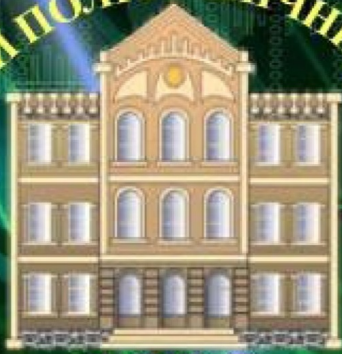


НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»



1885

«ХІІІ»

ISSN 2222-0631

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХІІІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях

№ 3'2018

Харків
2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 3 (1279) 2018

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 3 (1279) 2018

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2018

Kharkiv
NTU "KhPI", 2018

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2018. — № 3 (1279) 2018. — 148 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України KB № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України № 1328 від 21.12.2015 р. «Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року»

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до зовнішніх інформаційних систем, у тому числі індексується у Google Scholar, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich'sPeriodicalsDirectory (NewJersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Головний редактор

Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України

Заст. головного редактора

Марченко А. П., д-р техн. наук, проф.

Секретар

Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна

Редакційна колегія серії

Відповідальний редактор:

В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора:

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар:

С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

Члени редколегії: Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук,

проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий,

д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.;

О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.; О. М. Литвин, д-р фіз.-

мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;

О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова,

д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Ольшанський, д-р фіз.-мат.

наук, проф.; М. Ф. Пацегон, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р

техн. наук, проф.; О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.;

С. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets,

PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-

Math. Sci., Scientist, Spain.

Editor-in-chief

Sokol E. I., dr. tech. sc., member-cor. of National Academy of Sciences of Ukraine, NTU "KhPI"

Deputy editor-in-chief

Marchenko A. P., dr. tech. sc., prof., NTU "KhPI", Ukraine

Secretary

Gorbunov K. O., docent, NTU "KhPI", Ukraine

Editorial staff

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

Deputy Executive Editor:

Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

Executive Secretary:

S. V. Duhopelnikov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof.

Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorkyan,

PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci.,

Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci.,

Prof.; O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr.

Tech. Sci., Prof.; O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon,

Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. M. Shelkovyy, Dr. Tech. Sci.,

Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.;

Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy

Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 2 від 23 лютого 2018 р.

I. V. ANTONOVA, N. A. CHIKINA

PREPROPRIATE ANALYSIS OF TIME SERIES BY METHODS OF FRACTAL ANALYSIS AND PHASE TRAJECTORIES

The procedure of the qualitative analysis of time series, for which the hypothesis of trend existence isn't confirmed, with application of the methods of nonlinear dynamics and the theory of chaos, is presented. The real time series characterizing prevalence of various skin diseases in Ukraine are considered. The basis for similar researches is Takens's theorem. The randomness of the studied dynamical system given by time realizations is established by means of Lyapunov's indicator. The state stability is estimated by Hausdorff's fractal dimension and the fractality index. Visual evaluation of the time series was carried out by means of the phase trajectory restoration procedure. As a result of the analysis of phase points in the phase space the split attractor is indicated, which gives the chance to speak about its bifurcation.

Key words: qualitative analysis, time series, methods of nonlinear dynamics, theory of chaos, Lyapunov's indicator, fractal dimension, fractality index, phase space, attractor, bifurcation of an attractor.

I. V. АНТОНОВА, Н. О. ЧІКІНА

ПРЕДПРОГНОЗНИЙ АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ МЕТОДАМИ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ТА ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ

Запропоновано процедуру якісного аналізу часових рядів, для яких не підтверджується гіпотеза про наявність тренда, із застосуванням методів нелінійної динаміки, теорії хаосу. Розглянуто реальні часові ряди, що характеризують поширення різних шкірних захворювань в Україні. Обґрунтуванням для подібних досліджень є теорема Такенса. Хаотичність досліджуваної динамічної системи, що задана часовими реалізаціями, встановлена за допомогою показника Ляпунова. Оцінка стійкості стану оцінювалась фрактальною розмірністю Хаусдорфа і індексом фрактальності. Візуальна оцінка часового ряду проводилась за допомогою процедури відновлення фазових траєкторій. В результаті аналізу фазових точок фазового простору виявлено розщеплений аттрактор, що дає можливість говорити про його біфуркацію.

Ключові слова: якісний аналіз, часовий ряд, методи нелінійної динаміки, теорія хаосу, показник Ляпунова, фрактальна розмірність, індекс фрактальності, фазовий простір, аттрактор, біфуркація аттрактора.

И. В. АНТОНОВА, Н. А. ЧИКИНА

ПРЕДПРОГНОЗНИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Предложена процедура качественного анализа временных рядов, для которых не подтверждается гипотеза о наличии тренда, с применением методов нелинейной динамики, теории хаоса. Рассмотрены реальные временные ряды, характеризующие распространенность различных кожных заболеваний в Украине. Основанием для подобных исследований является теорема Такенса. Хаотичность изучаемой динамической системы, заданной временными реализациями, установлена с помощью показателя Ляпунова. Оценка устойчивости состояния оценивалась фрактальной размерностью Хаусдорфа и индексом фрактальности. Визуальная оценка временного ряда проводилась с помощью процедуры восстановления фазовых траекторий. В результате анализа фазовых точек фазового пространства выявлен расщепленный аттрактор, что дает возможность говорить о его бифуркации.

Ключевые слова: качественный анализ, временный ряд, методы нелинейной динамики, теория хаоса, показатель Ляпунова, фрактальная размерность, индекс фрактальности, фазовое пространство, аттрактор, бифуркация аттрактора.

Introduction. The system model is constructed by observed variables. In medicine, ecology, sociology the dynamics of a research object is tracked by time realizations – time series. As a rule, in the time series analysis the methods giving the quantitative forecast (point or interval) are used. For the time series, for which the hypothesis of trend existence isn't confirmed, such methods aren't productive.

Application of the nonlinear dynamical system theory methods to the time series analysis is based on the hypothesis that the available series describes the behavior of the studied system, and it is the only available information about this system. According to the well-known *Takens's theorem* [1] a single time series suffices for an adequate description of a dynamical system as a whole.

The analysis of time series by the methods of nonlinear dynamical system theory is becoming widely applied. In terminology of this theory the process described by time series contains the deterministic chaos, or, in other words, is chaotic. From the linear analysis method point of view they are stochastic processes. The nonlinear analysis demonstrates that *neither can these processes be considered as deterministic ones*, nor are they absolutely random. In other words, only short-term forecasting of the system condition is possible with certain accuracy.

Today, *the chaos theory* remains one of the most widespread ways of forecasting and researching the dynamical system state stability. The purpose of the system stability analysis is identification of all its stationary states. If at least one of the stationary states is for any reasons threatening or undesirable, then its existence gives the chance to develop the preventive measures reducing the probability of the system transition to this state.

One of the most common forms of stability loss is the system state randomization, [1]. The mechanisms of system transition to such state are studied insufficiently. However, the fact that such state is possible requires developing new

system research methods. The research tools of the chaos theory are attractors and fractals. The two prevailing dynamical system randomness criteria are *Lyapunov's indicator* and *the fractal dimension*.

Related publications survey. In [3] it is proved that the low information content of statistical indicators results from the fractal properties intrinsic to the behavior of time series, which empirical distribution function does not conform with the normal distribution. Therefore for detection of the general tendency of time series behavior it is offered to use chaos theory methods giving the chance to carry out the qualitative analysis of the studied time series at the stage of prepropriate analysis. In relation to the dynamics of social and natural systems and processes the chaos theory not only explains the bifurcation phenomena (big falling or big emissions), but also claims that they can't be predicted because the nature isn't a number of the repeating regularities, but is characterized by local randomness and a global order. For this reason many analysts have reasonably assumed that the fractal nature of time series will help them to recognize new regularities in the chaotic movement, [4 – 7].

The main formal characteristics of chaotic processes in the nonlinear dynamical system theory are the phase space and the attractor. One of the system chaotic behavior features is instability of the trajectories belonging to the attractor. Quantitatively this instability is measured by Lyapunov's characteristic indicators. Since the existence of the highest positive Lyapunov's indicator is the criterion of chaotic dynamics, the possibility of its evaluation on the basis of processing the given time series is naturally interesting.

Commonly, nonlinear dynamical systems have fractal attractors, which means that unstable phase trajectories of the systems tend to become fractals in time, [3]. An important moment of the fractal approach is the influence of the random process prehistory on the behavior of the system today. Therefore, this method of the analysis of time series is of particular interest to the researchers.

As a rule, in nature real pure fractals don't exist, and it is possible to speak only about the fractal phenomena. They should be considered merely as models which are fractals approximately in statistical sense. A lot of experimental data have fractal statistics, which can be analyzed and modeled by means of fractal analysis methods, [4, 5].

One of the most popular directions of the fractal analysis is over time studying of the dynamics of such characteristic as fractal dimension. This indicator characterizes the repeatability of statistical values of natural time series with changing scale. The fractal dimension introduced by Hausdorff as D -dimension is the main characteristic of fractal structures, [6, 7].

There are several methods of determining the fractal dimension for time series considered as a set of observable parameters of the studied dynamical system over time. We'll focus on two of them. First of all, it is the classical way of cellular coverage of the time series graphic representation in which the fractal dimension is defined the same way as for geometrical fractals. The second approach for studying fractal time series was offered by Benoit Mandelbrot. It is based on the researches of *the English scientist Hurst* and called *the R/S method*.

For the majority of real time series it is impossible to determine the fractal dimension analytically. Therefore, the value D is quantified, for example, through the Hurst index. In the time series analysis the influence of the present on the future can be expressed by the ratio $C = 2^{2H-1} - 1$, [8].

If a set of flat geometrical figures (cells) with the general geometrical parameter δ is considered as the time series approximation, then by Hausdorff's definition the D -dimension is determined by the law $S(\delta) \sim \delta^{2-D}$ as $\delta \rightarrow 0$, where $S(\delta)$ is the total area of the cells with fragmentation scale δ .

One of the time series stability indicators is the fractality index μ , [9 – 11]. In particular, the advantage of this index before other fractal indicators is that for computing this index with an acceptable accuracy data two orders less than for computing the Hurst indicator H suffice. It gives the chance to carry out the time series local fractal analysis based on the properties of the function $\mu(t)$.

Chaos in dynamical systems implies dynamics' evolution sensitivity to initial conditions changes. It means that two trajectories, close to each other in the phase space at some initial timepoint, diverge exponentially after rather small on the average time t . If d_0 is the distance between two starting points at the initial timepoint, then after time t the distance between the trajectories leaving these points becomes $d(t) = d_0 \cdot e^{2\lambda t}$ or $d_n = d_0 \cdot e^{2\Lambda t}$ in case the system is described by difference equations.

The numbers λ and Λ are called Lyapunov's indicators. Variable $d(t)(d_n)$ can't increase infinitely because of the system limitation. It gives the opportunity to determine the measure of trajectory divergence by averaging the expo-

ponential growth on trajectory points. Then Lyapunov's indicator can be written down as

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \ln \frac{d(t_k)}{d(t_{k-1})}.$$

It is possible to calculate $\lambda(\Lambda)$ in an explicit form only in some cases, such as, for instance, the case of one-dimensional displays: $x_{n+1} = f(x_n)$. When $f(x)$ is smooth and differentiable the distance between the neighboring trajectories is measured by the value $|f'(x)|$. In the case of chaos criterion it is enough to calculate the highest Lyapunov's indicator only.

The review on Lyapunov's indicators and their usage as the movement randomness criterion is given in [2]. Here the references to the existing software products for calculation of these indicators can also be found.

One of the widespread ways of time series visual evaluation relies on the phase trajectory restoration procedure. Possibilities of such phase portrait visual analysis are very limited. However, for identification of complex nonperiodic time realization the phase portrait analysis gives sometimes more information than the data spectral analysis. The advantage of this approach is also that it is applied independently of the fact whether the research object model is constructed or not. Since it is not always possible to receive a suitable model in practice, the real way of the system stability analysis is the nonmodel way of the phase trajectory behavior analysis.

Problem setting. The purpose of this research is the analysis of stability of the morbidity indicator value for various skin pathologies in Ukraine by its time realization using the phase trajectory analysis and qualitative fractal analysis methods.

We determine the fractal dimension for time series by the classical method of cellular coverage of time series graphic image.

Let the observations of scalar equidistant time series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$ be considered on the interval $[0, T]$. We divide the interval into m parts by the points $0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m = T$, where $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta$, $\delta = T/m$ ($i = \overline{1, m}$). We denote such uniform partition of the time series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$ realization interval by ω_m .

We cover the time series image with rectangles with the base δ (scale δ). It is clear, that the height of the rectangle on the interval $[\tau_i, \tau_{i-1}]$ is equal to the variation range $A_i(\delta)$ of the time series values $x(t_i)$ on this interval. We calculate the value $V(\delta) = \sum_{i=1}^m A_i(\delta)$. Then the area of such minimal coverage is $S(\delta) = V(\delta) \cdot \delta$.

By comparing this equality with Hausdorff's D -dimension definition, in [9] it is proved that $S(\delta) \sim \delta^{2-D}$ and $V(\delta) = \delta^{-\mu}$, where $\mu = D_\mu - 1$. The value D_μ is called the minimal coverage dimension, and μ is the fractality index.

When calculating the index μ in the present research the sequence of n enclosed partitions ω_m , where $m = 2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ was used. Each partition consisted of 2^n intervals containing 2^{6-n} observations $x(t_i)$. At the same time, the periods with abnormally large values $x(t_i)$ were excluded from the available realization of the time series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$. The analyzed time series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$ and constructed for it minimal coverage corresponding to $n = 3$ is represented in fig. 1.

For each partition ω_m the value $V(\delta)$ was calculated. The received results of calculations are given below in table 1.

Table 1 – Value of variable V depending on partition scale δ

n	0	1	2	3	4	5	6
V	2352,6	798,8	449,5	439,4	434,6	309,9	170
δ	1	2	4	8	16	32	56

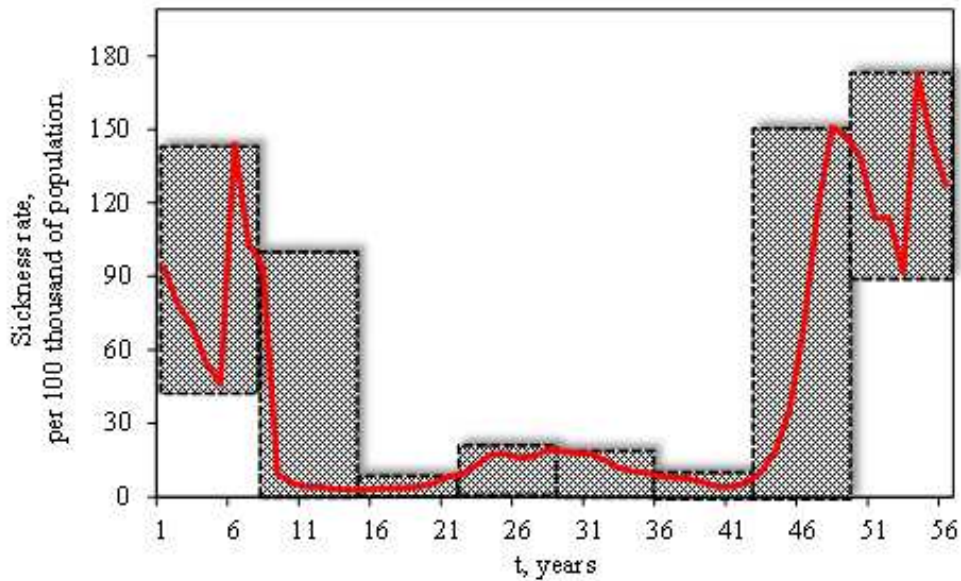


Fig. 1 – Minimal cellular coverage for time series characterizing morbidity of some skin pathologies in Ukraine since 1958.

In fig. 2 the plot of dependence $V(\delta)$ in double logarithmic scale is represented. For determination of the fractality index μ from these data by the Ordinary Least Squares method the regression line equation $y = kx + b$ was set up. Then, according to [10] $\mu = -k$.

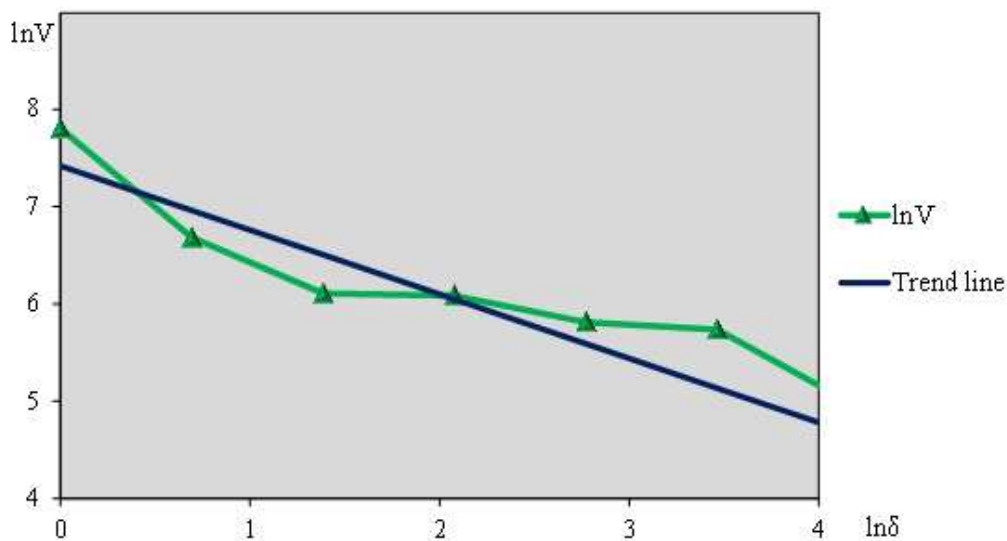


Fig. 2 – Dependence of the variable $V(\delta)$ in double logarithmic scale.

In our case the regression equation has the form: $y = -0,66x + 7,41$. Therefore, at the level of reliability $\alpha = 0,90$ the fractality index of the studied series is $\mu = 0,66 \pm 0,073$.

In the present research the highest Lyapunov's indicator $\lambda(x_1)$ was estimated by the method of comparing phase trajectory evolution points. According to this method, the value $\lambda(x_1)$ for the trajectory $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{1, N}$ of the discrete time series $x_{t+1} = f(x_t)$ was estimated by the formula

$$\lambda(x_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)|,$$

corresponding to the definition of $\lambda(x_1)$ under the condition that the limit on the right-hand side exists. Calculation re-

sults of the highest Lyapunov's indicator $\lambda(x_1)$ for the time series given in fig. 1 are represented in table 1.

The carried-out calculations have demonstrated that for the given time series $\lambda(x_1) \approx 1,18$, i.e. $\lambda(x_1) > 0$, therefore, the trajectory is chaotic.

Table 2 – Evaluation of the highest Lyapunov's indicator $\lambda(x_1)$

N	$\sum_{i=1}^N \ln f'(x_i) $	$\lambda(x_1)$
10	4,013525	0,401353
20	3,092552	0,154628
30	21,13338	0,704446
40	39,99184	1,080860
47	55,486649	1,180567

Often the situations occur when one lacks the observed values for the dynamical description of an object, that is for setting its state $\bar{x}(t)$. There exist several methods for increasing the number of variables. The time delay method is the simplest and the most popular one. In case of scalar time series the consecutive values of the series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$ separated by some interval τ (delay period) are used as the components of the state vector $\bar{x}(t)$. Thus, in the phase plane the state S_i of the research object is described by the components $\{x(t_i); x(t_i + \tau)\}$ of the time series $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$.

The phase portrait allows to identify the system behavior features important from the stability point of view. To search for an attractor in the case of two (three) factors a phase space is constructed and the position of phase points is analyzed. If they are distributed uniformly, then the attractor existence hypothesis isn't confirmed.

The phase portraits constructed for the time series shown in fig. 1 are represented in fig. 3. The value of the time delay τ is 1 year.

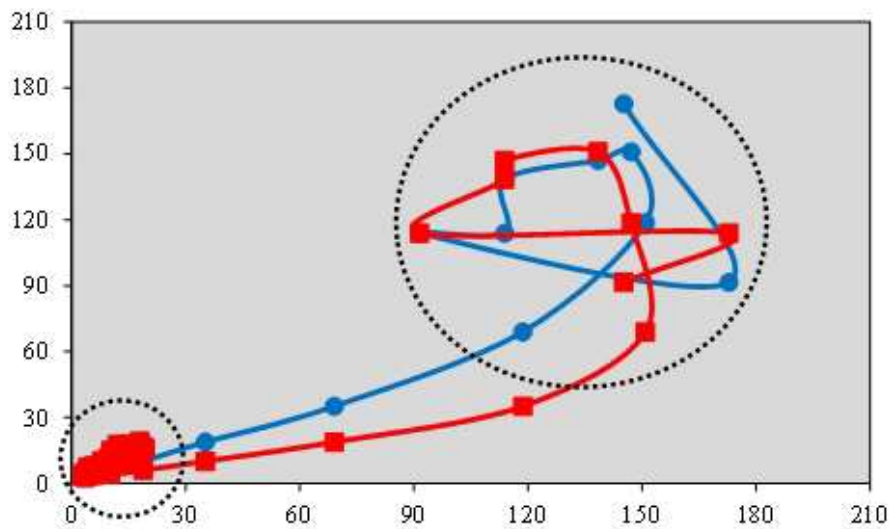


Fig. 3 – Phase portraits of the time series.

When fig. 3 is closely examined, it is seen that there are two areas of phase points thickening. They can be considered as the split attractor.

In other words, attractor bifurcation takes place. Usually it is connected with appearance in the system of such state changes which can be interpreted as spasmodic or close to them. In the medical data analysis the attractor bifurcation entails sudden crisis change of system condition with high probability.

Conclusion. The value of the highest characteristic Lyapunov's indicator $\lambda(x_1) \approx 1,18$ demonstrates randomness in dynamics of the studied indicator.

The computed value of the fractality index, which is the stability indicator for the initial time series, is $\mu = 0,66 \pm 0,073$, i.e. $\mu > 0,5$. This value is interpreted as flat, which indicates the condition of relative stability for the studied process. In other words, extreme changes in the structure of morbidity of various skin pathologies in Ukraine aren't predicted in the nearest future.

The evaluation of the correlation ratio is $C \approx -0,08$. It implies almost complete absence of influence of the present on the future in the studied time series, which also confirms the series trendlessness hypothesis.

The analysis of the phase portraits of time series, in particular detection of the attractor bifurcation, gives reason to speak about a possible spike or spasmodic change of the morbidity indicator of some skin pathologies in Ukraine.

Bibliography

1. Takens F., Rand D. A., Young L.-S. Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. – Springer-Verlag, 1981. – vol. 898. – pp. 366 – 381.
2. Мун Ф. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров : Пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
3. Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass / F. Hausdorff // *Matematische Annalen*. – 1919. – 79. – P. 157–179.
4. Федер Е. Фракталы. – М. : Мир, 1991. – 262 с.
5. Кронвер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.
6. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. – Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005. – 320 с.
7. Дубовиков М. М., Крянев А. В., Старченко Н. В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // *Вестник РУДН*, 2004. – Т3. – № 1. – С. 81 – 95.
8. Малинецкий Г. Г., Потанов А. В., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. – М. : Комкнига, 2006. – 216 с.
9. Figliola A., Serrano E., Paccosi G. About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2010. – Vol. 20 (2). – P. 331 – 339.
10. Delignieres D., Torre K. Fractal dynamics of human gait : a reassessment of the 1996 data of Hausdorff et al. // *Journal of Applied Physiology*. – 2009. – 106. – P. 1272 – 1279.
11. Старченко Н. В. Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности : автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук / Н.В. Старченко. – Москва, 2005. – 22 с.

References (transliterated)

1. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1981, vol. 898, pp. 366–381.
2. Mun F. *Khaoticheskie kolebaniya. Vvodnyy kurs dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Chaotic oscillation: an introduction course for scientists and engineers]. Moscow, Mir Publ., 1990. 312 p.
3. Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass. *Matematische Annalen*. 1919, no. 79, pp. 157–179.
4. Feder E. *Fractaly* [Fractals]. Moscow, Mir Publ., 1991. 262 p.
5. Kronover R. *Fractaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamic systems]. Moscow, Postmarket Publ., 2000, 352 p.
6. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. *Matematischeskoe modelirovanie i khaoticheskie vremennye ryady* [Mathematical modeling and chaotic time series]. Saratov, GosUNTs "Kolledzh" Publ., 2005. 320 p.
7. Dubovikov M. M., Kryanev A. V., Starchenko N. V. Razmernost' minimal'nogo pokrytiya i lokal'nyy analiz fraktal'nykh vremennykh ryadov [Dimension of minimal coverage and local analysis of fractal time series]. *Vestnik RUDN*. 2004, vol. 3, no. 1, pp. 81–95.
8. Malinetskiy G. G., Potapov A. V., Podlazov A. V. *Nelineynaya dinamika. Podkhody, rezul'taty, nadezhdy* [Nonlinear dynamics. Approaches, results, hopes]. Moscow, Komkniga Publ., 2006. 216 p.
9. Figliola A., Serrano E., Paccosi G. About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2010, vol. 20 (2), pp. 331–339.
10. Delignieres D., Torre K. Fractal dynamics of human gait : a reassessment of the 1996 data of Hausdorff et al. *Journal of Applied Physiology*. 2009, no. 106, pp. 1272–1279.
11. Starchenko N.V. *Lokalnyy analiz khaoticheskikh vremennykh ryadov s pomoshchyu indeksa fraktal'nosti : avtoref. diss. na soiskanie uchenoy stepeni kand. fiz.-mat. nauk* [Local Analysis of Chaotic Time Series Using the Fractality Index. Abstract of a thesis candidate of physical and mathematical sciences. (Ph. D.)]. Moscow, 2005. 22 p.

Received (поступила) 17. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Антонова Ірина Володимирівна (Антонова Ирина Владимировна, Antonova Iryna Vladimirovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-98-33; e-mail: antonova2601@gmail.com.

Чікіна Наталія Олександрівна (Чикина Наталия Александровна, Chikina Natalia Aleksandrovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-93; e-mail: nachikina56@gmail.com.

V. N. BURLAYENKO, T. SADOWSKI, D. PIETRAS

A NUMERICAL ANALYSIS OF NEAR TIP FIELDS IN A BENDING MOMENT-LOADED DOUBLE CANTILEVER SANDWICH BEAM FRACTURE SPECIMEN

The paper presents an interfacial crack problem adopted for studying fracture toughness and debonding tolerance of sandwich composite materials. A specific example of the fracture sandwich specimens such as a double cantilever sandwich beam subjected to uneven bending moments (DCB-UBM) is considered. A finite element modelling of this test method is carried out using the ABAQUS™ code. A two-dimensional (2-D) model has been developed to highlight the distribution of stress and displacement fields and to calculate the energy release rate (ERR) and the phase angle at the interface crack between two dissimilar orthotropic materials. The J – integral approach built-in ABAQUS code and the crack surface displacement method programmed as an add-on subroutine within the Matlab® environment are used for computing those fracture parameters. The influence of different moment ratios on the near crack tip stress state, the ERR, and phase angle fracture parameters is estimated.

Key words: double cantilever sandwich beam, bi-material interface, fracture parameters, finite element method, ABAQUS™.

В. М. БУРЛАЄНКО, Т. САДОВСЬКИЙ, Д. ПЕТРАС

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПОЛІВ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ТРИЩИНИ У ДВОКОНСОЛЬНОМУ БАЛОЧНОМУ ТРИШАРОВОМУ ЗРАЗКУ, ЩО НАВАНТАЖЕНИЙ ЗГИНАЛЬНИМИ МОМЕНТАМИ

Представлено проблему міжфазної тріщини, за допомогою якої вивчаються в'язкість руйнування та стійкість до відшарування у тришарових композиційних матеріалах. Розглянуто конкретний приклад тришарового зразка на руйнування – двоконсольна тришарова балка, яка навантажена згинальними моментами. Скінчено елементне моделювання цього тесту здійснюється за допомогою програми ABAQUS™. Двовимірний модель була розроблена для виявлення розподілу полів напружень та переміщень, а також для розрахунку швидкості вивільнення енергії руйнування та фазового кута міжфазної тріщини поміж двома різними ортотропними матеріалами. J – інтеграл підхід, який є вбудованою опцією у ABAQUS, та метод відносних зміщень на поверхнях тріщини, який запрограмований у середовищі Matlab® окремою програмою, використовуються для обчислення цих параметрів руйнування. Оцінюється вплив різних співвідношень згинальних моментів на напружений стан в околі вершини тріщини, швидкості вивільнення енергії руйнування і фазовий кут.

Ключові слова: двоконсольний балочний тришаровий зразок, інтерфейс біматеріалу, параметри руйнування, метод скінчених елементів, ABAQUS™.

В. Н. БУРЛАЄНКО, Т. САДОВСКИЙ, Д. ПЕТРАС

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ДВУХКОНСОЛЬНОМ БАЛОЧНОМ ТРЕХСЛОЙНОМ ОБРАЗЦЕ, НАГРУЖЕННОМ ИЗГИБАЮЩИМИ МОМЕНТАМИ

Представлена задача межфазной трещины, с помощью которой изучается вязкость разрушения и устойчивость к отслоению в трехслойных композиционных материалах. Рассмотрен конкретный пример трехслойного образца на разрушение – двухконсольная трехслойная балка, нагруженная изгибающими моментами. Конечно элементное моделирование этого теста осуществляется с помощью программы ABAQUS™. Двухмерная модель была разработана для моделирования распределения полей напряжений и перемещений, а также для расчета скорости высвобождения энергии разрушения и фазового угла межфазной трещины между двумя различными ортотропными материалами. J – интеграл подход, который является встроенной опцией в ABAQUS, и метод относительных смещений на поверхностях трещины, который запрограммирован в среде Matlab® отдельной программой, используются для вычисления этих параметров разрушения. Оценивается влияние различных соотношений изгибающих моментов на напряженное состояние в окрестности вершины трещины, скорости высвобождения энергии разрушения и фазовый угол.

Ключевые слова: двухконсольный балочный трехслойный образец, интерфейс биматериала, параметры разрушения, метод конечных элементов, ABAQUS™.

Introduction. New materials such as sandwich composites have been developed to provide the strength of the structure at minimum its weight. Such materials being considered as an assemblage of two stiff and tough face sheets (skins) bonded to a soft and light core have become much used in a wide range of engineering fields. With the growth of the application of sandwich materials, their strength and damage tolerance should be well predicted. Particularly, the problem of interface crack in the face sheet-to-core interface or so-called debonding is often encountered failure mode of sandwich structural components [1]. Because the sandwich material interface is, in essence, a bi-material system, stress concentration takes place there, as a result the crack originates mainly from the interface. Once such a crack occurs, the load bearing capacity of the sandwich structure is significantly reduced, and the integrity is compromised because of the imminent risk of debonding propagation. Thus, proper evaluation of interface fracture parameters is important.

A standard approach to provide the resistance of the sandwich material against the debonding is based on an appropriate test method with the assumptions of linear fracture mechanics defining the fracture toughness value. In doing so, the interface flaw is to be treated as a crack between dissimilar materials. Moreover, it should be taken into account that such interface cracks propagate mostly in mixed mode conditions, in contrast to cracks developing in homogeneous materials in pure mode I load. Hence, the interface fracture toughness is dependent on the loading phase angle and can't be presented by a single quantity but rather is a function of the phase angle [2].

A variety of sandwich specimens for measuring interfacial fracture toughness has been proposed [3]. An effective and relatively simple testing method among many others is a double cantilever beam (DCB) sandwich specimen. Also, if this specimen is subjected to uneven bending moments (DCB-UBM) it will allow for testing over a large range of mode-

mixities by varying direction and magnitude of moments only. Moreover, this type of loading produces a stable crack growth, since the crack loading does not change with crack length [4]. However, although all the specimens are able to characterize fracture toughness of the sandwich material, they cannot present a distribution of near tip stress and displacement fields. The latter is of importance to understand the fracture behaviour of sandwich structures and, also, to develop analytical or numerical methods for debonding growth predictions.

The objective of this paper is to develop an accurate finite element model for predictions of near tip stress and displacement fields in a particular sandwich fracture test called a DCB-UBM specimen, which is used for experimental measurements of interfacial fracture toughness. Moreover, we aim to present a method for calculations of fracture parameters such as the energy release rate (ERR) and the phase angle in the DCB-UBM sandwich specimen consisting of dissimilar orthotropic constitutive material layers. Also, we study the dependence of these parameters on the loading phase angle.

Fundamentals of interface fracture. Let us consider a crack along the interface between two linearly elastic, homogeneous, anisotropic materials. The materials are defined by the material tensors $C_{ij}^{(\alpha)}$, which are a contracted notation of the fourth order elastic constant tensors $C_{ijkl}^{(\alpha)}$, respectively. The subscripts $\alpha = \#1, \#2$ refer to material #1, above the interface, and material #2, below the interface, as shown in Fig. 1.

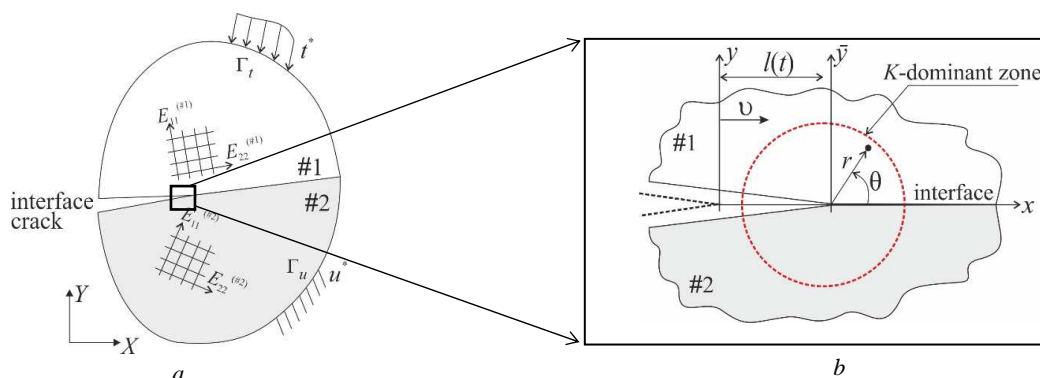


Fig. 1 – A general model of the interface crack: *a* – an interface crack between orthotropic materials; *b* – a schematic representation of *K* – dominant zone for bi-material interface crack growth.

The structure of the stress and displacement fields at the tip of either stationary crack or a crack propagating dynamically with speed v follows from the solution of the eigenvalue problem induced by the traction free boundary conditions on the crack flanks (Fig. 1, *b*) and can be described as follows [5]:

$$\bar{\mathbf{H}}\mathbf{w} = e^{2\pi\varepsilon}\mathbf{H}\mathbf{w}. \quad (1)$$

Here \mathbf{w} is the normalized unit eigenvector; \mathbf{H} is a positive defined compliance-like Hermitian matrix involving the bi-material elastic constants $C_{ijkl}^{(\alpha)}$ and $\bar{\mathbf{H}}$ is the complex conjugate matrix; ε is the oscillation index given by $\varepsilon = 1/2\pi \ln(1 - \beta)/(1 + \beta)$, where $\beta = -\sqrt{-1/2\text{tr}\{(\Im m[\mathbf{H}]/\Re e[\mathbf{H}])^2\}}$ is one of the two Dundurs parameters. The three eigenpairs of (1) have the form $(\varepsilon, \mathbf{w})$, $(-\varepsilon, \bar{\mathbf{w}})$ and $(0, w_3)$, where \mathbf{w} , $\bar{\mathbf{w}}$ and w_3 are complex, complex conjugate and real eigenvectors, respectively.

The near tip stress fields are a linear combination of two types of singularities such as a coupled oscillatory field scaled by a complex stress intensity factor (SIF) $\mathbf{K} = K_1 + iK_2$ and a non-oscillatory field scaled by a real factor K_3 [6]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \Re e[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}] \sum_{ij}^{(1)}(\theta) + \Im m[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}] \sum_{ij}^{(2)}(\theta) + K_3 \sum_{ij}^{(3)}(\theta) \right\}, \quad (2)$$

where (r, θ) are polar coordinates and $\sum_{ij}^{(k)}(\theta)$ with $k=1, 2, 3$ are the angular functions corresponding to in-plane opening and shearing and anti-plane shearing tractions across the bi-material interface, Fig. 1, *b*. Herewith, the components of the complex stress intensity factor K_1 and K_2 are no more individual stress amplitudes for respectively mode I and II.

Projecting the actual stress state (2) onto the eigenvectors \mathbf{w} , $\bar{\mathbf{w}}$ and w_3 mentioned earlier, the generalized components of the stress vector $\mathbf{t} = \{\sigma_{2j}\}$ at the crack tip ($\theta = 0$) as $r \rightarrow 0$ asymptote to

$$\mathbf{t}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ \mathbf{K}\mathbf{w} \left(\frac{r}{\hat{l}} \right)^{i\varepsilon} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{w}} \left(\frac{r}{\hat{l}} \right)^{-i\varepsilon} + 2K_3 w_3 \right\}, \quad (3)$$

where \hat{l} is a characteristic length of the problem under consideration (a specific distance from the crack tip used to

avoid the dependence of dimension of the complex SIF on the oscillation index ε).

Similarly, the relative crack flank displacements at a distance r behind the crack tip ($\theta = \pm\pi$) are defined as

$$\delta(r) = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{\cosh \pi\varepsilon}{1+2i\varepsilon} \mathbf{K}\mathbf{v} \left(\frac{r}{\hat{l}}\right)^{i\varepsilon} + \frac{\cosh \pi\varepsilon}{1-2i\varepsilon} \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{v}} \left(\frac{r}{\hat{l}}\right)^{-i\varepsilon} + K_3 v_3 \right\}, \quad (4)$$

where the auxiliary vectors \mathbf{v} and v_3 are introduced for convenience as follows: $(\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1})\mathbf{v} = \mathbf{w}$ and $(\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1})v_3 = w_3$, respectively.

The ERR and the phase angle are related to the SIFs as follows:

$$g = \frac{\bar{\mathbf{w}}^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \mathbf{w}}{4 \cosh^2 \pi\varepsilon} |\mathbf{K}|^2 + \frac{1}{8} w_3^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) w_3 K_3^2 \quad (5)$$

and

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\Im m [\mathbf{K}\hat{l}^{i\varepsilon}]}{\Re e [\mathbf{K}\hat{l}^{i\varepsilon}]} \right). \quad (6)$$

Determination of face sheet-to-core interface fracture parameters. The face sheet-to-core interface of modern sandwich materials usually is a bi-material system of two highly dissimilar orthotropic materials. In the case of two orthotropic materials with their axes of symmetry aligned along the material face sheet-to-core interface, the matrix \mathbf{H} takes the form [7]:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left[2n\lambda^{1/4} \sqrt{s_{11}s_{22}} \right]_{\#1} + \left[2n\lambda^{1/4} \sqrt{s_{11}s_{22}} \right]_{\#2}, \quad H_{22} = \left[2n\lambda^{-1/4} \sqrt{s_{11}s_{22}} \right]_{\#1} + \left[2n\lambda^{-1/4} \sqrt{s_{11}s_{22}} \right]_{\#2}, \\ H_{12} &= \bar{H}_{21} = i \left[\sqrt{s_{11}s_{22}} + s_{12} \right]_{\#1} - \left[\sqrt{s_{11}s_{22}} + s_{12} \right]_{\#2}, \\ H_{33} &= \left[\sqrt{s_{44}s_{55}} \right]_{\#1} + \left[\sqrt{s_{44}s_{55}} \right]_{\#2}, \quad H_{13} = H_{31} = H_{23} = H_{32} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

where $s_{11} = 1/E_1$, $s_{22} = 1/E_2$, $s_{12} = s_{21} = -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2$, $s_{44} = 1/G_{13}$, $s_{55} = 1/G_{23}$, $s_{66} = 1/G_{12}$ are constants in plane stress and they are transformed in plane strain as $\tilde{s}_{ij} = s_{ij} - s_{i3}s_{3j}/s_{33}$, $\lambda = s_{11}/s_{22} = E_2/E_1$ and $\rho = (2s_{12} + s_{66})/2\sqrt{s_{11}s_{22}} = \sqrt{E_1E_2}/2G_{12} - \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}$ are parameters of anisotropy; and $n = \sqrt{(1+\rho)/2}$.

Moreover, one can express the eigenvectors in (1) as $\mathbf{w} = \{-i/2, 1/2\sqrt{H_{11}/H_{22}}, 0\}$ and $w_3 = \{0, 0, 1\}$. The Dundurs parameter via the components of the matrix \mathbf{H} in (7) takes the form: $\beta = iH_{12}/\sqrt{H_{11}H_{22}}$.

The stress vector (3) and the relative displacements vector (4) for a 2-D state can also be determined via the complex SIFs and the components of the matrix \mathbf{H} as follows:

$$\sqrt{\frac{H_{22}}{H_{11}}} \sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{\hat{l}}\right)^{i\varepsilon} \quad (8)$$

and

$$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22}}} \delta_y + i\delta_x = \frac{2H_{11}\mathbf{K}}{\sqrt{2\pi}(1+2i\varepsilon)\cosh \pi\varepsilon} \left(\frac{r}{\hat{l}}\right)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon}, \quad (9)$$

where σ_{yy} and σ_{xy} are transverse normal and shear stress tensor components in front of the crack tip; δ_y and δ_x are the opening and sliding relative displacement of the crack flanks.

In turn, the displacement field stated in (9) is used to express the ERR (5) and the mode-mixity (6) in terms of the relative crack flank displacements as follows:

$$g = \frac{H_{11}|\mathbf{K}|^2}{4 \cosh^2 \pi\varepsilon} = \frac{\pi(1+4\varepsilon^2)}{8H_{11}(r/\hat{l})} \left(\frac{H_{11}}{H_{22}} \delta_y^2 + \delta_x^2 \right) \quad (10)$$

and

$$\psi = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22}}} \frac{\delta_x}{\delta_y} \right) - \varepsilon \ln \left(\frac{r}{\hat{l}} \right) + \tan^{-1}(2\varepsilon). \quad (11)$$

In the case of steady state conditions, the energy release rate defined by (5) or (10) can be calculated using the domain J -integral formula suitable for using the finite element solution to calculate the ERR for the interface crack [8]:

$$g = J = \sum_{k=\#1,\#2} \int_{A^{(k)}} \left[\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} \right) \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} - W^{(k)} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] dA, \quad (12)$$

where A is the domain enclosed by an arbitrary contour, Γ , surrounding a crack tip and crack surfaces; the weighting parameter q is a smooth function of $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$, it takes values from zero on the Γ contour to unity at the crack tip; $\boldsymbol{\sigma}$ and \mathbf{u} are the stress tensor and the displacement vector at a material point \mathbf{x} ; W is the strain energy density at the point \mathbf{x} .

The Crack Surface Displacement (CSD) method [9, 10] fits classical bi-material interface theory solutions (5), (6) into a FE analysis framework by Eqs. (10), (11) to directly calculate the energy release rate and mode mixity of a bi-material crack. In accordance with this method, values of the ERR obtained from the different nodal relative displacements along the crack flanks by (10) are linearly extrapolated into $r \rightarrow 0$. Then, the extrapolated value of the ERR is compared with the value of $|K|$ defined by the J -integral method by (12), as a result a critical distance r_c , at which the two values of the ERR are equal within a given tolerance, is used to compute the phase angle by (11). Moreover, using the values for the ERR and the phase angle, the components of the complex SIF, K_1 and K_2 can be also found.

Finite element modelling. The finite element (FE) model of a double cantilever beam sandwich specimen (Fig. 2, a) subjected to uneven bending moments (DCB-UBM) has been developed in the commercial FE package ABAQUS [11]. The eight-node isoparametric plane strain finite elements were used for creating the 2-D model. The FE mesh contained a refinement near the crack-tip region, as shown in Fig. 2, b.

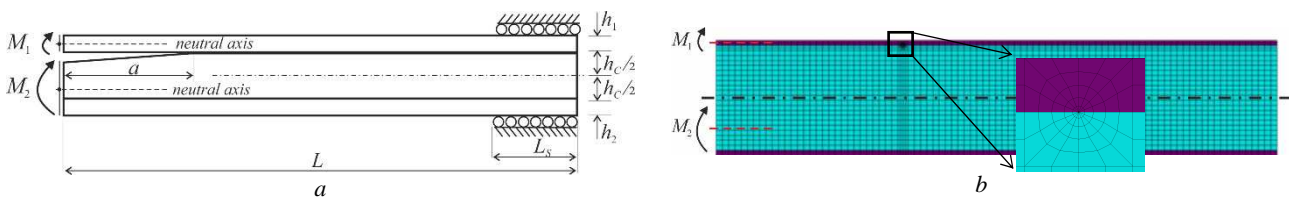


Fig. 2 – A DCB-UBM sandwich specimen:

a – a schematic representation of the specimen; b – a FE model of the specimen with mesh refinement around the crack tip.

The debonded region of the specimen was modelled using a double set of nodes with coinciding coordinates along the face sheet-to-core interface. A rosette of quarter-point singular finite elements has been inserted into the mesh around the crack tip to reproduce the square root singularity at the crack front. Moreover, when both applied moments were rotating the arms of the specimen in same directions (co-rotated), contact conditions were imposed on the surfaces of the finite elements defining the debonded region in order to avoid non-physical interpenetration between them. The frictionless hard contact model within the penalty contact algorithm available in ABAQUS [12, 13] was used in the simulations.

The energy release rate g was determined from the FE solution by using both the relative nodal pair displacements along the crack flanks by (10) and the J -integral by (12). In the former case, an add-on subroutine was developed in Matlab® environment. The subroutine extracted the finite element displacements at given nodal sets from the database file of the ABAQUS' static analysis. The J -integral method is a built-in option in ABAQUS. In those calculations, the value of g was averaged over at least five contours chosen around the interface crack tip. The phase angle ψ was also determined from the finite element analysis using the Matlab subroutine, which post-processed the results in accordance with the CSD method outlined in the previous section.

Numerical results and discussions. The modelled sandwich beam specimen consisted of laminated composite face sheets made of graphite fibre reinforced plastic (GFRP) bonded to a 100 kg/m^3 (H 100) PVC foam core. The elastic properties used in the model for the laminated composite face sheets and PVC foam core (both considered orthotropic) are listed in Table 1.

Table 1 – Material properties of the DCB – UBM specimen

Constituent	Material constants
1. GFRP face sheet	$E_x = E_z = 16.5 \text{ GPa}$, $E_y = 3.8 \text{ GPa}$, $G_{xy} = G_{xz} = 1.8 \text{ GPa}$, $G_{yz} = 6.6 \text{ GPa}$, $\nu_{xy} = 0.05$, $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.25$, $\rho = 1650 \text{ kgm}^{-3}$
2. PVC H 100 foam core	$E_x = E_y = E_z = 105 \text{ MPa}$, $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 78 \text{ MPa}$, $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.325$, $\rho = 100 \text{ kgm}^{-3}$

The moment-ratio (M_R) is defined as the ratio of the moments applied at the debonded face sheet (M_1) to the substrate (M_2) i.e. $M_R = M_1 / M_2$ (see Fig. 2). Different moment ratios, where the bending moments were either co-rotated or rotated in opposite directions but induced nearly the same value of the ERR have been examined in the studies. The finite element predictions of the ERR and the phase angle regarding M_R are presented in Table 2.

The contour plots of the stress tensor components associated with the ratios M_R in Table 2 are illustrated in Fig. 3, where the first row of the images corresponds to σ_{xx} , the second one to σ_{yy} , and the last one to σ_{xy} . A complicated nature of the near-tip stress field is clearly observed there. One can see that the shear stress exists in the vicinity of crack

regardless of the loading case as seen in the third row of Fig. 3. This clearly emphasizes conditions of mode mixity being expected in a sandwich type structure.

Table 2 – The energy release rate and the phase angle with respect to the moment ratios, M_R

M_1 , N mm	75.6	103.42	123.4	104.13	73.8
M_2 , N mm	-1512.2	-1034.2	-123.4	1041.3	1476
M_R / Fracture parameters	-0.05	-0.1	-1	0.1	0.05
ERR, g , N mm ²	0.399	0.399	0.403	0.399	0.377
Phase angle, ψ , deg.	30.26	11.31	-17.16	-51.87	-70.71

Table 3 – The energy release rate mode I component and the angle of the principal plane with respect to the moment ratios, M_R

M_R / Parameters	-0.05	-0.1	-1	0.1	0.05
ERR, g_I , %	66.2	84.8	78.4	48.5	33.1
Angle, ϑ , deg.	42.32	37.72	29.28	-7.26	-12.68

Moreover, the sign of the shear stress ahead crack may be used to define a favourable direction of interface crack propagation if the crack growth in the bi-material structure is postulated by the plane of maximum principal stresses [14]. For the sake of estimation, the contribution of mode I component into the total ERR and the angle of the principal plane, ϑ with respect to the value of M_R has been evaluated. The values of these computed parameters are shown in Table 3. A preferred direction of the crack growth predicted by the angle ϑ is demonstrated in Fig. 3 as well. From these outcomes one can conclude that the positive shear stress at the crack tip results in upward crack growth along the face sheet-to-core interface, but the negative one causes a downward crack growth into the core. Herewith, the latter case is featured by the dominant mode II stress state as shown in Table 3 and Fig. 3 for M_R equal to 0.1 and 0.05.

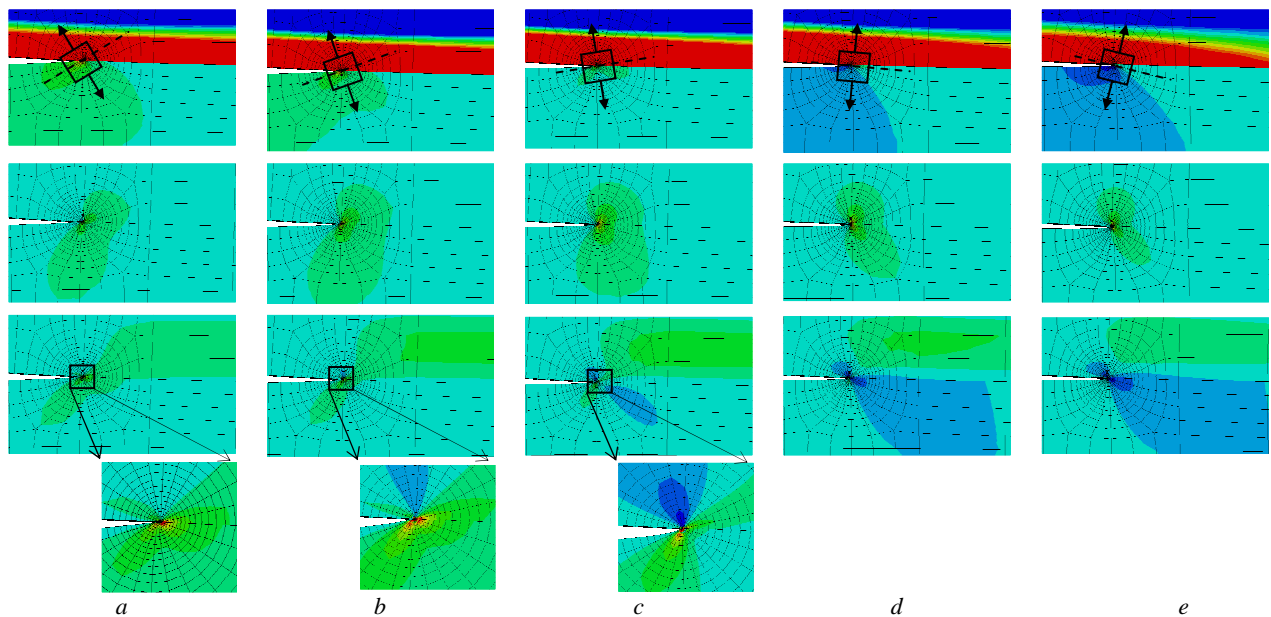


Fig. 3 – Contour plots of the stress tensor components at the crack tip of the DCM-UBM specimen w.r.t. the moment ratio M_R :
 $a - M_R = -0.05$; $b - M_R = -0.1$; $c - M_R = -1$; $d - M_R = 0.1$; $e - M_R = 0.05$.

Conclusions. In this research, the problem of stationary debonding in sandwich materials consisting of orthotropic material layers is considered and the theoretical background of the problem is highlighted. A two-dimensional finite element model for predicting the energy release rate, phase angle and stress state in the DCB-UBM sandwich specimen by tools available in the ABAQUS code and with additional procedures programmed within Matlab for post-processing the finite element solution in accordance with the Crack Surface Displacement method is presented.

The simulations showed that regardless of the loading case defined by the ratio of bending moments, the mixed mode conditions occur in the sandwich specimen. This is due to the bi-material nature of the interface crack. In doing so, the shear stress exciting in the vicinity of crack may be used as an important parameter to predict a preferred interface crack growth direction.

Acknowledgements. The results presented in this paper were obtained within the framework of the research grant No. UMO/2016/21/B/ST8/01027 of the National Science Centre, Poland, which is co-funded by the European Union's Horizon 2020 programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 665778.

Bibliography

1. Burlayenko V. N., Sadowski T. Linear and nonlinear dynamic analyses of sandwich panels with face sheet-to-core debonding // *Shock and Vibration*. – 2018. – Т. 2018. – 26 с. doi: 10.1155/2018/5715863.
2. Szekrényes A. *Delamination of composite specimens* : Ph.D. thesis. – Hungary, 2005. – 130 p.
3. Shivakumar K. N., Smith S. A. In situ fracture toughness testing of core materials in sandwich panels // *Journal of Composite Materials*. – 2004. – Т. 38. – С. 655 – 658. doi: 10.1177/0021998304042392.
4. Sorensen B. F., Jorgensen K., Jacobsen T. K., Ostregaard R. C. DCB-specimen loaded with uneven bending moments // *International Journal of Fracture*. – 2006. – Т. 141. – С. 163 – 176. doi: 10.1007/s10704-006-0071-x.
5. Yang W., Suo Z., Shih C. F. Mechanics of dynamic debonding // *Proceedings of the Royal Society London A*. – 1991. – Т. 433. – С. 679 – 697. doi: 10.1098/rspa.1991.0070.
6. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // *Journal of Applied Mechanics*. – 1992. – Т. 29. – С. 63 – 191. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70164-9.
7. Wang T. C., Shih C. F., Suo Z. Crack extension and kinking in laminates and bicrystals // *International Journal of Solids and Structures*. – 1992. – Т. 29. – С. 327 – 344. doi: 10.1016/0020-7683(92)90203-6.
8. Atluri S. N. *Computational methods in the mechanics of fracture*. – New York, Elsevier Science Ltd., 1986. – 424 с.
9. Smelser R. E. Evaluation of stress intensity factors for bimaterial bodies using numerical crack flank displacement data // *International Journal of Fracture*. – 1979. – Т. 15. – № 2. – С. 135 – 142. doi: 10.1007/BF00037829.
10. Matos P. P. L., McMeeking R. M., Charalambides P. G., Drory M. D. A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture // *International Journal of Fracture*. – 1989. – Т. 40. – С. 235 – 254. doi: 10.1007/BF00963659.
11. *ABAQUS User's manual Version 2016*. – Dassault Systèmes Simulia Corp., 2016.
12. Бурлаєнко В. М., Морачковський О. К. Застосування кінематичного контактного алгоритму з явною схемою інтегрування за часом у скінченноелементних задачах динаміки тіла з тріщиною // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Сер. : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54. – Вип. 960. – С. 19 – 25.
13. Бурлаєнко В. М., Морачковський О. К. Скінченноелементна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, границі якої контактують // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Сер. : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 2. – С. 44 – 51.
14. Adams D. O., Kessler J. A., Kuramoto B., Bluth J., Weaver C., Gill A. Development and evaluation of fracture mechanics test methods for sandwich composites // *Proceedings of the FAA JAMS Technical Review Meeting (July 21–22, 2010 p., USA)*. – Wichita : KS, 2010. – 29 с.

References (transliterated)

1. Burlayenko V. N., Sadowski T. Linear and nonlinear dynamic analyses of sandwich panels with face sheet-to-core debonding. *Shock and Vibration*. 2018, vol. 2018, 26 p. doi: 10.1155/2018/5715863.
2. Szekrényes A. *Delamination of composite specimens* : Ph.D. thesis. Hungary, 2005. 130 p.
3. Shivakumar K. N., Smith S. A. In situ fracture toughness testing of core materials in sandwich panels. *Journal of Composite Materials*. 2004, vol. 38, pp. 655–658. doi: 10.1177/0021998304042392.
4. Sorensen B. F., Jorgensen K., Jacobsen T. K., Ostregaard R. C. DCB-specimen loaded with uneven bending moments. *International Journal of Fracture*. 2006, vol. 141, pp. 163–176. doi: 10.1007/s10704-006-0071-x.
5. Yang W., Suo Z., Shih C. F. Mechanics of dynamic debonding. *Proceedings of the Royal Society London A*. 1991, vol. 433, pp. 679–697. doi: 10.1098/rspa.1991.0070.
6. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. *Journal of Applied Mechanics*. 1992, vol. 29, pp. 63–191. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70164-9.
7. Wang T. C., Shih C. F., Suo Z. Crack extension and kinking in laminates and bicrystals. *International Journal of Solids and Structures*. 1992, vol. 29, pp. 327–344. doi: 10.1016/0020-7683(92)90203-6.
8. Atluri S. N. *Computational methods in the mechanics of fracture*. New York, Elsevier Science Ltd., 1986, 424 p.
9. Smelser R. E. Evaluation of stress intensity factors for bimaterial bodies using numerical crack flank displacement data. *International Journal of Fracture*. 1979, vol. 15, no. 2, pp. 135–142. doi: 10.1007/BF00037829.
10. Matos P. P. L., McMeeking R. M., Charalambides P. G., Drory M. D. A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture. *International Journal of Fracture*. 1989, vol. 40, pp. 235–254. doi: 10.1007/BF00963659.
11. *ABAQUS User's manual Version 2016*. Dassault Systèmes Simulia Corp., 2016.
12. Burlayenko V. N., Morachkovskiy O. K. Zastosuvannya kinematychnogo kontaktnogo algoritmu z yavnoyu skkhemoyu integruvannya za chasom u skinchennoelementnykh zadachakh dynamiky tila z trishchynoyu [An application of a kinematic contact algorithm within an explicit time-integration scheme in finite element problems for dynamics of a body with a crack]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modelling in engineering and technology]. 2012, no. 54, issue 960, pp. 19–25.
13. Burlayenko V. N., Morachkovskiy O. K. Skinchennoelementna model' nelineynoyi dynamiky tila z trishchynoyu, granytsi yakoyi kontaktuyut'. [Finite element model of nonlinear dynamics of a body with a crack whose boundaries are in contact]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modelling in engineering and technology]. 2012, no. 2, pp. 44–51.
14. Adams D. O., Kessler J. A., Kuramoto B., Bluth J., Weaver C., Gill A. *Development and evaluation of fracture mechanics test methods for sandwich composites*. Proceedings of the FAA JAMS Technical Review Meeting. Wichita, KS, 2010. 29 p.

Received (надійшла) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Burlayenko Vyacheslav Nikolayevich (Бурлаєнко В'ячеслав Миколайович, Бурлаєнко Вячеслав Николаевич) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Люблінський технологічний університет, м. Люблін; тел.: (057) 707-60-33; e-mail: burlayenko@yahoo.com.

Sadowski Tomasz (Садовський Томаш, Садовський Томаш) – доктор технічних наук, професор, Люблінський технологічний університет, м. Люблін; тел.: +48 (81) 53-84-386; e-mail: t.sadowski@pollub.pl.

Pietras Daniel (Петрас Даніель, Петрас Даниель) – кандидат технічних наук, асистент, Люблінський технологічний університет, м. Люблін; тел.: +48 (81) 53-84-449; e-mail: d.pietras@pollub.pl.

УДК 621.396

А. И. БЕЙ

КАЧЕСТВО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ «СЛЕПЫМ» МЕТОДОМ

Рассмотрен слепой статистический итерационный метод реконструкции изображений поверхности объекта на базе независимого компонентного анализа. Проведено математическое моделирование изображений, содержащих произвольные объекты на фоне белого шума. Полученный модернизированный алгоритм для случая непараметрической неопределенности опробован на моделях изображений и показано, что он обладает сверхразрешающими свойствами.

Ключевые слова: слепой метод восстановления, независимый компонентный анализ, компонентный базис, число компонент, число наблюдений, обратная матрица.

О. І. БЕЙ

ЯКІСТЬ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ «СЛІПИМ» МЕТОДОМ

Розглянуто сліпий статистичний ітераційний метод реконструкції зображень поверхні на базі метода незалежного компонентного аналізу. Проведено математичне моделювання зображень, які включають різні об'єкти на фоні білого шуму. Отриманий модернізований алгоритм для випадку непараметричної невизначеності випробувано на моделях зображень та показано, що він має надрозрізняючі якості.

Ключові слова: сліпий метод реконструкції, незалежний компонентний аналіз, компонентний базис, число компонент, число спостережень, обернена матриця.

O. I. BEY

QUALITY OF IMAGE RECOVERY BY "BLIND" METHOD

The paper deals with a blind statistical iteration method for recovering object surface images based on the independent component analysis. The mathematical modeling of images of arbitrary objects on a white noise background is carried out. The improved algorithm obtained for the case of non-parametric uncertainty is tested on the image models and is proved to possess superresolution properties.

Key words: independent component analysis, blind method of restoration, componential base, number of components, number of observations, inverse matrix

Введение. Актуальность задачи автоматической фокусировки изображений, построенных с помощью различных систем формирования, связана с эффектом деградации пространственного разрешения. Следовательно, изображение точечного объекта попадает на несколько смежных элементов приемного детектора. Что приводит к необходимости дополнительной коррекции изображений в условиях реального времени [1, 2].

Формулирование проблемы. Задача восстановления изображений заключается в том, чтобы по наблюдаемому двумерному массиву найти более полные характеристики (параметры) искомого объекта. В рассматриваемом случае объект непосредственно не наблюдается, и он может быть представлен только в виде аддитивной смеси с шумовой компонентой. Однако кроме шумового фона объект подвержен и линейному пространственно-инвариантному искажению, заключающемуся в ослаблении высоких пространственных частот. Однако, шум является препятствием для идеальной реставрации требуемых данных. Однако проблема состоит в том, что у нас нет априорной информации о канале формирования и флуктуациях шума. А это задача непараметрической фокусировки, которая требует восстановления неизвестного оператора в целом. В действительности обратные задачи некорректны, что вынуждает исследователей использовать допущения, например, стохастического вида в рамках *байесовского подхода* [3]. Так, классический *анализ Винера*, посвященный проблеме фильтрации, исходит из задания объекта как реализации стационарного *гауссова случайного процесса* с известной ковариационной функцией. В *методе максимума энтропии по Фридену* предполагается, что исходный ансамбль объектов сформирован в соответствии со значениями энтропии каждого из них [3 – 4]. Очевидно, что наличие априорной информации в значительной степени определяет и получаемое решение обратной задачи.

Перейдем теперь к обоснованию и количественному описанию модели формирования изображения. При этом ограничимся детерминированной линейно-фильтровой моделью на базе *уравнения Фредгольма первого рода* [4].

$$g(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)h(\xi, \eta, x, y)dxdy + n(\xi, \eta), \quad (1)$$

где $f(x, y)$ – исходное изображение; $g(\xi, \eta)$ – принятое изображение; $h(\xi, \eta, x, y)$ – весовая функция системы формирования изображения; $n(\xi, \eta)$ – аддитивный шум системы.

Оптимальная оценка сводится к решению интегрального уравнения (1), то есть необходимо сформировать обратный оператор $h^{-1}(\xi, \eta, x, y)$ или, другими словами, необходимо решить обратную задачу:

$$f(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta)h^{-1}(\xi, \eta, x, y)d\xi d\eta, \quad (2)$$

Существенно устранить некорректность обратной задачи возможно введением ряда ограничений на об-

ласть допустимых значений решения, которые вытекают из структуры изображения, а именно:

а) $f(x, y) \geq 0$; б) $(f(x, y), h(x, y)) = 0$.

Для упрощения изложений принимаем, что в выражении (1) искажающий оператор обладает свойством пространственной инвариантности $h(\xi, \eta, x, y) = h(\xi - x, \eta - y)$.

Решение проблемы. Распределение $f(x, y)$ имеет негауссовский закон распределения, а при формировании изображения $g(\xi, \eta)$ происходит нормализация распределения $f(x, y)$, и данный эффект зависит от параметров весовой функции $h(\xi - x, \eta - y)$ системы формирования.

В качестве ядра в уравнении (2) выступает передаточная функция оптимального адаптивного фильтра Винера,

$$h^{-1}(\xi - x, \eta - y) = h_g(\xi - x, \eta - y),$$

то есть необходимо таким образом подобрать ядро $h_g(\xi - x, \eta - y)$ интегрального уравнения (2), чтобы обеспечить наименьшее отклонение оценки $f_g(x, y)$ от истинного двумерного массива $f(x, y)$.

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} (f(x, y) - f_g(x, y))^2 = \min. \quad (3)$$

Однако данная оценка $f_g(x, y)$ относительно истинного $f(x, y)$ объекта будет обладать неизвестным большим смещением.

Следовательно, для повышения качественных показателей адаптивной фильтрации необходимо использовать статистики более высоких порядков. Количественной оценкой негауссовости являются *кумулянты высоких порядков*, в частности эксцесс [5 – 6].

Негауссовость же является базовым предположением *метода анализа независимых компонент* (АНК) и отождествляется с независимостью процессов. Следовательно, необходимо таким образом подобрать матрицу декомпозиции в рамках *метода максимума правдоподобия* (МП), чтобы процессы на выходе были наиболее независимыми. То есть, решается обратная задача по отношению к $f(x, y)$ и $h(\xi - x, \eta - y)$ [6 – 9]. Выражение (2), которое является решением задачи восстановления, введем в качестве начального приближения, и оно является базовым для “слепого” итерационного алгоритма восстановления. Предполагается, что шумовая компонента $n(x, y)$ имеет дисперсию намного меньшую, чем дисперсии компонентов $f(x, y)$ и $h(\xi - x, \eta - y)$.

Уравнение правдоподобия для оценки матрицы декомпозиции теперь можно представить так

$$P(g(x, y) | A, f(x, y)) = m \times \exp \left\{ - \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[g(x, y) - \sum_{j=1}^k A_{1j} \times \hat{f}_j(x, y) \right]^2 dx dy \right\}, \quad (4)$$

где m – константа.

Контрольные реставрации. Формула восстановления проверена с помощью компьютерного моделирования на зашумленных моделях изображения. Для цифрового моделирования использовался простой двумерный объект. Он состоит из трех импульсов. Кроме того, ширина первого импульса равна суммарной ширине второго и третьего.

На рис. 1 представлены импульсные процессы, состоящие из случайных ступенек. На рис. 2 – импульсные процессы, подверженные дифракционному искажению и аддитивному гауссовскому шуму. Результаты реставрации показаны на рис. 3.

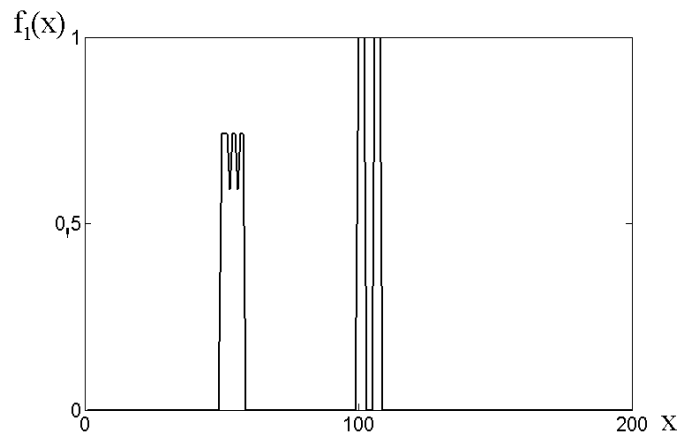


Рис. 1 – Сечение тестового объекта.

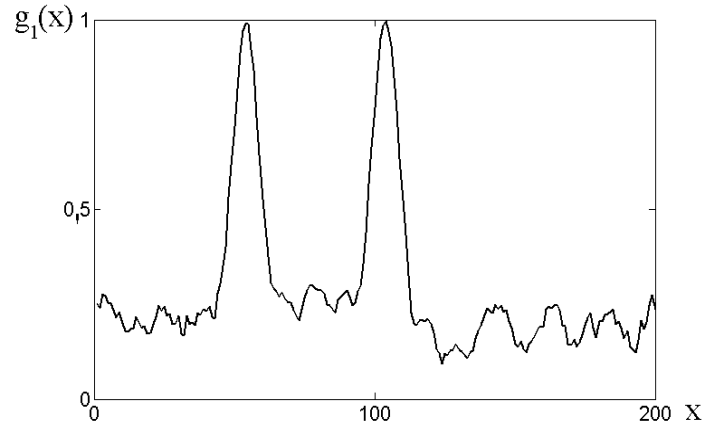


Рис. 2 – Искаженный объект.

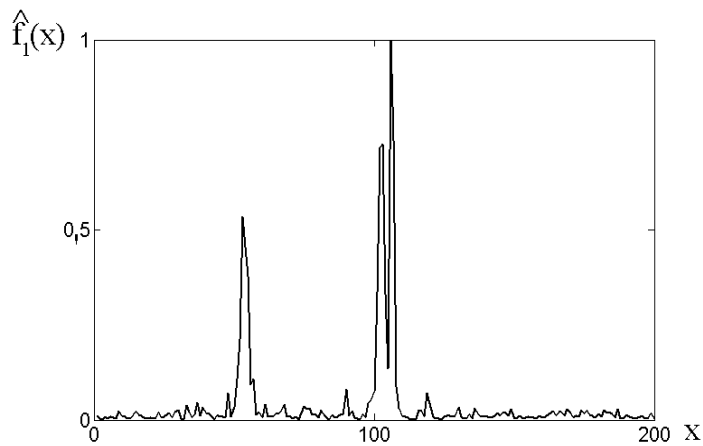


Рис. 3 – Восстановленный объект.

На рис. 4 приведены качественные показатели восстановления в норме L_2 от соотношения сигнал-шум для различных методов восстановления. Верхняя кривая (со звездочками) соответствует восстановлению с применением оптимальной фильтрации; нижняя кривая (с точками) соответствует алгоритму, построенному на базе “слепого” метода.

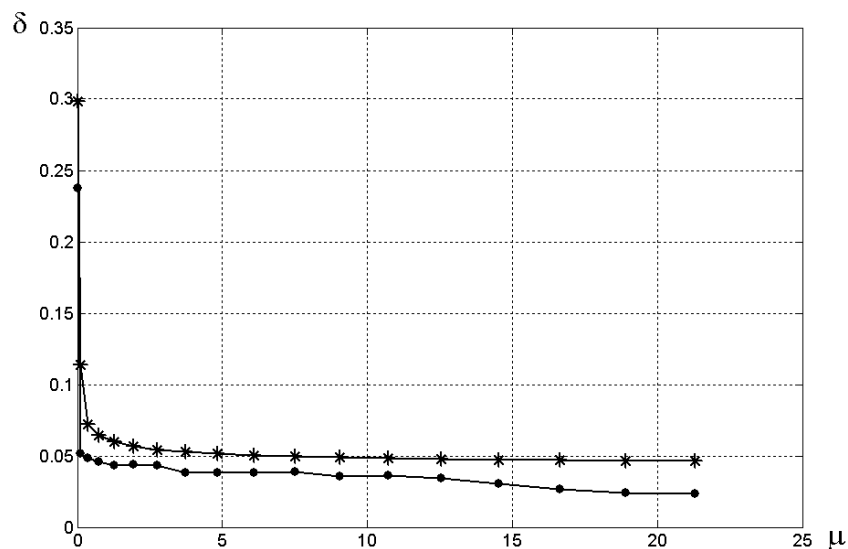


Рис. 4 – Оценка качественных показателей восстановления от соотношения сигнал-шум.

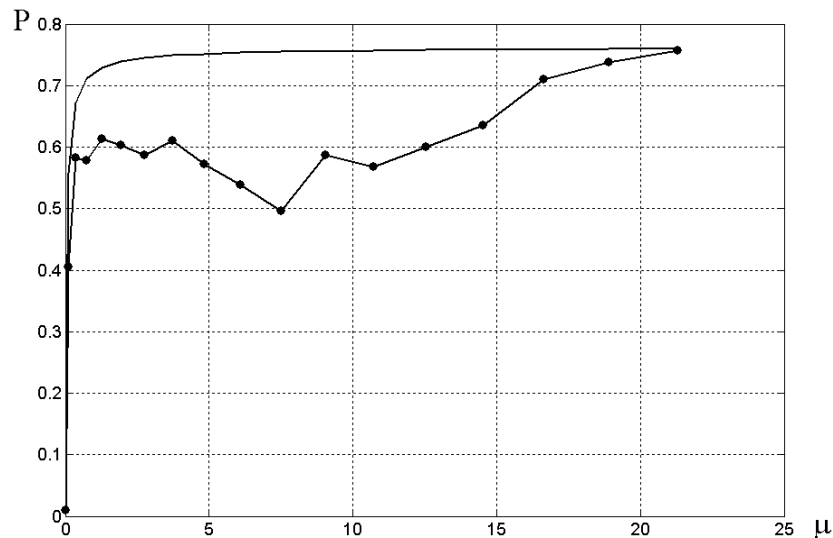


Рис. 5 – Вероятность правильного обнаружения от соотношения сигнал-шум.

Выводы. В работе представлены результаты коррекции изображений “слепым” методом и оценены качественные показатели.

Как представлено на рис. 4, оценки предлагаемого метода имеют меньшую ошибку восстановления в отличие от оценок оптимальной фильтрации, которые мы ввели в качестве начального приближения и получили выигрыш в среднем в 1,5 раза. Кроме того, метод удовлетворяет требованию положительности решения и обладает сверхразрешающими свойствами.

На рис. 5 данные зависимости демонстрируют, что при соотношении сигнал-шум на уровне 16 оценки обладают достоверностью, то есть вероятность правильного обнаружения “слепым” методом составляет 0,7, а при более высоких соотношениях эти оценки практически совпадают.

Список литературы

1. Gendron E., Clénet Y., Fusco T., Rousset G. New algorithms for adaptive optics point-spread function reconstruction // *Astronomy and Astrophysics*. – 2016. – Vol. 457 (2016). – P. 359 – 463.
2. Agarwal S., Singh O.P., Nagaria D. Encrypted Image Denoising using Adaptive Weighted Median Filter // *Indian journal of Science and Technology*. – 2017. – Vol 10(18). – P. 1 – 8. DOI: 10.17485/ijst/2017/v10i18/111973.
3. Левин Б. П. Теоретические основы статистической радиотехники. – М. : Советское радио, 1968. – 504 с.
4. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
5. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
6. Cardoso J. F. Source Separation using Higher-Order Moments // *ICASSP*. – 1989. – P. 2109 – 2112.
7. Cardoso J. F. Eigen-Structure of the Four-Order Cumulant Tensor with Application to the BSS Problem // *ICASSP*. – 1990. – P. 2655 – 2658.
8. Moreau E. A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation // *IEEE Trans. Signal Process.* – 2001. – 49 (3). – P. 530 – 541.
9. Cardoso J.F., Souloumiac A. Blind beamforming for non gaussian signals // *IEE-Proceedings-F*. – 1993. – Vol. 140. – P. 362 – 370.

References (transliterated)

1. Gendron E., Clénet Y., Fusco T., Rousset G. New algorithms for adaptive optics point-spread function reconstruction. *Astronomy and Astrophysics*. 2016, vol. 457 (2016), pp. 359–463.
2. Agarwal S., Singh O.P., Nagaria D. Encrypted Image Denoising using Adaptive Weighted Median Filter. *Indian journal of Science and Technology*. 2017, vol 10(18), pp. 1–8. DOI: 10.17485/ijst/2017/v10i18/111973.
3. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical bases of statistical radio engineering]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1968. 504 p.
4. Vasilenko G. I., Taratorin A. M. *Vosstanovlenie izobrazheniy* [Image recovery]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1986. 304 p.
5. Gonorovskiy I. S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio technical circuits and signals]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1986. 512 p.
6. Cardoso J. F. Source Separation using Higher-Order Moments. *ICASSP*. 1989, pp. 2109–2112.
7. Cardoso J. F. Eigen-Structure of the Four-Order Cumulant Tensor with Application to the BSS Problem. *ICASSP*. 1990, pp. 2655–2658.
8. Moreau E. A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation. *IEEE Trans. Signal Process.* 2001, vol. 49 (3), pp. 530–541.
9. Cardoso J.F., Souloumiac A. Blind beamforming for non gaussian signals. *IEE-Proceedings-F*. 1993, vol. 140, pp. 362–370.

Поступила (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бей Олександр Іванович (Бей Александр Иванович, Bey Aleksandr Ivanovich) – аспірант, Національний аерокосмічний університет ім. Н. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (057) 788-43-51; e-mail: BeyAI@gmail.com.

А. В. ВОРОПАЙ**ГАШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЛАСТИНЫ И СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ. ПАСИВНАЯ ВИБРОЗАЩИТА**

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и присоединённых к ней в разных точках сосредоточенной массы и пассивного демпфера. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние сосредоточенной массы и демпфера моделируется дополнительными нестационарными сосредоточенными силами, приложенными к пластине. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова. Приведены примеры расчетов для прямой и обратной задач при пассивном гашении нестационарных колебаний пластины.

Ключевые слова: пластина средней толщины, сосредоточенная масса, нестационарное нагружение, пассивный демпфер, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, обратная задача.

О. В. ВОРОПАЙ**ГАСІННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ПЛАСТИНИ ТА ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ МАСИ. ПАСИВНИЙ ВІБРОЗАХИСТ**

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-обертої по контуру, та приєднаних до неї в різних точках зосередженої маси і пасивного демпфера. На пластину діє нестационарне навантаження, яке збуджує коливання. Вплив зосередженої маси і демпфера моделюється додатковими нестационарними зосередженими силами, прикладеними до пластини. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням регуляризуючого алгоритму А. М. Тихонова. Наведені приклади розрахунків для прямої та оберненої задач пасивного гасіння нестационарних коливань пластини.

Ключові слова: пластина середньої товщини, зосереджена маса, нестационарне навантаження, пасивний демпфер, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова, обернена задача.

A. V. VOROPAY**SUPPRESSION OF NON-STATIONARY VIBRATIONS IN A MECHANICAL SYSTEM CONSISTING OF A PLATE AND CONCENTRATED MASS. PASSIVE VIBRATION PROTECTION**

The mechanical system consists of a rectangular isotropic hinged medium thickness plate and a concentrated mass and a passive damper attached to it at different points. The plate is impacted by non-stationary loading, causing vibrations. The influence of the concentrated mass and the damper is simulated by additional nonstationary concentrated forces applied to the plate. The research is reduced to the analysis of a system of Volterra integral equations, which are solved numerically with using Tikhonov regularization algorithm. Examples of calculations for the direct and inverse problems of passive suppression of non-stationary vibrations of the plate are given.

Key words: plate of medium thickness, concentrated mass, nonstationary loading, passive damper, system of Volterra integral equations, Tikhonov regularization algorithm, inverse problem.

Введение и анализ последних исследований. Существует несколько подходов к реализации активной и пассивной виброзащиты. Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении.

Для систем активной виброзащиты управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований. В статье [1] представлено решение задачи об управлении нестационарными колебаниями в некоторой точке пластины прямоугольной формы с помощью введения вспомогательной (управляющей) нагрузки, а в её продолжении [2] – управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины осуществляется при помощи приложения к пластине системы дополнительных управляющих нагрузок. В работе [3] показана возможность управления нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки.

Здесь рассмотрена подобная задача, однако гашение будет реализовано методом пассивной виброзащиты.

Постановка задачи. Исследуется возможность гашения нестационарных колебаний механической системы, состоящей из прямоугольной шарнирно опёртой пластины и лежащей на ней сосредоточенной массы, при помощи специально присоединённого к пластине в некоторой точке пассивного гасителя колебаний (рис. 1).

Воспользуемся системой дифференциальных уравнений модели Тимошенко, описывающих нестационар-

ные деформационные процессы в пластине средней толщины из [4], дополнив её соотношениями, записанными для точек присоединения сосредоточенной массы (x_M, y_M) и демпфера (x_D, y_D) :

$$R(x_M, y_M, t) = M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} \quad \text{и} \quad R(x_D, y_D, t) = \kappa \frac{dw(x_D, y_D, t)}{dt}.$$

Указанный подход, для моделирования влияния сосредоточенной массы на колебания упругодеформируемых элементов конструкций встречается у ряда исследователей, например, в монографии [5].

В результате получается система уравнений аналогичная приведенной в [3], но с учетом дополнительной реакции гасителя колебаний.

Прямая задача. Для перемещений точек, в которых присоединены сосредоточенная масса $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$ и гаситель колебаний $w(x_D, y_D, t) = w_D(t)$, можно записать следующие интегральные соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R_M(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MM}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (1)$$

Исключив из интегральных соотношений (1) $w(x_M, y_M, t)$ и $w(x_D, y_D, t)$, получаем следующую систему интегральных уравнений Вольтерра I рода относительно неизвестных $R_D(t)$ и $R_M(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t R_D(\tau) \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau + \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau; \\ \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau + \int_0^t R_M(\tau) \left[K_{MM}(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (2)$$

Описание и вид ядер, входящих в (1) и (2), аналогично приведенному в статье [3].

Система (2), как и подобные, решается с использованием *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова* [6]. После дискретизации её можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{DD} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MD} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PD} \mathbf{P}, \\ \mathbf{A}_{DM} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MM} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Для решения матричной системы (3) удобно использовать *обобщённый алгоритм Крамера для блочных матриц* [7]; в случае прямой задачи, когда возмущающее воздействие $P(t)$ известно, а искомыми являются $R_D(t)$ и $R_M(t)$, в системе (3) удобно переобозначить матрицы и записать её в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_D \\ \mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{PD} \\ \mathbf{w}_{PM} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Обратная задача. В случае решения обратной задачи, когда все три силовые зависимости $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ неизвестны, а задано изменение прогиба в некоторой точке $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, можно записать следующую блочную систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R}_D \\ -\mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

которая решается аналогично системе (4).

Результаты моделирования. При расчетах предполагалось, что срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка, а также реакции массы и демпфера сосредоточены в точках. При вычислениях принимались следующие значения: модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7890$ кг/м³ (материал – легированная сталь); толщина $p = 0.04$ м; длина $l = 0.6$ м; ширина $m = 0.4$ м; число членов в *соответствующих двойных*

рядах Фурье 50×50 .

На рис. 2 приведена схема расположения точек для расчётов при решении прямой и обратной задачи.

Координаты точек: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.3$ м – приложения возмущающей нагрузки; $x_D = 0.3$ м, $y_D = 0.2$ м – присоединения демпфера; $x_M = 0.15$ м, $y_M = 0.3$ м – сосредоточенной массы; $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м – в которой задавалось известное изменение прогиба при решении обратной задачи.

При вычислениях в рамках анализа прямой задачи искомые функции $R_D(t)$ и $R_M(t)$ определялись из решения системы (4), которая решалась численно-аналитически согласно регуляризирующему алгоритму А. Н. Тихонова. Параметры регуляризации α_D и α_M определялись на основе минимизации по α соответствующих функционалов невязки. На рис. 3 представлены графики изменения невязок для $R_D(t)$ (показан точками) и $R_M(t)$ (сплошная линия) в зависимости от величины параметра регуляризации α . Значения параметра регуляризации для удобства отложены в логарифмической шкале.

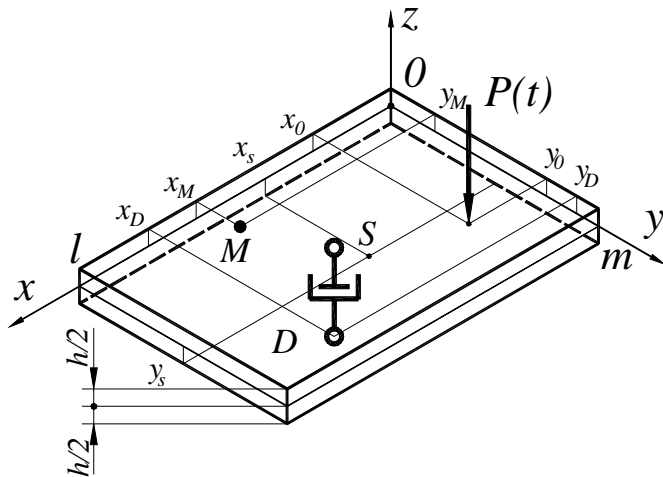


Рис. 1 – Схема гашения нестационарных колебаний пластины и массы.

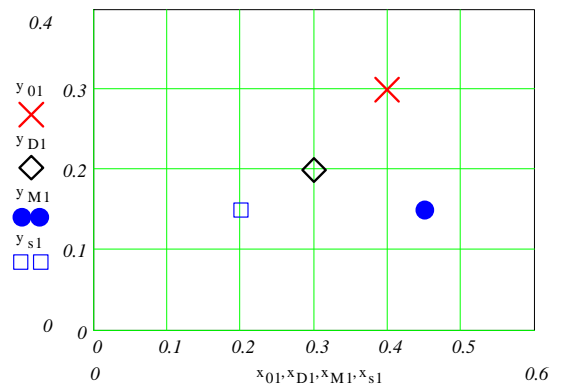


Рис. 2 – Схема пластины с массой и демпфером в плане.
 × – внешняя сила;
 • – точка присоединения сосредоточенной массы;
 ◊ – точка присоединения демпфера;
 □ – точка измерения прогибов пластины

Из рис. 3 видно, что имеются зоны оптимальных значений параметров регуляризации: для α_D это $10^{-47} < \alpha_D < 10^{-43}$; для α_M это $10^{-48} < \alpha_M < 10^{-46}$, причём при дальнейших расчетах принимались $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$.

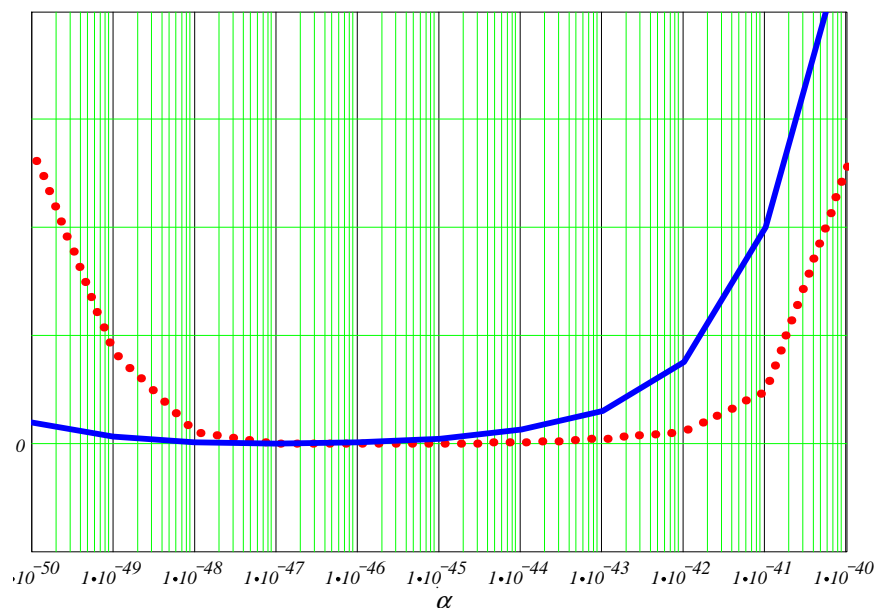


Рис. 3 – К выбору параметров регуляризации α_D и α_M .

На рис. 4 показаны графики изменения прогибов пластины в точке S , вызванных действием только лишь возмущающей силы $P(t) - w_{PS}(t)$ либо только реакцией между гасителем и пластиной $R_D(t) - w_{DS}(t)$ или только реакцией сосредоточенной массы $R_M(t) - w_{MS}(t)$, а также график, показывающий изменение прогиба в исследуемой точке для пластины с массой (суммарная кривая) при наличии сосредоточенного гасителя – $w_S(t)$.

Рис. 4 демонстрирует (кривая $w_S(t)$), что, используя гаситель колебаний с выбранным оптимальным коэффициентом демпфирования, можно несколько сгладить основной пик прогибов, а потом в течении нескольких периодов почти полностью погасить нестационарные колебания (то есть, значительно уменьшить амплитуды прогибов). Это подтверждает эффективность систем пассивной виброзащиты.

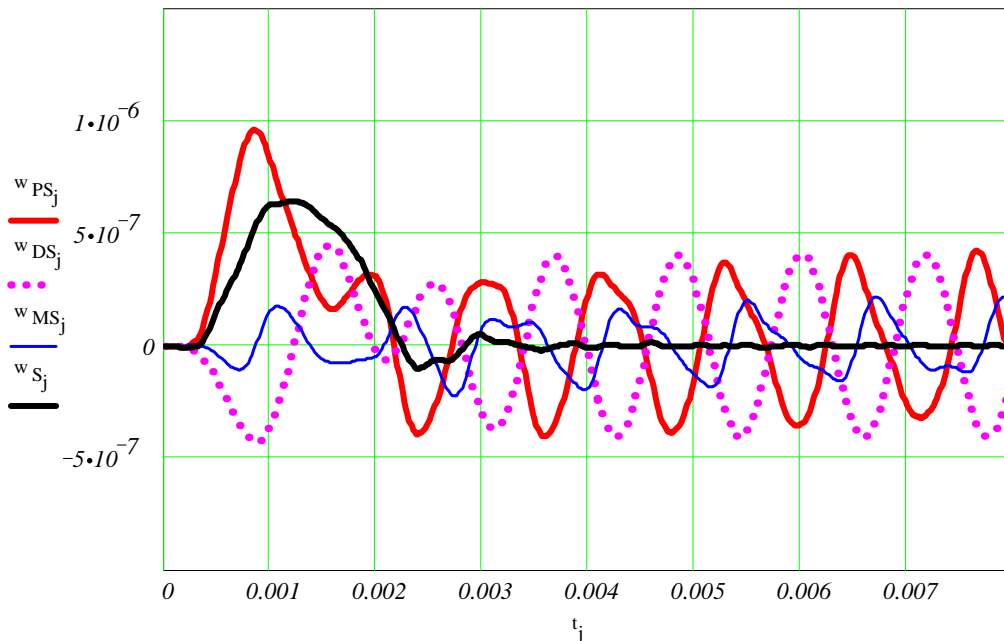


Рис. 4 – Изменение прогиба в точке пластины $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м.

На рис. 5 показаны графики изменения во времени внешней возмущающей нагрузки, а также определенные из решения системы (4) реакции $R_D(t)$ и $R_M(t)$, найденные при значениях параметров регуляризации $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$ соответственно.

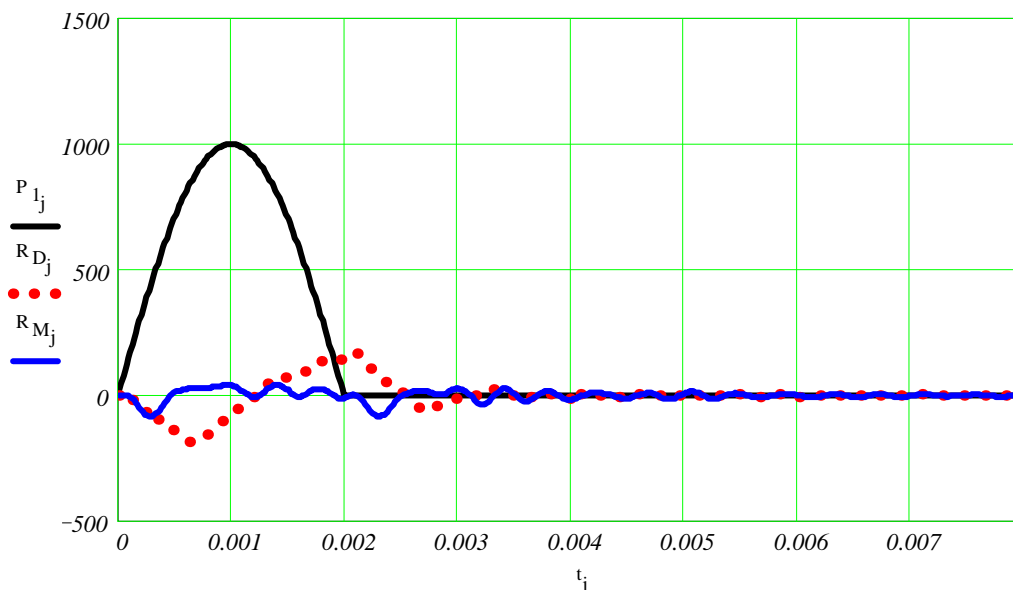


Рис. 5 – Воздействующие на пластину нагрузки: $P_1(t)$ – возмущающее воздействие; $R_M(t)$ – реакция сосредоточенной массы; $R_D(t)$ – реакция между пластиной и демпфером.

При вычислительном эксперименте в процессе решения обратной задачи закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ считался неизвестным. Идентификация производилась по зашумленным и незашумленным значениям прогиба $w_S(t)$ в точке S , найденным в результате решения прямой задачи.

На рис. 6 показаны незашумленные значения прогиба $w_S(t)$ в точке S и зашумленные значения $w_\delta(t)$. Зашумление исходных данных осуществлялось с использованием закона нормального распределения (которое моделирует погрешности случайного характера), механизм наложения которого описывался ранее; относительная погрешность «зашумления» (дисперсия) принималась $\delta = 0.2$.

На рис. 7 и рис. 8 показаны идентифицированные по $w_S(t)$ и $w_\delta(t)$ зависимости изменения во времени $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$.

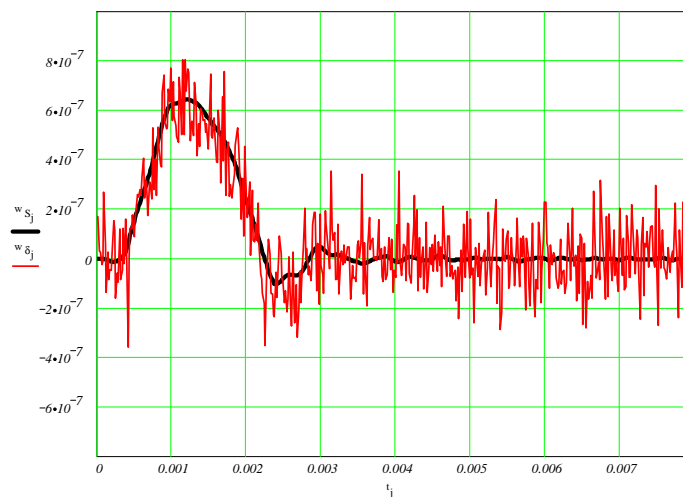


Рис. 6 – Исходные данные идентификации (изменение прогиба).

Отметим, что на рис. 7 и рис. 8 идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ показаны точками, а точные зависимости, которые были взяты из результатов решения прямой задачи, показаны сплошными линиями.

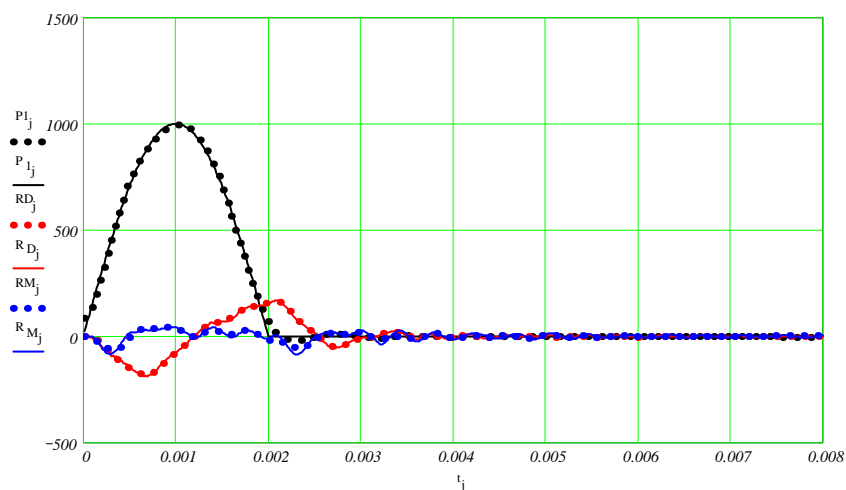


Рис. 7 – Результаты идентификации по незашумленным исходным данным.

Из рис. 7 хорошо видно, что идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ по незашумленным исходным данным практически полностью совпадают с точными их значениями. В случае использования зашумленных исходных данных (рис. 8) результаты идентификации получаются весьма удовлетворительные, особенно в зоне с большими амплитудами, которая представляет значительный интерес при исследовании нестационарных процессов.

Укажем, что идентификация $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ производилась при значении параметров регуляризации $\alpha_P = 10^{-61}$, $\alpha_D = 10^{-62}$ и $\alpha_M = 10^{-62}$ соответственно. Вид функционалов невязки, на основе минимизации которых выбирались оптимальные значения параметров регуляризации, подобен показанным на рис. 3 и отдельно для обратной задачи не приводится.

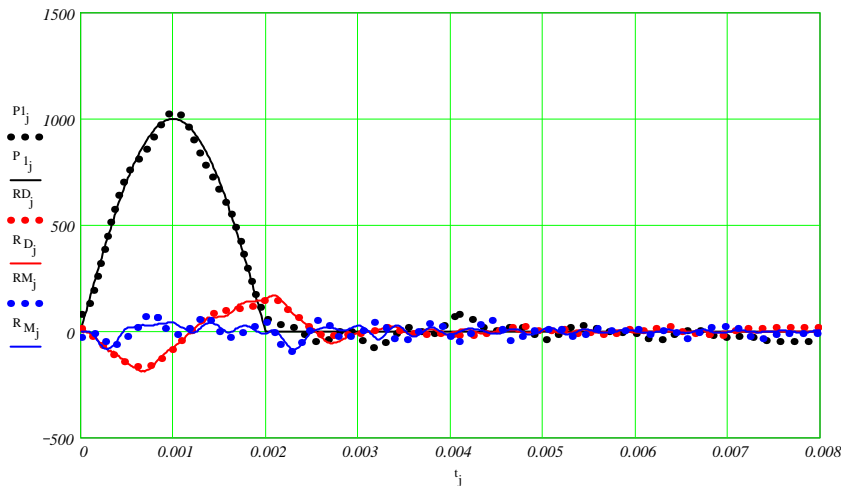


Рис. 8 Результаты идентификации по зашумленным исходным данным.

Выводы. Используя гаситель колебаний с выбранным оптимальным коэффициентом демпфирования, можно несколько сгладить основной пик прогибов пластины, а потом в течении нескольких периодов почти полностью погасить нестационарные колебания, что подтверждает эффективность описанной системы пассивной виброзащиты.

На основе представленных на рис. 8 результатов можно сделать вывод о том, что предложенная методика решения обратной задачи для сложной механической системы и алгоритм определения неизвестных нагрузок являются эффективными и устойчивыми к возмущению исходных данных.

Список литературы

1. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* –2004. – 41 (2004). – P. 4919 – 4926.
2. Воронай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. – 2010. – Вып. 49. – С. 84 – 87.
3. Воронай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине // Вестник национального технического университета «ХПИ». Серия : Динамика и прочность машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. – № 69. – С. 46 – 52.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
5. Кохманюк С. С., Яныутин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
6. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 576 с.

References (transliterated)

1. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, vol. 41 (2004), pp. 4919–4926.
2. Voropay A. V. Upravlenie poperechnymi kolebaniyami na maloy oblasti pryamougol'noy plastiny [Controlling transverse vibrations on a small region of a rectangular plate]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta Severo-Vostochnogo nauchnogo tsentra Transportnoy akademii Ukrainy. Sbornik nauchnykh trudov* [Bulletin of the Kharkov National Automobile and Highway University of the North-East Scientific Center of the Ukrainian Academy of Transport. Digest of scientific papers]. 2010, vol. 49, pp. 84–87.
3. Voropay A. V. Upravlenie nestatsionarnymi kolebaniyami sosredotochennoy massy, lezhashhey na plastine [Controlling nonstationary vibrations of concentrated mass lying on a plate.]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Seriy : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2010, vol. 69, pp. 46–52.
4. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1970. 734 p.
5. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem pri impul'snykhi podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and movable loads]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1980. 232 p.
6. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori data]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.
7. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1967. 576 p.

Поступила (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович (Воронай Алексей Валериевич, Voropay Alexey Valerievich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

УДК 519.6

В. Д. ДУШКИН**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН НА МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ГРЕБЁНКЕ**

Получены системы сингулярных интегральных уравнений исследуемой задачи. Исходная краевая задача для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями третьего рода сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований. Показано, что системы интегральных уравнений задач дифракции на идеально проводящей и не идеально проводящей гребёнке имеют одинаковые типы особенностей и различаются видом гладких частей ядер. Для численного решения данной задачи применим метод дискретных особенностей.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, задачи дифракции, метод параметрических представлений интегральных преобразований.

В. Д. ДУШКИН**ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ МОНОХРОМАТИЧНИХ ХВИЛЬ НА БАГАТОЕЛЕМЕНТНІЙ ПЕРІОДИЧНІЙ НЕ ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНІЙ ГРЕБІНЦІ**

Отримані системи сингулярних інтегральних рівнянь досліджуваної задачі. Початкову крайову задачу для рівняння Гельмгольца з крайовими умовами третього роду зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою методу параметричних представлень інтегральних перетворень. Показано, що системи інтегральних рівнянь задач дифракції на ідеально провідній і не ідеально провідній гребінці мають однакові типи особливостей і відрізняються видом гладких частин ядер. Для чисельного розв'язання цієї задачі можна застосувати метод дискретних особливостей.

Ключові слова: сингулярні інтегральні рівняння, задачі дифракції, метод параметричних представлень інтегральних перетворень.

V. D. DUSHKIN**INTEGRAL EQUATIONS FOR THE DIFFRACTION PROBLEM OF MONOCHROMATIC WAVES ON A MULTI-ELEMENT PERIODIC NOT PEC RECTANGULAR FLANGE**

Systems of singular integral equations of the investigated problem are obtained. The original mixed boundary value problem for the Helmholtz equation is reduced to a system of singular integral equations. The method of parametric representations of integral transformations is used. It is shown that systems of integral equations of problems of diffraction on conducting and non-perfectly conducting rectangular flanges have the same types of singularities. These systems of integral equations differ in the smooth part of the kernel. For the numerical solution of this problem the method of discrete singularities can be used.

Key words: singular integral equations, diffraction problems, the method of parametric representations of integral transforms.

Введение. Исследование процессов взаимодействия электромагнитных волн с различными электродинамическими структурами приводит к созданию математических моделей, описывающих процесс рассеяния волн на гребёночных структурах [1 – 3]. Для формирования нужных характеристик полей представляет интерес рассмотрение многоэлементных гребёнок и моделей, рассматривающих не идеально проводящие гребёночные структуры.

Анализ последних исследований. Применение численно-аналитического подхода, предложенного Ю.В. Ганделем, позволило построить математические модели большого класса задач электродинамики [2 – 7]. Данный подход предполагает сведение исходных краевых задач для уравнения Гельмгольца к системам сингулярных или гиперсингулярных уравнений помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований [8 – 10]. Для проведения численного моделирования на основе полученных систем уравнений применяется метод дискретных особенностей. Этот подход оказался также эффективен для построения математических моделей задач на не идеально проводящих структурах [11 – 15], где для описания поведения поля на границе раздела сред, как и в работах [16 – 17], использовались граничные условия Щукина-Леонтовича. Результаты работ [11 – 12], дали возможность получить систему сингулярных интегральных уравнений задачи дифракции монохроматических волн на периодической многоэлементной гребёнке, способ получения которых описан в этой статье.

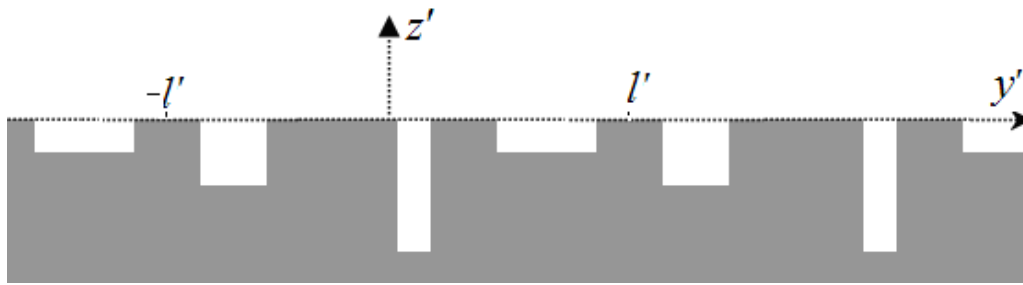
Постановка задачи. Дифракционная структура представляет $2l'$ периодическую по оси oy' и однородную по оси ox' гребёнку, изготовленную из металла, обладающего конечной проводимостью. На гребёнке находится M углублений прямоугольной формы (рис. 1).

На гребёнку из бесконечности сверху наклонно (угол θ) падает монохроматическая E – поляризованная электромагнитная волна, ненулевая компонента электрического поля которой имеет вид:

$$u^*(y', z') = E_x(y', z') = \exp\{ik(y' \cdot \sin \theta - z' \cdot \cos \theta)\}. \quad (1)$$

Необходимо найти компоненты электромагнитного поля, рассеянного структурой.

© В. Д. Душкин, 2018

Рис. 1 – Сечение структуры плоскостью $y'oz'$.

Математическая модель. Необходимо найти в области Ω' , которая представляет часть пространства вне гребёнки, решение уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U' + k^2 U' = 0, \quad (2)$$

которое удовлетворяет импедансным граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial U'}{\partial n} - h' \cdot U' \right|_{(y', z') \in \partial \Omega'} = 0, \quad (3)$$

условию на ребре, которое эквивалентно условию ограниченности энергии в любой ограниченной области плоскости $y'oz'$, условию излучения Зоммерфельда и условию квазипериодичности Флоке:

$$U'(y' + 2l', z') = \exp\{ikl' \cdot \sin \theta\} \cdot U'(y', z'). \quad (4)$$

Учитывая условия Флоке, поле достаточно искать только в слое шириной $2l'$ по переменной y' . Введём обозначения:

$$\kappa = \frac{l' \cdot k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda}, \quad y = \frac{\pi}{l'} y', \quad z = \frac{\pi}{l'} z', \quad h = \frac{l' \cdot h'}{\pi}, \quad U(y, z) = U'(y', z'). \quad (5)$$

Обозначим область над структурой Ω_0 :

$$\Omega_0 = \{(y, z) \in R^2 : |y| \leq \pi \wedge z > 0\}, \quad (6)$$

а области, отвечающие канавкам Ω_q :

$$\Omega_q = \{(y, z) \in R^2 : -\eta_q < z < 0, -\pi < \alpha_q < y < \beta_q < \pi\}, \quad q = 1, \dots, M. \quad (7)$$

Введём в рассмотрение функцию:

$$u_0(y, z) = \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)\} + \frac{i\kappa \cos \theta + h}{i\kappa \cos \theta - h} \cdot \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)\}. \quad (8)$$

Она является решением в области Ω_0 вспомогательной задачи дифракции волны

$$u^*(y, z) = \exp\{i\kappa(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)\}$$

на экране, который полностью заполняет плоскость $z = 0$, на границе которого выполняются условия Шукина-Леонтовича:

$$\frac{\partial u_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot u_0(y, 0) = 0, \quad y \in R. \quad (9)$$

Полное поле $U(y, z)$ в области Ω_0 ищем в виде:

$$U(y, z) = u_0(y, z) + U_0(y, z), \quad (10)$$

где

$$U_0(y, z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp(-i\gamma_{0,n}z) \cdot \exp(i(n + \kappa \sin \theta)y); \quad (11)$$

$$\gamma_{0,0} = -i\kappa \cos \theta, \quad \gamma_{0,n} = \sqrt{(n + \kappa \sin \theta)^2 - \kappa^2}, \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (12)$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если $\text{Re}(\gamma_{0,n}) \geq 0, \text{Im}(\gamma_{0,n}) \leq 0, n \in Z$. Введём обозначения:

$$\phi_q = \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \quad \psi_q = \frac{\pi}{\beta_q - \alpha_q}, \quad q = 1, \dots, M. \quad (13)$$

Рассмотрим систему функций:

$$\omega_{q,2n}(y) = \cos\left(\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot (y - \phi_q)\right); \quad (14)$$

$$\omega_{q,2n-1}(y) = \sin\left(\sqrt{\lambda_{q,2n-1}} \cdot (y - \phi_q)\right), \quad n \in N, \quad q = 1, \dots, M, \quad (15)$$

где комплексные числа $\sqrt{\lambda_{q,2n}}$, $n \in N$, являются корнями уравнений:

$$\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) - h \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) = 0, \quad (16)$$

а комплексные числа $\sqrt{\lambda_{q,2n+1}}$, $n \in N$, являются корнями уравнений:

$$\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) + h \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{q,2n+1}} \cdot \psi_q}{2\pi}\right) = 0. \quad (17)$$

Из свойств решений задач Штурма-Лиувилля [18] и результатов, приведенных в [6], следует, что система функций $\omega_{q,n}(y)$, $n = 1, \dots, \infty$ является полной на отрезке $[\alpha_q, \beta_q]$ и множество корней уравнений (16), (17) имеет единственную точку сгущения на бесконечности, причём:

$$\sqrt{\lambda_{q,n}} = \psi_q \cdot n + \frac{2h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad q = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Данные свойства доказывают законность представления полей $U_q(y, z)$ в областях Ω_q в виде:

$$U_q(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{n,q}} C_{n,q} \cdot Z_{q,n}(z) \cdot \omega_{q,n}(y), \quad (19)$$

где

$$(\gamma_{q,n})^2 = \lambda_{q,n} - k^2; \quad (20)$$

$$Z_{q,n}(z) = \frac{\gamma_{q,n} \cdot \left[h \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{q,n}(z + \eta_q)) + \gamma_{q,n} \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{q,n}(z + \eta_q)) \right]}{(\gamma_{q,n}^2 - h^2) \cdot \operatorname{sh}(\gamma_{q,n} \cdot \eta_q)}; \quad (21)$$

$$Z_{q,n}'(0) - h \cdot Z_{q,n}(0) = \gamma_{n,q}, \quad Z_{q,n}'(-\eta_q) - h \cdot Z_{q,n}(-\eta_q) = 0. \quad (22)$$

Действуя так же, как в [6], введем в рассмотрение функцию:

$$F(y) = \frac{\partial U_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_0(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp[i(n + \kappa \sin \theta)y], \quad |y| \leq \pi. \quad (23)$$

Пусть $L = \bigcup_{q=1}^M (\alpha_q, \beta_q)$ – множество y -координат точек плоскости $z = 0$, свободных от структуры и расположенных на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Из (3) и (9) следует равенство:

$$F(y) = 0, \quad y \in CL = [-\pi, \pi] \setminus L. \quad (24)$$

Согласно определению (23) функции $F(y)$ имеем:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_L F(t) \cdot \exp(-i(n + \kappa \sin \theta)t) dt; \quad (25)$$

$$U_0(y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_L K_{0,1}(y, t) F(t) dt, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K_{0,1}(y, t) = & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp(i(n + \kappa \sin \theta) \cdot (y - t)) = Q_0(y, t) + \\ & + \exp(i\kappa \sin \theta \cdot (y - t)) \cdot \left(2 \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{(y-t)}{2} \right| - 2\kappa i \sin \theta \cdot \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right); \quad (27) \\ Q_0(y, t) = & - \exp(i\kappa \sin \theta \cdot (y - t)) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{0,n} + h} + \frac{1}{\gamma_{0,-n} + h} - \frac{2}{n} \right) \cdot \cos[n(y-t)] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\gamma_{0,0} + h} + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_{0,n} + h} - \frac{1}{\gamma_{0,-n} + h} + \frac{2\kappa \sin \theta}{n^2} \right) \cdot \sin[n(y-t)] \Bigg\}. \quad (28)$$

Заметим, что $Q_0(y, t) \in C^{1,\varphi}[-\pi, \pi]$, $\varphi > 0$.

Пусть

$$K_{0,2}(y, t) = \frac{\partial K_{0,1}(y, t)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n} + h} \cdot \exp[i(n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = \frac{\partial Q_0(y, t)}{\partial y} + \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{(y-t)}{2} \right) + \kappa^2 \sin^2 \theta \cdot \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right). \quad (29)$$

Из условия непрерывности поля и его производных на границе раздела областей Ω_0 и Ω_q и следуют соотношения:

$$u_0(y, 0) + U_0(y, 0) = U_q(y, 0), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (30)$$

$$\frac{\partial U_0(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_0(y, 0) = \frac{\partial U_q(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_q(y, 0), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M). \quad (31)$$

Введём обозначения:

$$W_{q,n} = Z_{q,n}(0), \quad n \in N, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (32)$$

где

$$Z_{q,n}(0) = 1 + \left(\frac{1}{n} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Следствием (31) являются следующие соотношения:

$$F(y) = \frac{\partial U_q(y, 0)}{\partial z} - h \cdot U_q(y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{q,n} \cdot \omega_{q,n}(y), \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M); \quad (34)$$

$$C_{q,n} = \frac{2 \cdot \psi_q}{\pi \cdot [\omega_{q,n}]^2} \cdot \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \omega_{q,n}(t) \cdot F(t) dt, \quad (35)$$

где

$$[\omega_{q,n}]^2 = \frac{\pi}{2\psi_q} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \omega_{q,n}^2(t) dt, \quad (q = 1, \dots, M); \quad (36)$$

$$[\omega_{q,n}]^2 = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (37)$$

Таким образом, учитывая (34 – 36), для функций $U_q(y, 0)$ получаем представления:

$$U_q(y, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(y, t) \cdot F(t) dt, \quad (38)$$

где

$$K_{1,q}(y, t) = 2\psi_q \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{q,n} \cdot \omega_{q,n}(t) \cdot \omega_{q,n}(y)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} = \psi_q \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}}(t-y))}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}}(t+y-2\phi_q))}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} \right]. \quad (39)$$

Справедливы равенства:

$$\theta_q \cdot \frac{W_{q,n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}} \cdot t)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} = \frac{\cos(\psi_q \cdot nt)}{n} - \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(\psi_q \cdot nt) + Q_{q,n}(t); \quad (40)$$

$$Q_{q,n}(t) = \left[\frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_{q,n}} \cdot t)}{\gamma_{q,n} \cdot [\omega_{q,n}]^2} - \frac{\cos(\psi_q \cdot nt)}{n} + \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(\psi_q \cdot nt) \right]; \quad (41)$$

$$Q_{q,n}(t) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (42)$$

Учитывая (39 – 41) и известные представления рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left(2 \cdot \sin \frac{t}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln\left|2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right|, \quad t \in (0, 2\pi), \quad (43)$$

получаем:

$$K_{1,q}(y, t) = -\ln\left|2 \cdot \sin\left(\psi_q \cdot \frac{t-y}{2}\right)\right| + \frac{2h(t-y)}{\pi} \int_0^{\psi_q(t-y)} \ln\left|2 \cdot \sin \frac{s}{2}\right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{q,n}(t-y) - \ln\left|2 \cdot \cos\left(\psi_q \cdot \frac{t+y}{2}\right)\right| - \\ + \frac{2h(t+y-2\phi_q)}{\pi} \int_0^{\psi_q(t+y-2\phi_q)} \ln\left|2 \cdot \cos \frac{s}{2}\right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_{q,n}(t+y-2\phi_q). \quad (44)$$

Из условий сопряжения (30) и интегральных представлений (26), (38) получаем систему интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре:

$$U_0(y, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{1,0}(y, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(y, t) \cdot F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M). \quad (45)$$

Введём функции:

$$K_{2,q}(y, t) = \frac{dK_{1,q}(y, t)}{dy} = \frac{\psi_q}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\psi_q \cdot \frac{t-y}{2}\right) - \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{\psi_q(y-t)} \ln\left|2 \cdot \sin \frac{s}{2}\right| ds + \psi_q \cdot (t-y) \cdot \ln\left|2 \cdot \sin \frac{y-t}{2}\right| \right\} + \\ + \frac{\psi_q}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\psi_q \cdot \frac{t+y}{2}\right) + \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{\psi_q(t+y-2\phi_q)} \ln\left|2 \cdot \cos \frac{s}{2}\right| ds + \psi_q \cdot (t+y-2\phi_q) \cdot \ln\left|2 \cdot \cos\left(\psi_q \cdot \frac{y+t-2\phi_q}{2}\right)\right| \right\} + \\ + \frac{d}{dy} \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_{q,n}(t-y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_{q,n}(t+y-2\phi_q) \right). \quad (46)$$

Система интегральных уравнений (45) эквивалентна системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{\partial U_0}{\partial y}(y, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{2,0}(y, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{2,q}(y, t) F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (47)$$

с дополнительными условиями:

$$U_0(\xi_q, 0) + \frac{1}{\pi} \int_L K_{1,0}(\xi_q, t) F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_q}^{\beta_q} K_{1,q}(\xi_q, t) \cdot F(t) dt, \quad y \in (\alpha_q, \beta_q), \quad (q = 1, \dots, M), \quad (48)$$

ξ_q – произвольные, но фиксированные точки интервала (α_q, β_q) .

Выводы. Система уравнений (47 – 48) принадлежит классу систем сингулярных интегральных уравнений, которые встречались при решении задач дифракции H – поляризованных волн на идеально проводящей гребёнке, и отличается от них видом непрерывных частей ядер. Поэтому алгоритм дальнейшего численного решения этих задач методом дискретных особенностей совпадает. Данные интегральные уравнения по своей структуре отличаются от систем интегральных уравнений задач дифракции на не идеально проводящих ленточных структурах [13, 19], для которых разработаны специальные модификации метода дискретных особенностей [20, 21].

Список литературы

1. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1 : Дифракционные решетки. – Киев : Наук. думка, 1986. – 232 с.
2. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaghinaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures // Telecommunications and Radio Engineering. – 2000. – V.54. – N7. – P. 139 – 144.
3. Steshenko S. A., Tsvuk A. I., Khutoryan E. M. Radiation patterns of "plasma" electron beam on structures of metal grooves // Physics and Engi-

- neering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves, 2004. MSMW 04. The Fifth International Kharkov Symposium. – 2004. – V. 2. – N. 7. – P. 521 – 524.
4. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-wave analysis and optimization of a TARA-like shield-assisted paraboloidal reflector antenna using a nystrom-type method // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2013. – V. 61. – no. 10. – pp. 4981 – 4989.
 5. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2012. – V. 60 (10). – pp. 4710 – 4718.
 6. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография. – Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544 с.
 7. Духопельников С. В. Неоднородности у пороژнини антени та дифракційні властивості антен спеціального вигляду. Чисельний аналіз, частина I // *Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. : Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления*. – 2016. – Вып. 32. – С. 25 – 34.
 8. Akhiezer N. I. Lectures on integral transforms. *Translations of Mathematical Monographs, 70* // American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. – 108 p.
 9. Gandel' Yu. V. Parametric representations of integral and pseudodifferential operators in diffraction problems // *Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. (Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14 – 17)*. – Dnepropetrovsk, 2004. – pp. 57 – 62.
 10. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May – 1 June 2012)*. – St. Petersburg, 2012. – pp. 76 – 81.
 11. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // *Доп. НАН України*. – 1999. – № 9. – С. 11 – 15.
 12. Dushkin V. D. Application of the Singular Integral Transform Method to the Solution of the Two-Dimensional Problem of Diffraction of Electromagnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels // *Telecommunications and Radio Engineering*. – 2001. – V. 56. – N. 2. – P. 78 – 86.
 13. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – Vol. 212. – N. 2. – P. 156 – 166.
 14. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – V. 212. – N. 2. – P. 142 – 155.
 15. Kostenko O. V. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating // *Cybernetics and systems analysis*. – 2015. – Vol. 51. – No. 3. – pp. 344 – 360.
 16. P'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. – London, UK : The IEE and Peter Peregrinus Ltd., *Electromagnetic Waves (Series 36)*, 1993. – 275 p.
 17. Кравченко В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – М. : Физматлит, 2006. – 280 с.
 18. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. – Киев : Наук. думка, 1972. – 220 с.
 19. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Граничные интегральные уравнения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в R_+^2 с плоскопараллельными разрезами // *Доп. НАН України*. – 2014. – № 8. – С. 14 – 19.
 20. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. – 2017. – Vol. 13. – No. 3. – P. 254 – 267.
 21. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice // *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. – 2014. – Vol. 2. – No. 6. – pp. 369 – 375.

References (transliterated)

1. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko Y. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. T. 1 : Difraktsionnye reshetki* [Resonance scattering of waves. Vol. 1. Diffraction Gratings]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1986. 232 p.
2. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaghinaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000, vol. 54, no. 7, pp. 139–144.
3. Steshenko S. A., Tsvyk A. I., Khutoryan E. M. Radiation patterns of "plasma" electron beam on structures of metal grooves. *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves, 2004. MSMW 04. The Fifth International Kharkov Symposium*. 2004, vol. 2, no. 7, pp. 521–524.
4. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-wave analysis and optimization of a TARA-like shield-assisted paraboloidal reflector antenna using a nystrom-type method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4981–4989.
5. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012, vol. 60 (10), pp. 4710–4718.
6. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. *Matematicheskie modeli dvumernykh zadach difraktsii : singulyarnye integral'nye uravneniyai chislennyye metody diskretnykh osobennostey : monografiya* [Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical discrete singularities method. Monograph]. Kharkov, Academy of Internal Defence of the MIA of Ukraine Publ., 2012. 544 p.
7. Duxhopel'nikov S. V. Neodnorodnosti u porozhnyini anteny ta dyfraktsiyni vlastyvosti anten spetsial'nogo vyglyadu. Chysel'nyy analiz, chastyna 1 [Inhomogeneities in the antenna cavity and the diffractive properties of antennas of a special form Numerical analysis, Part 1]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo un-ta. Seriya : Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya* [Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series : Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems]. 2016, vol. 32, pp. 25–34.
8. Akhiezer N. I. *Lectures on integral transforms. Translations of Mathematical Monographs, 70*. American Mathematical Society, Providence, RI Publ., 1988. 108 p.
9. Gandel Yu. V. Parametric representations of integral and pseudodifferential operators in diffraction problems. *Conf. Proc., 10th Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. (Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14 – 17)*. Dnepropetrovsk, 2004, pp. 57–62.
10. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May – 1 June 2012)*. St. Petersburg, 2012, pp. 76–81.
11. Dushkin V. D. Reshenie dvumernoy zadachi difraktsii s kraevymi usloviyami tret'ego roda na bokovoy poverkhnosti volnovodnykh kanalov [Solution of the two-dimensional diffraction problem with boundary conditions of the third kind on the side surface of waveguide channels]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of Ukraine]. 1999, no. 9, pp. 11–15.
12. Dushkin V. D. Application of the Singular Integral Transform Method to the Solution of the Two-Dimensional Problem of Diffraction of Electro-

- magnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001, vol. 56, no. 2, pp. 78–86.
13. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 156–166.
 14. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 142–155.
 15. Kostenko O. V. Mathematical model of wave scattering by an impedance grating. *Cybernetics and systems analysis*. 2015, vol. 51, no. 3, pp. 344–360.
 16. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. *Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves*. London, UK : The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Publ., Electromagnetic Waves (Series 36), 1993. 275 p.
 17. Kravchenko V. F. *Eylektrodinamika sverkhprovodyashhikh struktur. Teoriya, algoritmy i metody vychisleniy* [The electrodynamics of superconducting structures. The theory, algorithms and computational methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 280 p.
 18. Marchenko V. A. *Spektral'naya teoriya operatorov Shturma – Liuvillya* [Spectral theory of Sturm-Liouville operators]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972. 220 p.
 19. Gandel Y. V., Dushkin V. D. Granichnye integral'nye uravneniya tret'ey kraevoy zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v R_+^2 s ploskoparallelnymi razrezami [The boundary integral equations of the third boundary-value problem for the Helmholtz equation in the R_+^2 with plane-parallel slits]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of Ukraine]. 2014, no. 8, pp. 14–19.
 20. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2017, vol. 13, no. 3, pp. 254–267.
 21. Gandel Y. V., Dushkin V. D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2014, vol. 2, no. 6, pp. 369–375.

Поступила (received) 23.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Душкін Володимир Давидович (Душкин Владимир Давидович, Dushkin Vladimir Davidovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-54; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

УДК 519.6

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ**АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КУРСОВОЙ СТОИМОСТИ БИТКОИНА МЕТОДОМ SSA**

Приведен обзор существующих на сегодняшний день математических моделей функционирования финансового рынка. Однако, практически все публикуемые исследования носят в основном теоретический характер, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе на основе метода SSA (Singular Spectrum Analysis) проведен анализ структуры и прогнозирование временного ряда курсовой стоимости биткоина. Получен более точный прогноз по сравнению с применением для прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH даже и в «критических» для этих моделей случаях.

Ключевые слова: временной ряд, биткойн, анализ структуры, прогноз, сингулярный спектральный анализ, метод SSA – «Гусеница».

С. Е. ГАРДЕР, Е. П. ГОМОЗОВ**АНАЛІЗ І ПРОГНОЗУВАННЯ КУРСОВОЇ ВАРТОСТІ БІТКОІНА ЗА МЕТОДОМ SSA**

Надано огляд існуючих математичних моделей функціонування фінансового ринку. Однак, практично усі досліді, що були опубліковані, мають теоретичний характер, прогнози, як правило, потребують більшої кількості спостережень, погано працюють поблизу біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б можливість будувати прогнози в режимі реального часу. На засадах методу SSA проведено аналіз структури та прогнозування ряду курсової вартості. Отримано найбільш точний прогноз порівняно з застосуванням для прогнозування моделей ARIMA і ARFIMA-FIGARCH навіть в «критичних» для цих моделей випадках.

Ключові слова: часовий ряд, біткоїн, аналіз структури, прогноз, сингулярний спектральний аналіз, метод SSA – «Гусениця».

S. E. GARDER, E. P. GOMOV**ANALYSIS AND PREDICTION OF BITCOIN RATE BY SSA METHOD**

In the paper the existing mathematical models of the financial market are reviewed. Nevertheless, the majority of the research published has the essential drawbacks such as the theoretical character of the papers, the amount of the observations required, the inadequate performance in the neighborhood of bifurcation points, and the absence of a computer model capable of real-time prediction. In the present paper we apply the SSA method for analyzing the structure and predicting the behavior of the bitcoin rate time series. The results obtained are of higher accuracy compared to the ones obtained by using the ARIMA and ARFIMA-FIGARCH models for predicting, even in the critical for these models cases.

Key words: time series, bitcoin, structure analysis, prediction, singular spectral analysis, the "Caterpillar"-SSA method.

© С. Е. Гардер, Е. П. Гомозов, 2018

Введение. Как известно, всегда существовали проблемы в прогнозировании бифуркаций курсов финансовых инструментов (длин флэтов и трендов, точек перелома трендов, мыльных пузырей, обрушений рынка, которые никак не объясняются в рамках классической гипотезы эффективного рынка – ЕМН. С математической точки зрения ЕМН предполагает вероятностную модель рынка с динамикой курсов финансовых инструментов «марковского» типа). Из теории динамических систем следует, что функционирующая в режиме реального времени сеть современных финансовых рынков должна неустойчиво включать в себя структурно неустойчивые системы. Как альтернатива ЕМН существует еще одна гипотеза относительно функционирования финансовых рынков – гипотеза фрактального рынка – ФМН [1], которая придает особое значение влиянию информации и инвестиционным горизонтам в поведении инвесторов – так называемых «рациональных» и «шумовых» трейдеров (то есть, динамика курсов финансовых инструментов описывается фрактальными временными рядами). Есть попытки создать новые или модифицированные гипотезы поведения финансовых рынков – синергетическая модель, мультиагентная модель, модификация ЕМН на основе, так называемой теории *игровой вероятности*. Среди достаточно распространенных методов математического моделирования можно назвать: классический и фрактальный анализ временных рядов [2, 3, 4], общий фрактальный анализ [5], методы дифференциальных уравнений в частных производных [6], нейронные сети [4], многофакторный регрессионный анализ, генетический алгоритм, методы когнитивной психологии, теории бифуркаций [8] и так далее. Однако практически все публикуемые исследования носят в основном теоретический характер, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют расчетной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени.

Постановка задачи. В настоящее время имеется рынок чисто «шумовых» трейдеров, которых характеризует случайное подражательное и стадное поведение – это рынок криптовалют. Метод SSA (Singular Spectrum Analysis) – это непараметрический метод анализа временных рядов, который не требует предварительного создания модели ряда и поэтому, с нашей точки зрения, наиболее подходит для анализа структуры и прогнозирования ряда курсовой стоимости биткоина – самой популярной на сегодня криптовалютой.

Источники исходных данных. – электронный ресурс [/https://www.calc.ru/grafik-Bitcoin-k-dollaru-za-2018-01.html](https://www.calc.ru/grafik-Bitcoin-k-dollaru-za-2018-01.html). Курс биткоина взят из данных различных онлайн бирж и высчитывался как среднее арифметическое значение на текущий момент времени. На рис.1 приведен график изменения стоимости биткоина с 20.01.2017 по 15.01.2018.

Решение задачи. Следуя методу SSA, временной ряд раскладывается на сумму компонент: тренд, гармонические составляющие и остаточную компоненту (шум). Теоретическую основу метода составляет *сингулярное разложение траекторной матрицы*, столбцами которой являются вектора вложения – отрезки ряда длины L – основного параметра метода, называемого длиной окна. Анализ членов сингулярного разложения позволяет сначала классифицировать их как относящиеся к одной из компонент ряда, а затем выделить эту компоненту.

Пусть имеется временной ряд $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ длины N ($N > 2$), выберем число L – длину окна, затем последовательно заполним столбцы траекторной матрицы G .

$$G = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{K+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_{L+K-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эта матрица – ганкелева, имеющая равные элементы на побочных диагоналях.

Образует матрицу $R = GG^T$. Поскольку R неотрицательно определенная, то ее собственные числа неотрицательны. Найдем *собственные числа* матрицы R , взятые в порядке убывания $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ и соответствующие им *собственные векторы* U_1, \dots, U_L . Разложение траекторной матрицы (1) на компоненты имеет вид:

$$G = G_1 + \dots + G_d, \quad (2)$$

где $d = \max \{ j, \text{таких, что } \lambda_j > 0 \}$, $G_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $V_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} G^T U_i$, ($i = 1, \dots, d$); $\sqrt{\lambda_i}$ – сингулярные числа; V_i –

факторные векторы; набор $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ – i -я *собственная тройка* сингулярного разложения; вектор $Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$, – вектор i -х главных компонент [1 – 3].

На следующем шаге проводится группировка компонентов разложения:

$$G = G_{I_1} + G_{I_2} + \dots + G_{I_m}, \quad G_{I_j} = \sum_{k \in I_j} G_k,$$

где матрицы G_{I_j} образуют непересекающиеся подмножества.

Последним шагом является восстановление составляющих $X_N^{(j)}$ по сгруппированным матрицам G_{I_j} с помощью усреднения элементов вдоль побочных диагоналей этих матриц. Результатом алгоритма является разбиение временного ряда на аддитивные составляющие [2].

Пусть G – матрица размерности $(L \times K)$ с элементами g_{ij} , $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. Положим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ и $N = L + K - 1$. Пусть $g_{ij}^* = g_{ij}$, если $L < K$ и $g_{ij}^* = g_{ji}$, если $L \geq K$. Тогда ряд восстанавливается по следующим формулам:

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{K+1} \sum_{m=1}^{k+1} g_{m,k-m+2}^*, & 0 \leq k < L^* - 1; \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} g_{m,k-m+2}^*, & L^* - 1 \leq k < K^*; \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} g_{m,k-m+2}^*, & K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (3)$$

Полученное нами число элементов ряда курса биткоина $N = 116$. Следуя рекомендациям [10, 11], длина вектора вложения $L = 66$ (близко к половине длины ряда), размерность траекторной матрицы (66×50) , что обеспечивает наилучшую разделимость ряда на компоненты.

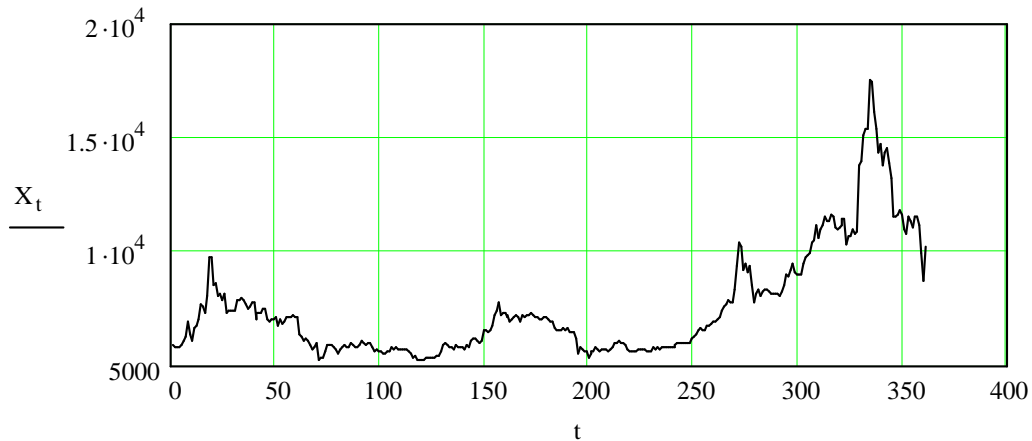


Рис. 1 – График изменения стоимости биткоина X_t от времени t (суток).

Первые десять собственных чисел корреляционной матрицы показаны на рис. 2.

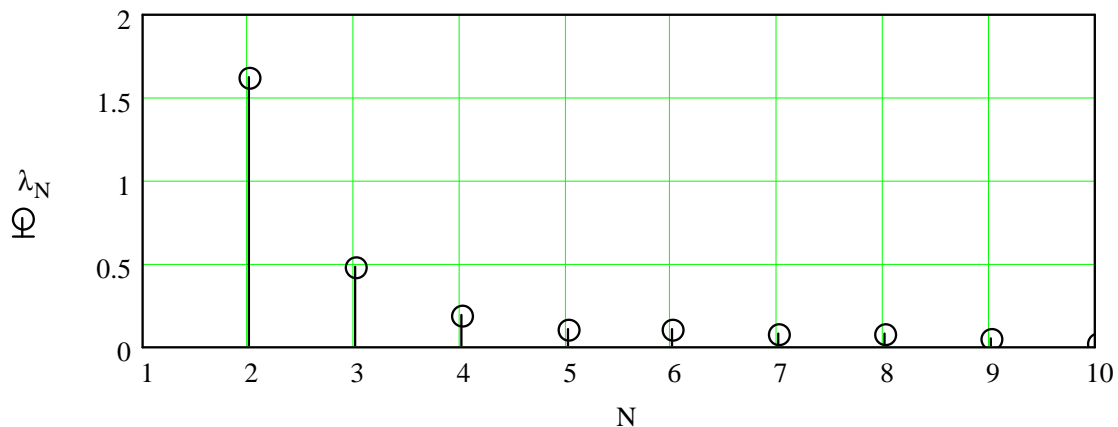


Рис. 2 – Собственные числа корреляционной матрицы.

Как правило, шум порождает медленно убывающую последовательность собственных чисел [11]. Поэтому скачок в собственных числах отделяет собственные тройки, соответствующие медленно меняющемуся сигналу (тренду) от остальных, соответствующих шуму. Перелом на третьем собственном значении позволяет сделать предположение, что первые две-три компоненты в разложении несут информацию о тренде, последующие соответствуют случайной составляющей (шуму). На рис. 3 приведены собственные векторы, соответствующие первым трем собственным числам корреляционной матрицы.

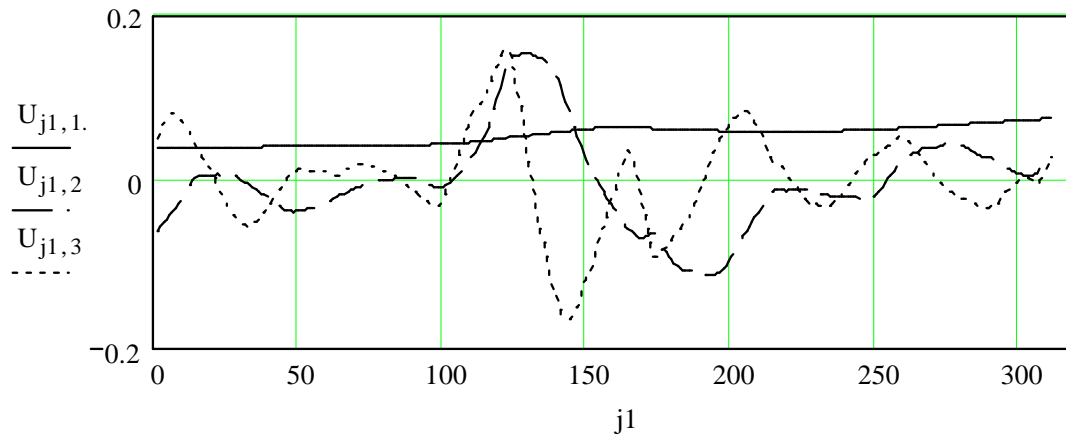


Рис. 3 – Собственные векторы $U_{j,i}$, соответствующие первым собственным числам. Линии — $1^{\text{й}}$ собственный вектор; $---$ $2^{\text{й}}$ собственный вектор; \dots $3^{\text{й}}$ собственный вектор.

Осцилляции третьего и последующих собственных векторов подтверждают, что соответствующие им компоненты не могут относиться к тренду.

На рис. 4 показан график временного ряда, восстановленного по 1 – 2 тройкам, вектор остатков (шума). Ряд остатков, полученный после удаления трендовой компоненты, приведен на рис. 5.

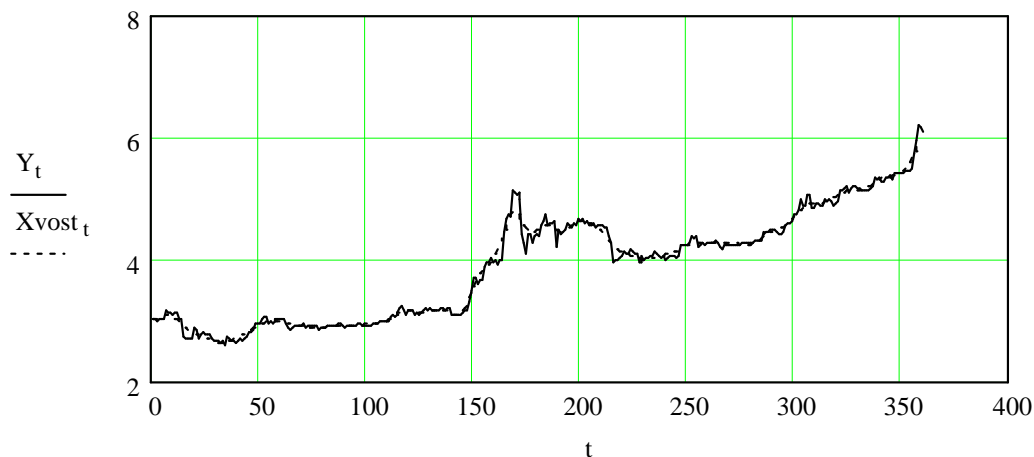


Рис. 4 – Исходный ряд, Y_t —; восстановленный ряд, $Xvost_t$ — \dots , t – время.

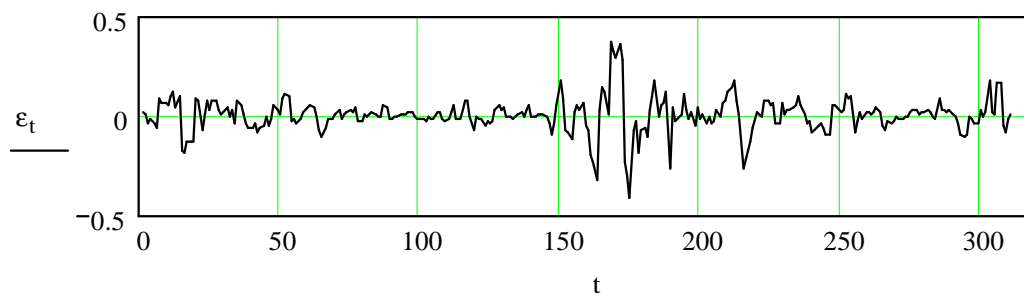


Рис. 5 – График остаточной компоненты ϵ_t , t – время.

Характер автокорреляционной функции, (рис. 6) подтверждает стационарность шумовой компоненты.

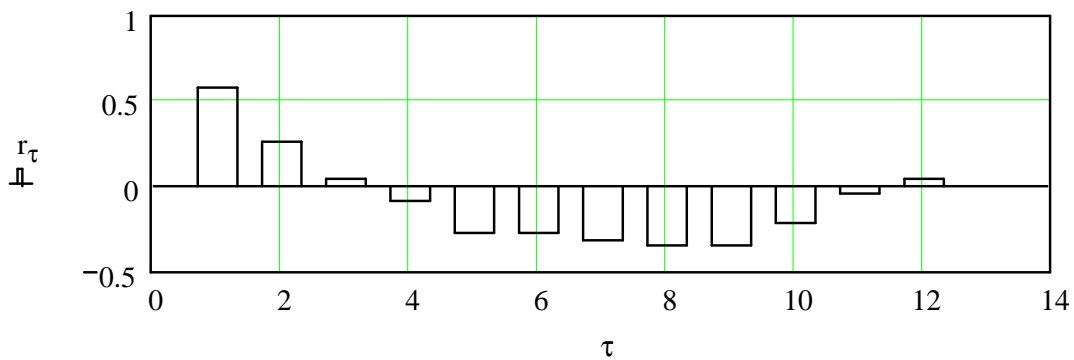


Рис. 6 – Автокорреляционная функция остаточной компоненты.

Данный метод исследования позволяет рассмотреть прогноз. К сожалению, дать статистическую оценку точности не представляется возможным в силу непараметричности метода SSA. Пусть X – траекторная матрица ряда, *восстановленного* по K^* компонентам. Выборка, представленная матрицей X , принадлежит некоторой поверхности S . В качестве базиса этой поверхности можно взять отобранные собственные вектора U_1, \dots, U_{K^*} , входящие в сингулярные тройки, образующие матрицу X .

Запишем разложение i -го столбца матрицы X по базису U_1, \dots, U_{K^*}

$$X^{(i)} = (U_1, U_2, \dots, U_{K^*}) \cdot (m_1^i, m_2^i, \dots, m_{K^*}^i)^T, \quad (4)$$

где m_i – неизвестные параметры разложения, подлежащие определению.

Число уравнений системы (4) меньше числа неизвестных, то есть система *недоопределенная*.

Добавим к матрице X $K^* + 1$ столбец и запишем соотношение (4) для этого столбца:

$$(U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{K^*}) \cdot \begin{pmatrix} m_1^{K^*+1} \\ m_2^{K^*+1} \\ \vdots \\ m_{K^*}^{K^*+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{K^*+1} \\ x_{K^*+2} \\ \vdots \\ x_{K^*+L+1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Последний элемент в столбце X^{K^*+1} – это *прогнозное значение*, подлежащее определению. Отбросим в системе (5) последнее уравнение, содержащее неизвестное x_{K^*+L+1} . Решив полученную усеченную систему уравнений, найдем параметры разложения $(m_1^{K^*+1} \ \dots \ m_{K^*}^{K^*+1})^T$

$$\vec{m} = (U_*^T \cdot U_*)^{-1} U_* \cdot X_*$$

Где U_* обозначает усеченную матрицу собственных значений. Теперь можно определить прогнозное значение

$$x_{K^*+L+1} = (u_L^1 \ u_L^2 \ \dots \ u_L^{K^*}) \cdot \vec{m}. \quad (6)$$

Для нахождения следующего прогнозного значения алгоритм повторяется с известным x_{K^*+L+1} .

К сожалению, отсутствие математической модели не позволяет получить статистическую оценку точности прогноза. Однако доказано [10,11], что точность обеспечивается асимптотически.

Результаты применения методики приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты применения методики

Дата продажи	16.01.2018	17.01.2018	18.01.2018
Цена продажи (\$)	13650	11880	11960
Прогноз (\$)	14090	12420	11170
Погрешность (%)	3.9	4.5	6.6

Вывод. Получен более точный прогноз по сравнению с применением для прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH даже и в «критических» для этих моделей случаях. В дальнейшем результаты прогнозирования возможно улучшить за счет разработки корректных методов подбора наиболее влияющих на прогноз факторов, а также комбинируя модель SSA с другими методами прогнозирования курса и точек перелома тренда.

Список литературы

1. Федоров А. В. Анализ финансовых рынков и торговли финансовыми активами. – Санкт-Петербург, 2007. – 234 с. – Режим доступа : www.forexclub.ua. – Дата обращения : 02 февраля 2018.
2. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – Москва : Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
3. Гомозов С. П., Сорокоумов И. О., Яновський О. В. Моделювання оцінки вартості акцій // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2010. – № 67. – С. 34 – 38.
4. Гуляева О. С., Цветков В. П., Цветков И. В. Фрактальный анализ валютных временных рядов // Финансы и кредит. – № 9 (249). – 2007. – С. 30 – 35.
5. Ширяев В. И. Финансовые рынки: Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. Изд. 2, испр. и доп. – М. : Либрокком, 2009. – 232 с.
6. Данилов Д. Л., Жиглявский А. А. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница». – Санкт-Петербург : Пресском, 1997. – 307 с.
7. Голандина Н. Э. Метод «Гусеница»-SSA : прогноз временных рядов : Учеб. пособие. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.
8. Голандина Н., Некруткин В., Степанов Д. Варианты метода «Гусеница»-SSA для анализа многомерных временных рядов // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'03. – Москва, 2003. – С. 2139 – 2168.
9. Peters E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment & Economics. – New York : J. Wiley&Sons, 1994. – 336 p.
10. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Business. – Vol. 45. – 1973.
11. Sornette D. Critical market crashes // Physics Reports. – 2003. – Vol. 378 (1). – P. 1 – 98. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00634-8.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. – Berlin : Springer, 2013. – 120 p.

References (transliterated)

1. Fedorov A. V. *Analiz finansovykh rynkov i torgovlya finansovymi aktivami* [Analysis of financial markets and trading of financial assets]. Saint Petersburg, 2007. 234 p. Available at: www.forexclub.ua. (accessed 02.02.2018).
2. Lukashin Yu. P. *Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennykh ryadov* [Adaptive methods for time series short-term prediction]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2003. 416 p.
3. Gomozov E. P., Sorokoumov I. O., Yanovskyy O. V. *Modelyuvannya otsinky vartosti aktsiy* [Modeling share value estimates]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2010, no. 67, pp. 34–38.
4. Gulyaeva O. S., Tsvetkov V. P., Tsvetkov I. V. *Fraktal'nyy analiz valyutnykh vremennykh ryadov* [Fractal analysis of currency time series]. *Finansy i kredit* [Finances and Credit]. 2007, no. 9 (249), pp. 30–35.
5. Shiryayev V. I. *Finansovye rynki : Neyronnye seti, khaos i nelineynaya dinamika. Izd. 2, ispr. i dop.* [Financial markets: neuron networks, chaos, and non-linear dynamics. 2nd ed. corrected and expanded]. Moscow, Librokom Publ., 2009. 232 p.
6. Danilov D. L., Zhiglyavskiy A. A. *Glavnye komponenty vremennykh ryadov : metod "Gusenitsa"* [Main components of time series: "Caterpillar" method]. Saint Petersburg, Presskom Publ., 1997. 307 p.
7. Golyandina N. E. *Metod "Gusenitsa"-SSA : prognoz vremennykh ryadov : Ucheb. posobie* ["Caterpillar"-SSA method: time series prediction. Textbook]. Saint Petersburg, Izd-vo SpbGU Publ., 2004. 52 p.
8. Golyandina N., Nekrutkin V., Stepanov D. *Varianty metoda "Gusenitsa"-SSA dlya analiza mnogomernykh vremennykh ryadov* [Versions of "caterpillar"-SSA method for analyzing multi-dimensional time series]. *Trudy II Mezhdunarodnoy konferentsii "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya" SICPRO'03* [Proceedings of the II International Conference "System Identification and Control Problems" SICPRO'03]. Moscow, 2003, pp. 2139–2168.
9. Peters E. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment & Economics*. New York, J. Wiley&Sons Publ., 1994. 336 p.
10. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Business*. 1973, vol. 45.
11. Sornette D. Critical market crashes. *Physics Reports*. 2003, vol. 378 (1), pp. 1–98. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00634-8.
12. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. Berlin, Springer Publ., 2013. 120 p.

Поступила (received) 12.02.2017

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гардер Сергій Євгенійович (Гардер Сергей Евгеньевич, Harder Sergei Evgenyevich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 529-56-46; e-mail: sergey.garder@gmail.com.

Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozov Yevgen Pavlovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

УДК 519.6

*С. Є. ГАРДЕР, Т. Л. КОРНІЛЬ***ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ТЕНДЕНЦІЇ ФІНАНСОВОГО ЧАСОВОГО РЯДУ**

Пропонується використання методу фрактального аналізу часових рядів на основі показника Херста та V – статистики як альтернативи до гіпотези ефективного ринку. Гіпотеза фрактального ринку підкреслює вплив ліквідності і інвестиційних горизонтів на поведінку інвесторів, вона не накладає ніяких статистичних вимог на процес. R/S – аналіз, або метод нормованого розмаху – це сукупність статистичних методів аналізу часових рядів, що дозволяють визначити їх деякі важливі характеристики, такі як характер змін, наявність неперіодичних циклів, пам'яті та інших. Проведено R/S – аналіз вартості акцій компанії IBM та надано прогноз по тенденціям вартості акцій на фінансових ринках.

Ключові слова: фрактальний аналіз, часовий ряд, R/S – аналіз, показник Херста, прогноз по тенденціям вартості.

*С. Е. ГАРДЕР, Т. Л. КОРНІЛЬ***ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕНДЕНЦИИ ФИНАНСОВОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА**

Предлагается использование метода фрактального анализа временных рядов на основе показателя Херста и V – статистики как альтернатива гипотезе эффективного рынка. Гипотеза фрактального рынка подчеркивает влияние ликвидности и инвестиционных горизонтов на поведение инвесторов, она не накладывает никаких статистических требований на процесс. R/S – анализ или метод нормированного размаха – это совокупность статистических методов анализа временных рядов, позволяющих определить их некоторые важные характеристики, такие, как характер изменений, наличие неперіодических циклов, памяти и других. Проведен R/S – r/s – анализ стоимости акций компании IBM и дан прогноз по тенденциям стоимости акций на финансовых рынках.

Ключевые слова: фрактальный анализ, временной ряд, R/S – анализ, показатель Херста, прогноз по тенденциям стоимости.

*S. E. GARDER, T. L. KORNIL***FRactal Analysis and Forecasting Trends of Financial Time Series**

The method of fractal analysis of time series based on the Hurst factor and V – statistics is proposed to be used as an alternative to the efficient-market hypothesis. The fractal market hypothesis emphasizes the influence of liquidity and investment horizons on the investors' behavior; it does not impose any statistic requirements on the process. The R/S – analysis or rescaled range analysis is a set of statistical methods for analyzing time series which allows determining some of the series' important properties such as the character of changes, the existence of non-periodic cycles, memory, etc. The R/S – r/s – analysis of the IBM share price is carried out and the forecast of the share price trends on the financial markets is given.

Key words: fractal analysis, time series, R/S – analysis, Hurst factor, forecast of share price trends.

Вступ. Розвиток фінансового ринку сприяє залученню все більшого числа активів до сфери ринкових відносин. Внаслідок цього поширюється застосування методів дослідження і прогнозування фінансових процесів, розроблених в рамках гіпотези ефективного ринку, до об'єктів реального інвестування. Разом з тим зростає незадоволеність результатами теоретичних досліджень. Серед причин цього лідирує неадекватність гіпотези ефективного ринку [3].

Гіпотеза ефективного ринку намагається пояснити статистичну структуру ринків. Першим було припущення, що ринки йдуть випадковим блуканням і можуть бути змодельовані за допомогою стандартного обчислення ймовірностей. Пізніше було усвідомлено, що курси цінних паперів на фондовому ринку були часовими рядами. Цей підхід мав ту перевагу, що пропонував велику кількість інструментів для дослідження. Проте, було не зрозуміло, чи могла статистика бути застосована до часового ряду. Найсуворіша вимога полягала в тому, що спостереження повинні бути незалежними, або, в кращому випадку, мати короткострокову пам'ять: тобто поточну зміну цін не можливо було вивести з попередніх змін. Це могло статися, тільки якщо зміни цін були випадковими блуканнями. Модель випадкових блукань стверджувала, що майбутні зміни ціни не можуть бути виведені з минулих змін.

Гіпотеза ефективного ринку зробила наступний крок, коли визнала, що поточні ціни відображають всю суспільну інформацію – тому що всі інвестори мають до неї рівний доступ, і, поводячись раціонально, вони, оцінять цінний папір відповідним чином. Теорія була розвинена, щоб виправдати використання статистичних інструментів, які вимагають незалежності, або в кращому випадку, короткострокової пам'яті.

Гіпотеза фрактального ринку підкреслює вплив ліквідності і інвестиційних горизонтів на поведінку інвесторів, вона не накладає ніяких статистичних вимог на процес. Ринки залишаються стабільними, коли інвестори мають багато різних інвестиційних горизонтів.

Аналіз останніх досліджень. Існують спроби створення модифікованих гіпотез поведінки фінансових ринків – синергетична модель, мультиагентна модель, модифікація ЕМН (Efficient Markets Hypothesis) на основі так званої *теорії ігрової ймовірності*. Серед досить поширених методів математичного моделювання можна назвати класичний і фрактальний аналіз часових рядів [1, 2].

© С. Є. Гардер, Т. Л. Корніль, 2018

У роботах [2 – 4] пропонується використання фрактального аналізу для часових рядів різного походження. В [4] на основі показника Херста досліджується характер та прогнозування фінансового ринку.

Проте практично всі дослідження носять теоретичний характер, прогнози, як правило, вимагають великої кількості спостережень, погано працюють в околі біфуркацій і не мають розрахункової моделі, що могла б видавати прогнози в режимі реального часу.

Постановка задачі. R/S – аналіз, або *метод нормованого розмаху* — це сукупність статистичних методів аналізу часових рядів, що дозволяють визначити деякі важливі їх характеристики, такі як характер змін, наявність неперіодичних циклів, пам'яті та інших. За допомогою R/S – аналізу можна показати, що ефект довготривалої пам'яті існує та є ознакою фрактальності (циклічності, повторюваності) ряду; за цим методом можна відрізнити випадковий ряд від не випадкового, навіть якщо випадковий ряд не гаусівський. Коефіцієнт Херста (H) – один з базових показників фрактального аналізу. У роботі використано наступний алгоритм його розрахунку.

Математична модель.

1. Динамічний ряд $N(t)$ розбивається на A суміжних періодів довжини n .
2. Визначається середнє значення нормованого розмаху

$$(R/S)_n = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A (R_i / S_i)_n$$

де R_i – максимальний розмах i – го періоду; S_i – вибіркове відхилення, розраховане для кожного періоду.

3. Визначаються $\ln(R/S)_n$ та $\ln(n)$.

4. Будується лінійна регресія $\ln(R/S)_n = f(\ln(n))$, у якій оцінка кутового коефіцієнту буде дорівнювати показнику Херста.

Існує три рівня класифікації для показника Херста:

1) $H = 0,5$. Вказує на випадковий ряд. Події випадкові та некорельовані. Сьогодення не впливає на майбутнє.

2) $0 \leq H < 0,5$. Даний діапазон відповідає антиперсистентності. Такий тип системи називають *поверненням до середнього*. Якщо система демонструє зростання у попередній період, то, швидше за все, у наступному періоді почнеться спад. І навпаки, якщо йшло зниження, то ймовірний близький підйом.

3) $0,5 < H < 1,0$. Маємо *персистентний ряд*, або ряд із стійким трендом. Якщо ряд зростає (або зменшується) у попередній період, то більш ймовірно, що він буде зберігати цю тенденцію якийсь час у майбутньому.

Поряд з використанням показника Херста для аналізу тенденції, оцінки автокореляційного впливу попередніх значень динамічного ряду на його наступні значення і визначення майбутньої тенденції обчислюють характеристику *кореляційного співвідношення*:

$$C = 2^{2H-1} - 1,$$

де C – *міра кореляції*; H – показник Херста.

Для знаходження *довжини циклу*, як правило, застосовується візуальний аналіз тенденцій кривої V – статистики. Він полягає у виявленні точок зміни тенденцій, що може сигналізувати про закінчення циклу. Зростання V – статистики при збільшенні числа спостережень вказує на персистентність поточної ділянки ряду, а стабілізація – на перевагу *білого шуму*. V – статистика розраховується за формулою:

$$V_n = \frac{\left(\frac{R}{S}\right)_n}{\sqrt{n}}$$

Графік V_n проти $\ln(n)$ буде лінійним, якщо процес є незалежним, ймовірнісним процесом ($H = 0,5$, що відповідає білому шуму).

З іншого боку, якщо процес персистентний, і R/S змінює масштаб швидше, ніж корінь з часу ($H > 0,5$), то графік буде зростаючим.

Навпаки, якщо процес антиперсистентний ($H < 0,5$), графік буде спадним.

Джерела вихідних даних. В якості початкових даних для дослідження було обрано ряд вартості акцій фірми ІВМ з січня 2008 року по червень 2009 року (540 значень), тобто $t \in 1,540$. Часовий ряд відображено на рис. 1.

Характерні особливості графіка цих коливань – наявність ділянок, що виявляють аномально великі зміни різниці вартості акцій. Ці зміни відображають фінансову світову кризу (серпень 2008 року). Як відзначають багато авторів, в період кризи фрактальний аналіз не несе в собі ніякої інформативності внаслідок стохастичності даного періоду. Тому, як правило, аналіз проводять, уникаючи періодів кризи і розділяючи дані на до і післякризові. Для аналізу вибрали два періоди. Перший – 240 докризових значень (рис. 2), другий – 310 післякризових значень (рис. 3).

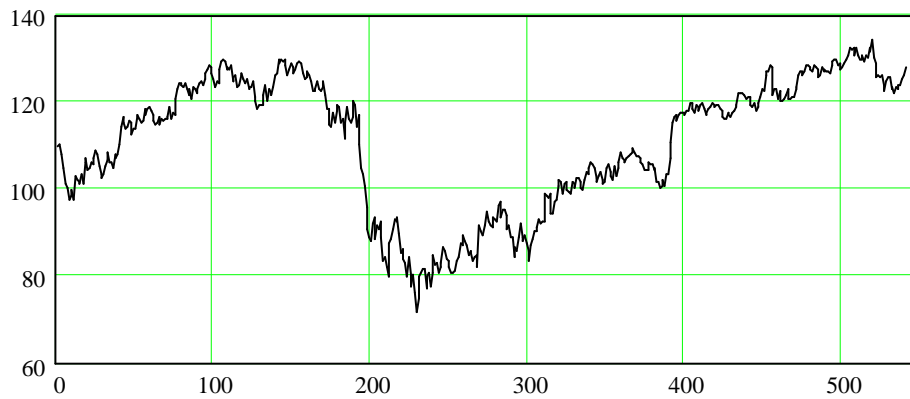


Рис. 1 – Ряд вартості акцій фірми IBM з січня 2008 року по червень 2009 року (\$).

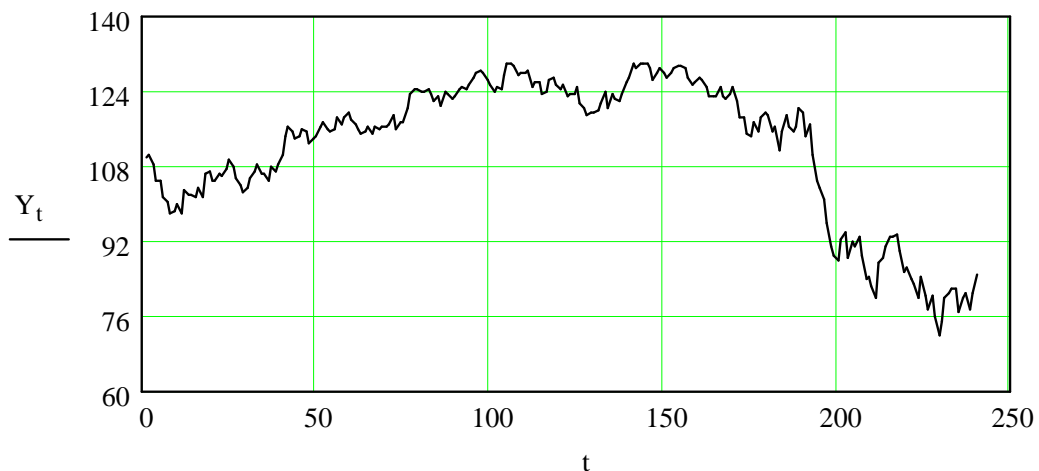


Рис. 2 – Ряд вартості акцій фірми IBM з січня 2008 року по серпень 2008 року (\$).

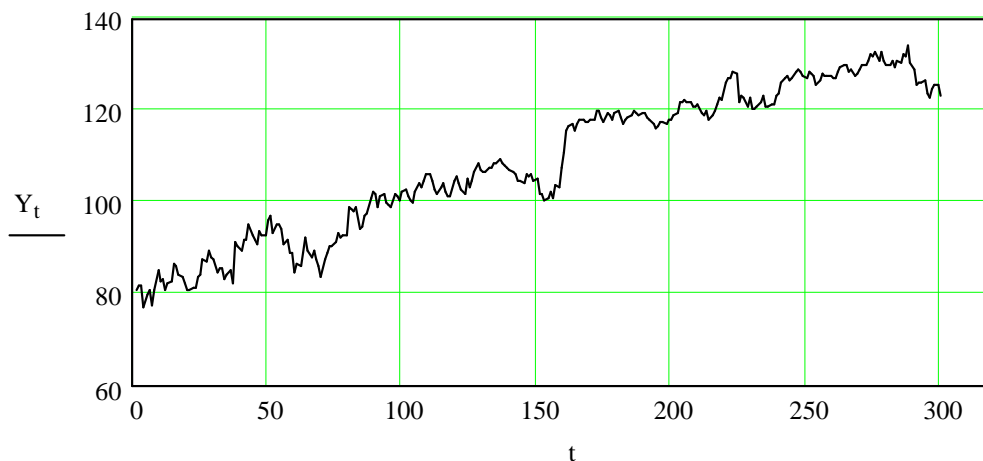


Рис. 3 – Ряд вартості акцій фірми IBM з серпня 2008 року по червень 2009 року (\$).

Результати. R/S – аналіз і V – статистики для першого ряду наведені на рис. 4. (по осі абсцис – $\ln(n)$). Показник Херста $H = 0,702$, фрактальна розмірність $D = 1,298$, міра кореляції $C = 1,579$. Оскільки графік V – статистики має нахил вгору, це підтверджує, що процес є персистентним, і R/S змінює масштаб швидше, ніж корінь з часу ($H > 0,5$). Моменти перелому тенденції графіка ($\ln(n) \approx 3.2$ і $\ln(n) \approx 3.7$) відповідає довжині як періодичного, так і неперіодичного циклу.

Другий ряд нараховує 310 спостережень. Результати R/S аналізу ряду відображено на рис. 5. Для нього $H = 0,964$, фрактальна розмірність $D = 1,036$, та міра кореляції $C = 0,446$. Оскільки графік V – статистики має нахил вгору, це підтверджує, що процес персистентний, і R/S змінює масштаб швидше, ніж корінь з часу.

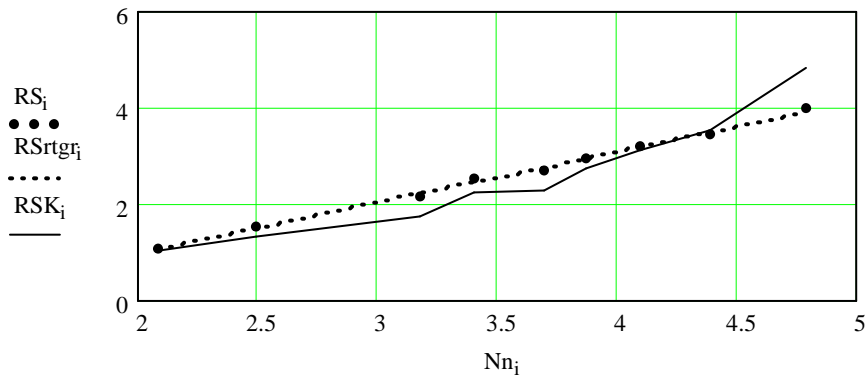


Рис. 4 – Показник Херста (RSrtgr) і V – статистика (RSK), $Nn = \ln(n)$ (240 значень).

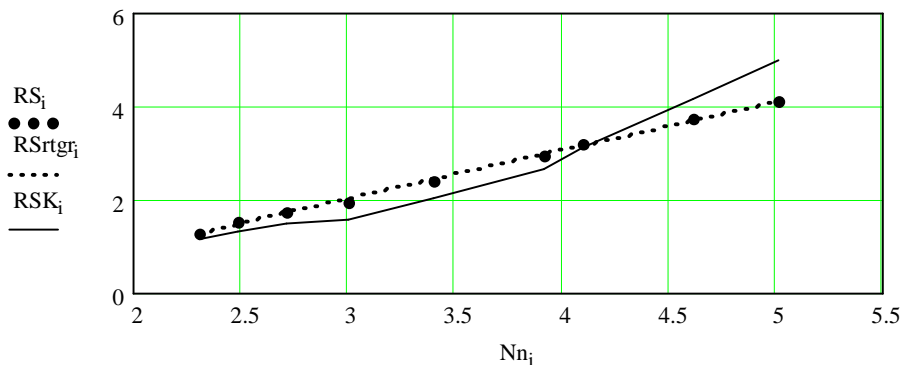


Рис. 5 – Показник Херста (RSrtgr) і V – статистика (RSK), $Nn = \ln(n)$ (310 значень).

Обидва ряди персистентні; отже вони мають тренд, а ринок має довготривалу пам'ять.

Висновки. Значення показника Херста в обох досліджених рядах дозволяє зробити висновки, що тенденція буде зберігатися протягом деякого періоду, а отже вартість акцій зростає.

Застосування V_n – статистики дозволяє виявити наявність циклів.

Список літератури

1. Федер Е. Фракталы : пер. с англ. – М. : Мир, 1991. – 254 с.
2. Даниленко В. А. Альтернативні методи проведення фрактального аналізу // Економіка промисловості. – 2010. – № 2. – С. 8 – 12.
3. Снитюк В. Є. Прогнозування. Моделі. Методи. Алгоритми : Навчальний посібник. – К. : «Маклаут», 2008. – 364 с.
4. Трунова О. В., Скитер І. С. Использование фрактального анализа для исследования динамики сложных систем // Математическое и имитационное моделирование систем : Восьмая международная науч.-практ. конф., 24 – 28 июня 2013 г.; тезисы докл. – Чернигов, ЧНТУ, 2013. – С. 296 – 299.

References (transliterated)

1. Feder E. *Fraktaly : per. s angl.* [Fractals: Translated from English]. Moscow, Mir Publ., 1991. 254 p.
2. Danylenko V. A. *Alternatyvni metodyky provedennya fraktal'nogo analizu* [Alternative methodologies for carrying out fractal analysis]. *Ekonomika promyslovosti* [Economy of Industry]. 2010, no. 2, pp. 8–12.
3. Snytyuk V. E. *Prognozuvannya. Modeli. Metody. Algoritmy : Navchal'nyy posibnyk* [Forecasting. Models. Methods. Algorithms: Textbook]. Kyiv, Maklout Publ., 2008. 364 p.
4. Trunova O. V., Skiter I. S. *Ispol'zovanie fraktal'nogo analiza dlya issledovaniya dinamiki slozhnykh sistem* [Using fractal analysis for studying dynamics of composite systems]. *Matematicheskoe i imitatsionnoe modelirovaniesistem : Vos'maya mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya. 24 – 28 iyunya 2013 g.; tezisy dokl.* [Mathematical and simulation modeling of systems: the eighth international scientific and practical conference, June 24 – 28, 2013; book of abstracts]. Chernigov, ChNTU Publ., 2013, pp. 296–299.

Надійшла (received) 06.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гардер Сергій Євгенійович (Гардер Сергей Евгеньевич, Garder Sergei Evgenievitch) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 529-56-46; e-mail: sergey.garder@gmail.com.

Корніль Тетяна Леонівна (Корніль Татьяна Леоновна, Kornil Tatyana Leonovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 563-75-50; e-mail: kornil.tl@gmail.com.

А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ЄМНОСТІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Обґрунтовано доцільність розгляду коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею. Виділено основні коливальні рухи оболонки, які впливають на перерозподіл мас в ємності. На основі рівняння Стокса для ізотермічного руху ньютонівської в'язкої нестисливої рідини, а також формули Лапласа для сили поверхневого натягу, складена математична модель низькочастотних коливань рідини і аналітичні вирази для власних частот. Складено рівняння для опису вимушених коливань рідини під дією заданих кінематичних збурень з боку оболонки. При використанні отриманих рівнянь планується врахувати перерозподілу мас в цистерні при виконанні транспортних і технологічних робіт машинно-тракторного агрегату.

Ключові слова: коливання, ємність, затухаючі частоти, гармоніка, крайові умови.

А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЁМКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Обоснована целесообразность рассмотрения колебаний жидкости в горизонтальной ёмкости со свободной поверхностью. Выделены основные колебательные движения оболочки, которые влияют на перераспределение масс в ёмкости. На основе уравнения Стокса для изотермического движения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости, а также формулы Лапласа для силы поверхностного натяжения, составлена математическая модель низкочастотных колебаний жидкости и аналитические выражения для собственных частот. Составлены уравнения для описания вынужденных колебаний жидкости под действием заданных кинематических возмущений со стороны оболочки. При использовании полученных уравнений планируется учитывать перераспределения масс в цистерне при выполнении транспортных и технологических работ машинно-тракторного агрегата.

Ключевые слова: колебания, ёмкость, затухающие частоты, гармоника, граничные условия.

A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV

MATHEMATICAL MODELLING OF LOW-FREQUENCY OSCILLATIONS OF VISCOUS FLUID IN HORIZONTAL CONTAINER WITH FREE SURFACE

The expediency of considering oscillations of a liquid in a horizontal container with a free surface is substantiated. The main vibrational motions of the shell influencing the redistribution of masses in the vessel are identified. Based on the Stokes equation for the isothermal motion of a Newtonian viscous incompressible fluid and also the Laplace formula for the surface tension force, a mathematical model of low-frequency fluid oscillations and analytical expressions for natural frequencies are compiled. Equations for describing forced fluid vibrations under the action of given kinematic perturbations on the shell side are compiled. When using the equations obtained, it is planned to take into account the redistribution of masses in the tank of a machine-tractor unit performing transport and technological works.

Key words: oscillations, capacitance, damped frequencies, harmonic, boundary conditions.

Вступ. Широкого загалу набули конструкції різної форми, які заповнені рідиною. Вони використовуються в кораблебудуванні, транспортному машинобудуванні, ракетно-космічній та авіаційній техніці. При дослідженні в даних напрямках перед науковцями постає одна з важливіших науково-прикладних задач по забезпеченню поздовжньої та поперечної стійкості ємностей з рідиною. Оскільки дослідження вільних та вимушених коливань, які утворюються при поздовжній та поперечній нестабільності, можуть призвести до збільшення навантаження, аварійної ситуації, тощо, то вирішення цієї задачі є актуальним.

Розглядаючи вільні та вимушені коливання, в задачах транспортного машинобудування слід виділити негативні фактори, які впливають на плавність руху, керованість, стійкість, маневреність, тощо. Не врахування цих факторів призведе до зменшення техніко-економічних та експлуатаційних показників, а також створять негативний вплив на питання надійності машинно-тракторних агрегатів в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Дослідженням вільних та вимушених коливань рідини в ємності з вільною поверхнею присвячена низька наукових праць [1 – 6]. Дані праці покликані вирішити таку наукову проблему, як адекватне моделювання процесу перетікання маси в ємності (зокрема, в паливних баках) ракет-носіїв, що більш коректно дозволить описувати та розраховувати показники ракети.

Оскільки матеріал даної статті направлено на вирішення задачі перерозподілу рідини в горизонтальній ємності (цистерні) машинно-тракторного агрегату, то доцільно виконати аналіз робіт в даній галузі. Тут необхідно виділити роботи [7 – 10], які вирішують деякі проблеми вибору раціонального режиму експлуатації машинно-тракторного агрегату, що виникають під час виконання технологічної операції машинами змінної маси. Проте питаннями коливань рідини в горизонтальній ємності машинно-тракторного агрегату при виконанні тягово-транспортних робіт уваги не приділено.

Метою роботи є проведення математичного моделювання повної групи вільних та вимушених низькочастотних поверхневих коливань в'язкої рідини в горизонтальній замкнутій ємності з вільною поверхнею.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- визначити збуджувальні чинники та розкрити механізм виникнення поверхневих хвиль;
- знайти та проаналізувати частоти вільних коливань рідини у цистерні;
- скласти рівняння вимушених коливань рідини під дією збуджувальних чинників.

Фізична модель збудження низькочастотних поверхневих коливань рідини. Перш ніж перейти до дослідження коливань машинно-тракторного агрегату в складі з цистерною (рис. 1), необхідно дослідити вільні та вимушені коливання рідини в горизонтальній ємності з певним процентом її заповнення. Щодо властивостей екіпажної частини цистерни, то на початковій стадії її проектування достатньо знати, що там існує граничне значення частоти (приблизно, 3 ... 5 Гц), при перебільшенні якого амплітуди вимушених коливань в практичному сенсі дорівнюють нулю. В ході подальших досліджень значення цієї частоти буде уточнюватися, проте інтервал пропускання для ресорної системи залишиться на тому рівні, як зазначено вище. Цей рівень і поділяє частоти, які виникають при коливальному русі рідини, на низькі та високі.

Зазначимо, що швидкість звука в рідині, що досліджується, становитиме близька 1000 м/с, а максимальний розмір цистерни (по діагоналі) становить 8 м. Як наслідок, усі хвилі стиснення будуть мати частоти понад 100 Гц, і для процесів, що змінюються з періодом (або з постійною часу) 0.5 ... 5 с, вони якісно знівелюють зміну щільності. Крім того, перепад тиску, спричинений силами гравітації, не перевершує 0.2 МПа, що ущільнить рідину приблизно на 0.02%. Тому статичним і динамічним стисканням рідини в задачі, що розглядається, можна знехтувати.

Цистерна, зображена на рис. 1, перевозить по сільськогосподарським ділянкам та розпилює водні розчини органічних та мінеральних добрив, кінематична в'язкість яких, як правило, лежить в межах $\nu = 1.4 \dots 2 \text{ сСт}$, а коефіцієнт поверхневого натягу становитиме $\sigma = 0.06 \dots 0.08 \text{ Н/м}$. Тобто, за прийнятою класифікацією, ця рідина є мало в'язкою, а її поверхнева плівка має приблизно такі ж якості, як на межі води та повітря.

Джерелами низькочастотних коливань є імпульси сили і моменту сили, які прикладаються до оболонки цистерни з боку її екіпажної частини та насосного навісного обладнання. Відповідні чинники можуть діяти епізодично (при подоланні дорожньої перешкоди) чи утворювати періодичні послідовності (при роботі вакуумного насосу), що породжуватиме затухаючі вільні або незатухаючі вимушені коливання рідини.

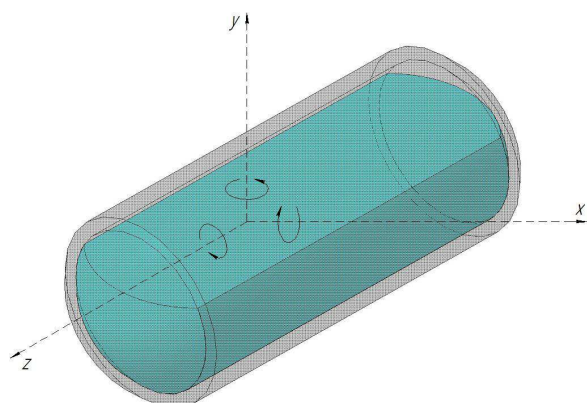
В якості генератора вільних коливань низької частоти (і трансформатора вимушених коливань) виступає вільна поверхня рідини. Фронти і хвилі кінематичного збурення поширюються по рідині від бокових поверхонь цистерни і приводять до підйому (чи опусканню) рівня вільної поверхні. Як наслідок, в протилежній фазі до вертикального зміщення поверхні змінюється величина нормального тиску, спричиненого гравітаційними силами та силами поверхневого натягу, що і приводить до вільних коливань, амплітуда яких зменшується при зростанні глибини по експоненціальному закону. Під дією тертя ці коливання стають затухаючими. Крім того, тертя обмежує амплітуди вимушених коливань при резонансах.

Згідно до *теорії поверхневих хвиль Релея*, при амплітудах, що перевершують 10% від довжини хвилі, ці хвилі втрачають стійкість і руйнуються, що є автоматичним запобіжником значного зростання коливань при резонансах. З іншого боку, в зоні стійкості хвилі амплітуда коливань не є значною, тому їх можливо моделювати при використанні лінійної моделі.

Як і в інших задачах механіки, всі типи лінійних коливань рідини можна проаналізувати в рамках єдиного підходу, що базується на пошуку частот і форм власних (інша назва – *парціальних*) коливань.



а



б

Рис. 1 – Фактична та спрощена форма цистерни:

а – вид з боку; б – розрахункова модель (ось Oz розташовано на початковому рівні вільної поверхні рідини).

Лінеаризована системи диференціальних рівнянь для опису коливань рідини в цистерні. Для формування математичної моделі низькочастотних коливань скористаємося відомою системою рівнянь Стокса для

ізотермічного руху ньютонівської в'язкої нестискуваної рідини [11]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x; & \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z; & \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\vec{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, p , ρ – швидкість, тиск та щільність рідини; ν – її кінематична в'язкість; t – час; ∇^2 – диференціальний оператор Лапласа; g – модуль прискорення вільного падіння, яке направлено вздовж осі Oy , що перпендикулярна до начального положення вільної поверхні.

Якщо коливання швидкості є малими, то систему (1) можливо лінеаризувати та спростити, нехтуючи більшою частиною конвективних членів. У векторній формі вона матиме такий вигляд:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho V_0 \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = -\text{grad } p - \rho \cdot \nu \cdot \text{rot rot } \vec{V}, \quad (2)$$

де V_0 – швидкість випуску рідини із цистерни.

Зауважимо, що для моделі паливних баків ракетного двигуна [11] швидкість V_0 є значною, і там вона виступає як основний чинник затухання коливань рідини. Але під час транспортування цистерни ця швидкість дорівнює 0, а при операції розпилування рідини – близька до 0, тому в моделі, що розробляється, її можна й не враховувати. До того ж, тут є інші чинники, які приводять до затухання вільних коливань, а саме – сили тертя.

Цистерна має великі розміри, тому рух рідини й при малих коливаннях треба вважати турбулентним. В турбулентному ядрі в'язкість набагато більша, ніж у обмежуючої стінки, тому лінійні або кутові швидкості в ядрі стають суттєво вирівняними, а зміни тангенціальної швидкості потоку відбувається в вузькому слою поблизу стінки. Тому крім внутрішнього тертя, що описується роторами векторного поля, в цій задачі треба враховувати і зовнішнє тертя, яке пропорційне різниці швидкостей між рідиною і поверхнею бокової стінки. Позначимо коефіцієнт зовнішнього тертя літерою f ; тоді для плоского турбулентного ядра потоку рідини замість рівняння (2) треба записати таке:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad } p - \rho \cdot \nu \cdot \text{rot rot } \vec{V} - f \cdot (\vec{V} - \vec{V}_{cm}), \quad (3)$$

де \vec{V}_{cm} – позначає тангенціальну швидкість бокової стінки (вона лежить у площині плоского ядра потоку).

Відповідно до теорії турбулентних течій [11], коефіцієнт тертя f залежить від форми і шорсткості поверхні, що обтикається, а також от середнього рівня $V_{сер}$ тангенціальних швидкостей (що робить задачу моделювання вимушених нестационарних коливань рідини нелінійною). У першому наближенні його можна визначати за формулою

$$f = \rho \cdot \zeta \cdot V_{сер},$$

де $\zeta \approx 1/\text{Re}_{кр} \approx 0,000435$; $\text{Re}_{кр} \approx 2300$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке визначає ширину ламінарного слою біля стінки.

Надалі значення цього коефіцієнта буде уточнятися за результатами експериментів на фізичних моделях цистерни. Для аналітичного дослідження достатньо знати, що значення цього коефіцієнту мало, і в практичному сенсі воно не впливає на частоти вільних коливань.

Потенціальна та вихрова компонента поля коливань рідини. Згідно із *теоремою Гельмгольца* [13], вектор швидкості рідини представимо як суму потенціального та соленоїдального поля:

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{b}, \quad (4)$$

де φ – скалярний потенціал, який, в наслідок нестисливості рідини, є гармонійною функцією, тобто відповідає рівнянню Лапласа

$$\text{div grad } \varphi = 0;$$

\vec{b} – це векторний потенціал, який для плоского поля, перпендикулярного до вектора $\vec{n} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, визначається відповідною скалярною функцією, а саме:

$$\vec{b} = \psi(x, y, t) \cdot \vec{k}, \quad \vec{b} = \psi(x, z, t) \cdot \vec{j}, \quad \vec{b} = \psi(y, z, t) \cdot \vec{i}.$$

Формулу, аналогічну (4), запишемо для швидкостей відносного руху стінки цистерни:

$$\vec{V}_{cm} = \text{grad } \varphi_{cm} + \text{rot } \vec{b}_{cm}, \quad (5)$$

де перший доданок відповідає поступальному руху, а другий – обертальному руху стінки,

$$\vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, y, t) \cdot \vec{k}, \quad \vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, z, t) \cdot \vec{j}, \quad \vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(y, z, t) \cdot \vec{i},$$

причому для твердого тіла

$$\psi_{cm}(x, y, t) = 0.5 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \Omega_{cm,z}; \quad \psi_{cm}(x, z, t) = 0.5 \cdot (x^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm,y}; \quad \psi_{cm}(y, z, t) = 0.5 \cdot (y^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm,x};$$

$\Omega_{cm,x}$, $\Omega_{cm,y}$, $\Omega_{cm,z}$ – кутова швидкість обертання стінки відносно відповідної координатної осі.

Підставимо формули (4), (5) у рівняння (3) та запишемо його у наступному вигляді:

$$\text{grad} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) \right] + \text{rot} \left[\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) \right] = 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що із рівняння (6) витікають два співвідношення:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) = \varphi_{\text{лан}}; \quad \rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) = -\vec{b}_{\text{лан}},$$

де $\varphi_{\text{лан}}$ та $\vec{b}_{\text{лан}}$ – це скалярний та векторний потенціали одного й того ж лапласового векторного поля \vec{a} , тобто

$$\text{rot } \vec{b}_{\text{лан}} = \text{grad } \varphi_{\text{лан}}.$$

Ймовірна присутність зазначених потенціалів суттєво ускладнює задачу. Проте, після виконання крайових умов зазначений люфт у визначенні потенціалу φ зникає, і надалі можна вважати, що $\vec{b}_{\text{лан}} = 0$. Це означає, що вихрову компоненту поля можна визначити попередньо, розв'язуючи крайову задачу

$$\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot \vec{b} = f \cdot \vec{b}_{cm}; \quad \vec{b} - \vec{b}_{cm} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (7)$$

де Γ_0 – так звана змочена поверхня цистерни.

Потенціальна постановка задачі. Якщо $\vec{b}_{cm} = 0$, то і $\vec{b} = 0$, тобто вихрова складова поля відсутня. Рівняння

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) = 0$$

перепишемо як визначення для тиску по відомому скалярному потенціалу швидкостей:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}).$$

На змоченій поверхні Γ тиск може бути довільним (рис. 2, а), а на початковому рівні вільної поверхні Γ_0 його значення розраховується за формулою

$$p = \rho g \cdot \Delta y_n - \sigma \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial z^2} \right], \quad (8)$$

де Δy_n – локальний підйом вільної поверхні від її початкового положення,

$$\Delta y_{nom} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \Phi = \int (\varphi - \varphi_{cm}) dt;$$

σ – коефіцієнт поверхневого натягу (для формули Лапласа); вираз в квадратних дужках обчислює середню кривизну цієї поверхні в точці, де розраховується тиск.

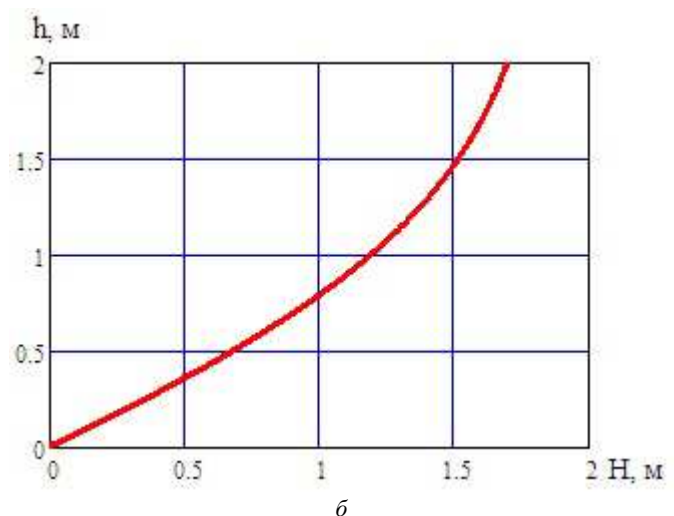
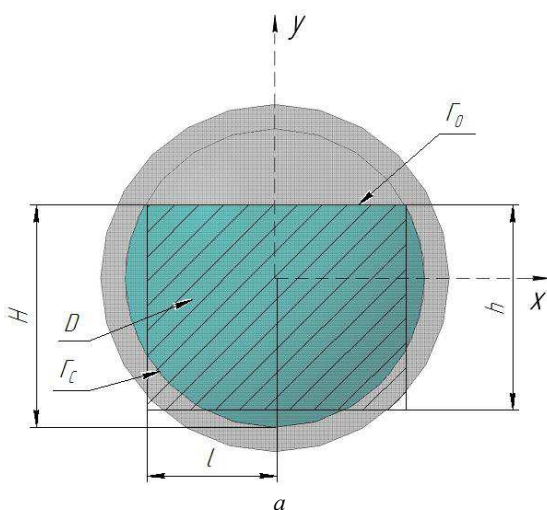


Рис. 2 – Спрощення форми ємності:

а – вид спереду цистерни; б – залежність розрахункового рівня h рідини від фактичного рівня H .

В результаті, для функції Φ , яка є скалярним потенціалом зміщення рідини, отримали наступну крайову задачу:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = \ddot{\Phi}_{cm}, \quad (9)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0}$ – це похідна за напрямком нормалі до змоченої поверхні, а поле \vec{V} відповідає швидкостям рідини відносно оболонки.

Зауважимо, що при зміщенні в площині xOy потенціал Φ не залежить от координати z , а при зміщенні в площині yOz потенціал Φ не залежить от координати x , тому в системі (9) формула для кривизни матиме лише одну складову, а векторне поле \vec{V} матиме лише дві не нульові компоненти. Причому праві частини останнього рівняння визначаються за формулами

$$\ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm.x} \cdot x \quad \text{або} \quad \ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm.y} \cdot y,$$

де $a_{cm.x}$, $a_{cm.y}$ – це прискорення стінки по напрямку осі Ox або Oy , відповідно.

Таким чином, у розглянутому випадку джерелом низькочастотних поверхневих коливань є здвигові прискорення поверхні.

Потенціальна форма змішаної (потенціальної та вихрової) задачі. Якщо $\vec{b}_{cm} \neq 0$, то рівняння (7) мають не нульові розв'язки, і на вільній поверхні виникає додатковий (вихровий) підйом $\Delta y_{вих}$, який у системі (9) не врахований. Проте ситуацію можна швидко виправити, якщо, наприклад, для поля $\vec{V}_{вих}$ вихрових швидкостей стінки навколо осі Oz скористатися формулою

$$\vec{V}_{cm.вих} = \{\Omega_{cm.z} \cdot y; -\Omega_{cm.z} \cdot x\} = \Omega_{cm.z} \cdot \{y; x\} + \Omega_{cm.z} \cdot \{0; -2x\}. \quad (10)$$

У правій частині (10) перша складова має скалярний гармонійний потенціал

$$\Omega_{cm.z} \cdot \{y; x\} = \text{grad}(\Omega_{cm.z} \cdot x \cdot y),$$

а друга складова активізує нерівномірний коливальний зсув рідини вздовж осі Ox ; до вихрового підйому вільної поверхні цей зсув не приводить.

Таким чином, якщо оболонка цистерни обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\Omega_{cm.z}(t)$ і зсувається вздовж осі Ox з лінійною швидкістю $Vx_{cm}(t)$, то для задачі щодо низькочастотних коливань цей складний рух оболонки описує ефективний потенціал

$$\varphi_{cm}(t) = Vx_{cm}(t) \cdot x + \Omega_{cm.z}(t) \cdot x \cdot y.$$

Далі можна повторити виклад, що привів до рівнянь (9); при цьому треба врахувати, що додатковий потенціал на вільній поверхні дорівнює 0 та не змінює її кривизну. В результаті ми прийшли до системи типу (9) зі зміненою правою частиною:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm.x}(t) + g \cdot \theta_{cm.z}(t)] \cdot x, \quad (11)$$

де $\theta_{cm.z}(t) = \int \Omega_{cm.z} dt$ – це кут закручення оболонки.

Аналогічний результат отриманий для коливань у площині zOy :

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm.z}(t) + g \cdot \theta_{cm.x}(t)] \cdot z. \quad (12)$$

Для оберткових коливань в площині xOz ефективний потенціал має лише один доданок,

$$\varphi_{cm}(t) = \Omega_{cm.y}(t) \cdot x \cdot z,$$

причому, у протилежність до двох попередніх випадків, на вільній поверхні він приймає саме такі (не нульові) значення, але похідна $\partial \varphi_{cm}(t) / \partial y = 0$. Тому рівняння для цих коливань має інший вигляд:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = \dot{\Omega}_{cm.y} \cdot x \cdot y, \quad (13)$$

тобто у якості чинника, що збуджує коливання, тут виступає кутове прискорення.

Задача для вертикальних коливань зсуву. Відповідна задача розглядається в потенційній постановці, що приводить до системи рівнянь вигляду (9). Проте, оскільки тепер вібрація оболонки є вертикальною, на вільній поверхні похідна $\ddot{\Phi}_{cm}$ приймає одне й теж значення,

$$\ddot{\Phi}_{cm} \Big|_{\Gamma} = \text{const}.$$

При такому характері збудження перетікання рідини вздовж вільної поверхні не відбувається, і низькочастотні коливання (якщо не враховувати можливість відриву рідини від дна цистерни з утворенням каверни або парової подушки) стають неможливими.

До того ж, тут варто було б врахувати й іншу можливість – нерівномірне коливання оболонки, при якому масивні бокові кришки цистерни рухаються з дещо іншими швидкостями, ніж її центральна частина. Проте, якщо звернути увагу на масивну опорну балку, що простягнулася на усю довжину цистерни (рис. 1), то можливість таких коливань стає ілюзорною.

Групи низькочастотних коливань рідини у цистерні. Повна група рухів жорсткої оболонки включає 3 переміщення та 3 обертання. Деформація та пружні зв'язки коливань оболонки не враховуються, тому що їх частота значно більше 100 Гц.

При вертикальних коливаннях, як зазначено вище, переливання рідини не відбувається, а частота коливань визначається стисненням рідини. Власна частота при цьому дорівнює приблизно 500 Гц, тому їх не враховуємо (адже необхідно враховувати разом з деформацією оболонки [12]). Інші 5-ть коливань розбиваємо на групи, які пов'язані з переливанням рідини та мають низькі власні частоти коливання:

- Група №1. Коливання в площині xOy (переміщення та оберт).
- Група №2. Коливання в площині zOy (переміщення та оберт).
- Група №3. Обертання навколо вісі Oy .

Для перших двох груп векторне поле швидкостей є плоским, а для третьої групи – просторовим.

Оскільки форма цистерни для застосування відомих методів математичного аналізу, зокрема метода Фур'є розподілу змінних, є складною, то для подальшого дослідження приймемо спрощену форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2), який має аналогічні розміри вільної поверхні та містить той же самий об'єм рідини.

Будемо позначати діаметр цистерни як $2R$, а її довжину – як $2L$; для цистерни ВНЦ-20 (виробництва ТОВ «Завод Кобзаренка»), яка досліджується в якості зразка – аналога,

$$2R = 2\text{ м}, \quad \text{а} \quad 2L = 7\text{ м}.$$

Тоді, в залежності від реального рівня H рідини в цистерні, за формулами

$$l = \sqrt{H \cdot (2R - H)}, \quad S = \begin{cases} R^2 \arcsin(l/R) - l \cdot (R - H), & H \leq R \\ R^2 (\pi - \arcsin(l/R)) - l \cdot (R - H), & H > R \end{cases}, \quad h = \frac{S}{2l},$$

можна знайти площу S перерізу та розміри $2l$ і h умовного прямокутного паралелепіпеда (рис. 2, б).

Парціальні частоти. Знайдемо розв'язок системи (11), що відповідає коливанням групи №1. У поверхневої хвилі Релея амплітуда при заглибленні зменшується за експоненціальним законом, причому якщо глибина перевищує довжину хвилі, то амплітуда коливань близька нулю. Таку ж саме поведінку матиме векторне поле, яке породжує гармонійний потенціал

$$\Phi = T(t) \cdot \sin(\lambda \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda \cdot y). \quad (14)$$

Причому при $y = -h$ і будь-якому значенню λ він буде задовольняти крайовій умові $V_y = \partial\Phi/\partial y = 0$, а якщо

$$\lambda = \lambda_k^I = \pi \cdot (0.5 + k) / l, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{або} \quad \lambda = \lambda_k^{II} = \pi \cdot k / l, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

то при $x = \pm l$ він буде задовольняти крайовій умові $V_x = \partial\Phi/\partial x = 0$.

Тобто похідна цього поля по напрямку нормалі до змоченої поверхні тотожно дорівнює нулю.

Права частина (11) є непарною за змінною x і її можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є по синусах:

$$(-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot x = (-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (-1)^k \cdot \sin(\lambda_k^I x), \quad b_k = \frac{2/l}{(\lambda_k^I)^2}.$$

Це означає, що для рішення використовуватимемо лише перші хвилові числа із (15), а саме

$$\lambda_k = \pi \cdot (0.5 + k) / l, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

і позначати ці числа додатковим верхнім номером більше не треба.

Щоб задовольнити рівняння (11), представимо шуканий потенціал у вигляді аналогічного ряду Фур'є:

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y), \quad (16)$$

і підставимо його в (11). В результаті отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$\ddot{T}_k + f \cdot \dot{T}_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma/\rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot T_k = \frac{2}{l} \cdot \frac{(-a_{cm,x}(t) - g \cdot \theta_{cm,z}(t))}{\lambda_k^2 \cdot \text{ch}(\lambda_k h)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

де кожне окреме рівняння описує парціальне (вільне або вимушене) коливання рідини.

Якщо в (17) відкинути праву частину, то ми отримуємо рівняння вільних затухаючих коливань,

$$\ddot{T}_k + f \cdot \dot{T}_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot T_k = 0,$$

звідки маємо аналітичні рівняння для комплексних кругових частот,

$$\omega_k^2 + f \cdot \omega_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot \omega_k = 0,$$

яке має розв'язки

$$\omega_k = -0.5f \pm i \sqrt{\lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) - 0.25f^2}.$$

Такі рішення відповідають затухаючим коливанням, частота яких розраховується за формулою

$$\nu_k = \sqrt{\lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h)}, \quad (18)$$

або

$$\nu_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0.5+k}{\pi l} \cdot \text{th} \left[\pi \cdot (0.5+k) \cdot \frac{h}{l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0.5+k)}{l} \right]^2 \right)}. \quad (19)$$

Результат застосування формули (19) для перших 4-ох гармонік із номерами $k = 0, 1, 2, 3$ показано на рис. 3.

Для коливань групи № 2 розв'язок системи (12) знаходимо у вигляді суми ряду Фур'є

$$\Phi(t, z, y) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(t) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot \text{ch}(\beta_m \cdot y), \quad (20)$$

де $\beta_m = \pi \cdot (0.5 + m) / L$, а функції $T_m(t)$ відповідають диференціальним рівнянням

$$\ddot{T}_m + f \cdot \dot{T}_m + \beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h) \cdot T_m = \frac{2}{L} \cdot \frac{(-a_{cm,z}(t) - g \cdot \theta_{cm,x}(t))}{\beta_m^2 \cdot \text{ch}(\beta_m h)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

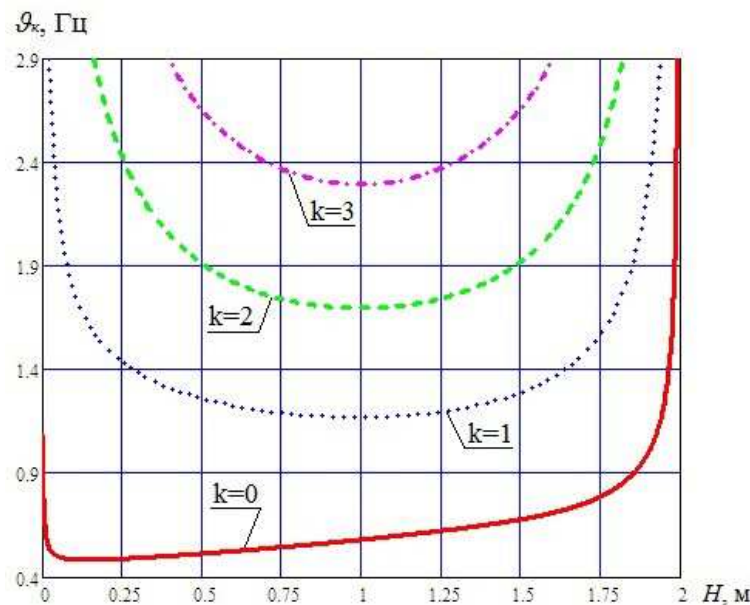


Рис. 3 – Графік залежності власних частот поперечних коливань в площині xOy від рівня рідини.

Формула для власних частот має вигляд, аналогічний (17),

$$\nu_m = \sqrt{\beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h)};$$

залежність перших 4-ох частот від рівня рідини у цистерні показана на рис. 4.

Для моделювання коливань групи №3 використовуємо подвійні ряди Фур'є:

$$\Phi(t, x, z, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} T_{k,m}(t) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot \text{ch}(\gamma_{k,m} \cdot y), \quad (21)$$

де

$$\gamma_{k,m} = \sqrt{\lambda_k^2 + \beta_m^2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{(k+0.5)^2}{l^2} + \frac{(m+0.5)^2}{L^2}},$$

а амплітудні коефіцієнти є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\ddot{T}_{k,m} + f \cdot \dot{T}_{k,m} + \gamma_{k,m} \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \gamma_{k,m}^2) \cdot \text{th}(\gamma_{k,m} h) \cdot T_{k,m} = \frac{4}{l \cdot L} \cdot \frac{(-g \cdot \theta_{cm,y}(t))}{\lambda_k^2 \beta_m^2 \cdot \text{ch}(\gamma_{k,m} h)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

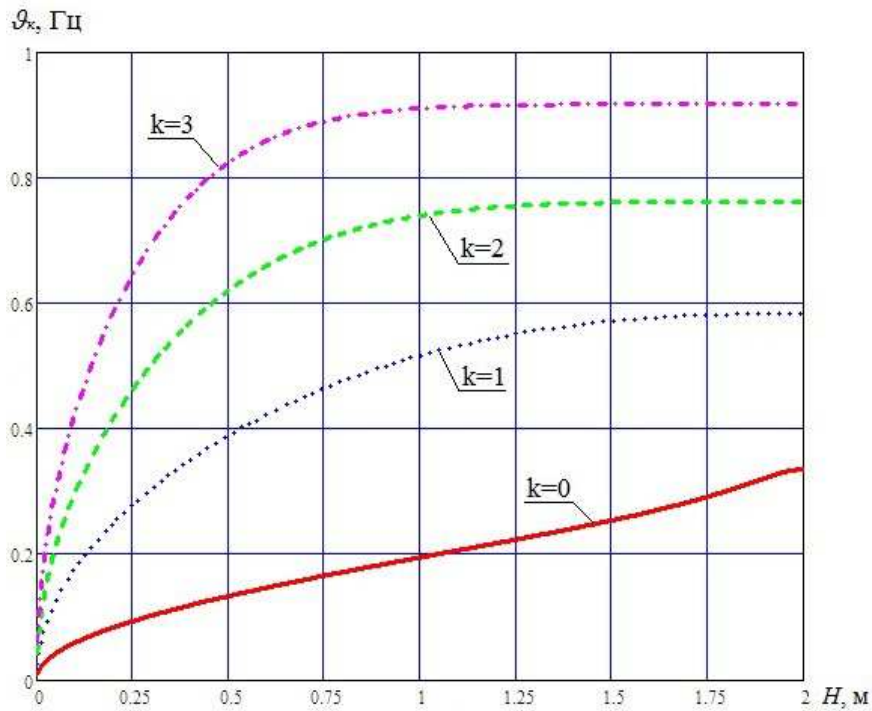


Рис. 4 – Графік залежності власних частот повздовжніх коливань в площині zOy від рівня рідини.

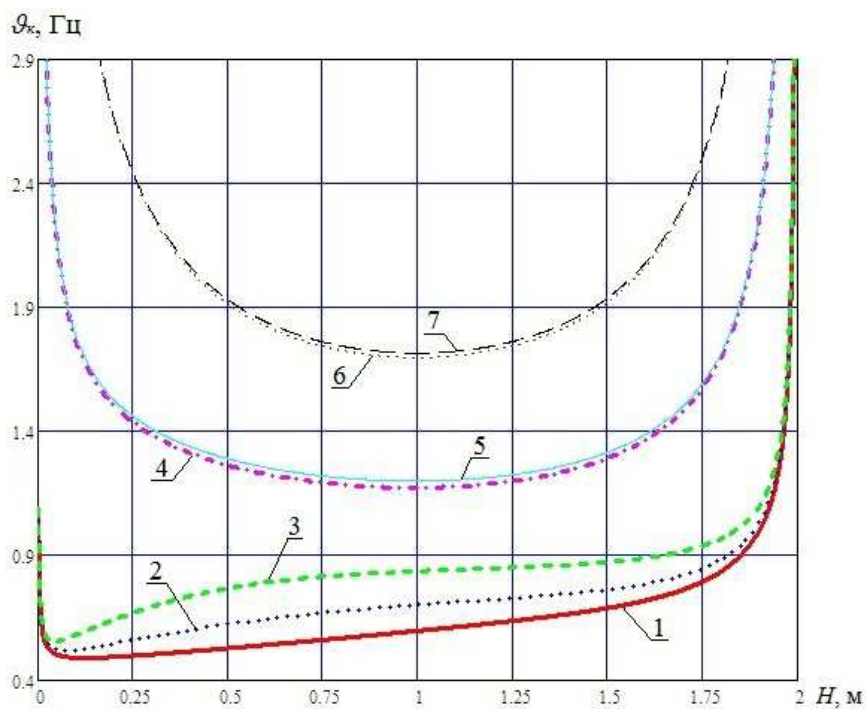


Рис. 5 – Графік залежності власних частот обертових коливань в площині xOz від рівня рідини:

- 1 – $k=0$; $m=0$; 2 – $k=0$; $m=1$; 3 – $k=0$; $m=2$; 4 – $k=1$; $m=0$;
5 – $k=1$; $m=1$; 6 – $k=2$; $m=0$; 7 – $k=2$; $m=1$.

Власні частоти коливань знаходяться за формулою

$$\nu_{k,m} = \sqrt{\gamma_{k,m} \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \gamma_{k,m}^2) \cdot \text{th}(\gamma_{k,m} h)},$$

Як бачимо, вони утворюють подвійну нескінченність. Декілька перших частот зображено на рис. 5.

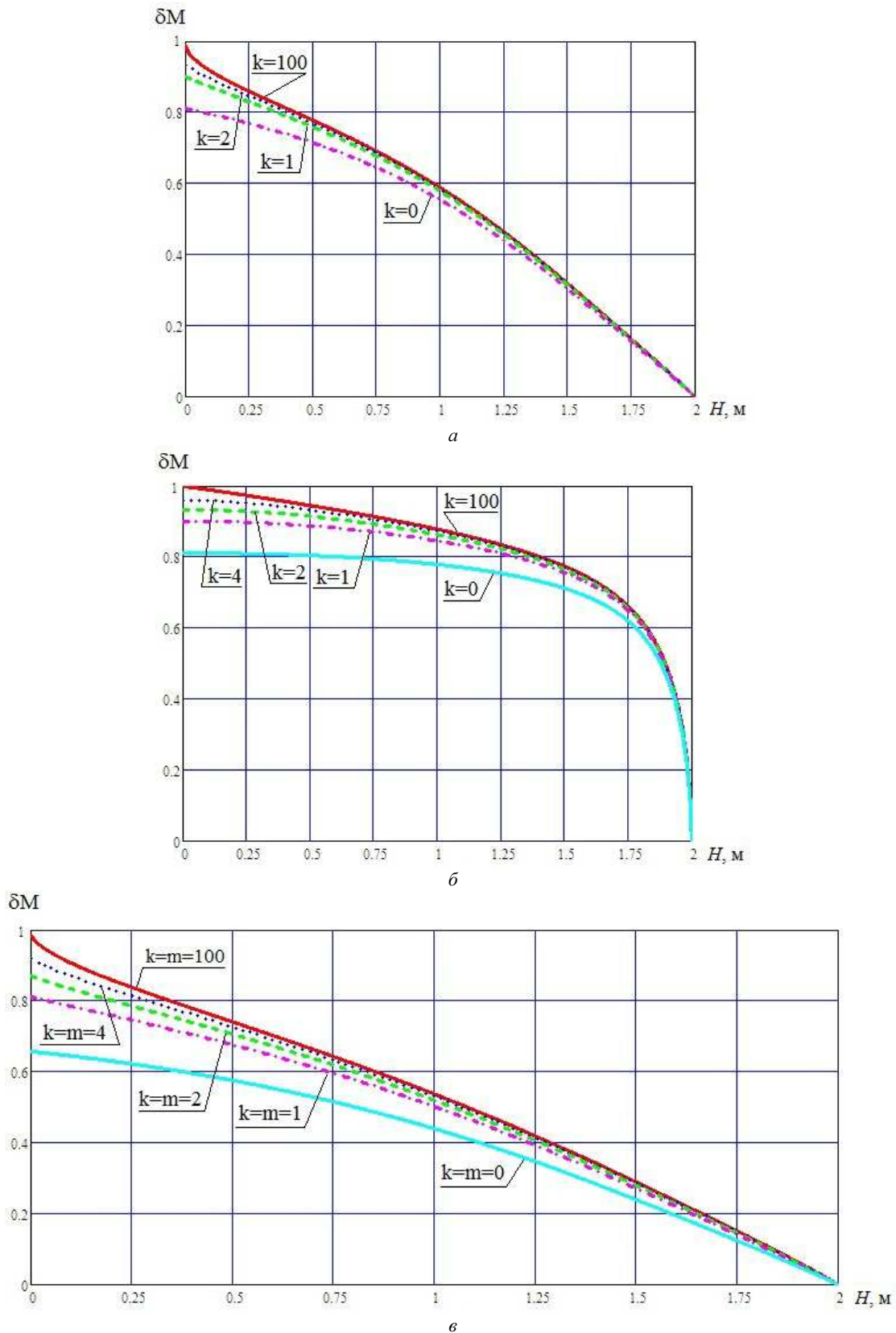


Рис.6 – Сумарна відносна маса вказаної кількості осциляторів в залежності від рівня рідини:
 a – для коливань у площині xOy , $б$ – у площині zOy , $в$ – у площині xOz .

Числа k, m визначають верхню границю для індексів доданків часткової суми рядів Фур'є (16), (20) або (21).

Інерційні та пружні коефіцієнти парціальних осциляторів. Кожний доданок із суми (16), (20) або (21) відповідає окремій базисній формі низькочастотних коливань рідини відносно оболонки цистерни, тобто деяко-

му парціальному осцилятору. Кожному осцилятору можна приписати масу, яка буде частиною загальної маси рідини.

Щоб знайти відносну частину δM_k маси, пов'язаної з k -тим осцилятором із суми (16), можна використати власну форму цього осцилятора

$$\Phi_k^*(x) = (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y),$$

і знайти середнє значення похідної $\partial \Phi_k^* / \partial x$ по площі поперечного перерізу D , заштрихованого на рис. 2, а, тобто

$$\frac{1}{S} \iint_D \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial x} dS = \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\text{sh}(\lambda_k \cdot h)}{\lambda_k},$$

Далі цей результат множиться на коефіцієнт $2/(l \cdot \lambda_k^2 \text{ch}(\lambda_k h))$, що використовується в правій частині (17) разом із значенням збуджувального чинника, і ми отримуємо шукану формулу

$$\delta M_k = \frac{2 \text{th}(\lambda_k h)}{l^2 \lambda_k^3 h}.$$

Формула для осциляторів, що коливаються у площини zOy , має аналогічний вигляд:

$$\delta M_m = \frac{2 \text{th}(\beta_m h)}{L^2 \beta_m^3 h},$$

а для випадку обертових коливань у площині xOz – подібний, проте більш складний;

$$\delta M_{k,m} = \frac{4 \text{th}(\gamma_{k,m} h)}{l^2 L^2 \lambda_k^2 \beta_m^2 (\gamma_{k,m} h)}.$$

Після знаходження δM_k співвідношення (17) та аналогічні для інших груп коливань отримують вигляд звичайного рівняння для коливання одно масової системи, а саме

$$M_k \ddot{x}_k + f \cdot M_k \cdot \dot{x}_k + Z_k \cdot x_k = M_k \cdot (-a_{cm,x}(t) - g \cdot \theta_{cm,z}(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $M_k = \delta M_k \cdot M$ – це парціальна маса; M – загальна маса рідини; $Z_k = M_k \cdot \omega_k^2$ – коефіцієнт жорсткості (або пружності), який тут має гравітаційну природу; $\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$ – власна кругова частота коливань.

На рис. 6, а – в надані дані по розподілу парціальних мас; як і слід було цього чекати, по мірі зростання глибини сумарна частина рідини δM , що приймає участь у низькочастотних коливаннях вільної поверхні, зменшується. З'ясовано, що цю величину можна апроксимувати аналітичними залежностями наступного вигляду:

$$\delta M = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + 1}, \quad \delta M = \frac{1}{(h/L)^{4/3} + 1}, \quad \delta M = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + (h/L)^{4/3} + 1},$$

для коливань групи № 1, групи № 2 та групи № 3, відповідно.

Перспективи подальших досліджень. Матеріал, наведений у статті, є достатнім для того, щоб описати коливання рідини, корпусу та інших елементів цистерни єдиною системою звичайних диференціальних рівнянь, яка буде моделювати динаміку цього агрегату в цілому. Проте, у близькій перспективі, на погляд авторів, є дослідження тієї ж ємкості, але зі зливом рідини, а також на похилих ділянках шляху. Крім того, як сказано вище, передбачене проведення експериментів по вивченню сили тертя, після чого будуть моделюватися типові перехідні та періодичні процеси, які проходять у рідині під впливом кінематичних збурень.

Висновки. Показано, що кінематичними збудниками низькочастотних коливань рідини у цистерні є лінійні прискорення та кутові закручення її корпусу.

Отримані уточнені рівняння поверхневих коливань рідини, де додатково враховані сили поверхневого натягу, а також зовнішнього тертя рідини о бічну поверхню ємності.

Показано, яким чином можна врахувати обертові коливання оболонки, залишаючись у межах потенціальних рухів та течій.

Наведено розв'язки задачі о вільних та вимушених коливаннях рідини в вигляді суми Фур'є для парціальних осциляторів; виведено рівняння для динамічного розрахунку парціальних амплітуд та отримано формули для коефіцієнтів інерції і жорсткості осциляторів.

Список літератури

1. Колесников К. С. Динамика ракет. – М. : Машиностроение, 2003. – 500 с.

2. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М. : Машиностроение, 1975. – 416 с.
3. Колесников К. С., Шкапов П. М., Пожалостин А. А. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. – № 8. – С. 15 – 30.
4. Дьяченко М. И., Орлов В. В., Темнов А. Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – № 11. – С. 175 – 192.
5. Дьяченко М. И., Темнов А. Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: "Машиностроение". Спец.выпуск "Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем". – 2012. – С. 164 – 174.
6. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. – М. Л. : Изд. Техничко-теоретической литературы, 1949. – 275 с.
7. Леженкин А. Н., Григоренко С. М. Моделирование процесса движения агрегата с переменной массой // Науковий вісник ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 80 – 86.
8. Леженкин А. Н., Рубцов Н. А., Григоренко С. М. Определение скорости движения уборочного агрегата с переменной массой // Праці ТДАТУ. – 2013. – Вип. 13. – Т. 3. – С. 79 – 85.
9. Третьяк В. М. Влияние изменения массы модулей тягово-транспортных средств на показатели их движения // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2005. – № 29. – С. 202 – 204.
10. Шуляк М. Л. Колебание скорости МТА переменной массы при установившемся режиме движения // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture – 2015 – Vol. 17. – No.7. – P. 23 – 27.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 736 с.
12. Башлій І. Д. Коливання складних оболонкових конструкцій з рідиною в задачі про позовджню стійкість ракети-носія: дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 01.02.04 / І. Д. Башлій. – Дніпропетровськ, 2015. – 197 с.
13. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григор'єв О. Л. Элементы векторного анализа : навч. посіб.. – Х. : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ»», 2016. – 460 с.

References (transliterated)

1. Kolesnikov K. S. *Dinamika raket* [The dynamics of missiles], Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 500 p.
2. Rabinovich B. I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to the dynamics of rocket carriers of space vehicles], Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 416 p.
3. Kolesnikov K. S., Shkapov P. M., Pozhalostin A. A. Zadachi dinamiki gidromekhanicheskikh sistem v trudakh kafedry teoreticheskoy mekhaniki imeni professora N. E. Zhukovskogo [Problems of the dynamics of hydromechanical systems in the works of the Professor N. Ye. Zhukovsky Department of Theoretical Mechanics]. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman* [Bulletin of N.E. Bauman MSTU]. 2002, vol. 8, pp. 15–30.
4. Dyachenko M. I., Orlov V. V., Temnov A. N. Kolebaniya zhidkogo topliva v tsilindricheskikh i konicheskikh emkostyakh [Oscillations of liquid fuel in cylindrical and conical tanks]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman* [Bulletin of N.E. Bauman MSTU]. 2013, vol. 11, pp. 175–192.
5. Dyachenko M. I., Temnov A. N. Problemy dinamiki pereraspredeleniya topliva v krupnogabaritnykh raketo-kosmicheskikh ob'ektakh [Problems of the dynamics of fuel redistribution in large rocket-space objects]. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Seriya: "Mashinostroyeniye". Spets.vypusk "Krupnogabaritnyye transformiruyemye kosmicheskiye konstruksii i materialy dlya perspektivnykh raketo-kosmicheskikh sistem"*. [Bulletin of N.E. Bauman MSTU. Series: Mechanical Engineering. Special Issue "Large-size transformable space structures and materials for advanced rocket and space systems"], 2012, pp. 164–174.
6. Mescherskiy I. V. *Raboty po mekhanike tel peremennoy massy* [Works on the mechanics of bodies of variable mass]. Moscow – Leningrad, Tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1949. 275 p.
7. Lezhenkin A. N., Grigorenko S. M. Modelirovanie protsessa dvizheniya agregata s peremennoy massoy [Modeling the process of movement of an aggregate of variable mass]. *Naukovyy visnyk TDAU* [Scientific herald TDAU]. Melitopol, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 80–86.
8. Lezhenkin A. N., Rubtsov N. A., Grigorenko S. M. Opredelenie skorosti dvizheniya uborochnogo agregata s peremennoy massoy [Determination of the speed of the harvesting unit of variable mass]. *Pratsi TDAU* [The works of TDAU]. 2013, vol. 13, no. 3, pp. 79–85.
9. Tretyak V. M. Vliyaniye izmeneniya massy moduley tyagovo-transportnykh sredstv na pokazateli ikh dvizheniya [Influence of the change in the mass of the modules of traction-transport vehicles on the indicators of their movement]. *Vestnik Kharkovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta* [Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University]. 2005, vol. 29, pp. 202 – 204.
10. Shulyak M. L. Kolebanie skorosti MTA peremennoy massy pri ustanovivshemsya rezhime dvizheniya [Variations in the speed of an MTA of variable mass under steady-state motion]. *MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture*. 2015, vol. 17, no. 7, pp. 23–27.
11. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izd. 5-e, pererabotannoe* [Mechanics of fluid and gas. Ed. 5th, revised]. Moscow, Glavnaya redaktsiya fiziko-matemeticheskoy literatury izdatel'stva "Nauka" Publ., 1978. 736 p.
12. Bashliy I. D. *Kolivannya skladnykh obolonkovykh konstruksiy z ridynoyu v zadachi pro pozdovzhnyu stiykist' rakety-nosiya* [Fluctuations of complex shell structures with fluid in the problem of longitudinal stability of a carrier rocket. Candidate eng. sci. diss. dissertation (Ph. D.)]. Dni-propetrovsk, 2015. 197 p.
13. Vanin V. A., Gevorkyan Yu. L., Grigoriev A. L. *Elementy vektornogo analizu : navch. posib.* [Elements of vector analysis: tutorial]. Kharkiv, 2016. 460 p.

Надійшла (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhusko7@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Л. В. КУРПА, Г. Н. ТИМЧЕНКО, А. А. ОСЕТРОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С ВЫРЕЗАМИ И РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрены задачи о геометрически нелинейных свободных колебаниях композитных элементов тонкостенных конструкций, которые моделируются многослойными пологими оболочками со сложной формой плана. Метод решения основан на совместном использовании теории R -функций, вариационных методов, процедуры Бубнова-Галеркина и метода Рунге-Кутты. В качестве иллюстрации эффективности метода решены задачи о колебаниях многослойных пологих оболочек с прямоугольным жестко закрепленным отверстием и различными граничными условиями на внешнем контуре. Для аппроксимации построенного решения использованы степенные полиномы и сплайны. Достоверность разработанного программного обеспечения проверена на тестовых задачах.

Ключевые слова: многослойные пологие оболочки, вырезы, теория R -функций, нелинейные колебания.

Л. В. КУРПА, Г. М. ТИМЧЕНКО, А. О. ОСЕТРОВ

НЕЛІНІЙНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З ВИРІЗАМИ І РІЗНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Розглянуто ефективний метод дослідження геометрично нелінійних вільних коливань композитних елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються багатошаровими пологими оболонками з отворами. Запропонований метод базується на сумісному використанні теорії R -функцій, варіаційних методів та процедури Бубнова-Гальоркіна. Розв'язано низку задач про лінійні та нелінійні коливання багатошарових пологих оболонок з жорстко закріпленим прямокутним отвором для різних граничних умов на зовнішньому контурі. Для розв'язання задач було використано поліноміальну та сплайн-апроксимацію невизначених компонент в структурах розв'язку.

Ключові слова: багатошарові пологі оболонки, отвір, теорія R -функцій, нелінійні коливання.

L. V. KURPA, G. N. TIMCHENKO, A. A. OSETROV

NONLINEAR FREE VIBRATIONS OF MULTILAYERED SHALLOW SHELLS AND PLATES WITH CUTOUTS AND VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, we consider an effective method for investigating geometrically nonlinear free vibrations of composite elements of thin-walled structures that are modeled by multilayered shallow shells with a clamped cut. The proposed method is based on the joint use of the theory of R -functions, variational methods and the Bubnov-Galerkin procedure. A set of new problems of linear and nonlinear vibrations of multilayered shallow shells with clamped rectangular cutout and different boundary conditions on external contour is solved. Polynomial and spline-approximation are used for undefined components to obtain results.

Key words: multilayered shallow shells, cutout, theory of R -functions, nonlinear vibrations.

Введение. Исследованиям нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек, в том числе с отверстиями, посвящен целый ряд работ, например, [1 – 8] и др. Однако, следует отметить, что в известных нам работах рассмотрены оболочки только со свободными прямоугольными или круглыми отверстиями. Так, например, в работах [7, 8] рассмотрены колебания 8-ми слойных оболочек двойкой кривизны с квадратным планом и свободным центральным отверстием. Конечно, такие отверстия широко используются при проектировании тонкостенных конструкций, и подобные работы имеют большое значение для практики. Но, тем не менее, форма и способы закрепления отверстий, а также краев оболочки, могут быть самыми разнообразными. Для исследования динамического поведения оболочек с закрепленными отверстиями может быть эффективно использована *теория R -функций*.

В настоящей работе рассмотрены многослойные пологие оболочки с прямоугольной формой плана и с прямоугольным жестко закрепленным отверстием. На внешнем контуре оболочка зашкреплена по двум противоположным сторонам или на отдельных участках этих сторон, а на остальной части внешнего контура – свободна. Для решения задачи о геометрически нелинейных колебаниях таких оболочек предложено развитие метода, рассмотренного ранее в работах [9 – 11]. Этот метод относится к численно-аналитическим и является бессеточным. Метод основан на совместном использовании теории R -функций [12], вариационных методов, *процедуры Бубнова – Галеркина и метода Рунге – Кутты*. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка (*типа Тимошенко*). Соответствующее программное обеспечение создано в программной системе POLE-RL [12]. С целью подтверждения полученных результатов были использованы различные полные системы функций для аппроксимации неопределенных компонент в построенных структурах решения [10, 12], а именно: степенные полиномы и сплайны [13].

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую многослойную пологую оболочку постоянной толщины h симметричной структуры. Предполагается, что проскальзывание и расслоение слоев отсутствует. В рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации, математическая постановка задачи о свободных колебаниях оболочки формулируется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений

движения [15, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_x &= m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ – перемещения точек координатной поверхности; $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$ – углы поворота нормали координатной поверхности; N_{11}, N_{12}, N_{22} и M_{11}, M_{12}, M_{22} представляют собой усилия и моменты в координатной поверхности на единицу длины; Q_x, Q_y – поперечные усилия.

Выражения для усилий $\{N\} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T$ и моментов $\{M\} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ в матричном виде могут быть представлены следующим образом:

$$\{N\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad \{M\} = [D]\{\chi\}. \quad (2)$$

Поперечные усилия Q_x и Q_y определяются с помощью формул:

$$Q_x = C_{55}\varepsilon_{13} + C_{45}\varepsilon_{23}, \quad Q_y = C_{45}\varepsilon_{13} + C_{44}\varepsilon_{23}.$$

Выражения для деформаций $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T$ и $\{\chi\} = \{\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}\}^T$ в случае нелинейного деформирования оболочки определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y; \\ \chi_{11} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Матрицы $[C]$, $[D]$ в выражениях (2) имеют следующий вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Элементы C_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) матриц $[C], [D]$, а также $C_{45}, C_{54}, C_{44}, C_{55}$ и значения m_1, m_2 в уравнениях (1) вычисляются по известным формулам [7, 9, 17, 18]. Значения k_1, k_2 совпадают со значениями кривизн оболочки в направлениях Ox и Oy соответственно.

Система уравнений (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями, которые будут представлены ниже при решении конкретных задач.

Метод решения. В соответствии с предложенным в [9, 17, 11, 18] алгоритмом, неизвестные функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y), \quad \psi_x(x, y, t) = y_1(t) \cdot \psi_{x_1}(x, y), \quad \psi_y(x, y, t) = y_1(t) \cdot \psi_{y_1}(x, y); \\ u(x, y, t) &= y_1(t) \cdot u_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot u_2(x, y), \quad v(x, y, t) = y_1(t) \cdot v_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $y_1(t)$ – это неизвестная функция, зависящая от времени, а функции $u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}$ представляют собой компоненты собственного вектора $\vec{U} = (u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1})$ для первой формы собственных колебаний, найденного в результате решения линейной задачи. Функции u_2, v_2 являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L_{11}u_2 + L_{12}v_2 = -Nl_1^{(2)}(w_1); \\ L_{21}u_2 + L_{22}v_2 = -Nl_2^{(2)}(w_1). \end{cases} \quad (4)$$

Выражения $Nl_k^{(2)}(w_1)$, ($k = 1, 2$), стоящие в правых частях системы уравнений (4), описаны подробно в [9, 17, 18].

Система уравнений (4), дополненная соответствующими граничными условиями, также как и линейная задача о свободных колебаниях пологих оболочек, решена с помощью *вариационного метода Рунца* и теории

R – функций [12 – 14].

Подстановка выражений для неизвестных функций (3) в систему уравнений (1) с последующим применением процедуры Бубнова – Галеркина приводит к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$y_1''(t) + \omega_1^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^2(t) + \gamma \cdot y_1^3(t) = 0. \quad (5)$$

Формулы для коэффициентов β, γ в (5) получены и приведены в работах [9, 17, 18].

Для решения уравнения (5) в настоящей работе использован метод Рунге – Кутты.

Численные результаты. В работах [9, 11, 17, 18] предложенный алгоритм был апробирован на ряде тестовых задач и использован для исследования пологих оболочек различной геометрической формы. В настоящей работе основное внимание уделено исследованию оболочек с прямоугольными отверстиями. Главной особенностью изучаемых оболочек является то, что отверстия жестко защемлены, а граничные условия на внешнем контуре представляют комбинацию жесткой заделки и свободных участков границы.

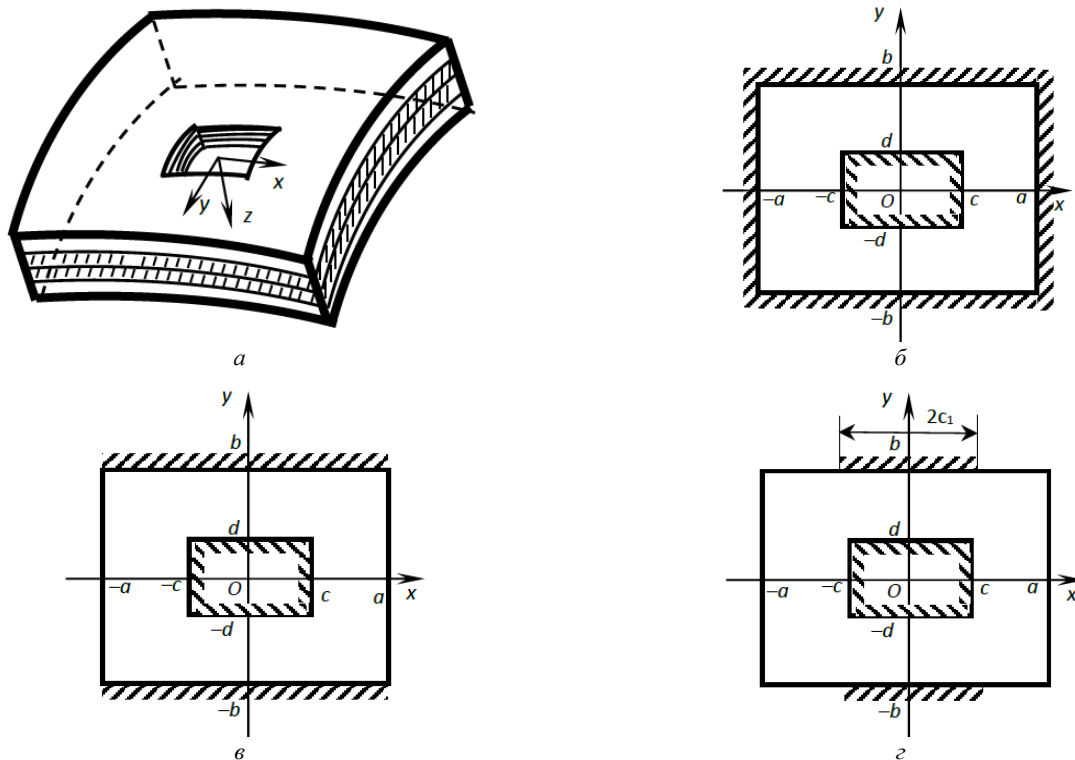


Рис. 1 – Формы исследуемой оболочки и условий её закрепления: а – форма оболочки; б – жестко закреплена по всему контуру; в – жестко закреплена по всему контуру отверстия и на сторонах $y = \pm b$; г – жестко закреплена по всему контуру отверстия и на участках $y = \pm b, -c_1 \leq x \leq c_1$.

Рассмотрим четырехслойную симметричного строения пологую оболочку толщины $h/(2a) = 0.1$, вид которой представлен на рис. 1.

Предполагается, что оболочка жестко закреплена по всему контуру отверстия. На внешнем контуре рассмотрены три вида граничных условий:

- оболочка защемлена по всему контуру, то есть на сторонах $x = \pm a, y = \pm b$ (рис. 1, б);
- оболочка защемлена на сторонах $y = \pm b$ и свободна на сторонах $x = \pm a$ (рис. 1, в);
- оболочка защемлена на участках $y = \pm b, -c_1 \leq x \leq c_1$ и свободна на оставшейся части внешнего контура (рис. 1, г).

Механические характеристики слоев определяются равенствами:

$$E_1/E_2 = 25, \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25.$$

Геометрические параметры приняты следующими: $a/b = 1$; $c/2a = 0.15$; $c/d = 2$. Кривизны оболочек $k_1 = 2a/R_1, k_2 = 2a/R_2$ принимают значения: $k_1 = 0.1, k_2 = 0$ (цилиндрическая оболочка, Сул.); $k_1 = k_2 = 0.1$ (сферическая оболочка, Сph.); $k_1 = 0.1, k_2 = -0.1$ (оболочка в виде гиперболического параболоида, Нур.).

Задача 1. Пусть оболочка жестко защемлена по всему внешнему контуру (рис. 1, б).

Для решения линейной задачи воспользуемся теорией R – функций и вариационным методом Ритца [11]. При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах, будем использовать сплай-

ны Шенберга 3-й степени, а также степенные полиномы. Сравнение значений основных собственных частот

$$\Lambda = \omega_{1l} (2a)^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2} \text{ для упаковки слоев } [0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ] \text{ и } [45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ],$$

полученных с помощью различных аппроксимационных средств, показано в табл. 1.

Таблица 1 – Основные частоты Λ оболочек (СС)

упаковка \ аппроксимация	spli. [10x10]	poly.	Расхождение, %	
[0°/90°/90°/0°]	$k_1 = k_2 = 0.1$	35.968	36.009	0.11
	$k_1 = 0.1; k_2 = 0$	35.839	35.854	0.04
	$k_1 = 0.1; k_2 = -0.1$	35.980	35.998	0.05
[45°/-45°/-45°/45°]	$k_1 = k_2 = 0.1$	35.790	35.311	1.36
	$k_1 = 0.1; k_2 = 0$	35.579	35.094	1.38
	$k_1 = 0.1; k_2 = -0.1$	35.526	35.039	1.39

Результаты табл. 1 показывают, что для жестко защемленной по внутреннему и внешнему контурам оболочки значения собственных частот не существенно зависят от способа укладки слоев при малых значениях кривизны. При этом расхождение результатов при использовании сплайнов и полиномов не превышает 1.5 %, если выбрать степени аппроксимирующих полиномов для функций u, v, ψ_x, ψ_y равные 15, а для функции W – равные 16. Заметим, что степенные полиномы выбраны с учетом симметрии задачи.

В результате решения нелинейной задачи были получены скелетные кривые для цилиндрической панели (рис. 2, а), а также для оболочек двойкой кривизны: сферической (рис. 2, б), и оболочки типа гиперболического параболоида (рис. 2, в). Изучено поведение кривых отклика в зависимости от способа укладки слоев оболочки: [90°/0°/0°/90°], [0°/90°/90°/0°], [45°/-45°/-45°/45°], [30°/-30°/-30°/30°].

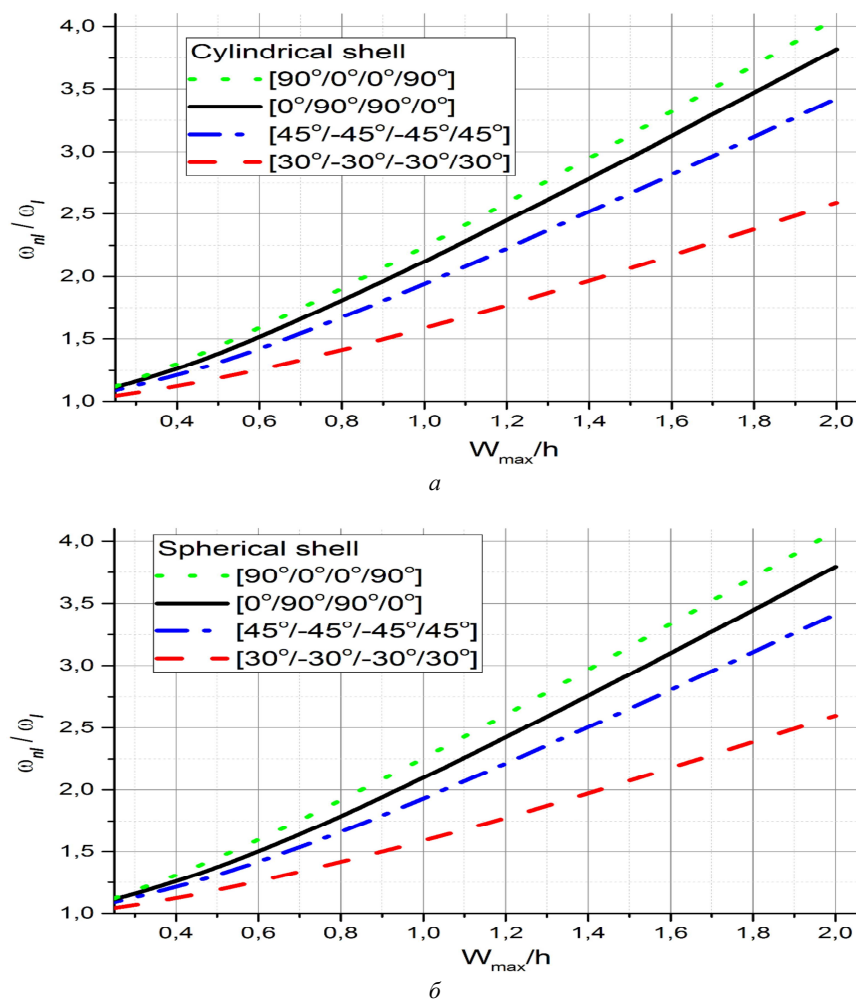


Рис. 2 – Скелетные кривые для оболочек СС (рис. 1, б): а – для цилиндрической оболочки; б – для сферической оболочки.

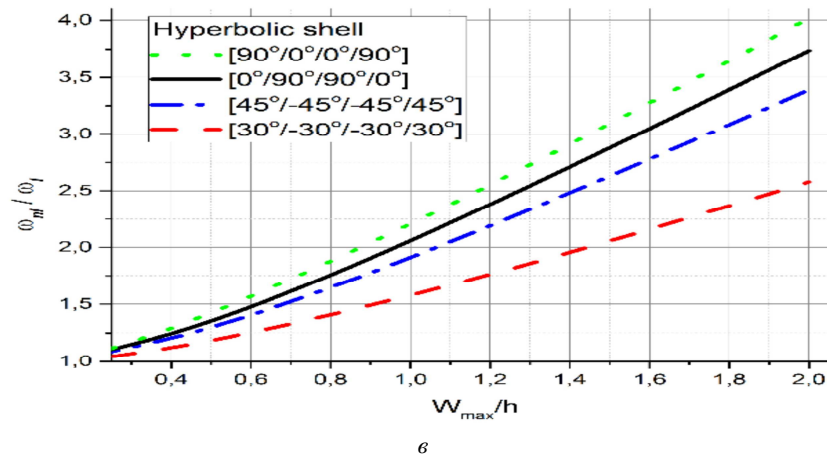


Рис. 2 – Скелетные кривые для оболочек СС (рис. 1, б): ν – для оболочки в виде гиперболического параболоида.

Анализ результатов, приведенных на рис. 2, показывает, что наиболее жесткое поведение наблюдается для оболочек с упаковкой слоев $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$, а наименее жесткое для $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$. Следует заметить, что в данном случае влияние кривизны на поведение скелетных кривых также несущественно при одинаковой упаковке слоев. Их расхождение не превышает 2 %, что объясняется способом закрепления оболочки.

Задача 2. Пусть оболочка свободна на сторонах $x = \pm a$ и полностью ($c_1/2a = 0.5$) или частично ($0 < c_1/2a < 0.5$) жестко защемлена на сторонах $y = \pm b$ (граничные условия рис. 1, б и 1 в соответственно). В результате проведения вычислительного эксперимента было установлено, что и в этом случае влияние кривизны на собственные значения незначительно. Поэтому ниже, в табл. 2, представлены значения собственных частот только для сферической оболочки и различных углов армирования при изменении длины участка закрепления на внешнем контуре. Структура решения, удовлетворяющая условиям жесткой заделки, была выбрана в виде

$$u = \omega_{cl}\Phi_1, \quad u = \omega_{cl}\Phi_2, \quad u = \omega_{cl}\Phi_3, \quad u = \omega_{cl}\Phi_4, \quad u = \omega_{cl}\Phi_5,$$

где Φ_i , ($i = \overline{1, 5}$) – это неопределенные компоненты структуры решения [11].

Уравнение жестко защемленного участка было построено с помощью теории R – функций в виде:

$$\omega_{cl}(x, y) = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_2 \vee_0 f_5),$$

где

$$f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0, \quad f_3 = (x^2 - c^2)/2c \geq 0, \quad f_4 = (y^2 - d^2)/2d \geq 0, \quad f_5 = (x^2 - c_1^2)/2c_1 \geq 0.$$

В табл. 2 приведены значения основной собственной частоты $\Lambda = \omega_{cl}(2a)^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ сферической оболочки для различных значений углов армирования и длины жестко закрепленного участка.

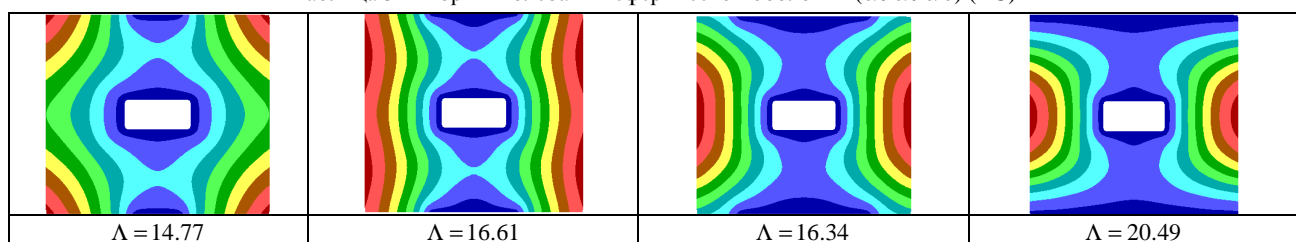
Таблица 2 – Основные частоты Λ оболочек (FC)

способ укладки слоев	$c_1/2a = 0$	$c_1/2a = 0.1$	$c_1/2a = 0.2$	$c_1/2a = 0.3$	$c_1/2a = 0.4$	$c_1/2a = 0.5$
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	8.48	14.77	16.61	18.34	19.67	20.49
$[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$	9.41	9.99	11.14	13.74	17.11	19.07
$[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$	6.28	12.55	15.15	17.86	18.92	19.13
$[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$	8.60	10.86	13.18	17.06	19.43	19.78

Очевидно, что с увеличением длины жестко закрепленного участка границы внешнего контура, жесткость оболочки существенно возрастает, значительно увеличивая первую собственную частоту.

В табл. 3 приведены формы колебаний, соответствующие основной частоте, полученные при варьировании значений $c_1/2a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$.

Таблица 3 – Формы колебаний сферической оболочки (0/90/90/0) (FC)



Результаты решения нелинейной задачи приведены в виде скелетных кривых на рис. 3 для сферической оболочки с углами армирования ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) для разной длины жестко заземленного участка. Кривая, соответствующая $c_1/2a = 0.5$, имеет наиболее жесткий характер, а наиболее мягкое поведение скелетной кривой наблюдается для $c_1/2a = 0.1$.

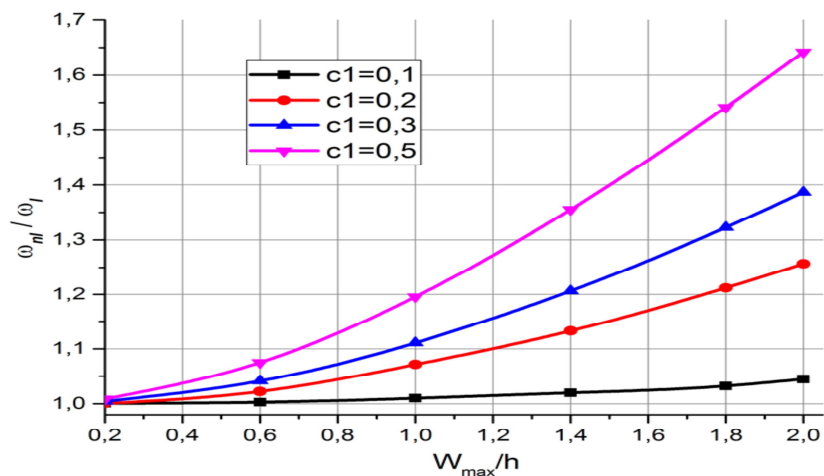


Рис. 3 – Скелетные кривые для оболочек FC (рис. 1, з).

Изучено также влияние кривизны оболочек на поведение скелетных кривых.

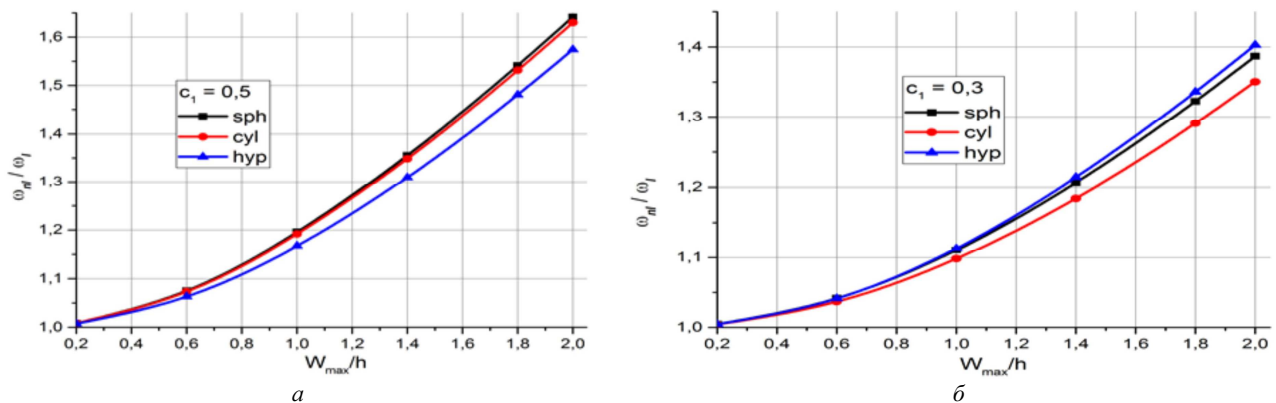


Рис. 4 – Скелетные кривые для оболочек FC (рис. 1, в и з): а – при $c_1 = 0.5$; б – при $c_1 = 0.3$.

Следует заметить, что, как и в задаче 1, для граничных условий рис. 1, б, в скелетные кривые достаточно близки друг к другу, то есть влияние кривизны незначительно (рис. 4).

Выводы. Предлагается численно-аналитический метод для анализа нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек с жестко закрепленными отверстиями при смешанных граничных условиях на внешнем контуре в рамках уточненной теории первого порядка. С помощи теории R – функций построены системы координатных функций, точно удовлетворяющих главным граничным условиям. Для решения нелинейной задачи предложен метод сведения исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению, которое решено методом Рунге – Кутты. В работе изучено влияние кривизны, упаковки слоев и различных граничных условий, в том числе и смешанных, на скелетные кривые и спектр собственных колебаний оболочек. Предложенный метод позволяет, путем варьирования геометрических и механических параметров тонкостенных элементов конструкций, подбирать необходимые характеристики в заданных режимах эксплуатации конструкции, обеспечивая их прочность и долговечность.

Список литературы

1. Chia C. Y. Geometrically nonlinear behavior of composite plates: review// Applied mechanics Reviews. – 1988. – vol. 41. – no. 12. – pp. 439 – 451.
2. Alhaazza K. A., Alhaazza A. A. A review of the vibrations of plates and shells // The Shock and Vibration Digest. – 2004. – vol. 36. – no. 5. – pp. 377 – 395.
3. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009 // Composite Structures. – 2010. – no. 93 (1). – pp. 14 – 31.
4. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells : A literature review from 2003 to 2013 // International Journal of Non-linear Mechanics. –

2014. – no. 58. – pp. 233 – 257.
5. Sivakumar K., Iyengar N. G. R., Dep K. Free vibration of laminated composite plates with cutout // J. of Sound and vibration. – 1999. – no. 221 (3). – pp. 443 – 470.
 6. Reddy J. N. Large amplitude flexural vibrations of layered composite plates with cutouts // J. of Sound and Vibration. – 1982. – no. 831. – pp. 1 – 10.
 7. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells with Cutout // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2007. – vol. 26 (Issue 14). – pp. 1413 – 1427.
 8. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Large amplitude free vibration of laminated composite shells with cutout // Aircraft Engineering and Aerospace Technology : An Int. J. – 2008. – no. 80/2. – pp. 165 – 174.
 9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R – functions theory // Composite Structures. – 2015. – vol. 125. – pp. 575 – 585.
 10. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории R – функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков : ООО «В деле», 2016. – 492 с.
 11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A. Application of R – functions Theory to Nonlinear Vibration Problems of Laminated Shallow Shells with Cutouts // Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016 September 27 – 30. Kharkov, Ukraine. – 2016. – pp. 451 - 455.
 12. Рвачев В. Л. Теория R – функций и некоторые ее приложения. – Киев : Наук. Думка, 1982. – 552 с.
 13. Курпа Л. В., Осетров А. А. Исследование собственных колебаний пологих оболочек с использованием метода R – функций и сплайн-аппроксимации // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 83 – 93.
 14. Rvachev V. L., Kurpa L. V. The R – functions in Problems of Plate Theory. – Kiev : Naukova Dumka, 1987 (in Russian). – 175 p.
 15. Ambartsumian S. A. The general theory of anisotropic shells. – Moscow : Nauka, 1974 (in Russia). – 448 p.
 16. Vol'mir A. S. Nonlinear Dynamics of Plates and Shells. – Moscow : Nauka, 1972 (in Russia). – 432 p.
 17. Kurpa L. V. Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with Asymmetric Structure and With a Complicated Form of the Plan // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162 (Issue 1). – pp. 85 – 98.
 18. Timchenko G. N., Budnikov N. A. Geometrically Nonlinear Vibrations of Laminated Shallow Shells with Mixed Boundary Conditions // Proceedings of the Fourth Int. Conference «Nonlinear Dynamics», June 19 – 22 Sevastopol. – Kharkov : Tochka, 2013. – pp. 347 – 350.

References (transliterated)

1. Chia C. Y. Geometrically nonlinear behavior of composite plates: review. *Applied mechanics Reviews*. 1988, vol. 41, no. 12, pp. 439–451.
2. Alhazza K. A., Alhazza A. A. A review of the vibrations of plates and shells. *The Shock and Vibration Digest*. 2004, vol. 36, no. 5, pp. 377–395.
3. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. *Composite Structures*. 2010, no. 93 (1), pp. 14–31.
4. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 2014, no. 58, pp. 233–257.
5. Sivakumar K., Iyengar N. G. R., Dep K. Free vibration of laminated composite plates with cutout. *Journal of Sound and vibration*. 1999, no. 221 (3), pp.443–470.
6. Reddy J. N. Large amplitude flexural vibrations of layered composite plates with cutouts. *Journal of Sound and Vibration*. 1982, no. 831, pp. 1–10.
7. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells with Cutout. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2007, vol. 26 (Issue 14), pp. 1413–1427.
8. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Large amplitude free vibration of laminated composite shells with cutout. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology : An Int. J.* 2008, no. 80/2, pp.165–174.
9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R – functions theory. *Composite Structures*. 2015, vol. 125, pp. 575–585.
10. Kurpa L. V., Mazur O. S., Shmatko T. V. Primenenie teorii R – funktsiy k resheniyu nelineynykh zadach dinamiki mnogoslonykh plastin : O. S. [Application of R – function theory to solving nonlinear problems of dynamics of multilayered plates]. Kharkov, ООО "V dele" Publ., 2016. 492 p.
11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A. Application of R – functions Theory to Nonlinear Vibration Problems of Laminated Shallow Shells with Cutouts. *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016 September 27–30*. Kharkov, Ukraine. 2016, pp. 451–455.
12. Rvachyev V. L. *Teoriya R – funktsiy I nekotorye eye prilozheniya* [R – function theory and some of its applications]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1982. 552 p.
13. Kurpa L. V., Osetrov A. A. Issledovanie sobstvennykh kolebaniy pologikh obolochek s ispol'zovaniem metoda R – funktsiy I splayn-approximatsii [Studying characteristic vibrations of shallow shells using method of R – function and spline-approximation]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. [Mathematical methods and physical and mechanical fields]. 2007, no. 4, pp. 83–93.
14. Rvachev V. L., Kurpa L. V. *The R – functions in Problems of Plate Theory*. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1987 (in Russian). 175 p.
15. Ambartsumian S. A. *The general theory of anisotropic shells*. Moscow, Nauka Publ., 1974 (in Russia). 448 p.
16. Vol'mir A. S. *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ., 1972 (in Russia). 432 p.
17. Kurpa L. V. Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with Asymmetric Structure and With a Complicated Form of the Plan. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009, vol. 162 (Issue 1), pp. 85–98.
18. Timchenko G. N., Budnikov N. A. Geometrically Nonlinear Vibrations of Laminated Shallow Shells with Mixed Boundary Conditions. *Proceedings of the Fourth Int. Conference "Nonlinear Dynamics", June 19–22. Sevastopol*. Kharkov, Tochka Publ., 2013, pp. 347–350.

Поступила (received) 17. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Курпа Лідія Василівна (Kurpa Lidiya Vasilyevna) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpalidia@gmail.com.

Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina Nikolaevna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: gntimchenko2000@gmail.com.

Осетров Андрій Олександрович (Osetrov Andrey Aleksandrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: andy.osetrov@gmail.com.

УДК 519.6

О. С. МЕЛЬНИК, М. С. ГОРБАРЧУК

МАЖОРИТАРНІ НАНОПРИСТРОЇ ПОСЛІДОВНОСТНОГО ТИПУ

Описується комп'ютерне проектування надійних послідовних наноприладів з мажоритарними структурами. При побудові мажоритарних наносхем на базі технологій коміркових квантових автоматів використовується теорія кінцевих автоматів. Розглянуті базові принципи побудови та особливості функціонування тригерних наноелементів. Розроблені математичні моделі швидкодіючих одно електронних нанолічильників додавання і віднімання. Створені послідовні нанопристрої із застосуванням системи автоматизованого проектування (САПР) QCADesigner.

Ключові слова: мажоритарний елемент, послідовні нанопристрої, квантові автомати, одноелектроніка, автоматизоване проектування.

О. С. МЕЛЬНИК, М. С. ГОРБАРЧУК

МАЖОРИТАРНЫЕ НАНОПРИБОРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОГО ТИПА

Описывается компьютерное проектирование надежных последовательных наноприборов с мажоритарными структурами. При построении мажоритарных наносхем на базе технологий воротниковых квантовых автоматов используется теория конечных автоматов. Рассмотрены базовые принципы построения и особенности функционирования Триггерных наноэлементов. Разработаны математические модели быстродействующих одноэлектронных нано счетчиков сложения и вычитания. Созданы последовательные наноприборы с применением системы автоматизированного проектирования QCADesigner.

Ключевые слова: мажоритарный элемент, последовательные наноприборы, квантовые автоматы, одноэлектроника, автоматизированное проектирование.

О. S. MELNYK, M. S. HORBARCHUK

MAJORITY NANO-DEVICES OF SEQUENTIAL TYPE

The paper describes the computer-aided design of reliable sequential nanoscale devices with majority structures. When constructing majority nanocircuits on the basis of technology of cellular quantum automata, the theory of finite automata is used. Basic principles of construction and peculiarities of functioning of Trigger nanoelements are considered. Mathematical models of high-speed one-electron nanocounters of addition and subtraction are developed. Sequential nanoscale devices are created using the QCADesigner automated design system.

Key words: majority element, sequential nanodevices, quantum automata, one-electronics, computer-aided design.

Вступ. Особливістю послідовних одноелектронних нанопристроїв є залежність вихідного сигналу не тільки від діючих в даний час на входах логічних змінних, але й від тих значень змінних, які діяли на входах в попередній момент часу. Для використання цих умов значення змінних повинні запам'ятовуватись логічним нанопристроєм. Функцію запам'ятовування значень логічних змінних в цифрових наносхемах виконують тригери.

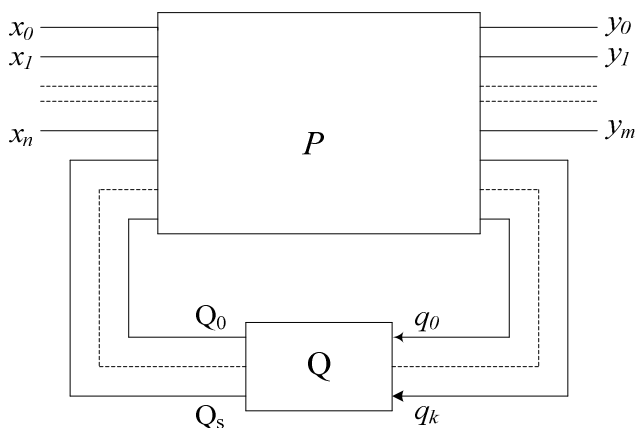


Рис. 1 – Узагальнена схема автомата з пам'яттю.

Мажоритарний нанопристрій з пам'яттю задається двома функціями: *функцією переходів* і *функцією виходів* [1]. Функція переходів визначає стан нанопристрою в момент часу $(t+1)$ залежно від стану нанопристрою і значень вхідних сигналів в попередній момент часу t :

Мажоритарні нанопристрої послідовного типу. Мажоритарні нанопристрої з пам'яттю відрізняються від мажоритарних нанопристроїв комбінаційного типу наявністю ланцюгів зворотних зв'язків. Такі нанопристрої прийнято називати *автоматами з пам'яттю*. На рис. 1 наведена узагальнена схема автомата з пам'яттю.

Введемо позначення: $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ – це безліч вхідних сигналів автомата з пам'яттю; $Y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ – безліч вихідних сигналів автомата з пам'яттю; $q = (q_0, q_1, \dots, q_k)$ – безліч сигналів збудження; $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_s)$ – безліч внутрішніх станів автомата з пам'яттю.

$$Q^{t+1} = \varphi(Q, X)^t. \quad (1)$$

Функція виходів визначає залежність вихідних сигналів нанопристрою в момент часу t від стану нанопристрою і значень вхідних сигналів в той же момент часу t :

$$Y^t = f(Q, X)^t. \quad (2)$$

Якщо вихідні сигнали однозначно визначаються станами нанопристрою, то задавати функцію виходів немає необхідності. Співвідношення (1) і (2) задаються, виходячи з умов роботи нанопристрою.

Кінцевою метою структурного синтезу мажоритарних нанопристроїв з пам'яттю є пошук мінімальних форм функцій збудження елементарних автоматів по заданих функціях переходів і виходів та побудова за ними одно електронних схем [2, 3]. Функцією збудження прийнято називати залежність сигналу збудження елементарного автомата від внутрішніх станів всіх елементарних автоматів нанопристрою в момент часу t і від значень вхідних сигналів вузла в той же момент часу t :

$$q^t = \eta(Q, X)^t. \quad (3)$$

Алгоритм синтезу одноелектронних нанопристроїв з пам'яттю на базі мажоритарних елементів (МЕ) формують наступним чином:

- 1) визначають систему переходів і виходів заданого нанопристрою;
- 2) вибирають тип елементарного автомата;
- 3) складають узагальнену таблицю переходів, виходів і функцій збудження заданого нанопристрою;
- 4) складають рівняння для функцій виходів (2) і функцій збудження (3) на підставі узагальненої таблиці;
- 5) перетворюють мажоритарні рівняння для їх реалізації;
- 6) складають структурну схему нанопристрою на основі перетворених рівнянь.

Слідуючи викладеному алгоритму, проведемо синтез базових нанопристроїв, що мають зворотні зв'язки.

Синтез базових нанотригерів. У загальному випадку тригер містить власне елемент пам'яті і деяку вхідну комбінаційну схему, перетворюючи вхідні сигнали тригера в сигнали, необхідні для управління елементом пам'яті.

При описі роботи тригера прийняті наступні умови:

якщо, $Q = 1$, а $\bar{Q} = 0$, то тригер знаходиться в *стані установки*,

якщо, $Q = 0$, а $\bar{Q} = 1$, то тригер знаходиться в *скинутому стані*.

Існуючі типи тригерів можуть бути класифіковані за різними ознаками. Найбільш часто тригери класифікують за типом використовуваних інформаційних (настановних) входів.

Тригер з рахунковим входом (Т-тригер) повинен змінювати свій стан на протилежний з приходом кожного чергового вхідного сигналу. На підставі умов роботи заданого нанопристрою і матриці переходів обраного елементарного автомата складемо узагальнену таблицю переходів і функцій збудження тригера з рахунковим входом (табл. 1).

Таблиця 1 – Таблиця переходів Т-тригера

X_s	Q_t	Q_{t+1}	Q
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Використовуючи табл. 1, складемо вирази для функції збудження q :

$$q = \bar{X}_s Q_t \vee X_s \bar{Q}_t \quad (\text{по одиницях});$$

$$q = (X_s \vee Q_t)(\bar{X}_s \vee \bar{Q}_t) = \overline{X_s Q_t} (X_s \vee Q_t) \quad (\text{по нулях}).$$

Перетворимо отримані співвідношення для їх реалізації за допомогою МЕ:

$$q = \text{maj}(\text{maj}(\bar{X}_s, Q_t, 0), \text{maj}(X_s, \bar{Q}_t, 0), 1); \quad (4)$$

$$q = \text{maj}(\text{maj}(\overline{X_s}, Q_t, 0), \text{maj}(X_s, Q_t, 1), 0). \quad (5)$$

Структурні схеми тригерів з рахунковими входами, побудовані відповідно до рівнянь (4) і (5), показані на рис. 2 і 3, відповідно.

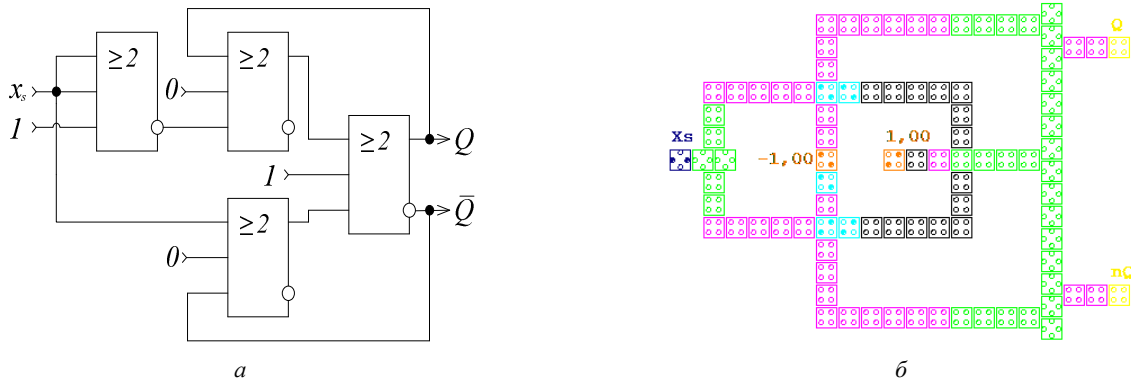


Рис. 2 – Т-тригер (модифікація 1): а – схема на мажоритарних елементах; б – наносхема на квантових автоматах.

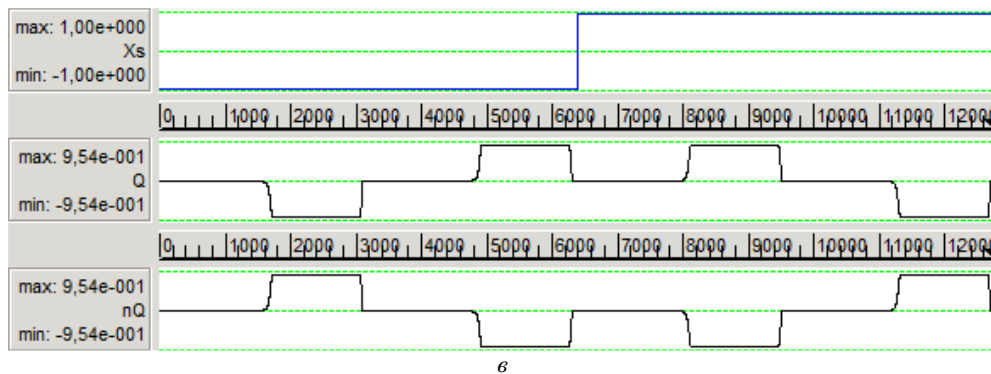


Рис. 2 – Т-тригер (модифікація 1): в – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner [4].

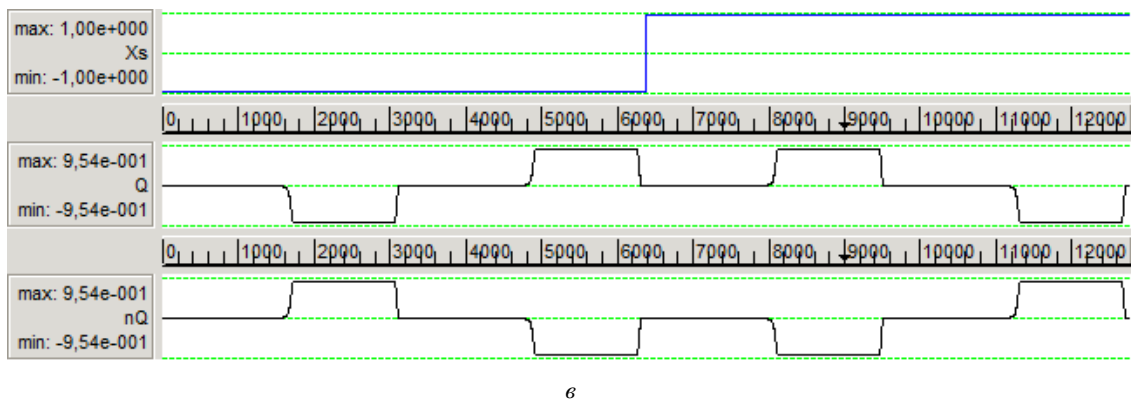
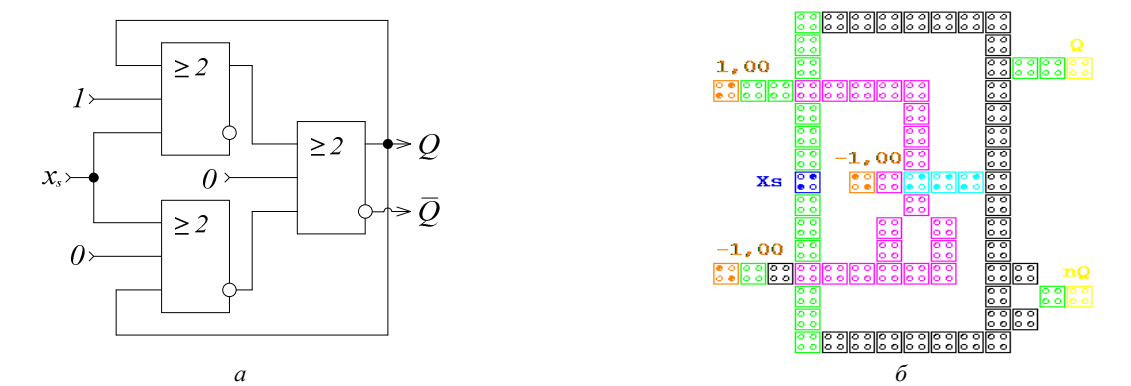


Рис. 3 – Т-тригер (модифікація 2): а – схема на мажоритарних елементах; б – наносхема на квантових автоматах; в – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner.

Синтез нанолічильників. Лічильником називається послідовний пристрій, призначений для рахунку вхідних імпульсів і фіксації їх числа в двійковому коді. Лічильники будуються на основі N однотипних

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 3 (1279) 2018.

пов'язаних між собою розрядних схем, кожна з яких в загальному випадку складається з тригера і деякої комбінаційної схеми, призначеної для формування сигналів управління тригером.

Основним статичним параметром лічильника є модуль рахунку M , який характеризує максимальне число імпульсів, після приходу якого лічильник встановлюється в початковий стан. Основним динамічним параметром, що визначає швидкодію лічильника, є час встановлення вихідного коду, який характеризує часовий інтервал між моментом подачі вхідного сигналу і моментом встановлення нового коду на виході.

При синтезі лічильників як елементарного автомата використовуємо Т-тригер (рис. 2, а і 3, а), матриця переходів якого має вигляд:

$$\begin{array}{ccc|c}
 & & & q_s \\
 \hline
 0 & - & 0 & 0 \\
 0 & - & 1 & 1 \\
 1 & - & 0 & 1 \\
 1 & - & 1 & 0
 \end{array} \quad (6)$$

Узагальнена таблиця переходів і функцій збудження *нано*лічильника додавання складається згідно умов роботи лічильника і матриці переходів (6) Т-тригера (табл. 2).

Таблиця 2 – Таблиця переходів *нано*лічильника додавання

x	Q_t^2	Q_t^1	Q_t^0	Q_{t+1}^2	Q_{t+1}^1	Q_{t+1}^0	q_s^0	q_s^1	q_s^2
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

З табл. 2 випливають такі рівності:

$$q_s^1 = x; \quad (7)$$

$$q_s^1 = xQ_t^0, \quad q_s^1 = maj(x, Q_t^0, 0); \quad (8)$$

$$q_s^2 = xQ_t^0Q_t^1 = q_s^1Q_t^1, \quad q_s^2 = maj(q_s^1, Q_t^1, 0). \quad (9)$$

На підставі виразів (7) – (9) можна побудувати лічильники з груповими або наскрізними переносами. Лічильник з груповим переносом має високу швидкодію, але для його реалізації потрібні багатовходові елементи І. При використанні в ланцюзі переносів МЕ на квантових автоматах [1, 3] можна побудувати за тими ж формулами (7) – (9). Швидкодіючий *нано*лічильник додавання з наскрізним переносом та результати моделювання його часових характеристик показані на рис. 4.

Час рахунку в цьому випадку залежить від часу поширення сигналів в ланцюзі наскрізного переносу.

Загальна кількість квантових коміркового автоматів наносхеми лічильника становить 278. Розміри квантових коміркового автоматів (18*18) нм. Відстань між центрами квантових коміркового автоматів дорівнює 20 нм. Діаметри квантових острівців 5 нм.

Загальні розміри *нано*лічильника додавання складають (1120*540) нм.

Узагальнена таблиця переходів і функцій збудження **віднімаючого** *нано*лічильника (табл. 3) складається аналогічно табл. 2 *нано*лічильника додавання.

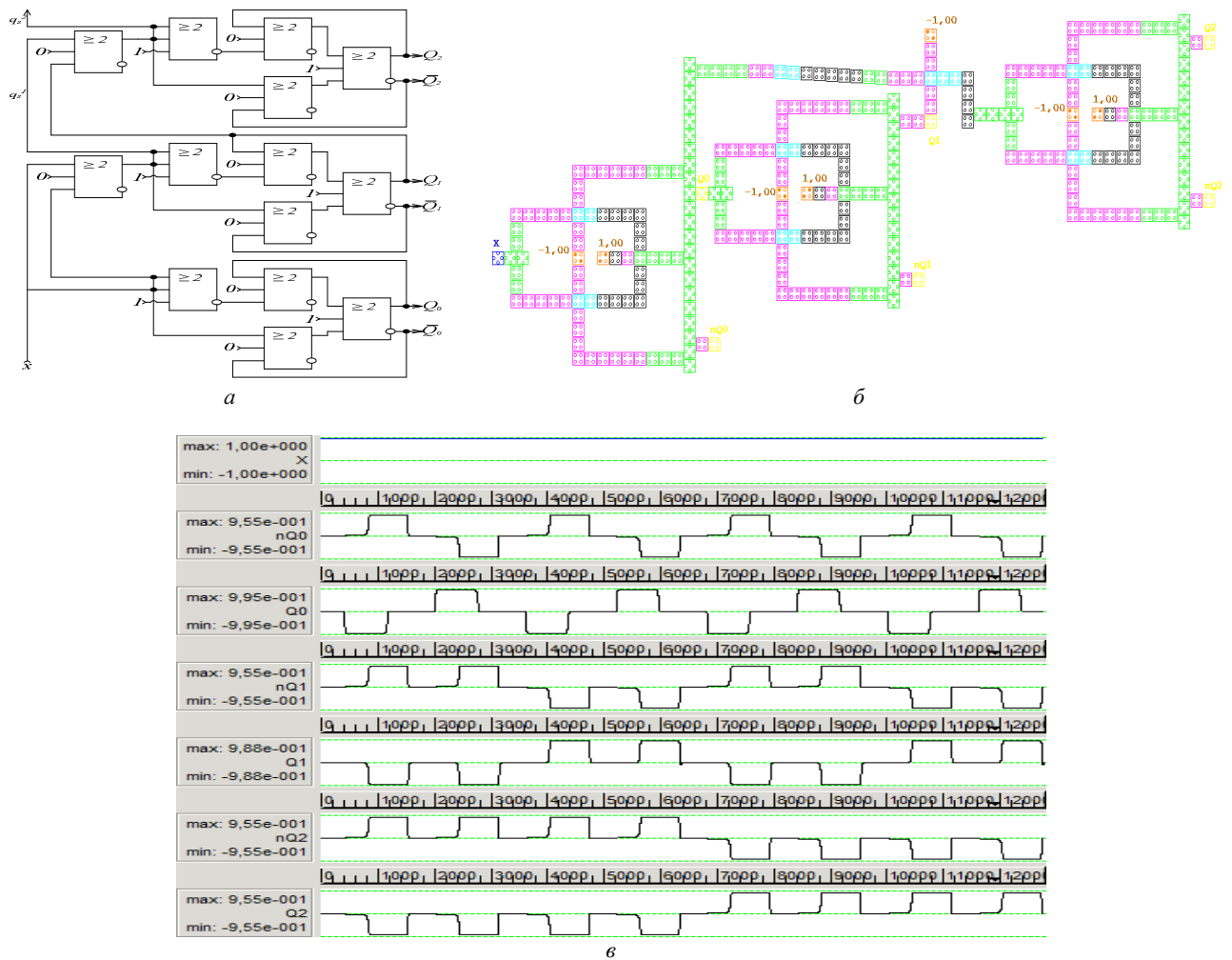


Рис. 4 – Швидкодіючий нанолічильник додавання з наскрізним переносом: а – структурна схема; б – наносхема на квантових автоматах; в – результати моделювання сигналів в САПР QCADesigner [4].

Таблиця 3 – Таблиця переходів віднімаючого нанолічильника

x	Q_t^2	Q_t^1	Q_t^0	Q_{t+1}^2	Q_{t+1}^1	Q_{t+1}^0	q_s^0	q_s^1	q_s^2
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0

На підставі табл. 3 можна записати наступні рівності:

$$q_s^0 = x; \tag{10}$$

$$q_s^1 = x\bar{Q}_t^0, \quad q_s^1 = maj(x, \bar{Q}_t^{0,0}); \tag{11}$$

$$q_s^2 = x\bar{Q}_t^0\bar{Q}_t^1 = q_s^1Q_t^1, \quad q_s^2 = maj(q_s^1, \bar{Q}_t^{1,0}). \tag{12}$$

Структурна схема та наносхема віднімаючого лічильника з наскрізним переносом наведені на рис. 5, а і б. Результати моделювання цієї схеми показані на рис. 5, в.

Загальна кількість квантових коміркових автоматів наносхеми віднімаючого лічильника становить 299. Розміри квантових коміркових автоматів становлять (18×18) нм. Відстань між центрами квантових коміркових автоматів дорівнює 20 нм. Діаметри квантових острівців 5 нм. Загальні розміри віднімаючого нанолічильника складають (1130×430) нм

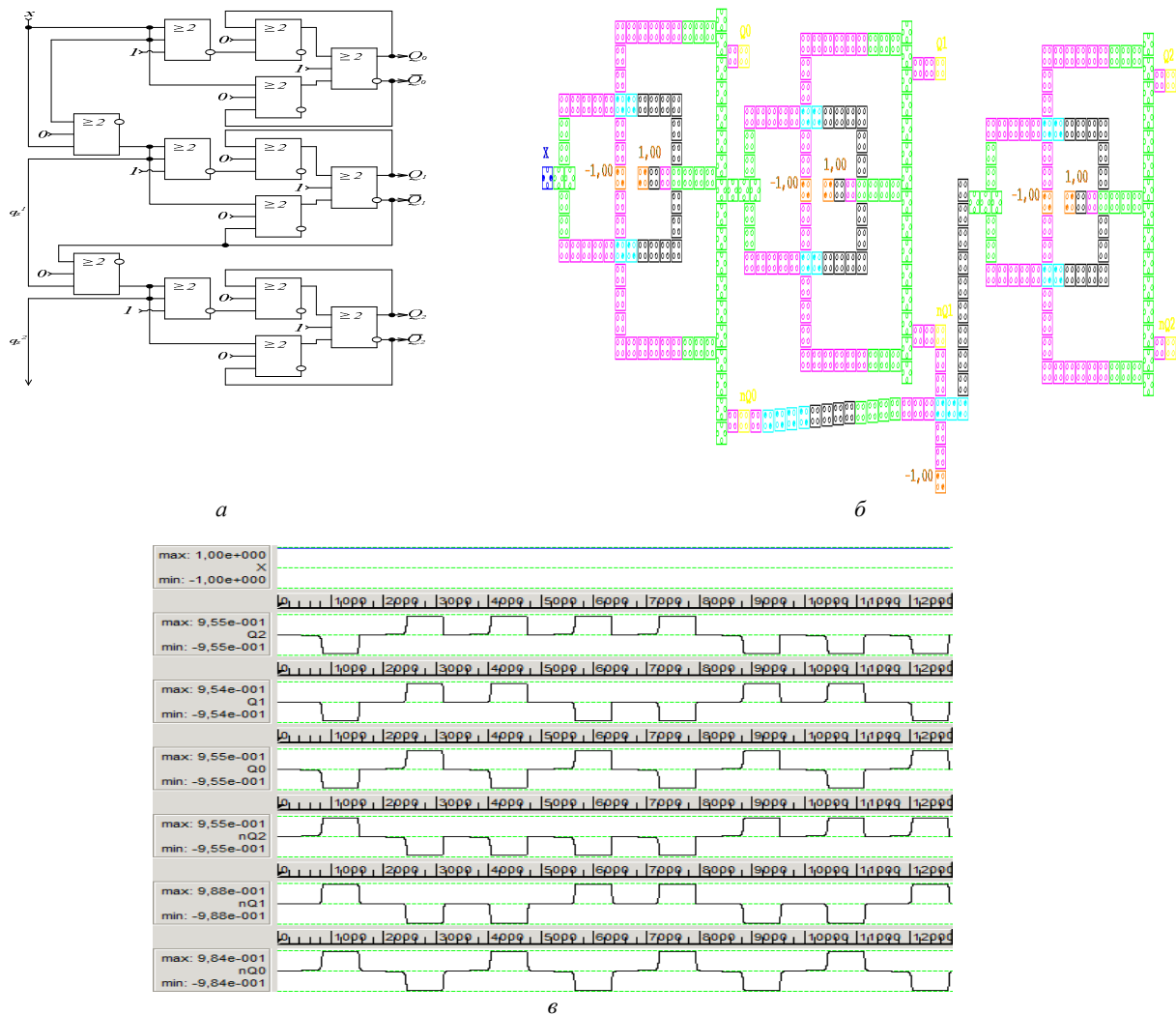


Рис. 5 – Швидкокодуючий віднімаючий нанолічильник з наскрізним переносом: *а* – структурна схема; *б* – наносхема на квантових автоматах; *в* – результати моделювання сигналів в САПР QCADesigner.

Висновки. Один із найбільш перспективних напрямків підвищення надійності і заводськості при дії на їх входи випадкових флуктуацій сигналів роботи обчислювальних систем являються мажоритарні елементи наелектронного типу. В роботі розроблені надійні нанопристрої послідовного та комбінаційного типів із застосуванням системи автоматизованого проектування QCADesigner. Досягнута мета проектування надійного розшарування наносхем і підвищення їх експлуатаційної ефективності, але наявність дефектів молекулярної технології виготовлення квантових коміркових автоматів потребує подальшої роботи в напрямку автоматизованого проектування нанопристроїв.

Створена функціонально повна мажоритарна система наноелементів для комп'ютерного проектування нанопристроїв послідовного та комбінаційного типів, в числі яких нанотригери та нанореєстри.

Список литературы

1. Мельник О. С., Козаревич В. О., Ходимчук Д. С. Комп'ютерне моделювання послідовних нанопристроїв // Проблеми інформатизації та управління. Зб. наук. праць. нац. авіаційного ун-ту. – Київ, 2014. – Вип. 2 (46). – С. 42 – 45.
2. Lent C. S., Tougaw P. D. A Device Architecture for Computing with Quantum Dots. // Proc. of the IEEE. – 1997. – vol. 85. – issue 4. – pp. 541 – 557. DOI: 10.1109/5.573740.
3. Пакулов Н. И. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств. – М.: Сов. Радио, 1974. – 184 с.
4. Walus K., Dysart T. J., Jullien G. A., Budiman R. A. QCADesigner: A Rapid Design and Simulation Tool for Quantum-Dot Cellular Automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. – 2004. – vol. 3. – issue 1. – pp. 26 – 31. DOI: 10.1109/TNANO.2003.820815.

References (transliterated)

1. Melnyk O. S., Kozarevich V. O., Khodimchuk D. S. Komp'yuterne modelyuvannya poslidovnostnykh nanoprystroyiv [Computer modeling of sequential nanodevices]. *Problemy informatyzatsiyi ta upravlinnya. Zb. nauk. pratz'. nats. aviatsiynogo un-ty* [Problems of informatization and control. Collection of scientific works of National Aviation University]. Kyiv, 2014, vol. 2 (46), pp. 42–45.
2. Lent C. S., Tougaw P. D. A Device Architecture for Computing with Quantum Dots. *Proc. of the IEEE*. 1997, vol. 85, issue 4, pp. 541–557, DOI: 10.1109/5.573740.
3. Pakulov N. I. *Mazhoritarnyy printsyp postroeniya nadezhnykh uzlov i ustroystv* [Majority principle of constructing reliable nodes and devices]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974. 184 p.
4. Walus K., Dysart T. J., Jullien G. A., Budiman R. A. QCADesigner : A Rapid Design and Simulation Tool for Quantum-Dot Cellular Automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2004, vol. 3, issue 1, pp. 26–31. DOI: 10.1109/TNANO.2003.820815.

Надійшла (received) 19. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович (Мельник Александр Степанович, Melnyk Oleksandr Stepanovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Горбарчук Максим Сергійович (Горбарчук Максим Сергеевич, Horbarchuk Maksym Serhiyovych) – студент, Національний авіаційний університет м. Київ; тел.: (093) 901-49-13; e-mail: maxbasket@ukr.net.

УДК 621.382.3 (045)

О. С. МЕЛЬНИК, А. О. БОРСУК**СИНТЕЗ МАЖОРИТАРНИХ ОДНОЕЛЕКТРОННИХ НАНОПРИСТРОЇВ З ПАМ'ЯТТЮ**

Запам'ятовуючі нанопристрої відрізняються великим різноманіттям мажоритарних тригерних структур, які є базовими фрагментами наносхем великого ступеня інтеграції. В роботі описано синтез надійних послідовностних нанопристроїв одно-електроніки на базі технологій квантових коміркових автоматів. При побудові мажоритарних наносхем з пам'яттю використовуються теорія кінцевих автоматів. Проаналізовано технологія комп'ютерного проектування різних типів арифметико-логічних нанопристроїв. Створені надшвидкодійні нанореєстри паралельної дії та з парафазним керуванням.

Ключові слова: квантові автомати, мажоритарна логіка, одноелектроніка, нанореєстри, комп'ютерне проектування.

О. С. МЕЛЬНИК, А. О. БОРСУК**СИНТЕЗ МАЖОРИТАРНО ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ НАНОУСТРОЙСТВ С ПАМЯТЬЮ**

Запоминающие наноустройства отличаются большим разнообразием мажоритарных тригерных структур, которые являются базовыми фрагментами наносхем высокого уровня интеграции. В работе описывается синтез надежных последовательностных наноустройств одноелектроніки на базе технологий квантовых сотовых автоматів. При построении мажоритарных наносхем с памятью используются теория конечных автоматів. Проанализирован порядок компьютерного проектирования различных типов арифметико-логических наноустройств. Созданы сверхбыстродействующие нанореєстры параллельного действия и с парафазным управлением.

Ключевые слова: квантовые автоматы, мажоритарная логика, одноелектроніка, нанореєстры, компьютерное проектирование.

О. S. MELNYK, A. O. BORSUK**SYNTHESIS OF MAJORITY SINGLE-ELECTRON NANODEVICES WITH MEMORY**

Memorizing nanodrives are distinguished by a large variety of majoritarian trigger structures, which are the basic fragments of the the nanocircuit of a high integration level. The paper describes the synthesis of reliable sequential nanodevices of single- electronics based on the technology of quantum cellular automata. When constructing majority nano-circuits with memory, the theory of finite automata is used. The order of computer design of different types of arithmetic and logic nano devices is analyzed. High-speed parallel-acting and paraphase control nanoregisters control are created.

Key words: quantum automata, majority logic, single-electronics, nanoregisters, computer design.

Вступ. Поняття *скінченого автомата* виникло в середині 20-го ст. у зв'язку із спробами математично описати функціонування нервових систем, обчислювальних машин та інших технічних автоматів [1]. Характерною особливістю цього класу математичних моделей є скінченність (а, значить, і дискретність) множин елементів, що складають математичну модель. Подальший розвиток теорії йшов шляхом розгляду нескінченних автоматів того чи іншого виду, введення недетермінованих відношень (випадкових функцій) між входом та виходом автомата тощо.

Алгоритм синтезу мажоритарних нанопристроїв з пам'яттю. Скінченим автоматом називається множина п'яти підмножин, тобто математична структура виду:

© О. С. Мельник, А. О. Борсук, 2018

$$A = \{X, Y, Q, f, \varphi\}, \quad (1)$$

де $X = x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – скінченна множина вхідних змінних; $Y = y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ – скінченна множина вихідних змінних; $Q = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ – скінченна множина внутрішніх змінних станів автомата; $\varphi = (q, x)$ – функція переходу автомата із одного стану в інший; $f = (q, x)$ – функція виходу.

Функції f та $\varphi \in$ булевими, для них виконується системна аксіома алгебри логіки.

Автомат (1) функціонує тільки в дискретні моменти часу $t_i \in \{t_0, t_1, \dots, t_p\}$. В кожний момент часу t_i автомат знаходиться в певному стані із множини Q станів автомата, тобто має певний набір значень змінних q_i . Станом автомата тут вважається сукупність значень змінних стану q .

Оскільки автомат є рекурентною булевою функцією, то залежність значення стану автомата в момент часу t_i від значення стану в момент t_{i-1} може інтерпретуватися як наявність у автомата пам'яті. Тобто значення стану $q(t_{i-1})$ запам'ятовується і зберігається протягом інтервалу часу (t_{i-1}, t_i) . Цей факт є наріжним каменем у технічних застосуваннях математичної теорії скінчених автоматів. Для того, щоб підкреслити наявність пам'яті у автомата, говорять також, що $q \in$ стійким станом автомата (рис. 1.)

З появою пам'яті в технічних засобах, що реалізують математичну модель скінченного автомата, стало можливим виконувати логічні операції послідовно, оскільки інформація може зберігатися в пам'яті і в потрібний момент часу вибиратися звідти для керування операціями комбінаційної логіки. Схеми, що працюють таким чином, стали називати *послідовностними*. З іншого боку, для керування деякими схемами такого типу використовують періодичні часові сигнали. В цьому випадку схеми називають *синхронними*, або схемами, що керуються часом. Для керування послідовностними схемами можуть використовуватися випадкові події. Такі схеми називають *асинхронними*, або схемами, що керовані подіями.



Рис. 1 – Схемна структура скінченного автомата.

В початковий момент часу автомат знаходиться у своєму початковому стані q_0 . В кожний наступний момент часу автомат може сприймати набір значень вхідних змінних x , реагувати на нього зміною свого стану q (своїх внутрішніх змінних) та зміною значень вихідних змінних y . В цьому і полягає факт функціонування автомата. Причому вважається, що в результаті дії вхідних сигналів автомат переходить із поточного стану $q(t_i)$ в новий стан $q(t_{i+1})$ стрибкоподібно.

Зміст закону функціонування автомата визначається видом функції переходу $\varphi(x, q)$ та функції виходу $f(x, q)$, тобто рівняннями наступного вигляду:

$$\begin{cases} q(t_{i+1}) = \varphi(x(t_i), q(t_i)); \\ y(t_{i+1}) = f(x(t_i), q(t_{i+1})); \\ y(t_{i+1}) = f(q(t_i)). \end{cases} \quad (2)$$

Значення наступного стану $q(t_{i+1})$ залежить від значення поточного стану $q(t_i)$ та значення вхідних змінних $x(t_i)$.

Синтез базових нанотригерів. Розглянемо основні принципи побудови та функціонування найбільш поширених тригерних наноелементів.

Тригером називається пристрій, здатний формувати два сталі значення вихідного сигналу і стрибкоподібно змінювати ці значення під дією зовнішнього керуючого сигналу. У загальному випадку тригер містить власне елемент пам'яті і деяку вхідну комбінаційну схему, перетворюючу вхідні сигнали тригера в сигнали, необхідні для управління елементом пам'яті.

Існуючі типи тригерів можуть бути класифіковані за різними ознаками. Найбільш часто тригери класифікують за типом використовуваних інформаційних (настановних) входів. Розрізняють такі типи основних інформаційних входів тригера:

R – роздільний вхід скидання тригера ($Q = 0$);

S – роздільний вхід установки тригера ($Q = 1$);

K – вхід скидання універсального тригера ($Q = 0$);

J – вхід установки універсального тригера ($Q = 1$);

T – рахунковий вхід тригера;

D – інформаційний вхід перемикавання тригера в стан, що відповідає логічному рівню на цьому вході;

C – синхронізуючий або управляючий вхід.

Так, визначення «синхронний RS-тригер з інверсними статичними входами» означає, що розглянутий тригер має три інформаційних входи: вхід установки S , вхід скидання R і синхронізуючий вхід C ; перемикавання тригера відбувається в моменти часу, обумовлені появою активного логічного сигналу на вході синхронізації $C = 0$, причому для перемикавання на входи R або S необхідно подати низький логічний рівень, тобто, сигнал лог. 0 ($R = 0$ або $S = 0$). Такі входи відповідно позначають, \bar{C} , \bar{R} і \bar{S} .

При синтезі мажоритарних нанотригерів для економії обладнання доцільно в якості елементарного автомата використовувати мажоритарні елементи (МЕ), що суміщає логічні функції з функціями затримки [2, 3]. Матриця переходів МЕ як елемента затримки має наступний вигляд:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & - & 0 & q \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 \\ 1 & - & 1 & 0 \end{array},$$

де зліва від матриці записані типи переходів.

Розглянемо порядок побудови базових нанотригерів з різною кількістю входів.

Тригер з роздільними входами (RS-тригер) має вхід $S = x_1$ для установки в стан «1» і вхід $R = x_0$ для установки в стан «0». Функції переходів і збудження тригера з роздільними входами наведені в табл. 1 [4]. Їй відповідає аналітична форма запису виду:

$$q(t_{i+1}) = \bar{R}(t_i)q(t_i) \vee S(t_i). \quad (3)$$

Таблиця 1 – Функції переходів і збудження RS-тригера

x_1	x_0	Q_t	Q_{t+1}	q
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1'	1'	0	–	a_1
1'	1'	1	–	a_2

При заборонених комбінаціях вхідних сигналів, відзначених в табл. 1 одиницями з штрихами 1', функція збудження може приймати довільне значення (a_1, a_2). Залежно від конкретних значень невизначених коефіцієнтів a_1 і a_2 , можна синтезувати кілька варіантів наносхем тригерів з роздільними входами.

Варіант 1. $a_1 = 1, a_2 = 0$:

$$\begin{aligned} q &= \bar{x}_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 \bar{x}_0 \bar{Q}_t \vee x_1 \bar{x}_0 Q_t = x_1 \bar{Q}_t \vee \bar{x}_0 Q_t; \\ q &= maj(maj(x_1, \bar{Q}_t, 0), maj(\bar{x}_0, Q_t, 0), 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Структурна схема одноелектронного тригера з роздільними входами, що побудована відповідно до рівняння (4), та результати моделювання показані на рис. 2.

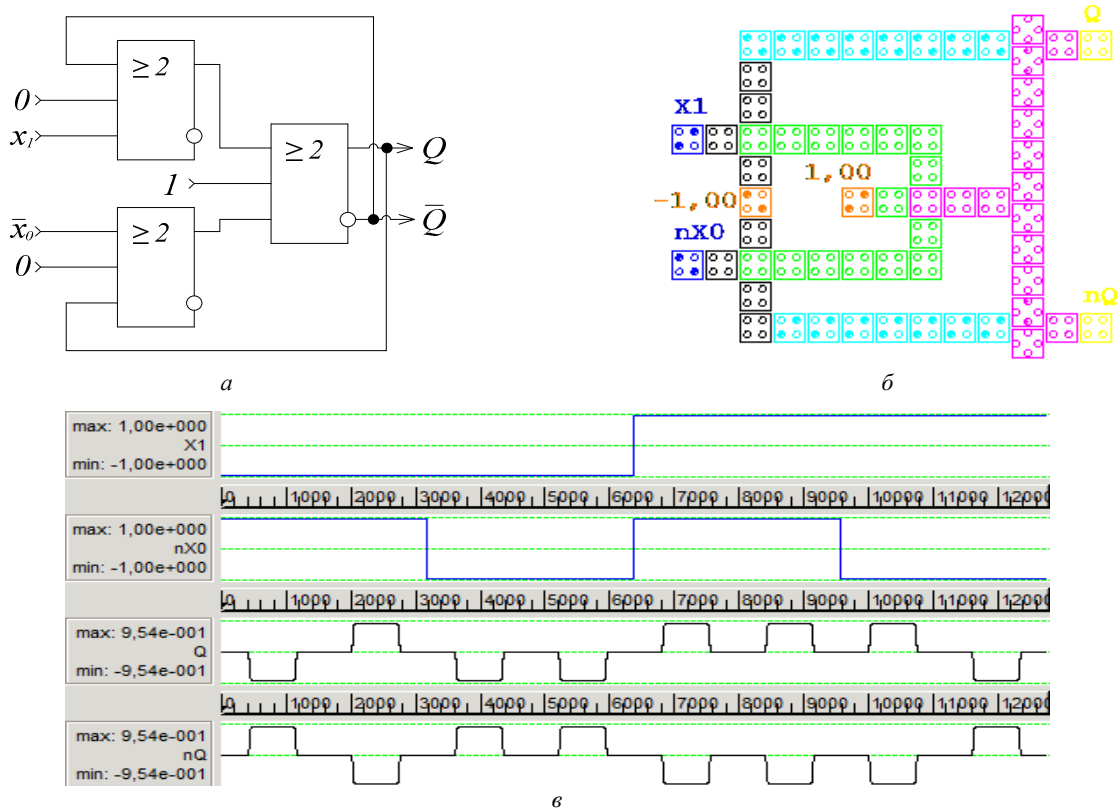


Рис. 2 – RS-тригер (модифікація 1): *а* – структурна схема; *б* – наносхема на квантових автоматах [2]; *в* – результати моделювання сигналів логічних станів RS-тригера в САПР QCADesigner [4].

Варіант 2. $a_1 = a_2 = 1$:

$$q = \bar{x}_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 \bar{x}_0 \bar{Q}_t \vee x_1 \bar{x}_0 Q_t = \bar{x}_0 (x_1 \vee Q_t);$$

$$q = maj(maj(x_1, Q_t, 1), \bar{x}_0, 0).$$

Другий варіант схеми тригера з роздільними входами наведено на рис. 3.

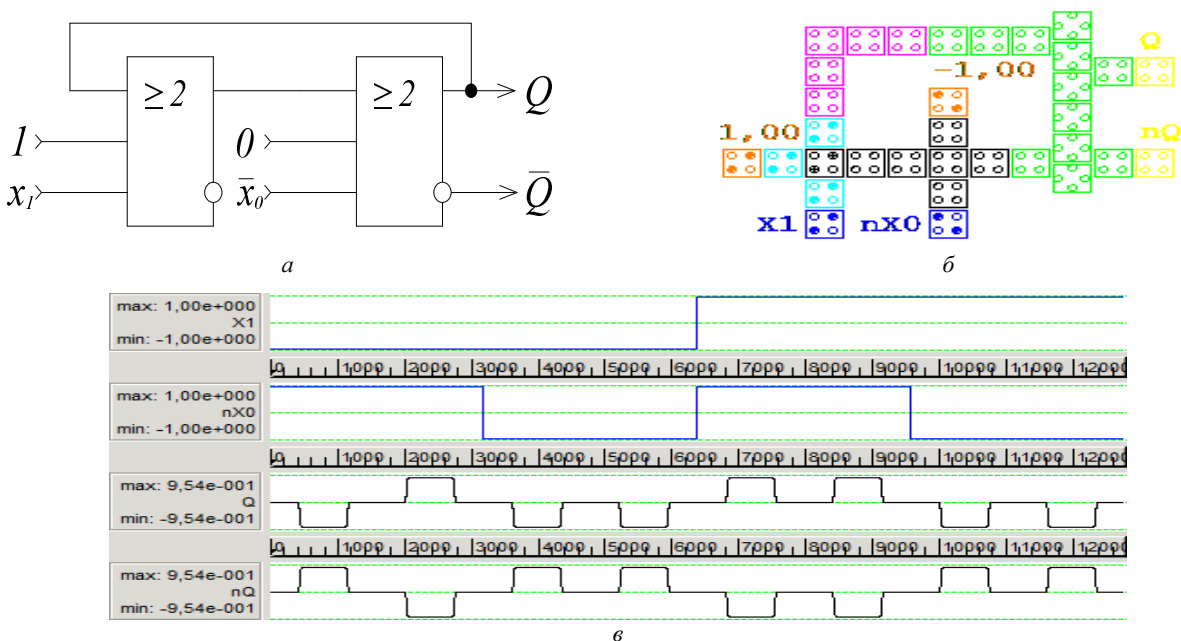


Рис. 3 – RS- тригер (модифікація 2): *а* – структурна схема; *б* – наносхема на квантових автоматах [2]; *в* – результати моделювання сигналів логічних станів RS-тригера в САПР QCADesigner [4].

Варіант 3. $a_1 = a_2 = 0$:

$$q = \bar{x}_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 \bar{x}_0 \bar{Q}_t \vee x_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 x_0 \bar{Q}_t \vee x_1 \bar{x}_0 Q_t = x_1 \vee \bar{x}_0 Q_t;$$

$$q = \text{maj}(\text{maj}(\bar{x}_0, Q_t, 0), x_1, 1).$$
(6)

Третій варіант схеми тригера з роздільними входами показаний на рис. 4.

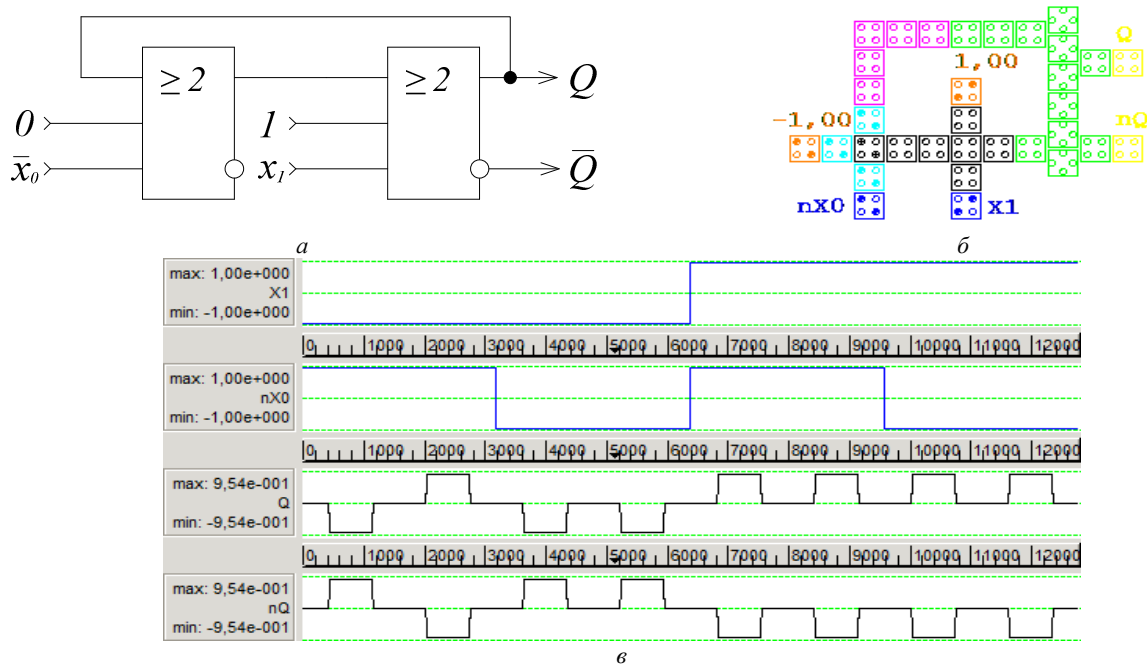


Рис. 4 – RS- тригер (модифікація 3): а – структурна схема; б – наносхема на квантових автоматах [2]; в – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner [4].

Варіант 4. $a_1 = 0, a_2 = 1$:

$$q = \bar{x}_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 \bar{x}_0 \bar{Q}_t \vee x_1 \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 x_0 Q_t = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_0 Q_t \vee x_1 Q_t;$$

$$f_{x_1 \bar{x}_0} = \bar{x}_1 Q_t \vee x_1 Q_t = Q_t; \quad f_{x_1 \bar{x}_0} = x_1 \vee x_1 Q_t = x_1;$$

$$q = \text{maj}(\text{maj}(x_1, x_0, x_1), \text{maj}(\bar{x}_1, \bar{x}_0, x_1), Q_t) = \text{maj}(x_1, x_0, Q_t).$$
(7)

Схема тригера з роздільними входами, побудована у відповідності з рівнянням (7), наведена на рис. 5.

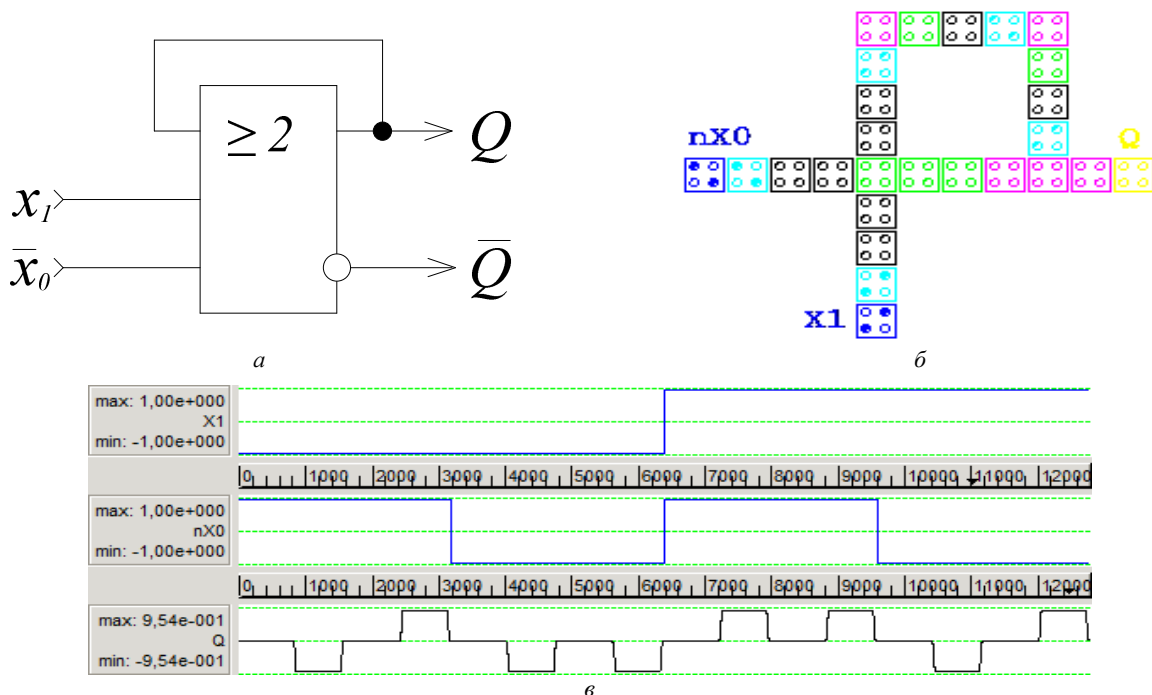


Рис. 5 – RS-тригер (модифікація 4): а – структурна схема; б – наносхема на квантових автоматах [2]; в – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner [4].

Таким чином, усі чотири модифікації RS-нотригерів на квантових МЕ мають однакові часові характеристики.

Останній варіант RS-тригера (рис. 5) є найоптимальнішим і реалізується лише на одному універсальному МЕ (УМЕ) без використання постійного рівня напруги.

Для проектування одноелектронних **нанорегістрів паралельної дії** будемо використовувати RS тригери з роздільними входами. Матриця переходів таких тригерів має вигляд:

			q_0	
0	-	0	0	,
0	-	1	X	
1	-	0	X	
1	-	1	1	

де X – це сигнал, який був на виході тригера в попередній момент часу.

Нанорегістр паралельної дії без ланцюгів зсуву призначений для прийому і зберігання паралельного коду числа і являє собою набір найпростіших RS-тригерів з роздільними входами (рис. 5, а, б). На рис. 6, а показана схема регістра з управлінням по одиничним входам $E = 1$, а на рис. 7, а – схема регістра з парафазними входами. Для роботи регістра з парафазними входами не потрібно попередньої установки його в стан «0».

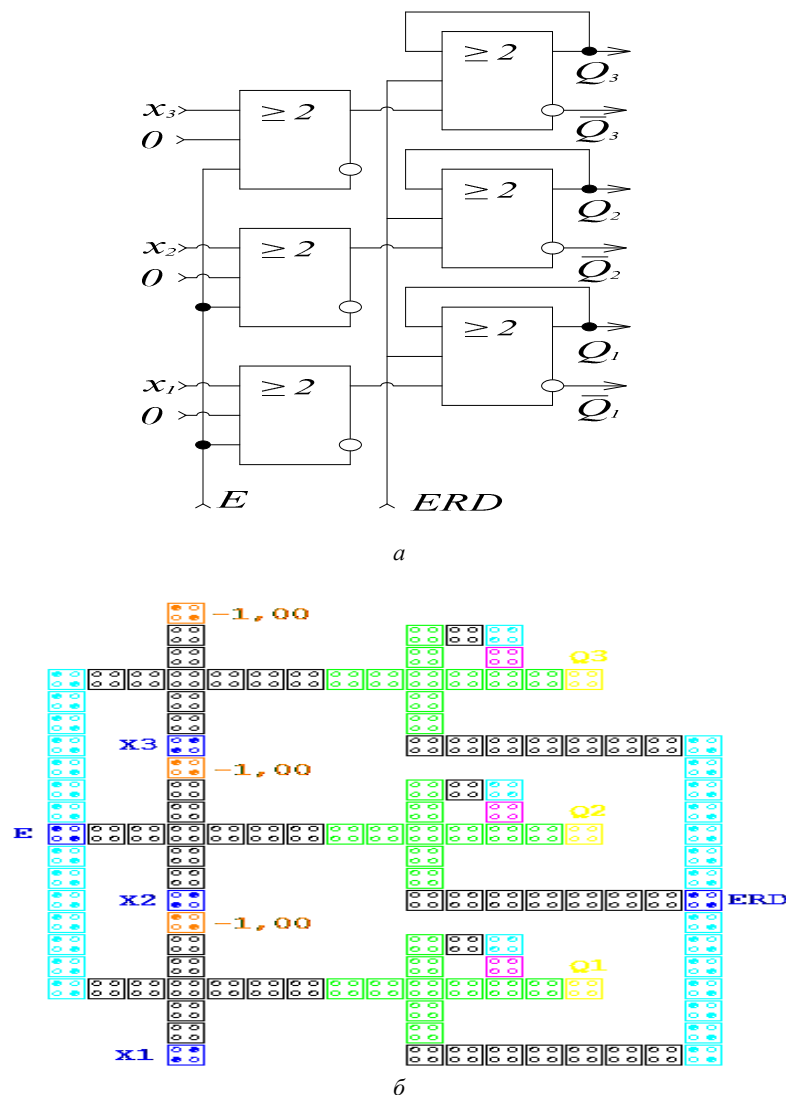


Рис. 6 – Паралельний регістр з управлінням по одиничним входам:
а – структурна схема; б – наносхема на квантових автоматах [2].

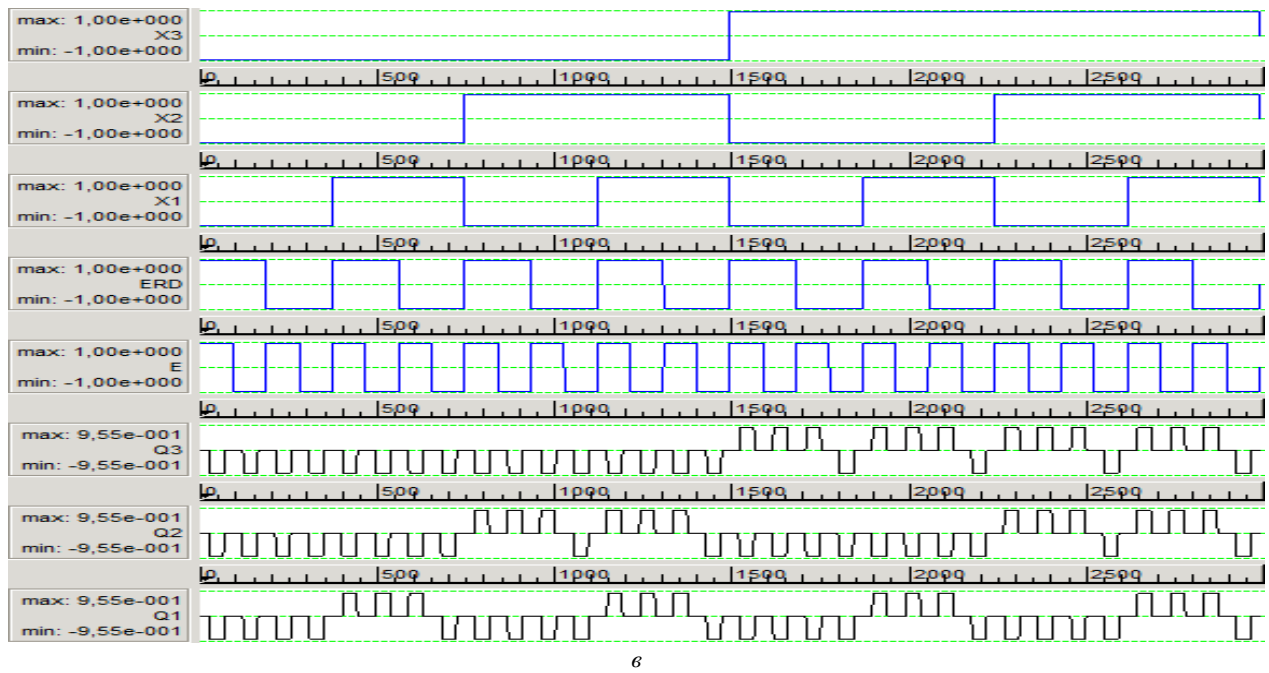


Рис. 6 – Паралельний регістр з управлінням по одиничним входам: *в* – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner [4].

Загальна кількість квантових коміркових автоматів наносхеми регістра складає 129. Розміри квантових коміркових автоматів: (18×18) нм. Відстань між центрами квантових коміркових автоматів дорівнює 20 нм. Діаметри квантових островців 5 нм. Загальні розміри регістра паралельної дії складають: (340×420) нм.

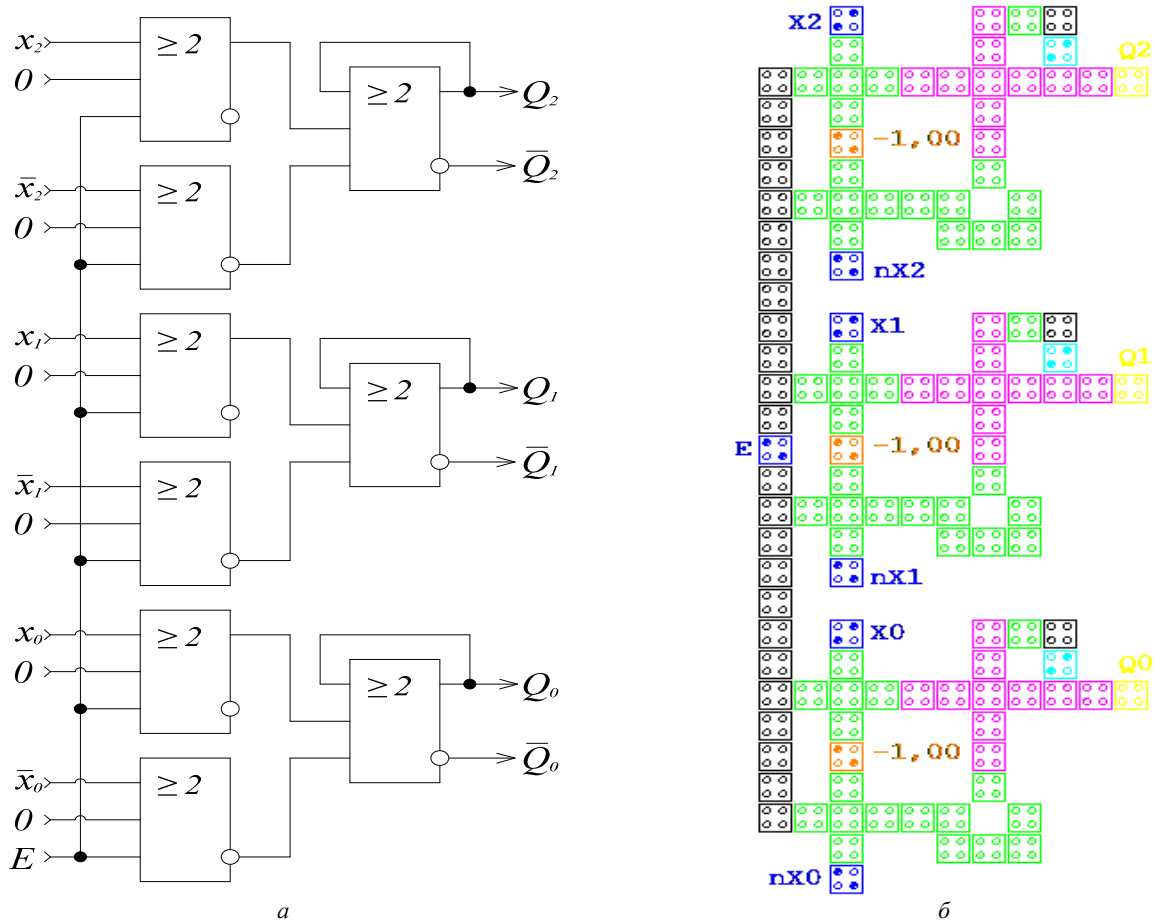
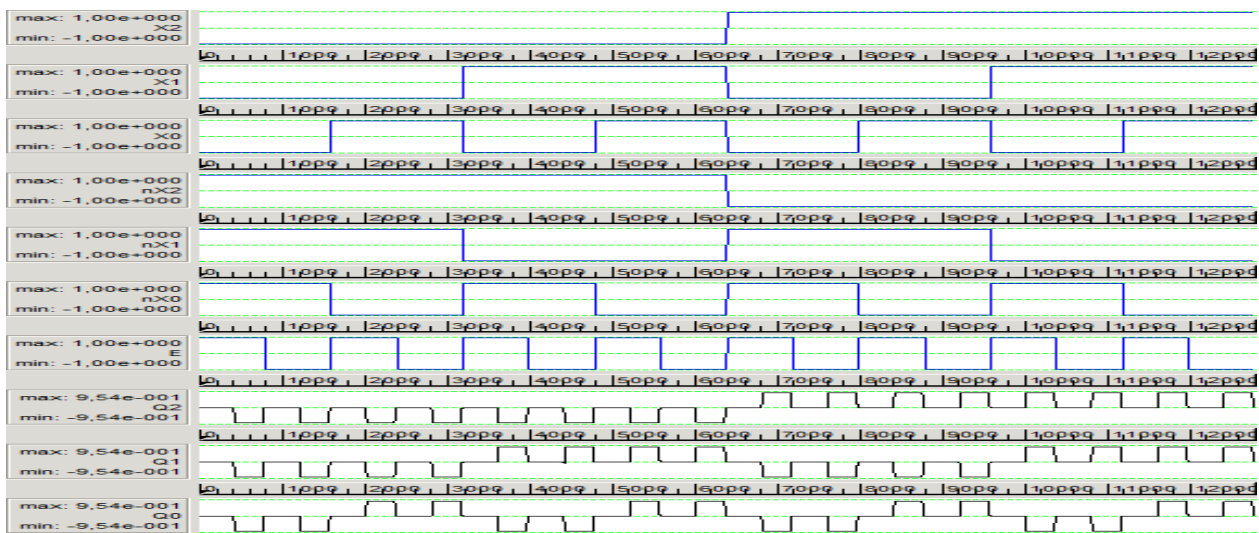


Рис. 7 – Регістр з парафразними входами: *а* – структурна схема; *б* – наносхема на квантових автоматах [2].



6

Рис. 7 – Регістр з парафразними входами: ϵ – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCADesigner [4].

Загальна кількість квантових коміркових автоматів наносхеми регістра з парафазними входами складає 127. Розміри квантових коміркових автоматів: (18×18) нм. Відстань між центрами квантових коміркових автоматів дорівнює 20 нм. Діаметри квантових острівців 5 нм. Загальні розміри регістра складають: (220×580) нм.

Висновки. Один із найбільш перспективних напрямків підвищення надійності і завадостійкості при дії на їх входи випадкових флуктуацій сигналів роботи обчислювальних систем являються мажоритарні елементи.

В роботі реалізовано комп'ютерне проектування нанопристроїв послідовного типу із застосуванням системи автоматизованого проектування QCADesigner. Досягнута мета розшарування наносхем і підвищення їх експлуатаційної надійності.

Створена функціонально повна мажоритарна система нанoeлементів для комп'ютерного проектування нанопристроїв послідовного типу, в числі яких нанотригери з роздільними входами та (на їх базі) нанорегістри.

Список літератури

1. Колодницький М. М. Елементи теорії САПР складних систем : Навч. посібник. – Житомир : ЖТТИ, 1999. – 512 с.
2. Lent C. S., Tougaw P. D. A Device Architecture for Computing with Quantum Dots. // Proc. of the IEEE. – 1997. – vol. 85. – issue 4. – pp. 541 – 557. DOI: 10.1109/5.573740.
3. Пакулов Н. И. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств. – М. : Сов. Радио, 1974. – 184 с.
4. Melnyk O. S., Todavchych S. V. Synthesis of Programmable Nanoelectronic Devices // Journal of Electronics and Control Systems. – 2013. – № 35. – P. 89 – 94. DOI: 10.18372/1990-5548.35.5788.
5. Walus K., Dysart T. J., Jullien G. A., Budiman R. A. QCADesigner : A Rapid Design and Simulation Tool for Quantum-Dot Cellular Automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. – 2004. – vol. 3, issue 1. – pp. 26 – 31. DOI: 10.1109/TNANO.2003.820815.

References (transliterated)

1. Kolodnits'kyi M. M. *Elementy teoriiy SAPR skladnykh system* : Navch. posibnyk [Elements of composite system CAD theory: tutorial]. Zhytomyr, ZhTTI Publ., 1999. 512 p.
2. Lent C. S., Tougaw P. D. A Device Architecture for Computing with Quantum Dots. *Proc. Of the IEEE*. 1997, vol. 10, no. 3, pp. 73–83.
3. Pakulov N. I. *Mazhoritarnyy printsyp postroeniya nadezhnykh uzlov i ustroystv* [Majority principle of constructing reliable nodes and devices]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974. 184 p.
4. Melnyk O. S., Todavchych S. V. Synthesis of Programmable Nanoelectronic Devices. *Journal of Electronics and Control Systems*. 2013, no. 35, pp. 89–94. DOI: 10.18372/1990-5548.35.5788.
5. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool to QCADII Int. *Journal of Nanotech and Appl*. 2005, no. 1, pp. 1–7.

Надійшла (received) 07. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович (Мельник Александр Степанович, Melnyk Oleksandr Stepanovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Борсук Андрій Олегович (Борсук Андрей Олегович, Borsuk Andriy Olegovich) – студент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (066) 153-05-97; e-mail: andriyborsuk98@gmail.com.

O. O. NABOKA

UNIFORM ATTRACTOR FOR WAVE EQUATION WITH NON-LINEAR DAMPING DEPENDING EXPLICITLY ON TIME

The paper deals with long-time behavior of the solutions to the initial-boundary value problem for a non-autonomous non-linear wave equation. The peculiarity of the equation is the non-linear damping term depending explicitly on time. The problem is studied in the framework of the theory of processes and their attractors. The family of processes generated by the initial-boundary value problem is introduced. It is proved that this family is uniformly (with respect to the time-dependent damping coefficient) dissipative and asymptotically compact, thus possesses a unique uniform attractor. The attractor is a compact set in the common phase space of the processes.

Key words: non-autonomous wave equation, non-linear damping, family of processes, uniform attractor.

O. O. НАБОКА

РІВНОМІРНИЙ АТРАКТОР ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ДЕМПФУВАННЯМ, ЩО ЯВНО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ЧАСУ

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків початково-крайової задачі для неавтономного нелінійного хвильового рівняння. Особливістю рівняння є те, що доданок рівняння, який відповідає за демпфування, є нелінійним і залежить явно від часу. Дослідження проведено у рамках теорії процесів та їх аттракторів. Побудовано сім'ю процесів, що відповідає початково-крайовій задачі. Доведено, що ця сім'я є рівномірно (відносно коефіцієнта демпфування, який залежить від часу) дисипативною та асимптотично компактною, отже має єдиний рівномірний аттрактор. Аттрактор є компактною множиною у спільному фазовому просторі процесів.

Ключові слова: неавтономне хвильове рівняння, нелінійне демпфування, сім'я процесів, рівномірний аттрактор.

E. A. НАБОКА

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ, ЯВНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Изучается асимптотическое поведение решений начально-краевой задачи для неавтономного нелинейного волнового уравнения. Особенность уравнения состоит в наличии нелинейного демпфирования, зависящего явно от времени. Исследование проводится в рамках теории процессов и их аттракторов. Построено семейство процессов, соответствующее начально-краевой задаче. Доказано, что это семейство равномерно (относительно зависящего от времени коэффициента демпфирования) диссипативно и асимптотически компактно и, следовательно, обладает единственным равномерным аттрактором. Аттрактор является компактным множеством в общем фазовом пространстве процессов.

Ключевые слова: неавтономное волновое уравнение, нелинейное демпфирование, семейство процессов, равномерный аттрактор.

Introduction. In the paper the following initial-boundary value problem for a non-linear non-autonomous wave equation in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is studied:

$$u_{tt} - \Delta u + d_0(t)u_t^3 + \gamma u^3 = g(x), \quad u = u(x, t), \quad x \in \Omega, t > \tau; \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{t=\tau} = u_{0\tau}(x), \quad u_t|_{t=\tau} = u_{1\tau}(x). \quad (3)$$

In (1) the term $d_0(t)u_t^3$ introduces non-linear damping, the damping coefficient $d_0(t) > 0, \forall t$ being a periodic function depending explicitly on time; the constant $\gamma > 0$; the external load $g(x) \in L_2(\Omega)$.

Equations of the form (1) arise in relativistic quantum mechanics (see [1] and references therein).

We are interested in the long-time behavior of solutions to problem (1) – (3). The asymptotic behavior of the solutions to initial-boundary value problems for non-linear wave equations was addressed in [1 – 3], and others, where an autonomous case (i.e. the case of the damping coefficient independent of time: $d_0(t) \equiv d_0 = const > 0$) was studied. The research was conducted in the framework of the dynamical system theory, the long-time behavior being described through the properties of the global attractor of the semigroup of operators generated by the respective initial-boundary value problem in its phase space $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

The asymptotic behavior of solutions to a non-autonomous wave equation was studied in [4 – 6]. Unlike the autonomous case, solutions to the initial-boundary value problem for a non-autonomous wave equation do not determine a semigroup of operators in $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. The approach adopted for studying long-time behavior of solutions to non-autonomous problems is to introduce a family of processes in an extended phase space, which is a direct product of the space $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ and a functional space to which all the coefficients of the equation depending explicitly on time belong. The generalization of the notion of the global attractor on the case of a non-autonomous equation is the uniform attractor of the family of processes thus defined. A brief outline of the theory of processes and their attractors as it is developed in [4] is found in the next section of the paper.

In the present paper the long-time behavior of the solutions to non-autonomous non-linear problem (1) – (3) is

studied in terms of the uniform attractor. The family of processes generated by the problem in appropriate phase space is described. It is proved that the family possesses the unique uniform attractor, which is a compact set in its phase space.

We would like to point out that the damping term in equation (1) is *non-linear and non-autonomous*, i.e. depends explicitly on time, which distinguishes our problem from those studied in earlier works. Thus the main point of the paper is to deal with this peculiarity of the equation. That is why, unlike in [5], we choose other terms of the problem such as the non-linearity γu^3 and the external load $g(x)$ to be autonomous. Nevertheless, the results on the existence of the uniform attractor to problem (1) – (3) can be extended to the case of non-linearity and the external load of more general form depending explicitly on time. The technique developed in [5] can then be applied to deal with them.

Abstract results on processes and their attractors. We start with a brief summary of basic notions and theorems from the general theory of processes and their attractors, as they are given in the book by V. Chepyzhov and M. Vishik [4].

Let E be a Banach space.

Definition 1. A two-parametric family of mappings $\{U(t, \tau)\}: U(t, \tau): E \rightarrow E, t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}$ is said to be a *process* in E if it satisfies the following properties:

$$U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau), \quad \forall t \geq s \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}, \quad U(\tau, \tau) = I, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

where $I: E \rightarrow E$ is the identity operator.

In this paper we shall be dealing with a *family of processes* $\{U_\sigma(t, \tau)\}$ depending on a parameter σ , which belongs to some complete metric space Σ . The parameter σ is called the *symbol* of the family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}$ and the space Σ is called the *symbol space*.

Let $\{T(h)\}_{h \geq 0}$ be a semigroup of the translation operators on Σ :

$$T(h_1 + h_2) = T(h_1) \cdot T(h_2), \quad h_1, h_2 \geq 0, \quad T(h)\Sigma = \Sigma, \quad \forall h \geq 0.$$

We assume further that the family of the processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ satisfies the translation identity:

$$U_\sigma(t + h, \tau + h) = U_{T(h)\sigma}(t, \tau), \quad \forall \sigma \in \Sigma, t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}, h \geq 0. \quad (5)$$

Definition 2. A family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ is said to be *uniformly (with respect to σ) bounded*, if for any set B bounded in E the set $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \bigcup_{t \geq \tau} U(t, \tau)B$ is also bounded in E .

Definition 3. A set $B_0 \subset E$ is said to be a *uniformly (with respect to σ) absorbing set* for the family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$, if for any $\tau \in \mathbb{R}$ and any bounded in E set B there exists $t_0 = t_0(\tau, B) \geq \tau$ such that $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(t, \tau)B \subset B_0$ for all $t \geq t_0$.

Definition 4. A family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ is said to be *uniformly (with respect to σ) dissipative* if it possesses a bounded uniformly (with respect to σ) absorbing set.

Definition 5. A set $A \subset E$ is said to be a *uniformly (with respect to σ) attracting set* for the family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$, if for any fixed $\tau \in \mathbb{R}$ and any set B bounded in E one has:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}_E(U_\sigma(t, \tau)B, A) \right) = 0,$$

where $\text{dist}_E(\cdot, \cdot)$ stands for the Hausdorff semidistance in E between two sets.

Definition 6. A closed uniformly (with respect to σ) attracting set A_Σ is said to be a *uniform (with respect to σ) attractor* of the family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$, if it is contained in any closed uniformly attracting set.

Definition 6 implies that the uniform attractor of a family of processes is its minimal closed uniformly attracting set. The minimality property here replaces the invariance property imposed on an attractor of a semigroup. It is also obvious that if a uniform attractor of a family of processes exists then it is unique.

We introduce now a notion of uniform asymptotic compactness of a family of processes which is due to [7] and differs from the one given in [4]:

Definition 7. A family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ is said to be *uniformly (with respect to σ) asymptotically compact* if and only if for any fixed $\tau \in \mathbb{R}$, any bounded sequence $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, any sequence of symbols $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ and $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^\tau, t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ the sequence $\{U_{\sigma_n}(t_n, \tau)u_n\}_{n=1}^\infty$ is precompact in E .

We outline here a method for verifying whether a family of processes is uniformly asymptotically compact presented in [5] and inspired by similar techniques introduced for the autonomous case in [8] and developed further in [2 – 3]:

Definition 8. Let E be a Banach space, B be a bounded set in E , and Σ be a symbol space. Let $\varphi(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ be a function defined on $(E \times E) \times (\Sigma \times \Sigma)$. Then $\varphi(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ is a *contractive function* on B if for any sequences $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ and $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ there exist subsequences $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ and $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(u_{n_k}, u_{n_l}; \sigma_{n_k}, \sigma_{n_l}) = 0.$$

Theorem 1. Let $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ be a family of processes satisfying the translation identity (5) and possessing a bounded uniformly (with respect to σ) absorbing set B_0 . Assume that for any $\varepsilon > 0$ there exists $T = T(B_0, \varepsilon)$ and a contractive function $\varphi_T(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ such that

$$\|U_{\sigma_1}(T, \tau)u - U_{\sigma_2}(T, \tau)v\| \leq \varepsilon + \varphi_T(u, v; \sigma_1, \sigma_2), \quad \forall u, v \in B_0, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma. \tag{6}$$

Then the family $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ is uniformly (with respect to σ) asymptotically compact in E .

The criterion for the existence of a uniform attractor of a family of processes $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ in terms of uniform dissipativity and uniform asymptotic compactness reads then as follows (see [4 – 5]):

Theorem 2. Let $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ be a family of processes satisfying the translation identity (5). Then $\{U_\sigma(t, \tau)\}, \sigma \in \Sigma$ has a compact uniform (with respect to σ) attractor A_Σ if and only if it is uniformly (with respect to σ) dissipative and asymptotically compact.

Unique solvability and family of processes. Our aim now is to apply the abstract theory from the previous section to prove the existence of a compact uniform with respect to the time-dependent damping $d_0(t)$ attractor for non-autonomous initial-boundary problem (1) – (3). The first step is to define properly the symbol space Σ and the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}, d \in \Sigma$, generated by the problem.

We impose the following assumptions on the parameters and functions of equation (1):

(A1). The damping coefficient $d_0(t) \in C(\mathbb{R})$ is a positive periodic function:

$$d_0(t) \geq m_0 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad d_0(t \pm H_0) = d_0(t), \quad H_0 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

(A2). The right-hand side in (1) is such that $g(x) \in L_2(\Omega)$;

(A3). The coefficient γ is positive: $\gamma > 0$.

Let us denote by $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ the space of bounded continuous functions endowed with the following norm:

$$\|d\|_{C_b} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |d(t)|. \tag{8}$$

The functional damping coefficient $d_0(t)$ belongs to $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Let the hull $H(d_0)$ be the set of all the translations of the function $d_0(t)$:

$$H(d_0) = \{d(t) : d(t) = d_0(t+h), h \in \mathbb{R}\} \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Note that since the function $d_0(t)$ is periodic in t then the hull $H(d_0)$ is actually reduced to the set of the shifts of $d_0(t)$ by $h \in [0, H_0)$, where H_0 is the period of $d_0(t)$:

$$H(d_0) = \{d(t) : d(t) = d_0(t+h), h \in [0, H_0)\} \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Let Σ be the closure of the hull $H(d_0)$ in norm (8):

$$\Sigma = [H(d_0)]_{C_b}. \tag{9}$$

The set Σ possesses the following important properties:

1. Σ is compact in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, in particular.
2. Σ is uniformly bounded in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i.e. there exists a positive constant $M_d \geq 1$ such that

$$\|d\|_{C_b} \leq M_d, \quad \forall d \in \Sigma. \tag{10}$$

Moreover, for any $d(t) \in \Sigma$ we have $d(t) \geq m_0, \forall t \in \mathbb{R}$ with m_0 from (7).

3. Any function $d(t) \in \Sigma$ is periodic as a uniform limit of periodic functions, hence.
4. Σ is invariant with respect to the translation operator:

$$T(t)\Sigma = \Sigma.$$

We opt for Σ as the symbol space for non-autonomous problem (1) – (3).

In what follows the notations (\cdot, \cdot) and $\|\cdot\|$ stand for the scalar product and norm in $L_2(\Omega)$ respectively.

For arbitrary $d(t) \in \Sigma$ consider the following non-autonomous equation:

$$u_{tt} - \Delta u + d(t)u_t^3 + \gamma u^3 = g(x), \quad x \in \Omega, t > \tau, \quad (11)$$

supplemented by boundary and initial conditions (2) – (3). The following theorem on the existence of solution to non-autonomous initial-boundary value problem (11), (2) – (3) can be proved the same way it is done for autonomous equation in [9] the non-autonomous term presenting no essential difficulty:

Theorem 3. Assume the parameters and functions of equation (11) satisfy conditions (A1) – (A3). Then problem (11), (2) – (3) has a unique solution $u(x, t)$ for any initial data $(u_{0\tau}, u_{1\tau}) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. The solution $u(x, t)$ is continuous in time: $u(t) \in C([\tau, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([\tau, \infty); L_2(\Omega))$, and $u_{tt} \in L_2([\tau, \infty); H^{-1}(\Omega))$. Moreover, the solution $u(x, t)$ satisfies the following energy identity:

$$E(t) + \int_{\tau}^t d(s) \left(\int_{\Omega} u_t^4 d\Omega \right) ds = E(\tau) + (g, u(t)) - (g, u(\tau)), \quad (12)$$

where $E(t)$ stands for the energy of the problem:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \frac{\gamma}{4} \int_{\Omega} u^4 d\Omega. \quad (13)$$

Corollary 1: Theorem 3 implies that problem (11), (2) – (3) generates a family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ with the symbol space Σ defined by (9). The operators $U_d(t, \tau): H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ act by the formula:

$$U_d(t, \tau)(u_{0\tau}, u_{1\tau}) = (u(t), u_t(t)), \quad \forall (u_{0\tau}, u_{1\tau}) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

where $u(t)$ is the solution to problem (11), (2) – (3) for the initial data $(u_{0\tau}, u_{1\tau})$ and respective functional damping coefficient $d(t) \in \Sigma$. Since the solution to problem (11), (2) – (3) is unique, the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ satisfies the translation identity (5).

Corollary 2: Energy identity (12) coupled with assumption (A1) on the damping coefficient $d(t)$ imply the following estimate for the $L_4([s, t] \times \Omega)$ -norm of the derivative u_t :

$$\int_{\tau}^t \int_{\Omega} u_t^4 d\Omega ds = \frac{1}{m_0} (E(\tau) + (g, u(t)) - (g, u(\tau))). \quad (14)$$

Main Result. The main result of the paper is the following theorem on the existence of a compact uniform attractor of the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ generated by non-autonomous non-linear initial-boundary value problem (11), (2) – (3):

Theorem 4. Let assumptions (A1) – (A3) hold. Then the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ generated by problem (11), (2) – (3) possesses a uniform (with respect to d) attractor A_{Σ} . The attractor A_{Σ} is a compact set in the space $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

To prove Theorem 4 by Theorem 2 we need to show that the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ is uniformly (with respect to d) dissipative and uniformly (with respect to d) asymptotically compact.

Uniform dissipativity. We start with proving that the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ possesses a bounded uniform (with respect to d) absorbing set $B_0 \subset H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Lemma 1. Let assumptions (A1) – (A3) hold. Let B be a bounded set in $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Then for any initial data $(u_{0\tau}, u_{1\tau}) \in B$ the solution $u(x, t)$ to problem (11), (2) – (3) satisfies the following inequality:

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq C_1 e^{-\mu t} + C_2, \quad (15)$$

with $\mu > 0$, $t \geq \tau$, and the positive constants C_1, C_2 depending on the set B , the $L_2(\Omega)$ -norm of the right-hand side $g(x)$ of equation (11), the parameter γ , the constants m_0 from (7) and M_d from (10), and the volume of the domain Ω , but not depending on the particular choice of the parameter $d(t) \in \Sigma$.

From Lemma 1 the existence of a bounded uniform (with respect to d) absorbing set for $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ immediately follows.

Proof (of Lemma 1). To derive (15) we exploit the well-known technique (see [2] for the autonomous case and [4 – 5] for the non-autonomous one).

We first multiply (11) by u_t in $L_2(\Omega)$ to obtain

$$\frac{d}{dt} E(t) + d(t) \int_{\Omega} u_t^4 d\Omega = (g, u_t), \tag{16}$$

where the energy $E(t)$ is defined by (13).

Next we multiply (11) by ηu ($\eta > 0$) in $L_2(\Omega)$ which leads to

$$\eta \frac{d}{dt} (u_t, u) - \eta \|u_t\|^2 + \eta \|\nabla u\|^2 + \eta d(t) \int_{\Omega} u_t^3 u d\Omega + \eta \gamma \int_{\Omega} u^4 d\Omega = \eta (g, u). \tag{17}$$

Summing (16) and (17) up we arrive at the inequality

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \Psi(t) + \mu \Psi(t) - \\ & - \left(\eta + \frac{\mu}{2} \right) \|u_t\|^2 + \left(\eta - \frac{\mu}{2} \right) \|\nabla u\|^2 - \mu \eta (u_t, u) + \gamma \left(\eta - \frac{\mu}{4} \right) \int_{\Omega} u^4 d\Omega + d(t) \int_{\Omega} u_t^4 d\Omega + \eta d(t) \int_{\Omega} u_t^3 u d\Omega = \\ & = (g, u_t) + \eta (g, u), \end{aligned}$$

with $\mu > 0$ and

$$\Psi(t) = E(t) + \eta (u_t, u).$$

Now choosing η and μ sufficiently small (we can opt for $\eta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \gamma, \frac{m_0 \gamma}{8(\gamma + 2M_d^2)}, \frac{\lambda_1}{2} \right\}$ and $\mu = \frac{\eta}{2}$ with m_0 from

(7), M_d from (10), and $(-\lambda_1)$ – the first eigenvalue of the Laplace operator) we obtain the estimate:

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) + \mu \Psi(t) \leq C(m_0, M_d, \|g\|, \gamma, \Omega),$$

wherefrom, by integrating in time over $[\tau, t]$ we get

$$\Psi(t) \leq \Psi(\tau) e^{-\mu t} + C(m_0, M_d, \|g\|, \gamma, \Omega). \tag{18}$$

It is easy to prove that for the above choice of the parameters η and μ we have

$$\Psi(t) \geq \frac{1}{4} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) \quad \text{and} \quad \Psi(\tau) \leq C(\|u_{0\tau}\|, \|u_{1\tau}\|).$$

Then combining these estimates with (18) and keeping in mind that we have the initial data $(u_{0\tau}, u_{1\tau})$ from a bounded set $B \subset H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ we arrive readily at (15). ■

Uniform asymptotic compactness. We proceed now with proving uniform (with respect to d) asymptotic compactness of the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ generated by non-autonomous initial-boundary value problem (11), (2) – (3). We are going to apply Theorem 1 so we need to check if inequality (6) holds.

Let $u(x, t)$ and $v(x, t)$ be two solutions to problem (11), (2) – (3) for the initial data $(u_{0\tau}, u_{1\tau})$ and $(v_{0\tau}, v_{1\tau})$ and different symbols $d_1(t), d_2(t) \in \Sigma$ respectively. Denote $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Then $w(t)$ solves the following problem:

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w + d_1(t) u_t^3 - d_2(t) v_t^3 + \gamma(u^3 - v^3) &= 0, \quad x \in \Omega, t \geq \tau, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \\ w|_{t=\tau} &= w_{0\tau} = u_{0\tau} - v_{0\tau}, \quad w_t|_{t=\tau} = w_{1\tau} = u_{1\tau} - v_{1\tau}. \end{aligned} \tag{19}$$

We multiply (19) by w_t in $L_2(\Omega)$ and integrate in t over $[s, T]$, $T > s \geq \tau$ to get

$$E_w(T) + \int_s^T d_1(t)(u_t^3 - v_t^3, w_t) dt + \int_s^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt + \int_s^T (u^3 - v^3, w_t) dt = E_w(s) \quad (20)$$

with $E_w(t) = \frac{1}{2}(\|w_t\|^2 + \|\nabla w\|^2)$, wherefrom by assumption (A1) on the nonlinear damping we derive that

$$m_0 \int_s^T (u_t^3 - v_t^3, w_t) dt \leq E_w(s) - \int_s^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt - \gamma \int_s^T (u^3 - v^3, w_t) dt, \quad \forall T > s \geq \tau.$$

We now note (see [8]) that for any $\delta > 0$ there exists a constant $C_\delta > 0$ such that

$$|w_t|^2 \leq \delta + C_\delta (u_t^3 - v_t^3, w_t).$$

Combining the two inequalities we deduce the following estimate:

$$\int_s^T \|w_t\|^2 dt \leq (T-s)|\Omega|\delta + \frac{C_\delta}{m_0} E_w(s) - \frac{C_\delta}{m_0} \int_s^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt - \frac{\gamma C_\delta}{m_0} \int_s^T (u^3 - v^3, w_t) dt, \quad \forall T > s \geq \tau. \quad (21)$$

The next step is to multiply (19) by w in $L_2(\Omega)$ and integrate in t over $[\tau, T]$ which leads to the equality

$$\int_\tau^T \|\nabla w\|^2 dt = -(w_t(T), w(T)) + (w_t(\tau), w(\tau)) + \int_\tau^T \|w_t\|^2 dt - \int_\tau^T (d_1(t)u_t^3 - d_2(t)v_t^3, w) dt. \quad (22)$$

Inequalities (21) and (22) imply that

$$\begin{aligned} \int_\tau^T E_w(t) dt &\leq -\frac{1}{2}(w_t(T), w(T)) + \frac{1}{2}(w_t(\tau), w(\tau)) + (T-\tau)|\Omega|\delta + \frac{C_\delta}{m_0} E_w(\tau) - \\ &-\frac{1}{2} \int_\tau^T (d_1(t)u_t^3 - d_2(t)v_t^3, w) dt - \frac{C_\delta}{m_0} \int_\tau^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt - \frac{\gamma C_\delta}{m_0} \int_\tau^T (u^3 - v^3, w_t) dt, \quad T > \tau. \end{aligned} \quad (23)$$

We integrate next (20) in s over $[\tau, T]$ and use (23) to estimate the integral of $E_w(t)$ we get in the right-hand side of the equality. Thus we arrive at the inequality:

$$E_w(T) \leq |\Omega|\delta + \frac{1}{T-\tau} C(\delta; w_t(\tau), w(\tau), w_t(T), w(T)) - \frac{1}{T-\tau} \varphi(u, v; d_1, d_2), \quad (24)$$

where $\delta > 0$ is an arbitrary constant, thus the term $|\Omega|\delta$ can be made arbitrary small,

$$C(w_t(\tau), w(\tau), w_t(T), w(T)) = -\frac{1}{2}(w_t(T), w(T)) + \frac{1}{2}(w_t(\tau), w(\tau)) + \frac{C_\delta}{m_0} E_w(\tau)$$

and

$$\begin{aligned} \varphi(u, v; d_1, d_2) &= \gamma \int_\tau^T \int_s^T (u^3 - v^3, w_t) dt ds + \frac{C_\delta \gamma}{m_0} \int_\tau^T (u^3 - v^3, w_t) dt + \frac{1}{2} \left[\int_\tau^T d_1(t)(u_t^3, w) dt - \int_\tau^T d_2(t)(v_t^3, w) dt \right] + \\ &+ \int_\tau^T \int_s^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt ds + \frac{C_\delta}{m_0} \int_\tau^T (d_1(t) - d_2(t))(v_t^3, w_t) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

We prove now that from (24) follows (6), namely, that the term

$$\frac{1}{T-\tau} C(w_t(\tau), w(\tau), w_t(T), w(T))$$

can be made arbitrary small by choosing T large, and that the function $\varphi(u, v; d_1, d_2)$ defined by (25) is contractive (see Definition 8 above).

Let B be a bounded set in $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Consider a sequence of initial data $\{(u_{0\tau n}, u_{1\tau n})\}_{n=1}^\infty \subset B$ and a sequence of symbols $\{d_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$. Let $u_n(x, t)$ be the solution to problem (11), (2) – (3) for the initial data $(u_{0\tau n}, u_{1\tau n})$ and the dissipation coefficient $d(t) = d_n(t)$. Since all the initial data $(u_{0\tau n}, u_{1\tau n})$ belong to the bounded set B and the family of processes generated by (11), (2) – (3) is uniformly (with respect to d) dissipative, there exist a moment of time $T_0 = T_0(\tau, B) \geq \tau$ and the number $R_0 = R_0(\tau, B) > 0$ depending only on the initial time τ and the bounded set B such that

$$\|u_{\tau n}(t)\| + \|\nabla u_n(t)\| \leq R_0, \quad \forall t \geq T_0.$$

Since the sequence of solutions $\{u_n(x, t)\}$, $t \geq T_0$ is bounded in $H_0^1(\Omega)$ and the sequence of their derivatives

$\{u_{n_t}(x, t)\}$ is bounded in $L_2(\Omega)$ uniformly with respect to $t \in [T_0, T]$ then by the Aubin's lemma and Sobolev's embedding theorem it follows (up to a subsequence) that the sequence $\{u_n(x, t)\}$ is converging in $C(s, T; L_q(\Omega))$, $0 < q < 6$ for any $T \geq s \geq T_0$. Moreover, the sequence of the derivatives $\{u_{n_t}(x, t)\}$ converges weakly in $L_2(s, T; L_2(\Omega))$, $T \geq s \geq T_0$. The symbol space Σ being compact in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the sequence $\{d_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ is also converging (up to a subsequence) in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Let us now consider inequality (24) with $\tau = T_0$, $T > s \geq T_0$, $u = u_k$, $v = u_l$ and $d_1 = d_k$, $d_2 = d_l$, where $u_k = u_k(x, t)$, $u_l = u_l(x, t)$ are two different members of our sequence of solutions, $w = u_k - u_l$, and $d_k = d_k(t)$, $d_l = d_l(t)$ are the respective members of the sequence of symbols. Then $C(w_t(T_0), w(T_0), w_t(T), w(T))$ can be estimated from above by some constant depending only on the time T_0 and the ball B for T large:

$$C(w_t(T_0), w(T_0), w_t(T), w(T)) \leq C_0(T_0, B), \quad \forall T \geq T_0.$$

Hence, by fixing $T \geq T_0$ large enough we can make the first term in the right-hand part of (24) arbitrary small.

We prove next that the function $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ vanishes along $\{u_n(x, t), d_n(t)\}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(u_k, u_l; d_k, d_l) = 0.$$

To this end we show that each term in (25) tends to zero along the sequence. We argue as in [5]. We start with the first term:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{T_0}^T \int_{\Omega} (u_k^3 - u_l^3, w_t) dt ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{T_0}^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{d}{dt} u_k^4 - \frac{d}{dt} u_l^4 \right) - u_k^3 u_{kt} + u_l^3 u_{kt} \right) d\Omega dt ds = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{T - T_0}{4} \int_{\Omega} (u_k^4(T) - u_l^4(T)) d\Omega - \frac{T - T_0}{4} \sup_{s \in [T_0, T]} \int_{\Omega} (u_k^4(s) - u_l^4(s)) d\Omega - \int_{T_0}^T \int_{\Omega} u_k^3 u_{kt} d\Omega dt ds + \int_{T_0}^T \int_{\Omega} u_l^3 u_{kt} d\Omega dt ds \right]. \end{aligned}$$

Passing to the limit first in $k \rightarrow \infty$ and then in $l \rightarrow \infty$ (which is possible due to the fact that the sequence $\{u_n(x, t)\}$ is converging in $C(T_0, T; L_q(\Omega))$, $0 < q < 6$) we note that the first two terms here vanish and the third and fourth ones become equal. Hence,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{T_0}^T \int_{\Omega} (u_k^3 - u_l^3, w_t) dt ds = 0.$$

The third and fourth terms in (25) are identical, so we only consider the third one and prove that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{T_0}^T d_k(t) (u_{kt}^3, u_k - u_l) dt = 0. \tag{26}$$

Indeed, taking into account that the damping coefficients $d_k(t)$ are bounded (see (10)) and applying Hölder's inequality we write that

$$\left| \int_{T_0}^T d_k(t) (u_{kt}^3, u_k - u_l) dt \right| \leq M_d \left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} u_{kt}^4 d\Omega dt \right)^{3/4} \left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} (u_k - u_l)^4 d\Omega dt \right)^{1/4}. \tag{27}$$

By estimate (14) from our previous discussion it follows that the multiple $\left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} u_{kt}^4 d\Omega dt \right)^{3/4}$ in (27) is bounded. Then the

compact embedding of the $H_0^1(\Omega)$ space in $L_4(\Omega)$ implies that the multiple $\left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} (u_k - u_l)^4 d\Omega dt \right)^{1/4}$ vanishes as the

indices tend to the infinity. Hence, (26) holds.

We now deal with the last two terms of (25). They are quite similar so we provide the argument for the last one here. We argue as in (27) again:

$$\left| \int_{T_0}^T (d_k(t) - d_l(t)) (u_{lt}^3, u_{kt} - u_{lt}) dt \right| \leq \sup_{t \in [T_0, T]} |d_k(t) - d_l(t)| \left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} u_{lt}^4 d\Omega dt \right)^{3/4} \left(\int_{T_0}^T \int_{\Omega} |u_{kt} - u_{lt}|^4 d\Omega dt \right)^{1/4} \leq C(g, m_0, B) \sup_{t \in [T_0, T]} |d_k(t) - d_l(t)|.$$

The sequence $\{d_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ being convergent in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ we conclude that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{T_0}^T (d_k(t) - d_l(t)) (u_{lt}^3, u_{kt} - u_{lt}) dt = 0.$$

Hence, the function $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot)$ is contractive and the family of processes $\{U_d(t, \tau)\}$, $d \in \Sigma$ generated by non-autonomous initial-boundary value problem (11), (2) – (3) is uniformly (with respect to d) asymptotically compact.

Conclusions. In the paper the initial-boundary value problem for a wave equation with a non-linear damping term depending explicitly on time is considered. The long-time behavior of the solutions to this problem is studied in term of the attractor of the family of processes generated by the problem. It is proved that the family of processes is uniformly (with respect to the time-dependent damping coefficient) dissipative and asymptotically compact, thus possesses a unique uniform attractor which is a compact set in its phase space.

Acknowledgements. The work was partially funded by the grant of Volkswagen Foundation.

Bibliography

1. Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. – New-York : Springer-Verlag, 1997. – 650 p.
2. Chueshov I., Lasiecka I. Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping // *Mem. AMS*. – 2008. – no. 912. – 183 pp.
3. Chueshov I. *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*. – Switzerland : Springer International Publishing, 2015. – 389 p.
4. Chepyzhov V., Vishik M. Attractors for Equations of Mathematical Physics // *AMS. Colloquium Publications*. – 2002. – vol. 49. – 363 p. – doi: 10.1090/coll/049.
5. Chunyou Sun, Daomun Cao, Jinqiao Duan. Uniform Attractors for Nonautonomous Wave Equations with Nonlinear Damping // *SIAM J. Applied Dynamical Systems*. – 2007. – vol. 6. – no. 2. – pp. 293 – 318.
6. Lu Yang, Xuan Wang. Existence of Attractors for the Non-Autonomous Berger Equation with Nonlinear Damping // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2017. – vol. 2017. – no. 278. – pp. 1 – 14.
7. Moise. I., Rosa R., Wang X. Attractors for Non-Compact Non-Autonomous Systems via Energy Equations // *Discrete Contin. Dyn. Syst.* – 2004. – vol. 10. – pp. 473 – 496.
8. Khanmamedov A. Kh. Global Attractors for von Karman Equations with Nonlinear Interior Dissipation // *J. Math. Anal. Appl.* – 2006. – vol. 318. – pp. 92 – 101.
9. Лионс Ж. – Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М. : Мир, 1972. – 587 с.

References (transliterated)

1. Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. New-York, Springer-Verlag Publ., 1997. 650 p.
2. Chueshov I., Lasiecka I. Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping. *Mem. AMS*. 2008, no. 912, 183 pp.
3. Chueshov I. *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*. Switzerland, Springer International Publishing, 2015. 389 p.
4. Chepyzhov V., Vishik M. Attractors for Equations of Mathematical Physics. *AMS. Colloquium Publications*. 2002, vol. 49, 363 p., doi: 10.1090/coll/049.
5. Chunyou Sun, Daomun Cao, Jinqiao Duan. Uniform Attractors for Nonautonomous Wave Equations with Nonlinear Damping. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*. 2007, vol. 6, no. 2, pp. 293–318.
6. Lu Yang, Xuan Wang. Existence of Attractors for the Non-Autonomous Berger Equation with Nonlinear Damping. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2017, vol. 2017, no. 278, pp. 1–14.
7. Moise. I., Rosa R., Wang X. Attractors for Non-Compact Non-Autonomous Systems via Energy Equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2004, vol. 10, pp. 473–496.
8. Khanmamedov A. Kh. Global Attractors for von Karman Equations with Nonlinear Interior Dissipation. *J. Math. Anal. Appl.* 2006, vol. 318, pp. 92–101.
9. Lions J. – L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires]. Moscow, Mir Publ., 1972. 578 p.

Received (ноступила) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiivna) – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.

Т. О. НАЗИРОВА, О. Б. КОСТЕНКО

ІНСТРУМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ У МЕДИЧНІЙ ІНФОРМАЦІЙНІЙ СИСТЕМІ

Забезпечення високого рівня здоров'я нації є пріоритетним завданням держави. У статті детально аналізується демографічна ситуація населення України на сьогоднішній день. Запропоновано можливі шляхи вирішення проблем сучасного стану системи охорони здоров'я в Україні, за допомогою оптимізації методів управління галуззю на регіональному рівні з використання інформаційних технологій. Активне впровадження інформаційних технологій в процес надання медичних послуг, інтеграція у світовий інформаційний простір є важливим компонентом реформування вітчизняної галузі охорони здоров'я. Це дозволить за порівняно нетривалий час суттєво покращити ефективність роботи закладів охорони здоров'я, поліпшити якість лікування та діагностики.

Ключові слова: медична інформаційна система, електронна карта пацієнта, охорона здоров'я, регулярні медичні огляди, статистичні данні, реформування галузі охорони здоров'я.

Т. А. НАЗИРОВА, А. Б. КОСТЕНКО

ІНСТРУМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В МЕДИЦИНСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Обеспечение высокого уровня здоровья нации является приоритетной задачей государства. В статье подробно анализируется демографическая ситуация населения Украины на сегодняшний день. Предложены возможные пути решения проблем современного состояния системы здравоохранения в Украине, путем оптимизации методов управления отраслью на региональном уровне с использованием информационных технологий. Активное внедрение информационных технологий в процесс предоставления медицинских услуг, интеграция в мировое информационное пространство является важным компонентом реформирования отечественного здравоохранения. Это позволит за сравнительно непродолжительное время существенно улучшить эффективность работы учреждений здравоохранения, улучшить качество лечения и диагностики.

Ключевые слова: медицинская информационная система, электронная карта пациента, здравоохранение, регулярные медицинские осмотры, статистические данные, реформирования здравоохранения.

T. O. NAZIROVA, O. B. KOSTENKO

INSTRUMENTAL ANALYSIS OF DEMOGRAPHIC INDICATORS IN THE MEDICAL INFORMATION SYSTEM

In the paper the up-to-date demographic situation in Ukraine is analyzed in details. The possible ways of solving the problems of the current state of the health care system in Ukraine are proposed, such as optimization of the industry's management methods at the regional level with the use of information technologies. The active use of information technology in the process of providing medical services, integration into the world information space is an important component of the reform of the domestic health care industry. This will allow a significant improvement in the efficiency of health care facilities in the relatively short time, improve the quality of treatment and diagnosis. The aim is to foster further quality of services in this area. Modern medicine rush away from verbal description towards formalized processes, mathematical models and information technologies. These adaptive learning algorithms can handle diverse types of medical data and integrate them into categorized outputs. Diagnostic and prognostic tasks cannot be solved without creation of appropriate informative environment. It enables settling the problems of data and knowledge representation, seeking dependencies, creating decision rules.

Key words: medical information system, patient electronic card, health care, regular medical examinations, statistical data, health care reform.

Вступ. Застосування інформаційних технологій в різних сферах життя нації все більше охоплює державні медичні заклади. Проблема інформатизації медичних установ досить різнопланова, вона включає не тільки різновиди електронних реєстратур та електронного запису на прийом, а й вже багато профільні медичні інформаційні системи. Основними цілями функціонування глобальної інформаційної системи в медицині є наступні: створення єдиного інформаційного простору; відстеження та керування якістю медичної допомоги; підвищення прозорості діяльності медичних установ та ефективності управлінських рішень; скорочення термінів обстеження, а як наслідок, покращення процесу надання медичних послуг. Постійна потреба у різноманітних статистичних даних, наприклад, оперативній і правдивій інформації про рівень епідемічного порогу, результати регіональної діагностики, лікування і багатьох інших даних – це тільки малий перелік тих проблем, розв'язання яких, завдяки медичній інформаційній системі (МІС), стає значно ефективніше і швидше.

Міністерство охорони здоров'я України (МОЗУ) підписало меморандум із представниками держустанов, громадських організацій та ІТ-розробниками програмних продуктів про співпрацю у питанні побудови прозорої та ефективної електронної системи охорони здоров'я (E-health). Медичні заклади повинні покроково реалізувати локальні ІТ-рішення на рівні автоматизації окремих ланок, з подальшою перспективою розвитку їх до МІС, та підключенням до електронної системи охорони здоров'я, як нової МІС.

У світовій практиці проектування Інформаційних систем в галузі охорони здоров'я відзначаються високі ризики помилок в процесах прийняття рішень в цій сфері [1 – 3]. Що не тільки не дозволяє знехтувати процесом моделювання предметної області, а й виводить цей етап на найважливіший рівень.

Таким чином, актуальність теми визначається потребою в розробці оптимальних варіантів управління ме-

дичною допомогою на основі системного моніторингу та багаторівневого моделювання, виходячи з соціально-економічних особливостей регіону та стану здоров'я населення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Велика кількість як закордонних так і вітчизняних публікацій свідчить про те, що за останні роки питанню розроблення МІС приділялось багато уваги. Актуальними дослідженнями регіонального управління охороною громадського здоров'я, механізмів державного управління, реформування цієї галузі займалися *Мельник К. В., Авраменко Н. В., Рожкова І. В., Жаліло Л. І., Карамішев Д. В., Кризина Н. П., Білінська М. М., Мартинюк О. В., Солоненко І. М., Солоненко Н. Д., Радий Я. Ф.* та інші українські науковці [4 – 8].

Так публікація Мельник К. В. [4] присвячена дослідженню методу інформаційного скринінгу медичної документації, який враховує неоднозначність представлення медичної інформації та дозволяє підвищити якість інформації і ефективність прийняття рішень для раннього діагностування захворювань. В роботі автора Авраменко Н. В. [5] запропоновано концептуальну модель організаційно-економічного механізму державного управління ресурсним потенціалом системи охорони здоров'я на рівні регіону. Також наукові роботи ведуться в плані застосування сучасних методів обробки медичних даних штучним інтелектом при використанні нейронних мереж.

Наукова робота Рожкової І. В. [6] спрямована на розвиток механізмів державного управління охороною здоров'я на регіональному рівні. Проаналізовано впровадження реформ у сфері охорони здоров'я в Україні. Показано недоліки і протиріччя реформ, зокрема у сфері управління процесом проведення реформ та в новій моделі первинної медико-санітарної допомоги. Наведено алгоритм і матричні зв'язки оптимальної реструктуризації управління, які досліджено в інших галузях.

Напрямом даної статті є аналіз досліджень демографічної ситуації на тлі реформування управління охороною здоров'я і визначення питань, які потребують подальшого розвитку шляхом використання інформаційних технологій, та впровадження функціонального модуля профілактичних медичних оглядів.

Постановка задачі. Метою даної роботи є аналіз і оцінка рівня медичної допомоги на основі системного моніторингу та багаторівневого моделювання, виходячи з соціально-економічних особливостей регіону та стану здоров'я населення.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішити наступні задачі:

1. Визначити основні недоліки традиційних технологій розробки медичних інформаційних систем, що знижують ефективність їх застосування.
2. Розробити комплексну медичну інформаційну систему, що відповідає сучасним вимогам функціонування багатопрофільного закладу охорони здоров'я.
3. Визначити та класифікувати керовані і некеровані фактори, що впливають на ефективність роботи комплексної медичної інформаційної системи.
4. Розробити метод побудови структури баз даних, тобто медичної інформаційної системи з урахуванням специфіки предметної області та виявлених недоліків традиційних технологій їх розробки.

Розробити математичну модель інформаційної мережі закладів охорони здоров'я з урахуванням встановлених вимог і виявлених керованих факторів. Визначити показники ефективності впровадження інформаційної системи, на підставі яких можна адекватно керувати роботою медичної інформаційної системи.

Матеріали та методи дослідження. Під системою охорони здоров'я розуміється єдине ціле складових її елементів в їх взаємозв'язку і взаємозумовленості. Існуючі в світі системи охорони здоров'я умовно поділяються на чотири типи. Три з них іменні (імена творців базових моделей): німецького канцлера *Отто фон Бісмарка*, радянського наркома *Миколи Семашка*, відомого англійського економіста барона *Вільяма Беверіджа*. Четверта модель – *ринкова*, американська.

З урахуванням нинішнього розвитку і потреб суспільства, а також на підставі змін соціально-економічних і політичних реалій нашої країни, необхідність реформування системи охорони здоров'я стає очевидною.

Для створення сучасної системи охорони здоров'я, для поліпшення ефективності і якості медичної допомоги населенню, необхідне активне використання сучасних інформаційних технологій; в розвинених країнах, які пройшли аналогічний шлях, – це було одним із самих основних напрямків реформування даної галузі.

Складні сучасні дослідження в медицині немислимі без застосування обчислювальної техніки. До таких досліджень можна віднести комп'ютерну томографію, томографію з використанням явища ядерно-магнітного резонансу, ультрасонографію, дослідження із застосуванням ізотопів. Кількість інформації, яка виходить за таких дослідження настільки величезна, що без комп'ютера людина була би нездатна її сприйняти і обробити.

ВООЗ розглядає здоров'я як основний ресурс суспільства і держави, право на здоров'я для громадян має

забезпечувати держава і воно повинно бути зафіксовано в кодексах всіх держав.

Рівень охорони здоров'я є одним з ключових показників соціального розвитку країни, оскільки він відображає ступінь уваги, що приділяється державою і суспільством здоров'ю громадян.

При великій різноманітності національних і історичних особливостей, що мають місце в різних країнах світу, існує чотири основних, стійких моделей охорони здоров'я, що принципово відрізняються одна від одної ступенем втручання держави, формою власності виробників медичних послуг, ступенем охоплення населення програмами державної підтримки, джерелами фінансування. Перерахуємо ці моделі.

Організація національних систем охорони здоров'я на недержавній (приватній) основі.

До таких моделей належать системи без суттєвої державної підтримки малозабезпечених категорій громадян, засновані на простих законах споживчого ринку. Обсяг медичної діяльності формується шляхом саморегулювання платоспроможного попиту і пропозиції.

Організація національних систем охорони здоров'я на недержавній основі з державним регулюванням програм обов'язкового медичного страхування.

Основною характеристикою такої моделі є те, що держава (з метою забезпечення гарантованої медичної допомоги більшості населення) за допомогою закону зобов'язує всіх роботодавців і самих громадян в обов'язковому порядку відраховувати частину доходу на медичну страховку, а виробників медичних послуг забезпечувати населення медичною допомогою в рамках державних нормативів за посередництва страхових організацій.

Організація національних систем охорони здоров'я на основі загального державного медико-соціального страхування.

Характеристикою такої моделі є те, що держава безпосередньо координує всю вертикаль взаємовідносин і забезпечує виробництво медичних послуг всьому населенню. Система державного страхування є найбільш економічною і раціональною моделлю в організації медичного обслуговування населення за тими напрямками, які бере на себе держава (6 – 9 % від ВВП). Фактично це модель ХХІ століття для країн, де прагнуть обмежити витрати, не втративши в ефективності і якості.

Організація національних систем охорони здоров'я на основі монопольної державної моделі.

Особливістю таких систем було монопольне побудова структури лікувальної мережі, стандартизація медичної допомоги без можливостей надання додаткових платних послуг і комфортних умов стаціонарного лікування, відсутність конкурентного середовища і економічних стимулів в роботі медичного персоналу.

На сьогоднішній день економіка України є ринковою, а охорона здоров'я все ще перебуває в радянському правовому полі. Конституція України декларує безкоштовну медичну допомогу, а бюджетних коштів виділяється менше 30 % від необхідної потреби. За так звану безкоштовну медичну допомогу населення країни сплатило в 2014 році більше 20 млрд. гривень (при виділеному бюджеті в 9,8 млрд. гривень); це свідчить про тіньові витрати всередині системи, а так само про її неефективність в рамках держави в Україні, на законодавчому рівні, в числі перших кроків реформації прийнятий перехід до *сімейної медицини* – однієї з форм організації первинної медичної допомоги, яка виступає як альтернатива діючій в даний час системи первинної спеціалізованої служби, яка передбачає можливість первинного звернення пацієнта до будь-якого фахівця.

Даний проект спрямований на аналіз сучасних методів надання та обробки даних, на оптимізацію процесів планування та підготовки консультацій пацієнтів, лікарями сімейної медицини, в тому числі з активним використанням сучасних методик телемедицини. Необхідно створити альтернативну модель проведення консультацій, на етапі первинного звернення пацієнтів, без використання паперових носіїв на всіх рівнях (реєстри пацієнтів, статистична інформація про захворюваності, смертності, інвалідності, діяльності лікувально-профілактичних установ (ЛПУ), штаті, потреби в медикаментах, діагностичних послуг і т. д.), що дозволить збільшити ефективне функціонування існуючої системи охорони здоров'я, причому у відношенні не тільки лікування, але і профілактики захворювань.

Первинна медико-санітарна допомога є основним системоутворюючим фактором майбутнього розвитку охорони здоров'я в державі. Тому необхідна оптимізація саме на цій першій лінії прийому пацієнтів, на етапі регулярних медичних оглядів. В результаті чого буде можливо підняти престиж поліклінік, знизити консультативні звернення пацієнтів до висококваліфікованих фахівців, стаціонарних поліклінік, і почати реформування всієї застарілої структури охорони здоров'я України, без конституційних змін законодавства.

Система Hospital Management Information System. Пропонується концептуальна модель інформаційного моніторингу охорони здоров'я, яка об'єднає всі ресурси об'єктів охорони здоров'я в єдину інтегровану систему – «Hospital Management Information System» [9 – 11]. Система спрямована на оптимізацію інформаційного потоку даних про пацієнтів і доступності цієї інформації для лікарів та інших медичних працівників. Система буде здатна забезпечити внутрішню і зовнішню комунікацію між постачальниками медичних послуг, не залежно від регіону проживання пацієнта або регіону надання медичної допомоги. Одним з ключових модулів системи буде

модуль «Регулярних медичних оглядів» (РМО), який дозволить поліпшити загальний рівень здоров'я нації.

Україна стрімко втрачає свої позиції на демографічному полі. Аналіз демографічної ситуації регіону і країни в цілому дозволяє виявляти позитивні і негативні тенденції в області зміни чисельності населення, а так само чинники, що впливають на ці зміни.

При розробці інформаційної структури модуля РМО було проведено статистичний аналіз демографічних показників, які є одними з найважливіших оцінок ефективності системи охорони здоров'я в цілому. Чисельність населення – це якісний індикатор, зростання або падіння якого значно впливає на економічний і соціальний статус держави. Життєздатність держави залежить від стійкого відтворення людських поколінь, від збереження частки працездатного населення країни.

Основою для даного статистичного аналізу послужили методологічні матеріали і масиви даних, отримані з відкритих джерел, а саме з сайтів державного статистичного управління України [12], Всесвітньої організації охорони здоров'я [13 – 14] і Департаменту з економічних і соціальних питань ООН [15 – 16].

Для аналізу використовувалися два набори даних. Перший набір містить часові ряди кількісної динаміки за двома чинниками: народжуваності та смертності. Основні характеристики набору: часове охоплення з 1990 по 2014 рік; географічне охоплення: Україна (в зв'язку з початком антитерористичної операції на південному сході країни в 2014 році, не були охоплені Донецька, Луганська область і республіка Крим). Другий набір даних представляє собою статичний масив даних за 2014 рік з тривалості життя чоловіків і жінок з розбивкою по областям. Географічне охоплення другого масиву даних являє собою 22 області України, виключаючи тимчасово окуповані території.

Статистичний аналіз проводився за допомогою обчислення описових статистик [15]. Метою описової статистики (Descriptive statistics) є узагальнення первинних результатів, отриманих в результаті спостережень [16]. До складу описової статистики входять такі характеристики: середнє; стандартна похибка; медіана; мода; стандартне відхилення; дисперсія вибірки; ексцес; асиметричність; інтервал; мінімум; максимум; сума; рахунок. Основні описові статистики діляться на дві групи – міри центральної тенденції і міри мінливості.

Мірами центральної тенденції (МЦТ) називають чисельні показники типових властивостей емпіричних даних. Існує порівняно невелика кількість таких показників-мір і, в першу чергу: мода, медіана, середнє арифметичне. Кожна конкретна МЦТ має свої особливості, що роблять її цінною для характеристики об'єкта дослідження в певних умовах [14].

Вибір застосовуваної міри центральної тенденції залежить від двох чинників: використовуваних рівнів вимірювання і величини дисперсії в сукупності спостережень.

Модальне значення розраховується за формулою:

$$M_0 = x_0 + h \frac{f_{m_0} - f_{m_0-1}}{(f_{m_0} - f_{m_0-1}) + (f_{m_0} - f_{m_0+1})},$$

де x_0 та h – нижня межа та ширина модального інтервалу, f_{m_0} , f_{m_0-1} , f_{m_0+1} – частоти (частки) відповідно модального, передмодального та післямодального інтервалів.

Медіаною називають варіанту, що ділить варіаційний ряд на дві частини з рівною кількістю варіант, розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2},$$

де x_k – значення варіаційного ряду; x_{k+1} – наступне значення варіаційного ряду.

Квантиль — одна з числових характеристик випадкових величин. Квантілі відсікають в межах ряду певну частину його членів. Це таке значення ознаки q , яке ділить діапазон його зміни на дві частини так, щоб відношення числа елементів вибірки, що мають значення ознаки, менше q , до числа елементів, що мають значення ознаки, більше q , дорівнювало заздалегідь заданій величині. Серед усіх можливих квантилів зазвичай виділяють певні сімейства. Квантілі одного сімейства ділять діапазон зміни ознаки на задане число рівнонаповнених частин. Сімейство визначається тим, скільки частин виходить. Найбільш популярними квантилями є *квартілі* (Quartiles), що розбивають діапазон зміни ознаки на 4 рівнонаповнених частини; *децилі* – на 10 рівнонаповнених частин; *перцентилі* – на 100 частин.

Перший квантиль (Q1) – це точка на шкалі вимірюваних значень, нижче (лівіше) якої розташовуються 25 % вимірюваних значень. Другий квантиль (Q2) – це точка, нижче якої розташовуються 50 % вимірюваних значень. Другий квантиль також називається медіаною. Третій квантиль (Q3) – це точка на шкалі вимірюваних значень, нижче якої розташовуються 75 % значень. α – квантилем (або квантилем рівня α) P^x розподілу називається число $x_\alpha \in R$ таке, що відповідає формулі:

$$P^x([-\infty, x_a]) \equiv P(X \leq x_a) = \alpha.$$

Використання мір центральної тенденції у якості характеристик випадкової вибірки є умовою необхідною, але недостатньою. Показники описової статистики, крім МЦТ, включають ще одну групу показників – міри мінливості (ММ).

Міри мінливості – це статистичні показники варіації ознаки щодо середнього значення, ступеня індивідуальних відхилень від центральної тенденції розподілу; дозволяють судити про достовірність і однорідності отриманої емпірично сукупності даних, суттєвості подібностей і відмінностей в розподілі і порівнюваних групах розподілів, а також про точність проведених вимірів. Найбільш використовувані в дослідженнях показники ММ: середнє відхилення, дисперсія, стандартне відхилення.

У стандартних випадках основною мірою центральної тенденції є середнє значення, основною мірою мінливості – стандартне відхилення.

Для більш точного аналізу демографічної ситуації використовувалися найпростіші інструменти описових статистик, міри центральних тенденцій такі як медіана, середнє, мінімум, максимум, перший та третій квартилі. Так в табл. 1 отримані результати розрахунків мір центральних тенденцій для народжуваності / смертності.

Таблиця 1 – Розрахунки для побудови діаграм

Міри центральної тенденції – Чоловіки		Міри центральної тенденції – Жінки	
Мода		Мода	
Средне	66	Средне	76
Медіана	66	Медіана	76
Міри мінливості – народжуваність		Міри мінливості – смертність	
Розмах	5	Розмах	3
Межквартильний розмах	2	Межквартильний розмах	2
Середнє відхилення	1	Середнє відхилення	1
Дисперсія	2,006577066	Дисперсія	1,049548967
Стандартне відхилення	1	Стандартне відхилення	1
5 number summary – народжуваність		5 number summary – смертність	
Мінімум	64	Мінімум	75
Перший квартиль	64,72	Перший квартиль	75,3025
Медіана	66	Медіана	76
Третій квартиль	66,79	Третій квартиль	77
Максимум	69	Максимум	78
Допоміжні значення		Допоміжні значення	
BOX1	64,72	BOX1	75,3025
BOX2	1	BOX2	1
BOX3	1	BOX3	1
Whiskey top	2	Whiskey top	1
Whiskey buttom	1	Whiskey top	1

В якості інструменту візуалізації отриманих даних використовувались елементи *інфографіки* [15, 16]. В даному статистичному дослідженні з існуючих 5 типів візуалізаційних категорій були задіяні наступні: дані часового ряду, розподіл ймовірностей, карти, ієрархія та мережа. Використовувався розподіл ймовірностей, що відображає тенденції, базовані на тому, як розподілені числа. Найбільш поширені елементи розподілу ймовірностей: гістограми та «box-and-whisker» діаграми, які передають статистичні особливості, такі як середнє значення, медіана та викид. При дослідженні використовувалися діаграми box-and-whiskers, побудовані на одних осях для більш наочного та коректного порівняльного аналізу (рис. 1).

При аналізі отриманих в результаті проведених розрахунків описових статистик, і графіків box-and-whiskers, побудованих за часовими рядами народжуваності і смертності, отримано, що максимум народжуваності в Україні жодного разу не перевищив мінімум смертності. При цьому середня тривалість життя в Україні становить 71,29 року (для чоловіків – 66,25 років, для жінок – 76,37 року) проти 77,29 років тривалості життя в Європейському регіоні. З 1990 по 2014 рр. населення нашої країни скоротилось на 6,31 млн., що в процентному співвідношенні значить зменшення на 12,23 % або в 1,14 рази. За прогнозами Департаменту з економічних і со-

ціальних питань ООН чисельність населення України до 2050 року складе 35 117 122 [16]. Все це свідчить про високий рівень демографічної кризи в країні, а так само про неефективність системи профілактики і запобігання захворювань.

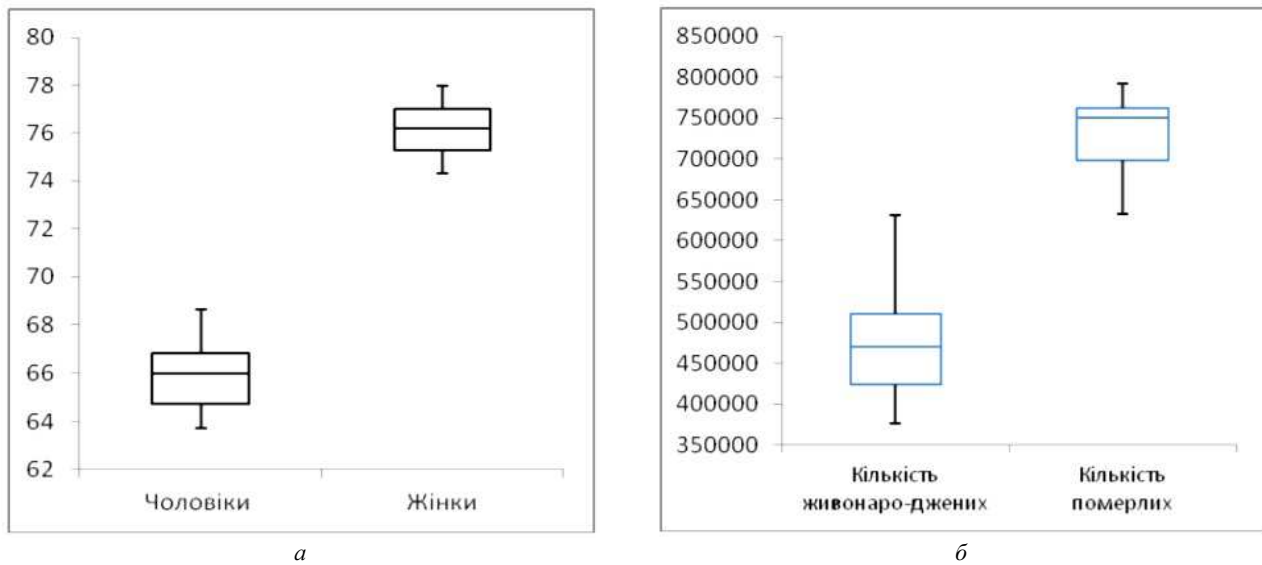


Рис. 1 – Порівняльні діаграми: а – тривалості життя чоловіки / жінки; б – смертності / народжуваності.

Для східноєвропейських країн характерне явище щорічного перевищення кількості померлих над кількістю народжених, що спостерігається в результаті падіння народжуваності і зростання смертності. Це, в результаті, свідчить про старіння нації. Процес скорочення народжуваності – загальний для індустріальних суспільств і, як правило, супроводжується збільшенням тривалості життя. Але даний факт не підтверджується розрахунками середньої тривалості життя для України. Це наочно видно при розрахунках середньої тривалості життя чоловічого і жіночого населення.

Існуюча медична система не дозволяє стежити за якістю послуг, що надаються, за тим, які саме послуги надаються в закладах охорони здоров'я по всій країні. Таким чином, актуальність дослідження обумовлена відсутністю до теперішнього часу, єдиної методології планування медичної допомоги, дотримання принципів доказової медицини, системи стандартів у сфері охорони здоров'я, підходів до аналізу забезпечення і використання медичного обладнання, об'єктів охорони здоров'я та оцінки ефективності результатів інвестицій. Для поліпшення ситуації, що склалася, є необхідним перехід від системи фінансування за койко-місця, до плати за конкретні послуги, з прозорою системою моніторингу та планування послуг.

Реформування системи охорони здоров'я в напрямку профілактичних превентивних заходів, що запобігають основні захворювання, які є ключовими факторами смертності населення, є визначальним.

При проведенні досліджень виділяють два рівня профілактичного впливу:

1. Первинна профілактика (health promotion) – процес надання окремим людям і громадам можливостей підвищити контроль над факторами, що визначають здоров'я (ВООЗ, 1986, 1999; Оттавська хартія зміцнення здоров'я).

2. Вторинна профілактика (secondary prevention) – комплекс медичних заходів, спрямованих на раннє виявлення і попередження загострень і ускладнень захворювань, а також комплекс заходів щодо запобігання зниження працездатності, в тому числі інвалідизації і передчасної смертності.

Розроблений в складі системи «Hospital Management Information System» інформаційний модуль «Регулярні медичні огляди» призначений для вирішення завдань, пов'язаних з вторинною профілактикою.

Результати роботи. Впровадження модуля «Регулярні медичні огляди» дозволить підвищити такі соціальні показники як:

- збільшення тривалості життя громадян, внаслідок своєчасних превентивних заходів і своєчасної медичної допомоги;
- збільшення чисельності населення, внаслідок зниження рівня смертності;
- зниження демографічної кризи країни і поліпшення економічної ситуації, за рахунок збільшення числа працездатного населення;
- поліпшення якості життя населення країни, збільшення очікуваної про-тривалості життя населення;
- виявлення захворювань на ранніх стадіях розвитку і запобігання їх розвитку, за рахунок своєчасно прове-

деного лікування;

- формування здорового способу життя населення;
- створення умов, можливостей і мотивації населення для ведення здорового способу життя; своєчасне інформування про необхідність проходження медичного огляду;
- створення сприятливих умов для комфортного обстеження.

Впровадження модуля РМО дозволить оптимізувати роботу при підготовці і при розробці медичних даних пацієнтів за рахунок:

- динамічної актуалізації даних про пацієнтів;
- формування карти проходження фахівців;
- формування Особистих санітарних медичних книжок, для переліку пацієнтів, встановлених законодавством;
- централізованого збору даних;
- можливості систематизації показників.

Очікуваний економічний ефект може бути отриманий в результаті:

- моніторингу термінів проходження медоглядів, повідомлення роботодавців про закінчення періоду медоглядів на їхньому підприємстві, з метою оптимальної організації даного процесу;
- оптимального розподілу ресурсів медичних працівників для обслуговування регулярних медоглядів;
- зменшення часу, витраченого на проходження медогляду населенням регіону;
- зменшення фінансових витрат населення на лікування захворювань внаслідок своєчасної медичної допомоги;
- моніторингу результатів медичних обстежень і подальшої можливості збільшення ефективності управління системою охорони здоров'я в цілому.

Перспективи подальших досліджень. На основі отриманих результатів доведено нагальність інформатизації медичної галузі. Подальша робота над удосконаленням стандартів розробки програмного забезпечення збільшить можливості ефективного надання послуг населенню, що в свою чергу забезпечить підвищення здоров'я нації в цілому. Також перспективною є робота над впровадженням засобів обробки медичних даних за допомогою штучних нейронних мереж.

Висновки. У роботі опрацьовано нормативно-правові аспекти, що регулюють медичні огляди населення України, висвітлені сучасні тенденції демографічного спаду та запропоновано методи обробки інформації системою «Hospital Management Information System» [9 – 10], які дозволять удосконалити сервіс надання медичної допомоги та поліпшити загальний стан здоров'я нації, а також вдосконалити управління інформаційними потоками всередині окремо взятого медичного закладу, запровадити моніторинг стану здоров'я населення та факторів, які на нього впливають, на різних рівнях управління регіональною охороною здоров'я. Враховуючи, що кожний регіон України має свої особливості, які пов'язані як із соціально-економічним станом регіону, географічними особливостями, типом розселення населення, розвитком інфраструктури регіону, так і з медико-демографічною ситуацією та станом організації медичної допомоги населенню на всіх рівнях її надання, тож заходи з реформування системи надання медичної допомоги населенню при загальній стратегії мають свої регіональні особливості. Тому логічним продовженням розгортання ідей, викладених у статті, є необхідність подальшого вивчення організаційної структури органів управління охороною здоров'я з метою розробки та запровадження оптимальної інформаційної моделі проведення медичних оглядів, що дасть можливість запропонувати нові підходи з організації первинного медичного огляду населення у регіоні.

Список літератури

1. Перелік законів України // Верховна рада України. – Режим доступу : <http://zakon3.rada.gov.ua/laws>. – Дата звертання : 20 січня 2018.
2. Міністерство охорони здоров'я України. – Режим доступу : <http://www.moz.gov.ua/ua/portal/>. – Дата звертання : 21 січня 2018.
3. Всесвітня організація охорони здоров'я – ВОЗ. – Режим доступу : <http://www.who.int/ru/>. – Дата звертання : 20 січня 2018.
4. Мельник К. В. Моделювання процесу інтелектуальної обробки медичних даних // Системи обробки інформації. – 2017. – № 4 (150). – С. 237 – 244.
5. Авраменко Н. В. Європейський досвід управління охороною здоров'я // Державне управління та місцеве самоврядування : тези X Міжнародного наукового конгресу. – Х. : Вид-во ХарРТ НАДУ, 2010. – С. 320 – 322.
6. Рожкова І., Жаліло Л., Мартинюк О. Методологічні засади управління реформуванням системи охорони здоров'я в Україні : аспекти впровадження первинної медико-санітарної допомоги // Вісник НАДУ. – 2012. – № 4. – С. 114 – 122.
7. Пак С. Я. Внутрішньо організаційна структура державного управління охороною здоров'я на регіональному та місцевому рівнях в Україні : сучасний стан та перспективи // Державне управління : теорія та практика. – 2011. – № 1. – С. 1 – 7. – Режим доступу : <http://www.academy.gov.ua/ej/ej13/txts/Pak.pdf>. – Дата звертання : 21 січня 2018.
8. Дрождин В. В., Зинченко Р. Е. Системный подход к концептуальному моделированию предметной области в самоорганизующейся информационной системе // Программные продукты и системы. – 2009. – № 4. – С. 73 – 79.
9. Назірова Т. О., Костенко О. Б., Манакова Н. О. Декомпозиція функціонального модулю інформаційної системи в галузі охорони здоров'я // Системи обробки інформації. – Харків : ХНУПС ім. І. Кожедуба, 2017. – Вип. 4 (150). – С. 230 – 236.

10. Назирова Т. А., Костенко О. Б. Актуальность информационных систем управления здравоохранением на региональном уровне // Украина-България-Европейский союз : Свременно състояние и перспективи. Сборник докладов от междунар. науч. конф. – Варна : Издательство «Наука и экономика», 2016. – С. 213 – 216.
11. Назирова Т. А., Костенко О. Б. Огляд моделей розвитку eHealth та існуючих медичних інформаційних систем. Проблеми створення єдиного медико-інформаційного простору // Науковий вісник НЛТУ України, 2017 : збірник науково-технічних праць. – Львів, 2017. – Т. 27. – № 10. – С. 151 – 156. – DOI: <https://doi.org/10.15421/402709>.
12. Державна служба статистики України. Статистичні дані. – Режим доступу : <https://ukrstat.org>. – Дата звертання : 22 січня 2018.
13. Кодекс Законів про працю від 10.12.1971 р. № 322-III (статті 169 і 171). Редакція 75 – 95 ВР від 28.02.1995.
14. Реанімаційний пакет реформ. Реформа системи охорони здоров'я. – Режим доступу : <http://rpr.org.ua/groups-rpr/13reforma-systemy-ohorony-zdorovja/>. – Дата звертання : 22 січня 2018.
15. European health for all database/HFA-DB. – Режим доступу : <http://data.euro.who.int/hfad/>. – Дата звертання : 21 січня 2018.
16. World Population Prospects : The 2015 Revision // United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division, 2015. – Режим доступу : <http://esa.un.org/unpd/wpp/>. – Дата звертання : 21 січня 2018.

References (transliterated)

1. Perelik zakoniv Ukrainy. Verkhovna rada Ukrainy [List of laws of Ukraine. The Supreme Counsel of Ukraine]. Available at : <http://zakon3.rada.gov.ua/laws> (accessed 20.01.2018).
2. Ministerstvo okhorony zdorov'ya Ukrainy [The Ministry of Health of Ukraine]. Available at : <http://www.moz.gov.ua/ua/portal/> (accessed 21.01.2018).
3. Vsesvitnya organizatsiya okhorony zdorov'ya – VOZ [World Health Organization – WHO]. Available at : <http://www.who.int/ru/> (accessed 20.01.2018).
4. Mel'nyk K. V. Modelyuvannya protsesu intelektual'noyi obrobky medychnykh danykh [Modeling the process of intellectual processing of medical data]. *Systemy obrobky informatsiyi* [Information processing systems]. 2017, no. 4 (150), pp. 237–244.
5. Avramenko N. V. Yevropeys'kyi dosvid upravlinnya okhoronoyu zdorov'ya [European experience in health care managing]. *Derzhavne upravlinnya ta mistseve samovryaduvannya : tezy X Mizhnarodnogo naukovoogo kongresu* [Public administration and local government: abstracts of the X International Science Congress]. Kharkiv, Vydavnytstvo KharRT NADU Publ., 2010, pp. 320–322.
6. Rozhkova I., Zhalilo L., Martynyuk O. Metodologichni zasady upravlinnya reformuvannyam systemy okhorony zdorov'ya v Ukraini : aspekty vprovadzhennya pervynnoyi medyko-sanitarnoyi dopomogy [Methodological bases for managing reform of Ukrainian health care system: aspects of introducing primary medical and sanitary care]. *Visnyk NADU* [Bulletin of the National Academy for Public Administration]. 2012, no. 4, pp. 114–122.
7. Pak S. Ya. Vnutrishn'o organizatsiyna struktura derzhavnogo upravlinnya okhoronoyu zdorov'ya na regional'nomu ta mistsevomu rinvnyakh v Ukraini : suchasny stan ta perspektyvy [Internal organizational structure of health care public administration at regional and local levels: current state and prospects]. *Derzhavne upravlinnya : teoriya ta praktyka* [Public administration: theory and practice]. 2011, no. 1, pp. 1–7. Available at : <http://www.academy.gov.ua/ej/ej13/txts/Pak.pdf> (accessed 21.01.2018).
8. Drozhdin V. V., Zinchenko R. E. Sistemnyy podkhod k kontseptual'nomu modelirovaniyu predmetnoy oblasti v samoorganizuyushheysya informatsionnoy sisteme [System approach to conceptual modeling of domain knowledge in a self-organizing information system]. *Programmye produkty i sistemy* [Software and systems]. 2009, no. 4, pp. 73–79.
9. Nazirova T. O., Kostenko O. B., Manakova N. O. Dekompozitsiya funktsional'nogo modulyu informatsiynoi systemy v galuzi okhorony zdorov'ya [Decomposition of information system function module in health care industry]. *Systemy obrobky informatsiyi* [Information processing systems]. Kharkiv, KhNUPS im. I. Kozheduba Publ., 2017. vol. 4 (150), pp. 230–236.
10. Nazirova T. O., Kostenko O. B. Aktual'nost' informatsionnykh system upravleniya zdavookhraneniem na regional'nomu urovne [Relevance of health care managing information systems at regional level]. *Ukrayna-B'lgariya-Evropeyski soyuz : Av'vremennno s'toyanie I perspektivy. Sbornik dokladov ot mezhdunar. nauch. konf.* [Ukraine-Bulgaria-European Union: current state and prospects. Collection of reports of the international conference]. Varna, Izdatel'stvo "Nauka I ekonomika" Publ., 2016, pp. 213–216.
11. Nazirova T. O., Kostenko O. B. Oglyad modeley rozvytku eHealth ta isnuyuchykh madychnykh informatsiynykh system. Problemy stvorennya edynogo medyko-informatsiynoho prostoru [Overview of models of development of eHealth and existing medical information systems. Problems of creating unified medical and information space]. *Naukovy visnyk NLTU Ukrainy*, 2017 : zbirnyk nauково-tekhnichnykh prats' [Scientific bulletin of the Ukrainian National Forestry University, 2017: collection of scientific and technical works]. Lviv, 2017. vol. 27, no. 10, pp. 151–156. – DOI : 10.15421/402709.
12. Derzhavna sluzhba statystyky Ukrainy. Statystichni dani [State Statistic Service of Ukraine. Statistical data]. Available at : <https://ukrstat.org> (accessed 22.01.2018).
13. Kodeks Zakoniv pro pratsyu vid 10.12.1971 r. No. 322-III (statti 169 I 171). Redaktsiya 75 – 95 VR vid 28.02.1995. [Labor Code, 10.12.1971, № 322-III (clauses 169 and 171). Edition 75 – 95 SC, 28.02.1995].
14. Reanimatsiyuu paket reform. Reforma systemy okhorony zdorov'ya [Reanimation reform package. Reform of health care system]. Available at : <http://rpr.org.ua/groups-rpr/13reforma-systemy-ohorony-zdorovja/> (accessed 22.01.2018).
15. European health for all database/HFA-DB. Available at : <http://data.euro.who.int/hfad/> (accessed 21.01.2018).
16. World Population Prospects : The 2015 Revision. United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division, 2015. Available at : <http://esa.un.org/unpd/wpp/> (accessed 21.01.2018).

Надійшла (received) 18. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Назірова Тетяна Олександрівна (Назірова Татьяна Александровна, Nazirova Tatyana Oleksandrivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: (093) 830-36-05; e-mail: ks42@ukr.net.

Костенко Олександр Борисович (Костенко Александр Борисович, Kostenko Oleksandr Borysovych) – кандидат фізико-математичних наук, асистент, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: (067) 564-07-12; e-mail: freestar@ukr.net.

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

КОЛИВАННЯ СТЕПЕНЕВО-НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ

Розглянуто коливання осцилятора зі степеневою характеристикою пружності при дії миттєво прикладеної сталої сили (ступінчастого імпульсу) та сили обмеженої тривалості дії (прямокутного імпульсу). Одержано аналітичні розв'язки задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння другого порядку. Вони виражені через спеціальні періодичні Атеб-функції. Запропоновано апроксимації цих спеціальних функцій, які ґрунтуються на тригонометричній інтерполяції. Показано, що коефіцієнт динамічності осцилятора залежить від показника нелінійності і попадає в інтервал $(1; e)$, де e – основа натурального логарифма. Він більше двох при м'якій характеристиці пружності і менший двох – у випадку жорсткої характеристики. Встановлено тривалості дії імпульсу, при яких амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора мають екстремальні значення. Ці тривалості залежать не тільки від маси і жорсткості пружного осцилятора, а також від величини миттєво прикладеної сили. Наведено приклади розрахунків, які ілюструють можливості викладеної теорії.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, степенева характеристика пружності, імпульсне навантаження, коефіцієнт динамічності, періодичні Атеб-функції та їх апроксимація.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

КОЛЕБАНИЯ СТЕПЕННО-НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

Рассмотрены колебания осциллятора со степенной характеристикой упругости при действии мгновенно приложенной постоянной силы (ступенчатого импульса) и силы ограниченной продолжительности действия (прямоугольного импульса). Получены аналитические решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Они выражены через специальные периодические Атеб-функции. Предложены аппроксимации этих специальных функций, которые основаны на тригонометрической интерполяции. Показано, что коэффициент динамичности осциллятора зависит от показателя нелинейности и попадает в интервал $(1; e)$, где e – основание натурального логарифма. Он больше двух при мягкой характеристике упругости и меньше двух – в случае жёсткой характеристики. Установлены продолжительности действия импульса, при которых амплитуды свободных колебаний разгруженного осциллятора имеют экстремальные значения. Эти продолжительности зависят не только от массы и жёсткости упругого осциллятора, а также и от величины мгновенно приложенной силы. Приведены примеры расчётов, которые иллюстрируют возможности изложенной теории.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, степенная характеристика упругости, импульсное нагружение, коэффициент динамичности, периодические Атеб-функции.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

VIBRATIONS OF POWER NONLINEAR OSCILLATOR CAUSED BY FORCE PULSE

Vibrations of an oscillator with power elasticity characteristic under the influence of an instantaneously applied constant force (step-function signal) and a force of limited duration (rectangular pulse) are studied. The analytical solutions of the Cauchy problem for the nonlinear second order differential equation are obtained. The solutions are expressed in terms of special periodic Ateb-functions. The approximations of these special functions based on trigonometric interpolation are presented. The oscillator dynamicity factor is shown to depend on the power of the nonlinearity and belong to the interval $(1; e)$, e being the base of the natural logarithm. The factor is greater than two for a mild elasticity characteristic and is less than two for a rigid one. The pulse durations causing extreme values of the amplitudes of free vibrations of an unloaded oscillator are determined. These durations depend on the value of the instantaneously applied force as well as on the mass and rigidity of the elastic oscillator. The computation examples illustrating the theory proposed are presented.

Key words: nonlinear oscillator, power elasticity characteristic, pulse load, dynamicity factor, periodic Ateb-functions.

Вступ. Вивчення нелінійних коливань механічних систем відносяться до актуальних проблем. Незважаючи на порівняно тривалу історію і значні досягнення в цій галузі механіки [1], дослідженню нелінійних коливань приділяється і тепер значна увага. Не зупиняючись на численних публікаціях за цією тематикою у вигляді наукових статей, відзначимо лише монографічні видання останніх років українських вчених [2 – 5], де є відповідні літературні огляди та аналіз сучасного стану проблеми. Із зарубіжних публікацій виділимо огляд [6], у якому йдеться про роботи з нелінійних коливань механічних систем змінної маси. Рух осциляторів змінної маси, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. Мотивом сучасних досліджень нелінійних коливань служить їх роль в техніці та технологіях, адже вони можуть спричинити руйнування елементів конструкцій або спричинити передчасну втрату їх працездатності. Вивчення закономірностей руху нелінійних осциляторів потрібне також для розробки ефективних способів віброзахисту операторів машин, способів підресорювання транспортних засобів та інше.

На сьогодні найбільш повно вивчено вільні та збудені періодичні нелінійні коливання і значно менше коливання, спричинені силовим імпульсним та ударним навантаженнями. Виходячи з цього, тут поставлена відповідна мета роботи.

Метою статті є виведення та апробація формул для розрахунку руху степенево-нелінійного осцилятора при дії силового імпульсного навантаження. Ставиться завдання, спираючись на аналітичні розв'язки, дослідити основні закономірності руху, спричиненого ступінчастим і прямокутним імпульсами.

Засобом досягнення поставленої мети вибрано метод припасовування розв'язків диференціального рівняння руху з використанням *періодичних Атеб-функцій*.

Постановка задач та їх розв'язки.

1. Рух осцилятора при дії миттєво прикладеної сили. Переміщення осцилятора $x(t)$ у часі t описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign}(x) = PH(t). \quad (1)$$

Тут m – рухома зосереджена маса; c – характеристика жорсткості; ν – показник нелінійності ($\nu > 0$); P – величина прикладеної сили; $H(t)$ – *одична функція Хевісайда*.

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Перетворенням $\dot{x} = \vartheta$, $\ddot{x} = \vartheta \frac{d\vartheta}{dx}$ рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{P}{m} H(t) - \frac{c}{m} |x|^\nu \operatorname{sign}(x). \quad (3)$$

Оскільки, при $t > 0$: $H(t) = 1$; $\operatorname{sign}(x) = 1$, то проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\vartheta = \pm \sqrt{2 \left(\frac{P}{m} - \frac{cx^\nu}{m(\nu+1)} \right)} x = \pm \sqrt{\frac{2c}{m(\nu+1)}} \cdot \sqrt{x(a^\nu - x^\nu)}. \quad (4)$$

Тут $a = (1+\nu)^{1/\nu} \cdot (P/c)^{1/\nu}$ – максимальне динамічне відхилення системи від положення $x = 0$.

Переміщення осцилятора $x_{\text{ст}}$, при статичному навантаженні осцилятора силою P , дорівнює

$$x_{\text{ст}} = (P/c)^{1/\nu}.$$

Тому коефіцієнт динамічності K_d становить

$$K_d = a/x_{\text{ст}} = (1+\nu)^{1/\nu}. \quad (5)$$

Якщо $\nu = 1$, то $K_d = 2$, що традиційно враховують в динаміці лінійної системи.

У випадку $\nu > 1$ отримуємо $K_d < 2$, тобто для жорсткої пружної характеристики коефіцієнт динамічності менший двох. Граничний перехід в (5) дає:

$$K_d = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (1+\nu)^{1/\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\nu} \ln(1+\nu)} = e^0 = 1.$$

Отже, найменше значення коефіцієнта динамічності дорівнює одиниці.

У випадку $0 \leq \nu < 1$ маємо $K_d > 2$, тобто для м'якої пружної характеристики коефіцієнт динамічності більший двох. Граничне значення K_d становить

$$K_d = \lim_{\nu \rightarrow 0} (1+\nu)^{1/\nu} = e \approx 2,718.$$

Таким чином, коефіцієнт динамічності осцилятора зі степеневою характеристикою пружності задовольняє нерівності:

$$1 \leq K_d \leq e,$$

де e – основа натурального логарифма.

Подальше інтегрування виразу (4), з урахуванням (2), при $\nu > 0$, дає залежність

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^\nu - y^\nu)}} = \sqrt{\frac{2c}{m(1+\nu)}} t,$$

якій заміною $y = au^2$, $dy = 2audu$ надаємо вигляд:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^{2\nu}}} = \omega t. \quad (6)$$

$$\text{Тут } \omega = a^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{c}{2m(1+\nu)}}.$$

Із (6) впливає формула для розрахунку переміщень осцилятора:

$$\frac{x}{a} = Sa^2(2\nu - 1, 1, \nu\omega t), \quad (7)$$

де $Sa^2(2\nu - 1, 1, \nu\omega t)$ – *періодичний Атеб-синус*. Раніше таку функцію використовували в [4, 9 – 11].

Формула (7) узагальнює відомі залежності, наприклад, при $\nu = 1$ вона набуває вигляд:

$$\frac{x}{a} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{t}{2} \right),$$

що є відомим результатом в теорії лінійних осциляторів.

У загальному випадку при розрахунках динамічних переміщень осцилятора за формулою (7) доводиться обчислювати значення Атеб-синуса. Для цього в роботі [12] розроблена відповідна апроксимація. Як доповнення до неї, тут пропонуємо додатково два наближення періодичної Атеб-функції, де вона подається і вигляді суми тригонометричних синусів з певними коефіцієнтами.

Першим варіантом такого наближення є:

$$Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2I}\omega t\right) + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{I}\omega t\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{I}\omega t\right) + a_4 \sin\left(\frac{4\pi}{I}\omega t\right), \quad (8)$$

в якому:

$$a_1 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu\frac{I}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}; \quad I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{2\nu}}}; \quad a_2 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu\frac{I}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{8} - a_1 \sin\frac{\pi}{4};$$

$$a_4 = Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu\frac{I}{8}\right) - \sin\frac{\pi}{16} - a_1 \sin\frac{\pi}{8} - a_2 \sin\frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Формула (8) стає точною при $\nu = 1$, коли Атеб-синус співпадає з тригонометричним синусом.

Інтеграл I виражається через *гама-функцію* [13, с. 296]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu} \frac{\Gamma(1/2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2\nu}\right)}. \quad (10)$$

Тому, для обчислення I можна застосувати таблицю гама-функції, надруковану в [14, с. 52]. При $\nu = 1$ $I = \pi/2$. Для $\nu > 1$ $I < \pi/2$, а для $0 < \nu < 1$ $I > \pi/2$.

Значимо, що $Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) = 0$, коли $\omega t = 0$, і $Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) = 1$, коли $\omega t = I$. Це узгоджується з апроксимацією (8).

Другий варіант тригонометричної інтерполяції ґрунтується на рівномірній сітці вузлів. Якщо 2π поділено на $2n + 1$ інтервал, де $n = 1, 2, 3, \dots$, то:

$$Sa(2\nu - 1, 1, \nu\omega t) \approx \frac{4}{2n + 1} \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2I}\omega t\right), \quad (11)$$

причому:

$$b_k = \sum_{j=1}^n f_j \sin\left(j \frac{2\pi k}{2n + 1}\right); \quad f_j - \text{значення Атеб-синуса в вузлових точках,}$$

$$f_j = \begin{cases} Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \cdot j \frac{4I}{2n + 1}\right), & \text{при } j \leq n/2; \\ Sa\left(2\nu - 1, 1, \nu \cdot (2n - 2j + 1) \frac{2I}{2n + 1}\right), & \text{при } j > n/2, \end{cases} \quad (12)$$

де I , як і раніше, подається виразом (10).

Щоб отримати інформацію про фактичні похибки формул (8) і (11), розглянемо приклади розрахунків.

Приклад 1. Припустимо, що $\nu = 0,5$. Для такого ν , при $\omega t \in [0; 2]$, Атеб-синус виражається через елементарні функції, а саме:

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot \omega t\right) = 1 - \left(1 - \frac{\omega t}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Оскільки $I = 2$, то інтерполяція (8) приймає вигляд:

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot \omega t\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\omega t\right) + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega t\right) + a_2 \sin(\pi\omega t) + a_4 \sin(2\pi\omega t), \quad (14)$$

причому:

$$a_1 = 0,75 - \sin \frac{\pi}{4} \approx 4,2893 \cdot 10^{-2}; \quad a_2 = 0,4375 - \sin \frac{\pi}{8} - a_1 \sin \frac{\pi}{4} \approx 2,4487 \cdot 10^{-2};$$

$$a_4 = 0,234375 - \sin \frac{\pi}{16} - a_1 \sin \frac{\pi}{8} - a_2 \sin \frac{\pi}{4} \approx 5,5556 \cdot 10^{-3}.$$

Результати обчислень значень Атеб-синуса для різних ωt записано в табл. 1. Точні значення Sa знайдено за формулою (13), а наближені значення $\tilde{S}a$ – за формулою (14).

Для аналізу похибок інтерполяції (11) прийняли $n = 6$, тобто розбили 2π на 13 інтервалів. Тоді, згідно з (11):

$$Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \omega t\right) \approx \frac{4}{13} \sum_{k=1}^6 b_k \sin\left(\frac{k\pi}{4} \omega t\right), \quad (15)$$

причому:

$$b_k = \sum_{j=1}^6 f_j \sin\left(j \cdot \frac{2\pi k}{13}\right), \quad (16)$$

$$f_j = \begin{cases} Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot j \cdot \frac{8}{13}\right), & \text{при } j \leq 3; \\ Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \cdot (13-2j) \cdot \frac{4}{13}\right), & \text{при } j > 3. \end{cases} \quad (17)$$

Враховуючи (13) і (17), маємо:

$$f_1 \approx 0,5207; \quad f_2 \approx 0,8521; \quad f_3 \approx 0,9941; \quad f_4 \approx 0,9467; \quad f_5 \approx 0,7101; \quad f_6 \approx 0,2840.$$

Для цих значень Атеб-функції в вузлових точках формула (16) дає:

$$b_1 \approx 3,3541; \quad b_2 \approx -1,5236 \cdot 10^{-3}; \quad b_3 \approx 0,1241; \quad b_4 \approx -4,0333 \cdot 10^{-3}; \quad b_5 \approx 2,6514 \cdot 10^{-2}; \quad b_6 \approx -9,2619 \cdot 10^{-3}.$$

Наближені Sa_* , обчислені за формулою (15), теж записано до табл. 1

Таблиця 1 – Точні та апроксимовані значення $Sa\left(0, 1, \frac{1}{2} \omega t\right)$

ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$	ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$
0,0	0,00	0,00	0,00	1,2	8,40	8,41	8,41
0,2	1,90	1,89	1,81	1,4	9,09	9,06	9,08
0,4	3,60	3,61	3,54	1,6	9,60	9,50	9,57
0,6	5,10	5,09	5,10	1,8	9,90	9,81	9,89
0,8	6,40	6,38	6,43	2,0	10,00	10,00	10,02
1,0	7,50	7,50	7,53				

Як бачимо, абсолютні похибки обох наближень не суттєві. Апроксимація (14) дає більш точні результати при $\omega t \leq 1$, а апроксимація (15) – більш точні при $\omega t \rightarrow 1$.

Приклад 2. Збільшимо в десять разів значення параметра ν , що задавали в попередньому прикладі, тобто прийемо $\nu = 5$, і використаємо таблицю значень $Sa(5, 1, 3\eta)$, надруковану в [15]. У цьому випадку:

$$I \approx 1,21433; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{2}\right) \approx 0,605; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{4}\right) \approx 0,303; \quad Sa\left(5, 1, 3 \cdot \frac{I}{8}\right) \approx 0,1518.$$

Тому, після обчислення значень a_1, a_2, a_4 за формулами (9), отримуємо наступне наближення:

$$Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) \approx \sin(1,2935\omega t) - 0,1021\sin(2,5871\omega t) - 0,0075 \cdot \sin(5,1742\omega t) + 0,0011\sin(10,3484\omega t).$$

Провівши інтерполяцію табличних даних [15], згідно з (12), одержуємо:

$$f_1 \approx 0,3734; \quad f_2 \approx 0,7382; \quad f_3 \approx 0,9864; \quad f_4 \approx 0,8913; \quad f_5 \approx 0,5591; \quad f_6 \approx 0,1865.$$

Далі за формулою (16) знаходимо:

$$b_1 \approx 3,0090; \quad b_2 \approx 8,5638 \cdot 10^{-4}; \quad b_3 \approx -0,2054; \quad b_4 \approx -1,2715 \cdot 10^{-3}; \quad b_5 \approx 2,7835 \cdot 10^{-2}; \quad b_6 \approx 4,5078 \cdot 10^{-3}.$$

В результаті інтерполяцію Атеб-синуса подаємо виразом:

$$Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) \approx \frac{4}{13} \sum_{k=1}^6 b_k \sin\left(\frac{k\pi\omega t}{2,42866}\right). \quad (19)$$

Запозичені з [15] умовно точні та наближені значення Атеб-синуса вказано в табл. 2.

Тут $\tilde{S}a$ – значення Атеб-функції, обчислені за формулою (18), а Sa_* – результати, обчислені за формулою (19).

Таблиця 2 – Точні та апроксимовані значення $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t)$

ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$	ωt	$10Sa$	$10\tilde{S}a$	$10Sa_*$
0,1	1,00	1,00	1,02	0,7	6,94	6,92	6,93
0,2	2,00	2,00	2,02	0,8	7,85	7,77	7,86
0,3	3,00	2,99	3,01	0,9	8,67	8,52	8,70
0,4	4,00	3,99	3,99	1,0	9,35	9,14	9,37
0,5	4,99	4,99	4,97	1,1	9,81	9,62	9,81
0,6	5,98	5,98	5,96	I	10,00	10,00	9,98

Обидва варіанти інтерполяції дають задовільну точність, що спрощує обчислення задіяної спеціальної функції в інженерних розрахунках, бо для інтерполяції потрібно лише декілька її значень.

Результати обчислень x/a за формулою (7) у вигляді графіків для трьох показників ν зображено на рис. 1.

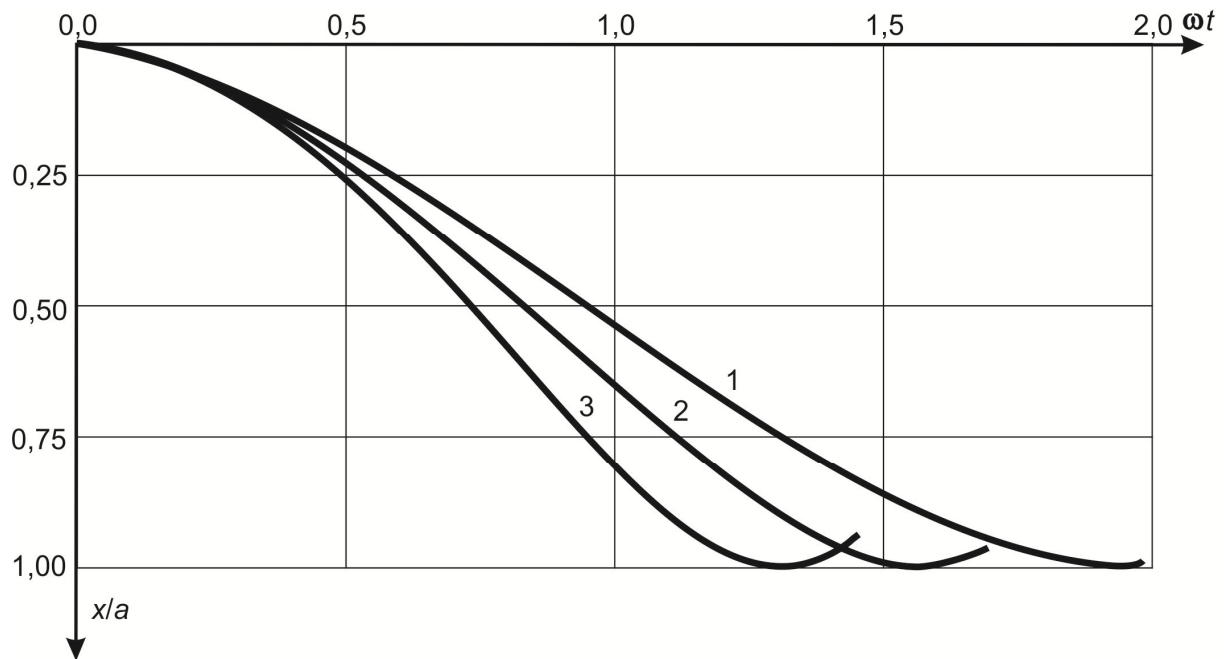


Рис. 1 – Переміщення осцилятора при різних ν : 1 – $\nu = 0,5$; 2 – $\nu = 1$; 3 – $\nu = 2$.

При збільшенні ν скорочується час, коли досягається максимальне відхилення осцилятора від початкового положення $x = 0$.

2. Рух осцилятора, спричинений імпульсом обмеженої тривалості. Його опишемо диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign}(x) = P[H(t) - H(t - t_1)], \quad (20)$$

де t_1 – тривалість імпульсу.

При цьому зберігаємо початкові умови (2). Тому на проміжку $t \in [0; t_1]$ має чинність розв'язок (7). У відповідності з цим розв'язком, в момент миттєвого розвантаження осцилятора його переміщення становить

$$x_1 = x(t_1) = aSa^2(2\nu - 1, 1, \nu \cdot \omega t_1). \quad (21)$$

Рух в цей момент часу відбувається зі швидкістю

$$\vartheta_1 = \vartheta(t_1) = \pm 2a\omega \sqrt{\frac{x_1}{a} \left[1 - \left(\frac{x_1}{a} \right)^\nu \right]}.$$

Знак «плюс» маємо при $\omega t_1 < I$ і «мінус» – при $I < \omega t_1 < 2I$. Тому розглянемо спочатку рух осцилятора, коли $\vartheta_1 > 0$, а потім, – коли $\vartheta < 0$.

2.1. При $t > t_1$ рівняння (20) стає однорідним, і його інтегруємо при початкових умовах $x(t_1) = x_1$; $\vartheta(t_1) = \vartheta_1 > 0$. Розвантажений осцилятор продовжує віддалятися від положення $x = 0$. Перший інтеграл рівнян-

ня руху має вигляд:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = a_* \omega_* \sqrt{1 - (x/a_*)^{\nu+1}}, \quad (22)$$

де $a_* = \lambda a$; $\lambda = \left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}$; $\omega_* = 2\lambda^{\frac{\nu-1}{2}} \omega$.

Подальше інтегрування виразу (22) дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1) \quad (23)$$

або

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1). \quad (24)$$

Якщо ввести позначення

$$I_* = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}}, \quad (25)$$

то, замість (24), одержимо

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \xi = I_* - \omega_* (t - t_1). \quad (26)$$

Це співвідношення дає можливість знайти час $t = t_2$, коли вперше зупиниться осцилятор, відхилившись від вихідного положення на $x = a_*$. Із (26) випливає, що:

$$I_* - \omega_* (t_2 - t_1) = 0 \Rightarrow \omega t_2 = \frac{I_*}{\frac{\nu-1}{2}} + \omega t_1. \quad (27)$$

У відповідності з (26), рух осцилятора на проміжку $t \in [t_1, t_2)$ описується виразом:

$$\frac{x}{a} = \lambda Ca \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \xi \right), \quad (28)$$

де $Ca \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \xi \right)$ – періодичний Атеб-косинус [4, 9 – 11].

Далі, при $t > t_2$, осцилятор буде здійснювати вільні коливання відносно положення $x = 0$ з амплітудою $x = a_*$, причому вона буде найбільша ($a_* = a$), коли $\omega t_1 = I$.

2.2. Якщо $I < \omega t_1 < 2I$, то у розвантаженого осцилятора $\vartheta < 0$, бо він повертається у вихідне положення. Тому, замість (23), отримуємо

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{\nu+1}}} = \omega_* (t - t_1)$$

або, враховуючи, що $x \leq x_1$,

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} - I_* = \omega_* (t - t_1).$$

Звідки випливає, що

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}} = \eta = I_* + \omega_* (t - t_1). \quad (29)$$

Час $t = t_2$, коли осцилятор повертається в положення $x = 0$, можна знайти за формулою

$$\omega t_2 = \frac{\gamma - I_*}{\frac{\nu-1}{2}} + \omega t_1, \quad (30)$$

де $\gamma = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{\nu+1}}}$. Цей інтеграл виражається через гама-функцію, бо в [13, с. 296]:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/(\nu+1))}{\nu+1 \Gamma\left(\frac{3+\nu}{2\nu+2}\right)}, \quad (31)$$

тобто γ можна обчислювати за допомогою таблиці гама-функції, що надрукована в [14, с. 53].

У відповідності з (29), на проміжку часу $t \in (t_1, t_2)$ рух розвантаженого осцилятора описується виразом

$$\frac{x}{a} = \lambda Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\eta\right). \quad (32)$$

Далі, при $t > t_2$ проходять вільні коливання, спричинені в положенні $x = 0$ початковою швидкістю:

$$v_0 = -a_* \omega_* = -a^{\nu/2} \sqrt{\frac{2x_1 c}{m(\nu+1)}}.$$

Якщо розвантаження осцилятора відбулося так, що $x_1 = 0$, то $v_0 = 0$, і вільних коливань не буде. Після розвантаження осцилятор буде знаходитись в стані спокою. Такий стан за формулою (21) настає, коли $\omega t_1 = 2I$.

Щоб проводити розрахунки переміщень розвантаженого осцилятора за формулами (28) і (32), потрібне значення інтеграла I_* . Тому окремо зупинимось на цьому питанні.

Для обчислення інтеграла (25) можна застосувати різні способи. Розглянемо деякі з них, виключаючи найпростіші випадки $\nu = 0$ і $\nu = 1$, коли I_* виражається через елементарні функції.

Перш за все звернемо увагу на залежність, що випливає з (25):

$$\frac{x_1}{a_*} = Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}I_*\right).$$

Тут $Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}I_*\right)$ – періодичний Атеб-косинус. За наявності таблиці цієї спеціальної функції, методом лінійної інтерполяції не складно наближено знайти аргумент I_* , якому відповідає задане x_1/a_* . Але реалізація цього способу ускладнюється відсутністю відповідних таблиць.

Для деяких цілих ν , наприклад, $\nu = 2$ або $\nu = 3$, інтеграл (25) виражається через затабульований неповний еліптичний інтеграл першого роду. Тоді для обчислення I_* можна скористатися відомими таблицями.

Для інших ν треба прийняти до уваги, що здебільшого відношення x_1/a_* близьке до одиниці. Виходячи з цього, замінимо u на $1 - \varepsilon$ і при $\nu > 1,6$ використаємо часткову суму ряду:

$$1 - u^{\nu+1} = 1 - (1 - \varepsilon)^{\nu+1} \approx (\nu+1)\varepsilon \left[1 - \frac{\nu}{2}\varepsilon + \frac{\nu(\nu-1)}{6}\varepsilon^2 \right].$$

Тоді:

$$I_* \approx \frac{1}{\sqrt{\nu+1}} \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \left(1 - \frac{\nu}{2}\varepsilon + \frac{\nu(\nu-1)}{6}\varepsilon^2 \right)}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\nu(\nu^2-1)}} \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \left[(\varepsilon - \alpha)^2 + \beta^2 \right]}}. \quad (33)$$

$$\text{Тут } \alpha = \frac{3}{2(\nu-1)}; \quad \beta^2 = \frac{3}{\nu-1} \left(\frac{2}{\nu} - \frac{3}{4(\nu-1)} \right).$$

Інтеграл в (33) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду, а саме [16, с. 242]:

$$I_* \approx \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\nu(\nu^2-1)}p} F\left(2\arctg \sqrt{\frac{1-x_1/a_*}{p}}, \sqrt{\frac{p+\alpha}{2p}} \right), \quad (34)$$

де $p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Отже, при $\nu > 1,6$, значення I_* можна знайти за допомогою таблиць $F(\varphi, k)$, що надруковані в [14, с. 101].

У випадку довільних $\nu > 0$ наближене обчислення I_* найбільш просто проводити з використанням формули Сімпсона. У цей спосіб:

$$I_* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\nu(\nu+1)}} \arcsin \sqrt{\frac{\nu h}{2}} + \delta(\nu, h), \quad (35)$$

причому

$$\delta(\nu, h) = \int_0^h \left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^{\nu+1}}} - \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\varepsilon\left(1-\frac{\nu}{2}\varepsilon\right)}} \right) d\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{h}{6} \left[\frac{4}{\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{2}\right)^{\nu+1}}} - \frac{4}{\sqrt{(\nu+1)\frac{h}{2}\left(1-\frac{\nu h}{4}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-h)^{\nu+1}}} - \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)h\left(1-\frac{\nu h}{2}\right)}} \right],$$

де $h = 1 - x_1 / a_*$; $\nu h < 2$.

З метою перевірки точності формули (35), проведемо обчислення трьома способами значення I_* при $\nu = 5$, $h = 0,3$. Згідно з [13, с. 133], маємо:

$$I_* = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ), \quad \varphi = \arccos \frac{(\sqrt{3}+1)(x_1/a_*)^2 - 1}{(\sqrt{3}-1)(x_1/a_*)^2 + 1} \approx 75,565^\circ.$$

З таблиці [14, с. 101] знаходимо: $F(\varphi, \sin 15^\circ) \approx 1,3375$; $I_* \approx 0,508$. Розрахунок за формулою (35) дає:

$$I_* \approx 0,541 - 0,0346 \approx 0,506,$$

що не суттєво відрізняється від попереднього результату.

Якщо користуватися формулою (34), то

$$\alpha = 0,375, \quad \beta^2 \approx 0,1594, \quad p \approx 0,5477, \quad 2\arctg(\sqrt{h/p}) \approx 73,01^\circ, \quad \sqrt{(p+\alpha)/(2p)} \approx \sin 66,606^\circ.$$

Подвійною інтерполяцією в [14, с. 103] одержуємо $F(73,01^\circ, \sin 66,606^\circ) \approx 1,6677$. Підстановка цього значення еліптичного інтеграла в (34) дає $I_* \approx 0,504$.

Як бачимо, три способи розрахунку дають близькі результати, причому формула (35) не потребує використання таблиць еліптичного інтеграла. Розглянемо приклади, пов'язані з аналізом руху осцилятора після його розвантаження.

Приклад 3. Обчислимо амплітуду вільних коливань і час, коли буде перша зупинка осцилятора з кубічною характеристикою пружності ($\nu = 3$), якщо його розвантаження відбувається при $\omega t_1 = 0,7$.

Для такої тривалості імпульсу, користуючись табл. 2 за формулою (21) одержуємо $x_1/a \approx 0,482$. Далі знаходимо $\lambda = \sqrt[4]{0,482} \approx 0,833$. Отже, амплітуда вільних коливань $a_* \approx 0,833a$, де a – максимальне відхилення осцилятора від положення $x = 0$, коли $\omega t_1 = I \approx 1,21433$. Щоб знайти час першої зупинки осцилятора t_2 за формулою (27), обчислимо значення I_* . Підставивши $\nu = 3$, $h = 1 - x_1/(\lambda a) \approx 0,421$ в формулу (35), отримуємо: $I_* \approx 0,724$. Для $\nu = 3$ обчислення I_* можна проводити і за допомогою таблиць *неповного еліптичного інтеграла першого роду*, бо [14, с. 96]:

$$I_* = \int_{0,579}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\varphi, \sin 45^\circ), \quad \varphi = \arccos 0,579 \approx 54,62^\circ.$$

Провівши лінійну інтерполяцію табличних даних в [14, с. 102], одержуємо:

$$F(\varphi, \sin 45^\circ) \approx 1,0257, \quad I_* \approx 0,725,$$

що близьке до попереднього результату. Підставивши знайдене I_* в формулу (27) одержуємо $\omega t_2 = 1,135$ або $t_2/t_1 = 1,621$.

Приклад 4. Обчислимо час, коли осцилятор з кубічною характеристикою пружності повернеться у вихідне положення $x = 0$ при тривалості прямокутного імпульсу $\omega t_1 = 1,529 > I$.

Щоб знайти x_1/a , приймемо до уваги, що $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t) = Sa(5, 1, 3 \cdot (2I - \omega t))$. Тому $Sa(5, 1, 3 \cdot \omega t_1) \approx 0,867$ і за формулою (21) $x_1/a \approx 0,752$. Для цього відношення: $\lambda = \sqrt[4]{0,752} \approx 0,931$, $x_1/a_* \approx x_1/(a\lambda) \approx 0,808$, $h \approx 0,192$. Тоді, згідно з (35) $I_* \approx 0,460$. Оскільки в [14, с. 52]: $\Gamma(1/4) \approx 3,625610$, $\Gamma(3/4) \approx 1,225417$, то у відповідності з (31), $\gamma \approx 1,31103$. Підстановка цих значень інтегралів в (30) дає $\omega t_2 \approx 1,986 < 2I$. Розвантажений

осцилятор повертається в положення $x = 0$ раніше, ніж у випадку дії на нього сталої сили P .

При розрахунках переміщень розвантаженого осцилятора за формулами (28) і (32) потрібно обчислювати значення Ateb-косинуса. Для цього можна використати запропоновані апроксимації Ateb-синуса, якщо прийняти до уваги, що:

$$Ca\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\xi\right) = Sa\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}(I-\xi)\right).$$

Висновки.

1. Коефіцієнт динамічності нелінійного осцилятора залежить від характеристики його пружності. У випадку жорсткої характеристики він менший двох, а у випадку м'якої характеристики – більший двох.

2. Переміщення осцилятора у часі, спричинені силовим імпульсом, виражаються через періодичні Ateb-функції.

3. Існують такі тривалості дії прямокутного імпульсу, при яких досягаються екстремальні амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора. Ці тривалості залежать не тільки від власних параметрів осцилятора, а й від величини миттєво прикладеної сили.

Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Митропольский Ю. А. Избранные труды в 2-х томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
4. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
5. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
6. Cveticanin L. A Review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – pp. 56 – 74.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов. – Харьков : Мис'кдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. Н. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Мис'кдрук, 2016. – 264 с.
9. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
10. Сокил Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – 1997. – № 1. – С. 55 – 58.
11. Кузьо І. В., Ванькович Т-Н. М., Зін'ко Я. А. Теоретична механіка. Динаміка. Кн. 1. – Львів : Львівська політехніка, 2012. – 442 с.
12. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності // Вибірці в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34 – 40.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды (элементарные функции). – Москва : Наука, 1981. – 800 с.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
15. Ольшанський В. П., Бурлака В. В., Сліпченко М. В., Малець О. М. Про коливання істотно нелінійного осцилятора // Механіка та машинобудування. – 2017. – № 1. – С. 6 – 14.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва : Наука, 1962. – 1100 с.

References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebanii* [Essays on the history of development of mechanical oscillations]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. T. 1. Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Vol. 1. Models, methods, phenomena]. Moscow, Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
3. Mitropol'skiy Yu. A. *Izbrannyye trudy v 2-kh tomakh* [Selected works in 2 volumes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
4. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineinykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods of studying nonlinear oscillatory systems]. Lviv, L'viv's'ka politekhnika Publ., 2014. 288 p.
5. Shatokhin V. M. *Analiz i parametricheskyy sintez nelineinykh silovykh peredach mashin* [Analysis and parametric synthesis of nonlinear power car transmissions]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2008. 456 p.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2012, vol. 6, no. 1, pp. 56–74.
7. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Metod VBK v raschetakh nestatsionarnykh kolebanii ostsilyatorov* [The WKB method for computing oscillator nonlinear vibrations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2014. 264 p.
8. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V., Tishhenko L. N. *Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dissipative oscillators' dynamics]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
9. Grytsyk V. V., Nazarkevych M. A. Matematychni modeli algorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 2007, no. 12, pp. 37–42.
10. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' nelineyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyshh [On application of Ateb-functions for constructing solutions to some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of science of Ukraine]. 1997, no. 1, pp. 55–58.
11. Kuz'o I. V., Van'kovych T-N. M., Zin'ko Ya. A. *Teoretychna mekhanika. Dynamika. Kn. 1* [Theoretical mechanics. Dynamics. Book 1]. Lviv, L'viv's'ka politekhnika Publ., 2012. 442 p.
12. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro rukh ostsilyatora zi stepenevoyu kharakterystyky pruzhnosti [On the movement of an oscillator with power elasticity characteristic]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vseykrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technic and technologies. Pan-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnitsa, 2017, no. 3 (86), pp. 34–40.
13. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady (elementarnyye funktsii)* [Integrals and series (elementary functions)]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

14. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
15. Ol'shans'kiy V. P., Burlaka V. V., Slipchenko M. V., Malets' O. M. Pro kolyvannya istotno neliniynogo ostsylatora [On vibrations of essentially nonlinear oscillator]. *Mekhanika ta mashynobuduvannya* [Mechanics and mechanical engineering]. 2017, no. 1, pp. 6–14.
16. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.

Надійшла (received) 11.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АТЕБ-СИНУС У РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ГЕРЦА ПРО УДАР

Розглянута класична задача Г. Герца про пружний удар двох незакріплених твердих тіл, з урахуванням контактних деформацій. Її розв'язок виражено через Атеб-синус, що дало можливість одержати явну аналітичну залежність від часу сили удару та інших параметрів динамічної взаємодії тіл. Для зручності проведення розрахунків складено таблицю задіяної спеціальної функції та запропоновано її апроксимацію елементарними функціями. Наведено числові результати.

Ключові слова: пружний удар, контактні деформації, Атеб-синус, апроксимація.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

АТЕБ-СИНУС В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГЕРЦА ОБ УДАРЕ

Рассмотрена классическая задача Г. Герца об упругом ударе двух незакрепленных твердых тел, с учетом контактных деформаций. Ее решение выражено через Атеб-синус, что дало возможность получить явную аналитическую зависимость от времени силы удара и других параметров динамического взаимодействия тел. Для удобства проведения расчетов составлено таблицу задействованной специальной функции и предложено ее аппроксимацию элементарными функциями. Приведено численные результаты.

Ключевые слова: упругий удар, контактные деформации, Атеб-синус, аппроксимация.

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

АТЕБ-SINE IN THE SOLUTION OF HERTZ'S PROBLEM OF IMPACT

We consider the classical problem of H. Hertz on the elastic impact of two loose rigid bodies, taking into account the contact deformations. Its solution is expressed through the Ateb-sine, which made it possible to obtain an explicit analytical dependence on the time of the impact force and other parameters of the dynamic interaction of bodies. For convenience of calculations, a table of the involved special function is compiled and its approximation by elementary functions is proposed. Numerical results are given.

Key words: elastic impact, contact deformation, Ateb-sine, approximation.

Вступ. Зусиллями Львівської школи математиків і механіків *теорія Атеб-функцій* набула розвитку при аналітичному розв'язуванні диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси різної природи, зокрема вільні та вимушені коливання нелінійних механічних систем [1 – 5]. Зазначимо, що причиною вимушених коливань там вважали дію періодичних збурюючих сил. Далі виявилось, що Атеб-функції є також зручним засобом математичного моделювання руху нелінійних механічних систем при силових імпульсних навантаженнях [6, 7]. Тут йдеться про можливість подальшого використання вказаних спеціальних функцій у розв'язку задачі пружного удару твердих тіл у постановці *Г. Герца*. Її теорія висвітлена в багатьох публікаціях, зокрема в [8 – 11]. На відміну від інших відомих теорій механічного удару, вона дає можливість визначити максимальне значення сили удару, тривалість ударного імпульсу та інші параметри, які потрібні для оцінки динамічної міцності тіл в умовах інтенсивного короткочасного навантаження. Тому теорія Г. Герца набула подальший розвиток в роботах *С. П. Тимошенко, А. П. Філіпова* та інших дослідників. Її стали використовувати у розрахунках коливань континуальних систем, а саме балок, пластин і оболонок, підданих пружному удару [12, 13]. Стало можливим, з використанням комп'ютерів, обчислювати не тільки переміщення, а і напруження в тонкостінних елементах конструкцій. Вдалося встановити, що коефіцієнт динамічності напружень при локальному ударі відрізняється від коефіцієнта динамічності перемішень [12], і з цим слід рахуватись при проектуванні деталей машин.

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський 2018

Метою даної статті є розкриття можливостей, які дає використання Атеб-синуса при розрахунках пружного удару двох незакріплених твердих тіл, з урахуванням їх контактних деформацій.

Для досягнення постановленої мети складена таблиця Атеб-синуса, задіяного у розв'язку задачі удару, а також запропонована відповідна її апроксимація з використанням елементарних функцій. Це дає можливість одержати аналітичну розгортку короточасного динамічного процесу, тобто з'ясувати як змінюються у часі сила удару, як відбувається зближення центрів мас тіл після їх зіткнення, як проходить зміна розмірів області контакту та контактних напружень.

Постановка задачі та її розв'язок. За теорією Г. Герца [8, 11], зближення $x(t)$ центрів мас двох незакріплених твердих тіл з масами m_1 і m_2 при їх пружному ударі описується нелінійним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} = -\beta x^{3/2}, \quad (1)$$

у якому $m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$; β – коефіцієнт, що залежить від форми та пружних характеристик твердих тіл; крапка над x означає похідну за часом t .

У випадку двох куль з радіусами R_1 і R_2 , матеріали яких мають відповідно модулі пружності E_1 і E_2 та коефіцієнти Пуассона μ_1 і μ_2 , множник β подається виразом:

$$\beta = \frac{4}{3Q} \sqrt{R},$$

$$\text{де } Q = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}; \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Зазначимо, що досліди по удару двох сталевих куль підтвердили теорію Г. Герца [8].

Рівняння (1) доводиться розв'язувати при початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (2)$$

якщо зіткнення тіл почалося при $t = 0$ зі швидкістю v_0 .

Для побудови розв'язку цієї задачі Коші, традиційним перетворенням $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$, рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$m \cdot \dot{x} d\dot{x} = -\beta x^{3/2} dx,$$

що після інтегрування, з урахуванням (2), дає:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{4\beta}{5m} x^{5/2}}. \quad (3)$$

Подальшим інтегруванням (3) одержуємо:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{4\beta}{5mv_0^2} y^{5/2}}} = v_0 t. \quad (4)$$

Користуючись добутком $y = \gamma \cdot u$, де $\gamma = \left(\frac{5mv_0^2}{4\beta} \right)^{2/5}$, замінимо в (4) змінну інтегрування y на u . Тоді:

$$\int_0^{x/\gamma} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \gamma^{-1} v_0 t. \quad (5)$$

Далі приймемо до уваги інтегральне подання Атеб-синуса $\xi = Sa(v, n, \eta)$, у відповідності до якого ξ є верхньою границею інтеграла [4]:

$$\frac{1+v}{2} \int_0^{0 \leq \xi \leq 1} \frac{du}{(1-u^{v+1})^{n/(n+1)}} = \eta. \quad (6)$$

Із виразів (5) і (6) випливає, що:

$$x(t) = \gamma \cdot Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \frac{v_0}{\gamma} t\right). \quad (7)$$

Отже, визначення $x(t)$ зводиться до обчислення значень Атеб-синуса, причому $\max x(t) = \gamma$. Час досягнення максимального зближення центрів мас визначається рівнянням:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \frac{v_0}{\gamma} t\right) = 1,$$

яке має корінь:

$$t = t_* = \frac{\gamma}{v_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \frac{\gamma}{v_0} I. \quad (8)$$

Інтеграл в (8) виражається через *гамма-функцію* $\Gamma(z)$, затабульовану в [8, с. 55]. Оскільки в [15, с. 295]:

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{5} \frac{\Gamma(0,4)}{\Gamma(0,9)} \approx 1,4716,$$

то

$$t_* \approx 1,4716 \frac{\gamma}{v_0} \approx 1,609 \left(\frac{m^2}{\beta^2 v_0} \right)^{1/5}.$$

Тут враховано, що $\Gamma(0,4) \approx 2,21825$; $\Gamma(0,9) \approx 1,06867$.

При цьому тривалість ударної взаємодії тіл становитиме:

$$\tau = 2t_*,$$

якщо прийняти тривалість зближення рівною з тривалістю віддалення центрів мас тіл в ході удару. Таке припущення має місце в умовах ідеально пружного удару.

Використовуючи розв'язок (7), легко знайти й інші параметри удару. Так для обчислення сили ударної взаємодії $P(t)$ маємо вираз:

$$P(t) = \beta [x(t)]^{3/2} = \beta \gamma^{3/2} \left[Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \frac{v_0}{\gamma} t\right) \right]^{3/2}.$$

Максимум сили удару досягається при $t = t_*$ і становить

$$\max P(t) = \beta \gamma^{3/2} = \beta^{2/5} \left(\frac{5mv_0^2}{4\beta} \right)^{3/5}.$$

Радіус кругової області контакту $a(t)$ пов'язаний з силою удару і змінюється за законом

$$a(t) = \left(\frac{3}{4} QRP \right)^{1/3} = a_{\max} \left[Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \frac{v_0}{\gamma} t\right) \right]^{1/2}.$$

При цьому:

$$a_{\max} = \left(\frac{3}{4} QR\beta\gamma^{3/2} \right)^{1/3}.$$

Максимальний тиск в центрі області контакту теж змінюється у часі і його обчислення зводиться до використання формули

$$\max q(t) = \frac{3}{2} \frac{P(t)}{\pi a^2(t)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{6\beta\gamma^{3/2}}{Q^2 R^2} \right)^{1/3} \left[Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \frac{v_0}{\gamma} t\right) \right]^{1/2}.$$

Таким чином, зміна основних параметрів удару в часі пов'язана з Атеб-синусом і його степенями. Тому зупинимось на обчисленні значень цієї функції. Найбільш просто його проводити лінійною інтерполяцією числових даних в табл. 1.

В роботі [16], поряд з наведеною вище таблицею, запропонована також апроксимація Атеб-синуса у вигляді:

$$Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4} z\right) \approx \begin{cases} z & 0 \leq z < 0,2 \\ 0,199 + 1,0233(z-0,2) - 0,2111(z-0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq z \leq 0,8 \\ 1 - (4/3)\sin^2[0,6846 \cdot (I-z)] & 0,8 < z \leq I. \end{cases}$$

Для скорочення запису використано позначення $z = v_0 t / \gamma$.

Апроксимовані значення записано в дужках таблиці. Вони підтверджують високу точність наближення

спеціальної функції.

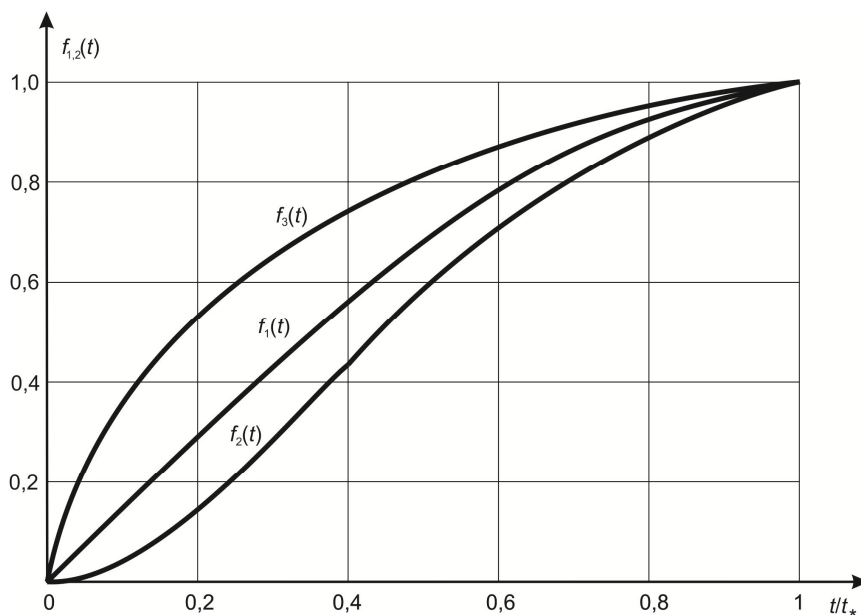
Таблиця 1 – Точні та наближені значення Атеб-сінуса

z	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}z\right)$	z	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}z\right)$	z	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}z\right)$
0,00	0,00(0,00)	0,55	5,33(5,31)	1,10	9,16(9,16)
0,05	0,50(0,50)	0,60	5,77(5,75)	1,15	9,36(9,36)
0,10	1,00(1,00)	0,65	6,19(6,17)	1,20	9,54(9,54)
0,15	1,50(1,50)	0,70	6,60(6,58)	1,25	9,70(9,70)
0,20	1,99(2,00)	0,75	6,99(6,98)	1,30	9,82(9,82)
0,25	2,49(2,50)	0,80	7,37(7,37)	1,35	9,91(9,91)
0,30	2,98(2,99)	0,85	7,72(7,73)	1,40	9,97(9,97)
0,35	3,46(3,48)	0,90	8,06(8,06)	1,45	9,997(9,997)
0,40	3,94(3,95)	0,95	8,37(8,37)	$I \approx 1,4716$	10,00(10,00)
0,45	4,41(4,42)	1,00	8,66(8,66)		
0,50	4,87(4,87)	1,05	8,92(8,92)		

Для ілюстрації результатів, до яких приводить викладена теорія, на рис. 1 показано розгортки у часі безрозмірного зближення центрів мас куль $f_1(t) = x(t)/\gamma$ і безрозмірної сили удару $f_2(t) = P(t)/(\beta\gamma^{3/2})$. Там також нанесено графік функції

$$f_3(t) = a(t)/a_{\max} = \pi \left(\frac{6\beta\gamma^{3/2}}{Q^2 R^2} \right)^{-1/3} \max q(t),$$

яка характеризує зміни у часі радіуса області контакту та максимального тиску, оскільки $a(t)$ і $\max q(t)$ змінюється за одним законом.

Рис. 1 – Графіки $f_1(t)$, $f_2(t)$ і $f_3(t)$.

На рис. 2 показано графічні залежності максимального зближення центрів мас куль і максимуму сили удару від швидкості зіткнення тіл, побудовані для $v_* = 20$ м/с.

Тут використано значення: $x_* = \left(\frac{5mv_*^2}{4\beta} \right)^{2/5}$ і $P_* = \beta^{2/5} \left(\frac{5mv_*^2}{4} \right)^{3/5}$. Як бачимо, обчислені параметри нелі-

нійним чином залежать від швидкості удару. Це стосується і інших характеристик напружено-деформованого стану.

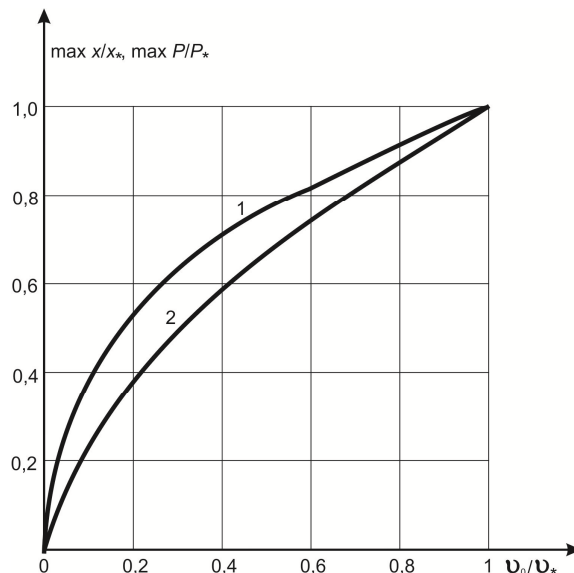


Рис. 2 – Залежності параметрів від швидкості удару: 1 – $\max x/x_*$; 2 – $\max P/P_*$.

Висновки. Дослідженням встановлено, що аналітичний розв’язок рівняння руху твердих тіл при їх ударі, з урахуванням контактних деформацій, подається Ateb-синусом. Використання цієї спеціальної функції суттєво спрощує обчислення основних характеристик динамічного процесу, що змінюються з плином часу, після зіткнення тіл.

Список літератури

1. Сенік П. М. Про Ateb-функції // Доповіді АН УРСР. Серія А. – 1968. – № 1. – С. 23 – 27.
2. Возний А. М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв’язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь // Доповіді АН УРСР. Серія А. – 1970. – № 9. – С. 971 – 974.
3. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв’язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 1. – С. 55 – 58.
4. Грицьк В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
5. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
6. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 62 – 67.
7. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94.
8. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел // Издание АН УССР. – Киев, 1952. – Т. 1. – 350 с.
9. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – Москва : Госстройиздат, 1965. – 447 с.
10. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. – Киев : Наукова думка, 1969. – 247 с.
11. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. – Москва : Наука, 1977. – 232 с.
12. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва : Машиностроение, 1970. – 734 с.
13. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В., Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
15. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды (элементарные функции). – Москва : Наука, 1981. – 800 с.
16. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степеневу характеристикою пружності // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34 – 40.

References (transliterated)

1. Senyk P. M. Pro Ateb-funktsiyi [On the Ateb Functions]. *Dopovidi AN URSSR. Seriya A.* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR. Series A]. 1968, no. 1, pp. 23–27.
2. Voznyy A. M. Zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazku odnogo klasu istотно nelineynykh dyferentsial'nykh rivnyan' [Application of the Ateb-functions for constructing a solution of a class of essentially nonlinear differential equations]. *Dopovidi AN URSSR. Seriya A.* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR. Series A]. 1970, no. 9, pp. 971–974.
3. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' nelineyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyshh [On application of Ateb functions for constructing solutions to some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. Київ, 1997, no. 1, pp. 55–58.
4. Grytsyk V. V., Nazarkevych M. A. Matematychni modeli alorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb functions]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. Київ, 2007, no. 12, pp. 37–42.
5. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh sistem* [Qualitative methods of studying nonlinear vibration systems]. Lviv, L'viv's'ka politekhnik Publ., 2014. 288 p.
6. Ol'shans'kyi V. P., Ol'shans'kyi S. V. Kolyvannya kvadratychno nelineyhogo ostsyl'yatora, sprychyneni impul'snym navantazhennyam [Vibrations of Quadratically Nonlinear Oscillator Caused by Impulse Load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI», Publ., 2017, no. 39 (1261), pp. 62–67.

7. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Kolyvannya kubichno neliniynogo ostsylatora, sprychyneni impul'snym navantazhenyamy [Vibrations of cubically nonlinear oscillator caused by impulse load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU "KhPI", Publ., 2017, no. 6 (1228), pp. 86–94.
8. Dinnik A. N. *Udar i szhatie uprugikh tel* [Impact and compression of elastic bodies]. Kiev, Izdanie AN USSR Publ., 1952, vol. 1, 350 p.
9. Gol'dsmit V. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of colliding bodies]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1965. 447 p.
10. Kil'chevskiy N. A. *Teoriya soudareniya tvyerdykh tel* [The theory of collision of solids]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1969. 247 p.
11. Panovko Ya. G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to the theory of mechanical shock]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 232 p.
12. Philippov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 734 p.
13. Ol'shanskiy V. P., Tishhenko L. N., Ol'shanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskoy udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkov, Mis'kdruk Publ., 2012. 320 p.
14. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
15. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady (elementarnye funktsii)* [Integrals and series (elementary functions)]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
16. Ol'shans'kyy V. P., Ol'shans'kyy S. V. Pro rukh ostsylatora zi stepenevoyu kharakterystykoju pruzhnosti [On the movement of an oscillator with power elasticity characteristic]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vsekrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in technic and technologies. Pan-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnitsa, 2017, no. 3 (86), pp. 34–40.

Надійшло (received) 15.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 621.434.1

О. О. ОСЕТРОВ, Д. С. АЛЬОХИН, О. М. БЕКАРЮК**РОЗРАХУНКОВА ОЦІНКА СЕРЕДНЬОЕКСПЛУАТАЦІЙНОЇ ПАЛИВНОЇ ЕКОНОМІЧНОСТІ ДВИГУНА ЛЕГКОВОГО АВТОМОБІЛЯ**

Запропоновано комплексну математичну модель робочого процесу двигуна внутрішнього згорання у складі автомобіля. З використанням цієї моделі визначено поточні і середні експлуатаційні показники двигуна при русі автомобіля на режимах випробувального циклу NEDC. Проаналізовано вплив радіуса коліс, висоти та маси транспортного засобу, моменту запалювання, ефективності трансмісії та опору дорожньої поверхні на середню експлуатаційну витрату палива. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: математичне моделювання, робочий процес, випробувальний цикл, параметри, NEDC, середня витрата палива.

А. А. ОСЕТРОВ, Д. С. АЛЕХИН, А. Н. БЕКАРЮК**РАСЧЕТНАЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ ТОПЛИВНОЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ ДВИГАТЕЛЯ ЛЕГКОВОГО АВТОМОБИЛЯ**

Предложена комплексная математическая модель рабочего процесса двигателя внутреннего сгорания в составе автомобиля. С использованием данной модели определены текущие и средние эксплуатационные показатели двигателя при движении автомобиля на режимах испытательного цикла NEDC. Проанализировано влияние радиуса колес, высоты и массы транспортного средства, момента зажигания, эффективности трансмиссии и дорожного сопротивления на средний эксплуатационный расход топлива. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: математическое моделирование, рабочий процесс, испытательный цикл, параметры, NEDC, средний расход топлива.

А. А. OSETROV, D. S. ALYOKHIN, A. N. BEKARIUK**CALCULATED ESTIMATE OF THE AVERAGE OPERATING FUEL ECONOMY OF A CAR ENGINE**

The objective of the paper is estimation of the average operational fuel economy of a car engine. The efficiency of the car engine working process depends on its design parameters, the intensity of the gear shift, driving style, driving mode. In order to estimate the influence of various factors on the average fuel-economic and environmental performance of the engine, various test cycles are used. In European countries the NEDC test cycle is considered as a basic one. In the paper a complex mathematical model of the working process of the vehicle engine is presented. Using the mathematical model the parameters of the engine are determined for the car moving in the modes of the NEDC test cycle. As a result of processing the data at all points of the cycle the average operating parameters of the engine are obtained. The influence of the wheel radius, height and mass of the vehicle, ignition timing, transmission efficiency and resistance of the road surface on the engine average operating fuel consumption is analyzed. We also consider some recommendations for further research.

Key words: mathematical modeling, working process, test cycle, parameters, NEDC, average fuel consumption.

© О. О. Осетров, Д. С. Альохин, О. М. Бекарюк, 2018

Вступ. Рівень викидів та економія палива автомобільних двигунів залежать від конструктивних параметрів двигуна, інтенсивності перемикавання передач, стилю водіння водія, режиму руху, та ін. Для оцінки впливу різних факторів на середню витрату палива, а також економічні та екологічні показники двигуна, виконують експериментальні дослідження автомобілів на бігових барабанах за різними випробувальними циклами: Japanese, NEDC, NYCC, IM240, FTP-75 UDDS, US06, та іншими. Зокрема, в Європейських країнах прийнято за основу випробувальний цикл NEDC, що включає ділянки руху автомобіля в умовах міста і поза містом [1].

Експериментальна оптимізація параметрів автомобіля пов'язана зі значними матеріальними і часовими витратами. У зв'язку з цим раціональним на етапі проектування і оптимізації є використання математичних моделей і проведення розрахункового дослідження, а на етапі уточнення математичних моделей і перевірки результатів моделювання – проведення експерименту.

Оцінка роботи двигуна у складі автомобіля є комплексною задачею, що потребує моделювання складних динамічних і перехідних процесів. В той же час, в існуючих спробах вирішити дане завдання [2 – 9] вдаються до надзвичайного спрощення реальних процесів або не враховують важливі чинники, що мають місце у системі двигун – автомобіль. Вказане визначає напрям наукового дослідження.

Аналіз останніх досліджень. В багатьох дослідженнях здійснено спроби визначення середньої експлуатаційної витрати палива або енергії транспортними засобами. Роботи [2] – [8] засновані на статистичному моделюванні. В роботі [2] витрати енергії (кДж/км) автомобілем за Європейський їздовий цикл MVEG-95 запропоновано визначати зі співвідношення

$$E_{MVEG-95} \approx F_a K \cdot 1.9 \cdot 10^4 + m_a \psi_0 \cdot 8.4 \cdot 10^2 + m_a 10,$$

де m_a – маса автомобіля; ψ_0 – коефіцієнт сумарного дорожнього опору; F_a – лобова площа автомобіля; K – коефіцієнт аеродинамічного опору повітря.

Подібні залежності запропоновані в роботах [3] і [4], де середня експлуатаційна витрата палива автомобілем представляє собою функцію від мінімальної питомої ефективної витрати палива на найбільш економічному режимі, ККД трансмісії, густини палива, середньої швидкості автомобіля і потужності, що витрачається на подолання дорожнього тертя, опору повітря і сил інерції.

Підхід, що запропоновано в роботах [2] – [4], є вкрай спрощеним і дозволяє проводити лише орієнтовну оцінку шляхової витрати палива або енергії автомобілем, не кажучи вже про оптимізаційні дослідження.

Більш детальні моделі запропоновані в роботах [8] і [9]. Залежно від параметрів руху автомобіля (залежність швидкості автомобіля від часу циклу), відомої стратегії перемикавання передач, параметрів трансмісії та автомобіля в кожній точці випробувального циклу з заданим розрахунковим кроком розраховуються частота обертання колінчастого валу і потрібна потужність двигуна. Відповідна цим параметрам витрата палива визначається за картою паливної економічності двигуна, що отримана експериментальним шляхом на стаціонарних режимах на моторному стенді. Дані, що отримані в усіх точках циклу, використовуються для розрахунку середньої експлуатаційної витрати палива. Цей підхід не дозволяє досліджувати вплив параметрів і налаштувань двигуна і автомобіля на середню паливну економічність. Слід також зазначити, що характеристики двигуна, отримані на стаціонарних і змінних режимах роботи, значно відрізняються одне від одного.

В роботі [8] прийнято, що середня витрата палива автомобілем залежить, в основному, від режимів розгону та руху при постійній швидкості. Витрата палива на режимах гальмування і холостого ходу не береться до уваги. В кожному з двох прийнятих режимів розраховується миттєва питома витрата палива з використанням поліноміальних функцій, які отримані математичною обробкою експериментальних характеристик декількох двигунів при повних і часткових навантаженнях. Як і в розглянутих вище роботах представлена модель майже не враховує вплив параметрів двигуна на середню експлуатаційну витрату палива.

Постановка задачі. Метою дослідження є побудова математичної моделі робочого процесу двигуна MEM3 307.1 у складі автомобіля ЗАЗ-Sens, що дозволяє оцінювати вплив параметрів конструкції автомобіля та двигуна на середню експлуатаційну витрату палива.

Математична модель. *Математична модель випробувального циклу.* В даному дослідженні прийнято розрахунково-експериментальний метод, описаний в роботі [10]. Весь випробувальний цикл розбивається на ділянки тривалістю $\Delta\tau = 1$ с, в яких швидкість руху автомобіля, а, відповідно, і роботи двигуна, не змінюються (рис. 1).

Параметри руху автомобіля на квазістаціонарних режимах перераховуються в частоту обертання колінчастого валу і потужність двигуна, які визначаються, відповідно, за формулами:

$$n = \frac{v \cdot u_{ki} \cdot u_{pb} \cdot u_0}{0.377 \cdot r_{st}}; N_e = \frac{m_a \cdot 9,81 \cdot \Psi_D \cdot v}{3600 \cdot \eta_T} + \frac{K \cdot F \cdot v^3}{46656 \cdot \eta_T},$$

де u_{ki} – передавальне число коробки передач; u_{pb} – передавальне число роздавальної коробки; u_0 – передава-

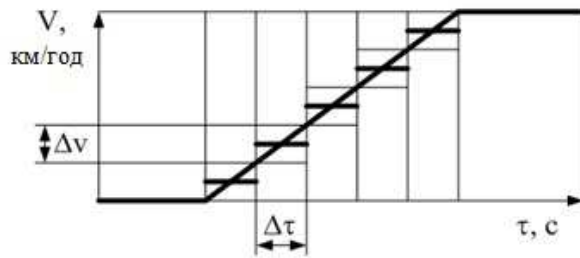


Рис. 1 – Перетворення перехідного процесу в послідовність елементарних квазістаціонарних режимів.

ження робочого процесу двигуна, визначаються параметри його паливної економічності і токсичності відпрацьованих газів.

Параметри двигуна на відповідних квазістаціонарних режимах прискорення і гальмування визначаються за формулами:

$$Q_{i_реж_прискор} = k_{прискор}^i \cdot Q_{i_реж}; \quad Q_{i_реж_гальм} = k_{гальм}^i \cdot Q_{i_реж},$$

де $Q_{i_реж}$ – відповідно, параметри двигуна на квазістаціонарному режимі; $k_{прискор}^i$, $k_{гальм}^i$ – емпіричні коефіцієнти, які враховують зміну параметрів двигуна, відповідно, під час прискорення та гальмування для даного типу транспортного засобу [11].

Дані, отримані на усіх режимах випробувального циклу, використовуються для визначення витрати палива. Цей метод враховує вплив параметрів конструкції автомобіля та двигуна на робочий процес двигуна та може використовуватися для оптимізаційних завдань.

Вище показано, що на кожному розрахунковому кроці проводиться експериментальне дослідження або математичне моделювання робочого процесу двигуна. Тому наступним кроком дослідження була розробка математичної моделі робочого процесу двигуна для використання в комплексі з прийнятою моделлю випробувального циклу.

Квазістаціонарна термодинамічна модель робочого процесу двигуна з іскровим запалюванням.

В основу розрахунку робочого процесу покладена квазістаціонарна термодинамічна модель робочого процесу двигуна з іскровим запалюванням.

У табл. 1 представлено технічну характеристику двигуна MEM3-307.1, що є об'єктом дослідження.

Таблиця 1 – Параметри двигуна MEM3 307.1

Параметр	Значення
Об'єм	1299 см ³
Максимальна потужність	51,5 кВт при $n = 5200 - 5500$ хв ⁻¹
Максимальний крутний момент	107,8 Н·м при $n = 3000 - 3500$ хв ⁻¹
Кількість циліндрів	4 4
Діаметр циліндра	75 мм
Хід поршня	73,5 мм
Ступінь стиску	9,8

Математична модель робочого процесу двигуна основана на рівнянні першого принципу термодинаміки, закону збереження маси та рівняння стану. Передбачається, що робоче тіло має властивості ідеального газу, а процеси в циліндрі двигуна – квазістаціонарні. Кількість переданої в стінку теплоти розраховується за формулою Ньютона – Ріхмана, в якій коефіцієнт тепловіддачі стінці від газу визначається за формулою Вошні. Математичне моделювання згоряння в циліндрі двигуна здійснюється за формулою І. І. Вібе. Механічні втрати на тертя визначаються за емпіричними залежностями від частоти обертання колінчастого валу, уточненими за результатами експериментальних досліджень на кафедрі двигунів внутрішнього згоряння НТУ «ХПІ».

Ця математична модель реалізована в середовищі програмного забезпечення MATLAB®. Результати розрахунку параметрів робочого процесу двигуна для окремого квазістаціонарного режиму та параметрів двигуна під час випробувального циклу NEDC показано на рис. 2 і 3.

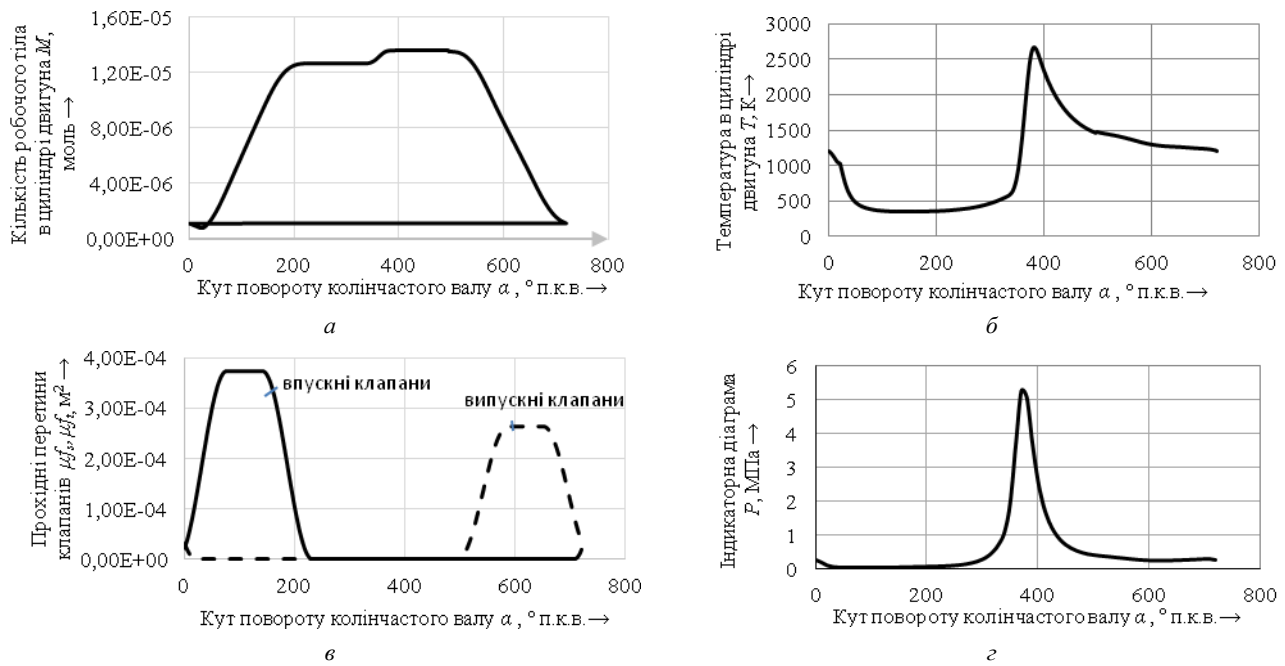


Рис. 2 – Результати розрахунку параметрів робочого процесу двигуна на режимі $N_e = 50$ кВт, $n = 5000$ хв $^{-1}$:
 а – кількість робочого тіла в циліндрі двигуна M ; б – температура в циліндрі двигуна T ;
 в – прохідні перетини клапанів $\mu f_s, \mu f_t$.

Аналіз впливу параметрів автомобіля та двигуна на середню експлуатаційну витрату палива. З використанням розробленої комплексної математичної моделі проаналізовано вплив радіуса коліс, висоти, маси автомобіля, моменту подачі іскри за кутом повороту колінчастого валу, ККД трансмісії, а також опору дорожнього покриття на середню експлуатаційну витрату палива двигуном (л/100км).

Радіус коліс варіювали в межах від 0,25 м до 0,35 м при базовому значенні 0,285 м. Колеса з даними розмірами можна встановити на автомобіль не змінюючи його конструкцію. Висота автомобіля змінювалася в межах від 1,402 до 1,472 м при базовому значенні 1,432 м. Зміни висоти можна досягти зміною параметрів трансмісії та салону автомобіля. ККД трансмісії автомобіля варіювали в межах від 0,88 до 0,92 при базовому значенні 0,92. Кут запалювання змінювали від 320 до 350 гр.п.к.в. при базовому варіанті 327 гр.п.к.в.. Маса автомобіля варіювалася від 1200 кг до 1600 кг при базовому значенні 1400 кг. Так само було проаналізовано, як змінюється питома витрата палива двигуном в залежності від якості дорожнього покриття. Для цього з роботи [12] використано коефіцієнти сумарного дорожнього опору для асфальту і ґрунту, які змінювалися в межах від 0,0101 до 0,035 при базовому значенні 0,0101. На рис. 4 наведено результати розрахунку впливу наведених вище параметрів і регулювань на середню експлуатаційну витрату палива. Аналіз даних рис. 4 показує, що збільшення радіуса коліс на 29 % приводить до зменшення витрати палива автомобілем на 19 %. Це можна пояснити тим, що зменшення радіуса автомобіля за незмінної швидкості приводить до збільшення частоти обертання коліс автомобіля, частоти колінчастого валу і, як наслідок, зростання механічних втрат в двигуні, що негативно впливає на експлуатаційну витрату палива. Отже, радіус коліс доцільно збільшувати.

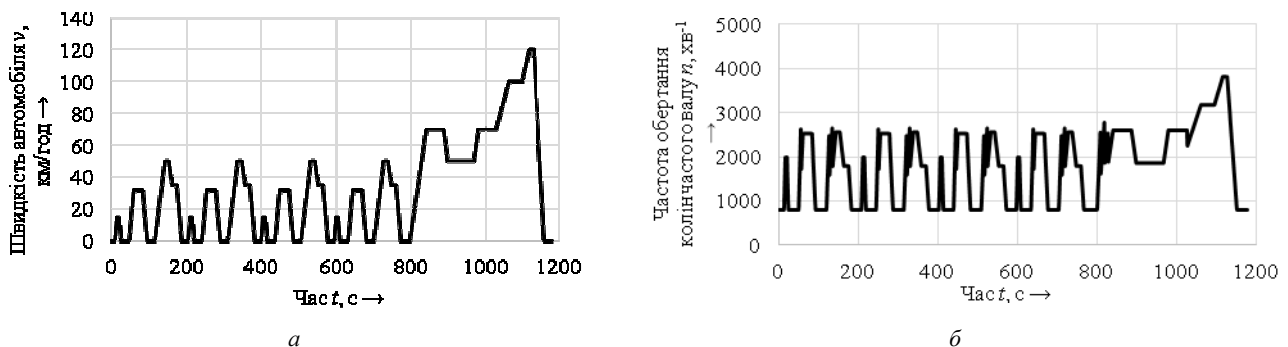


Рис. 3 – Параметри автомобіля і двигуна під час випробувального циклу NEDC:
 а – швидкість автомобіля v ; б – частота обертання колінчастого валу n .

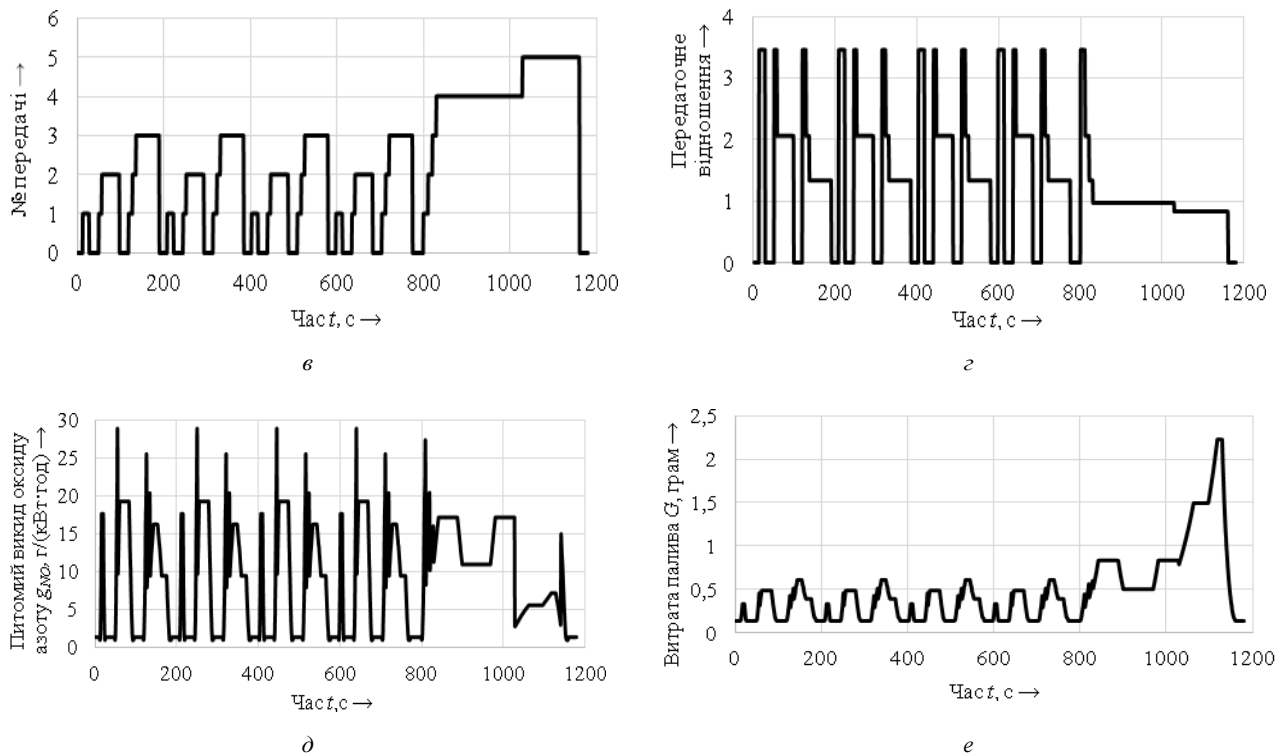


Рис. 3 – Параметри автомобіля і двигуна під час випробувального циклу NEDC: a – № передачі; b – передаточне відношення; d – питомий викид оксиду азоту g_{NO} ; e – витрата палива G .

Зменшення висоти автомобіля на 5 % приводить до зменшення лобової площі автомобіля, зниження витрат потужності на подолання опору руху автомобіля зі сторони повітря. Як наслідок, експлуатаційна витрата палива зменшується на 2 %.

Підвищення ККД трансмісії на 4% приводить до зменшення механічних втрат в ній і зменшення витрати палива на 2 %.

Момент подачі іскри впливає на експлуатаційну витрату палива неоднозначно. При ранньому запалюванні процес згоряння відбувається навколо верхньої мертвої точки, де приріст об'єму надпоршневої порожнини за фіксований проміжок часу є мінімальним, що приводить до зменшення індикаторної роботи в циклі. При занадто пізньому запалюванні зменшуються максимальні тиски і температури в циліндрі, розтягується процес згоряння палива, що також приводить до погіршення індикаторного процесу. Тобто існує певне оптимальне значення моменту подачі іскри при інших незмінних налаштуваннях. Розрахунок показав, що найкраща ефективність робочого процесу дослідного двигуна досягається при значенні $\Theta_z = 336$ °п.к.в.

Зростання маси автомобіля приводить до збільшення витрат потужності двигуна на перевезення вантажу. Для отримання більшої потужності потрібно збільшити циклову подачу палива. Розрахунок показав, що зростання маси автомобіля на 25 % приводить до збільшення експлуатаційної витрати палива на 7 %.

Покращення якості дорожнього покриття приводить до зменшення сили опору коченню коліс і, як наслідок, зменшенню експлуатаційної витрати палива. Так, зменшення сумарного коефіцієнту опору коченню з 0,03 до 0,01 веде до покращення експлуатаційної витрати палива на 28 %.

Отримані результати не суперечать відомим літературним даним, а також практиці експлуатації двигунів у складі транспортних засобів.

Розроблену математичну модель можна використовувати для комплексної оптимізації параметрів двигуна і автомобіля.

Перспективи подальших досліджень. Напрямами подальших досліджень є експериментальна перевірка результатів розрахункових досліджень, уточнення коефіцієнтів емпіричних залежностей математичних моделей, врахування екологічних показників автомобіля, проведення комплексної оптимізації параметрів двигуна і автомобіля, створення ефективної програми керування транспортним засобом.

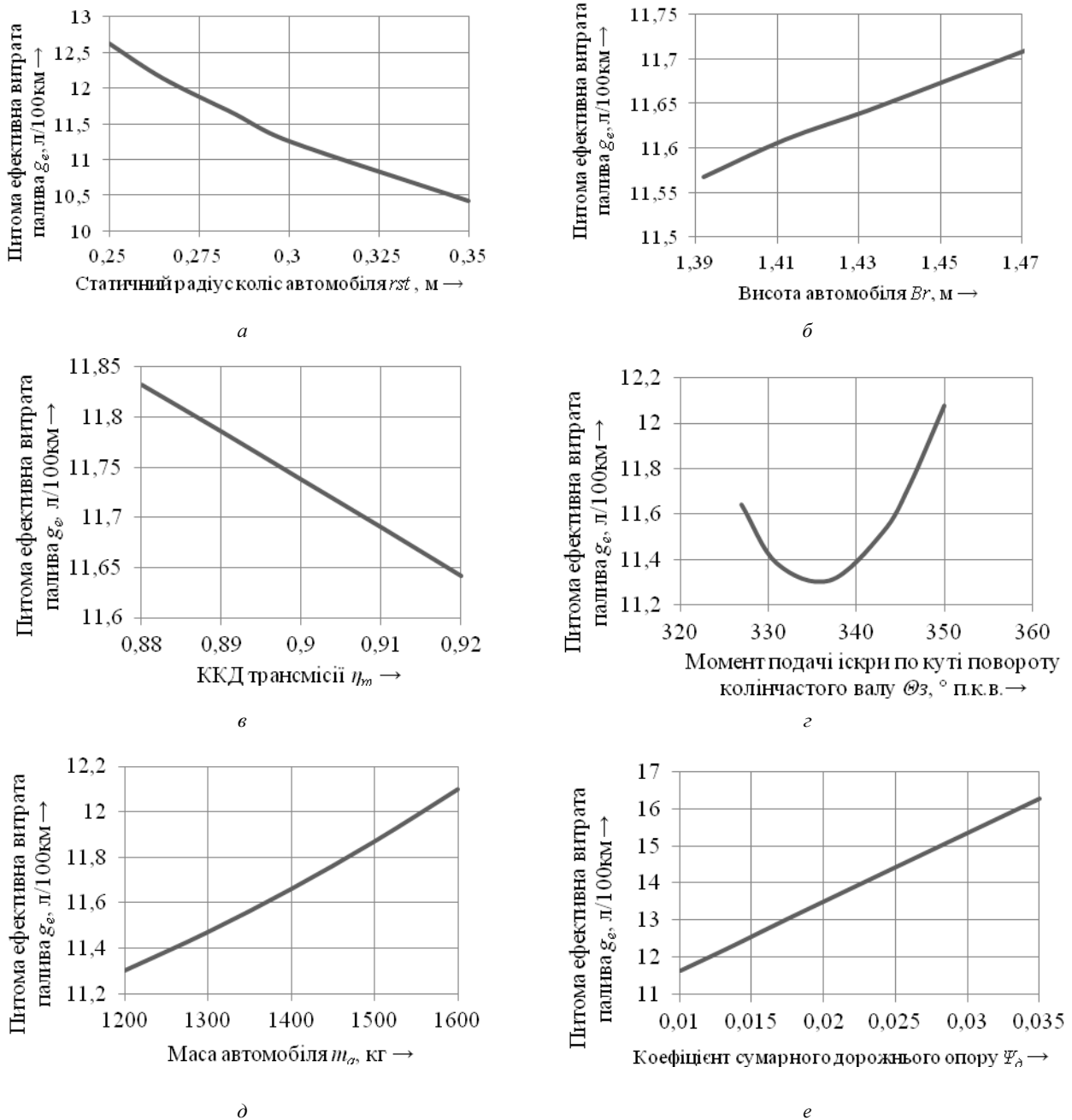


Рис. 4 – Вплив параметрів і налаштувань транспортного засобу на середню експлуатаційну витрату палива двигуном внутрішнього згорання: *a* – статичного радіуса коліс автомобіля r_{st} ; *б* – висоти автомобіля Br ; *в* – ККД трансмісії η_m ; *г* – моменту подачі іскри по куті повороту колінчастого валу Θ_z ; *д* – маси автомобіля m_a ; *е* – коефіцієнту сумарного дорожнього опору Ψ_d .

Висновки. Розроблено математичну модель робочого процесу бензинового двигуна у складі транспортного засобу. Математична модель дозволяє визначати показники паливної економічності і токсичності двигуна на режимах експлуатації, проводити оптимізаційні дослідження.

З використанням розроблених математичних моделей визначені параметри робочого процесу двигуна на квазістаціонарних режимах руху автомобіля. За цими параметрами з використанням експериментальних співвідношень визначено середньоексплуатаційні показники ДВЗ при русі автомобіля за циклом NEDC.

Проаналізовано вплив радіуса коліс, висоти, маси автомобіля, кута запалювання, ККД трансмісії, а також опору дорожнього покриття на середню експлуатаційну витрату палива двигуном. Показано, що для покращення експлуатаційної паливної економічності слід зменшувати висоту і масу автомобіля та збільшувати радіус коліс. Оптимальне значення моменту подачі іскри за кутом повороту колінчастого валу становитиме $\Theta_z = 336^\circ$ п.к.в.

Список літератури

1. United Nations Economic Commission for Europe. Regulation No 83 of the Economic Commission for Europe of the United Nations (UN/ECE) – Uniform provisions concerning the approval of vehicles with regard to the emission of pollutants according to engine fuel requirements // *Official Journal of the European Union*. – 27.12.2006. – L375. – Vol. 49. – pp. 223–495. – Режим доступу : <https://eur-lex.europa.eu/oj/direct-access.html>. – Дата звертання : 30 січня 2018.
2. Guzzella L., Sciarretta A. *Vehicle Propulsion Systems*. – Berlin, Germany : Springer Verlag, 2007. – 323 p.
3. Кравець В. Н. Теория автомобиля : учеб. пособие. – Н. Новгород : Нижегород. гос. техн. ун-т, 2007. – 367 с.
4. Ross M. Fuel efficiency and the physics of automobiles // *Contemp. Phys.* – 1997. – vol. 38. – P. 3–10.
5. Froberg A., Nielsen L. Efficient drive cycle simulation // *IEEE Trans. Veh. Technol.* – 2008. – vol. 57. – P. 1442–1453.
6. Wipke K., Cuddy M., Burch S. Advisor 2.1: A user-friendly advanced powertrain simulation using a combined backward/forward approach // *IEEE Trans. Veh. Technol.* – 1999. – vol. 48. – P. 1751–1761.
7. Botwinska K., Mruk R., Słoma J., Tucki K., Zaleski M. Simulation of diesel engine emissions on the example of Fiat Panda in the NEDC test. // *International Conference Energy, Environment and Material Systems (EEMS 2017)*. *E3S Web Conf.* – 2017. – vol. 19. – doi: 10.1051/e3sconf/20171902003.
8. Ben-Chaim M., Shmerling E., Kuperman A. Analytic Modeling of Vehicle Fuel Consumption // *Energies*. – 2013. – vol. 6. – P. 117–127.
9. Гусаков С. В., Марков В. А., Афанасьева И. В. Улучшение эксплуатационных показателей транспортных средств при использовании гибридных силовых установок // *Известия ВУЗов. Сер. : Машиностроение*. – 2012. – № 2. – С. 32–41.
10. Кузьменко А. П. Улучшение показателей малолитражного газового двигателя с искровым зажиганием за счет выбора параметров, которые определяют процесс сгорания : дис. канд. техн. наук : 05.05.03 / Кузьменко Анатолий Петрович. – Х. – 2012. – 197 с.
11. Луканин В. Н., Трофименко Ю. В. Снижение экологических нагрузок на окружающую среду при работе автомобильного транспорта // *Итоги науки и техники. Сер. : Автомобильный и городской транспорт*. – М. : ВИНТИ. – 1996. – Т. 19. – С. 90–110.
12. Стуканов В. А. Основы теории автомобильных двигателей и автомобиля: Учебное пособие. – М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2005. – 368 с.

References (transliterated)

1. United Nations Economic Commission for Europe. Regulation No 83 of the Economic Commission for Europe of the United Nations (UN/ECE) – Uniform provisions concerning the approval of vehicles with regard to the emission of pollutants according to engine fuel requirements, *Official Journal of the European Union*, European Union Publ., 27.12.2006, L375, vol. 49, pp. 223–495. Available at <https://eur-lex.europa.eu/oj/direct-access.html> (accessed 30.01.2018).
2. Guzzella L., Sciarretta A. *Vehicle Propulsion Systems*. Berlin, Germany : Springer Verlag, 2007. 323 p.
3. Kravets V. N. *Teoriya avtomobilya : uchebnoye posobiye* [Theory of Vehicles: Handbook]. Nizhny Novgorod, Nizhegor. Gos. Tekhn. un-t Publ., 2007. 323 p.
4. Ross M. Fuel efficiency and the physics of automobiles. *Contemp. Phys.* 1997, vol. 38, pp. 3–10.
5. Froberg A., Nielsen L. Efficient drive cycle simulation. *IEEE Trans. Veh. Technol.* 2008, vol. 57, pp. 1442–1453.
6. Wipke K., Cuddy M., Burch S. Advisor 2.1 : A user-friendly advanced powertrain simulation using a combined backward/forward approach. *IEEE Trans. Veh. Technol.* 1999, vol. 48, pp. 1751–1761.
7. Botwinska K., Mruk R., Słoma J., Tucki K., Zaleski M. Simulation of diesel engine emissions on the example of Fiat Panda in the NEDC test. *International Conference Energy, Environment and Material Systems (EEMS 2017)*. *E3S Web Conf.* 2017, vol. 19. doi: 10.1051/e3sconf/20171902003.
8. Ben-Chaim M., Shmerling E., Kuperman A. Analytic Modeling of Vehicle Fuel Consumption. *Energies*. 2013, vol. 6, pp. 117–127.
9. Gusakov S. V., Markov V. A., Afanas'eva I. V. *Povyshenie effektivnosti transportnykh sredstv s ispol'zovaniyem gibridnykh elektrostantsiy* [Increasing efficiency of vehicle using hybrid power stations]. *Izvestiya VUZov. Seriya : Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Series: Machine Building]. 2012, no. 2, pp. 32–41.
10. Kuzmenko A. P. *Uluchshenie pokazateley malolitrazhnogo gazovogo dvigatelya s iskrovym zazhiganiem za schet vybora parametrov, kotorye opredelyayut protsess sgoraniya : dis. kand. techn. nauk* [Improving performance of a low consumption gas engine with spark ignition by choosing parameters determining the combustion process. Candidate eng. sci. diss. (PhD.)]. Kharkov, 2012. 197 p.
11. Lukanin V. V., Trofimenko U. V. *Sokrashchenie ekologicheskikh nagruzok v okruzhayushchuyu sredyu pri ekspluatatsii transporta* [Reduction of ecological loads on environment during transport exploitation]. *Itoги nauki i tekhniki. Ser. : Avtomobil'nyy i gorodskoy transport* [The results of science and technology. Series: Automobile and city transport]. Moscow, VINITI Publ., 1996, vol. 19, pp. 90–110.
12. Stukanov V. A. *Osnovy teorii avtomobil'nykh dvigateley i avtomobilye : Uchebnoye posobie* [Fundamentals of the theory of automobile engines and automobiles: Textbook]. Moscow, FORUM : INFRA-M Publ., 2005. 368 p.

Надійшла (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Осетров Олександр Олександрович (Osetrov Aleksandr Aleksandro-vich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 795-62-28; e-mail: osetrov2010@gmail.com.

Альохін Дмитро Сергійович (Alokhin Dmitriy Sergeevich) – студент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 396-36-88; e-mail: alyokhindima@gmail.com.

Бекарюк Олександр Миколайович (Bekaryuk Aleksandr Nikolaevich) – студент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 699-71-28; e-mail: lex09199509@gmail.com.

UDC 517.968

T. S. POLYANSKAYA, O. O. NABOKA

DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION ON A SYSTEM OF INTERVALS

We consider a hypersingular integral equation on a system of intervals, which is reduced to a system of hypersingular integral equations on the standard interval $(-1, 1)$. The discretization of this system is carried out on the basis of the method of discrete singularities. The unique solvability of the discrete problem is proved and an estimate of the rate of convergence of the solution of this problem to the exact solution of the system of hypersingular integral equations is given.

Key words: hypersingular integral equation, method of discrete singularities.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, О. О. НАБОКА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА СИСТЕМІ ІНТЕРВАЛІВ

Розглянуто гіперсингулярне інтегральне рівняння на системі інтервалів, яке наведено до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь на стандартному інтервалі $(-1, 1)$. Проведена дискретизація цієї системи на основі методу дискретних особливостей. Доведено однозначна розв'язність дискретної задачі і дана оцінка швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, Е. А. НАБОКА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ

Рассмотрено гиперсингулярное интегральное уравнение на системе интервалов, которое приведено к системе гиперсингулярных интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1, 1)$. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дана оценка скорости сходимости решения этой задачи к точному решению системы гиперсингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

Introduction. When studying a mathematical model of a gyrotron with several resonant cavities of different width and depth one faces the necessity for numerical solving a hypersingular integral equation on a system of intervals. In the paper the numerical method of discrete singularities [1] for solving such equations is introduced and substantiated.

Problem setting. In the paper the following hypersingular integral equation (HSIE) on a system of intervals is considered:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi + \frac{a}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi + \frac{b}{\pi} \int_L F(\xi) \ln|x-\xi| d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L Q(x, \xi) F(\xi) d\xi = g(x), \quad (1)$$

for the unknown functions $F(\xi)$, $\xi \in L$, where

$$L = \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q), \quad -\infty < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_m < \beta_m < +\infty;$$

the right-hand parts $g(x) \in C_L^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, where $C_L^{1,\alpha}$ stands for the class of functions on \bar{L} such that their first derivative satisfies the Hölder condition with a positive exponent; the function of two variables $Q(x, \xi)$, $x \in \bar{L}$, $\xi \in \bar{L}$ belongs to the same class $C_L^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$ in each variable uniformly with respect to the other variable; a, b are given constants. The first integral in (1) is to be understood in the sense of the Hadamard finite part, the second one – in the sense of the Cauchy principal value. Equation (1) is assumed to admit a unique solution.

We are looking for the solution $F(\xi)$, $\xi \in L$ from the class of functions such that their restriction to the intervals (α_j, β_j) : $F_j(\xi) = F(\xi)$, $\alpha_j < \xi < \beta_j$, $j = \overline{1, m}$, admits the representation

$$F_j(\xi) = v_j(\xi) \sqrt{(\xi - \alpha_j)(\beta_j - \xi)}, \quad \alpha_j < \xi < \beta_j,$$

where $v_j(\xi)$, $\xi \in [\alpha_j, \beta_j]$ are smooth functions. We introduce the following notations for the restrictions of the functions $g(x)$ and $Q(x, \xi)$:

$$g_i(x) = g(x), \alpha_i < x < \beta_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$Q_{ij}(x, \xi) = Q(x, \xi), \alpha_i < x < \beta_i, \alpha_j < \xi < \beta_j, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Apparently, equation (1) is equivalent to the following system of HSIE:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{v_i(\xi)}{(x-\xi)^2} \sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)} d\xi + \frac{a}{\pi} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{v_i(\xi)}{x-\xi} \sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)} d\xi + \\ & + \frac{b}{\pi} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \ln|x-\xi| v_i(\xi) \sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)} d\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left[Q_{ij}(x, \xi) + (1-\delta_{ij}) \left(\frac{1}{(x-\xi)^2} + \frac{a}{x-\xi} + b \ln|x-\xi| \right) \right] v_j(\xi) \sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)} d\xi = g_i(x), \\ & x \in (\alpha_i, \beta_i), \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

We denote $\varphi_k(t) = \frac{1}{2} [(\beta_k - \alpha_k)t + \alpha_k + \beta_k]$ and substitute

$$x = \varphi_i(t_0), \quad x \in (\alpha_i, \beta_i), \quad -1 < t_0 < 1; \quad \xi = \varphi_j(t), \quad \xi \in (\alpha_j, \beta_j), \quad -1 < t < 1,$$

in the system of equations obtained. Then setting $u_j(t) = v_j(\varphi_j(t))$, $f_i(t_0) = g_i(\varphi_i(t_0))$ we arrive at the system of HSIE on the standard interval $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(t)}{(t_0-t)^2} \sqrt{1-t^2} dt + \frac{a_i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(t)}{t_0-t} \sqrt{1-t^2} dt + \frac{b_i}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t_0-t| u_i(t) \sqrt{1-t^2} dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 K_{ij}(t_0, t) u_j(t) \sqrt{1-t^2} dt = f_i(t_0), \quad |t_0| < 1, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{2}$$

The notations here are $a_i = \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right) a$, $b_i = \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right)^2 b$,

$$K_{ij}(t_0, t) = \begin{cases} Q_{ii}(\varphi_i(t_0), \varphi_i(t)) \left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right)^2 + b_i \ln\left(\frac{\beta_i - \alpha_i}{2}\right), & (j = i), \\ \left[Q_{ij}(\varphi_i(t_0), \varphi_j(t)) + \frac{1}{(\varphi_i(t_0) - \varphi_j(t))^2} \right] \left(\frac{\beta_j - \alpha_j}{2}\right)^2 + \\ + \frac{\alpha_j(\beta_j - \alpha_j)}{2(\varphi_i(t_0) - \varphi_j(t))} + b_j \ln|\varphi_i(t_0) - \varphi_j(t)|, & j \neq i. \end{cases}$$

The functions $f_i(t_0)$ are from $C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, and $K_{ij}(t_0, t)$ belong to $C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$ in each variable uniformly with respect to the other one.

The next step is to determine the unknown functions $u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ from system (2).

Main operators. We introduce the following operators (see [3]):

$$(Au_i)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(t)}{(t_0-t)^2} \sqrt{1-t^2} dt,$$

$$(\Gamma^{-1}u_i)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(t)}{t_0-t} \sqrt{1-t^2} dt,$$

$$(Bu_i)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t_0-t| u_i(t) \sqrt{1-t^2} dt,$$

$$(K_{ij}u_j)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{ij}(t_0, t) u_j(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

Let $\bar{u}(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^m$ be a vector function. We denote:

$$\begin{aligned}(\bar{A}\bar{u})(t_0) &= \{(Au_i)(t_0)\}_{i=1}^m, \\(\bar{a}\bar{\Gamma}^{-1}\bar{u})(t_0) &= \{a_i(\Gamma^{-1}u_i)(t_0)\}_{i=1}^m, \\(\bar{b}\bar{B}\bar{u})(t_0) &= \{b_i(Bu_i)(t_0)\}_{i=1}^m, \\(\bar{K}\bar{u})(t_0) &= \left\{ \sum_{j=1}^m (K_{ij}u_j)(t_0) \right\}_{i=1}^m, \\\bar{f}(t_0) &= \{f_i(t_0)\}_{i=1}^m.\end{aligned}$$

Using these notations, system (2) can be represented in the form of an operator equation:

$$\bar{A}\bar{u} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1}\bar{u} + \bar{b}\bar{B}\bar{u} + \bar{K}\bar{u} = \bar{f}. \quad (3)$$

Equation (3) admits a unique solution.

It is proved in [3] that the following relations hold:

$$\begin{aligned}A : U_{n-1}(t) &\rightarrow nU_{n-1}(t_0); \\\Gamma^{-1} : U_{n-1}(t) &\rightarrow T_n(t_0),\end{aligned}$$

where $T_n(t)$ is the first kind Chebyshev polynomial of degree n and $U_{n-1}(t)$ is the second kind Chebyshev polynomial of degree $n-1$.

Since the operator B maps polynomials of degree $n-2$ into polynomials of degree n , we conclude that the operator $A + a\Gamma^{-1} + bB$ maps polynomials into polynomials.

We introduce the Hilbert spaces in which the above operators are defined.

Let L^I be a Hilbert functional space endowed with the scalar product:

$$(u, v)^I = \int_{-1}^1 u(t)\bar{v}(t)\sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 \left(u(t)\sqrt{1-t^2} \right)' \left(\bar{v}(t)\sqrt{1-t^2} \right)' dt;$$

and let L^{II} be a Hilbert functional space with the scalar product defined by the formula:

$$(u, v)^{II} = \int_{-1}^1 u(t)\bar{v}(t)\sqrt{1-t^2} dt.$$

We denote by Π_{n-2}^I and Π_{n-2}^{II} the subspaces of L^I and L^{II} consisting of the polynomials of the degree less than or equal to $n-2$.

Let H^I and H^{II} be the spaces of the vector functions $\bar{u}(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^m$ endowed respectively with the scalar products

$$(u, v)^I = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)^I, \quad (u, v)^{II} = \sum_{i=1}^m (u_i, v_i)^{II}.$$

Apparently, the operators \bar{A} and $\bar{\Gamma}^{-1}$ are completely continuous in the pair of spaces (H^I, H^{II}) , hence, the operator $\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1}$ is also completely continuous in (H^I, H^{II}) . This remark and the fact that equation (3) admits a unique solution imply that the operator

$$\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K}$$

is continuously invertible in (H^I, H^{II}) .

Regularization and discretezation. Let $(P_{n-2}v)(t)$ be the Lagrange interpolation polynomial for the function $v(t)$ with the interpolation nodes $t_j^{(n)} = \cos \frac{j}{n}\pi$, $j = \overline{1, n-1}$ that are the roots of the second kind Chebyshev polyno-

mial $U_{n-1}(t)$.

Denote

$$\bar{u}_{\bar{n}}(t) = \{u_{in_i-2}(t)\}_{i=1}^m \equiv \{(P_{n_i-2}u_i)(t)\}_{i=1}^m, \quad \bar{f}_{\bar{n}}(t_0) = \{(P_{n_i-2}f_i)(t_0)\}_{i=1}^m \quad (\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)).$$

Let $u_{n-2}(t)$ be a polynomial of degree $n-2$. The operator A maps $u_{n-2}(t)$ into a polynomial of degree $n-2$. We regularize the operators Γ^{-1} and B so that the regularized operators take $u_{n-2}(t)$ into a polynomial of degree $n-2$ as well. To this end, following the ideas of [1, 3], we set

$$\begin{aligned} (\Gamma_{n-2}^{-1}u_{n-2})(t_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u_{n-2}(t) \left(\frac{1}{t_0-t} - U_{n-2}(t)T_{n-1}(t_0) \right) \sqrt{1-t^2} dt, \\ (B_{n-2}u_{n-2})(t_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|t_0-t| + \frac{2T_{n-1}(t)T_{n-1}(t_0)}{n-1} + \frac{2T_n(t)T_n(t_0)}{n} \right) u_{n-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

The operators Γ_{n-2}^{-1} and B_{n-2} defined by the above formulas are the regularizations of the operators Γ^{-1} and B required.

Next we introduce the notations:

$$\begin{aligned} (\bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}}^{-1}\bar{u}_{\bar{n}})(t_0) &= \{a_i(\Gamma_{n_i-2}^{-1}u_{in_i-2})(t_0)\}_{i=1}^m; \\ (\bar{b}\bar{B}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}})(t_0) &= \{b_i(B_{n_i-2}u_{in_i-2})(t_0)\}_{i=1}^m; \\ (\bar{K}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}})(t_0) &= \left\{ \sum_{j=1}^m (K_{ijn_i n_j} u_{jn_j-2})(t_0) \right\}_{i=1}^m; \end{aligned}$$

where

$$(K_{ijn_i n_j} u_{jn_j-2})(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (P_{n_i-2_{t_0}} P_{n_j-2_t} K_{ij})(t_0, t) u_{jn_j-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

The approximate solution $\bar{u}_{\bar{n}}(t)$ to equation (3) is determined by solving the following operator equation:

$$\bar{A}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{a}\bar{\Gamma}_{\bar{n}}^{-1}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{b}\bar{B}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}} + \bar{K}_{\bar{n}}\bar{u}_{\bar{n}} = \bar{f}_{\bar{n}}, \tag{4}$$

which is equivalent to the system of HSIE:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(t)}{(t_0-t)^2} \sqrt{1-t^2} dt + \frac{a_i}{\pi} \int_{-1}^1 u_{in_i-2}(t) \left(\frac{1}{t_0-t} - U_{n_i-2}(t)T_{n_i-1}(t_0) \right) \sqrt{1-t^2} dt + \\ &+ \frac{b_i}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln|t_0-t| + \frac{2T_{n_i-1}(t)T_{n_j-1}(t_0)}{n_i-1} + \frac{2T_{n_i}(t)T_{n_j}(t_0)}{n_i} \right) u_{in_i-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 (P_{n_i-2_{t_0}} P_{n_j-2_t} K_{ij})(t_0, t) u_{jn_j-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt = (P_{n_i-2}f_i)(t_0), \quad |t_0| < 1, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

We apply the method of discrete singularities to the latter system. Substituting the values $t_0 \in \{t_{r_i}^{n_i}\}$, $r_i = \overline{1, n_i-1}$ ($i = \overline{1, m}$) instead of t_0 into the i -th equation we arrive at a system of

$$\sum_{i=1}^m n_i - m$$

equations. Using the *interpolation type exact quadrature formulas* for the integrals (see [2]), we obtain a system of linear algebraic equations for the values of the functions $u_{in_i-2}(t)$ at the interpolation nodes:

$$\sum_{k_i=1}^{n_i} a_{r_i k_i}^{(1)} u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) + \sum_{k_i=1}^{n_i} a_{r_i k_i}^{(2)} u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) + \sum_{k_i=1}^{n_i} a_{r_i k_i}^{(3)} u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \sum_{k_j=1}^{n_j-1} a_{r_i k_j}^{(4)} u_{j n_j - 2} \left(t_{k_j}^{n_j} \right) f \left(t_{r_i}^{n_i} \right), \quad r_i = \overline{1, n_i - 1}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5}$$

In (5) the notations $a_{r_i k_i}^{(q)}$, $q = 1, 2, 3$ stand for

$$a_{r_i k_i}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\left(1 - \left(t_{k_i}^{n_i}\right)^2\right) \left((-1)^{r_i + k_i + 1} + 1\right)}{n_i \left(t_{r_i}^{n_i} - t_{k_i}^{n_i}\right)^2}, & k_i \neq r_i, \\ -\frac{n_i}{2}, & k_i = r_i, \end{cases}$$

$$a_{r_i k_i}^{(2)} = \begin{cases} \frac{a_i}{n_i} \left(\frac{\left((-1)^{r_i + k_i + 1} + 1\right)}{t_{r_i}^{n_i} - t_{k_i}^{n_i}} - 2(-1)^{r_i + k_i + 1} t_{r_i}^{n_i} \right) \left(1 - \left(t_{r_i}^{n_i}\right)^2\right), & k_i \neq r_i, \\ 0, & k_i = r_i, \end{cases}$$

$$a_{r_i k_i}^{(3)} = \frac{b_i \left(1 - \left(t_{k_i}^{n_i}\right)^2\right)}{n_i} \left(\frac{2(-1)^{r_i + k_i} t_{r_i}^{n_i} t_{k_i}^{n_i}}{n_i - 1} + \frac{(-1)^{r_i + k_i}}{n_i} - \ln 2 - 2 \sum_{p=1}^{n_i-1} \frac{T_p \left(t_{k_i}^{n_i}\right) T_p \left(t_{r_i}^{n_i}\right)}{p} \right),$$

$$a_{r_i k_j}^{(4)} = \frac{1}{n_i} K_{r_i k_j} \left(t_{r_i}^{n_i}, t_{k_j}^{n_j} \right) \left(1 - \left(t_{k_j}^{n_j}\right)^2\right).$$

Proof of unique solvability for system of linear algebraic equations (SLAE). System (5) admits a unique solution if and only if equation (4) does. So we prove the unique solvability of operator equation (4) here. The argument is based on the following fact which is due to [4].

Let X and Y be normed linear spaces, and denote $\tilde{X} \subset X$, $\tilde{Y} \subset Y$ their finite dimensional subspaces of the same dimension. Consider the two equations:

the exact one

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

and the approximate one

$$\tilde{K}\tilde{x} = \tilde{y} \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}, \tilde{y} \in \tilde{Y}),$$

where K and \tilde{K} are linear operators, such that $K : X \rightarrow Y$, $\tilde{K} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

Theorem 1. Assume that

a) the operator K is continuously invertible in the pair of spaces (X, Y) ;

b) $p = \|K^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \|K - \tilde{K}\|_{\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}} < 1$.

Then for any right-hand part $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ the approximate equation admits a unique solution. Moreover, if $x^* \in X$ is an exact solution of the equation $Kx = y$ and $\delta = \|y - \tilde{y}\|_Y$, then

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Y \rightarrow X} (1 - p)^{-1} [\delta - p \|y\|_Y].$$

The proof of **Theorem 1** uses the following inequalities (see [1]):

$$\|\vec{f} - \vec{f}_{\vec{n}}\|_{H^{\parallel}} \leq \frac{F}{n^{1+\alpha}} \text{ for } n = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\} > 3; \quad \|\Gamma^{-1} - \Gamma_{n_i-2}^{-1}\|_{\Pi_{n_i-2}^I \rightarrow L^{\parallel}} \leq \frac{C_i^{(1)}}{n_i};$$

$$\|B - B_{n_i-2}\|_{\Pi_{n_i-2}^I \rightarrow L^{\parallel}} \leq \frac{C_i^{(2)}}{n_i^2}; \quad \|K_{ij} - K_{ij n_i n_j}\|_{\Pi_{n_i-2}^I \rightarrow L^{\parallel}} \leq \frac{C(K_{ij})}{n_i^{1+\alpha}}, \quad n_i > 3, \tag{6}$$

where $F, C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, C(K_{ij}), i, j = \overline{1, m}$ – are constants independent of \bar{n} .

Inequalities (6) result into the following estimate:

$$\left\| \left(\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K} \right) \bar{u}_{\bar{n}} - \left(\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K} \right) \bar{u}_{\bar{n}} \right\|_{\mathbb{H}^I} \leq \left(\frac{C^{(1)}}{n} + \frac{C^{(2)}}{n^2} + \frac{C(K)}{n^{1+\alpha}} \right) \|\bar{u}_{\bar{n}}\|_{\mathbb{H}^I} \leq \frac{D}{n} \|\bar{u}_{\bar{n}}\|_{\mathbb{H}^I}, \quad (7)$$

where $n = \min \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$;

$$C^{(1)} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\} \max_{1 \leq i \leq m} \{C_i^{(1)}\}; \quad C^{(2)} = \max_{1 \leq i \leq m} \{b_i\} \max_{1 \leq i \leq m} \{C_i^{(2)}\}; \quad C(K) = \max_{1 \leq i, j \leq m} \{C(K_{ij})\}.$$

Estimates (6), (7) imply the following theorem:

Theorem 2. For all \bar{n} such that

$$\bar{n} \geq D \left\| \left(\bar{A} + \bar{a}\bar{\Gamma}^{-1} + \bar{b}\bar{B} + \bar{K} \right)^{-1} \right\|_{\mathbb{H}^I \rightarrow \mathbb{H}^I},$$

equation (4) possesses a unique solution. For $n \rightarrow \infty$ the following estimate of the rate of convergence of the approximate solution to the exact one holds:

$$\|\bar{u}_{\bar{n}} - \bar{u}\|_{\mathbb{H}^I} = \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Conclusions. The numerical method of discrete singularities is applied for constructing a system of linear algebraic equations approximating the system of hypersingular integral equations on the standard interval $(-1, 1)$, which, in turn, is equivalent to the hypersingular integral equation on a set of intervals. In case the kernel of the regular part and the right-hand part of this hypersingular integral equation satisfy some smoothness assumptions, the system of linear algebraic equations constructed admits a unique solution. Moreover, the rate of convergence of the approximate solution to the exact one is estimated.

Bibliography

1. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков : изд. ХГУ, 1992. – 145 с.
2. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков : изд. ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
3. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1256 – 1262.
4. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.

References (transliterated)

1. Gandel Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems of the method of discrete currents. Textbook. Part II]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1992. 145 p.
2. Gandel Y. V. *Lekzii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Textbook. Part I]. Kharkov, V. N. Karazin Kharkov National University Publ., 2001. 92 p.
3. Gandel Y. V., Kononenko A. S. Obosnovanie chislennogo resheniya odnogo gipersingulyarnogo integral'nogo uravneniya [Substantiation for numerical solving of a hypersingular integral equation]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1256–1262.
4. Gabdulkaev B. G. *Optimal'nye approksimazii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. Kazan, Izd. Kazan. Universiteta Publ., 1980. 231 p.

Received (nocnytila) 17. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.

УДК 004.8, 004.94

Б. А. САЛТАН, Д. А. СОБКО, І. В. КУЛАКОВСЬКА**УДОСКОНАЛЕННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З ВИБОРУ ІГРОВОЇ ЗБРОЇ КОМП'ЮТОРНИМ БОТОМ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМУ НАВЧАННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ FALCON**

Пропонується розроблена математична модель алгоритму вибору зброї ботом в комп'ютерній грі жанру шутер з використанням сценарного аналізу, що наближає поведінку штучного інтелекту (ШІ) до людської у ситуаціях, пов'язаних із вибором засобу ураження та прогнозуванням переміщення супротивника, що дозволяє гравцю отримати від гри досвід високої якості. Розроблений інструментарій зорієнтований на подальшу розробку та оптимізацію ігрового процесу, який покликаний покращити інтерактивність та ступінь реалізму у комп'ютерних іграх. Наведені проєктні рішення щодо розробленої моделі; проводиться узагальнення проведеної роботи та отриманих результатів, визначаються перспективи подальшого навчання ШІ з використанням нейронних мереж. Математична модель, що побудована в даній роботі, дає змогу визначати параметри керування, а разом з ними і стратегії, які регулюють рівень складності гри і дають змогу гравцеві отримати перемогу при правильному виборі його власної стратегії. Проаналізовано кілька підходів до вирішення поставленої задачі, а саме із застосуванням логічного висновку, досвіду та гібридного підходів, сценаріїв, дерев класифікації та регресії, алгоритму FALCON.

Ключові слова: математична модель, комп'ютерна гра, параметри керування, алгоритми вибору, сценарний аналіз, логічний висновок, досвід та гібридний підхід; сценарії; дерева класифікації та регресії; алгоритм FALCON.

Б. А. САЛТАН, Д. А. СОБКО, И. В. КУЛАКОВСКАЯ**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО ВЫБОРУ ИГРОВОГО ОРУЖИЯ КОМПЬЮТЕРНЫМ БОТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ FALCON**

Предлагается разработанная математическая модель алгоритма выбора оружия ботом в компьютерной игре жанра шутер с использованием сценарного анализа, которая приближает поведение искусственного интеллекта (ИИ) к человеческому в ситуациях, связанных с выбором средства поражения и прогнозированием перемещения противника, а также позволяет игроку получить от игры опыт высокого качества. Разработанный инструментальный ориентирован на дальнейшую разработку и оптимизации игрового процесса, который призван улучшить интерактивность и степень реализма в компьютерных играх. Приведены проектные решения по разработанной модели; проводится обобщение проведенной работы и полученных результатов, определяются перспективы дальнейшего обучения ИИ с использованием нейронных сетей. Математическая модель, построенная в данной работе, позволяет определять параметры управления, а вместе с ними и стратегии, которые регулируют уровень сложности игры и позволяют игроку одержать победу при правильном выборе его собственной стратегии. Проанализированы несколько подходов к решению поставленной задачи, а именно с применением логического вывода, опыта и гибридных подходов, сценариев деревьев классификации и регрессии, алгоритма FALCON.

Ключевые слова: математическая модель, компьютерная игра, параметры управления, алгоритмы выбора, сценарный анализ, логический вывод, опыт и гибридный подход; сценарии; деревья классификации и регрессии; алгоритм FALCON.

B. A. SALTAN, D. A. SOBKO, I. V. KULAKOVSKA**IMPROVING COMPUTER BOT WEAPON CHOICE DECISIONS USING FALCON NEURAL NETWORK LEARNING ALGORITHM**

The paper deals with the research and development of computer games using neural networks. A mathematical model of the algorithm for selecting a weapon by a bot in a shooter computer game using scenario analysis is proposed. The model approximates the behavior of the artificial intellect (AI) to human in situations involving choosing the means of defeat and predicting the movements of the enemy, which allows the player to obtain high quality game experience. The developed toolkit is focused on the further development and optimization of the game process, aimed at improving interactivity and degree of realism in computer games. The design decisions concerning the developed model are given; the generalization of the work performed and the results obtained, the prospects for further study of AI using neural networks are determined. The mathematical model built in the given work allows one to determine the control parameters, and with them the strategies that regulate the level of complexity of the game and allow the player to win in case of the right choice of his own strategy. Several approaches to solving the problem are analyzed, namely, the once involving logical conclusion, experience and hybrid approaches; scripts; classification and regression trees; FALCON algorithm.

Key words: mathematical model, computer game, control parameters, choice algorithms, scenario analysis, logical conclusion, experience and hybrid approach; scripts; classification and regression trees; FALCON algorithm.

Вступ. XXI століття – це час комп'ютерних технологій, які щодня розвиваються і використовуються як для праці, так і для відпочинку. Окрему нішу займають комп'ютерні ігри, тобто комп'ютерні програми або частини комп'ютерних програм, що служать для організації ігрового процесу (*геймплея*).

Шутер (від англ. shoot – *стріляти*) – популярний жанр відео ігор, ігровий процес яких заснований на боях в режимі реального часу з використанням, як правило, вогнепальної зброї. Програмування ігрового штучного інтелекту в шутерах зводиться, головним чином, до розробки моделі поведінки ботів. *Ботами* прийнято називати ворожих до гравця персонажів, які контролюються комп'ютером. Для того, щоб ігровий процес шутера був цікавим і реалістичним, боти повинні бути запрограмовані таким чином, щоб, з одного боку, їх було складно перемогти, але, з іншого боку, у людини залишалися шанси на перемогу. В ідеалі, боти повинні діяти подібно персонажам, контрольованим реальними людьми.

У зв'язку з цим, виникає ряд непростих завдань, таких як реалізація тактики командного ведення бою ботами; моделювання прицілювання, стрільби, переміщення ботів по карті; реалізація алгоритму вибору зброї ботом в залежності від ігрової ситуації. У даній роботі розглядається рішення останньої з перерахованих завдань.

© Б. А. Салтан, Д. А. Собко, І. В. Кулаковська, 2018

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Інформаційна база у сфері математичних моделей для комп'ютерних ігор жанру шутер майже відсутня. Аналіз джерел, знайдених в мережі Інтернет([1] – [6]), показав, що данні моделі представлені тільки у формі опису на форумах для гравців.

Основною метою роботи є дослідження математичної моделі алгоритму вибору стратегій ігрової програми, які визначають рівень складності гри і гарантують певний відсоток вигащів гравцеві, за умови, коли він визначить вірну стратегію гри для себе, з використанням сценарного аналізу, нейронних мереж, їх застосування в алгоритмі вибору зброї ботом в тривимірному шутері від першої особи, тестування реалізованих алгоритмів і виявлення переваг і недоліків кожного підходу.

Задача штучного інтелекту для ігор полягає в імітації поведінки об'єктів реального світу. Для цього слід почати розгляд штучного інтелекту з базових компонентів – від низькорівневих правил і алгоритмів до більш високого рівня, на якому працює тактичний і стратегічний ШІ. При цьому, слід домогтися високої ефективності роботи системи ШІ, оптимізувати її для використання на комп'ютерах. Це означає, що потрібні нові наукові і практичні розробки, які б дозволили більш широко використовувати технологію створення засобів ШІ.

Постановка задачі. В ході вивчення предметної області, було проаналізовано ряд матеріалів, які стосуються деталей використання сценарного аналізу, штучного інтелекту в відео іграх, в основному, в шутерах від першої особи. У багатьох сучасних іграх поведінка ботів характеризується високою передбачуваністю. Це пов'язано з тим, що розробники наголошують на ефективності застосовуваних алгоритмів, не замислюючись безпосередньо про модель прийняття рішень ботом. Так, в шутерах Left 4 Dead і Killzone для розрахунку траєкторії переміщення ботів використовується алгоритм A^* . При цьому, моделі поведінки ботів засновані на використанні кінцевих автоматів. В результаті, поведінка ботів повністю детермінована, на відміну від поведінки ігрових персонажів, контрольованих реальними людьми [1]. Безумовно, такий підхід до створення ігрового штучного інтелекту істотно знижує інтерес користувачів до проекту.

Крім передбачуваності прийнятих ботом рішень, недоліком такого підходу є велика кількість параметрів, які необхідно підбирати (в описаному вище прикладі таким параметром є *enemy.distance* – відстань між ботом і ворогом). Для того, щоб наблизити поведінку бота до реальності, потрібно враховувати багато факторів, і налаштування експертної системи стає складним завданням. Пропонується використовувати генетичні алгоритми для вирішення цього завдання.

Навчання з підкріпленням – сукупність методів машинного навчання, в ході яких агент навчається, взаємодіючи з деяким навколишнім середовищем. Агент взаємодіє з оточенням (*Environment*), застосовуючи різні дії (*Actions*) в залежності від значень певних параметрів (*State*) і отримуючи нагороду (*Reward*). Мета таких методів полягає в навчанні агента вибирати дії, ґрунтуючись на поточному стані навколишнього середовища, таким чином, щоб отримати максимальну нагороду [2]. У термінах поставленого завдання, використання методів навчання з підкріпленням в алгоритмі вибору зброї дозволяє боту протягом гри накопичувати досвід використання кожної зброї в різних ігрових ситуаціях і діяти відповідно із зібраними знаннями, постійно модифікуючи тактику вибору зброї з метою збільшення одержуваної нагороди.

Штучна нейронна мережа (ШНМ) – математична модель, побудована за принципом організації мереж нервових клітин живого організму. Нейронні мережі широко застосовуються в різних областях. Зокрема, вони активно використовуються в аналізі даних, наприклад, при вирішенні задач класифікації даних, кластеризації даних, апроксимації неперервних функцій.

Залежно від характеру навчання, ШНМ прийнято розділяти на ті, що навчаються з учителем і навчаються без учителя. Також, останнім часом, як правило, окремо виділяють нейронні мережі, які навчаються з підкріпленням. Кожен з перерахованих типів ШНМ призначений для вирішення певного класу задач. Навчання з учителем застосовується, коли заздалегідь відомі вихідні значення мережі при певних вхідних значеннях. Нейронні мережі даного типу підходять для вирішення таких завдань, як класифікація даних. Серед алгоритмів навчання таких мереж найбільш відомий *метод зворотного поширення помилки* (*backpropagation*) [3]. Нейронні мережі, які навчаються без вчителя, має сенс використовувати в тих випадках, коли немає ніякої апріорної інформації про те, якими мають бути вихідні значення мережі. Такі нейронні мережі, як правило, застосовуються для вирішення завдань кластеризації даних. У даній роботі була використана нейромережева модель FALCON, яка навчається з підкріпленням.

Модифікації алгоритму навчання FALCON. В ході роботи над проектом було прийнято рішення внести певні зміни в оригінальний алгоритм навчання FALCON з метою підвищення якості навчання нейронної мережі. Для нейрона когнітивного поля були визначені два цілочисельних параметра.

Перший параметр спочатку ініціалізується нулем. Кожен раз, коли нейрон вибирається для навчання і вибору дії, в разі, якщо застосована дія принесла позитивну нагороду, значення цього параметра збільшується на 1. В іншому випадку (якщо нагорода нульова), значення параметра зменшується на 1. Якщо значення параметра стає негативним, то такий нейрон підлягає негайному видаленню з когнітивного поля мережі. Даний параметр дозволяє боту не запам'ятовувати непотрібну інформацію і видаляти застарілі знання про навколишнє середовище.

Другий параметр – локальний лічильник випадків помилкового використання нейрона. Він збільшується в тих випадках, коли активність нейрона призводить до нульової нагороди, і обнуляється, коли бот отримує позитивну нагороду. Якщо значення параметра перевищує деяку константу (значення константи визначається користувачем нейронної мережі, в ході тестування було прийнято рішення зробити цю константу рівною трьом), тобто, якщо кілька разів поспіль активність нейрона призвела до отримання нульової нагороди, то відповідний нейрон видаляється з когнітивного поля. Даний параметр дозволяє боту швидко реагувати на зміни, що відбуваються в навколишньому середовищі (наприклад, на зміну тактики супротивника).

Під час «військових дій» можна зіштовхнутися із багаточисленними і різноманітними сценаріями, такими як рейди по тилах супротивника або засідки, лобові атаки і флангові напади, маневрена війна і позиційні бої, і т.п. Солдати, опинившись в певній ситуації, безперечно, прагнуть знайти найкращі інструментальні засоби для виконання свого бойового завдання, що дозволяє збільшити ймовірність успіху або просто забезпечити шанси на виживання.

До категорії стратегій високого рівня відносяться навички вибору зброї, які доповнюють навички володіння зброєю. Вибір зброї вдає із себе задачу, при вирішенні якої в процесі гри виникає багато варіантів. Під час бою найчастіше виявляється успішним один-єдиний якісний спосіб поведінки, незалежно від контексту. А коли доводиться маніпулювати самою зброєю, боту доводиться динамічно враховувати набагато більше факторів.

При вирішенні завдання вибору зброї може використовуватися навчання. При цьому виникають цікаві тенденції в розвитку проекту гри або навіть засобів ШІ. Наприклад, ми можемо визначити, чи є вибір зброї цілком виправданим і, в разі необхідності, модифікувати логіку поведінки гри.

Вихідні дані:

- розроблювані боти повинні бути здатними до стрільби, вони не зобов'язані мати ідеальну поведінку;
- для вибору зброї в грі абсолютно необхідна підтримка декількох видів зброї, як завжди, таку можливість має надавати ігрова машина;
- передбачається, що середовище дозволяє учасникам битви приймати вельми різноманітні розташування, що може приводити до того, що бойова ситуація кожен раз буде складатися по-різному.

Вибір зброї із застосуванням сценаріїв. Безумовно, засоби сценарної підтримки не є результатом досліджень виключно в області ШІ, але неможливо заперечувати й те, що ці засоби дуже широко використовуються в додатках ШІ, і особливо в комп'ютерних іграх [5].

Необхідність в застосуванні зручних мов сценаріїв не вичерпується традиційними підходами до створення ігрових засобів ШІ; в міру покращення додатків ШІ сценарна підтримка в них не виключається, а просто починає обслуговувати інші потреби (відмінні від потреб реалізації форм поведінки). Системи, які діють на основі застосування сучасних методів ШІ, виграють за рахунок використання мов сценаріїв також і в тому, що ці мови повністю забезпечують взаємодію основних компонентів. Рішення можуть бути отримані логічним шляхом на підставі вихідних фактів. Ми будемо керуватися даними про властивості зброї (наприклад, про ступінь завданої шкоди і темп стрільби) для вибору найбільш підходящої зброї. Застосовується декларативний підхід для визначення властивостей зброї. Це дозволяє надати засобам ШІ інформацію про скорострільність і очікувану шкоду.

Головна мета розробників комп'ютерних ігор – створити програму, яка б мала кілька рівнів складності, ігровий процес, та викликала високий рівень зацікавленості гравця і дозволяла б йому при виборі правильних стратегій поведінки досягати перемоги. Крім того, перемога гравця не повинна бути досить легкою. Отже, при розробці програмного коду комп'ютерної гри необхідно мати досить гнучкий алгоритм підбору стратегій, що гарантують певний процент позитивних результатів для гравця. Цей відсоток визначає рівень складності гри. Саме проблемі математичного моделювання алгоритму вибору стратегій комп'ютерної програми у відповідності до рівня складності гри присвячена дана робота. Вибір ботом зброї залежить від так званих *параметрів керування*. Розв'язання задачі визначення параметрів вибору базується на *математичній теорії ігор*.

Засоби ШІ повинні прийняти до розгляду зазначені факти і виробити рішення, що стосується того, наскільки підходить той чи інший вид зброї в поточній ситуації. Результатом застосування функції придатності стає одичне значення, яке представляє рівень придатності зброї. В даному випадку до складу характеристик входять компоновка середовища, відстані між учасниками гри, поточний рівень життєздатності та інші. Критерії прийняття рішення про те, який вид зброї повинен використовуватися, фактично представляють собою результати аналізу комбінацій цих характеристик [6].

В основі системи голосування лежить така ідея, що характеристики використовуються для вироблення рішення про те, яка властивість зброї в найбільшій мірі потрібна для їх реалізації, і сформована при цьому оцінка розглядається як голос на користь цієї властивості (рис. 1). На відміну від тієї системи голосування, яка застосовується в людському суспільстві, в даній системі голосування можна простіше передбачити можливість подавати більше ніж один голос, і навіть є можливість використовувати дробові значення кількості голосів.

Після цього, як показано нижче, отримані голоси застосовуються для масштабування властивостей зброї. Якщо за якусь властивість подано багато голосів, то це означає, що властивість є важливою, тому її числове значення множиться на більше число; і навпаки, отримання меншої кількості голосів свідчить про те, що властивість не є надто важливою. Маємо формулу

$$f(w) = P_i(w) * V_i + P_n(w) * V_n. \quad (1)$$

В наведеній формулі $f(w)$ позначає придатність зброї w , $P_i(w)$ позначає i -у властивість зброї, що розглядається (наприклад, швидкість та збиток від пострілу), а V_i показує загальну кількість голосів, поданих за цю властивість.

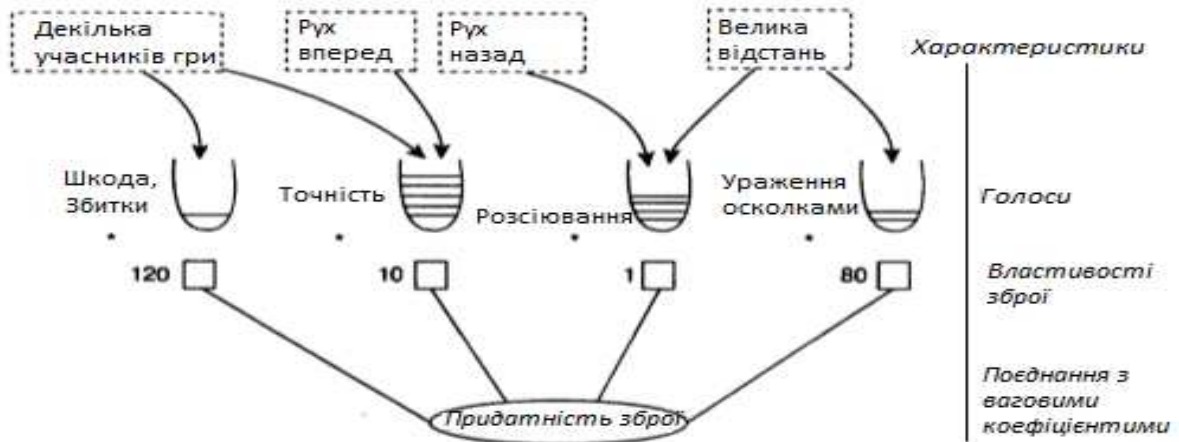


Рис. 1 – Схема організації системи голосування, що застосовується, в якій свій вклад в визначення кількості голосів вносять характеристики.

Значення кількості голосів множаться на значення властивості зброї і обраховується зважена сума, що визначає придатність зброї. Перш за все необхідно залучити до роботи експерта, щоб він визначив важливість властивостей в різних ситуаціях. Перш ніж почнеться голосування, необхідно виявити можливих кандидатів. У цьому розділі використовуються всі вказані на рис. 1 властивості зброї та до них додаються дві зазначені нижче властивості.

- **Точність стрільби.** Визначається як величина, зворотна розсіюванню.
- **Потенціал ураження.** Визначається як максимальна шкода з розрахунку на постріл, але використовується інше визначення вагового коефіцієнта, для того щоб цей фактор став менш значущим.

Таблиця 1 – Уточнення значимості характеристик зброї з допомогою голосування

Характеристика	Кількість голосів
Декілька гравців	Шкода, +4
Велика відстань	Точність, +2
Середня відстань	Кількість пошкоджень за секунду, +1; точність, +1
Коротка відстань	Кількість пошкоджень за секунду, +2
Рух уперед	Точність, +1
Рух назад	Розсіювання, +1
Рух в обмеженому просторі	Ураження осколками, +3
Напад із засади	Точність, +2
Пошук	Шкода, +1
Втеча	Потенційна ймовірність поразки, +аммо (кількість боєприпасів)

На наступному етапі необхідно вибрати характеристики ситуації, що враховуються при проведенні голосування. Рішення про використання тих чи інших характеристик засноване, головним чином, на інтуїції, а їх відносна значимість повинна уточнюватися на етапі проведення експериментів, як показано в табл. 1; деякі характеристики володіють голосами, величина яких перевищує одиницю, а інші характеристики віддають голоси на користь інших характеристик. Дані останнього рядка таблиці застосовуються незалежно від того, яку величину мають всі інші характеристики, а сам голос визначається пропорційно кількості боєприпасів.

Після збору всіх значень голосів отримані дані множаться на значення кожної властивості зброї. Сума зважених значень властивостей являє собою кінцеву величину придатності зброї. Зброя з найбільшим значенням придатності вибирається як найкраща.

Привабливою особливістю дерев рішень є те, що вони можуть знайти дуже широку сферу застосування. З іншого боку, існує велика кількість способів, що дозволяють забезпечити вибір зброї. Кількість можливих варіантів спільного застосування дерев рішень і таких способів ще більше. Проте, як показано на рис. 2, найбільш підходящими являються чотири варіанти, перераховані нижче.

1. Навчання вибору відповідної зброї.
2. Навчання оцінці придатності зброї.

3. Визначення за допомогою навчання властивостей зброї.
4. Навчання оцінці важливості властивостей.

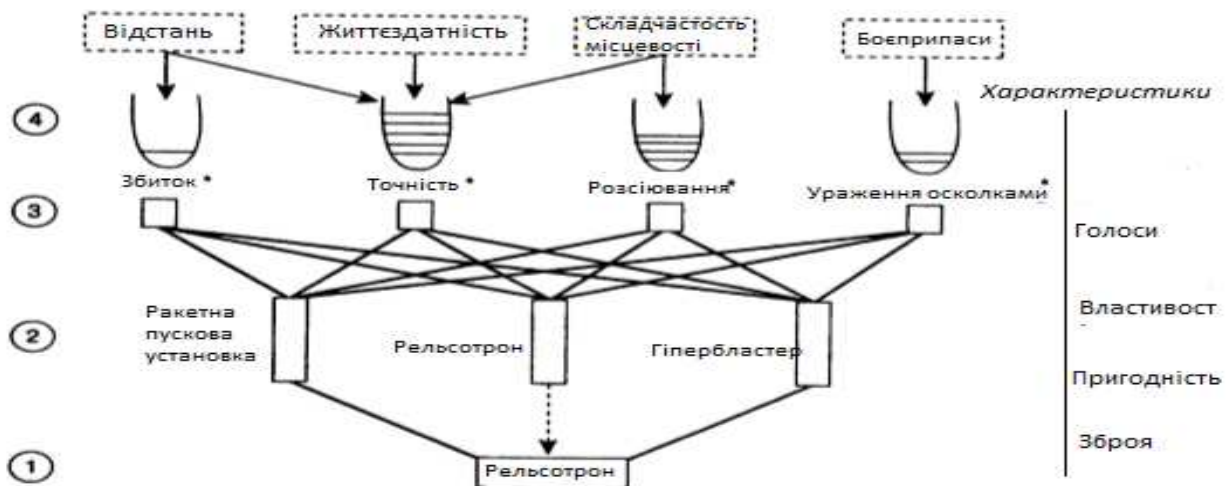


Рис. 2 – Концепції і процеси, пов'язані з прийняттям рішень по вибору зброї.

Навчання вибору відповідної зброї полягає в тому, що дерево рішень застосовується для отримання інформації про зброю, найкращу в кожній ситуації. Такий підхід рівносильний формуванню відображення з множини характеристик середовища на тип зброї. В цьому підході зосереджується все, що потрібно для вибору зброї, але використання єдиного компонента системи ШІ для рішення лише завдання визначення найкращої зброї призводить до виникнення на практиці багатьох проблем. Перелічимо деякі з них.

- Дерево рішень повертає тільки одну пропозицію на вибір зброї, тому не може застосовуватися в тих умовах, коли необхідна зброя недоступна.
- Дерево рішень повертає єдиний варіант і не дозволяє зрозуміти хід процесу, в якому цей варіант був сформований.
- Засоби ШІ повинні мати в своєму розпорядженні якийсь спосіб самостійно визначати найкращу зброю для контролю над навчанням дерева рішень.

Очевидно, що для рішення вказаних проблем можуть бути запропоновані три різних способи, що дозволяють більшою чи меншою мірою знайти вихід з положення. По-перше, можна продублювати дерева рішень, щоб можна було використовувати різні дерева в залежності від того, які види зброї є в наявності, але для реалізації цього методу потрібно більше пам'яті, а процес навчання сповільнюється. По-друге, можна вказати наявні види зброї в якості додаткових вхідних даних, але це призводить до *комбінаторного вибуху обсягу простору задачі*, тому спроба наближеного формування дерева рішень може викликати помилки. По-третє, можна зберігати результат вибору зброї, отриманий з допомогою дерева рішень, у вигляді списку видів зброї, ранжований за пріоритетами, але для цього потрібна адаптація дерева рішень, щоб його можна було використовувати в умовах наявності багатовимірних змінних відгуку [6]. Ці способи є застосовними, але не ідеальними. Більш прийнятний підхід може передбачати навчання оцінці придатності зброї в кожній конкретній ситуації.

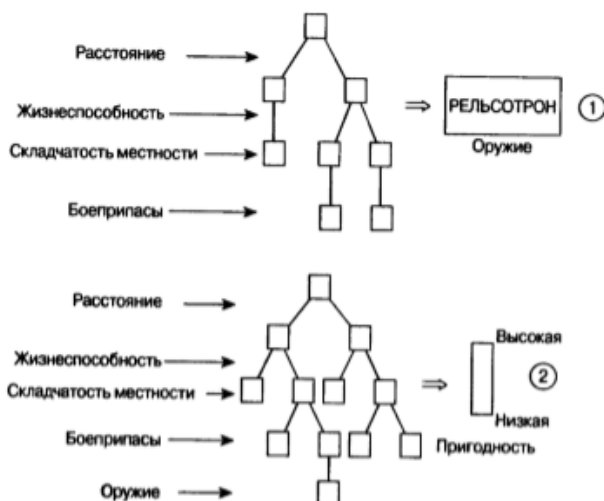


Рис. 3 – Варіанти використання дерев рішень.

Навчання оцінці придатності зброї. Для кожного виду зброї може бути передбачено окреме дерево рішень, що дозволяє оцінювати його придатність на підставі інформації про поточну ситуацію. У грі Quake 2 для цього потрібно дев'ять дерев рішень (оскільки зброя, що застосовується за замовчанням виключається з розгляду). При використанні даного підходу навички вибору зброї структуруються стосовно окремих видів зброї, тому навчання оцінці придатності зброї можна легко забезпечити за модульним принципом.

Проте, в зв'язку з необхідністю використовувати кілька дерев рішень замість одного, відбувається збільшення витрат, пов'язаних зі споживанням додаткової пам'яті і збільшенням обсягу коду. Замість цього можна було б використовувати позначення типу зброї в якості змінної прогнозування в дереві рішень (рис. 3), щоб мати можливість застосовувати

для оцінки придатності всіх видів зброї тільки одне велике дерево. Цей варіант більш зручний, оскільки необхідно лише одне дерево, для котрого може знадобитися менше ресурсів, ніж для окремих дерев. Найбільша проблема, з якою доводиться стикатися при використанні даного підходу, полягає в тому, що в деяких ситуаціях для контролю над навчанням доводиться обчислювати значення придатності. В деяких випадках доводиться вирішувати цю задачу окремо, дозволяючи засобам навчання дерева рішення формувати загальну поведінку.

Це можна зробити найпростіше шляхом повторного використання системи голосування. Для цього функціонування дерева рішень повинно бути засноване точно на таких же характеристиках, як і функціонування системи голосування. У такому випадку для навчання дерева рішень можуть використовуватися остаточні результати голосування. Дерево рішень, сформоване в результаті навчання, буде здатне ефективно представляти наближений результат голосування, тому не потрібно кожний раз проходити через весь процес голосування.

Визначення за допомогою навчання властивостей зброї. Даний підхід заснований на формуванні в результаті навчання дерева рішень, діючого на більш низькому рівні, що дозволяє виявляти різні властивості зброї виходячи з характеристик поточної ситуації. Такі властивості, як темп стрільби і скорострільність вражаючих елементів, не потребують навчання (принаймні не вимагають навчання за допомогою дерев рішень), оскільки являють собою постійні значення. З іншого боку, такі властивості, як максимальна шкода або оцінювана шкода, заподіяна в секунду, багато в чому залежать від поточної ситуації.

Перевага даного підходу полягає в тому, що його застосування приводить до отримання точних показників для властивостей зброї, на яких були засновані сценарні методи тактичних рішень. Дерева рішень дозволяють встановити те, наскільки отримані статистичні дані залежать від навичок бота, а також від різних ситуацій. З іншого боку, дерево рішень не представляє собою автономний метод, і при його використанні доводиться враховувати аспекти функціонування засобів ШІ. Якщо ми приймемо цей підхід, то отримаємо можливість ще раз скористатися всією системою голосування, яка, до того ж, буде вдосконалена в результаті навчання [7].

Використання FALCON для вибору зброї. На полі станів нейронної мережі State field було вирішено надавати значення наступних параметрів навколишнього середовища:

- distance – відстань між ботом і супротивником;
- velocity – модуль проекції вектора швидкості супротивника на площину, перпендикулярну лінії прицілу бота.

Всі дані величини нормовані, і лежать на відрізку $[0; 1]$. Разом з кожним параметром s_i подається зворотна величина $1 - s_i$. Це викликано особливостями формул, які використовуються в алгоритмі навчання мережі. Також, було визначено набір зброї, доступної для вибору ботом протягом гри:

1. автомат – зброя, ефективна на середній дистанції. Постріл виконується чергою з трьох патронів.

- шкоди (від одного патрона): 8;
- гранична дистанція 1500;
- затримка між пострілами: 0.5 с.

2. дробовик – зброя, вкрай ефективна на короткій дистанції. Постріл проводиться вісьмома дробинками, кожна з яких завдає ворогові невеликої шкоди:

- шкоди (від однієї дробинки): 5;
- гранична дистанція: 700;
- затримка між пострілами: 2.0 с.

3. гвинтівка – далекобійна зброя, що завдає великої шкоди одиночними пострілами. Ефективна на дальній дистанції:

- шкоди (від одного патрона): 15;
- гранична дистанція 1500;
- затримка між пострілами: 0.5 с.

Дії a_i відповідає використання зброї з індексом i . Одним з найбільш нетривіальних питань при використанні нейронної мережі, яка навчається з підкріпленням, є підбір функції нагороди. Очевидно, що нагорода, одержувана ботом після використання зброї, повинна залежати, в першу чергу, від шкоди, завданої ворогу. При цьому, бот повинен мати можливість отримати досить велику нагороду в будь-якій ігровій ситуації. Крім того, значення нагороди повинно належати відрізку $[0; 1]$, як будь-яке значення, яке подається на вхід FALCON. У підсумку, було прийнято рішення розраховувати значення нагороди наступним чином:

$$r = (1 + 9 * distance) * damage . \quad (2)$$

Тут $distance$ – нормована відстань між ботом і його супротивником; $damage$ – нормована величина шкоди, завданої противнику при пострілі.

Таким чином, при обчисленні нагороди величина шкоди множиться на лінійну функцію від відстані між ботом і його ворогом (конкретні значення параметрів лінійної функції були підібрані, виходячи з характеристик зброї, описаних вище). Це дозволяє вирівняти корисність від використання далекобійної зброї на дальній дисти-

нції, і зброї, призначеної для ближнього бою, на ближній. В іншому випадку, в процесі навчання можуть виникнути проблеми, так як зброї істотно розрізняються за абсолютними величинами нанесення шкоди.

Результати тестування нейронної мережі виводяться в спеціальний текстовий файл, який містить інформацію про те, скільки разів було вибрано кожен зброю в процесі гри, середні значення параметрів навколишнього середовища, при яких вибиралась зброя, кількість успішних застосувань зброї (застосування зброї вважається успішним, якщо була отримана позитивна нагорода), а також, середнє значення нагороди, отриманої при використанні зброї. Для наочності отримані результати наведені у вигляді таблиць.

В ході тестування проекту було проведено порівняльний аналіз роботи нейронної мережі, яка навчається за модифікованим алгоритмом, і роботи мережі, яка навчається за базовим алгоритмом (без модифікацій). Таблиці з результатами наведені нижче. В обох випадках нейронна мережа починала навчатися "з нуля"; тестування проводилося протягом 2 хвилин.

Таблиця 2 – Результати (базовий алгоритм):

Зброя	Число застосувань	Середня дистанція	Середня швидкість противника	Число успішних застосувань	Середня нагорода
Автомат	34	0.29	0.21	28	0.44
Дробовик	27	0.26	0.28	13	0.24
Гвинтівка	41	0.35	0.12	39	0.57

Таблиця 3 – Результати (модифікований алгоритм):

Зброя	Число застосувань	Середня дистанція	Середня швидкість противника	Число успішних застосувань	Середня нагорода
Автомат	27	0.28	0.17	22	0.45
Дробовик	25	0.18	0.24	18	0.36
Гвинтівка	48	0.39	0.21	44	0.6

Результати тестування показали, що в обох випадках нейронна мережа працює адекватно. Даний висновок можна зробити, виходячи з досить високої частки успішних застосувань зброї, а також, з середніх значень параметрів зовнішнього середовища: на ближній дистанції бот вважав за краще використовувати дробовик, на далекій – гвинтівку, на середній – автомат. У другій таблиці можна спостерігати більш чіткий поділ випадків застосування зброї в залежності від дистанції, і більш високі середні значення отриманої нагороди. Крім того, бот, тактика вибору зброї якого була заснована на нейронній мережі, навчений за базовим алгоритмом, за 2 хвилини не зміг навчитися правильно використовувати дробовик: з 27 випадків його застосування успішними виявилися лише 13; в разі застосування модифікованого алгоритму ця проблема не спостерігається: 25 випадків застосування дробовика, 18 з яких – успішні.

В ході роботи безпосередньо над алгоритмом вибору зброї було вирішено модифікувати ваги обраного нейрона тільки в разі отримання позитивної нагороди, тобто у разі попадання в супротивника з обраної зброї. Модифікування вагових коефіцієнтів нейрона в разі отримання нульової нагороди заважає стабільному навчанню нейронної мережі, оскільки ймовірність промаху є завжди, навіть при оптимальному використанні зброї. Своєчасні видалення нейронів стабільно приносять нульову нагороду та забезпечують бажані параметри.

Складність однієї ітерації використання FALCON становить $O(n^2)$, де n – кількість нейронів когнітивного поля мережі. Якщо в когнітивному полі накопичується занадто багато нейронів, мережа починає працювати повільно, що не дозволяє використовувати її в режимі реального часу. Для вирішення цієї проблеми був введений параметр, який відповідає за максимальну можливу кількість нейронів когнітивного поля. У разі, якщо число нейронів перевищує даний параметр, то нейрони когнітивного поля упорядковані відповідно до зменшення щодо середньої нагороди, отриманої під час їх активності, і половина нейронів (з меншим значенням середньої нагороди) видаляється. Це дозволяє зберігати компактність структури нейронної мережі на протязі її використання, не втрачаючи при цьому важливих знань, отриманих при взаємодії з навколишнім середовищем.

Зміни, внесені в алгоритм навчання нейронної мережі FALCON в ході роботи, мають перевагу, тому що істотно підвищують якість навчання мережі. Під час проведення дослідження було проаналізовано кілька підходів до вирішення поставленої задачі, а саме із застосуванням логічного висновку, досвіду та гібридного підходів, сценаріїв, дерев класифікації та регресії, алгоритму FALCON. Виявлені основні переваги та недоліки кожного із підходів. Алгоритм FALCON було модифіковано, що дозволило покращити результати його застосування, у порівнянні з базовим алгоритмом.

Перспективи дослідження. Проведені дослідження показали, що нейронні мережі, які навчаються з підкріпленням, можуть успішно застосовуватися при розробці ігрового штучного інтелекту. Основна перевага даного підходу перед традиційними методами реалізації моделей поведінки неігрових персонажів полягає в схожості поведінки створюваних таким чином ботів з персонажами, контрольованими реальними людьми: такі боти

здатні в процесі гри модифікувати тактику своєї поведінки, підлаштовуючись під зміни навколишнього середовища. Крім того, людина, що грає проти таких ботів, в силу недетермінованості моделі поведінки останніх, не може передбачати їх дії. Все це істотно підвищує реалістичність гри. Ще одна перевага даного підходу полягає в тому, що нейронна мережа може застосовуватися для підбору параметрів зброї, таких як пошкодження, що наноситься, точність, скорострільність та інших. Якщо в ході тестування гри бот занадто рідко (або занадто часто) вибирає якусь зброю, це означає, що набір зброї бота погано збалансований і параметри повинні бути модифіковані.

Варто додати, що боти, поведінка яких заснована на навчанні з підкріпленням, мають хороший потенціал для успішного проходження *тесту Тьюрінга для комп'ютерних ігор* – випробування, в ході якого судді в процесі гри визначають, ким контролюється той чи інший персонаж: людиною або комп'ютером.

Висновки Досліджено математичну модель алгоритму вибору ігрової зброї комп'ютерним ботом і реалізовано в програмі з використанням сценарного аналізу, дерев рішень, навченої нейронної мережі FALCON, а також їх застосування в алгоритмі вибору зброї ботом в тривимірному шутері від першої особи, тестування реалізованих алгоритмів і виявлення переваг і недоліків кожного підходу.

Проведені дослідження показали, що нейронні мережі, які навчаються з підкріпленням, можуть успішно застосовуватися при розробці ігрового штучного інтелекту. Основна перевага даного підходу перед традиційними методами реалізації моделей поведінки неігрових персонажів полягає в схожості поведінки створюваних таким чином ботів з персонажами, контрольованими реальними людьми: такі боти здатні в процесі гри модифікувати тактику своєї поведінки, підлаштовуючись під зміни навколишнього середовища. Крім того, людина, що грає проти таких ботів, в силу недетермінованості моделі поведінки останніх, не може передбачати їх дії. Все це істотно підвищує реалістичність гри. Ще одна перевага даного підходу полягає в тому, що нейронна мережа може застосовуватися для підбору параметрів зброї, таких як пошкодження, що наноситься, точність, скорострільність та інших. Якщо в ході тестування гри бот занадто рідко (або занадто часто) вибирає якусь зброю, це означає, що набір зброї бота погано збалансований і параметри повинні бути модифіковані.

Список літератури

1. Abu-Mostafa Y. S., Jaques J. N. St. Information capacity of the Hopfield model // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1985. – V. 31. – P.461.
2. Ackley D. H., Hinton G. E., Sejnowski T. J. A learning algorithm for Boltzmann machines // *Cognit. Sci.* – 1985. – V. 9. – N. 1. – P. 147 – 169.
3. Amari S. Field theory of self-organizing neural networks // *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* – 1983. – V. 13. – P. 741.
4. Takefuji D. Y. A new model of neural networks for error correction // *Proc. 9th Annu Conf. IEEE Eng. Med. and Biol. Soc., Boston, Mass., Nov. 13 – 16. – 1987. – V. 3. – New York, N. Y. – 1987. – P. 1709 – 1710.*
5. Тэнк Д. У., Хопфилд Д. Д. Коллективные вычисления в нейроноподобных электронных схемах // *В мире науки.* – 1988. – N 2. – С. 44 – 53.
6. Цуприков С. Нейронные вычисления берутся на вооружение // *Computerworld.* – Moscow, 1985. – N. 7. – С. 57 – 58.
7. Методы обучения нейросистем [WWW document]. – Режим доступа : http://zdo.vstu.edu.ru/umk/html/manual/L5_6.html. – Дата обращения : 18 февраля 2018.

References (transliterated)

1. Abu-Mostafa Y. S., Jaques J. N. St. Information capacity of the Hopfield model. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1985, vol. 31, p. 461.
2. Ackley D. H., Hinton G. E., Sejnowski T. J. A learning algorithm for Boltzmann machines. *Cognit. Sci.* 1985, vol. 9, no. 1, pp. 147–169.
3. Amari S. Field theory of self-organizing neural networks. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* 1983, vol. 13, p. 741.
4. Takefuji D. Y. A new model of neural networks for error correction. *Proc. 9th Annu Conf. IEEE Eng. Med. and Biol. Soc.* Boston, Mass., Nov. 13 – 16, 1987, vol. 3, New York, N. Y., 1987, pp. 1709–1710.
5. Tenk D. U., Hopfield D. D. Kollektivnyie vychisleniya v neyronopodobnykh elektronnykh skhemakh [Collective computations in neural-like electronic circuits]. *V mire nauki* [In the world of science]. 1988, no. 2, pp. 44–53.
6. Tsuprikov S. Neyronnye vychisleniya berutsya na vooruzhenie [Adopting neural computations]. *Computerworld.* Moscow, 1985, no. 7, pp. 57–58.
7. *Metody obucheniya neyrosistem* [WWW document] [Neural network learning methods]. Available at http://zdo.vstu.edu.ru/umk/html/manual/L5_6.html (accessed 18 February 2018).

Надійшла (received) 21.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Салтан Борис Андрійович (Салтан Борис Андреевич, Saltan Borys Andriyovych) – магістр, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв; тел.: (068) 083-40-55; e-mail: bs.arezius@gmail.com.

Собко Дмитро Анатолійович (Собко Дмитрий Анатольевич, Sobko Dmytro Anatoliyovych) – магістр, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв; тел.: (063) 657-29-41; e-mail: sobkod23@gmail.com.

Кулаковська Інесса Василівна (Кулаковская Инесса Васильевна, Kulakovska Inessa Vasyilivna) – канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри інтелектуальних інформаційних систем, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв; тел.: (066) 646-48-47, (067) 698-93-57; e-mail: kulaknic@gmail.com; (ORCID: 0000-0002-8432-1850).

УДК 621.372.41

*Д. Д. ТАТАРЧУК, Ю. В. ДІДЕНКО, А. П. ПОПРАВКА, К. С. БРАГЕ***МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ ФІЛЬТРІВ НВЧ НА ОСНОВІ ТОНКИХ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ РЕЗОНАТОРІВ ТА МЕТОДИ ВИМІРЮВАННЯ ЇХ ПАРАМЕТРІВ**

Розглянуто основні принципи створення фільтрів надвисоких частот на основі тонких діелектричних резонаторів. Наведено варіанти конструкцій фільтрів НВЧ. Приведено математичну модель розрахунку резонансної частоти фільтру, граничні умови та метод їх розрахунку. Описано методику вимірювання параметрів фільтрів і наведено результати теоретичних та експериментальних досліджень обраних конструкцій. Проведено аналіз отриманих результатів: порівняно розраховані та виміряні результати, розглянуто методи вимірювання параметрів діелектричних матеріалів на основі тонких резонаторів, проведено дослідження матеріалів одним із методів.

Ключові слова: тонкий діелектричний резонатор, методи вимірювання, фільтр, діелектрик, надвисокі частоти, параметри матеріалів.

*Д. Д. ТАТАРЧУК, Ю. В. ДІДЕНКО, А. П. ПОПРАВКА, К. С. БРАГЕ***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ФИЛЬТРОВ СВЧ НА ОСНОВЕ ТОНКИХ ДИЭЛЕКТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИХ ПАРАМЕТРОВ**

Рассмотрены основные принципы создания фильтров СВЧ на основе тонких диэлектрических резонаторов. Показаны примеры их конструкций. Приведены математическая модель расчета резонансных частот фильтров, граничные условия и методы их расчета. Описана методика измерения параметров и приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований выбранных конструкций фильтров. Проведен анализ полученных результатов: рассмотрены методы измерения параметров диэлектрических материалов на основе тонких диэлектрических резонаторов, проведено сравнение рассчитанных и измеренных результатов, описано исследование материалов одним из методов измерения параметров тонких диэлектрических резонаторов.

Ключевые слова: тонкий диэлектрический резонатор, методы измерения, фильтр СВЧ, диелектрик, сверхвысокие частоты, параметры материалов.

*D. D. TATARCHUK, Y. V. DIDENKO, A. P. POPRAVKA, K. S. BRAGE***MATHEMATICAL MODELING OF MICROWAVE FILTERS BASED ON THIN DIELECTRIC RESONATORS AND METHODS FOR MEASURING THEIR PARAMETERS**

In the article the basic principles of creating microwave filters based on thin dielectric resonators are considered. Examples of designs of microwave filters are given. The mathematical model of the filter, the boundary conditions and the method for calculating the filter are given. A technique for measuring parameters is described and the results of theoretical and experimental studies of selected filter designs are presented. The results obtained are analyzed by comparing the computed results with the measured ones. Also in the article methods of measuring the parameters of dielectric materials on the basis of thin dielectric resonators are considered, and materials are investigated by one of the methods.

Key words: thin dielectric resonator, measurement methods, microwave filter, dielectric, ultrahigh frequencies, material parameters.

Вступ: У сучасному світі надвисокочастотні (НВЧ) хвилі використовуються досить активно. Мобільні телефони працюють на НВЧ випромінюванні. Широко використовуються технології, такі як Wi-Fi, безпроводний Wi-Max, LTE (Long Term Evolution), радіоінтерфейс малого радіусу дії Bluetooth, системи радіолокації та радіонавігації, навіть робота мікрохвильової печі, усі вони використовують у своїй роботі НВЧ хвилі. Тому не дивно, що з кожним роком вимоги до НВЧ конструкцій стають більш жорсткими. Покращення добротності конструкцій, знаходження значень власних хвиль та резонансних частот для більш раціонального використання – всі ці задачі є важливими для подальшого розвитку НВЧ технологій. Тому темою статті було обрано математичне моделювання конструкцій фільтру НВЧ на основі тонких діелектричних резонаторів та методи вимірювання їх параметрів.

Аналіз попередніх досліджень: Попередні дослідження [1 – 3] показали, що одним із перспективних напрямків розвитку конструкцій НВЧ є конструкції на основі тонких діелектричних резонаторів. Одним із перспективних напрямків розвитку НВЧ є конструкції та методи дослідження параметрів матеріалів на основі тонких резонаторів. Особливої уваги заслуговують фільтри НВЧ на їх основі та розроблення методів дослідження параметрів матеріалів на основі тонких резонаторів.

Постановка задачі: Вимоги до сучасних конструкцій НВЧ та матеріалів для їх створення значно зросли. Тому метою роботи є розробка нових моделей на прикладі фільтрів НВЧ та дослідження параметрів матеріалів, на основі яких побудовані конструкції. Щоб досягти поставленої мети, необхідно розв'язати такі задачі:

1. розробка адекватної математичної моделі тонких діелектричних резонаторів;
2. розробка конструкцій фільтрів;
3. експериментальне дослідження конструкції фільтрів;
4. перевірка параметрів фільтру методом тонкого діелектричного резонатора.

Математична модель тонкого діелектричного резонатора. Як було показано у роботах [1, 2], при додержанні певних вимог, у тонких діелектричних резонаторах (рис 1) виникають високодобротні резонансні коливання.

© Д. Д. Татарчук, Ю. В. Діденко, А. П. Поправка, К. С. Браге, 2018

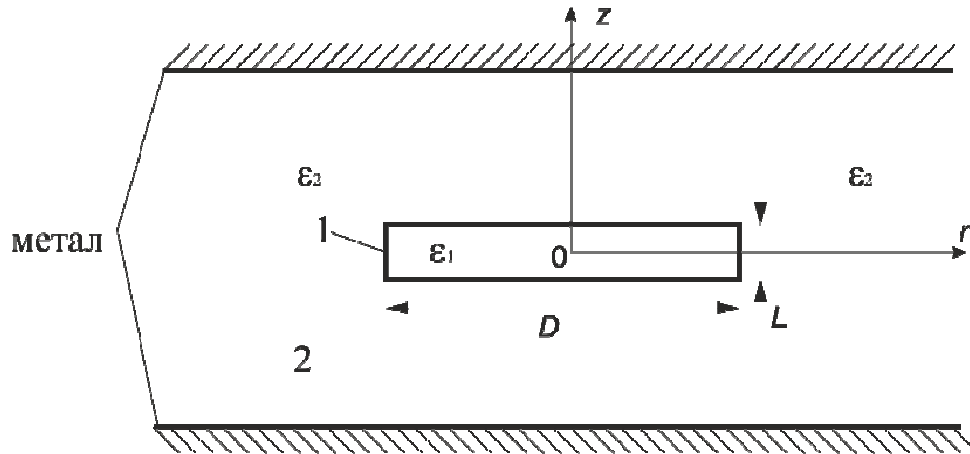


Рис. 1 – Тонкий діелектричний резонатор.

Резонансні системи на основі тонких діелектричних резонаторів можна математично описати за допомогою системи рівнянь Гельмгольца

$$\nabla^2 \Gamma_i^e + \varepsilon_i \mu_i k^2 \Gamma_i^e = 0; \quad \nabla^2 \Gamma_i^m + \varepsilon_i \mu_i k^2 \Gamma_i^m = 0, \quad (1)$$

та граничних умов

$$n \times (E_i - E_j) = 0; \quad n \cdot (E_i \varepsilon_i - E_j \varepsilon_j) = \rho_{cs}; \quad n \times (H_i - H_j) = j_s; \quad n \cdot (H_i \mu_i - H_j \mu_j) = 0. \quad (2)$$

де Γ^e , Γ^m – електричний і магнітний вектори Герца, відповідно; ε_i – діелектрична проникність i -ої області резонансної системи; μ_i – магнітна проникність i -ої області резонатора; j_s – нормальна до межі поділу області компонента густини струму; ρ_{cs} – поверхнева густина заряду на межі поділу областей;

$$k = \frac{\omega}{c},$$

c – швидкість світла у вакуумі; ω – частота стаціонарних коливань резонатора.

Для розв'язання системи (1) необхідно введення додаткових граничних умов на межі поділу двох середовищ та між стінками хвилеводу і резонатора. Загальний розв'язок рівняння Гельмгольца визначається хвилями, одна з яких іде на нескінченність, а інша – приходить з нескінченності. Однак, на нескінченності джерел електромагнітного поля немає, тому маємо наступне рівняння для хвилі, що йде на нескінченність:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\tau \left(\frac{dv}{dr} + jkv \right) = 0, \quad (3)$$

де r – відстань між початком координат та точкою спостереження; $\tau = 1$ для тривимірного простору, та $\tau = 0,5$ – для двовимірного простору; j – число, що дорівнює $\sqrt{-1}$; v – розв'язок однорідного рівняння Гельмгольца.

Беручи за основу розрахунки, проведені у роботах [6] та [7], рішення системи (1) зводиться до розв'язання наступної системи:

$$\begin{aligned} \det(S) &= 0; \\ \frac{\beta_{z1p} \operatorname{tg} \left(\beta_{z1p}^e \frac{L}{2} \right)}{\varepsilon_1} + \frac{\beta_{z2p} \operatorname{tg} \left(\beta_{z2p}^e \frac{L}{2} \right)}{\varepsilon_2} &= 0; \\ (\beta_{1p}^e)^2 + (\beta_{z1p}^e)^2 &= \varepsilon_1 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu_1; \\ (\beta_{2p}^e)^2 + (\beta_{z2p}^e)^2 &= \varepsilon_2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu_1, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\det(S)$ – визначник системи лінійних рівнянь, до яких зводиться розв'язок рівнянь Гельмгольца [7]; β_{z1p} – повздовжнє хвильове число i -тої області; β_{1mp} – поперечне хвильове число i -тої області в циліндричній системі координат; L – товщина базової області резонатора.

Наведена вище система може бути розв'язана методом скінченних елементів за допомогою ЕОМ. Як правило, похибка розрахунків не перевищує 1...2% при розрахунку частот та 5...7% при розрахунку добротності резонансної системи.

За допомогою даної математичної моделі були проведені розрахунки резонансних частот і добротностей багатьох конструкцій фільтрів на основі тонких діелектричних резонаторів та проведений їх аналіз [3]. Для подальшої роботи було обрано дві конструкції фільтрів, за основу яких взяті відрізки прямокутного хвилеводу (рис. 2, 3). Основними критеріями вибору даних конструкцій були їх прийнятні характеристики для практичного використання та можливість експериментального дослідження за допомогою засобів, наявних у лабораторії.

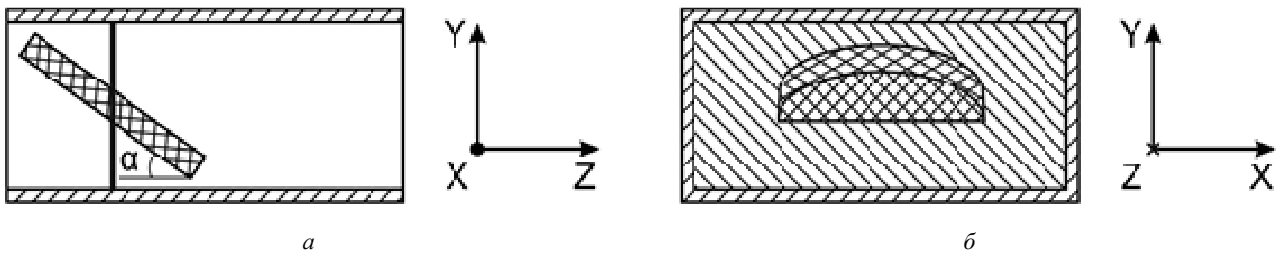


Рис. 2 – Конструкція смугопропускового фільтру на основі тонкого діелектричного резонатора:
а – вид збоку; б – вид спереду.

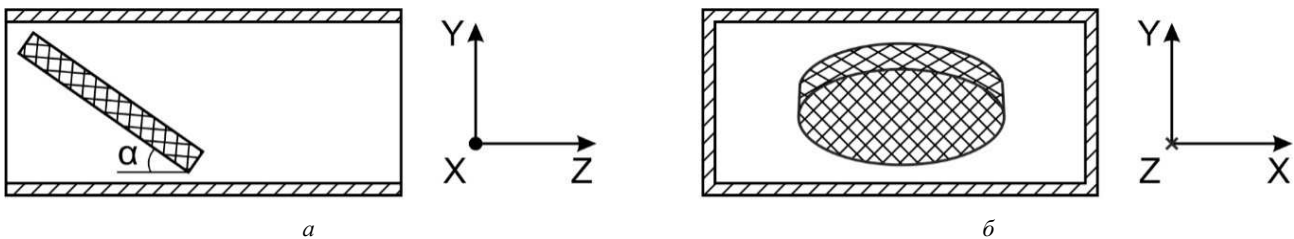


Рис. 3 – Конструкція смугозагороджувального фільтру на основі тонкого діелектричного резонатора:
а – вид збоку; б – вид спереду.

Діелектричну пластину (тонкий діелектричний резонатор) було розміщено у прямокутному хвилеводі під кутом $\alpha = 10^\circ$ до широкої стінки хвилеводу та у напрямку розповсюдження електромагнітних хвиль. Параметри тонкого діелектричного резонатора: діаметр $D = 12,83 \text{ мм}$; товщина $h = 0,63 \text{ мм}$; матеріал, з якого виготовлений зразок, – кераміка ТЦ35 ($\text{BaTi}_4\text{O}_9 + \text{ZnO}$); діелектрична проникність зразка $\epsilon = 35 \dots 37$. Для тримача можна використовувати матеріали, у яких проникність в НВЧ діапазоні близька до одиниці. У нашому випадку використовувався тримач, виготовлений із кварцу. Для реалізації конструкції смугопропускового фільтру (рис. 1), необхідно було перекрити поперечний переріз хвилеводу металевою пластинною із щілиною, через яку вставляється тонкий діелектричний резонатор.

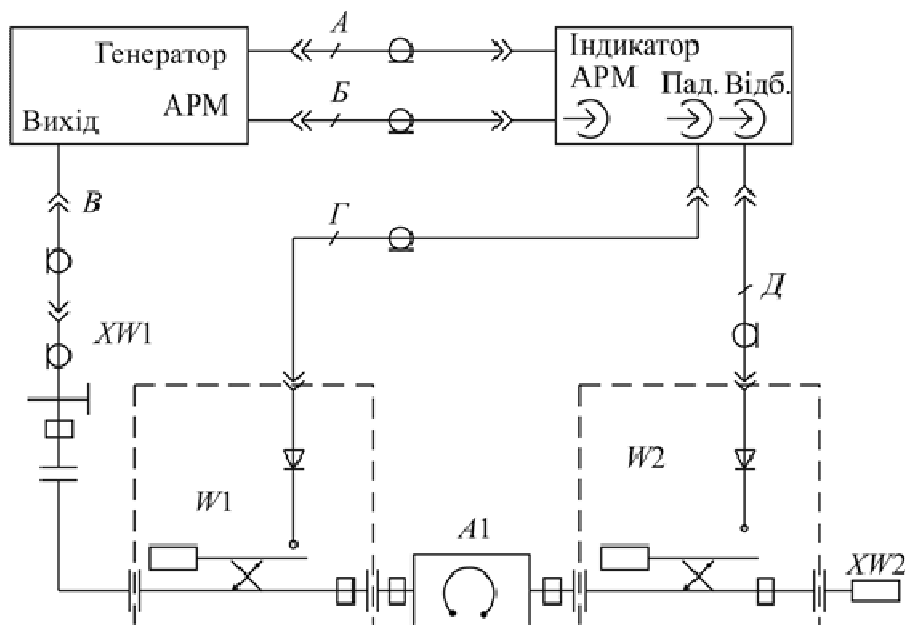


Рис. 4 – Схема підключення макету фільтру до панорамного вимірювача: А1 – досліджуваний макет; W1, W2 – рефлектометри падаючої та відбитої хвиль; XW1 – коаксіальний перехід; XW2 – узгоджене навантаження; А, Б, В, Г, Д – високочастотні коаксіальні кабелі.

Результати теоретичних та експериментальних досліджень обраних конструкцій. Для дослідження адекватності математичної моделі було проведено експериментальне дослідження обраних конструкцій за допомогою панорамного вимірювача. Підключення макету відбувалося за схемою, наведеної на рис. 4.

В результаті експериментального дослідження та моделювання були отримані наступні характеристики для смугозагороджувального та смугопропускнуго фільтру, де суцільною лінією показані результати теоретичного дослідження, а точковою – експериментального.

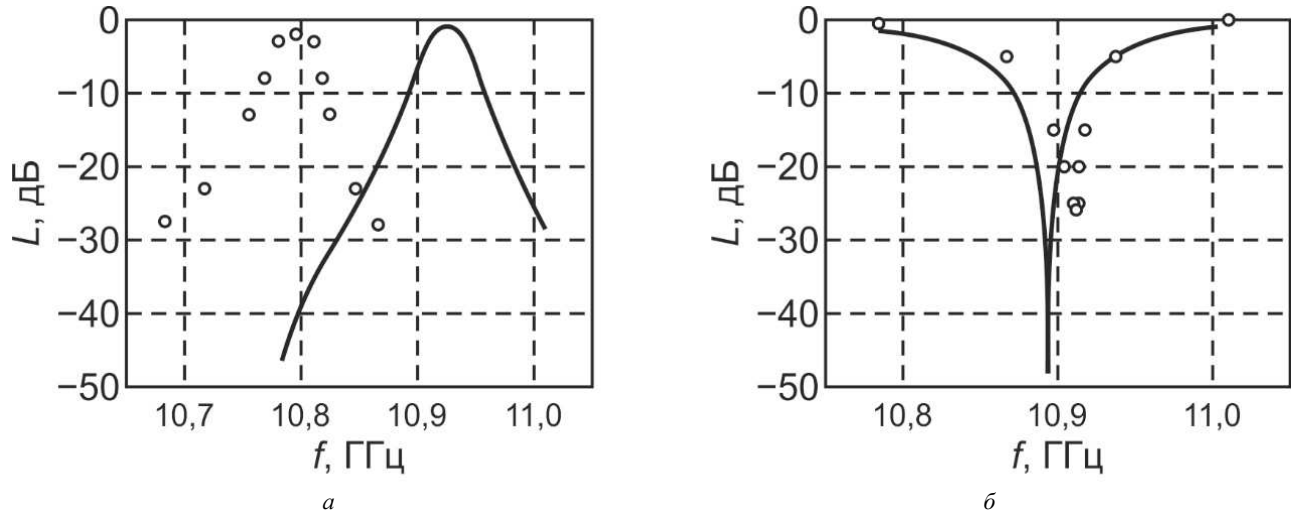


Рис. 5 – Результати експериментального дослідження фільтрів на основі тонких діелектричних резонаторів: а – смугопропускнуго; б – смугозагороджувального.

Похибка розрахованого значення центральної частоти смугопропускнуго фільтру від значення, отриманого експериментально, не перевищує 1 %, з чого можна зробити висновок, що розроблена нами математична модель є придатною для використання.

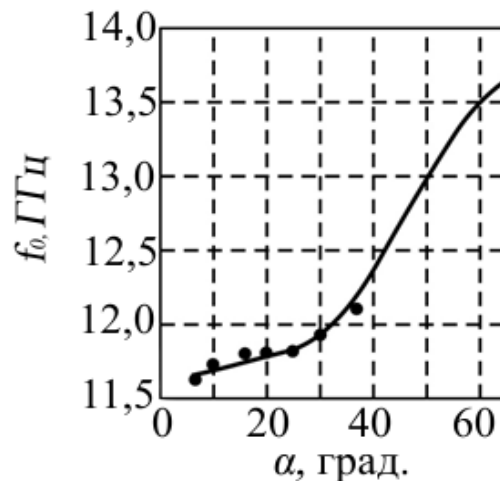


Рис. 6 – Графік залежності резонансної частоти нижчої НЕ-моди від кута повороту резонатора.

Також на основі тонких діелектричних резонаторів можна реалізувати конструкції керованих фільтрів НВЧ.

Існують наступні методи керування:

- механічне;
- електромеханічне;
- електричне;
- магнітне;
- оптичне;
- п'єзоелектричне;

- комбіноване.

Для реалізації керованого фільтра НВЧ на основі тонкого діелектричного резонатора, можна використати модель, представлену на рис. 3, оскільки резонансна частота фільтру суттєво змінюється в залежності від кута нахилу резонатора відносно широкої стінки хвилеводу. Реалізувати зміну кута нахилу резонатора у площині хвилеводу можливо за допомогою крокового двигуна, керованого мікроконтролером. Було обрано саме такий спосіб через точність керування кутом нахилу.

На основі конструкції фільтру, показаного на рис. 3, електричного методу керування, описаного вище, був отриманий графік залежності перебудови резонансної частоти від кута нахилу резонатора відносно широкої стінки хвилеводу, показаний на рис. 6, де суцільною лінією показані результати теоретичного дослідження, а точковою – експериментального.

Як бачимо із отриманого графіка, при збереженні високого значення добротності (порядку 1700) було досягнуто значення діапазону зміни частоти до 18 %. Максимальне значення перебудови частоти (13,6 ГГц) було одержано при значенні кута повороту $\approx 60^\circ$.

Методи вимірювання параметрів діелектричних матеріалів. Оскільки існує задача побудови конструкцій фільтрів, розглянутих раніше, то необхідно розробляти нові методи для дослідження їх параметрів.

До нових НВЧ матеріалів висувається ряд вимог, основними з яких є:

- низький рівень діелектричних втрат, висока діелектрична проникність;
- висока температурна стабільність;
- механічна міцність;
- довговічність;
- стійкість до різноманітних зовнішніх впливів;
- низька собівартість;
- технологічність виготовлення;
- можливість автоматизації виробництва;
- відтворюваність параметрів за умов масового виробництва;
- екологічна безпечність у процесі виготовлення та експлуатації тощо.

Ці вимоги є суперечливими, тому вибір того або іншого матеріалу має компромісний характер.

Проте, створення таких матеріалів неможливо без фундаментального дослідження їх фізичних властивостей. Однією з найважливіших умов для проведення таких досліджень є наявність досконалих методів вимірювання діелектричних характеристик матеріалів. НВЧ методи мають ряд переваг над контактними методами, а саме: можливість дослідження матеріалів без руйнування зразка, відсутність похибок, пов'язаних з контактними явищами тощо.

В даний час, існує велика кількість НВЧ методів дослідження матеріалів. Проте, дослідження в цій області не можуть вважатися завершеними, оскільки кожен з методів має свої недоліки, які обмежують його використання [1]. Так методи, що засновані на використанні коаксialного пробника мають низьку точність вимірювання діелектричної проникності та тангенса кута діелектричних втрат при дослідженні матеріалів з низьким рівнем втрат, методи вимірювання у вільному просторі мають обмеження на мінімальну товщину зразка, стандартні хвилеводні методи чутливі до повітряних зазорів між зразком та широкою стінкою хвилеводу. Особливо великі труднощі виникають при дослідженні тонких діелектричних плівок та пристроїв на їх основі, тому що існуючі методи не забезпечують достатньої точності. Саме тому в даній статті розглядається метод тонкого діелектричного резонатора, який дає можливість дослідження НВЧ характеристик тонких діелектричних плівок, нанесених на підкладку.

Метод тонкого діелектричного резонатора відносять до групи методів складеного діелектричного резонатора. Дана група методів базується на вимірюванні ефективної діелектричної проникності та ефективного тангенса кута діелектричних втрат резонатора, який складається з опорного матеріалу з відомими характеристиками та досліджуваного матеріалу [2]. На основі отриманих результатів розраховують значення шуканих характеристик досліджуваного матеріалу. Базовий і досліджуваний матеріали можуть розміщуватись у вигляді паралельних або послідовних шарів матеріалу. При такому розміщенні шарів матеріалу досягається максимальне збурення ліній електричного поля резонансної системи, що дозволяє отримати максимальну чутливість системи до зміни характеристик діелектричних шарів. Зазвичай використовують резонатори у вигляді циліндру або паралелепіпеду, оскільки для таких структур легше провести точний розрахунок шуканих величин. Крім того такі резонатори більш технологічні у виготовленні і мають кращу відтворюваність параметрів за умов масового вироб-

ництва.

Для випадку паралельного з'єднання шарів матеріалу (рис. 7) маємо діелектричний резонатор з фіксованою власною резонансною частотою, на якому розміщено шар досліджуваного матеріалу.

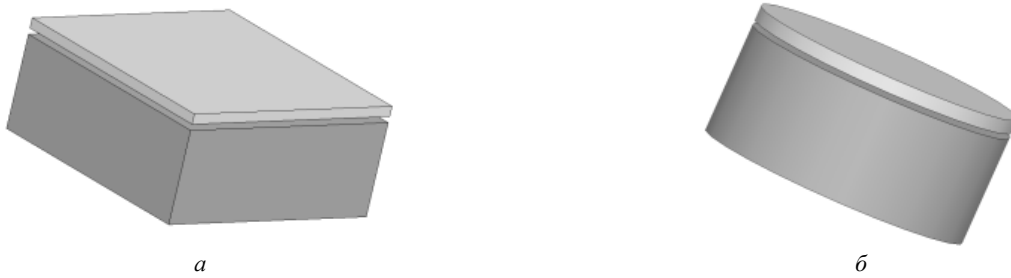


Рис. 7 – Структури з паралельним розташуванням шарів матеріалу: *a* – прямокутна; *б* – циліндрична.

Для проведення вимірювання використовують вимірювальну комірку рис. 8.

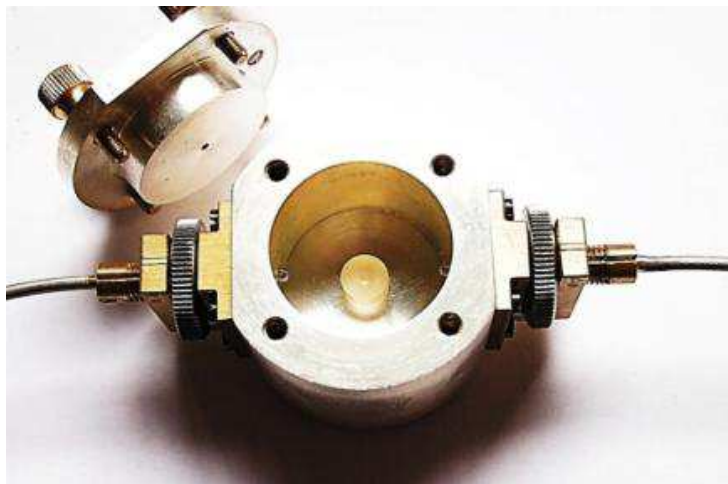


Рис. 8 – Вимірювальна комірка зі зразком.

Вираз для чутливості методу складеного резонатора записується наступним чином:

$$S_n = A \frac{\Delta F}{F} \frac{L_f}{L_s}, \quad (5)$$

де A – константа, яка залежить від співвідношення діелектричних проникностей базового резонатора та досліджуваної плівки; L_f – товщина плівки; L_s – товщина підкладки; F – резонансна частота; ΔF – зміщення резонансної частоти.

З виразу (5) видно, що чутливість методу буде суттєво залежати від співвідношення товщин плівки та базового резонатора. Нижче наведено типову залежність чутливості методу у сантиметровому діапазоні довжин хвиль рис. 9.

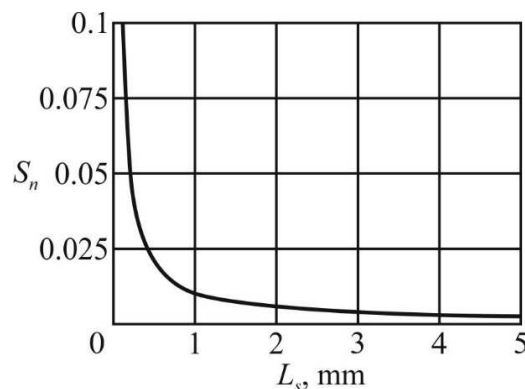


Рис. 9 – Залежність чутливості методу від товщини базового резонатора; діелектрична проникність базового резонатора становить 10, товщина плівки – 20 нм.

Отже, при збільшенні товщини досліджуваної плівки та зі зменшенням товщини підкладки збільшується й чутливість методу.

Для визначення втрат у досліджуваному матеріалі можна скористатися таким виразом [6, 7]:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_f}, \quad (6)$$

де Q – добротність складеного резонатора; Q_s – добротність базового резонатора без плівки; Q_f – добротність досліджуваної плівки.

Для перевірки методу вимірювання було виміряно діелектричну проникність зразків, виготовлених з кераміки ТБНС, АЛТК та ТЛЮ. Результати приведені у табл. 1.

Таблиця. 1. Діелектрична проникність зразків виготовлених з кераміки ТБНС, АЛТК та ТЛЮ

Діаметр, мм.	Матеріал	ε – визначена даним методом	ε – довідникові дані
7.2	АЛТК	39.9	40
2.6	ТБНС	79.5	81
2.6	ТЛЮ	39.3	40

З результатів, наведених у табл. 1 видно, що даний метод забезпечує достатньо високу точність вимірювання діелектричної проникності матеріалів у НВЧ діапазоні частот.

Висновки. На основі тонких діелектричних резонаторів можна створити прийнятні для практичного використання фільтри НВЧ. Дослідити характеристики обраного діелектричного резонатора можна методом тонкого діелектричного резонатора, оскільки даний метод має наступні переваги.

1. Розглянутий метод дозволяє визначати як діелектричну проникність, так і діелектричні втрати досліджуваного матеріалу.
2. Точність вимірювання збільшується зі зростанням діелектричної проникності досліджуваного матеріалу та зі зменшенням діелектричної проникності базового резонатора.
3. Чутливість методу збільшується зі збільшенням товщини досліджуваної плівки та зі зменшенням товщини підкладки.

Характеристики фільтрів такі, як добротність та резонансні частоти, можуть бути точно розраховані за допомогою числового розв'язку системи рівнянь Гельмгольца при заданих граничних умовах. Похибка розв'язання такої системи не перевищує 1...2 % при розрахунку частот, і 5...7 % при розрахунку добротності резонансної системи.

Експериментальні дослідження добре узгоджуються з теоретичними розрахунками, що дає змогу автоматизувати проектування фільтрів на основі тонких діелектричних резонаторів.

Список літератури

1. Татарчук Д. Д., Молчанов В. И., Діденко Ю. В., Франчук А. С. Тонкие диэлектрические резонаторы миллиметрового диапазона длин волн // Electronics and Communications. – 2015. – Т. 20. – № 6 (89). – С. 6 – 10.
2. Молчанов В. И., Пашков В. М., Татарчук Д. Д., Франчук А. С. Вимірювання НВЧ параметрів діелектричних матеріалів методом тонкого діелектричного резонатора // Electronics and Communications. – 2015. – Vol. 20. – № 1 (84). – PP. 23 – 26.
3. Татарчук Д. Д., Молчанов В. И., Діденко Ю. В., Франчук А. С. Фільтри НВЧ на основі тонких діелектричних резонаторів / Electronics and Communications. – 2016. – Т. 21. – № 6 (95). – С. 6 – 9.
4. Ильинский А. С., Крайцов В. В., Свешиников А. Г. Математические модели электродинамики: учеб. пособие для вузов. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
5. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ: численные методы расчёта и проектирования. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.
6. Безбородов Ю. М., Нарытник Т. Н., Фёдоров В. Б. Фильтры СВЧ на диэлектрических резонаторах. – К. : Техника, 1989. – 184 с.
7. Татарчук Д. Д. Комбіновані структури НВЧ з діелектричним резонансом E – типу : дис. канд. техн. наук : 05.27.01 : захищена 29.01.2001 / Татарчук Дмитро Дмитрович. – К., 2000. – 170 с.

References (transliterated)

1. Tatarchuk D. D., Molchanov V. I., Didenko Yu. V., Franchuk A. S. Tonkie dielektricheskie rezonatory millimetrovogo diapazona dlin voln [Thin dielectric resonators of millimeter wavelength range]. *Electronics and Communications*. 2015, vol. 20, no. 6 (89), pp. 6–10.
2. Molchanov V. I., Pashkov V. M., Tatarchuk D. D., Franchuk A. S. Vymiryuvannya NVCh parametriv dielektrychnykh materialiv metodom tonkoho dielektrychnoho rezonatora [Using thin dielectric resonator method for measuring SHF parameters of dielectric materials]. *Electronics and Communications*. 2015, vol. 20, no. 1 (84), pp. 23–26.
3. Tatarchuk D. D., Molchanov V. I., Didenko Yu. V., Franchuk A. S. Fil'try NVCh na osnovi tonkykh dielektrychnykh rezonatoriv [SHF filters based on thin dielectric resonators]. *Electronics and Communications*. 2016, vol. 21, no. 6 (95), pp. 6–9.
4. Il'yinskiy A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki : ucheb. posobie dlya vuzov* [Mathematical models of electrodynamics : textbook. for universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 224 p.
5. Grigor'ev A. D., Yankevich V. B. *Rezonatory i rezonatornye zamedlyayushchie sistemy SVCh : chislennyye metody rascheta i proektirovaniya* [Resonators and resonator microwave deceleration systems : numerical methods of calculation and design]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984. 248 p.
6. Bezborodov Yu. M., Narytnik T. N., Fedorov V. B. *Fil'try SVCh na dielektricheskikh rezonatorakh* [Microwave filters on dielectric resonators]. Kiev, Tekhnika Publ., 1989. 184 p.
7. Tatarchuk D. D. *Kombinovani struktury NVCh z dielektrychnym rezonansom E – typu : dys. kand. tekhn. nauk 05.27.01* [Combined microwave structures with E – type dielectric resonance: diss. Cand. Tech. Sciences]. Kyiv, 2000. 170 p.

Надійшла (received) 05.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Татарчук Дмитро Дмитрович (Татарчук Дмитрий Дмитриевич, Tatarchuk Dmytro Dmytrovych) – кандидат технічних наук, доцент, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (097) 152-18-61; e-mail: d.tatarchuk@kpi.ua.

Діденко Юрій Вікторович (Диденко Юрий Викторович, Didenko Yuriy Viktorovich) – кандидат технічних наук, старший викладач, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (050) 628-73-23; e-mail: yu.didenko@kpi.ua.

Поправка Анастасія Павлівна (Поправка Анастасия Павловна, Popravka Anastasiya Pavlivna) – магістрант, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (095) 311-03-94; e-mail: anastasiia.popravka@gmail.com.

Браге Ксенія Сергіївна (Браге Ксения Сергеевна, Brage Kseniya Sergijivna) – магістрант, Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, м. Київ; тел.: (050) 863-64-88; e-mail: kseniabrage@gmail.com.

УДК 517 (07)

В. В. ТКАЧЕНКО**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ**

Предложен численно-аналитический метод исследования многослойных пластин с отверстиями сложной формы. Создано программное обеспечение в рамках системы ПОЛЕ-RL, которое было использовано для исследования прямоугольной трехслойной пластины с крестообразным отверстием. Рассмотрены различные виды граничных условий для исследуемой пластины: свободно опертая пластина со свободным отверстием, свободно опертая пластина со свободно опертым отверстием, жестко заземленная пластина со свободно опертым отверстием и жестко заземленная пластина с жестко заземленным отверстием. Изучено влияние размеров отверстия, граничных условий и степени ортотропии на значение критической нагрузки и построены соответствующие зоны динамической устойчивости (неустойчивости) пластин.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, многослойные пластины, пластины с отверстиями, критическая нагрузка, зоны динамической неустойчивости, R – функции.

В. В. ТКАЧЕНКО**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ**

Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження багатошарових пластин зі складною формою плану. Створено програмне забезпечення в рамках системи ПОЛЕ-RL, що було використано для дослідження прямокутної тришарової пластины з хрестоподібним отвором. Розглянуто різні види граничних умов, такі як вільно оперта пластина з вільним отвором, вільно оперта пластина з вільно опертим отвором, жорстко закріплена пластина з вільно опертим отвором і жорстко закріплена пластина з жорстко закріпленим отвором. Вивчено вплив розмірів отвору, граничних умов і ступеня ортотропії на значення критичного навантаження та побудовані відповідні зони динамічної стійкості (нестійкості) пластини.

Ключові слова: динамічна стійкість, багатошарові пластины, пластины з отворами, критичне навантаження, зони динамічної нестійкості, R – функції.

© В. В. Ткаченко, 2018

V. V. TKACHENKO

INVESTIGATION OF DYNAMIC STABILITY OF MULTILAYER PLATES WITH HOLES

The article proposes a numerically-analytical method for studying laminated plates with a complicated shape of the plan. Due to the application of R -function theory in combination with variational methods the investigation of the motion equation is reduced to studying ordinary differential equation of the Duffing type. The software was created within the framework of the POLE-RL package and tested on the example of a rectangular three-layer plate with a cross-shaped hole. Various types of fastening are considered, such as a free plate with a free hole, a free-standing plate with a free hole, a free-standing plate with a clamped hole, and a clamped plate with a clamped hole. The effect of the hole size, boundary conditions and the degree of orthotropy on the value of the critical load and dynamic stability zones is studied.

Key words: dynamic stability, laminated plates, plates with holes, critical load, zones of dynamic instability, R – functions.

Введение. При проектировании элементов тонкостенных конструкций, моделируемых пластинами, одной из основных проблем является их расчет на устойчивость. Широкое использование композитных материалов в различных областях промышленности, особенно в авиационной и ракетной, повлекло за собой разработку различных методов для расчета на динамическую устойчивость многослойных композитных пластин и оболочек. Решению этой проблемы посвящено огромное количество работ. Обзор существующей литературы представлен в работах [7 – 10] и других. Следует заметить, что большинство работ посвящено исследованию устойчивости многослойных пластин канонической формы. Существенно меньше публикаций посвящено исследованию многослойных пластин с отверстиями. Из обзора статей, в которых проводилось исследование пластин с отверстиями ([7, 9, 10] и другие), можно сделать вывод, что, в основном, исследованы свободно опертые пластины прямоугольной формы со свободными отверстиями.

Создание численно-аналитических, особенно без сеточных (meshless) методов, позволяющих учитывать неоднородное докритическое состояние многослойных пластин и различные способы закрепления отверстий, является все еще актуальной проблемой.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию численно-аналитического метода, базирующегося на совместном использовании теории R – функций и вариационных методов (RFM). Ранее этот метод применялся к пластинам сложной формы со свободными прямоугольными и круглыми отверстиями [3 – 6]. В настоящей работе метод применен к многослойным пластинам с отверстиями сложной формы и разными способами их закрепления.

Постановка задачи. Рассмотрим многослойную тонкую гибкую пластину постоянной толщины $h = \sum_{i=1}^n h_i$,

состоящую из n однородных слоев, в том предположении, что проскальзывания слоёв отсутствуют. Предполагается также, что пластина находится под действием усилий в срединной плоскости, определяемых формулой:

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t,$$

где p_0 – это статическая часть нагрузки, изменяющаяся пропорционально некоторому параметру λ , а p_t – динамическая часть нагрузки.

Постановка задачи в рамках классической теории базируется на основной гипотезе недеформируемых нормалей, при этом условия равновесия при отсутствии объемных сил имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \lambda \left(N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (3)$$

где N_x, N_y, N_{xy} – нормальные и касательные усилия в срединной плоскости; N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 – усилия, соответствующие распределению внутренних усилий в срединной плоскости при $\lambda = 1$; M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты.

В общем виде, выражения для усилий и моментов определяются равенствами [1]:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x^{(0)} + C_{12}\varepsilon_y^{(0)} + C_{16}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{11}\chi_x + K_{12}\chi_y + K_{16}\chi_{xy}; \\ N_y &= C_{12}\varepsilon_x^{(0)} + C_{22}\varepsilon_y^{(0)} + C_{26}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{12}\chi_x + K_{22}\chi_y + K_{26}\chi_{xy}; \\ N_{xy} &= C_{16}\varepsilon_x^{(0)} + C_{26}\varepsilon_y^{(0)} + C_{66}\varepsilon_{xy}^{(0)} + K_{16}\chi_x + K_{26}\chi_y + K_{66}\chi_{xy}; \\ M_x &= K_{11}\varepsilon_x^{(0)} + K_{12}\varepsilon_y^{(0)} + K_{16}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y + D_{16}\chi_{xy}; \\ M_y &= K_{12}\varepsilon_x^{(0)} + K_{22}\varepsilon_y^{(0)} + K_{26}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{12}\chi_x + D_{22}\chi_y + D_{26}\chi_{xy}; \\ M_{xy} &= K_{16}\varepsilon_x^{(0)} + K_{26}\varepsilon_y^{(0)} + K_{66}\varepsilon_{xy}^{(0)} + D_{16}\chi_x + D_{26}\chi_y + D_{66}\chi_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z, z^2) dz$ – приведенные жесткостные характеристики.

Компоненты деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ в срединной плоскости выражаются через перемещения формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Здесь u, v, w – перемещения произвольной точки в направлениях осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Если слои пластины симметричны относительно срединной плоскости, то выражения (4) имеют более простой вид, поскольку в этом случае $K_{ij} = 0$ [1].

Уравнения (1 – 3) дополняются соответствующими граничными условиями. При этом будем считать, что на нагруженной части контура, граничные условия имеют вид:

$$N_n = -p, \quad T_n = 0.$$

На ненагруженном контуре пластины могут быть различные виды закреплений.

Метод решения. Первым шагом алгоритма решения задачи о динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы, находящихся под действием периодической нагрузки в срединной плоскости, является определение неоднородного докритического состояния пластины. В результате выполнения этого шага определяются усилия N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 , вызванные действиями сжимающих сил, приложенных к контуру пластины. Эта задача сводится к нахождению минимума функционала

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n u_n ds,$$

где $u_n = ul + vm$, а l и m – направляющие косинусы внешней нормали n к границе области; N_n – интенсивность внешнего сжимающего усилия. Минимум функционала находится на множестве функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям.

Второй шаг алгоритма предусматривает нахождение критической нагрузки. Для чего используется энергетический метод, согласно которому, задача сводится к задаче на собственные значения, которые определяются из условия минимума следующего функционала:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \lambda \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Минимизация функционала выполняется на множестве функций, которые удовлетворяют главным граничным условиям для функции прогиба w .

Следующим шагом алгоритма является нахождение частоты колебаний пластины под действием статической нагрузки p_0 . Решение этой задачи также выполняется с помощью метода Рунца в результате минимизации следующего функционала:

$$I = \Pi_{\max} - \Omega^2 T_{\max},$$

где T_{\max} – кинетическая энергия пластины,

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_1 (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega, \quad m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz;$$

ρ_s – плотность материала s -го слоя; Π_{\max} – полная потенциальная энергия пластины,

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + p_0 \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Для решения задачи о геометрически нелинейных параметрических колебаниях сжатой пластины будем использовать метод, предложенный в работах [4 – 6]. Как показано в этих работах, система нелинейных уравне-

ний (1 – 3) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени. При этом ограничимся одномодовой аппроксимацией неизвестных функций, то есть прогиб пластины представим в виде

$$w(x, y, t) = y(t)w_1(x, y),$$

а перемещения в срединной плоскости соответственно

$$u(x, y, t) = p(t)u_1(x, y)y(t) + y^2(t) \cdot u_{11}(x, y), \quad v(x, y, t) = p(t)v_1(x, y)y(t) + y^2(t) \cdot v_{11}(x, y),$$

где $w(x, y)$, $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ – собственные функции, соответствующие основной частоте $\Omega_L = \Omega_1$ пластины, сжатой статической нагрузкой, а $u_{11}(x, y)$, $v_{11}(x, y)$ – функции, являющиеся решениями неоднородной системы уравнений, подобной системе уравнений задачи теории упругости со специальной правой частью [4 – 6].

Тогда система уравнений (1 – 3) сводится к одному уравнению

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \Omega_L^2(1 + \alpha p_t \cos \theta t + \gamma y^2(t))y(t) = 0. \quad (5)$$

Аналитические выражения для коэффициентов α и γ представлены в работах [4 – 6].

Обозначим выражение $\alpha \cdot p_t = -2k$, $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2$; тогда уравнение (5) примет такой же вид, как в [2]:

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2((1 - 2k \cos \theta t)y(t) + \gamma y^3(t)) = 0.$$

В случае статического нагружения $p_t = 0$, то есть при $k = 0$, исследование сводится к решению уравнения:

$$y''(t) + \Omega_L^2(y(t) + \gamma y^3(t)) = 0,$$

здесь $\varepsilon = 0$. Применение к последнему уравнению метода Бубнова-Галёркина позволяет получить зависимость амплитуды нелинейных колебаний от отношения $\nu = \omega_N / \Omega_L$ нелинейной частоты к линейной,

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma A^2}.$$

Для построения областей динамической неустойчивости и определения амплитуд колебаний в зонах параметрического резонанса возникает необходимость определения зон динамической неустойчивости системы (ЗДН). Для исследования устойчивости, как показано в [2], достаточно рассмотреть линеаризованное уравнение, то есть при значении $\gamma = 0$:

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2((1 - 2k \cos \theta t)y(t)) = 0. \quad (6)$$

Известно, что для уравнения (6) (это уравнение Матье), главная область неустойчивости (возле $\theta = 2\Omega_L$) ограничена кривыми [2]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}},$$

где $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\Omega}$ – это декремент затухания. При $\varepsilon_1 = 0$ имеем

$$\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1 - k}, \quad \theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1 + k}. \quad (7)$$

В этом интервале возникает главный параметрический резонанс.

Для определения амплитуд затухающих колебаний в зоне главного параметрического резонанса, был использован подход, изложенный В. В. Болотиным в [2]. Тогда зависимость между частотным отношением $\theta / 2\Omega_L$ и амплитудой колебаний A принимает вид:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2} \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}.$$

Тестирование предложенного метода решения. Ранее в работах [3, 4, 6] было проведено тестирование предложенного метода для пластин со свободным круглым отверстием и для параметрических колебаний прямоугольных пластин с различной укладкой слоев. Там же показана эффективность и достоверность этого метода.

В данной работе рассматривается трехслойная пластина (рис. 1) с укладкой слоев $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ и крестообразным отверстием. При этом важно, что отверстие может быть не только свободным, но и свободно опертым или жестко защемленным. Основной целью является исследование влияния закрепления отверстия на динамическую устойчивость пластины.

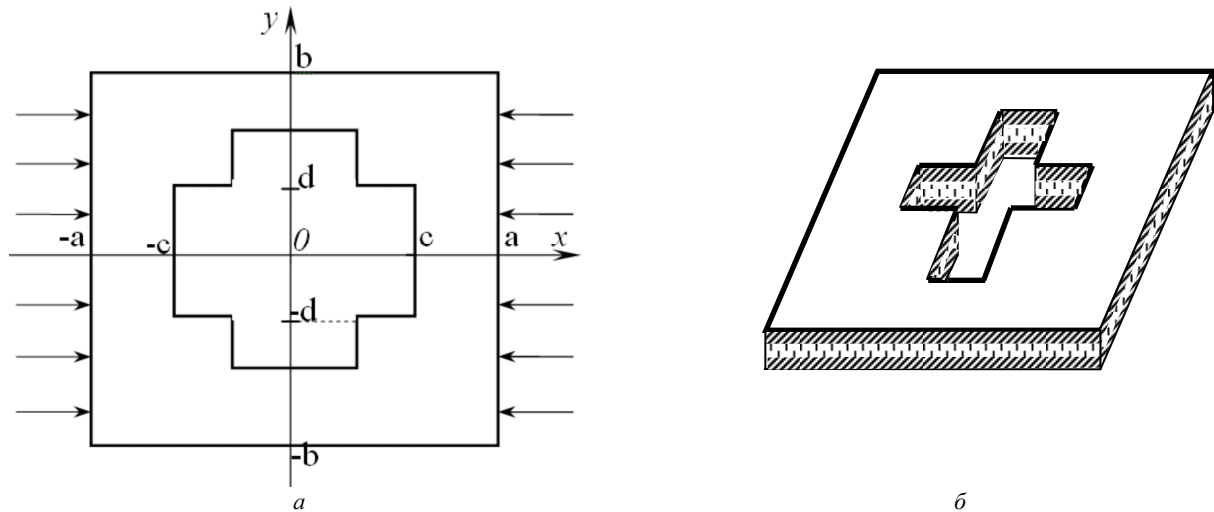


Рис. 1 – Изображение исследуемой пластины: a – срединная плоскость пластины; b – общий вид пластины.

Рассмотрим два варианта степени ортотропии материала, а именно – $\frac{E_1}{E_2} = 3$ и $\frac{E_1}{E_2} = 10$.

Основные геометрические параметры пластины приняты следующими:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{h}{2b} = 0,01,$$

где h – это общая толщина пластинки при равных толщинах всех слоев, а $2b$ – характерный размер пластинки.

Размеры отверстия c и d варьируются.

Рассмотрим следующие 4 типа граничных условий.

I. Свободное опирание по внешнему контуру, отверстие свободно:

$$M_x = 0, N_x = -p, N_{xy} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_1, \partial\Omega_1 : x = \pm \frac{a}{2}; \quad (8)$$

$$w = 0, M_y = 0, u = 0, N_y = 0, (x, y) \in \partial\Omega_2, \partial\Omega_2 : y = \pm \frac{b}{2}; \quad (9)$$

$$M_n = 0, Q_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2).$$

II. Свободное опирание по всему контуру.

Выполняются условия (8), а также следующие, на остальном участке контура:

$$w = 0, M_n = 0, N_n = 0, T_n = 0, (x, y) \in \partial\Omega_4, \partial\Omega_4 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1.$$

III тип. Свободное опирание по внешнему контуру, отверстие – жестко закреплено.

Выполняются условия (8 – 9), а на остальном участке контура следующие равенства:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega_3, \partial\Omega_3 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2).$$

IV тип. Пластина, жёстко защемленная по контуру:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, (x, y) \in \partial\Omega, \text{ на всем контуре } \partial\Omega.$$

Согласно методу R – функций (RFM), построим структуры решения для всех случаев закрепления пластины:

$$\text{I тип. } w = \omega_{\text{внешн}} \Phi. \text{ II тип. } w = \omega \Phi. \text{ III тип. } w = \omega \omega_{\text{внутр}} \Phi. \text{ IV тип. } w = \omega^2 \Phi,$$

где Φ – неопределенные компоненты построенных структур решения; $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы всей области, которое в данном случае может быть построено равенством

$$\omega(x, y) = \omega_{\text{внешн}} \wedge_0 \omega_{\text{внутр}},$$

где $\omega_{\text{внешн}}(x, y) = (F_1 \wedge_0 F_2)$, $\omega_{\text{внутр}}(x, y) = (F_3 \wedge_0 F_4) \vee_0 (F_5 \wedge_0 F_6)$, $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ – R – операторы [5]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} = -x.$$

Функции $F_i, i = 1 \dots 6$ определяются следующим образом:

$$F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0, \quad F_2 = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0, \quad F_3 = \frac{1}{2c}(c^2 - x^2) \geq 0,$$

$$F_4 = \frac{1}{2d}(d^2 - y^2) \geq 0, \quad F_5 = \frac{1}{2d}(d^2 - x^2) \geq 0, \quad F_6 = \frac{1}{2c}(c^2 - y^2) \geq 0.$$

Критическая нагрузка определяется как $P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2}$, где $\lambda_{кр}$ – безразмерный параметр.

Ранее в [4], для граничных условий первого типа, были получены значение безразмерного параметра $\lambda_{кр}$ для квадратной пластины с жесткостными характеристиками, такими же, как в настоящей работе. Например, в случае $E_1 / E_2 = 3$ значение безразмерного параметра для квадратной пластины найдено и составляет 5,43. Таким образом при отверстии, размер которого стремится к нулю, значение безразмерного параметра увеличивается и стремится к значению для квадратной пластины без отверстия. Аналогично, для случая $E_1 / E_2 = 10$ критическая нагрузка квадратной пластинки имеет значение $\lambda_{кр} = 11,49$. В данной работе при устремлении крестообразного отверстия к нулю, также значение критической нагрузки устремляется к критической нагрузке квадрата. Что свидетельствует о достоверности полученных результатов и разработанного программного обеспечения. В результате проведения вычислительного эксперимента, связанного с исследованием сходимости при увеличении количества координатных функций, было установлено, что вычисления могут быть выполнены при использовании 14-й степени аппроксимирующего полинома для прогиба $w(x, y)$ и 11-й степени аппроксимирующих полиномов для каждого из перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, что соответствует 36 координатным функциям для прогиба и 21 координатным функциям для каждого из перемещений.

В табл. 1 представлены значения безразмерного частотного параметра для трехслойной пластинки с разными граничными условиями, различной степени ортотропии и размеров отверстия.

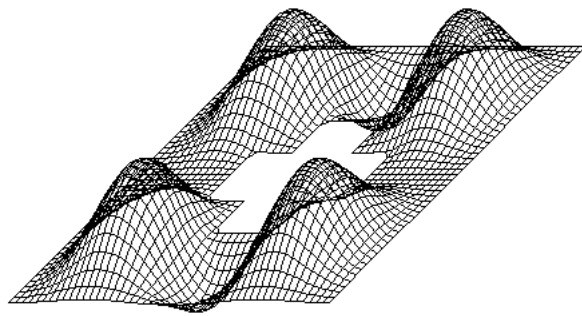
Таблица 1 – Значение безразмерного параметра $\lambda_{кр} = N_{кр} (2b)^2 / E_2 h^3$ в зависимости от степени ортотропии и размеров отверстия

гран. усл.	$c/2b$ $d/2b$	$\frac{E_1}{E_2} = 3$					$\frac{E_1}{E_2} = 10$				
		0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2
1 тип	0,05	4,79	4,59	4,44	4,33	4,21	9,29	8,69	8,25	7,91	7,59
	0,075	4,60	4,30	4,10	3,93	3,76	8,73	7,79	7,13	6,62	6,11
	0,1	4,56	4,20	3,96	3,81	3,64	8,60	7,45	6,69	6,18	5,67
2 тип	0,05	28,29	28,69	31,83	33,33	36,35	77,52	78,41	84,32	85,36	89,51
	0,075	27,23	31,94	32,36	35,30	38,31	76,40	82,11	86,84	90,71	93,83
	0,1	27,98	29,17	33,61	36,51	38,78	79,39	81,69	91,35	93,61	95,63
3 тип	0,05	29,47	32,16	34,92	37,91	39,78	80,69	86,49	90,97	94,94	97,40
	0,075	30,73	33,41	36,47	39,22	42,56	84,74	90,20	94,59	98,29	103,18
	0,1	32,44	34,91	37,69	40,85	49,39	90,16	94,80	97,93	100,90	104,68
4 тип	0,05	53,46	57,56	60,99	65,05	68,03	145,55	153,16	158,90	164,92	170,49
	0,075	54,69	58,20	62,36	65,67	70,73	145,21	152,35	159,06	165,42	174,93
	0,1	57,12	59,32	61,76	65,70	69,39	147,83	151,39	154,87	160,79	168,58

С увеличением размеров отверстия, значение критической нагрузки для свободно опертой пластины со свободным отверстием уменьшается. Для трех остальных исследуемых типов граничных условий наблюдается противоположная тенденция. С увеличением размеров отверстия, значение критической нагрузки увеличивается.

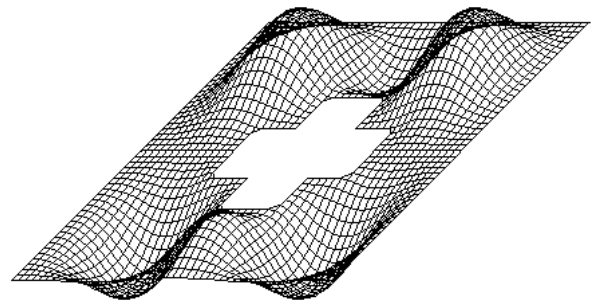
Для любого типа граничных условий значение критической нагрузки пластины для материала, характеризуемого отношением $E_1 / E_2 = 10$ выше, чем для такой же пластины с отношением $E_1 / E_2 = 3$. Причем, для четвертого типа граничных условий это значение отличается более, чем в два раза.

Если анализировать ситуацию в целом, то наименьшее значение критической нагрузки имеют пластины с граничными условиями первого типа (свободно опертая пластина со свободным отверстием). Для свободно опертой по всему контуру пластины значения критической нагрузки значительно выше. Для свободно опертой по внешнему контуру и жестко защемленной по контуру отверстия пластины значения критической нагрузки немного превосходят результаты, полученные для второго типа граничных условий. И самые большие значения критической нагрузки принимает при четвертом типе граничных условий (жестко защемленная по всему контуру пластина).



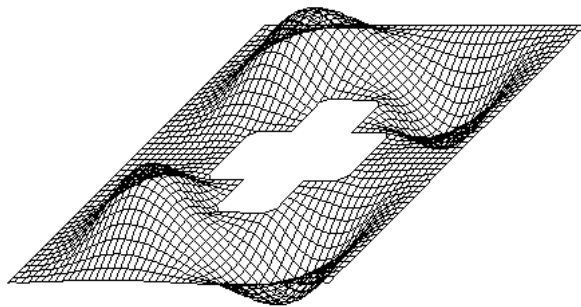
$\Lambda_1 = 0,841$

Рис. 2 – Первая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



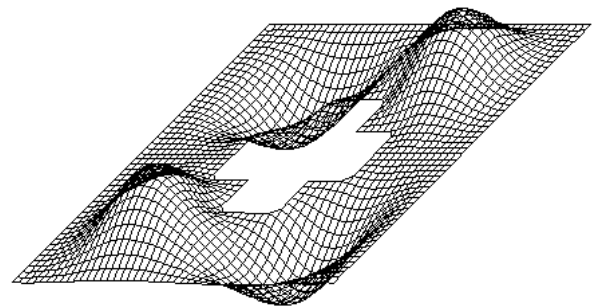
$\Lambda_2 = 0,843$

Рис. 3 – Вторая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



$\Lambda_3 = 0,854$

Рис. 4 – Третья форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.



$\Lambda_4 = 0,854$

Рис. 5 – Четвёртая форма колебаний жёстко защемлённой по всему контуру пластины.

На рис. 2 – 4 изображены первые четыре формы колебания жестко защемленной по всему контуру пластины при $c = 0,2$ и $d = 0,075$, и указаны первые частоты Λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), $\Lambda_i = \omega_i(2b)^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$, соответствующие этим формам. Потеря устойчивости происходит по первой форме.

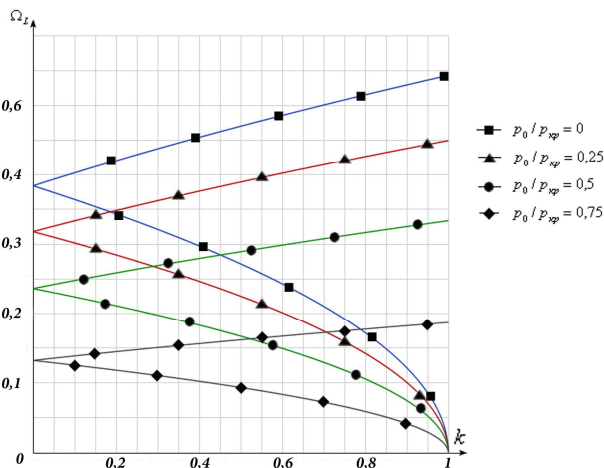


Рис. 6 – ЗДН для свободно опертой по внешнему контуру и жёстко защемлённой по контуру отверстия пластины.

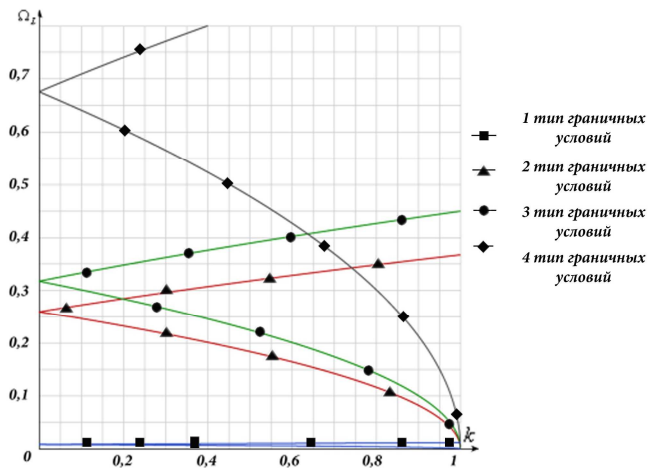


Рис. 7 – ЗДН для различных видов условий закрепления пластины при фиксированных размерах отверстия.

На рис. 6 приведены зоны динамической неустойчивости для свободно опертой по внешнему контуру и жестко защемленной по контуру отверстия пластины с параметрами выреза $c = 0,15$ и $d = 0,075$ и отношением $E_1 / E_2 = 3$ в зависимости от нагрузки. Чем меньше отношение $p_0 / p_{кр}$, тем выше расположена зона неустойчивости и тем больше площадь самой зоны.

На рис. 7 приведены зоны динамической неустойчивости (ЗДН) для различных видов условий закрепления пластины при фиксированных размерах отверстия ($c = 0,15$ и $d = 0,075$), нагрузке $p_0 / p_{кр} = 0,25$ и $E_1 / E_2 = 3$. Для первого типа граничных условий характерна наименьшая зона динамической неустойчивости (ограничена кривыми, отмеченными квадратами на рис. 7, где на графике в данном масштабе они практически сливаются).

ЗДН для второго и третьего типа граничных условий отличаются не очень существенно. Наибольшая площадь зоны динамической неустойчивости возникает для граничных условий четвертого типа (ограниченная кривыми, отмеченными ромбиками на рис. 7).

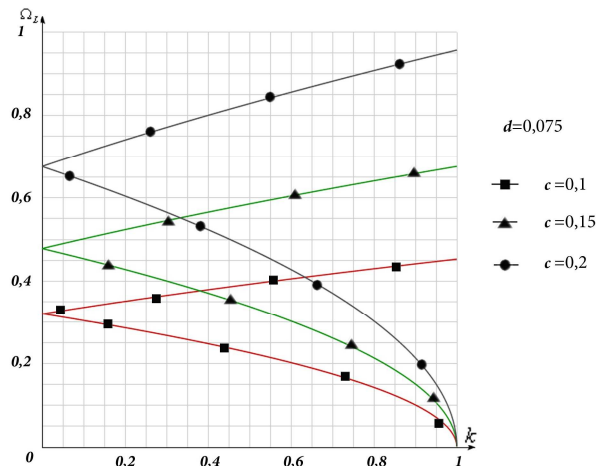


Рис. 8 – ЗДН жёстко защемлённой по всему контуру пластины в зависимости от размера отверстия.

На рис. 8 приведены зоны динамической неустойчивости жестко защемленной по всему контуру пластины при нагрузке $p_0 / p_{кр} = 0,25$ с жесткостным соотношением $E_1 / E_2 = 3$ в зависимости от размера отверстия. Очевидно, что с увеличением размера отверстия, увеличивается и зона динамической неустойчивости.

Выводы. В работе предложен метод исследования динамической устойчивости многослойных пластин, основывающийся на теории R – функций и вариационных методах, учитывающий неоднородное напряженное состояние пластины. Найдены значения критической нагрузки для трехслойной пластины с укладкой слоев $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ и отверстием крестообразной формы. Для поставленной задачи построены новые структуры решения и последовательности координатных функций. Исследовано влияние размеров отверстия, степени ортотропии и граничных условий. Построены зоны динамической неустойчивости в зависимости от нагрузки, граничных условий, параметров отверстия и степени ортотропии.

Предложенный метод может быть использован для многослойных пластин не только со сложной формой отверстия, но и со сложной формой внешнего контура.

Список литературы

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М. : Наука, 1967. – 266 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М. : Гостехиздат, 1956. – 500 с.
3. Курпа Л. В., Линник Г. Б., Ткаченко В. В. Дослідження стійкості багатосарових пластин симетричної будови за допомогою методу R – функцій // Журнал «Машинознавство». – 2010. – № 3 – 4. – С. 3 – 8.
4. Курпа Л. В., Мазур О. С., Ткаченко В. В. Параметричні коливання багатосарових пластин під дією періодичного навантаження // Вісник НТУ «ХПІ». – 2011. – № 3. – С. 134 – 145.
5. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории R – функции к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 492 с.
6. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape // Latin American Journal of Solids and Structures. – Vol. 10. – no. 1. – Rio de Janeiro, Jan. 2013 – P. 175 – 188.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. // Composite Structures. – Volume 93. – Issue 1. – December 2010. – P. 14 – 31.
8. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Second ed.. – London : CRC PRESS, 2004. – 831 p.
9. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells : 1987 – 2005 – Part 1 : conservative system // Applied mechanics reviews. – 2007. – Vol. 60. – P. 65 – 75.
10. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 328 (4 – 5). – p. 541 – 554.

References (transliterated)

1. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [The theory of anisotropic plates]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 266 p.
2. Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 500 p.
3. Kurpa L. V., Linnyk G. B., Tkachenko V. V. Doslidzhennya stiykosti bagatosharovykh plastyn symetrychnoyi budovy za dopomogoyu metody R – funktsiy [Investigation of stability of multilayer plates of symmetric structure using the method of R – functions]. *Zhurnal "Mashynoznavstvo"* ["Machine Science" Journal]. 2010, no. 3 – 4, pp. 3–8.
4. Kurpa L. V., Mazur O. S., Tkachenko V. V. Parametrychni kolyvannya bagatosharovykh plastyn pid diyeyu periodychnogo navantazhennya [Parametric fluctuations of multilayer plates under the action of periodic loading]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of NTU "KhPI"]. 2011, no. 3, pp. 134–145.
5. Kurpa L. V., Mazur O. S., Shmatko T. V. Primenenie teorii R – funktsii k resheniyu nelineynykh zadach dinamiki mnogoslonykh plastin [Application of the R -function theory to solving nonlinear problems of dynamics of laminated plates]. Kharkov, «NTU KhPI» Publ., 2016. 492 p.

6. Kurpa L., Mazur O., Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of the laminated plates with complex shape. *Latin American Journal of Solids and Structures*. Rio de Janeiro, Jan. 2013, vol. 10, no. 1, pp. 175–188.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. *Composite Structures*. December 2010, vol. 93, issue 1, pp. 14–31.
8. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. Second ed.* London, CRC PRESS Publ., 2004. 831 p.
9. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells : 1987 – 2005 – Part 1 : conservative system. *Applied mechanics reviews*. 2007, vol. 60, pp. 65–75.
10. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2009, vol. 328 (4 – 5), pp. 541–554.

Поступила (received) 06.02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ткаченко Вікторія Валеріївна (Ткаченко Виктория Валерьевна, Tkachenko Viktoriia Valeriyivna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 355-40-29; e-mail: viktoryatkachenko@gmail.com.

UDC 519.6

N. V. CHEREMSKAYA

DEVELOPING ALGORITHMS OF OPTIMAL FORECASTING AND FILTERING FOR SOME CLASSES OF NONSTATIONARY RANDOM SEQUENCES

The problem of forecasting and filtering non-stationary random sequences is solved in the article. Optimal forecasting and filtering are performed using linear estimates and minimizing the mean squared error. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such studies were not conducted. In this work, on the examples of non-stationary sequences, the problem of forecasting and filtering is solved explicitly. The correlation function image is obtained using the Hilbert approach, which allows one to calculate correlation functions as scalar products in a corresponding Hilbert space. The solution of the extrapolation problem with particular correlation function considered in the article can be used to simulate filtration and forecasting processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

Key words: correlation function, mathematical expectation, forecasting and filtering of nonstationary random sequences and processes, mean square error.

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

ПОБУДОВА АЛГОРИТМІВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГНОЗУ І ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Розв'язується задача прогнозу і фільтрації нестационарних випадкових послідовностей. Оптимальні прогноз і фільтрація здійснюються за допомогою лінійних оцінок та мінімізації середньої квадратичної помилки. Для нестационарних випадкових послідовностей, навіть з кореляційними функціями найпростішого вигляду, такі дослідження не проводились. У цій роботі на прикладах нестационарних послідовностей задача прогнозу та фільтрації вирішується явно. Для отримання зображень кореляційних функцій використовується гільбертів підхід, який дозволяє обчислювати кореляційні функції як скалярні добутки у відповідному гільбертовому просторі. Розв'язок екстраполяційної задачі з частковими видами кореляційної функції, який було розглянуто в статті, може бути використаний для моделювання процесів фільтрації та прогнозу в реальних системах у випадку нестационарних випадкових сигналів.

Ключові слова: кореляційна функція, математичне очікування, прогноз та фільтрація нестационарних випадкових послідовностей і процесів, середня квадратична помилка.

Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГНОЗА И ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Решается задача прогноза и фильтрации нестационарных случайных последовательностей. Оптимальные прогноз и фильтрация осуществляются с помощью линейных оценок и минимизации средней квадратичной ошибки. Для нестационарных случайных последовательностей, даже с корреляционными функциями простейшего вида, такие исследования не проводились. В этой работе на примерах нестационарных последовательностей задача прогноза и фильтрации решается явно. Для получения представлений корреляционных функций используется гильбертов поход, позволяющий вычислять корреляционные функции как скалярные произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Решение экстраполяционной задачи с частными видами корреляционной функции, рассмотренное в статье может быть использовано для моделирования процессов фильтрации и прогноза в реальных системах в случае нестационарных случайных сигналов.

Ключевые слова: корреляционная функция, математическое ожидание, прогноз и фильтрация нестационарных случайных последовательностей и процессов, средняя квадратическая ошибка.

Introduction. The tasks of predicting the values of random processes (sequences) for known values in the past or the allocation of a signal in the background of random noise are partial but very important problems of the general theory of linear transformations of a random signal. Solving the extrapolation problem with particular correlation function, which is calculated for various cases of the spectrum of a non-selfadjoint bounded operator, can be used to simulate the filtration and prediction processes in real systems in the case of non-stationary random signals.

© N. V. Cheremskaya, 2018

Analysis of recent research. A large quantity of works [1, 2, 4, 8 – 11] are devoted to forecasting and filtering of non-stationary random sequences. In the main, these papers consider the prognosis and filtering of stationary random sequences on the basis of the theory of functions of a complex variable and some classes of functional spaces, or by the approach *proposed by Kalman*, which leads to a rather complicated recurrence procedure. Construction of the optimal filter on the finite number of values of random sequence encounters significant difficulties associated with the need to calculate explicit determinants of the n -th order of a special form. Therefore, the complexity of such calculations and the cumbersome nature of explicit formulas did not contribute to a significant advance in solving this problem. An exception is the work [8], where some explicit extrapolation formulas are obtained in the case of a stationary random sequence with a correlation function of the form:

$$B(k) = M \xi(n+k) \overline{\xi(n)} = \begin{cases} \frac{m-k}{m}, & |k| \leq m; \\ 0, & |k| > m. \end{cases}$$

Formulation of the problem. The article is based on simpler estimates of random functions in the future moment of time, linear with respect to the values of the prehistory of processes. For non-stationary random sequences, even with the correlation functions of the simplest form, such studies were not conducted. This circumstance is explained, in particular, by the lack of meaningful examples of truly significant correlation functions that describe random processes with complex, unlike stationary, spectra. The studies carried out in [5, 6] allow us to bridge this gap and construct simple prognostic algorithms for non-stationary random functions.

Mathematical model. Consider a random sequence $z(n)$ with mathematical expectation $Mz(n) = 0$ and a known correlation function $K_{zz}(n, m)$. Suppose at times p_1, p_2, \dots, p_{n_1} the known values $u(p_k)$ ($k = 1, \dots, n_1$) are determined by the expression:

$$u(p_k) = z(p_k) + \xi(p_k), \quad (1)$$

where $\xi(n)$ is discrete white noise with $M\xi(n) = 0$ and a correlation function $K_{\xi\xi}(m, n) = s_0 \delta_{nm}$.

Let's look for a linear optimal estimate $z(n)$, $n = 1, \dots, n_1$, such that $\hat{z}(n) : \hat{z}(n) = \sum_{p=1}^{n_1} G(n, p) u(p)$. Obviously, it is unbalanced, and its efficiency is ensured by the minimum of the mean square error:

$$\sigma^2(G) = M |z(n) - \hat{z}(n)|^2. \quad (2)$$

The standard procedure for finding the minimum of $\sigma^2(G)$ leads to the following system of algebraic equations for $G_0(n, q)$ which provide $\min \sigma^2(G)$:

$$\sum_{q=1}^{n_1} G_0(n, q) K_{uu}(q, p) = K_{zu}(n, p). \quad (3)$$

In the case when $z(n)$ is a stationary sequence, $G_0(n, q)$ can be considered a function that depends on the difference between the discrete arguments and, if $z(n)$ is uncorrelated with $\xi(n)$ or permanently connected with it, then equation (3) becomes the equation:

$$\sum_{m=n}^{n+n_1} G_0(m) K_{uu}(n-p-m) = K_{zu}(n-p), \quad (4)$$

which was considered in [1, 8, 9].

Let's turn to the consideration of non-stationary sequence $z(n)$ of the form $z(n) = \lambda_0^n z_0(\omega)$ ($\lambda_0 = \overline{\lambda_0} \neq \pm 1$) with a *Hankel correlation function* [6, 7] $K_{zz}(n, m) = \lambda_0^{n+m} M |z_0(\omega)|^2$.

We will show that in this case the extrapolation problem is solved explicitly.

System (3) in this case takes the form:

$$\sum_{q=1}^{n_1} G_0(n, q) [\lambda_0^{q+p} M |z_0(\omega)|^2 + s_0 \delta_{nm}] = \lambda_0^{n+p} M |z_0(\omega)|^2,$$

or

$$s_0 G(n, q) + \left(\sum_{q=1}^{n_1} G_0(n, q) \lambda_0^q \right) \lambda_0^p M |z_0(\omega)|^2 = \lambda_0^{n+p} M |z_0(\omega)|^2.$$

We are looking for the solution $G_0(n, q)$ of this problem such that $G_0(n, q) = \lambda_0^n L(p)$:

$$s_0 L(p) + \sum_{q=1}^{n_1} L(q) \lambda_0^{q+p} M |z_0(\omega)|^2 = \lambda_0^p M |z_0(\omega)|^2, \quad (5)$$

where $p = 0, \dots, n_1$.

Setting $\sum_{q=1}^{n_1} L(q) \lambda_0^q \equiv X$, (5) can be written as

$$s_0 L(p) = \lambda_0^p M |z_0(\omega)|^2 - \lambda_0^p X M |z_0(\omega)|^2. \quad (6)$$

Multiplying both sides of equation (6) by λ_0^p and summing in p , we get $s_0 X + DX = D$, where

$$D = \sum_{p=1}^{n_1} \lambda_0^{2p} M |z_0(\omega)|^2 = \frac{\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 1} M |z_0(\omega)|^2.$$

Thus,

$$X = \frac{D}{s_0 I + D} = \frac{(\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2) M |z_0(\omega)|^2}{s_0 (\lambda_0^2 - 1) + (\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2) M |z_0(\omega)|^2}. \quad (7)$$

From equation (6) we obtain $L(p) = \frac{1}{s_0} (I - X) \lambda_0^p M |z_0(\omega)|^2$, where $p = 1, \dots, n_1$.

Hence,

$$G_0(n, p) = \lambda_0^{n+p} \frac{1}{s_0} (I - X) M |z_0(\omega)|^2.$$

Thus, the unbalanced effective estimate takes the form:

$$\hat{z}(n) = \lambda_0^n \frac{1}{s_0} \left(I - \frac{(\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2) M |z_0(\omega)|^2}{s_0 (\lambda_0^2 - 1) + (\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2) M |z_0(\omega)|^2} \right) M |z_0(\omega)|^2 \sum_{p=1}^{n_1} \lambda_0^p u(p). \quad (8)$$

In this case, the mean square error becomes:

$$\begin{aligned} \sigma^2(G_0) &= M |z(n) - \hat{z}(n)|^2 = K_{zz}(n, n) - K_{z\hat{z}}(n, n) - K_{\hat{z}z}(n, n) + K_{\hat{z}\hat{z}}(n, n) = \\ &= \lambda_0^{2n} M |z_0(\omega)|^2 - 2 \frac{\lambda_0^n}{s_0} (I - X) M |z_0(\omega)|^2 \sum_{p=1}^{n_1} \lambda_0^p \lambda_0^{n+p} M |z_0(\omega)|^2 + \\ &+ \left(\frac{\lambda_0^n}{s_0} (I - X) M |z_0(\omega)|^2 \right)^2 \sum_{p, q=1}^{n_1} \lambda_0^{p+q} (\lambda_0^{p+q} M |z_0(\omega)|^2 + s_0 \delta_{pq}) = \\ &= \lambda_0^{2n} M |z_0(\omega)|^2 - 2 \frac{\lambda_0^{2n}}{s_0} (I - X) Y \left(M |z_0(\omega)|^2 \right)^2 + \left(\frac{\lambda_0^n}{s_0} (I - X) M |z_0(\omega)|^2 \right)^2 \left(Y^2 M |z_0(\omega)|^2 + s_0 Y \right), \end{aligned}$$

where $Y = \frac{\lambda_0^{2n_1+2} - \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - 1}$.

Let us now consider a more interesting case of non-stationary sequence, which after immersion in the Hilbert space [1, 7] is presented by a sequence of the form $z_n = f(n) = A^n z_0$, where A is a non-selfadjoint bounded operator.

Let $H_2 = L_{[0,1]}^2$, and the operator A have the form:

$$Af(x) = \lambda_0 f(x) + i \int_0^1 \varphi(x) \overline{\theta(x)} f(y) dy, \quad \lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}, \quad \left(\dim \operatorname{Im} AL_{[0,1]}^2 = \infty \right).$$

That is, consider the one-dimensional perturbation of the multiplication operator by a complex constant.

The choice of such an operator is also due to the fact that the theory of non-selfadjoint operators did not actually concern the *triangular* and *Fredholm operators* of $\dim \operatorname{Im} AH = \infty$ [12].

$$(A)^n f = f(n), \quad f(n+1) = Af(n), \quad f(n)|_{n=0} = f_0,$$

$$f(n+1, x) = \lambda_0 f(n, x) + i \int_0^1 \varphi(x) \overline{\theta(x)} f(n, y) dy,$$

$$f(n+1, x) = \lambda_0 f(n, x) + i\varphi(x)\alpha_n, \quad (9)$$

where $\alpha_n = \int_0^1 \overline{\theta(x)} u(n, y) dy$, $f(k, x) = \lambda_0^k f(0, x) + i\varphi(x) \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda_0^{k-j-1}$.

To find α_j , we multiply (9) by $\overline{\theta(x)}$ and integrate, then we obtain the recurrence ratio for α_j :

$$\alpha_{n+1} = \lambda_0 \alpha_n + i\gamma \alpha_n, \quad \alpha_n|_{n=0} = \alpha_0 = \int_0^1 f_0(x) \overline{\theta(x)} dx,$$

where $\gamma = \int_0^1 \varphi(x) \overline{\theta(x)} dx$. Thus, $\alpha_n = (\lambda_0 + i\gamma)^n \alpha_0$. Hence, $f(n, x) = \lambda_0^n f_0(x) + \varphi(x) \alpha_0 \frac{(\lambda_0 + i\gamma)^n - \lambda_0^n}{\gamma}$. Conse-

quently, $A^n f = \lambda_0^n f_0^{(1)}(x) + (\lambda_0 + i\gamma)^n f_1^{(1)}(x)$, where $f_0^{(1)}(x) = f_0(x) - \frac{\varphi(x)\alpha_0}{\gamma}$, $f_1^{(1)}(x) = \frac{\varphi(x)\alpha_0}{\gamma}$.

In this case, the correlation function has the form:

$$K(n, m) = \langle f(n), f(m) \rangle = \langle A^n f_0(x), A^m f_0(x) \rangle = \lambda_0^n \overline{\lambda_0}^m \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\lambda_0 + i\gamma)^n (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^m \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \\ + \lambda_0^n (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^m \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle + (\lambda_0 + i\gamma)^n \overline{\lambda_0}^m \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle.$$

The relation $K_{uu}(n, m) = K_{zz}(n, m) + K_{\xi\xi}(n, m)$ implies that

$$s_0 G_0(n, q) + \sum_{q=1}^{n_1} G_0(n, q) [\lambda_0^q \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\lambda_0 + i\gamma)^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \\ + \lambda_0^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle + (\lambda_0 + i\gamma)^q \overline{\lambda_0}^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle] = \\ = \lambda_0^n \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\lambda_0 + i\gamma)^n (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \\ + \lambda_0^n (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle + (\lambda_0 + i\gamma)^n \overline{\lambda_0}^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle. \quad (10)$$

We shall show that in the case under consideration, the solution of the system can be determined in explicit form.

Since the right-hand side is the sum of four terms, the solution of (10) is sought as a sum of four terms. Let $G_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$, where G_1 is the solution of the following system

$$s_0 G_0(n, q) + \sum_{q=1}^{n_1} G_0(n, q) [\lambda_0^q \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\lambda_0 + i\gamma)^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \lambda_0^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle + \\ + (\lambda_0 + i\gamma)^q \overline{\lambda_0}^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle] = \lambda_0^n \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2, \quad (11)$$

The supplements G_2, G_3, G_4 satisfy similar equations.

The solution of (11) admits the representation: $G_1(n, p) = \lambda_0^n F_1(p) \|f_0^{(1)}(x)\|^2$. Hence, we receive:

$$s_0 F_1(p) + \sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) [\lambda_0^q \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\lambda_0 + i\gamma)^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \\ + \lambda_0^q (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle + (\lambda_0 + i\gamma)^q \overline{\lambda_0}^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle] = \overline{\lambda_0}^p; \\ s_0 F_1(p) + \left(\sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) \lambda_0^q \right) \overline{\lambda_0}^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + \left(\sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) (\lambda_0 + i\gamma)^q \right) (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \times \\ \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \left(\sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) \lambda_0^q \right) (\overline{\lambda_0} - i\overline{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle +$$

$$+ \left(\sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) (\lambda_0 + i\gamma)^q \right) \bar{\lambda}_0^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle = \bar{\lambda}_0^p.$$

Let's introduce the notations: $C_N^{(1)} = \sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) \lambda_0^q$, $C_N^{(2)} = \sum_{q=1}^{n_1} F_1(q) (\lambda_0 + i\gamma)^q$. In these notations, the previous equation takes the form:

$$s_0 F_1(p) + C_N^{(1)} \left(\bar{\lambda}_0^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle \right) + C_N^{(2)} \left((\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \bar{\lambda}_0^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle \right) = \bar{\lambda}_0^p. \quad (12)$$

We multiply (12) by λ_0^q and sum up to obtain

$$s_0 C_N^{(1)} + C_N^{(1)} A_N + C_N^{(2)} B_N = F_N,$$

where

$$A_N = \sum_{q=1}^N \lambda_0^q \left(\bar{\lambda}_0^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle \right);$$

$$B_N = \sum_{q=1}^N \lambda_0^q \left((\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \bar{\lambda}_0^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle \right), \quad F_N = \sum_{q=1}^N \lambda_0^q s_0 F_1(p).$$

We multiply (12) by $(\lambda_0 + i\gamma)^q$ and sum up to get

$$s_0 C_N^{(2)} + C_N^{(2)} D_N + C_N^{(1)} L_N = H_N,$$

where

$$D_N = \sum_{q=1}^N (\lambda_0 + i\gamma)^q \left(\bar{\lambda}_0^p \|f_0^{(1)}(x)\|^2 + (\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \langle f_0^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \rangle \right);$$

$$L_N = \sum_{q=1}^N (\lambda_0 + i\gamma)^q \left((\bar{\lambda}_0 - i\bar{\gamma})^p \|f_1^{(1)}(x)\|^2 + \bar{\lambda}_0^p \langle f_1^{(1)}(x), f_0^{(1)}(x) \rangle \right), \quad H_N = \sum_{q=1}^N (\lambda_0 + i\gamma)^q s_0 F_1(p).$$

Consequently, we obtain a system of two linear equations with two unknowns:

$$\begin{cases} s_0 C_N^{(1)} + C_N^{(1)} A_N + C_N^{(2)} B_N = F_N, \\ s_0 C_N^{(2)} + C_N^{(2)} D_N + C_N^{(1)} L_N = H_N. \end{cases}$$

Thus, the solution of system (10) reduces to the solution of systems of two linear equations with two unknowns and can be found explicitly. Random sequences of the simplest form $z(n) = \lambda_0^n z_0(\omega)$, where λ_0 is in general a complex number, are widely used in applications, in particular, in the theory of pulse systems [3]. This is explained by the fact that if we consider the real and imaginary parts of the image $z(n) = x(n) + iy(n)$, $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, then we obtain the following difference equation for $x(n)$:

$$x(n+2) - 2\alpha_0 x(n+1) + (\alpha_0^2 + \beta_0^2) x(n) = 0,$$

with random initial conditions

$$x(n)|_{n=0} = x_0(\omega), \quad x(n)|_{n=1} = \alpha_0 x_0(\omega) - \beta_0 y_0(\omega),$$

where $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, $z_0(\omega) = x_0(\omega) + iy_0(\omega)$, (for $y(n)$ the situation is similar).

Let us turn to algorithms for predicting random non-stationary processes and sequences.

Consider the forecast by the last value $\hat{\xi}(n+\theta)$, $\theta > 0$ for a random sequence $(\hat{\xi}(t+\theta))$ of a random process), i.e. a zero order extrapolation. In this case, the forecast error is equal to: $\hat{\xi}(n+\theta) = \xi(n)$, and the forecast error e is equal to $e(n+\theta) = \xi(n+\theta) - \hat{\xi}(n+\theta) = \xi(n+\theta) - \xi(n)$. The average squared error σ^2 in this case has the form:

$$\sigma^2(n, \theta) = M e^2 = K(n+\theta, n+\theta) - 2K(n+\theta, n) + K(n, n), \quad (13)$$

where $K(n, m)$ is the random sequence correlation function.

Formula (13) in the particular case of non-stationary random processes becomes the known formula [13]:

$$\sigma^2(\theta) = M e^2 = K(0) - 2K(\theta) + K(0) = 2(K(0) - K(\theta)), \quad (14)$$

besides, when $\theta = 0$ $\sigma^2(\theta) = 0$, at $\theta = \infty$ $\sigma^2(\theta) = 2K(0)$ (assuming $\lim_{\theta \rightarrow \infty} K(\theta) = 0$).

In the general case, from (13) it follows that when $\theta = 0$, as in the stationary case, $\sigma^2(n, \theta) = 0$, and

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} K(n + \theta, n + \theta) = 0, \quad (15)$$

then $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \sigma^2(n, \theta) = K(n, n)$, hence, $\lim_{\substack{\theta \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sigma^2(n, \theta) = 0$.

This distinguishes essentially the non-stationary case from the stationary one assuming (15) holds. (Note that (15) implies $\lim_{\theta \rightarrow \infty} K(n + \theta, n) = 0$ due to the known formula $|K(n, m)|^2 \leq K(n, n)K(m, m)$.)

For non-stationary random processes $\xi(t)$ (t – continuous parameter) we get the expression for the average square of the last value forecast error similar to (13):

$$\sigma^2(t, \theta) = K(t + \theta, t + \theta) - 2K(t + \theta, t) + K(t, t).$$

Prospects for further research. The solution of the extrapolation problem with particular correlation function considered in the article can be used to simulate filtration and forecasting processes in real systems in the case of non-stationary random signals. The algorithm for finding the optimal estimate in form (8) is easy for hardware implementation. In relation to equation (10) we can say that the construction of an appropriate algorithm for finding an optimal mean square estimate does not cause significant difficulties.

Conclusions. The obtained algorithm for finding the optimal estimate of random non-stationary processes and sequences can be used for the analysis of statistically non-stationary signals, which is promising when solving many applied problems for which the non-stationary data are significant.

Bibliography

1. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып. 5 (51). – С. 3 – 168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory* / Academic Press New York and London, 1970. – 376 p.
3. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 724 с.
4. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
5. Шаронова Н. В., Черемская Н. В. Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета. – 2004. – № 1 (19). – С. 343 – 348.
6. Черемская Н. В. Последовательности в гильбертовом пространстве бесконечного ранга нестационарности // Вісник Харківського університету. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 1999. – № 444. – С. 157 – 161.
7. Черемская Н. В. Об одном классе нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. тр. Сер.: «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков, 2003. – № 18. – С. 122 – 130.
8. Козуляев П. А. К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР, 1947. – Том LVI. – № 9. – С. 903 – 905.
9. Козуляев П. А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР, 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
10. Балакришнан А. В. Теория фильтрации Калмана. – М.: Мир, 1988. – 168с.
11. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 199 с.
12. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов // Харьков: ХНУ, 2003. – 342 с.
13. Ефимов А. Н. Предсказание случайных процессов. – М.: Знание, 1976. – 64 с.

References (transliterated)

1. Yaglom A. M. Vvedenie v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of stationary random functions]. *UMN*. 1952, vol. 1, no. 5 (51), pp. 3–168.
2. Jazwinski A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. / Academic Press New York and London Publ., 1970. 376 p.
3. Tsypkin Ya. Z. *Teoriya impul'snykh sistem* [Theory of pulse systems]. Moscow, GIFML Publ., 1958. 724 p.
4. Medich Dzh. *Statisticheski optimal'nye lineynye otsenki i upravlenie* [Statistically optimal linear estimates and control]. Moscow, Energiya Publ., 1973. 440 p.
5. Sharonova N. V., Cheremskaya N. V. Korrelyatsionnaya teoriya odnogo klassa neodnorodnykh sluchaynykh poley [Correlation theory of a class of inhomogeneous random fields]. *Vestnik Khersonskogo tekhnicheskogo universiteta*. [Bulletin of the Kherson Technical University] 2004, no. 1 (19), pp. 343–348.
6. Cheremskaya N. V. Posledovatel'nosti v gyl'bertovom prostranstve beskonechnogo ranga nestatsyonarnosti [Sequences in a Hilbert Space of Infinite Rank of Nonstationarity]. *Visnyk Kharkivskoho universytetu. Ser.: Matematyka, prykladna matematyka i mekhanika*. [Bulletin of the Kharkov University. Series: Mathematics, Applied Mathematics, and Mechanics] 1999, no. 444, pp. 157–161.
7. Cheremskaya N. V. Ob odnom klasse nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On a class of nonstationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". Sbornik nauchnykh trudov. Ser.: "Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii"* [Bulletin of the NTU "KhPI": collection of scientific works. Series: "System Analysis, Control, and Information Technologies"]. Kharkov, 2003, no. 18, pp. 122–130.
8. Kozulyaev P. A. K voprosu ob ekstrapol'yatsii statsionarnykh protsessov [To the question of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.

9. Kozulyayev P. A. K problemam interpol'yatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [To the problems of interpolation and extrapolation of stationary sequences]. Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.
10. Balakrishnan A. V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [Kalman's filtration theory]. Moscow, Mir Publ., 1988. 168 p.
11. Brammer K., Ziffing G. *Fil'tr Kalmana – B'yusi* [Kalman – Bucy's filter]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 199 p.
12. Zolotarev V. A. *Analiicheskie metody spektral'nykh predstavleniy nesamosopryazhemykh i neunitarnykh operatorov* [Analytic methods of spectral representations of nonselfadjoint and nonunitary operators]. Khar'kov, KHNU Publ., 2003. 342 p.
13. Yefimov A. N. *Predskazanie sluchaynykh protsessov* [Prediction of random processes]. Moscow, Znanie Publ., 1976. 64 p.

Received (поступила) 18. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) – кандидат технічних наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», м. Харків; тел.: (050) 225-15-41; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

ЗМІСТ

<i>Antonova I. V., Chikina N. A.</i> Prepropriate analysis of time series by methods of fractal analysis and phase trajectories.....	3
<i>Burlayenko V. N., Sadowski T., Pietras D.</i> A numerical analysis of near tip fields in a bending moment-loaded double cantilever sandwich beam fracture specimen	9
<i>Бей А. И.</i> Качество восстановления изображений «слепым» методом	15
<i>Воропай А. В.</i> Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита	19
<i>Душкин В. Д.</i> Интегральные уравнения задачи дифракции монохроматических волн на многоэлементной периодической не идеально проводящей гребёнке.....	25
<i>Гардер С. Е., Гомозов Е. П.</i> Анализ и прогнозирование курсовой стоимости биткоина методом SSA	31
<i>Гардер С. Е., Корніль Т. Л.</i> Фрактальний аналіз та прогнозування тенденції фінансового часового ряду.....	37
<i>Кожушко А. П., Григор'єв А. Л.</i> Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею	41
<i>Курна Л. В., Тимченко Г. Н., Осетров А. А.</i> Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек и пластин с вырезами и различными граничными условиями.....	52
<i>Мельник О. С., Горбачук М. С.</i> Мажоритарні нанопристрої послідовностного типу	59
<i>Мельник О. С., Борсук А. О.</i> Синтез мажоритарних одноелектронних нанопристроїв з пам'яттю	65
<i>Naboka O. O.</i> Uniform attractor for wave equation with non-linear damping depending explicitly on time.....	73
<i>Назірова Т. О., Костенко О. Б.</i> Інструментальний аналіз демографічних показників у медичній інформаційній системі	81
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Коливання степеневно-нелінійного осцилятора, спричинені силовим імпульсом.....	89
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар	98
<i>Осетров О. О., Альохін Д. С., Бекарюк О. М.</i> Розрахункова оцінка середньоексплуатаційної паливної економічності двигуна легкового автомобіля.....	103
<i>Polyanskaya T. S., Naboka O. O.</i> Discrete mathematical model of hypersingular integral equation on a system of intervals.....	110
<i>Салтан Б. А., Собко Д. А., Кулаковська І. В.</i> Удосконалення прийняття рішень з вибору ігрової зброї комп'ютерним ботом з використанням алгоритму навчання нейронної мережі FALCON	116
<i>Татарчук Д. Д., Діденко Ю. В., Поправка А. П., Браге К. С.</i> Математичне моделювання конструкцій фільтрів НВЧ на основі тонких діелектричних резонаторів та методи вимірювання їх параметрів.....	124
<i>Ткаченко В. В.</i> Исследование динамической устойчивости многослойных пластин с отверстиями.....	131
<i>Cheremskaya N. V.</i> Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences	139

CONTENTS

Antonova I. V., Chikina N. A. Prepropriate analysis of time series by methods of fractal analysis and phase trajectories	3
Burlayenko V. N., Sadowski T., Pietras D. A numerical analysis of near tip fields in a bending moment-loaded double cantilever sandwich beam fracture specimen	9
Bey A. I. Quality of image recovery by "blind" method	15
Voropay A. V. Suppression of non-stationary vibrations in a mechanical system consisting of a plate and concentrated mass. passive vibration protection.....	19
Dushkin V. D. Integral equations for the diffraction problem of monochromatic waves on a multi-element periodic not pec restangular flange.....	25
Garder S. E., Gomozov E. P. Analysis and prediction of bitcoin rate by SSA method	31
Garder S. E., Kornil T. L. Fractal analysis and frocasting trends of financial time series.....	37
Kozhushko A. P., Grigoriev A. L. Mathematical modelling of low-frequency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface.....	41
Kurpa L. V., Timchenko G. N., Osetrov A. A. nonlinear free vibrations of multylayered shallow shells and plates with cutouts and various boundary conditions	52
Melnyk O. S., Horbarchuk M. S. Majority nano-devices of sequential type	59
Melnyk O. S., Borsuk A. O. Synthesis of majority single-electron nanodevices with memory.....	65
Naboka O. O. Unifirm attractor for wave equation with non-linear damping depending explicitly on time	73
Nazirova T. O., Kostenko O. B. Instrumental analysis of demographic indicators in the medical information system	81
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Vibrations of power nonlinear oscillator caused by force pulse	89
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact.....	98
Osetrov A. A., Alyokhin D. S., Bekariuk A. N. Calculated estimate of the average operating fuel economy of a car engine	103
Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Discrete mathematical model of hypersingular integral equation on a system of intervals	110
Saltan B. A., Sobko D. A., Kulakovska I. V. Improving computer bot weapon choice decisions using FALCON neural network learning algorithm	116
Tatarchuk D. D., Didenko Y. V., Popravka A. P., Brage K. S. Mathematical modeling of microwave filters based on thin dielectric resonators and methods for measuring their parameters.....	124
Tkachenko V. V. Investigation of dynamic stability of multilayer plates with holes.....	131
Cheremskaya N. V. Developing algorithms of optimal forecasting and filtering for some classes of nonstationary random sequences.....	139

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 3 (1279) 2018

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

Відповідальний за випуск Обухова Г. Б., канд. техн. наук

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид. № 22-18.

Підп. до друку 17.05.2018 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк.
8,75. Тираж 100 пр. Зам. № 186527. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вил Кирпичова, 2

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»
Ідент. код юридичної особи: 38093808
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42