В публикациях [64–67, 80–82] описан ряд экспериментальных исследований, использованных для анализа адекватности разработанных математических моделей, точности построенных численных моделей и достоверности полученных с их помощью результатов. Результаты были получены частично самостоятельно, а частично привлечены из литературных источников. В частности, было исследовано контактное взаимодействие шарового поршня гидрообъемной передачи ГОП–900 со статором; проведено исследо-

вание контактного взаимодействия элементов универсально-сборных приспособлений и пресс-форм.

Сравнение результатов, полученных из эксперимента, с результатами численных исследований продемонстрировало не только их удовлетворительное соответствие (отличие на уровне 10–15 %), но и совпадение прогнозированной (расчетным путем) и обнаруженных (экспериментально) тенденций изменения решений при изменении нагрузки, геометрической формы и физико-механических свойств материалов элементов исследуемой системы взаимодействующих тел.

В дальнейшем разработанные методы будут применены для исследования контактного взаимодействия широкого класса сложнопрофильных тел с учетом нелинейно упругого промежуточного слоя.

Список литературы

1. Johnson K. Contact Mechanics / K. Johnson. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985. XI. – 452 p.

2. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, вып. 4. – С. 672–683.

3. Стеклов В.А. О равновесии упругих тел вращения / В.А. Стеклов // Сообщения Харьк. мат. об-ва. Сер. 2. – 1982. – Т. 3. № 4-5. – С. 172–251.

4. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1977. – 220 с.

5. Рвачев В.Л. Метод R-функций в контактных задачах термоупругости для тел конечных размеров / В.Л. Рвачев, Н.С. Синекон, И.П. Молотков // Докл. АН СССР. – 1991. – № 4. – С. 701–704.

6. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p.

7. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

8. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzata e semilinearizzata / A. Signorini // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – Т. 18, № 1-2. – P. 95–139.

9. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

10. Кравчук А.С. Вариационные и квазिवариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с.

11. Kikuchi N. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods / N. Kikuchi, J.T. Oden // SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. – Philadelphia, 1986. – Vol. 8. – P. 156-161.

12. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker // Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – P. 199-221.

13. Wriggers P. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact-problems with friction / P. Wriggers, T.V. Van, E. Stein // Computers and Structures. – 1990. – Vol. 37. – P. 319-333.

14. Hallquist J.O. Efficiency refinements of contact strategies and algorithms in explicit fe. / J.O. Hallquist, K. Schweizerhof, D. Stillman // Proceedings of COMPLAS III. – Pineridge Press, 1992. – P. 359-384.

15. Puso M.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics / M.A. Puso, T.A. Laursen // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2004. – Vol. 193. – P. 601-629.

16. Fischer K.A. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone / K.A. Fischer, P. Wriggers // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2006. – P. 641-656.

17. Мартыняк Р.М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте / Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 89-92.

18. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT" / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201-209.

19. Прокопишин І.І. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області / І.І. Прокопишин, І.І. Дяк, Р.М. Мартыняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – Вип. 49, № 1. – С. 46-55.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. Дис. кандидата технічних наук: 05.02.09 / Ткачук Микола Миколайович. – Х.: 2011. – 203 с.

21. Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.02.09 «Динаміка та міцність машин» / Н.Б. Скрипченко. – Х.: 2016. – 20 с.

22. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя / Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук, А. В. Грабовский. – Х.: ФООП Панов А.Н., 2017. – 148 с.

23. Tkachuk M.M. Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers / M.M. Tkachuk, N. Skripchenko, M.A. Tkachuk, A. Grabovskiy // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – [S.l.], v. 5, n. 7 (95). – P. 22-31.

24. Archard J.F. Elastic deformation and the laws of friction / J.F. Archard // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society. 1957. – Vol. 243. – P. 190-205.

25. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces / P.R. Nayak // Journal of Lubrication Technology. – 1971. – Vol. 93(3). – P. 398-407.

26. Greenwood J.A. Pl. Contact of nominally flat surfaces / J.A. Greenwood, J.B. Williamson // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society. 1966. – Vol. 295. – P. 300-319.

27. Bush A.W. The elastic contact of a rough surface / A.W. Bush, R.D. Gibson, T.R. Thomas // Wear. – 1975. – Vol. 35(1). – P. 87-111

28. Greenwood J.A. A simplified elliptic model of rough surface contact / J.A. Greenwood // Wear. – 2006. – Vol. 261(2). – P. 191-200.

29. John I McCool Non-gaussian effects in microcontact / John I McCool // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 1992. – Vol. 32(1-2). – P. 115-123.

30. Ciavarella M. Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory / M. Ciavarella, J.A. Greenwood, M. Paggi // Wear. – 2008. – Vol. 265(5). – P. 729-734.

31. Paggi M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models / M. Paggi, M. Ciavarella // Wear. – 2010. – Vol. 268(7). – P. 1020-1029.

32. Miki'c B.B. Thermal contact conductance; theoretical considerations / B.B. Miki'c // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1974. – Vol. 17(2). – P. 205-214.

33. Cooper M.G. Thermal contact conductance / M.G.

Cooper, B.B. Mikic, M.M. Yovanovich // International Journal of heat and mass transfer. – 1969. – 12 (3). – P. 279-300.

34. Ciavarella M. Linear elastic contact of the weierstrass profile / M. Ciavarella, G. Demelio, J.R. Barber, Yong Hoon Jang // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2000. – Vol. 456. – P. 387-405.

35. Persson B.N.J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces / B.N.J. Persson // Physical Review Letters. – 2001. – Vol. 87(11). – P. 116101(1-4).

36. Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics / B.N.J. Persson // The Journal of Chemical Physics. – 2001. – Vol. 115(8). – P. 3840-3861.

37. Persson B.N.J. Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results / B.N.J. Persson, F. Bucher, B. Chiaia // Physical Review B. – 2002. – Vol. 65(18). – P. 184106 (1-7).

38. Zavarise G. On the resolution dependence of micromechanical contact models / G. Zavarise, M. Borri-Brunetto, M. Paggi // Wear. – 2007. – Vol. 262(1). – P. 42-54.

39. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics / B.N.J. Persson // Physical review letters. – 2007. – Vol. 99(12). – P. 125502 (1-4).

40. Yang C. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact / C. Yang, B.N.J. Persson // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2008. – Vol. 20 (21). – P. 215214 (1-5).

41. Barber J.R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies / J.R. Barber // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2003. – Vol. 459. – P. 53-66.

42. Ragnar Holm Electric contacts: theory and application / Ragnar Holm. – Springer Science & Business Media, 2013.

43. Paggi M. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rnd patches / M. Paggi, J.R. Barber // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2011. – 54 (21). – P. 4664-4672.

44. Ciavarella M. Conductance of rough random profiles / M. Ciavarella, S. Dibello, G. Demelio // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45(3). – P. 879-893.

45. Pohrt R. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces / R. Pohrt, Valentin L. Popov // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108(10). – P. 104301 (1-6).

46. Pohrt R. Contact mechanics of rough spheres: Cross-over from fractal to hertzian behavior / R. Pohrt, V.L. Popov // Advances in Tribology. – 2013. – Article ID 974178. – 4 p.

47. Pastewka L. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts / L. Pastewka, N. Prodanov, B. Lorenz, M.H. Müser, M.O. Robbins, B.N. Persson // Physical Review E. – 2013. – Vol. 87(6). – P. 062809 (1-9).

48. Greenwood J.A. The elastic contact of rough / J.A. Greenwood, J.H. Tripp // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34. – P. 153-159.

49. Pastewka L. Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws / L. Pastewka, M.O. Robbins // Applied Physics Letters. – 2016. – Vol. 108 (22). – P. 221601 (1-11).

50. Pohrt R. Contact stiffness of randomly rough surfaces / R. Pohrt, V.L. Popov // Scientific reports. – 2013. – Vol. 3. – Article number: 3293 (6 p.)

51. Аргатов И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – СПб: Политехника, 2012. – 236 с.

52. Решетов Д.Н. Точность металлорежущих станков / Д.Н. Решетов, В.Т. Портман. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

53. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей / Н.Б. Демкин. – М.: Наука. 1970. – 228 с.

54. Дьяченко Н.Н. Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта / Н.Н. Дьяченко, Н.В. Манько // Проблемы трибологии. – 2016. – № 2. – С. 34-46.

55. Александров А.И. Решение задач о контакте упругих шероховатых тел с использованием нелинейных интегральных уравнений / А.И. Александров, Е.В. Грабко // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 14–21.

56. Острик В.І. Про одну властивість розв'язків задач теорії пружності для двох півплощин або півпросторів / В.І. Острик, А.Ф. Улітко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2016. – Т. 52, вип. 2. – С. 72-80.

57. Сачук Ю. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів з пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера / Ю. Сачук, О. Максимук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – № 22. – С. 117-124.

58. Мартиняк Р.М. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів / Р.М. Мартиняк, І.А. Прокопишин, І.І. Прокопишин // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2015. – Т. 56, вип. 3. – С. 43-56.

59. Прокопишин І. Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття, з'єднане з основою через вінклерівський прошарок / І.Прокопишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – № 23. – С. 144-160.

60. Гузь А.Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. Развитие идей Л.А. Галина в механике / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // К столетию со дня рождения ученого. – 2013. – С. 188-244.

61. Чернець М.В. Модель оцінки зношування і довговічності підшипника ковзання за малої некрутості / М.В. Чернець, О.С. Андрейків, Н.М. Лебедева, В.Б. Жидик // ФХММ. – 2009. – № 2. – С. 121-129.

62. Дацшин О.П. Методи оцінювання контактної довговічності елементів трибоз'єднань (Огляд) / О.П. Дацшин, В.В. Панасюк // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 7-20.

63. Довбня Н.П. О величине гистерезисных потерь в сопротивлении качению колес подвижного состава / Н.П. Довбня, Л.Н. Бондаренко, Д.В. Бобырь // Problems of Tribology. – 2017. – Т. 83, № 1. – С. 30-34.

64. Ткачук Н.Н. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя / Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук // Механіка та машинобудування. – 2016. – № 1. – С. 3–14.

65. Скрипченко Н.Б. Расчетно-экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел / Н.Б. Скрипченко, Н.Н. Ткачук, А.А. Атрошенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – 2016. – № 12 (1184). – С. 84-88.

66. Ткачук Н.Н. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством / Н.Н. Ткачук, А.Д. Чепурной, А.В. Литвиненко, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 17-22.

67. Tkachuk M.A. Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle / M.A. Tkachuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – 3/7 (93). – P. 34–41. – doi: 10.15587/1729-4061.2018.132076.

68. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
69. Sethian J.A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods / J.A. Sethian, A. Wiegmann // Journal of computational physics. – 2000. – Vol. 163(2). – P. 489-528.
70. Osher S.J. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum / S.J. Osher, F. Santosa // Journal of Computational Physics. – 2001. – Vol. 171(1). – P. 272-288.
71. Allaire G. Shape optimization with a level set based mesh evolution method / G. Allaire, C. Dapogny, P. Frey // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – Vol. 282. – P. 22-53.
72. Cai S. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: a B-spline finite cell method combined with level set function / S. Cai, W. Zhang, J. Zhu, T. Gao // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – Vol. 278. – P. 361-387.
73. Makhija D. Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method / D. Makhija, K. Maute // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2014. – Vol. 49(2). – P. 185-197.
74. Maute K. Level set topology optimization of printed active composites / K. Maute, A. Tkachuk, J. Wu, H.J. Qi, Z. Ding, M.L. Dunn // Journal of Mechanical Design. – 2015. – Vol. 137(11). – P. 111-402.
75. Myśliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems / A. Myśliński // Advances in Engineering Software. – 2015. – Vol. 80. – P. 25-32.
76. Bruns T.E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization / T.E. Bruns // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2005. – Vol. 30(6). – P. 428-436.
77. Kang Z. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field / Z. Kang, Y. Wang // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2011. – Vol. 200 (49). – P. 3515-3525.
78. Lazarov B.S. Maximum length scale in density based topology optimization / B.S. Lazarov, F. Wang // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – Vol. 318. – P. 826-844.
79. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
80. Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении / Н.Б. Скрипченко, Н.Н. Ткачук // Механіка та машинобудування. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – № 1. – С. 113-117.
81. Ищенко О.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки / О.А. Ищенко, Н.А. Демина, Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, А.В. Грабовский и др. // Вісник НТУ «ХП», серія: Транспортне машинобудування. – 2017. – № 5 (1227). – С. 108-134.
82. Мартыненко А.В. Напряженно-деформированное состояние контактирующих элементов гидропередаточ / А.В. Мартыненко, Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Д.В. Бирик, А.В. Ткачук, М.С. Саверская, В.В. Шеманская // Вісник НТУ «ХП», серія: Машинознавство та САПР. – 2018. – № 7 (1283). – С. 47-75

References (transliterated)

1. Johnson K. Contact Mechanics. Cambridge etc., Cambridge University Press, 1985. XI. 452 p.
2. Aleksandrov V.M. Asimptoticheskie metody v kontaktnykh zadachah teorii uprugosti [Asymptotic methods in con-

tact problems of the theory of elasticity]. Prikladnaja matematika i mehanika. 1968, vol. 32, no. 4, pp. 672-683.

3. Steklov V.A. O ravnovesii uprugih tel vrashhenija [On the equilibrium of elastic bodies of revolution]. Soobshhenija Khark. mat. ob-va. Ser. 2. 1982, vol. 3, no. 4-5, pp. 172-251.
4. Ufljand Ja.S. Metod parnyh uravnenij v zadachah matematicheskoi fiziki [The method of pair equations in problems of mathematical physics]. Leningrad: Nauka, 1977. 220 p.
5. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Molotkov I.P. Metod R-funkcij v kontaktnykh zadachah termouprugosti dlja tel konechnykh razmerov [The method of R-functions in contact problems of thermoelasticity for bodies of finite dimensions]. Dokl. AN SSSR. 1991, no. 4, pp. 701-704.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
7. Krauch S., Starfield A. Metody granichnyh jelementov v mehanike tverdogo tela [Methods of boundary elements in the mechanics of a rigid body]. Moscow: Mir, 1987. 328 p.
8. Signorini A. Questioni di elasticitana.n linearizzata o semilinearizzata e semilineariz-zata. Rend. di Matem. e delle sue appl. 1959, vol. 18, no. 1-2, pp. 95-139.
9. Djuvo G., Lions Zh.-L. Neravenstva v mehanike i fizike [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow: Nauka, 1980. 383 p.
10. Kravchuk A.S. Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva v mehanike [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscow: Izd-vo Moskovskoj gosudarstvennoj akademii priborostroenija i informatiki, 1997. 339 p.
11. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. Philadelphia. 1986, vol. 8, pp. 156-161.
12. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. Inst. Math. and Appl. 1977, vol. 20, pp. 199-221.
13. Wriggers P., Van T.V., Stein E. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact-problems with friction. Computers and Structures. 1990, vol. 37, pp. 319-333.
14. Hallquist J.O., Schweizerhof K., Stillman D. Efficiency refinements of contact strategies and algorithms in explicit fe. Proceedings of COMPLAS III. Pineridge Press. 1992, pp. 359-384.
15. Puso M.A., Laursen T.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2004, vol. 193, pp. 601-629.
16. Fischer K.A., Wriggers P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006, pp. 641-656.
17. Martynjak R.M. Vzaimodejstvie uprugih poluploskostej pri nepolnom mehanicheskom kontakte [Interaction of elastic half-planes with incomplete mechanical contact]. Mat. metody i fiz.-meh. Polja. 1985, vol. 22, pp. 89-92.
18. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in «CONTACT». Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. China, 2012, vol. 96, pp. 201-209.
19. Prokopyshy'n I.I., Dy'yak I.I., Marty'nyak R.M. Chy'slove doslidzhennya zadach pro kontakt tr'ox pruzhny'x til metodamy' dekompozy'ciyi oblasti [Numerical study of the problems of contact of three elastic bodies by methods of decomposition of the region]. Fiz.-xim. mexanika materialiv. 2013, vol. 49, no. 1, pp. 46-55.
20. Tkachuk M.M. Analiz kontaktno.yi vzayemodiyi skladno.profil'ny'x elementiv mashynobudivny'x konstrukcij z kinematy'chno. spryazheny'my' poverxnyamy' [Analysis of con-

tact interaction of complex elements of engineering constructions with kinematically conjugated surfaces]. *Dy's. kandydata texnichny'x nauk: 05.02.09. Tkachuk My'kola My'kolajovy'ch.* Xarkiv, 2011. 203 p.

21. Skry'pchenko N.B. Kontaktnoe vzay'modejstvie slozhnoprofil'nykh detalej mashy'nostroy'tel'nykh konstrukcyj s uchedom lokal'noj podatly'vosty' poverxnostnogo sloya [Contact interaction of sophisticated details of machine building constructions, taking into account the local plating of the surface layer]. *Avtoref. dy's. na zdobuttya nauk. stupenya kand. texn. nauk: specz. 05.02.09 «Dy'namika ta micznist' mashy'n» / N.B. Skry'pchenko.* Kharkiv, 2016. 20 p.

22. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A., Grabovskij A.V. Kontaktnoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'nykh detalej mashino.stroitel'nykh konstrukcyj s uchedom lokal'noj podatlivosti poverxnostnogo sloja [Contact interaction of sophisticated details of machine-building constructions, taking into account the local pliability of the surface layer]. *Kharkiv: FOP Panov A.N., 2017. 148 p.*

23. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, [S.I.], vol. 5, no. 7 (95), pp. 22-31*

24. Archard J.F. Elastic deformation and the laws of friction. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1957, vol. 243, pp. 190-205.*

25. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology. 1971, vol. 93(3), pp. 398-407.*

26. Greenwood J.A., Williamson J.B. Pl. Contact of nominally flat surfaces. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1966, vol. 295, pp. 300-319.*

27. Bush A.W., Gibson R.D., Thomas T.R. The elastic contact of a rough surface. *Wear. 1975, vol. 35(1), pp. 87-111*

28. Greenwood J.A. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear. 2006, vol. 261, no. 2, pp. 191-200.*

29. John I McCool. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture. 1992, vol. 32, no. 1-2, pp. 115-123.*

30. Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M. Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear. 2008, vol. 265(5), pp. 729-734.*

31. Paggi M., Ciavarella M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models. *Wear. 2010, vol. 268, no. 7, pp. 1020-1029.*

32. Miki'c B.B. Thermal contact conductance; theoretical considerations. *International Journal of Heat and Mass Transfer. 1974, vol. 17, no. 2, pp. 205-214.*

33. Cooper M.G., Mikic B.B., Yovanovich M.M. Thermal contact conductance. *International Journal of heat and mass transfer. 1969, vol. 12, no. 3, pp. 279-300.*

34. Ciavarella M., Demelio G., Barber J.R., Yong Hoon Jang. Linear elastic contact of the weierstrass profile. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 2000, vol. 456, pp. 387-405.*

35. Persson B.N.J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters. 2001, vol. 87, no. 11, pp. 116101 (1-4).*

36. Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics. 2001, vol. 115, no. 8, pp. 3840-3861.*

37. Persson B.N.J., Bucher F., Chiaia B. Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B. 2002, vol. 65, no. 18, pp. 184106 (1-7).*

38. Zavarise G., Borri-Brunetto M., Paggi M. On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear. 2007, vol. 262, no. 1, pp. 42-54.*

39. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. *Physical review letters. 2007, vol. 99, no. 12, pp. 125502 (1-4).*

40. Yang C., Persson B.N.J. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter. 2008, vol. 20(21), pp. 215214 (1-5).*

41. Barber J.R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 2003, vol. 459, pp. 53-66.*

42. Ragnar Holm. *Electric contacts: theory and application.* Springer Science & Business Media, 2013.

43. Paggi M., Barber J.R. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011, vol. 54, no. 21, pp. 4664-4672.*

44. Ciavarella M., Dibello S., Demelio G. Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures. 2008, vol. 45(3), pp. 879-893.*

45. Pohrt R., Popov V.L. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces. *Physical Review Letters. 2012, vol. 108, no. 10, pp.104301 (1-6).*

46. Pohrt R., Popov V.L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology, vol. 2013. Article ID 974178, 4 p.*

47. Pastewka L., Prodanov N., Lorenz B., Müser M.H., Robbins M.O., Persson B.N.J. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E. 2013, vol. 87, no. 6, pp. 062809 (1-9).*

48. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough. *Journal of Applied Mechanics. 1967, vol. 34, pp. 153-159.*

49. Pastewka L., Robbins M.O. Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws. *Applied Physics Letters. 2016, vol. 108, no. 22, pp. 221601 (1-11).*

50. Pohrt R., Popov V.L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports. 2013, vol. 3. Article number: 3293 (6 p.)*

51. Argatov I.I., Dmitriev N.N. *Osnovy teorii uprugogo diskretnogo kontakta [Fundamentals of the theory of elastic discrete contact]. Sankt-Peterburg: Politehnika, 2012. 236 p.*

52. Reshetov D.N., Portman V.T. *Tochnost' metallorez-hushhih stankov [Precision of machine tools]. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 336 p.*

53. Demkin N.B. *Kontaktirovanie sherohovatykh poverhnostej [Coating rough surfaces]. Moscow: Nauka. 1970. 228 p.*

54. D'jachenko N.N., Man'ko N.V. *Priblizhenno. analiticheskoe reshenie ploskoj kontaktnoj zadachi s uchedom iznashivaniya tonkogo uprugogo sloja pri fiksirovanno.j oblasti kontakta. Problemi tribologii. 2016, no. 2, pp. 34-46.*

55. Aleksandrov A.I., Grabko E.V. *Reshenie zadach o kontakte uprugih sherohovatykh tel s ispol'zovaniem nelinejnykh integral'nykh uravnenij. Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mexaniky deformivno.go tverdogo tila. 2012, vol. 13, pp. 14-21.*

56. Ostry'k V.I., Ulitko A.F. *Pro odnu vlasty'vist' rozv'yazkiv zadach teorii pruzhno.sti dlya dvox pivploshhy'n abo pivprostoriv. Matematy'chni metody' ta fizy'ko-mexanichni polya, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 72-80.*

57. Sachuk Yu., Maksy'muk O. *Kontaktna zadacha pro vzayemodiyu zhorstky'x shtampiviz pruzhnoyu pivploshhy'noyu, zaxy'shhenoyu pokry'ttyam Vinklera. Fizy'ko-matematy'chne modelyuvannya ta informacijni texnologiyi. 2015, no.22, pp. 117-124.*

58. Marty'nyak R.M., Prokopy'shy'n I.A., Prokopy'shy'n I.I. *Kontakt pruzhny'x til za nayavnosti nelinejny'x vinkleriv'sky'x poverxnev'y'x shariv. Matematy'chni metody' ta fizy'ko-mexanichni polya. 2015, vol. 56, no. 3, pp. 43-56.*

59. Prokopy'shy'n I. *Kontaktna vzayemodiyu pruzhny'x til,*

odne z yaky'x maye pokry'ttya, z'yednane z osno.voyu cherez vinkleriv'sky'j prosharok. Fyzy'ko-matematy'chne modelyuvannya ta informacijni tekno.logiyi. 2016, no. 23, pp. 144-160.

60. Guz' A.N., Babich S.Ju., Rudnickij V.B. Kontaktoe vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami. Razvitie idej L.A. Galina v mehanike. K stoletiju so dnja rozhdenija uchenogo. 2013, pp. 188-244.

61. Chernenec' M.V., Andrejkiv O.Ye., Lyebyedyeva N.M., Zhy'dy'k V.B. Model' ocinky' znoshuvannya i dovgovichnosti pidshy'pny'ka kovzannya za maloyi nekruglosti. FXMM. 2009, no. 2, pp. 121-129.

62. Dacy'shy'n O.P., Panasyuk V.V. Metody' ocinyuvannya kontaktoyi dovgovichnosti elementiv try'boz'yednan' (Oglyad). Fyzy'o-ximichna mexanika materialiv. 2016, vol. 52, no. 4, pp. 7-20.

63. Dovbnya N.P., Bondarenko L.N., Bobyr' D.V. O vely'chy'ne gy'sterezy'snyx poter' v soproty'vleny'y' kacheny'yu koles podvy'zhno.go sostava. Problems of Tribology. 2017, vol. 83, no. 1, pp. 30-34.

64. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. Reshenie zadach o kontakto.m vzaimodejstvii sherohovatyh tel s primeneniem modeli nelinejno.go vinklerovskogo sloja [Solution of problems on the contact interaction of rough bodies using the model of the nonlinear Winkler layer]. Mexanika ta mashy'nobuduvannya. 2016, no. 1, pp. 3-14.

65. Skripchenko N.B., Tkachuk N.N., Atroshenko A.A. Raschetno-jeksperimental'noe issledovanie kontakta slozhnoprofil'nyh tel [Computational and experimental research of contact of complex profile bodies]. Visnyk NTU «KhPI», seriya: Novi rishennya v suchasny'x tehnologiyax. 2016, no. 12 (1184), pp. 84-88.

66. Tkachuk N.N., Chepurnoj A.D., Litvinenko A.V., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. Kontakt prjamougol'nogo v plane pua-sona so skruglennymi krajami s poluprostranstvom [Contact rectangular in plan punch with rounded edges with half-space]. Problemy mashinostroenija. 2014, vol. 17, no. 4, pp. 17-22.

67. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018, vol. 3/7(93), pp. 34-41.

68. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruемого tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid state]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. 712 p.

69. Sethian J.A., Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. Journal of computational physics. 2000, vol. 163, no. 2, pp. 489-528.

70. Osher S.J., Santosa F. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. Journal of Computational Physics. 2001, vol. 171, no. 1, pp. 272-288.

71. Allaire G., Dapogny C., Frey P. Shape optimization with a level set based mesh evolution method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014, vol. 282, pp. 22-53.

72. Cai S., Zhang W., Zhu J., Gao T. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: a B-spline finite cell method combined with level set function. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014, vol. 278, pp. 361-387.

73. Makhija D., Maute K. Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2014, vol. 49, no. 2, pp. 185-197.

74. Maute K., Tkachuk A., Wu J., Qi H. J., Ding Z., Dunn M.L. Level set topology optimization of printed active composites. Journal of Mechanical Design. 2015, vol. 137, no. 11, pp. 111-402.

75. Myśliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. Advances in Engineering Software. 2015, vol. 80, pp. 25-32.

76. Bruns T.E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2005, vol. 30, no. 6, pp. 428-436.

77. Kang Z., Wang Y. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. Computer methods in applied mechanics and engineering. 2011, vol. 200, no. 49, pp. 3515-3525.

78. Lazarov B.S., Wang F. Maximum length scale in density based topology optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017, vol. 318, pp. 826-844.

79. Vasidzu K. Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichno.sti [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Mir, 1987. 542 p.

80. Skripchenko N.B., Tkachuk N.N. Kontakto.e vzaimodejstvie v modifitsirovanno.m zubchatom zaceplenii. [Contact interaction in modified gearing]. Mexanika ta mashy'nobuduvannya. Kharkiv: NTU "KhPI". 2015, no. 1, pp. 113-117.

81. Ishhenko O.A., Demina N.A., Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Grabovskij A.V. i dr. Komp'juterno.e modelirovanie kontakto.go vzaimodejstvija jelementov shtampovoj osnastki [Computer modelling of contact interaction of elements of die equipment] Visnyk NTU "KhPI", seriya: Transportne mashy'nobuduvannya. 2017, no. 5 (1227), pp. 108-134.

82. Martynenko A.V., Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Bibik D.V., Tkachuk A.V., Saverskaja M.S., Shemanskaja V.V. Naprjazhenno-deformirovanoe sostojanie kontaktirujushhij jelementov gidroperedach [Stress-strain state of contacting elements of hydrotransfers]. Visnyk NTU "KhPI", seriya: Mashy'noznavstvo ta SAPR. 2018, no. 7 (1283), pp. 47-75.

Поступила (received) 01.11.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola Mykolayovych) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), ст. наук. співр. кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова, НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sap.org

Львов Геннадій Іванович (Львов Геннадий Иванович, Lvov Gennady Ivanovich) – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-9227>; e-mail: lvov@kpi.kharkov.ua

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey Vladimirovich) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), ст. наук. співр. кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com

Скрипченко Наталія Борисівна (Скрипченко Наталья Борисовна, Skripchenko Nataliia Borisovna) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), наук. співр. кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5324-9553>; e-mail: nb_natali@mail.ru

ЗМІСТ

Бреславський Д.В., Пащенко С.О., Успенський В.Б. Алгоритм та програми для мінімізації температурних похибок волоконно-оптичних гіроскопів, встановлених на штучних супутниках землі	3
Бреславський Д.В., Пащенко С.О. Повзучість трійникового з'єднання трубопроводу при спільній дії температурно-силових та радіаційних полів	8
Бреславський Д.В., Татарінова О.А., Коритко Ю.М. Повзучість панелей надзвукових літальних апаратів при періодичній дії тиску повітряного потоку	13
Воробьев Ю.С., Жандковски Р., Овчарова Н.Ю., Берлизова Т.Ю. Термонапряженное состояние монокристаллической охлаждаемой лопатки с учетом аксиальной ориентации кристаллографических осей	18
Васильченко В.Ф., Ломакин А.Н. Измеритель скорости и длины цельнотянутых труб по боковой поверхности	23
Ловська А.О. Моделювання навантаженості контейнера-цистерни при перевезенні у складі комбінованого поїзда на залізничному поромі	28
Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні	33
Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Динаміка осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульсу	37
Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем	43

CONTENTS

Breslavsky D.V., Pashchenko S.O., Uspensky V.B. Algorithm and software for minimization of temperature errors of fiber-optic gyroscopes, mounted on artificial Earthsatellites	3
Breslavsky D.V., Pashchenko S.O. Creep of t-joint of pipeline under joint action of temperature-force and radiation fields	8
Breslavsky D.V., Tatarinova O.A., Korytko Ju.N. Creep of supersonic aircraft panels under the periodic action of airstream pressure	13
Vorobiev Yu., Rzadkowski R., Ovcharova N., Berlizova T. Thermo-stressed state of a single-crystal cooled blade taking into account the axial orientation of the crystallographic axes	18
Vasilchenko V.F., Lomakin A.N. Measuring the velocity and length of the seamless pipe at the side surfaces	23
Lovska A.O. Simulation of loads for a tank container included in combined trains transported by train ferry	28
Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. About the dynamic effect of non-symmetry of the power characteristic of an oscillating system under a pulsed load	33
Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Dynamics of an oscillator with a rigid characteristic of elasticity under the action of a power pulse	37
Tkachuk M.M., Lvov G.I., Grabovskiy A.V., Skripchenko N.B. Contact interaction of machine elements with non-linear elastic intermediate layer	43

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
СЕРІЯ: ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН

Збірник наукових праць

№ 33 (1309) 2018

Науковий редактор: Морачковський О.К., д-р техн. наук, професор
Технічний редактор: Щепкін О.В., наук. співр.
Відповідальний за випуск: Обухова Г.Б., канд. техн. наук

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
НТУ «ХПІ», Фіз. корп. 1-й пов., каф. ДММ.
Тел. (057) 707-63-09. E-mail: Sah4199@ukr.net

Обл.-вид № 34-18.

Підп. до друку 15.11.2018 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,95. Облік.-вид. арк. 9,10.
Тираж 300 пр. 1-й завод 1-100. Зам. № 23. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28-А
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5493 від 22.08.2017 р.
