ISSN 2222-0631

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

1885
«ХПІ»

ВІСНИК

Національного технічного університету «ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 27'2018

Харків
2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 27 (1303) 2018

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies

No. 27 (1303) 2018

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2018

Kharkiv
NTU "KhPI", 2018

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2018. — № 27 (1303) 2018. — 160 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання
Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях *внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Наказом МОН України № 1328 від 21.12.2015 р.«Про затвердження рішень Атестаційної колегії Міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 15 грудня 2015 року»*

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до зовнішніх інформаційних систем, у тому числі індексується у Google Schoolar та ICI Journals Master List 2017, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich'sPeriodicalsDirectory (NewJersey, USA).

Офіційний сайт видання http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Головний редактор
Сокол Є. І., д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України
Заст. головного редактора
Марченко А. П., д-р техн. наук, проф.
Секретар
Горбунов К. О., доц., НТУ «ХПІ», Україна
Редакційна колегія серії
Відповідальний редактор:
В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.
Заст. відповідального редактора:
Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Відповідальний секретар:
О. О. Набока, канд. фіз.-мат. наук.
Члени редколегії: Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.; О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.; О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. М. Олексенко, д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ф. Пацегон, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.; А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuyev, Sc. D. in Information Technology, Malaysia.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 8 від 2 листопада 2018 р.

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Editor-in-chief
Sokol E. I., dr. tech. sc., member-cor. of National Academy of Sciences of Ukraine, NTU "KhPI"
Deputy editor-in-chief
Marchenko A. P., dr. tech. sc., prof., NTU "KhPI", Ukraine
Secretary
GorbunovK.O., docent, NTU "KhPI", Ukraine
Editorial staff
Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.
Deputy Executive Editor:
Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.
Executive Secretary:
O. O. Naboka, PhD. Phys.-Math. Sci.
Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. M. Oleksenko, Dr. Ped. Sci., PhD. Phys.-Math. Sci, Prof.; V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. I. Pershina, Dr. Phys.-Math. Sci., Docent; A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof., USA; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist, Spain; Vitaliy Mezhuyev, Sc. D. in Inf. Tech., Malaysia.

© Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 2018

УДК 621.225

П. М. АНДРЕНКО, О. В. ДМИТРІЄНКО, К. О. КУЛІНІЧ, В. В. ЕНДЕКО

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КЛАПАНА РОЗВАНТАЖЕННЯ З РЕГУЛЬОВАНИМ ГІСТЕРЕЗИСОМ UZOP...NHY

Показано конструктивну схему гідравлічного клапана розвантаження з регулювальним гістерезисом. Наведено його технічні характеристики та спосіб регулювання гістерезису. Проведено аналіз робочих процесів, що відбуваються в ньому. Це дозволило побудувати його повну математичну модель, при розробці якої крім конструктивних параметрів клапана та гідроакумулятора враховували параметри робочої рідини, характер зміни витрати навантаження в гідроагрегаті. Запропонований підхід може бути використаний для складання математичних моделей інших гідроапаратів.

Ключові слова: клапан розвантаження, математична модель, характеристики, регульований гістерезис, робоча рідина, сила тертя, гідродинамічна сила.

П. Н. АНДРЕНКО, О. В. ДМИТРИЕНКО, К. А. КУЛИНИЧ, В. В. ЭНДЕКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЛАПАНА РАЗГРУЗКИ С РЕГУЛИРУЕМЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ UZOP ... NHY

Показана конструктивная схема гидравлического клапана разгрузки с регулируемым гистерезисом. Приведены его технические характеристики и способ регулирования гистерезиса. Проведен анализ рабочих процессов, происходящих в нем. Это позволило построить его полную математическую модель, при разработке которой кроме конструктивных параметров клапана и гидроаккумулятора учитывали параметры рабочей жидкости, характер изменения расхода нагрузки в гидроагрегате. Предложенный подход может быть использован для составления математических моделей других гидроаппаратов.

Ключевые слова: клапан разгрузки, математическая модель, характеристики, регулируемый гистерезис, рабочая жидкость, сила трения, гидродинамическая сила.

P. M. ANDRENKO, O. V. DMITRIENKO, K.O. KULINICH, V. V. ENDEKO

MATHEMATICAL MODEL OF UNLOADING VALVE WITH ADJUSTABLE HYSTERESIS ZOP ... NHY

The constructive scheme of the hydraulic unloading valve with adjustable hysteresis is proposed. Its technical characteristics and the method of regulating hysteresis are given. The analysis of the working processes occurring in it is conducted. This allows to build a complete mathematical model of the valve, developed with taking in to account the parameters of the working fluid, and the character of change of discharge of load in the hydraulic unit as well as the design parameters of the valve and accumulator. The proposed approach can be used to compile mathematical models of other hydraulic devices.

Key words: unloading valve, mathematical model, characteristics, adjustable hysteresis, working fluid, friction force, hydrodynamic force.

Вступ. Застосування гідроприводів в технологічних та мобільних машинах дозволяє спростити їх кінематику, знизити металоємність, підвищити точність, надійність і рівень автоматизації. Використання гідроприводів обумовлено рядом їх вагомих переваг перед іншими типами приводів і, перш за все, можливістю отримання більших зусиль і потужностей при обмежених розмірах гідродвигунів. Гідроприводи забезпечують широкий діапазон безступінчастого регулювання швидкості, можливість роботи в динамічних режимах з необхідною якістю перехідних процесів, захист систем від перевантаження і контроль діючих зусиль. Гідроапаратура є складовою та невід'ємною частиною гідроприводів. Її характеристики і якість значною мірою визначають характеристики і якість гідроприводу і машини в цілому. При цьому номенклатура гідроапаратів налічує сотні найменувань та неухильно зростає. Незмінною також залишається вимога підвищення характеристик розроблюваних гідроапаратів.

Аналіз літературних джерел. Питанням проектування клапанів присвячена достатня кількість наукових робіт. Так у роботі [1] крім класифікації запобіжних і переливних клапанів наведено аналіз їх схемних та конструктивних рішень. Наведено результати дослідження їх статичних та динамічних характеристик. Розглянуто перспективні схемні рішення таких клапанів. У роботі [2] наведені теоретичні та експериментальні дані, за якими визначаються статичні та динамічні характеристики гідроапаратів, докладно розглянуто фізичні процеси, що відбуваються в них, вплив конструктивних та режимних параметрів на їх характеристики. Наведені математичні моделі та відповідні програми для розрахунку даних характеристик на ПК. Наведена методика розрахунку базується на великій кількості експериментальних досліджень. В роботі [3] наведено математичну модель запобіжного клапана прямої дії. Однак дана математична модель не враховує силу тертя та гідродинамічну силу, а отже не може бути використана при побудові математичної моделі клапана розвантаження.

Робота [4] присвячена розробці математичної моделі запобіжного клапана непрямої дії для дослідження його динамічних властивостей. Однак наведена математична модель не враховує гістерезис. Вона не може бути використана для розрахунку характеристик клапана розвантаження з регульованим гістерезисом. Найбільш повно математичні моделі гідроапаратів розглянуто у посібнику [5], в якому докладно розглянуто фізичні процеси, що відбуваються в них, вплив конструктивних та режимних параметрів на їх характеристики. Однак в ньому не наведено математичну модель клапана розвантаження з регульованим гістерезисом. Даний посібник є підґрунтям складання докладних математичних моделей гідроапаратів різних типів. В статті [6] наведена математична модель запобіжного клапана, однак в ній розглядається запобіжний клапан з пропорційним електричним управ-

© П. М. Андренко, О. В. Дмитрієнко, К. О. Кулініч, В. В. Еденко, 2018

лінням. Таким чином можна констатувати, що в доступних нам літературних джерелах не виявлено математичної моделі клапана розвантаження з регульованим гістерезисом, розробка якої є актуальним науково-технічним завданням.

Клапан розвантаження з регульованим гістерезисом [7]. Зазвичай він застосовується для розвантаження потоку, який надходить від насоса на злив в бак, якщо тиск в гідроакумуляторі досягає встановленого максимального значення. Технічні характеристики клапана табл. 1, конструкція на рис. 1.

Таблиця 1 – Технічні характеристики клапана розвантаження UZOP

Параметр	значення		
Діаметр умовного проходу, мм	10	20	30
Номінальна витрата, л/хв	120	250	400
Робочий тиск, МПа	35		
Тиск в лінії зливу, МПа	21		
Гістерезис	17 % до 50 %		
Напруга живлення соленоїда: – постійний струм, в – Гц; – змінний струм, в – Гц	12, 24, 110 230 – 50, 110 – 50		
Споживана потужність, Вт	30		
Маса, кг	3,8	7	13,2

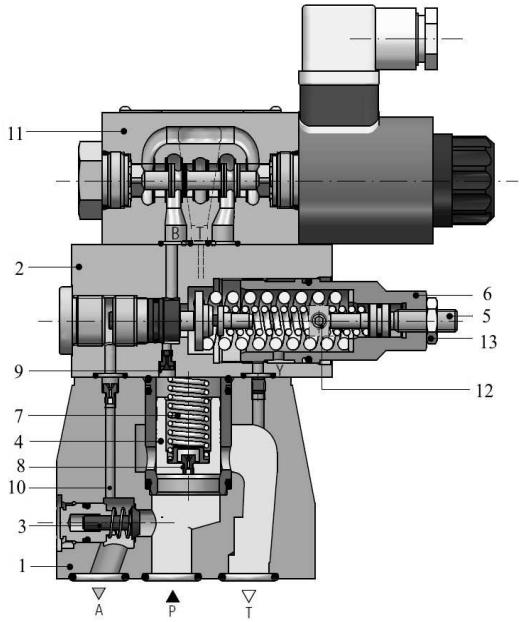


Рис. 1 – Клапана розвантаження UZOP.

Робота клапана. Робоча рідина з насоса надходить до каналу Р і далі через зворотний клапан 3 в канал А для живлення гідроакумулятора. При досягненні тиску налаштування на регуляторі 6, відкривається клапан управління 2. Рідина з каналу Р крізь каскад сопел 8 і 9 надходить до дренажного каналу Y. Внаслідок різниці тиску, що діє на золотник 4 головного клапана 1, пружина 7 підтискається і сполучає канали Р з Т. Зворотний клапан 3 в цей момент закривається, а тиск в каналі А не скидається в канал Т. Управляючий (пілотний) клапан 2 закривається одразу після того, як тиск в каналі А падає до значення налаштування на регулюючому елементі 5. В результаті контролюючий потік рідини крізь каскад сопел 8 і 9 відсікається, і золотник 4 головного клапана 1 закриває потік до зливу Т. Клапан повертається в вихідне положення – потік продовжує надходити з каналу Р до каналу А (подача на гідравлічний акумулятор).

Налаштування клапана здійснюється за допомогою регулюючого елемента 5, який відкручується до максимального кінцевого положення. Встановлюється тиск розвантаження (максимальний робочий тиск) за допомогою регулятора 6, який фіксується гвинтом 12. За допомогою регулюючого елемента 5 встановлюється тиск розвантаження (мінімальний робочий тиск), який фіксується контргайкою 13.

Можливе виконання клапана з електричним управлінням:
– версія UZOPW з розвантаженням при включеному струмі на гідророзподільнику 11: UZOPW…A;
– версія UZOPW з розвантаженням при вимкненому струмі на гідророзподільнику 11: UZOPW…B.

Метою статті є розробка математичної моделі гідравлічного клапана розвантаження з регульованим гістерезисом UZOP...NHY.

Математична модель клапана. Математичний опис процесів, що відбуваються в гідравлічних елементах і системах, ґрунтується на фундаментальних рівняннях механіки твердого тіла, гідромеханіки, теорії автоматичного керування. Причому для гідравлічних систем та їх елементів характерними є процеси, при яких рух робочої рідини (РР) є несталим [3]. Причому декомпозиція гідравлічних систем на окремі структурні елементи відкриває можливість проводити їх аналіз і синтез, базуючись на єдиних методологічних наукових концепціях. Математична модель гідравлічного клапана розроблена за його конструктивною схемою, рис. 1. При її розробці прийняті наступні припущення:

– гідророзподільник – ідеальний: його перекриття нульове; радіальний зазор, перетоки робочої рідини і опір внутрішніх каналів настільки малий, що ними можна знехтувати;

– пружини клапана мають малу жорсткість та працюють у межах, де їх характеристики лінійні і не відбувається відрив їх кінців від поверхонь контакту, що дозволяє знехтувати силою від їх дії на запірно-регулюючий елемент (ЗРЕ);

– товщина стінок каналів, яка визначена з умови їх міцності, достатньо велика, що дозволяє вважати: їх діаметр не залежить від внутрішнього тиску. Корпус – абсолютно жорсткий, а його пружні властивості врахову-

ються приведеним модулем об'ємної пружності робочої рідини;

– довжина каналів мала, а їх діаметри однакові та у порівнянні з довжиною хвилі, це дозволяє знехтувати хвильовими процесами, що відбуваються в них. Нехтуємо також початковими ділянками каналів, на яких відбувається формування профілів швидкостей;

– у клапані відсутні: кавітація – $p_i(t) \geq p_{\text{пар}}$, $p_{\text{пар}}$ – тиск насичених парів РР; резонанс, гідравлічний удар і виконується умова нерозривності робочої рідини. Швидкість звуку в робочій рідині, з урахуванням пружних властивостей каналів, є сталою та значно більшою за швидкість руху в них. Вважаємо робочу рідину ньютонівською, а її течію – ізотермічною;

– розглядається моделі у зосереджених параметрах.

Точність моделювання робочих процесів у гідравлічних елементах і системах залежить від правильного визначення параметрів робочої рідини. При дослідженні таких процесів використовують диференціальні рівняння, до складу яких входять густина, в'язкість, модуль об'ємної пружності, які в свою чергу залежать від її температури. Зі збільшенням тиску та розширенням діапазону робочих температур гідросистем значимість параметрів робочої рідини зростає [8]. При моделюванні робочих процесів у гідравлічному клапані приймаємо значення температури робочої рідини постійною – рівною її середньому значенню. $T_{\text{a}} = \text{const}$.

Значний вплив на параметри робочої рідини має нерозчинене повітря, що міститься в ній. За даними роботи [9] встановлено, що бульбашки повітря рівномірно розподілені по усьому об'єму робочої рідини, а концентрація газоповітряної фази становить 1,4 ... 1,6 % та співпадає з даними концентрації нерозчиненого повітря у відкритих гідросистемах (1 ... 2 %), наведених в різних літературних джерелах, наприклад [10]. Таким чином далі розглядаємо бульбашкову, згідно класифікації [11], течію рідини, у якій газова фаза у вигляді окремих бульбашок різної величини і форми рівномірно розподілена у середовищі рідини, яке є дисперсним. Для визначення характеристик двофазної рідини використовуємо аналітичні залежності з роботи [12].

Модуль пружності робочої рідини у гідросистемі з урахуванням матеріалу труб і їх конструктивних розмірів розраховують за залежністю [2]:

$$E_{\text{пр}}(t) = \frac{E_{\text{с}}(t)}{1 + \left[d_{\text{тр}}\, E_{\text{с}}(t) \right] \Big/ \left(\delta_{\text{тр}}\, E_{\text{тр}} \right)}, \tag{1}$$

де $E_{\text{пр}}(t)$ і $E_{\text{с}}(t)$ – відповідно приведений модуль і модуль пружності робочої рідини з урахуванням її газовмісту; t – час; $d_{\text{тр}}$ і $\delta_{\text{тр}}$ – відповідно діаметр і товщина стінки труби; $E_{\text{тр}}$ – модуль пружності матеріалу труби.

Математична модель робочого процесу зворотного клапана 3 описується такими виразами:

• витрати на його виході залежно від напрямку руху робочої рідини

$$q_{\text{зк}} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad p_{\text{P}}(t) < p_{\text{A}}(t); \\ q_{\text{зк}}, & \text{при} \quad p_{\text{P}}(t) > p_{\text{A}}(t), \end{cases} \tag{2}$$

де $q_{\text{зк}}$ – витрата через зворотний клапан 3, яка розраховується за залежністю

$$q_{\text{зк}}(t) = \mu_{\text{зк}}(\text{Re}) A_{\text{зк}} \sqrt{2[\, p_{\text{P}}(t) - p_{\text{A}}(t)] / \rho(t)}, \tag{3}$$

де $\mu_{\text{зк}}(\text{Re})$ – коефіцієнт витрати зворотного клапана 3; $A_{\text{зк}}$ – площа прохідного перетину зворотного клапана 3; $p_{\text{P}}(t)$ і $p_{\text{A}}(t)$ – відповідно тиск в каналі P і A; $\rho(t)$ – густина робочої рідини, зазначимо, що густина робочої рідини може бути прийнята постійною.

• руху ЗРЕ зворотного клапана 3

$$m_{\text{п зк}} \ddot{x}_{\text{зк}} = A_{\text{зк}} \left(p_{\text{P}}(t) - p_{\text{A}}(t) \right) - F_{\text{зк гд}}(t) - F_{\text{зк пр}}(t) - F_{\text{зк тр}}(t). \tag{4}$$

У рівнянні (4) і далі приведену масу ЗРЕ розраховують за залежністю

$$m_{\text{п зк}} = m_{\text{зк}} + m_{\text{пр}} / 3, \tag{5}$$

де $m_{\text{зк}}$ – маса ЗРЕ; $m_{\text{пр}}$ – маса пружини; $x_{\text{зк}}$ – переміщення ЗРЕ зворотного клапана; $F_{\text{зк тр}}(t)$, $F_{\text{зк пр}}(t)$, $F_{\text{зк гд}}(t)$ – відповідно сили: тертя, пружини, гідродинамічна, які визначаються за залежностями, наведеними нижче.

• обмеження переміщення ЗРЕ зворотного клапана 3

$$0 < x_{\text{зк}}(t) \leq x_{\text{зк max}}, \tag{6}$$

де $x_{\text{зк max}}$ – максимальне переміщення ЗРЕ зворотного клапана 3.

Нехтуючи силою сухого тертя, розглядали силу тертя як силу рідинного тертя, яка розраховується за залежністю

$$F_{\text{тр}}(t) = k_{\text{т р}}\, \dot{x}_{\text{зре}}, \tag{7}$$

де $k_{\text{т р}}$ – коефіцієнт тертя.

Сила, що діє з боку пружини на ЗРЕ зворотного клапана 3, визначається за? залежністю

$$F_{\text{пр}}(t) = c_{\text{пр}} \left[x_{\text{зре}}(t) + x_0 \right], \tag{8}$$

де x_0 – попередній підтиск пружини, який визначає початкову силу, що діє на ЗРЕ; $c_{\text{пр}}$ – жорсткість пружини [13]

$$c_{\text{пр}} = G_{\text{ст}} d_{\text{пр}} H \Big/ \left(8 D_{\text{пр}} n_{\text{пр}}\right), \tag{9}$$

де $D_{\text{пр}}$ – середній діаметр пружини; $d_{\text{пр}}$ – діаметр дроту пружини; $G_{\text{ст}}$ – модуль зсуву матеріалу пружини; H – висота стиснутої пружини; $n_{\text{пр}}$ – кількість робочих витків.

Гідродинамічна сила, яка діє на ЗРЕ зворотного клапана 3, визначається залежністю

$$F_{\text{зк гд}}(t) = (p_{\text{P}} - p_{\text{A}}) A_{\text{зк}} - \rho(t)\, q_{\text{зк}}(t)\left[v_2(t)\cos\theta - v_1(t)\right], \tag{10}$$

де $v_1(t) = q_{\text{зк}}(t)/A_{\text{зк}}$ і $v_2(t) = q_{\text{зк}}(t)/(\varepsilon_{\text{кл}} A_{\text{зк}})$ – відповідно швидкості робочої рідини в каналі підведення і прохідному перерізі клапана; $\varepsilon_{\text{кл}}$ – коефіцієнт стиску робочої рідини; θ – кут відхилення вектора потоку робочої рідини, яка обтікає клапан.

Рівняння нерозривності потоку при протіканні рідини крізь каскад сопел 8 і 9

$$G_8 (p_{\text{P}} - p_0) = G_9 (p_0 - p_{\text{Y}}), \tag{11}$$

де p_0 і p_{Y} – відповідно тиск в міждросельному каналі і дренажному каналі Y; G_8 і G_9 – відповідно провідність сопел 8 і 9, які розраховуються за однотипними залежностями, наприклад для G_8

$$G_8 = \frac{q_0}{\sqrt{\frac{1}{2}(p_{\text{P}} - p_0)}}, \tag{12}$$

де q_0 – витрата рідини крізь сопло8.

Приймаючи, що тиск в каналі Y дорівнює атмосферному, з рівнянь (11) і (12) знаходимо

$$p_0 = \frac{G_8}{G_8 + G_9} p_{\text{P}}. \tag{13}$$

Математична модель робочого процесу золотника 4 головного клапана 1 описується такими залежностями:

- витрати в каналі Т при перепаді тиску на ЗРЕ (золотнику) 4

$$q_{\text{T}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } p_{\text{A}} < p_0; \\ q_{\text{T}}(t), & \text{при } p_{\text{A}} > p_0, \end{cases} \tag{14}$$

де q_{T} – витрата через головний клапан 1 розраховується за залежністю

$$q_{\text{T}}(t) = \mu_{\text{к1}}(\text{Re}) A_{\text{к1}} \sqrt{2[p_{\text{P}}(t) - p_0(t)]/\rho(t)}, \tag{15}$$

де $\mu_{\text{к1}}(\text{Re})$ – коефіцієнт витрати головного клапана 1; $A_{\text{к1}}$ – площа прохідного перетину головного клапана 1;

- руху ЗРЕ головного клапана 1

$$m_{\text{п к1}} \ddot{x}_{\text{к1}} = A_{\text{к1}} (p_{\text{P}} - p_0(t)) - F_{\text{к1 гд}}(t) - F_{\text{к1 пр}}(t) - F_{\text{к1 тр}}(t); \tag{16}$$

де $x_{\text{к1}}$ – переміщення ЗРЕ головного клапана 1; $F_{\text{к1 тр}}(t)$, $F_{\text{к1 пр}}(t)$, $F_{\text{к1 гд}}(t)$ – відповідно сили: тертя, пружини, гідродинамічна, які визначаються за залежностями: (7), (8), (10);

- обмеження переміщення ЗРЕ головного клапана 1

$$0 < x_{\text{к1}}(t) \le x_{\text{к1 max}}, \tag{17}$$

де $x_{\text{к1 max}}$ – максимальне переміщення ЗРЕ головного клапана 1.

Рівняння часу зарядження гідроакумулятора [14]

$$t = \frac{2F}{\mu_{\text{га}} f_{\text{о га}} \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H}\right), \tag{18}$$

де $\mu_{\text{га}}$ і $f_{\text{о га}}$ – коефіцієнт витрати і площа прохідного перетину вихідного отвору гідроакумулятора відповідно, F – площа вільної поверхні гідроакумулятора; H і H_0 – відповідно напір і початковий напір гідроакумулятора; g – прискорення вільного падіння.

Для отримання динамічних характеристик клапана рівняння (2) – (4), (6) – (8), (10), (11), (14) – (18) розглядають разом з початковими умовами. За початкові умови приймають: $x_{\text{зк}}(0) = x_{\text{зк}\,0}$, $x_{\text{к1}}(0) = x_{1\text{к}\,0}$, $\dot{x}_{\text{зк}}(0) = 0$, $\dot{x}_{\text{к1}}(0) = 0$, вважають, що тиск зливу в каналі Т дорівнює атмосферному. Задають робочі параметри клапана та початкові параметри робочої рідини: модуль об'ємної пружності та густину при атмосферному тиску, газовміст і робочу температуру. Зазначимо, що величина тиску в гідроагрегаті в усталеному режимі відповідає навантаженню на гідродвигуні, що трансформується витратою навантаження. Задають характер зміни витрати навантаження, при заданих початкових умовах, на персональному комп'ютері за допомогою пакета прикладних програм отримують графіки перехідних процесів у клапані та гідроакумуляторі.

Висновки. Уперше отримана повна математична модель гідравлічного клапана розвантаження з регульованим гістерезисом UZOP...NHY. Розроблена математична модель, яка крім конструктивних параметрів клапана враховує конструктивні параметри гідроакумулятора, параметри робочої рідини, характер зміни витрати навантаження в гідроагрегаті. Запропонований підхід може бути використаний для складання математичних моделей інших гідроапаратів.

Список литературы

1. *Ситников Б. Т., Матвеев И. Б.* Расчет и исследование предохранительных и переливных клапанов. – М. : Машиностроение, 1971. – 129 с.
2. *Данилов Ю. А., Киллиловский Ю. Л., Колпаков Ю. Г.* Аппаратура объемных гидроприводов. Рабочие процессы и характеристики. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.
3. *Попов Д. Н.* Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: учебник для вузов. – М. : Машиностроение. – 1987. – 464 с.
4. *Волошина А. А.* Математическая модель предохранительного клапана непрямого действия // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Т. 4. – Вип. 12. – Мелітополь : ТДАУ, 2012. – С. 230 – 239.
5. *Андренко П. М.* Гідравлічні пристрої мехатронних систем : навч. посібник. – Харків : Видавничий центр НТУ «ХПІ», 2014. – 188 с.
6. *Гасюк А. И., Мараховский М. Б.* Математическая модель для исследования статических и динамических характеристик предохранительного клапана непрямого действия // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. : Гідравлічні машини та гідроагрегати. – 2017. – № 42 (1264). – С. 71 – 74.
7. Клапан разгрузки UZOP...NHY. – Режим доступу : http: \\ motorimpex.ua. – Дата звертання : 14 жовтня 2018.
8. *Трофимов В. А., Яхно О. М., Губарев А. П.* Рабочие жидкости систем гидропривода : учеб. пособие. – К. : НТУУ «КПИ», 2009. – 184 с.
9. *Струтинський В. Б., Тіхенко В. М.* Стохастичні процеси у гідроприводах верстатів : монографія. – Одеса : Асто-принт, 2009. – 456 с.
10. *Свешников В. К.* Станочные гидроприводы : справочник. – М. : Машиностроение, 1995. – 448 с.
11. *Евтушенко А. А., Колисниченко Э. В., Сапожников С. В.* Турбомашины для перекачивания газожидкостных смесей // Вісник СумДУ. – 2004. – № 13 (72). – С. 45 – 49.
12. *Лурьє З. Я., Федоренко И. М.* Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. – Lublin, 2010. – Vol. 12. – С. 10 – 25.
13. *Хвингия М. В.* Вибрация пружин. – М. : Машиностроение, 1969. – 287 с.
14. *Токаренко В. М., Терских В. З., Столяров А. Л.* Гидропривод и гидрооборудование автотранспортных средств : учеб. пособие. – К. : Лыбидь, 1991. – 232 с.

References (transliterated)

1. Sitnikov B. T., Matveev I. B. *Raschet i issledovanie predokhranitel'nykh i perelivnykh klapanov* [Calculation and research of safety and overflow valves]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971. 129 p.
2. Danilov Yu. A., Killilovskiy Yu. L., Kolpakov Yu. G. *Apparatura ob"emnykh gidroprivodov. Rabochie protsessy i kharakteristiki* [Equipment of volume hydraulic drives. Work processes and characteristics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 272 p.
3. Popov D. N. *Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem : uchebnik dlya vuzov* [Dynamics and regulation of hydro and pneumatic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 464 p.
4. Voloshina A. A. Matematicheskaya model' predokhranitel'nogo klapana nepryamogo deystviya [Mathematical model of indirect action safety valve]. *Pratsi Tavriys'kogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu* [Proc. of Tavria State Agrotechnological University]. Melitopol, 2012, vol. 4., issue 12, pp. 230–239.
5. Andrenko P. M. *Gidravlichni prystroyi mekhatronnykh system : navch. posibnyk* [Hydraulic units of mechatronic systems: textbook]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014. 188 p.
6. Gasyuk A. I., Marakhovskiy M. B. Matematicheskaya model' dlya issledovaniya staticheskikh i dinamicheskikh kharakteristik predokhranitel'nogo klapana nepryamogo deystviya [Mathematical model for studying static and dynamic characteristics of an indirectly action safety valve]. *Visnyk NTU "KhPI". Ser. : Gidravlichni mashyny ta gidroagregaty* [Bulletin of National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 42 (1264), pp. 71–74.
7. *Klapan razgruzki UZOP...NHY* [Unloading valve UZOP ... NHY]. Available at: http: \\ motorimpex.ua. (accessed 14.10.2018).
8. Trofimov V. A., Yakhno O. M.,. Gubarev A. P., Solonin R. I. *Rabochie zhidkosti sistem gidroprivoda : ucheb. posobie* [Working fluids of hydraulic drive systems: textbook]. Kiev, NTUU "KPI", 2009. 184 p.
9. Strutinskiy V. B., Tikhenko V. M. *Stokhastychni protsesy u gidroprivodakh verstativ : monografiya* [Stochastic processes in hydraulic drives of machining stations: monograph]. – Odesa, Astoprint Publ., 2009. 456 p.
10. Sveshnikov V. K. *Stanochnye gidroprivody : spravochnik* [Hydraulic drives of machining stations : reference book]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1995. 448 p.
11. Evtushenko A. A., Kolisnichenko E. V., Sapozhnikov S. V. Turbomashiny dlya perekachivaniya gazozhidkostnykh smesey [Turbomachines for pumping gas-liquid mixtures]. *Visnyk SumDU.* [Bulletin of Sumy State University]. Sumy, SumDU Publ., 2004, no. 13 (72), pp. 45–49.
12. Lurye Z. Ya, Fedorenko I. M. Issledovanie rabochego protsessa mekhatronnogo gidroagregata sistemy smazki metalurgicheskogo oborudovaniya s uchetom kharakteristik dvukhfaznoy zhidkosti [Study of the working process of a mechatronic hydraulic unit of a lubrication system of metallurgical equipment with regard to the characteristics of two-phase fluid]. *MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture.* Lublin, 2010, vol 12, pp. 10–25.
13. Khvingiya M. V. *Vibratsiya pruzhin* [Spring vibration]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969. 287 p.
14. Tokarenko V. M., Terskikh V. Z., Stolyarov A. L. *Gidroprivod i gidrooborudovanie avtotransportnykh sredstv : ucheb. posobie* [Hydraulic drives and hydraulic equipment of vehicles : textbook]. Kyiv, Lybid' Publ., 1991. 232 p.

Надійшла (received) 26. 10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андренко Павло Миколайович (Андренко Павел Николаевич, Andrenko Pavlo Mykolayovych) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 240-39-52; e-mail: andrenko1947@gmail.com.

Дмитрієнко Ольга Вячеславівна (Дмитриенко Ольга Вячеславовна, Dmitrienko Olga Vyacheslavovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 879-79-04; e-mail: olga_dm@meta.ua.

Кулініч Катерина Олексіївна (Кулинич Екатерина Алексеевна, Kulinich Ekaterina Alekseevna) – магістрант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 426-18-60; e-mail: kylinich1992@gmail.com.

Ендеко Владислав Вікторович (Эндеко Владислав Викторович, Endeko Vladislav Viktorovich) – магістрант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 042-71-22; e-mail: endeko1002@gmail.com.

УДК 517.95

А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК

ПРОГНОЗУВАННЯ ЗМІНИ ХАРАКТЕРИСТИК КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПОРИСТИХ ЗАВАНТАЖЕНЬ ШВИДКИХ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРІВ

Сформовано математичну модель прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрації, що враховує дослідження зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, визначити оптимальні варіанти їх використання і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів.

Ключові слова: математична модель, прогнозування, процес доочистки води, швидкий багатошаровий фільтр, кусково-однорідне пористе завантаження.

А. Я. БОМБА, Ю. Е. КЛИМЮК

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ ЗАГРУЗОК БЫСТРЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЛЬТРОВ

Сформирована математическая модель прогнозирования процесса доочистки воды от примесей в быстрых многослойных фильтрах при соблюдении постоянной скорости фильтрации, которая учитывает исследования изменения характеристик кусочно-однородных пористых загрузок. Предложенная модель позволяет путем проведения компьютерных экспериментов спрогнозировать изменение характеристик кусочно-однородных пористых загрузок, определить оптимальные варианты их использования и увеличение продолжительности работы фильтров за счет выбора их формы и высоты слоев.

Ключевые слова: математическая модель, прогнозирование, процесс доочистки воды, быстрый многослойный фильтр, кусочно-однородная пористая загрузка.

A. YA. BOMBA, YU. YE. KLYMYUK

PREDICTION OF CHANGES IN THE CHARACTERISTICS OF PIECEWISE HOMOGENEOUS POROUS LOADS OF RAPID MULTILAYER FILTERS

A mathematical model for predicting the process of water purification from impurities in rapid multilayer filters with the constant rate of filtration, which takes into account the changes in the characteristics of piecewise-homogeneous porous load, is formulated. Each layer of the load is characterized by its own coefficients of filtration, active porosity and diffusion of impurities in the filtration flow, and the sediment adsorbed on the grains of the load. An algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem for a filter that has the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded by two equipotential surfaces and four flow surfaces, separated by given equipotential surfaces into several subdomains, is developed. The proposed model allows to predict by computer experiments the change in the characteristics of piecewise-homogeneous porous loads, to determine the optimal variants of their use, and to increase the durability of the filters by choosing their shape and height of the layers.

Key words: mathematical model, prediction, process of water purification, rapid multilayer filter, piecewise-homogeneous porous load.

Вступ. На сьогоднішній день прісні поверхневі та підземні води потребують покращання їх якості перед використанням для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності. Це досягається шляхом їх очистки від різних домішок (газів, мінеральних й органічних речовин, що знаходяться в розчиненому, колоїдному і завислому станах, а також мікроорганізмів) за допомогою механічних, хімічних, фізичних та біологічних методів. Для видалення з води нерозчинених і колоїдно-розчинених домішок зазвичай послідовно застосовується її відстоювання і фільтрування. Для доочистки води від домішок досить часто використовуються швидкі фільтри із багатошаровими пористими завантаженнями з піску і гравію або інших фільтруючих матеріалів завдяки більш високій швидкості фільтрування [1 – 4]. Постійно зростаючі об'єми використовуваної у господарстві води також вимагають проведення досліджень по збільшенню часу захисної дії швидких багатошарових фільтрів та більш якісного використання їх пористих завантажень.

Аналіз останніх досліджень. До 50-х років XX ст. основними фільтруючими зернистими завантаженнями для очищення води були кварцові піски, які важчі за воду і тонули в ній. Ці їхні властивості визначали типи й умови роботи фільтрів. Останнім часом на додачу до традиційно використовуваного кварцового піску з'явилося багато нових матеріалів: керамзит, аглопорит, шлакова пемза, погорілі породи, вулканічні шлаки, базальтові та мармурові піски і таке інше. Різноманітні природні властивості нових фільтруючих завантажень фільтрів впливають на ефективність їхньої роботи, розміри споруд, продуктивність і т. п. У XXI ст. йде пошук нових фільтруючих матеріалів. У двошарових фільтрах використовують усілякі зернисті інертні матеріали, шари яких компонуються так, щоб верхній складався з більш легких і великих часток. Вдається підібрати навіть тришарові завантаження (наприклад, керамічна крихта – аглопоритовий пісок – антрацит), які складаються із шарів по 0,5 м і мають сорбційну ємність кращу, ніж двошарові [1].

Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [5–10]. В якості математичної моделі процесу фільтрування води через пористі завантаження більшістю дослідників використовується *модель Д. М. Мінца* [11] при сталій швидкості фільтрації або деяка її модифікація (вдосконалена модель).

Постановка задачі. У [12] запропоновано просторове узагальнення моделі Д. М. Мінца для багатошарового фільтра при сталій швидкості фільтрації, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень,

© А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, 2018

націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії, розмірів фільтра тощо) за рахунок введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру, врахування дифузії домішок не лише у фільтраційній течії, а й в осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Актуальною задачею є введення ще одного додаткового рівняння для дослідження зміни коефіцієнта фільтрації вздовж висоти багатошарового фільтра.

Математична модель. Для області $G = G_{\mathsf{z}} \times (0,\infty)$ $(\mathsf{z} = (x, y, z))$, $G_{\mathsf{z}} = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{\mathsf{z}: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{\mathsf{z}: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{\mathsf{z}: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{\mathsf{z}: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{\mathsf{z}: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{\mathsf{z}: f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділений заданими еквіпотенціальними поверхнями $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{\mathsf{z}: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ $(s = \overline{1, p-1})$ на деякі p підобластей $G_{\mathsf{z}}^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$, $G_{\mathsf{z}}^s = E_sF_sF_{s+1}E_{s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$ $(s = \overline{2, p-2})$, $G_{\mathsf{z}}^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*p-1}F_{*p-1}C_*D_*$ (рис. 1, *а*), сформовано модельну задачу, що описується системою рівнянь:

$$\left\{\vec{v} = \kappa_0^0 \cdot grad\ \varphi,\ div\ \vec{v} = 0,\ (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right.; \tag{1}$$

$$\begin{cases} \left(\sigma \cdot C\right)_t' = div\left(D \cdot grad\ C\right) - \vec{v} \cdot grad\ C - \alpha \cdot C + \beta \cdot U; \\ \left(\sigma \cdot U\right)_t' = div\left(D^* \cdot grad\ U\right) + \alpha \cdot C - \beta \cdot U; \\ \kappa_t' = -\mu \cdot U,\ \sigma_t' = -\gamma \cdot U,\ (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p} \end{cases} \tag{2}$$

за крайових умов:

$$\left\{\varphi\Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \varphi_{\vec{n}}'\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0\right.; \tag{3}$$

$$\begin{cases} C\Big|_{ABB_*A_*} = c^*,\ C_{\vec{n}}'\Big|_{CDD_*C_*} = 0,\ C_{\vec{n}}'\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \\ U\Big|_{ABB_*A_*} = u^*,\ U_{\vec{n}}'\Big|_{CDD_*C_*} = 0,\ U_{\vec{n}}'\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

початкових умов:

$$\left\{C\big|_{t=0} = c_0^0,\ U\big|_{t=0} = u_0^0,\ \kappa\big|_{t=0} = \kappa_0^0,\ \sigma\big|_{t=0} = \sigma_0^0\right. \tag{5}$$

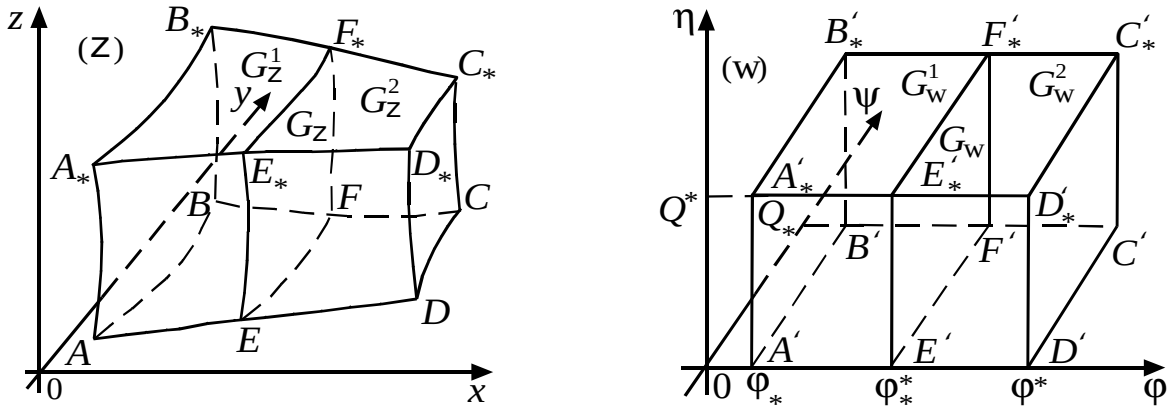
та умов узгодженості на поверхнях розділу $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ $(s = \overline{1, p-1})$:

$$\left\{\varphi\big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \varphi\big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*,\ \kappa_s^0 \cdot \varphi_{\vec{n}}'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \kappa_{s+1}^0 \cdot \varphi_{\vec{n}}'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}},\ s = \overline{1, p-1}\right.; \tag{6}$$

$$\begin{cases} C\big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = C\big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}},\ D_s \cdot C_{\vec{n}}' - v_{s\,n}^0 \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C_{\vec{n}}' - v_{s\,n}^0 \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ U\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = U\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}},\ D_s^* \cdot U_{\vec{n}}'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1}^* \cdot U_{\vec{n}}'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ D_s \cdot C_{\vec{n}}' + D_s^* \cdot U_{\vec{n}}' - v_{s\,n} \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C_{\vec{n}}' + D_{s+1}^* \cdot U_{\vec{n}}' - v_{s\,n} \cdot C\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}}; \\ \left(\sigma \cdot (C+U)\right)_t'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s-}} = \left(\sigma \cdot (C+U)\right)_t'\Big|_{E_sF_sF_{*s}E_{*s+}},\ s = \overline{1, p-1}, \end{cases} \tag{7}$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації, $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$, $0 < \varphi_* = \varphi_{*0}^* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \ldots < \varphi_{*p-1}^* < \ < \varphi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$, κ_0^0 – початковий коефіцієнт фільтрації, $\kappa_0^0 = \left\{\kappa_s^0,\ (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $\kappa_s^0 > 0$ $(s = \overline{1, p})$, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, $C = C(x, y, z, t)$ і $U = U(x, y, z, t)$ – відповідно концентрації домішок у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ – активна пористість, $\kappa = \kappa(x, y, z, t)$ – коефіцієнт фільтрації, D – коефіцієнт дифузії домішок у фільтраційній течії, $D = \left\{D_s, (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $D_s = \varepsilon \cdot d_s$, $d_s > 0$ $(s = \overline{1, p})$, D^* – коефіцієнт дифузії домішок в осаді, $D^* = \left\{D_s^*, (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $D_s^* = \varepsilon \cdot d_s^*$, $d_s^* > 0$ $(s = \overline{1, p})$, α і β – коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованих і десорбованих за одиницю часу домішок, $\alpha = \left\{\alpha_s, (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $\beta = \left\{\beta_s, (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $\beta_s = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_s$ $(s = \overline{1, p})$, μ – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни коефіцієнта фільтрації, $\mu = \left\{\mu_s, (x, y, z) \in G_{\mathsf{z}}^s,\ s = \overline{1, p}\right\}$, $\mu_s = \varepsilon \cdot \bar{\mu}_s$ $(s = \overline{1, p})$, γ –

коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості завантаження, $\gamma = \left\{\gamma_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\right\}$, $\gamma_s = \varepsilon \cdot \overline{\gamma}_s$ $(s = \overline{1, p})$, $\alpha_s = \alpha_s(x, y, z, t)$, $\beta_s = \beta_s(x, y, z, t)$, $\mu_s = \mu_s(x, y, z, t)$ і $\overline{\gamma}_s = \overline{\gamma}_s(x, y, z, t)$ $(s = \overline{1, p})$ – неперервні обмежені функції, ε – малий параметр $(\varepsilon > 0)$, $c_0^0 = \left\{c_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\right\}$, $u_0^0 = \left\{u_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\right\}$, $\sigma_0^0 = \left\{\sigma_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\right\}$, $c_* = c_*(M, t)$, $c_s^0 = c_s^0(x, y, z)$, $u_* = u_*(M, t)$, $u_s^0 = u_s^0(x, y, z)$ і $\sigma_s^0 = \sigma_s^0(x, y, z)$ $(s = \overline{1, p})$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G [16], $M \in ABB_*A_*$, $v_{s\,n}^0$ і $v_{s\,n}$ $(s = \overline{1, p-1})$ – відповідно початкові і поточні нормальні складові швидкості на поверхнях $E_sF_sF_{*s}E_{*s}$ $(s = \overline{1, p-1})$.



а *б*

Рис. 1 – Двошарова просторова область: *а* – область фільтрації G_z; *б* – область комплексного потенціалу G_w.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x, y, z)$) таких, що $\kappa_0^0 \cdot grad\,\varphi = grad\,\psi \times grad\,\eta$ [14] і заміни останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*} = 0$, $\psi\big|_{BCC_*B_*} = Q_*$, $\eta\big|_{ABCD} = 0$, $\eta\big|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$, задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу – прямокутний паралелепіпед $G_w = A'B'C'D'A'_*B'_*C'_*D'_*$, який розділений заданими поверхнями $E'_sF'_sE'_{*s}F'_{*s}$ $(s = \overline{1, p})$ на деякі p підобластей:

$$G_w^1 = A'B'E'_1F'_1A'_*B'_*E'_{*1}F'_{*1},\ G_w^s = E'_sF'_sF'_{s+1}E'_{s+1}E'_{*s}F'_{*s}F'_{*s+1}E'_{*s+1}\ (s = \overline{2, p-2}),$$

$$G_w^p = E'_{p-1}F'_{p-1}C'D'E'_{*\,p-1}F'_{*\,p-1}C'_*D'_*\ \text{(рис. 1, } б\text{)},$$

де $G_w^s = \left\{w = (\varphi, \psi, \eta):\ \varphi^*_{*(s-1)} < \varphi < \varphi^*_{*s},\ 0 < \psi < Q_*,\ \ 0 < \eta < Q^*\right\}$ $(s = \overline{1, p})$, φ^*_{*s} $(s = \overline{1, p-1})$, Q_*, Q^* – невідомі параметри, $Q = Q_* \cdot Q^*$ – повна фільтраційна витрата. Алгоритм розв'язання цієї задачі отримано в [13], зокрема, в роботі наведені формули для знаходження поля швидкостей $\vec{v}$, параметрів φ^*_{*s} $(s = \overline{1, p-1})$, Q_*, Q^*, Q та ряду інших величин. Здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримаємо відповідну «дифузійну задачу» для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \left(\tilde{\sigma} \cdot c\right)'_t = D \cdot \left(b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_\psi + b_5 \cdot c'_\eta\right) - \dfrac{\tilde{\nu}^2}{\kappa_0^0} \cdot c'_\varphi - \tilde{\alpha} \cdot c + \tilde{\beta} \cdot u, \left(\tilde{\sigma} \cdot u\right)'_t = D^* \cdot \left(b_1 \cdot u''_{\varphi\varphi} + \right. \\ \left. + b_2 \cdot u''_{\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{\eta\eta} + b_4 \cdot u'_\psi + b_5 \cdot u'_\eta\right) + \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u,\ \ \tilde{\kappa}'_t = -\tilde{\mu} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\gamma} \cdot u, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s,\ s = \overline{1, p}; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} c\big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*,\ c'_\varphi\big|_{\varphi=\varphi^*} = 0,\ c'_\psi\big|_{\psi=0} = c'_\psi\big|_{\psi=Q_*} = c'_\eta\big|_{\eta=0} = c'_\eta\big|_{\eta=Q^*} = 0, \\ u\big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_*,\ u'_\varphi\big|_{\varphi=\varphi^*} = 0,\ u'_\psi\big|_{\psi=0} = u'_\psi\big|_{\psi=Q_*} = u'_\eta\big|_{\eta=0} = u'_\eta\big|_{\eta=Q^*} = 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\left\{c\big|_{t=0} = \tilde{c}_0^0,\ u\big|_{t=0} = \tilde{u}_0^0,\ \tilde{\kappa}\big|_{t=0} = \kappa_0^0,\ \tilde{\sigma}\big|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0; \right. \tag{10}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} c = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} c,\ \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} \left(D_s\cdot c'_\varphi - \kappa^0_s\cdot c\right) = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} \left(D_{s+1}\cdot c'_\varphi - \kappa^0_{s+1}\cdot c\right), \\ \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} u = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} u,\ \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} D^*_s\cdot u'_\varphi = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} D^*_{s+1}\cdot u'_\varphi, \\ \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} \left(D_s\cdot c'_\varphi + D^*_s\cdot u'_\varphi - \tilde\kappa_s\cdot c\right) = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} \left(D_{s+1}\cdot c'_\varphi + D^*_{s+1}\cdot u'_\varphi - \tilde\kappa_{s+1}\cdot c\right), \\ \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s-0}} \left(\tilde\sigma\cdot(c+u)\right)'_t = \lim\limits_{\varphi\to\varphi^*_{*s+0}} \left(\tilde\sigma\cdot(c+u)\right)'_t,\ s=\overline{1,p-1}, \end{cases} \tag{11}$$

де $c = c(\varphi,\psi,\eta,t) = C\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\right)$, $u = u(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde\sigma = \tilde\sigma(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde\kappa = \tilde\kappa(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde c_* = \tilde c_*(\psi,\eta,t)$, $\tilde u_* = \tilde u_*(\psi,\eta,t)$, $\tilde c^0_0 = \left\{\tilde c^0_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde u^0_0 = \left\{\tilde u^0_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\sigma^0_0 = \left\{\tilde\sigma^0_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\alpha = \left\{\tilde\alpha_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\beta = \left\{\tilde\beta_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\beta_s = \varepsilon\cdot\tilde{\tilde\beta}_s$ ($s=\overline{1,p}$), $\tilde\gamma = \left\{\tilde\gamma_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\gamma_s = \varepsilon\cdot\tilde{\tilde\gamma}_s$ ($s=\overline{1,p}$), $\tilde\mu = \left\{\tilde\mu_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\mu_s = \varepsilon\cdot\tilde{\tilde\mu}_s$ ($s=\overline{1,p}$), $\tilde c^0_s = \tilde c^0_s(\varphi,\psi,\eta)$, $\tilde u^0_s = \tilde u^0_s(\varphi,\psi,\eta)$, $\tilde\sigma^0_s = \tilde\sigma^0_s(\varphi,\psi,\eta)$, $\tilde\alpha_s = \tilde\alpha_s(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\tilde\beta}_s = \tilde{\tilde\beta}_s(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\tilde\gamma}_s = \tilde{\tilde\gamma}_s(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p}$), $\tilde\nu = \left\{\tilde\nu_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\nu_s = \tilde\nu_s(\varphi,\psi,\eta)$, $b_r = \left\{b_{r,s}, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi,\psi,\eta)$ ($r=\overline{1,5}$, $s=\overline{1,p}$), $b_{1,s} = \varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z = \tilde v^2_s/(\kappa^0_s)^2$, $b_{2,s} = \psi'^2_x + \psi'^2_y + \psi'^2_z$, $b_{3,s} = \eta'^2_x + \eta'^2_y + \eta'^2_z$, $b_{4,s} = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz}$, $b_{5,s} = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz}$ [12, 13].

Розв'язання задачі. Аналогічно до [12, 13] знайдено чисельно-асимптотичне наближення $c = \left\{c_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $u = \left\{u_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$, $\tilde\sigma = \left\{\tilde\sigma_s, (\varphi,\psi,\eta)\in G^s_{\mathsf w}, s=\overline{1,p}\right\}$ розв'язку задачі (8) – (11) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ у вигляді таких рядів:

$$c_s = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde P_{s,i} + \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat P_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{\tilde P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve P_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\tilde P}_{s,i} + R_{s,n+1}\ (s=\overline{1,p});$$

$$u_s = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot u_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde H_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat H_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{\tilde H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve H_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\tilde H}_{s,i} + \breve R_{s,n+1}$$

$$(s=\overline{1,p});$$

$$\tilde\kappa_s = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde\kappa_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde q_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde q}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat q_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{\tilde q}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve q_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\tilde q}_{s,i} + \hat R_{s,n+1}\ (s=\overline{1,p});$$

$$\tilde\sigma_s = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde\sigma_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde h_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\tilde{\tilde h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat h_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\hat{\tilde h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve h_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\breve{\tilde h}_{s,i} + \tilde R_{s,n+1}\ (s=\overline{1,p}),$$

де $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $u_{s,i} = u_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde\kappa_{s,i} = \tilde\kappa_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde\sigma_{s,i} = \tilde\sigma_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $\tilde P_{s,i} = \tilde P_{s,i}(\tilde\phi_{s-1},\psi,\eta,t)$, $\tilde H_{s,i} = \tilde H_{s,i}(\tilde\phi_{s-1},\psi,\eta,t)$, $\tilde q_{s,i} = \tilde q_{s,i}(\tilde\phi_{s-1},\psi,\eta,t)$, $\tilde h_{s,i} = \tilde h_{s,i}(\tilde\phi_{s-1},\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,n+1}$), $\tilde{\tilde P}_{s,i} = \tilde{\tilde P}_{s,i}(\tilde{\tilde\phi}_s,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\tilde H}_{s,i} = \tilde{\tilde H}_{s,i}(\tilde{\tilde\phi}_s,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\tilde q}_{s,i} = \tilde{\tilde q}_{s,i}(\tilde{\tilde\phi}_s,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\tilde h}_{s,i} = \tilde{\tilde h}_{s,i}(\tilde{\tilde\phi}_s,\psi,\eta,t)$ ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару в околах $\varphi=\varphi^*_{*s}$ ($s=\overline{0,p}$) (поправки на вході, виході і в околі меж шарів фільтру), $\hat P_{s,i} = \hat P_{s,i}(\varphi,\tilde\psi,\eta,t)$, $\hat H_{s,i} = \hat H_{s,i}(\varphi,\tilde\psi,\eta,t)$, $\hat q_{s,i} = \hat q_{s,i}(\varphi,\tilde\psi,\eta,t)$, $\hat h_{s,i} = \hat h_{s,i}(\varphi,\tilde\psi,\eta,t)$, $\hat{\tilde P}_{s,i} = \hat{\tilde P}_{s,i}(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\eta,t)$, $\hat{\tilde H}_{s,i} = \hat{\tilde H}_{s,i}(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\eta,t)$, $\hat{\tilde q}_{s,i} = \hat{\tilde q}_{s,i}(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\eta,t)$, $\hat{\tilde h}_{s,i} = \hat{\tilde h}_{s,i}(\varphi,\tilde{\tilde\psi},\eta,t)$, $\breve P_{s,i} = \breve P_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde\eta,t)$, $\breve H_{s,i} = \breve H_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde\eta,t)$, $\breve q_{s,i} = \breve q_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde\eta,t)$, $\breve h_{s,i} = \breve h_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde\eta,t)$, $\breve{\tilde P}_{s,i} = \breve{\tilde P}_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde\eta},t)$, $\breve{\tilde H}_{s,i} = \breve{\tilde H}_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde\eta},t)$, $\breve{\tilde q}_{s,i} = \breve{\tilde q}_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde\eta},t)$ $\breve{\tilde h}_{s,i} = \breve{\tilde h}_{s,i}(\varphi,\psi,\tilde{\tilde\eta},t)$, ($s=\overline{1,p}$, $i=\overline{0,2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\eta=0$, $\eta=Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтру), $\tilde\phi_s = \dfrac{\varphi-\varphi^*_{*s}}{\varepsilon}$ ($s=\overline{0,p-1}$), $\tilde{\tilde\phi}_s = \dfrac{\varphi^*_{*s}-\varphi}{\varepsilon}$ ($s=\overline{1,p}$), $\tilde\psi = \dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde\psi} = \dfrac{Q_*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde\eta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde\eta} = \dfrac{Q^*-\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі

перетворення (розтяги), $R_{s,n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $\breve{R}_{s,n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $\hat{R}_{s,n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $\tilde{R}_{s,n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ ($s=\overline{1,p}$) – залишкові члени. Зокрема, для знаходження $c_{s,i}$, $u_{s,i}$, $\tilde{\kappa}_{s,i}$, $\tilde{\sigma}_{s,i}$ ($s=\overline{1,p}$, $i=0,n$) одержано формули:

$$c_{s,0}=\begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\tilde{c}_*(\psi,\eta,t-\tilde{f}_1(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge\tilde{f}_1;\\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot c_{s-1,0}(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta,t-\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)), & t\ge\tilde{f}_s;\\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\tilde{c}^0_s(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t<\tilde{f}_s,\end{cases}$$

$$u_{s,0}=\frac{1}{\tilde{\sigma}^0_s}\cdot\int_0^t\tilde{\alpha}_s(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})\cdot c_{s,0}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})d\hat{t}+\tilde{u}^0_s;\quad \tilde{\kappa}_{s,0}=\kappa^0_s,\ \tilde{\sigma}_{s,0}=\tilde{\sigma}^0_s\ (s=\overline{1,p});$$

$$c_{s,i}=\begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\breve{g}_{1,i}(\bar{\varphi},\psi,\eta,t)\cdot e^{\tilde{\lambda}_{1,1}(\bar{\varphi},\psi,\eta,t)}d\bar{\varphi}, & t\ge\tilde{f}_1;\\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_{\varphi^*_{*(s-1)}}^{\varphi}\breve{g}_{s,i}(\bar{\varphi},\psi,\eta,t)\cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\bar{\varphi},\psi,\eta,t)}d\bar{\varphi}+\breve{\tilde{g}}_{s,i}, & t\ge\tilde{f}_s;\\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\int\limits_0^t\breve{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})\cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})}d\hat{t}, & t<\tilde{f}_s;\end{cases}$$

$$u_{s,i}=\frac{1}{\tilde{\sigma}^0_s}\cdot\int_0^t\tilde{g}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})d\hat{t}\ ,\quad \tilde{\kappa}_{s,i}=\int_0^t\tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})d\hat{t}\ ,\quad \tilde{\sigma}_{s,i}=\int_0^t\tilde{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})d\hat{t}\ \ (s=\overline{1,p},\ i=\overline{1,n}),$$

де

$$\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)=\kappa^0_s\cdot\int\limits_{\varphi^*_{*(s-1)}}^{\varphi}\frac{\tilde{\alpha}_s(\bar{\varphi},\psi,\eta,\ \tilde{f}_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)+t-\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}^2_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)}d\bar{\varphi};$$

$$\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi,\psi,\eta,t)=\int_0^t\frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t}+\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,\hat{t})}{\tilde{\sigma}^0_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t}+\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta)}d\hat{t}\ ;$$

$$\breve{g}_{s,i}(\bar{\varphi},\psi,\eta,t)=\kappa^0_s\cdot\frac{g_{s,i}(\bar{\varphi},\psi,\eta,\ \tilde{f}_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)-\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)+t)}{\tilde{v}^2_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)};\ \breve{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,\hat{t})=\frac{g_{s,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t}+\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,\hat{t})}{\tilde{\sigma}^0_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t}+\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta)};$$

$$\breve{\tilde{g}}_{s,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot c_{s-1,i}(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta,t-\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta));\ g_{s,i}=I(i,1)\cdot\Big(d_s\cdot\Big(b_{1,s}\cdot c''_{(s,i-1)\varphi\varphi}+b_{2,s}\cdot c''_{(s,i-1)\psi\psi}+$$

$$+b_{3,s}\cdot c''_{(s,i-1)\eta\eta}+b_{4,s}\cdot c'_{(s,i-1)\psi}+b_{5,s}\cdot c'_{(s,i-1)\eta}\Big)+\tilde{\tilde{\beta}}_s\cdot u_{s,i-1}-\sum_{l=1}^{i}\Big(\tilde{\sigma}_{s,l}\cdot c'_{(s,i-l)t}+\tilde{\sigma}'_{(s,l)t}\cdot c_{s,i-l}\Big)\Big);$$

$$\tilde{g}_{s,i}=\tilde{\alpha}_s\cdot c_{s,i}-I(i,1)\cdot\Big(d_s\cdot\Big(b_{1,s}\cdot u''_{(s,i-1)\varphi\varphi}+b_{2,s}\cdot u''_{(s,i-1)\psi\psi}+b_{3,s}\cdot u''_{(s,i-1)\eta\eta}+b_{4,s}\cdot u'_{(s,i-1)\psi}+b_{5,s}\cdot u'_{(s,i-1)\eta}\Big)+$$

$$+\tilde{\tilde{\beta}}_s\cdot u_{s,i-1}+\sum_{l=1}^{i}\Big(\tilde{\sigma}_{s,l}\cdot u'_{(s,i-l)t}+\tilde{\sigma}'_{(s,l)t}\cdot u_{s,i-l}\Big)\Big);\ \hat{\tilde{g}}_{s,i}=-I(i,1)\cdot\tilde{\tilde{\mu}}_s\cdot u_{s,i-1},\ \tilde{\tilde{g}}_{s,i}=-I(i,1)\cdot\tilde{\tilde{\gamma}}_s\cdot u_{s,i-1};$$

$\tilde{f}_s=\tilde{f}_s(\varphi,\psi,\eta)=\kappa^0_s\cdot\int\limits_{\varphi^*_{*(s-1)}}^{\varphi}\frac{\tilde{\sigma}^0_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)}{\tilde{v}^2_s(\bar{\varphi},\psi,\eta)}d\bar{\varphi}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки $\Big(x(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta),\ y(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta),\ z(\varphi^*_{*(s-1)},\psi,\eta)\Big)\in G_z^{s-1}$ до точки $\big(x(\varphi,\psi,\eta),\ y(\varphi,\psi,\eta),\ z(\varphi,\psi,\eta)\big)\in G_z^s$ вздовж відповідної лінії течії; $\tilde{f}_s^{-1}$ – функція, обернена відповідно до $\tilde{f}_s$ відносно змінної φ, $I(a,b)=\begin{cases}1, & a\ge b;\\ 0, & a<b.\end{cases}$

Результати чисельних розрахунків. У ході комп'ютерного експерименту під час моделювання процесу доочистики води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі довжиною 1,5 м проведено дослідження зміни середніх величин коефіцієнта фільтрації і активної пористості кусково-однорідного пористого завантаження фільтру. Форму модельного фільтру описано поверхнями:

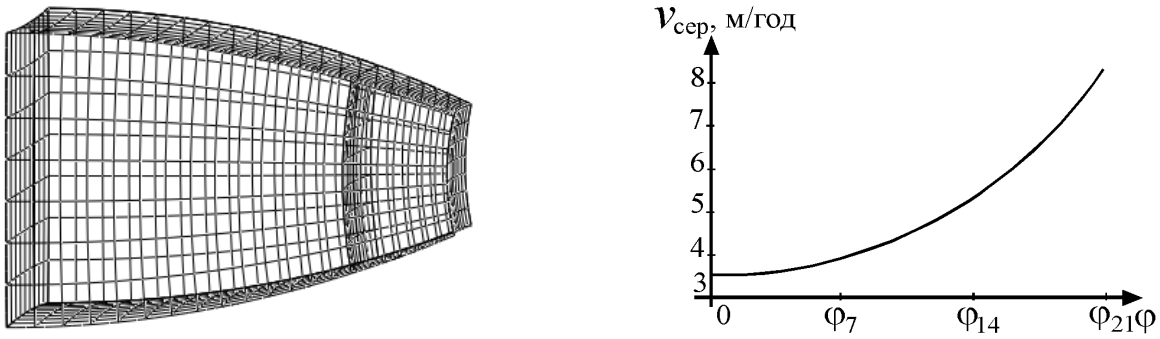
$$f_1(x,y,z)=x-2;\quad f_2(x,y,z)=(x-4,0777343)^2+y^2+z^2-0,3169799,$$

$$f_3(x,y,z)=(x-2)^2+(y-6,1553671)^2+z^2-41,8885438;\quad f_4(x,y,z)=(x-2)^2+(y+6,1553671)^2+$$

$+z^2-41,8885438$; $f_5(x,y,z)=f_6(x,y,z)=(x^2-4x+y^2+z^2)^2+16y^2-93,2548340z^2$

і вибрано положення поверхні розділу EFF_*E_*: $f_*^*(x,y,z)=(x-4,3073801)^2+y^2+z^2-1,3240030$. Функції $f_i(x,y,z)$ ($i=\overline{1,6}$) підібрані так, щоб забезпечити «монотонне звуження» в напрямку від його входу до виходу та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках. При цьому кожен шар фільтру характеризується різними початковими значеннями коефіцієнтів фільтрації $\kappa_1^0=8,5$ м/добу, $\kappa_2^0=5,6$ м/добу, активної пористості $\tilde{\sigma}_1^0=0,41$, $\tilde{\sigma}_2^0=0,38$ і дифузії домішок у фільтраційній течії і осаді $D_1=0,0003$ м^2/добу, $D_2=0,0002$ м^2/добу, $D_1^*=0,000005$ м^2/добу, $D_2^*=0,000002$ м^2/добу.

У результаті побудовано розрахункову сіткову область G_z (рис. 2, *а*) при $n=n_1+n_2=21$, $n_1=14$, $n_2=7$, $m=9$, $l=7$, $\varphi_*=\varphi_0=0$, $\varphi^*=\varphi_{21}=24,23$. Значення φ^* вибиралося так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища $v_{\text{сер}}$ становила 5 м/год. Для області G_z знайдено фільтраційну витрату $Q=1,78$ м^3/год і значення потенціалу на поверхні розділу $\varphi_*^*=\varphi_{14}=13,67$ та обчислено величини швидкостей фільтрації (рис. 2, *б*) і функції $b_i(\varphi,\psi,\eta)$ ($i=\overline{1,5}$).



а *б*

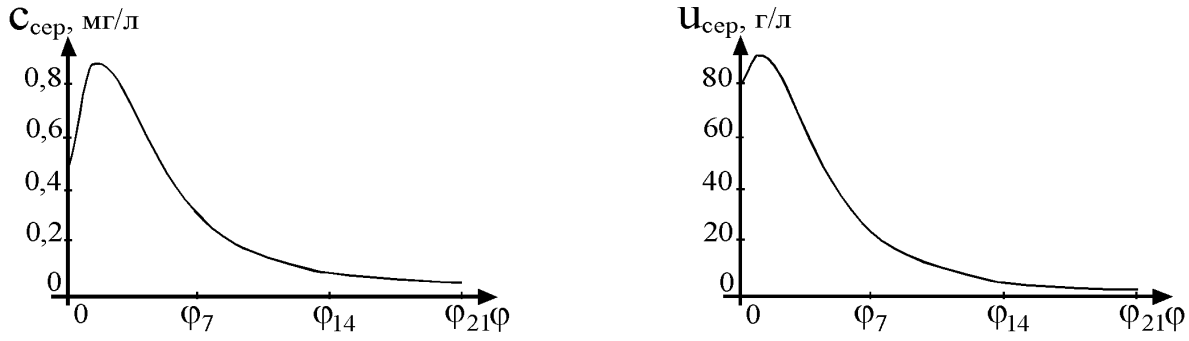
Рис. 2 – Результати побудови фільтраційного поля для криволінійного фільтра: *а* – розрахована сіткова область G_z; *б* – розподіл $v_{\text{сер}}(\varphi)$ вздовж області G_z.

На рис. 3 представлено розподіли середніх величин концентрацій домішок $c_{\text{сер}}(\varphi,t)$ і $u_{\text{сер}}(\varphi,t)$ відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, а на рис. 4 – середніх величин коефіцієнта фільтрації $\tilde{\kappa}_{\text{сер}}(\varphi,t)$ і активної пористості $\tilde{\sigma}_{\text{сер}}(\varphi,t)$ завантаження фільтру у момент часу t_3 при

$c_{\text{кр}}=0,00005$ г/л, $c_*=0,0005$ г/л, $c_0^0=0$, $u_0^0=0$, $\tilde{\alpha}_1=0,43-0,05\cdot\tilde{v}$ с$^{-1}$, $\tilde{\alpha}_2=0,28-0,023\cdot\tilde{v}$ с$^{-1}$,

$\tilde{\beta}_s=0,00001\cdot\tilde{\alpha}_s$ с$^{-1}$ ($s=1,2$), $\tilde{\gamma}_1=0,000043$ л/(г$\cdot$с$^{-1}$), $\tilde{\gamma}_2=0,000036$ л/(г$\cdot$с$^{-1}$), $\tilde{\mu}_1=0,000025$ л/(г$\cdot$с$^{-1}$),

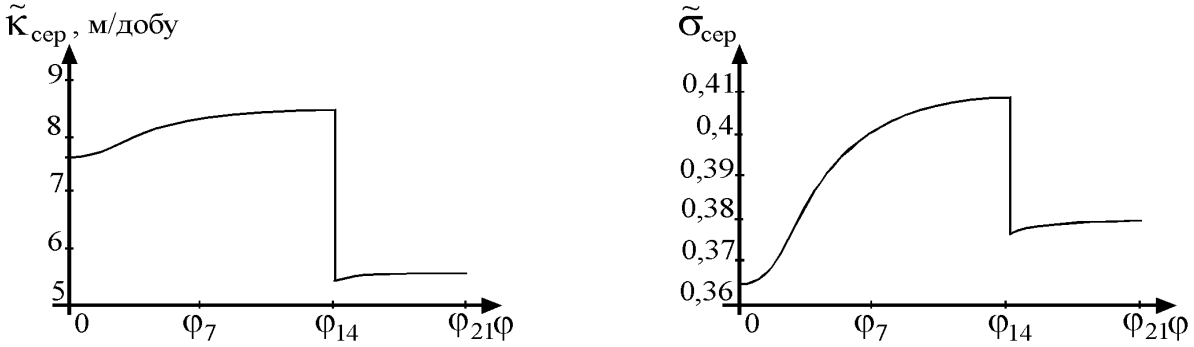
$\tilde{\mu}_2=0,000023$ л/(г$\cdot$с$^{-1}$).



а *б*

Рис. 3 – Розподіл забруднення вздовж висоти фільтру у момент часу t_3:
а – середніх величин концентрацій домішок $c_{\text{сер}}(\varphi,t)$ у фільтраційній течії;
б – середніх величин концентрацій домішок $u_{\text{сер}}(\varphi,t)$ у осаді, адсорбованому на зернах завантаження.

Згідно результатів експерименту [12] такий вибір поверхні розділу забезпечує найкращий час захисної дії фільтру t_3, який становить 36 год.



а *б*

Рис. 4 – Розподіл характеристик пористого завантаження вздовж висоти фільтру у момент часу t_3:
а – середніх величин коефіцієнта фільтрації $\tilde{\kappa}_{сер}(\varphi, t)$; б – середніх величин коефіцієнта активної пористості $\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi, t)$.

Таблиця 1 – Розподіл середніх величин коефіцієнта фільтрації $\tilde{\kappa}_{сер}(\varphi, t)$ і активної пористості $\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi, t)$ та їх відносних відхилень від початкових значень вздовж висоти фільтру у момент часу t_3

i	$\tilde{\kappa}_{сер}(\varphi_i, t_3)$, м/добу	$\Delta\tilde{\kappa}_{сер}(\varphi_i, t_3)$, %	$\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi_i, t_3)$	$\Delta\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi_i, t_3)$, %
0	7,6384	10,14	0,3655	10,86
1	7,6407	10,11	0,3656	10,83
2	7,7700	8,59	0,3723	9,20
3	7,9247	6,77	0,3803	7,25
4	8,0635	5,14	0,3875	5,50
5	8,1744	3,83	0,3932	4,10
6	8,2582	2,85	0,3975	3,05
7	8,3196	2,12	0,4007	2,27
8	8,3640	1,60	0,4030	1,71
9	8,3961	1,22	0,4046	1,31
10	8,4193	0,95	0,4058	1,02
11	8,4364	0,75	0,4067	0,80
12	8,4491	0,60	0,4074	0,64
13	8,4588	0,48	0,4079	0,52
14	8,4663	0,40	0,4083	0,42
15	5,5694	0,55	0,3785	0,41
16	5,5734	0,48	0,3787	0,36
17	5,5767	0,42	0,3788	0,31
18	5,5795	0,37	0,3790	0,27
19	5,5819	0,32	0,3791	0,24
20	5,5842	0,28	0,3792	0,21
21	5,5863	0,24	0,3793	0,18

Як показують результати проведеного чисельного експерименту (табл. 1), максимальні відносні відхилення середніх величин коефіцієнта фільтрації $\tilde{\kappa}_{сер}(\varphi, t)$ і активної пористості $\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi, t)$ завантаження фільтру від початкових у момент часу t_3 в першому шарі у процентному відношенні не перевищують відповідно 10,14 % і 10,86 %, а в другому – відповідно 0,55 % і 0,41 %, що підтверджує необхідність врахування у моделях зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень багатошарових фільтрів.

Висновки. Сформовано просторову математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрації, що враховує зворотний вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на характеристики середовища, зокрема, дозволяє проводити дослідження зміни коефіцієнтів фільтрації та активної пористості кусково-однорідних пористих завантажень вздовж висоти фільтру. Отримано алгоритм чисельно-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель аналогічно [12] для заданої сталої швидко-

сті фільтрації дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати зміну характеристик фільтруючих матеріалів, визначити оптимальні варіанти їх використання і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів.

Список літератури

1. *Орлов В. О.* Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163 с.
2. *Cheremisinoff N. P.* Handbook of water and wastewater treatment technologies. – Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. – 645 p.
3. *Hendricks D. W.* Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological. – Boca Raton : CRC Press, 2011. – 883 p.
4. *Quevauviller Ph., Thompson K. C.* Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 188 p.
5. *Бомба А. Я., Сафоник А. П.* Моделювання нелінійно-збурених процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень : монографія. – Рівне : НУВГП, 2017. – 296 с.
6. *Safonyk A. P.* Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2015. – vol. 9. – P. 189 – 192.
7. *Ives K. J.* Deep-bed water filters // New developments. Filtr. And Separ. – 1969. – vol. 6. – № 1. – P. 42 – 48.
8. *Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R.* Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application // Environmental Modelling and Software. – 2008. – vol. 23. – № 7. – P. 835 – 845.
9. *Maier H. R., Dandy G. C.* Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications // Environmental Modelling and Software. – 2000. – vol. 15. – № 1. – P. 101 – 124.
10. *Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T., Hiltunen Y.* Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process // Mathematics and Computers in Simulation. – 2011. – vol. 82. – № 3. – P. 450 – 459.
11. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
12. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Прогнозування оптимального використання фільтруючих матеріалів у швидких багатошарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями // Журнал обчислювальної та прикладної математики : наук. журн. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : ТВіМС, 2017. – Вип. 1 (124). – С. 3 – 14.
13. *Бомба А. Я., Климюк Ю. Є.* Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія. – Рівне : ТзОВ фірма "Ассоль", 2014. – 273 с.
14. *Рауз Х.* Механика жидкости. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

References (transliterated)

1. Orlov V. O. *Vodoochysni fil'try iz zernystoyu zasypkoyu* [Water-purifying filters with granular filler]. Rivne, NUVHP Publ., 2005. 163 p.
2. Cheremisinoff N. P. *Handbook of water and wastewater treatment technologies*. Boston, Butterworth-Heinemann Publ., 2002. 645 p.
3. Hendricks D. W. *Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological*. Boca Raton, CRC Press Publ., 2011. 883 p.
4. Quevauviller Ph., Thompson K. C. *Analytical methods for drinking water : advances in sampling and analysis*. John Wiley & Sons Ltd Publ., 2006. 188 p.
5. Bomba A. Ya., Safonyk A. P. *Modelyuvannya neliniyno-zburenykh protsesiv ochyshchennya ridyn vid bagatokomponentnykh zabrudnen' : monografiya* [Modeling of nonlinearly perturbed processes of cleaning liquids from multicomponent contaminants : monograph]. Rivne, NUVHP Publ., 2017. 296 p.
6. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.
7. Ives K. J. Deep-bed water filters. *New developments. Filtr. And Separ*. 1969, vol. 6, no. 1, pp. 42–48.
8. Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application. *Environmental Modelling and Software*. 2008, vol. 23, no. 7, pp. 835–845.
9. Maier H. R., Dandy G. C. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications. *Environmental Modelling and Software*. 2000, vol. 15, no. 1, pp. 101–124.
10. Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T. and Hiltunen Y. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2011, vol. 82, no. 3, pp. 450–459.
11. Mints D. M. *Teoreticheskie osnovy tekhnologii ochistki vody* [Theoretical basis of water purification technology]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964. 156 p.
12. Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye. Prognozuvannya optymal'nogo vykorystannya fil'truyuchykh materialiv u shvydkykh bagatosharovykh fil'trakh iz kuskovo-odnoridnymy porystymy zavantazhennyamy [Predicting filter materials optimal use in rapid multilayer filters with piecewise homogeneous porous loads]. *Zhurnal obchyslyuval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational & Applied Mathematics], Kyiv, TViMS Publ., 2017, no. 1 (124), pp. 3–14.
13. Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye. *Matematychne modelyuvannya prostorovykh syngulyarno-zburenykh protsesiv typu fil'tratsiya-konvektsiya-dyfuziya : monografiya* [Mathematical modeling of spatial singularly perturbed processes of filtration-convection-diffusion type : monograph]. – Rivne, TzOV firma "Assol'" Publ., 2014. 273 p.
14. Rauz Kh. *Mekhanika zhidkosti* [Fluid mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1967. 390 p.

Надійшла (received) 27.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych) – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Климюк Юрій Євгенійович (Климюк Юрий Евгениевич, Klymyuk Yuriy Yevheniyovych) – кандидат технічних наук, доцент, Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне; тел.: (095) 540-95-40, (067) 279-17-41; e-mail: klimyuk@ukr.net.

UDC 519.6

N. P.GIRYA, S. V. DUKHOPELNYKOV

MATHEMATICAL MODEL OF H-POLARIZED WAVE RADIATION FROM LONGITUDINAL SLOTS OF A CYLINDRICAL ANTENNA

In the paper mathematical model is developed for straight perfectly conducting circular cylindrical antennas with the finite number of longitudinal slots, in the case of H – polarized wave. Boundary hyper-singular integral equations of boundary value problem for the Helmholtz equations are introduced in the case the boundary is the cylindrical surface with longitudinal slots. Using the boundary integral equation we construct the discrete mathematical model of the problem of electromagnetic waves radiation from the structure slots, also the numerical experiment is conducted. The near and far fields are plotted for different parameters of the structure.

Key words: circular cylindrical antenna, discrete mathematical model, hypersingular integral equation, diffraction problems, method of discrete singularity, electromagnetic waves.

Н. П. ГИРЯ, С. В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИПРОМІНЕННЯ Н-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ З ПОЗДОВЖНІХ ЩІЛИН ЦИЛІНДРИЧНОЇ АНТЕНИ

Розглянуто циліндричну антенну структуру, яка має скінченну кількість подовжніх щілин. Розглянуто випадок випромінювання H – поляризованої хвилі. Отримано граничні гіперсингулярні та сингулярні інтегральні рівняння крайової задачі для рівняння Гельмгольця у випадку, коли границя – це циліндрична поверхня з поздовжніми щілинами. На основі граничного інтегрального рівняння побудовано дискретну математичну модель задачі випромінювання електромагнітних хвиль із щілин структури та проведено чисельний експеримент. Побудовані поля у ближній зоні та діаграми розсіяння для різних параметрів структури.

Ключові слова: кругова циліндрична антена, дискретна математична модель, гіперсингулярне інтегральне рівняння, щілинна циліндрична антена, метод дискретних особливостей, електромагнітні хвилі.

Н. П. ГИРЯ, С. В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ

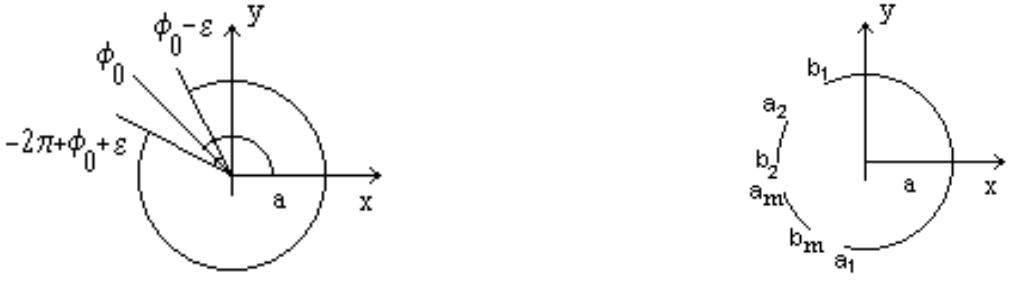
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗЛУЧЕНИЯ Н-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ИЗ ПРОДОЛЬНЫХ ЩЕЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Рассмотрена цилиндрическая антенная структура кругового сечения, имеющая конечное число продольных щелей. Рассмотрен случай излучения H – поляризованной волны. Выведены граничные гиперсингулярные и сингулярные интегральные уравнения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в случае, когда граница – цилиндрическая поверхность с продольными щелями. На базе граничного интегрального уравнения построена дискретная математическая модель задачи излучения электромагнитных волн из щелей структуры и проведен численный эксперимент. Построены поля в ближней зоне и диаграммы рассеяния для различных параметров электродинамической структуры.

Ключевые слова: дискретная математическая модель, круговая цилиндрическая антенна, гиперсингулярное интегральные уравнения, щелевая цилиндрическая антенна, метод дискретных особенностей, электромагнитные волны.

Introduction. Consider the boundary value problems for *the Helmholtz equations* and for *the Maxwell equations* in the case the border is a cylindrical surface with longitudinal slots. We reduced these problems to *the hyper-singular integral equation*. For an approximate (with controlled accuracy) solutions of such *boundary value problems* we constructed *the discrete mathematical models* by the boundary integral equation. These problems for the Helmholtz and Maxwell equations serve as mathematical models of cylindrical electrodynamic structures and have found wide application in designing and creating aperture and surface antennas, open resonators, slotted waveguides, and filters based on them. There are narrow-band filters, light detectors, and phase-sensitive elements in the light range. Based on the constructed discrete mathematical models, a numerical experiment was performed for these applied problems.

The geometry of a border. In the problems above the border is a surface of a circular cylinder with one or more longitudinal slots. We choose *a Cartesian coordinate system* such that the axis of the cylinder coincides with the z axis. In the section by the plane xOy we introduce the polar coordinates r and ϕ. The figures show the cross sections of the cylindrical surface with several slots by the plane perpendicular to the cylinder axis (fig. 1).



a *b*

Fig. 1 – The section of a cylindrical surface: *a* – with one slot of angular size 2ε ; *b* – with m slots.

© N. P. Girya, S. V. Dukhopelnykov, 2018

We introduce the notation $L=\bigcup_{i=1}^{p}(\alpha_i,\beta_i)$ and $CL=[-\pi,\pi]\setminus L$. Let S_a be a circle with the radius a and center at the origin. The arcs remaining after removing the slots are denoted by (a_i,b_i), here $a_i=a\alpha_i$, $b_i=a\beta_i$ (fig. 1, *b*).

Neumann boundary value problem for the Helmholtz equation. The radiation problem of an $H-$polarized wave in the $2-D$ case reduces to the second boundary value problem for the Helmholtz equation (see, for example, [1]).

– Formulation of the problem.

In this problem we consider the dependence on time $e^{-i\omega t}$. The unknown function is represented in the form

$$u(r,\phi)=\begin{cases}u^I(r,\phi)+u_0(r,\phi), & r<a;\\ u^{II}(r,\phi), & r>a,\end{cases}$$

where $u^{I,II}(r,\phi)$ stands for the function inside (I) and outside (II) the structure respectively, the source of a cylindrical wave is a thread $u_0(r,\phi)=H_0^{(1)}(k^I r)$. The functions satisfy the following conditions.

– The Helmholtz equation:

$$\Delta u^{I,II}(r,\phi)+(k^{I,II})^2u^{I,II}(r,\phi)=0, \tag{1}$$

in the region $R^2\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{m}[a_i,b_i]\right)$ which is the exterior of the closed arcs of the circle S_a, here $k^{I,II}$ is the wave number and $(k^{I,II})^2=\varepsilon^{I,II}\mu\omega^2$.

– The boundary condition:

$$\left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\right|_{r=a}=0,\qquad \phi\in L. \tag{2}$$

– The Sommerfeld radiation condition:

$$\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}-ik^{II}u(r,\phi)=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\ r\to\infty. \tag{3}$$

– The boundedness condition in each arbitrarily small region $\Omega\subset R^2$:

$$\int_{\Omega}\left[(k^{I,II})^2|u|^2+|\nabla u|^2\right]ds<\infty. \tag{4}$$

– «*Conjugate condition*»:

$$u^I(r,\phi)\big|_{r=a}=u^{II}(r,\phi)\big|_{r=a},\ \ \phi\in C\overline{L}, \tag{5}$$

and

$$\left.\frac{1}{\varepsilon^I}\frac{\partial u^I(r,\phi)}{\partial r}\right|_{r=a}=\left.\frac{1}{\varepsilon^{II}}\frac{\partial u^{II}(r,\phi)}{\partial r}\right|_{r=a},\ \ \phi\in C\overline{L}. \tag{6}$$

The derivation of the paired equation. The Fourier representations for functions satisfying the Helmholtz equation are obtained in the form of series (we mean convergence in the sense of distributions)

$$u^I(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^I J_n\left(k^I r\right)e^{in\phi},\ r<a;\ \ u^{II}(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^{II}H_n^{(1)}\left(k^{II}r\right)e^{in\phi},\ r>a,$$

where $J_n(\zeta)$ is *the Bessel function* of order n, $H_n^{(1)}(\zeta)$ is *the Hankel function* of the first kind of order $|n|$.

With such choice of representation for the function, this function also satisfies radiation condition (3).

From conjugate condition (5 – 6) we get:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n^I J_n\left(k^I a\right)e^{in\phi}+H_0^{(1)}\left(k^I a\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n^{II}H_n^{(1)}\left(k^{II}a\right)e^{in\phi}, & \phi\in C\overline{L};\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k^I}{\varepsilon^I}C_n^I J_n'\left(k^I a\right)e^{in\phi}+\frac{k^I}{\varepsilon^I}H_0^{(1)\prime}\left(k^I a\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k^{II}}{\varepsilon^{II}}C_n^{II}H_n^{(1)\prime}\left(k^{II}a\right)e^{in\phi}, & \phi\in C\overline{L}.\end{cases} \tag{7}$$

From the second conjugate condition (6) and the boundary condition (2) it follows that:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k^I}{\varepsilon^I}C_n^I J_n'\left(k^I a\right)e^{in\phi}+\frac{k^I}{\varepsilon^I}H_0^{(1)\prime}\left(k^I a\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k^{II}}{\varepsilon^{II}}C_n^{II}H_n^{(1)\prime}\left(k^{II}a\right)e^{in\phi},$$

we get

$$\frac{k^I}{\varepsilon^I}C_0^I J_0'\left(k^I a\right)+\frac{k^I}{\varepsilon^I}H_0^{(1)\prime}\left(k^I a\right)=\frac{k^{II}}{\varepsilon^{II}}C_0^{II}H_0^{(1)\prime}\left(k^{II}a\right)\equiv C_0;$$

$$\frac{k^I}{\varepsilon^I} C_n^I J_n'\left(k^I a\right) = \frac{k^{II}}{\varepsilon^{II}} C_n^{II} H_n^{(1)'}\left(k^{II} a\right) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}. \tag{8}$$

Acting in the same way as in [2], using the first relation of system (7) and boundary condition (2), we get the paired adder equation:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in L; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[\dfrac{\varepsilon^I J_n\left(k^I a\right)}{k^I J_n'\left(k^I a\right)} - \dfrac{\varepsilon^{II} H_n^{(1)}\left(k^{II} a\right)}{k^{II} H_n^{(1)'}\left(k^{II} a\right)} \right] e^{in\phi} = \dfrac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0'\left(k^I a\right)} H_0^{(1)'}\left(k^I a\right) - H_0^{(1)}\left(k^I a\right), \quad \phi \in CL. \end{cases} \tag{9}$$

Let

$$A_0 = C_0 \left[\frac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0'\left(k^I a\right)} - \frac{\varepsilon^{II} H_0^{(1)}\left(k^{II} a\right)}{k^{II} H_0^{(1)'}\left(k^{II} a\right)} \right] - \frac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0'\left(k^I a\right)} H_0^{(1)'}\left(k^I a\right) + H_0^{(1)}\left(k^I a\right);$$

$$A_n = C_n \left[\frac{J_n\left(k^I a\right)}{k^I J_n'\left(k^I a\right)} - \frac{H_n^{(1)}\left(k^{II} a\right)}{k^{II} H_n^{(1)'}\left(k^{II} a\right)} \right], \; n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\},$$

then get definitively:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma_m e^{in\phi} = \left(\dfrac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0'\left(k^I a\right)} H_0^{(1)'}\left(k^I a\right) - H_0^{(1)}\left(k^I a\right) \right) \Gamma_0, \quad \phi \in L; \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL. \end{cases} \tag{10}$$

Introduce the notation: $\Gamma_n = \left[\dfrac{\varepsilon^I J_n\left(k^I a\right)}{k^I J_n'\left(k^I a\right)} - \dfrac{\varepsilon^{II} H_n^{(1)}\left(k^{II} a\right)}{k^{II} H_n^{(1)'}\left(k^{II} a\right)} \right]^{-1} \equiv B_1 |n| + B_2 \dfrac{1}{|n|} + K_n$, where $B_1 = 1/(a\varepsilon^I + a\varepsilon^{II})$, and $B_2 = \dfrac{-a}{\varepsilon^I + \varepsilon^{II}} \left(\dfrac{\left(k^I\right)^2 + \left(k^{II}\right)^2}{2} - \dfrac{\varepsilon^I \left(k^{II}\right)^2 + \varepsilon^{II} \left(k^{II}\right)^2}{2\left(\varepsilon^I + \varepsilon^{II}\right)} \right)$, $K_n = \Gamma_n - B_1 |n| - B_2 \dfrac{1}{|n|}$, and from the asymptotic expansion for Γ_n [4] for large n it follows that $K_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Derivation of the hypersingular integral equation of the Neumann problem. Using the representation for Γ_n rewrite the first equation in system (10):

$$A_0 \Gamma_0 + B_1 {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' A_n |n| e^{in\phi} + B_2 {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' A_n \frac{1}{|n|} e^{in\phi} + {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}' K_n A_n e^{in\phi} = \left(\frac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0'\left(k^I a\right)} H_0^{(1)'}\left(k^I a\right) - H_0^{(1)}\left(k^I a\right) \right) \Gamma_0, \; \phi \in L. \tag{11}$$

The prime over the summation sign means that $n \neq 0$.

Continuing as in [2], we introduce a new unknown function

$$v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\phi}; \tag{12}$$

$$v(\phi) = 0, \quad \phi \in CL,$$

with the unknown coefficients A_n given by the formula:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_L v(\phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

Using parametric representations for a hypersingular integral operator and an integral with a logarithmic kernel [3] and substituting representation (12) for $v(\phi)$ in equation (11), we obtain the hypersingular integral equation:

$$-\frac{B_1}{2\pi} \left(h.f.p. \int_L \frac{v(\theta)}{2\sin^2 \dfrac{\theta - \phi}{2}} d\theta \right) - \frac{B_2}{\pi} \int_L v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta - \phi}{2} \right| d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L v(\theta) d\theta -$$

$$-\frac{2B_2\ln 2}{2\pi}\int_L v(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_L K(\theta,\phi)v(\theta)\,d\theta=f\,, \tag{14}$$

where $K(\theta,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Gamma_n-B_1|n|-B_2\frac{1}{|n|}\right]\cos(n(\phi-\theta))$, $f=\left(\frac{\varepsilon^I J_0\left(k^I a\right)}{k^I J_0{}'\left(k^I a\right)}H_0^{(1)\prime}\left(k^I a\right)-H_0^{(1)}\left(k^I a\right)\right)\Gamma_0$, here the first integral is understood in the sense of *Hadamard finite* part ($h.f.p.$).

We write equation (14) in the form:

$$-\frac{B_1}{\pi}*h.f.p.\int_L\frac{v(\theta)}{(\theta-\phi)^2}d\theta-\frac{B_2}{\pi}\int_L v(\theta)\ln|\theta-\phi|\,d\theta+$$

$$+\left[-\frac{B_1}{2\pi}\int_L v(\theta)\left\{\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}}-\frac{2}{(\theta-\phi)^2}\right\}d\theta-\frac{B_2}{\pi}\int_L v(\theta)\ln\left|\frac{\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{\frac{\theta-\phi}{2}}\right|d\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma_0}{2\pi}\int_L v(\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_L K(\theta,\phi)v(\theta)\,d\theta\right]=f\,. \tag{15}$$

From (15) note that the integrals in square brackets, have smooth kernels.

The Meixner edge condition will be satisfied if the restriction of the function $v(\theta)$ to the interval (α_q,β_q) is represented in the form: $v(\theta)\big|_{(\alpha_q,\beta_q)}=w_q(\theta)\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}$, $\alpha_q<\theta<\beta_q$.

Hence we obtain the sum of integrals over each interval (α_q,β_q)

$$-\frac{B_1}{\pi}\sum_{q=1}^{m}h.f.p.\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\frac{w_q(\theta)}{(\theta-\phi)^2}\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta-\frac{B_2}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}w_q(\theta)\ln|\theta-\phi|\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta+$$

$$+\left[-\frac{B_1}{2\pi}\sum_{q=1}^{m}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}w_q(\theta)\left\{\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}}-\frac{2}{(\theta-\phi)^2}\right\}\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta-\right.$$

$$-\frac{B_2}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}w_q(\theta)\ln\left|\frac{\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{\frac{\theta-\phi}{2}}\right|\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta+\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_{q=1}^{m}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}w_q(\theta)\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta+$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\int_{\alpha_q}^{\beta_q}w_q(\theta)K(\theta,\phi)\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}d\theta\right]=f\,,\quad \phi\in L\,. \tag{16}$$

Acting in the same way as in [5], we introduce the mappings:

$$g_q:\ (-1,1)\to(\alpha_q,\beta_q):t\mapsto\theta=\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}t+\frac{\beta_q+\alpha_q}{2}\,, \tag{17}$$

$$w_q(\theta)\sqrt{(\beta_q-\theta)(\theta-\alpha_q)}=\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\gamma_q(t)\sqrt{1-t^2}\,, \tag{18}$$

$$d\theta=\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}dt\,.$$

As a result we get:

$$-\frac{B_1}{\pi}\left(h.f.p.\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_p(t)}{(t-t_0)^2}\sqrt{1-t^2}dt\right)-\frac{B_2}{\pi}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\gamma_p(t)\ln|t-t_0|\sqrt{1-t^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\tilde{K}_{pq}(t_0,t)\gamma_q(t)\sqrt{1-t^2}dt=f\,, \tag{19}$$

where

$$\tilde{K}_{pq}(t_0,t)=\begin{cases}K^1\left(g_p(t_0),g_p(t)\right)-B_2\ln\dfrac{\beta_p-\alpha_p}{2}, & p=q;\\ K^1\left(g_p(t_0),g_q(t)\right)-\dfrac{B_1}{\left(g_p(t_0)-g_q(t)\right)^2}-B_2\ln\left|g_p(t_0)-g_q(t)\right|, & p\neq q,\end{cases}$$

and

$$K^1\left(g_p(t_0),g_q(t)\right)=K\left(g_p(t_0),g_q(t)\right)-\frac{B_1}{2}\left\{\frac{1}{2\sin^2\dfrac{g_p(t_0)-g_q(t)}{2}}-\frac{2}{\left(g_p(t_0)-g_q(t)\right)^2}\right\}-$$
$$-B_2\ln\left|\frac{\sin\dfrac{g_p(t_0)-g_q(t)}{2}}{\dfrac{g_p(t_0)-g_q(t)}{2}}\right|+\frac{\Gamma_0}{2}.$$

Discrete mathematical model. To discretize the system of integral equations (19), we introduce into consideration an unknown function $\gamma_p^{n_p-2}(t)$, where $\gamma_p^{n_p-2}(t)$ is a polynomial of degree n_p-2.

We also replace smooth kernels of equations by their interpolation polynomials, for each of the variables with nodes $t_{oj}^{n_p}$, $j=1,...,n_p-2$, here $t_{oj}^{n_p}$ are zeros of *the Chebyshev polynomial* of the second kind $U_{n_p-2}(t_0)$. We obtain the system of hyper-singular integral equations with respect to the unknown functions $\gamma_p^{n_p-2}(t)$, $p=1,...,m$:

$$-\frac{B_1}{\pi}\left(a.f.p.\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_p^{n_p-2}(t)}{\left(t-t_{0j}^{n_p}\right)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)-\frac{B_2}{\pi}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}\gamma_p^{n_p-2}(t)\ln\left|t-t_{0j}^{n_p}\right|\sqrt{1-t^2}\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\int_{-1}^{1}P_{n-2}\left[\tilde{K}_{pq}\right]\left(t_{0j}^{n_p},t\right)\gamma_q^{n_q-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt=f,\quad j=1,...,n_p-2,\quad p=1,...,m. \qquad (20)$$

Using *interpolation-type quadrature formulas* [11, 12] we get the next system of linear algebraic equations with respect to the «approximations» of unknown functions $\gamma_p^{n_p-2}(t)$, $p=1,...,m$:

$$\frac{B_1}{n_p}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_p-1}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_p}\right)^2\right)\frac{1-(-1)^{j+k}}{\left(t_{0j}^{n_p}-t_{0k}^{n_p}\right)^2}-B_1\frac{n_p}{2}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0j}^{n_p}\right)-$$
$$-\frac{B_2}{n_p}\left(\frac{\beta_p-\alpha_p}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{n_p-1}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_p}\right)^2\right)\left[\ln 2+2\sum_{r=1}^{n_p-1}\frac{1}{r}T_r\left(t_{0k}^{n_p}\right)T_r\left(t_{0j}^{n_p}\right)+\frac{(-1)^{k+j}}{2n_p}\right]-$$
$$-\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q-1}\gamma_q\left(t_{0k}^{n_q}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_q}\right)^2\right)K_{pq}\left(g_p\left(t_{0j}^{n_p}\right),g_q\left(t_{0k}^{n_q}\right)\right)=-f,\quad j=1,...,n_p-1,\ p=1,...,m. \qquad (21)$$

Solving system (21) we find the values of the unknown functions $\gamma_p^{n_p}(t)$ at the nodes $t_{0j}^{n_p}$, then by the obtained values we reconstruct the function $\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)$ as an interpolation polynomial.

Far-field directivity pattern and total scattering cross-section. Far-field directivity pattern is a function $D_H(\phi)$, by the definition $D_H(\phi)$ is the factor depending on ϕ for the leading term of the asymptotics [6] which depends only on r and the field $u(r,\phi)$ for large r:

$$u(r,\phi)=D_H(\phi)\sqrt{\frac{2}{\pi r}}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Using the representation of the field outside of the cylinder, we derive the far-field directivity pattern. Thus,

$$u^{-}(r,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\frac{\Gamma_n}{H_n^{(1)\prime}(ka)}H_n^{(1)}(kr)e^{in\phi},$$

where $A_n=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{n_q}\left(\frac{\beta_q-\alpha_q}{2}\right)^2\sum_{j=1}^{n_q-1}\left(1-\left(t_{0j}^{n_q}\right)^2\right)\gamma_q^{n_q-2}\left(t_{0j}^{n_q}\right)e^{-ing_q\left(t_{0j}^{n_q}\right)}$, $n\in\mathbf{Z}$, and the values of the interpolation polynomial $\gamma_q^{n_q-2}\left(t_{0j}^{n_q}\right)$ at the points $t_{0j}^{n_q}$ are determined from system of linear algebraic equations (21).

Using the principal term of the asymptotic expansion of the Hankel function [4]:

$$H_n^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},\quad \text{as } x\to+\infty,$$

we obtain:

$$u^{-}(r,\phi)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n\Gamma_n e^{-i\frac{\pi}{2}n}}{H_n^{(1)\prime}(ka)}e^{in\phi},\quad \text{as } r\to\infty.$$

Hence, the directivity pattern admits representation in the form:

$$D_H(\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma_n A_n\frac{e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{H_n^{(1)\prime}(ka)}e^{in\phi}. \tag{22}$$

The result of numerical calculations. For some values of angular-width of the gap and for the dimensionless parameter kR, we plotted the field diagrams in the far zone and the field near the cylindrical structure. In fig. 2, *a* – *d* it is seen that the increase of angular-width affects the location of the inner maximum.

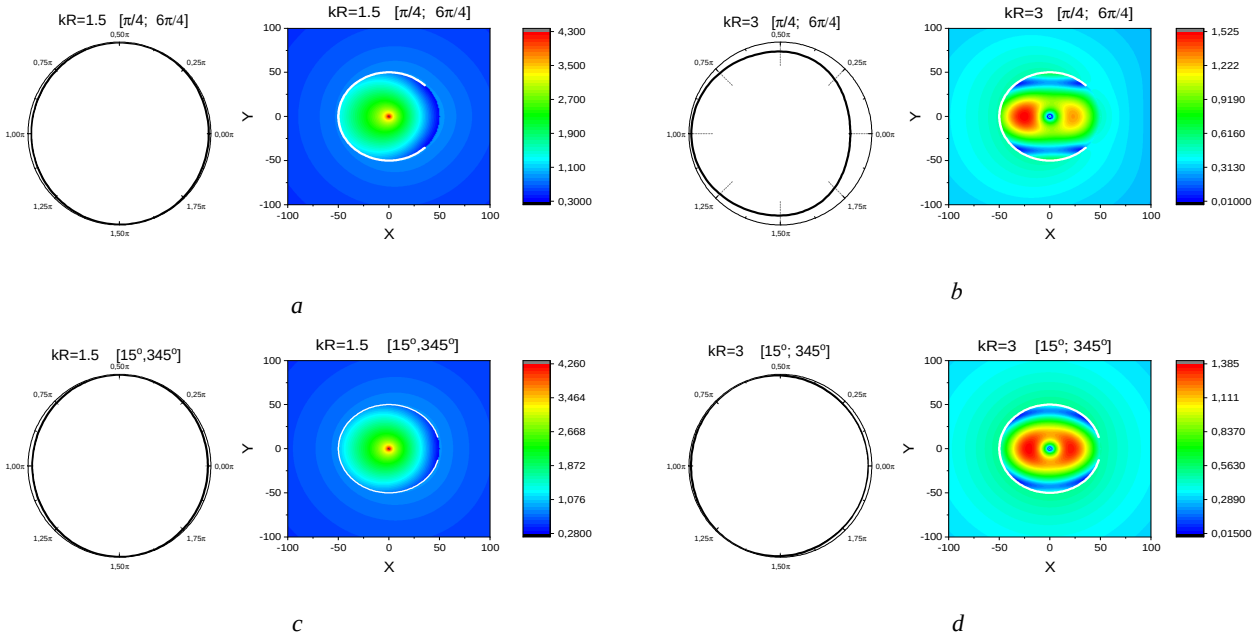


Fig. 2 – Far fields and near fields for the following parameters:
a – $\alpha=45^{\circ}$, $\beta=315^{\circ}$, $kR=1.5$; *b* – $\alpha=45^{\circ}$, $\beta=315^{\circ}$, $kR=3$;
c – $\alpha=15^{\circ}$, $\beta=345^{\circ}$, $kR=1.5$; *d* – $\alpha=15^{\circ}$, $\beta=345^{\circ}$, $kR=3$.

Summary. In this work, a boundary hypersingular integral equation was constructed for the problem of diffraction of a cylindrical wave from a round dielectric cylinder wrapped by a finite number of perfectly conducting infinite ribbons. Using the method of discrete singularities, we obtained a system of linear algebraic equations. The software was implemented and numerical calculations of some structures were carried out based on the numerical model.

Bibliography

1. *Гандель Ю. В., Ерёменко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн : учебное пособие. Ч. 2. – Х. : ХГУ, 1992. – 145 с.
2. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков : ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
3. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Пер. с англ. Под ред. *Диткина В. А.* и *Кармазинной Л. Н.* – Москва : Наука, 1979. – 832 с.
4. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Київ : Наукова думка, 1989. – 256 с. – ISBN 5-12-000912-3.
5. *Носич А. И., Шестопалов В. П.* Электромагнитный аналог резонатора Гельмгольца // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234. – №1. – С. 53 – 56.
6. *Носич А. И.* О влиянии резонансных режимов на характеристики рассеяния незамкнутого цилиндра // Радиотехника и электрон. – 1978. – Т. 23. – № 8. – С. 1733 – 1737.
7. *Духопельников С. В.* Математические модели для расчёта излучения из продольных щелей в волноводе круглого сечения // Вестник Харьковского национального университета. Сер. : Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2005. – № 661. – Вып. 4. – С. 104 – 113.
8. *Духопельников С. В.* Математическая модель излучения цилиндрической волны из продольных щелей в прямом круговом цилиндре // Труды Международных школ-семенаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Орёл : ОГУ, 2005. – Вып. 4. – С. 45 – 50.
9. *Goldstone L. O., Oliner A. A.* Leaky wave antennas II : Circular waveguides // IRE Trans. Antennas Propagat. – 1961. – Vol. 9. – pp. 280 – 290.
10. *Ziolkowski R. V., Grant Brian J.* Scattering from Cavity-Backed Apertures : The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1987. – Vol. AP-35. – № 5. – pp. 504 – 528.
11. *Gandel Y. V., Kononenko A. S.* Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation // Differ. Equations. – 2006. – vol. 42. – no. 9. – pp. 1256 – 1262.
12. *Kostenko A. V.* Numerical method for the solution of a hypersingular integral equation of second kind // Ukrainian Mathem. Journal. – 2014. – vol. 65. – no. 9. – pp. 1373 – 1383.

References (transliterated)

1. Gandel' Yu. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov*. *Obosnovanie chislennogo metoda diskretnykh osobennostey resheniya dvumernykh zadach difraktsii elektromagnitnykh voln : uchebnoe posobie*. *Ch. II* [Mathematical problems of the method of discrete currents. Justification of the numerical method of descrete singularities for solving two dimensional problems of diffraction of electromagnetic waves: textbook. Part 2]. Kharcov, KhGU Publ., 1992. 145 p.
2. Gandel' Yu. V. *Vvedenie v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the methods of evaluating singular and hypersingular integrals]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2001. 92 p.
3. Abramowitz M., Stegun I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami*. *Per. s angl*. Ed. Ditkin V. A., Karmazina L. N. [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Translated from English]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
4. Nazarchuk Z. T. *Chislennoe issledovanie difraktsii voln na tsilindricheskikh strukturakh* [Numerical study of wave diffraction on cylindrical structures]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989. 256 p. ISBN 5-12-000912-3.
5. Nosich A. I., Shestopalov V. P. Elektromagnitnyy analog rezonatora Gel'mgol'tsa [Electromagnetic analogue of Helmholtz resonator]. *Dokl. AN SSSR*. 1977, vol. 234, no. 1, pp. 53–56.
6. Nosich A. I. O vliyanii rezonansnykh rezhimov na kharakteristiki rasseyaniya nezamknutogo tsilindra [On the impact of resonant modes on the diffraction characteristics of open cylinder]. 1978, vol. 23, no. 8, pp. 1733–1737.
7. Dukhopel'nikov S. V. Matematicheskie modeli dlya rascheta izlucheniya iz prodol'nykh scheley v volnovode krugovogo secheniya [Mathematical model for computing propagation from longitudinal slots in circular cross section waveguide]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. : Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravleniya* [Bulletin of the Kharkov National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2005, vol. 661., no. 4, pp. 104–113.
8. Dukhopel'nikov S. V. Matematicheskaya model' izlucheniya tsilindricheskoy volny iz prodol'nykh scheley v pryamom krugovom tsilindre [Mathematical model of propagation of cylindrical wave from longitudinal slots in straight circular cylinder]. *Trudy Mezhdunarodnykh shkol-seminarov "Metody diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki"* [Proceedings of the International schools-workshops “Methods of discrete singularities for problems of mathematical physics”]. Orel, OGU Publ., 2005, no. 4, pp. 45–50.
9. Goldstone L. O., Oliner A. A. Leaky wave antennas II : Circular waveguides. *IRE Trans. Antennas Propagat*. 1961, vol. 9, pp. 280–290.
10. Ziolkowski R. V., Grant Brian J. Scattering from Cavity-Backed Apertures : The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1987, vol. AP-35, no. 5, pp. 504–528.
11. Gandel Y. V., Kononenko A. S. Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation. *Differ. Equations*. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1256–1262.
12. Kostenko A. V. Numerical method for the solution of a hypersingular integral equation of second kind. *Ukrainian Mathem. Journal*. 2014, vol. 65, no. 9, pp. 1373–1383.

Received (надійшла) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гиря Наталія Петрівна (Гиря Наталия Петровна, Girya Nataliya Petrivna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 886-11-01; e-mail: n82girya@gmail.com.

Духопельников Сергій Володимирович (Духопельников Сергей Владимирович, Dukhopelnykov Sergii Volodymyrovich) – кандидат технічних наук, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова, м. Харків; тел.: (066) 185-94-23; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

УДК 62-50

Є. П. ГОМОЗОВ, Т. С. ЗАЇКА

ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ НА ЕНЕРГОРИНКАХ

У роботі обговорюються різні моделі ціноутворення на енергоринках. Наведено огляд різних дискретних та неперервних моделей. Дискретні моделі подані рівняннями в кінцевих різницях з запізненням. Неперервні моделі описуються динамічними системами. Одна з таких моделей удосконалена. Основний результат роботи – запропонована модель визначення рівноважної ціни на енергоринку загального типу. В модель включено хеджування ризиків з використанням портфелю деривативів. Управління параметрами моделі дає змогу обмежити коливання цін біфуркаціями типу народження циклу.

Ключові слова: енергоринки загального типу, інтегро-диференційна система рівнянь, моделі ціноутворення, «енергетичні» похідні фінансові інструменти.

Е. П. ГОМОЗОВ, Т. С. ЗАИКА

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА ЭНЕРГОРИНКАХ

В работе обсуждаются различные модели ценообразования на энергорынках. Приведен обзор различных дискретных и непрерывных моделей. Дискретные модели представлены уравнениями в конечных разностях с запаздыванием. Непрерывные модели описываются динамическими системами. Одна из таких моделей усовершенствована. Основной результат работы – предложена новая интегро-дифференциальная модель определения равновесной цены на энергорынке общего вида. В модель включено хеджирование рисков с использованием портфеля деривативов. Управление параметрами модели позволяет ограничить изменение цен бифуркациями типа рождения цикла.

Ключевые слова: энергорынкиобщего вида, интегро-дифференциальная система уравнений, модели ценообразования, «энергетические» производные финансовые инструменты.

E. P. GOMOZOV, T. S. ZAIKA

SOME MATHEMATICAL MODELS OF PRICING IN ELECTRICITY MARKETS

The paper discusses various pricing models in the electricity markets. An overview of various discrete and continuous models is presented. Discrete models are represented by equations in finite differences with delay. Continuous models are described by dynamic systems. One of these models is improved. The main result of the work is proposed new integro-differential model for determining the equilibrium price in the genericelectricity market.The model incorporates risk hedging using a portfolio of derivatives. Managing the model's parameters allows to limit the price change by bifurcations of the type of cycle generation.

Key words: generic electricity markets, integro-differential equation system, pricing models, "energy" derivative financial instruments.

Вступ. Загальна модель конкурентних ринків електроенергії може мати таку структуру: оптовий ринок електроенергії, роздрібні ринки електроенергії, ринок потужності, ринок системних послуг, ринок фінансових прав на переказ, ринок деривативів. Ціни на усіх цих ринках взаємно пов’язані [1].

Споживання електроенергії змінюється постійно в кожен момент часу. Необхідно мати у своєму розпорядженні резерв, який може бути пущений в роботу в порівняно короткий термін. Для того щоб протистояти випадковим відхиленням у виробництві, необхідно мати у своєму розпорядженні станції та устаткування, здатні швидко змінювати свою потужність. Принципово важливим є те, що електровиробництво, електрозбут та електропостачання являють собою потокові процеси в силу своєї фізичної сутності в електроенергетичній системі, яка включає такі елементи: електростанції; підвищуючи трансформатори; синхронні компенсатори; понижуючі трансформатори у споживачів; статичні конденсатори різної напруги; електроприлади, включаючи електродвигуни; електротехнічні установки; електричні мережі [2].

Опис функціонування енергетичної системи здійснюється на основі математичних моделей. Використання математичних моделей для визначення за їх допомогою взаємозв’язків і залежностей між різними елементами системи дає змогу більш детально дослідити ринок електроенергії, визначити вплив зовнішніх факторів на стан системи та проаналізувати альтернативи її розвитку. Через складність реальних процесів стає неможливим точне відображення моделі, тому найчастіше їх математична проекція спрощується. Достовірність досліджуваної моделі зменшується за рахунок спрощень та обмежень, можливих неточностей щодо деяких параметрів та будь-яких неочікуваних явищ.

Актуальність теми. Рівень економічного розвитку будь-якої країни визначається перш за все ефективністю використання енергоресурсів. Оцінка ефективності використання енергоресурсів, енергоспоживання та енергозбереження у промисловості нашої країни пов’язана з комплексом проблем, що виникли за умов нестабільної економіки та початкових кроків України у світову економічну систему. Управління економікою підприємств та галузей, а особливо процесом споживання енергії, базується на об’єктивній та повній інформації про показники, які характеризують енергоємність продукції, їх рівень і причини, які обумовлюють їх зміну [1, 3].

Методи та засоби аналізу роботи електропостачальних систем. Виробництво електроенергії повинно швидко реагувати в режимі реального часу на зміни споживання електроенергії. Електроенергія не може ефективно зберігатися у великих об’ємах. Процес її споживання має нелінійний характер. Енергоефективність постачання електричної енергії в сучасних електричних мережах повинна враховувати несиметричний, нелінійний та швидкозмінний характер споживання електричної енергії сучасними споживачами. Головними факторами є фізіологічні цикли людини, зміна часу доби і сезонність, позмінна робота.

© Є. П. Гомозов, Т. С. Заїка, 2018

Зараз для відбудови моделі енергоспоживання використовуються *методи обчислювального інтелекту*, методи *теорії ігор*, фрактальні моделі, динамічні системи, мультиагенти, тощо [4 – 6].

Методи обчислювального інтелекту спираються на евристичні алгоритми, які використовуються, наприклад, у *нечіткій логіці*, *штучних нейронних мережах* і *еволюційному моделюванні*.

Оптовий ринок енергетики часто має структуру *олігополії* [7]. Засновник *теорії олігополії*, французький економіст *К. Курно* так охарактеризував взаємозалежність на олігопольному ринку: «тому що на ринку конкурують лише декілька фірм, то кожен учасник ринку повинен стежити за поведінкою суперників, зважувати свої дії відносно цінової політики, а також оцінювати потенційні наслідки своїх рішень» [3]. В аналізі ринків Англії, Уельсу, Норвегії, Нової Зеландії та штату Вікторія в Австралії *Уолак Ф. А*. [1] вказує на те, що правила лібералізованого ринку електроенергії, в комбінації зі структурою ринку, можуть впливати на зміну ринкових цін.

Для аналізу оптового ринку електроенергії доцільно використовувати *модель SFE* (supply function equilibrium), що враховує специфіку ринку електроенергії. Поняття *функції рівноважних поставок* було спочатку розроблено *Клемперером* і *Мейером* [8] як спосіб моделювання, в якому конкуренти в умовах невизначеного попиту можуть домогтися максимізації прибутку рівноваги на ринку. Підхід SFE був запозичений *Гріном* і *Ньюбері* [9] в якості моделі для стратегічних торгів у конкурентному спотовому ринку електроенергії.

Питання функціонування конкурентних ринків електроенергії та введення диференційованих за часом цін на електроенергію були досліджені в роботах *Давидсоном* і *Догадушкіной* [10], *Боном*, *Караманісом* і *Швеппе* [11] *Волконським*, *Кузовкіним* і *Поманським* [12], *Швеппе* і *Караманісом* [13], *Стофтом* [14], *Хоганом* [15, 16], *Крамтоном* і *Вілсоном* [17].

Огляд дискретних моделей енергоринку. *Алексєєв В. І.*, *Гнатів Б. В.*, *Кавалець І. І.* у роботі [18] розглянули систему з конкуренцією, в якій функціонує n (де $n \ge 2$) елементів $F_i, i = \overline{1,n}$ з вихідними характеристиками $q_i, i = \overline{1,n}$ кожного з них, відповідно. Кінцевий результат функціонування кожного елемента такої системи має деяку характеристику $p_i, i = \overline{1,n}$. Побудували узагальнену *математичну модель типу Курно – Пу* для багатоелементної дискретної системи з конкуренцією

$$q_i(t+1) = \sqrt{\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{q_j(t)}{c_i}} - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} q_j(t), \quad i = \overline{1,n},$$

де $q_i(t+1)$ – *функція реакції* (тобто, значення вихідної характеристики) *i*-го елемента в момент часу $t+1$ на значення вихідних характеристик, властивих іншим елементам системи в момент часу t (припускається, що $q_i(t+1) > 0$, $i = \overline{1,n}$); $c_i, i = \overline{1,n}$ – різні сталі значення параметрів, які характеризують граничну поведінку кожного елемента системи (припускається, що $c_i > 0, i = \overline{1,n}$).

Авторами проаналізовано застосування однієї та двох керуючих функцій до структури моделі дво- та трьохелементної системи, отримано аналітичне рішення систем та *точка рівноваги Курно*.

Переваги застосування даної моделі в моделюванні енергоринку полягають в тому, що вона розроблена для $N-$учасників ринку, а також використання керуючих функції дає змогу стабілізувати поведінку учасників ринку. До недоліків можна віднести дискретність моделі, бо для енергоринку притаманна неперервність роботи. Модель є небездоганною, проте відкриває великі перспективи щодо її доповнення.

Лу Ю. Л. [19] вивчає вплив зміни кількості продукції, що випускається фірмою, та вибір вагового коефіцієнта випуску продукції, який передбачає інша фірма,

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \beta q_1(t)\left[a - 2bq_1 - bq_2 - d_1 - 2e_1 q_1\right]; \\ q_2(t+1) = w \cdot q_2(t) + (1-w) \cdot \dfrac{a - bq_1 - d_2}{2(b - e_2)}, \end{cases}$$

де $q_1(t)$ – обсяг першої фірми, що є обмеженим раціональним гравцем; $q_2(t)$ – обсяг продукції другої фірми, що є адаптивним гравцем; β – відносна швидкість регулювання випуску продукції першої фірми $(\beta > 0)$; $w \in (0,1)$ – ваговий коефіцієнт; $L_k(q_1(t), q_2(t)) = pq_k - C_k$ – функція прибутку двох фірм в період t; $p = f(Q) = a - bQ$ – лінійна спадна зворотна функція попиту; a – максимальна ціна продукту на ринку ($a > 0$); b – кількість одиниць продукції за ціну ($b > 0$); $Q = q_1 + q_2$ – загальний обсяг продукції; $C_k(q_k) = c_k + d_k q_k + e_k q_k^2$ – функція вартості двох фірм; c_k – позитивна фіксована вартість; $d_k q_k + e_k q_k^2$ – змінні витрати.

На ринку електроенергетики також присутні фірми, яким притаманні поведінки адаптивного гравця та обмеженого раціонального гравця, які описані в даній моделі. Подальший розвиток можливий, наприклад, у бік доповнення системи фірмами, які грають за іншими правилами.

Пу Хіаосонг та *Ма Юньхан* [20] досліджували динамічну поведінку трьох фірм, використовуючи різні правила очікування:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \dfrac{1}{3n+3d_1}\Big[-2n\big(q_2(t)+q_3(t)\big) - c_1 + \sqrt{M}\Big]; \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha\left\{q_2(t) - \dfrac{1}{3n+3d_2}\Big[-2n\big(q_1(t)+q_3(t)\big) - c_2 + \sqrt{N}\Big]\right\}; \\ q_3(t+1) = q_3(t) + \beta q_3(t)\Big\{-3\big(n+d_3\big)q_3^2(t) - \Big[4nq_1(t) + 4nq_2(t) + 2c_3\Big]q_3(t) - n\Big[q_1(t)+q_2(t)\Big]^2 + m - b_3\Big\}; \end{cases}$$

$$M = \big(n^2 - 3nd_1\big)\big(q_2(t)+q_3(t)\big)^2 + 4nc_1\big(q_2(t)+q_3(t)\big) + c_1^2 + 3\big(mn - nb_1 + md_1 - b_1d_1\big);$$

$$N = \big(n^2 - 3nd_1\big)\big(q_1(t)+q_3(t)\big)^2 + 4nc_2\big(q_1(t)+q_3(t)\big) + c_2^2 + 3\big(mn - nb_2 + md_2 - b_2d_2\big),$$

де n, m – коефіцієнти зворотної функції попиту; b_i, c_i, d_i, $i=\overline{1,3}$ – коефіцієнти функції вартості; α – параметр зворотного зв'язку, $-1<\alpha<0$; β – параметр швидкості зміни випуску продукції, $0<\beta<1$; характеристика q_1 – перша фірма приймає наївні очікування; характеристика q_2 – друга фірма має адаптивні очікування; q_3 – третя фірма представляє обмежено раціонального гравця.

Використовуючи дану модель для дослідження динамічної поведінки фірм на енергоринку, які застосовують різні правила очікування, можна припустити, що не всі фірми одночасно приймають свої рішення, та доповнити реакцію однієї з фірми затримкою у часі на один крок, тобто у момент часу $(t-1)$.

Ма Юньхан та *Хонгліанг Ту* [21] ґрунтуючись на *ігровій моделі триполії* на оптовому енергоринку з обмеженою кількістю раціональних гравців, досліджує нову *ігрову модель дуополії Курно* з затримкою обмеженої раціональності. Автори припускають, що зворотна функція попиту є нелінійною, і одна з функцій витрат є нелінійною, а інша – лінійною. У цій моделі гравці обмеженої раціональності регулюють швидкість виробництва відповідно до граничного прибутку і приймають рішення про кількість виробленої продукції,

$$q_1(t+1) = q_1(t) + \alpha_1 q_1(t)\Big[-3nq_1^2(t) - nq_2^2(t-1) - 4nq_1(t)q_2(t-1) - 2c_1q_1(t) + m - b_1 - \gamma\Big];$$

$$q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha_2 q_2(t)\Big[-3nq_2^2(t) - nq_1^2(t-1) - 4nq_1(t-1)q_2(t) + m - b_2 - \gamma\Big],$$

де n, m – коефіцієнти зворотної функції попиту; b_1, b_2, c_1 – коефіцієнти функції вартості; α_1, α_2 – параметр зворотного зв'язку, $-1<\alpha<0$; γ – швидкість (wheelingrate).

У даній статті передбачається, що є два підприємства, які постачають електроенергію (де підприємство X являє собою традиційне підприємство вугільної електрогенерації, підприємство Y представляє нове енергетичне підприємство, наприклад, гідро-, атомної енергетики, або сонячну енергію, або енергію вітру, і т.п.) на оптовому ринку електричної енергії, і вони забезпечують електроенергією споживачів через енергопідприємства. Постачальники електроенергії X, Y приймають оптимальне рішення про випуск, і припускають T – випуск рівним $q_i(t)$, $(i=1,2)$, відповідно. У зв'язку з неповною інформацією і затримкою рішення, передбачається, що існує один крок ($T=1$) затримки у випуску взаємних виробників.

Айзенберг Н. И., Кисельова М. А. [22] розглянули механізми організації аукціонів на електроенергетичному ринку, які засновані на заявках оператору ринку споживачами та виробниками енергії. Також порівняли можливі стратегії поведінки виробників електроенергії, що призводять до різних рівноважних ситуацій та відповідним моделям Курно, рівноваги функцій пропозиції, досконалої конкуренції.

Нижче представлені стратегія поведінки виробників, які визначені функцією пропозиції, в яку включені можливі реакції конкурентів на зміну обсягів випуску фірми,

$$q_i^K(P) = \begin{cases} 0, & P \le a_i; \\ \gamma\big(P - a_i\big)/\big(1 + c_i\gamma\big), & a_i < P \le V_i\big(1 + c_i\gamma\big)/\gamma + a_i; \quad i = 1, ..., n; \\ V_i, & P > V_i\big(1 + c_i\gamma\big)/\gamma + a_i, \end{cases}$$

де $q_i^K(P)$ – функція пропозиції стратегічного i – го гравця і в моделі Курно; $P \in R_+^1$ – ціна, яка формується в результаті взаємодії агентів на ринку за умови, що всі споживачі агрегуються єдиною незростаючою функцією попиту $D(P)$ або зворотньої до неї функції $D^{-1}(Q)$; $D(P) = N - \gamma P$ – лінійна функція сукупного попиту; γ – деяка позитивна величина; $c_i > 0$, $a_i \ne 0$ – витрати фірми i; V_i – максимальна потужності, що генерується,

$$q_i^{LE}(P) = \begin{cases} 0, & P \le a_i; \\ \gamma\big(P - a_i\big)/\big(w_i + c_i\gamma\big), & a_i < P \le V_i\big(w_i + c_i\gamma\big)/\gamma + a_i; \quad i = 1, ..., n; \\ V_i, & P > V_i\big(w_i + c_i\gamma\big)/\gamma + a_i, \end{cases}$$

$q_i^{LE}(P)$ – функція пропозиції для виробників енергії з урахуванням обмеження на її вироблення в моделі LFSE;

$w_i = \dfrac{1}{\sum\limits_{i \neq j}\left(\dfrac{1}{w_j + c_j\gamma}+1\right)}$ – індекси впливу i – тої за номером фірми на стан ринку;

$$q_i^W(P) = \begin{cases} 0, & P \le a_i; \\ (P-a_i)/c_i, & a_i < P \le V_i c_i + a_i; \quad i = 1, ..., n; \\ V_i, & P > V_i c_i + a_i, \end{cases}$$

$q_i^W(P)$ – функція пропозиції кожної фірми, що не залежить від еластичності попиту в моделі абсолютно конкурентної взаємодії генеруючих компаній (*моделі Вальраса*);

Огляд неперервних моделей енергоринку. *Дюсуше О. М.* [23] запропонована концепція конкурентоспроможності фірми в рівновазі Курно для n фірм, а також визначені приблизні варіації як перші похідні від *функції постійного прибутку Штакельберга* і поняття *послідовно-групового порядку* в грі n персон. У розглянутій постановці задачі Курно умови першого порядку з урахуванням можливих варіацій мають вигляд:

$$\frac{d\pi_i^e}{dq_i} = b\left[Q_{ci} - 2q_i - q_{-i}^e - q_i \cdot \frac{dq_{-i}^e}{dq_i}\right] = 0,$$

де $Q_{ci} = \dfrac{a - c_i}{b}$ – обсяг абсолютно конкурентного випуску при ціноутворенні по граничним витратам $P = c_i$, званий «*абсолютно конкурентний обсяг фірми номер* i»; q_i – об'єм випуску фірми i; $q_{-i}^e = \sum\limits_{i \neq j} q_j = Q - q_i$ – невідомий сумарний обсяг випуску інших фірм; c_i – граничні витрати.

Запропонований в даній статті підхід стратегічних рефлексивних ігор можна застосувати для аналізу поведінки фірми на енергоринку та аналізу впливу на збіжність процесу стратегічної рефлексії до *статичної рівноваги Курно – Неша*.

Стосовно енергоринку, моделі, які розглянуті вище, для подальшого розвитку їх концепції використовуються такі припущення, як визначення виробників перед споживачами у якості єдиного виробника, а всіх споживачів електроенергії, як одного споживача; забезпечення обсягів електричної потужності та енергії, необхідних для балансування обсягів виробництва і споживання електроенергії в реальному часі, через те, що електроенергія являє собою товар, який неможна запасати в необхідній кількості. Моделі матимуть узагальнений вигляд і не припускатимуть накопичення виробленої електроенергії для продажу споживачеві через деякий час.

У своїх роботах *Лу Ю. Л.* [19], *Дюсуше О. М.* [23], *Ду Дж. Г.*, *Хуан Т. В.*, *Шенг З. Х.* та *Чжан Х. Б.* [24], *Зоркальцев В. И.*, *Мокрий И. В.* [25] ціну формують, як функцію кількості попиту $P(G(t))$,

$$P(G(t)) = A - B \cdot G(t) \text{ – спадна лінійна зворотна функція попиту,}$$

де A – максимально можлива ціна електроенергії; B – кількість одиниць продукції за дану ціну.

В мікроекономіці крива загальної вартості є аналогом кубічної функції, добре відображає як зростаючу, так і спадаючу граничну продуктивність, що має місце, при єдиному змінному введеному факторі виробництва [25]. Тому *Пу Хіаосонг*, *Ма Юньхан* [20] використовують функцію наступного вигляду:

$$C_i(g_i(t)) = a_i + b_i g_i(t) + c_i g_i^2(t) + d_i g_i^3(t),\ i = \overline{1,n},$$

де a, b, c, d – коефіцієнти; $\pi_i(t) = g_i(t) \cdot P(G(t)) - C_i(g_i(t))$ – прибуток i – го виробника електроенергії; $\partial\pi_i(t)/\partial q_i(t) = 0$ – граничний прибуток i – го виробника; $MC_i(t) = (\partial C_i(g_i(t)))/\partial g_i$ – граничні витрати цього ж виробника; $MR_i(t) = (\partial(P(G(t)) \cdot g_i(t)))/\partial g_i$ – граничний дохід виробника i.

Для безперебійної роботи енергосистеми між видобутком та споживанням електроенергії повинен зберігатися баланс:

$$G(t) - Q(t) = 0.$$

Видобуток та споживання електроенергії ведеться безперервно, тому для безперебійної роботи системи повинен бути баланс «видобуток-споживання».

Диспетчеризація, з точки зору економіки, ставить перед собою мету доставити споживачеві електроенергію при мінімальній загальній вартості, тобто досягти

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i(g_i(t))\right\},$$

де $g_i(t)$ – вихідна потужність i – го виробника енергії; C_i – вартість генерації i – го виробника.

Безперервна взаємодія між компаніями – генераторами та компаніями – споживачами відповідає моделі вироблення-споживання, яка описує обмін інформацією в кожен момент часу. Оператор енергоринку являє собою єдиний центр, через який проходять заявки споживачів і виробників на обсяги споживання / виробництва, а та-

кож їх ціни. Така модель є нелінійною та являє собою систему диференціальних рівнянь [26].

Розглядається математична модель енергоринку, що складається з n_s постачальників (supplier) – генеруючих компаній, що характеризуються поточним обсягом виробництва електроенергії $q_s^i(t), i=\overline{1,n_s}$, і компаній n_c – споживачів (customer). Модель характеризується обсягом споживання електроенергії $q_c^i(t), i=\overline{1,n_c}$, яка витрачається на виробництво товарів і послуг,

$$\dot{q}_s^i(t) = -a_s^i q_s^i(t) - r_s^i + \pi(t) b_s^i q_s^i(t) + v_s^i, \quad i=\overline{1,n_s}; \quad \dot{q}_s^i(t) = a_c^i q_c^i(t) + r_c^i - \pi(t) b_c^i q_c^i(t) + v_c^i, \quad i=\overline{1,n_c};$$

$$\mu\dot{\pi}(t) = \sigma(t) = \sum_{i=1}^{n_c} q_c^i(t) - \sum_{i=1}^{n_s} q_s^i(t) = Q_c(t) - Q_s(t);$$

де $a_s^i q_s^i(t) + r_s^i$ − поточна вартість виробництва $i-$м постачальником; $a_c^i q_c^i(t) + r_c^i$ − поточний дохід $i-$го споживача; $\pi(t)$ − поточна ринкова ціна електроенергії; v_s^i, v_c^i − інвестиції в розширення виробництва і споживання; μ − коефіцієнт релаксації ринку, що характеризує швидкість реакції ціни на дисбаланс попиту і пропозиції.

Вдасконалення моделі може йти шляхом доповнення централізованого управління децентралізованим та розподіленим. Відмова від централізованого управління дає можливість скоротити витрати і зробити систему більш гнучкою, за рахунок укладення контрактів на постачання електроенергії без участі посередників між виробниками і споживачами електроенергії (peer-to-peer) і виконання їх в автоматичному режимі. Взаємодія великої кількості вузлів і методів управління, необхідних для досягнення поставлених цілей, забезпечується закладеним в систему рівноправним (пірінговим) механізмом.

В умовах підвищення складності взаємодії учасників ринку, необхідна більш гнучка система обробки інформації – *мультиагентна система*. Така система здатна на гнучкі автономні дії для досягнення своїх цілей.

Реакція на зміну поточного стану системи не може бути миттєвою. Тому для вдосконалення приведеної вище моделі вводиться припущення про те, що формування ціни здійснюється з запізненням в один крок. Також очікується, що постачальники свій обсяг виробництва планують виходячи з обсягу попиту на електроенергію в попередній період. Дана модель позитивно впливає на баланс попиту-пропозиції електроенергії, її рівняння мають наступний вигляд:

$$\dot{q}_s^i(t) = -a_s^i q_s^i(t) q_c^i(t-1) - r_s^i + \pi(t-1) b_s^i q_s^i(t) + v_s^i, \quad i=1\ldots n_s;$$

$$\dot{q}_c^i(t) = a_c^i q_c^i(t) + r_c^i - \pi(t-1) b_c^i q_c^i(t) + v_c^i, \quad i=1\ldots n_c;$$

$$\mu\pi(t) = \sigma(t) = \sum_{i=1}^{n_c} q_c^i(t) - \sum_{i=1}^{n_s} q_s^i(t) = Q_c(t) - Q_s(t);$$

де $a_s^i q_s^i(t) q_c^i(t-1) + r_s^i$ – поточна вартість виробництва $i-$м постачальником, яка враховує обсяг попиту в попередній період; $a_c^i q_c^i(t) + r_c^i$ – поточний дохід $i-$го споживача; інші позначення було пояснено.

Основний результат. Зважаючи на сказане вище, метою роботи було розробити нелінійну модель найбільш загального енергетичного ринку, яка відповідає наступним вимогам.

1. Припускає, що у вартості електроенергії врахована вартість послуг і фінансових прав.
2. Припускає, що швидкість зміни ціни залежить від середньозважених цін в минулому.
3. Припускає, що середньозважена ціна на ринку потужності є відомою функцією.
4. У моделі є можливість хеджування ризиків різкої зміни цін портфелем ф'ючерсів та опціонів.
5. Існують параметри управління, які можливо визначити емпірично.

Тоді, згідно ідеям, що розвинуті у відомій роботі [27], отримуємо інтегро-диференційну модель:

$$\dot{q}(t) = \lambda q(t)[1 - \int_{-\infty}^{0} q(t+\tau) w(-\tau)\ d\tau] - \mu p(t) q(t); \quad \dot{p}(t) = -\alpha p(t) + \beta p(t) q(t) - f(p(t), t),$$

де $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ – додатні параметри; $\alpha > \beta$; μ – біфуркаційний параметр; $q(t)$ – середньозважена ціна пропозиції оптового ринку електроенергії; $p(t)$ – середньозважена ціна пропозиції роздрібного ринку електроенергії, $w(t)$ – середньозважена ціна пропозиції оптового ринку потужності; $f(p(t), t)$ – ціна опціонної премії.

Висновки. Отримана модель має єдине значення рівноважної ціни. Для ядра $w(t)$ загального вигляду система не є кінцевовимірною. Але у спеціальних випадках модель може бути зведено до системи з чотирьох звичайних диференційних рівнянь. В таких випадках цикли, що народжуються при значенні λ_0 параметра λ, мають асимптотичну орбітальну сталість. Класичні методи оцінки фінансових деривативів погано працюють на енергоринках. Тому актуальною є задача побудови моделей оцінки «енергетичних» ф'ючерсів, опціонів і хедж-портфелей.

Проблеми застосування і комп'ютерної реалізації інтегро-диференціальних моделей вирішені поки що недостатньо. Дослідження таких моделей є важливим і актуальним напрямом, а розробка методів та засобів їх комп'ютерного моделювання необхідна для широкого кола прикладних задач.

Список літератури

1. *Wolak F. A., Patrick R. H.* The Impact of Market Rules and Market Structure on the Price Determination Process in the England and Wales Electricity Market. POWER Working Paper PWP-047. – California : University of California Energy Institute, 1997. – 237 p.
2. *Сафина А. Р.* Зарождение и эволюция системы энергетики и энергоснабжения в Республике Татарстан // Экономика, управление, финансы : материалы II междунар. науч. конф. (г. Пермь, декабрь 2012 г.). – Пермь : Меркурий, 2012. – С. 30 – 33.
3. *Микитенко В. В.* Енергоефективність промислового виробництва. Монографія. – Київ : Об'єднаний ін-т економіки НАН України, 2001. – 92 с.
4. *Pierluigi Mancarella, Chin Kim Gan, Goran Strbac*. Fractal models for electro-thermal network studies // 17th Power Systems Computation Conference (PSCC). Sweden, August 2011. – Stockolm, 2011. – pp. 22 – 26.
5. *Mordjaoui M., Boudjema B., Bouabaz M., Daira R.* Short-Term Electric Load Forecasting Using Neuro-Fuzzy Modeling for Nonlinear System Identification // Proceedings of International 3rd Conferenceon Nonlinear Science and Complexity (NSC'10) Ankara, Turkey. – Ankara, 2010. – No. 64. – 6 p.
6. *Ines Romero Navarro*. Dynamic Load Models for Power Systems. Estimation of Time-Varying Parameters during Normal Operation. Printed in Sweden by Media-Tryck Lund, University Lund, 2002, 166 p.
7. *Булатов А. С.* Экономика : Учебник, 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юность, 2002. – 896 с.
8. *Klemperer Paul D., Meyer Margaret A.* Supply Function Equilibria // Econometrica. – 1989. – № 57. – p. 1243 – 1277.
9. *Green Richard J., Newbery David M.* Competition in the British Electric Spot Market // Journal of Political Economy. – 1992. – № 100. – p. 929 – 953.
10. *Давидсон М. Р., Догадушкина Ю. В.* Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 3. – С. 72 – 83.
11. *Bohn R. E., Caramanis M. C., Schweppe F. C.* Optimal Pricing in Electrical Networks Over Space and Time // The RAND Journal of Economics. – 1984. – Vol. 15. – № 3. – pp. 360 – 376.
12. *Волконский В. А., Кузовкин А. И., Поманский А. Б.* (1986): Об определении дифференцированных по времени тарифов на энергию и услуги // Экономика и мат. методы. – 1986. – Т. XX II. – Вып. 1.
13. *Schweppe F. C., Caramanis M. C.* Spot Pricing of Electricity. Norwell : Kluwer Academic Publishers. – 1988. – 355 p.
14. *Stoft S.* Transmission Pricing in Zones: Simple or Complex? // The Electricity Journal. – 1997. – Vol. 10. – № 1. – pp. 24 – 31.
15. *Hogan W. W.* Getting the Prices Right in PJM : What the Data Teaches Us // The Electricity Journal. – 1998. – vol. 11. – № 7. – pp. 61 – 67.
16. *Hogan W. W.* Nodes and Zones in Electricity Markets : Seeking Simplified Congestion Pricing. In : Defining Competitive Electricity Markets. Hung-po Chao, Huntington H.G. (eds.). Norwell : Kluwer Academic Publishers. – 1998. – pp. 33 – 62.
17. *Cramton P., Wilson R.* A Review of ISO New England's Proposed Market Rules. MDI Report for ISO New England, September 9, 1998. – 41 p. – Режим доступу : ftp://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf. – Дата звертання : 10 жовтня 2018).
18. *Алексєєв В. І., Гнатів Б. В., Кавалець І. І., Костробій П. П., Алексєєв І. В., Хома І. Б.* Узагальнена модель олігополії Курно – Пу та стійкість її точки рівноваги с. 51 – 70. – Математичні моделі регулювання фінансових потоків : Монографія. – Львів : «Растр-7», 2012. – 134 с.
19. *Lu Y. L.* Analysis of Duopoly Output Game With Different Decision-Making Rules // Management Science and Engineering. – 2015. – 9 (1). – pp. 1 – 6.
20. *Pu Xiaoson, Ma Junhai*. Chaos Control on the Nonlinear Triopoly Model with Different Expectations // JCIT : Journal of Convergence Information Technology. – 2012. – Vol. 7. – No. 3. – pp. 192 – 198.
21. *Ma Junhai, Hongliang Tu* Complexity of a Duopoly Game in the Electricity Market with Delayed Bounded Rationality // Discrete Dynamics in Nature and Society. – Volume 2012. – Article ID 698270. – 13 pages. DOI: 10.1155/2012/698270.
22. *Айзенберг Н. И., Киселёва М. А.* Модели несовершенной конкуренции применительно к анализу электроэнергетического рынка Сибири // Стохастическое программирование и его приложения. – Иркутск, 2012. – С. 186 – 216.
23. *Дюсуше О. М.* Статичное равновесие Курно – Нэша и рефлексивные игры олигополии : случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2006. – Т.10. – № 1. – С. 3 – 32.
24. *Du J. G., Huang T. W., Sheng Z. H., Zhang H. B.* A new method to control chaos in an economic system // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – no. 217. – pp. 2370 – 2380.
25. *Зоркальцев В. И., Мокрый И. В.* Имитационная модель поведения однопродуктового рынка // Стохастическое программирование и его приложения. – Иркутск, 2012. – С. 370 – 380.
26. *Любчик Л. М., Шпатенко С. А.* Анализ динамических моделей энергорынка методом разделения движений // Вестник НТУ «ХПИ» : сб. науч. тр. Темат. вып. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – № 10. – С. 117 – 120.
27. *May R.* Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels // Ecology. – 1973. – no. 54. – pp. 315 – 325.

References (transliterated)

1. Wolak F. A., Patrick R. H. *The Impact of Market Rules and Market Structure on the Price Determination Process in the England and Wales Electricity Market*. *POWER Working Paper PWP-047*. California, University of California Energy Institute Publ., 1997. – 237 p.
2. Safina A. R. Zarozhdenie i evovyutsiya sistemy energetiki i energosnabzheniya v Respublike Tatarstan [Rise and evolution of energy system and power supply in the republic of Tatarstan]. *Ekonomika, upravlenie, finansy : materially II mezhdunar. nauch. konf. (g. Perm', dekabr', 2012 g.)* [Economics, managing, finances: proceeding of the II-nd international scientific conference (Permian, December, 2012)]. Permian, Merkuriy Publ., 2012. pp. 30–33.
3. Mykytenko V. V. *Energoefektyvnist' promyslovogo vyrobnytstva*. *Monografiya* [Energy efficiency of industrial production. Monograph]. Kyiv, Ob"yednanyy in-t ekonomiky NAN Ukrayiny Publ., 2001. 92 p.
4. Pierluigi Mancarella, Chin Kim Gan, Goran Strbac. Fractal models for electro-thermal network studies. *17th Power Systems Computation Conference (PSCC). Sweden, August 2011*. Stockolm, 2011, pp. 22–26.
5. Mordjaoui M., Boudjema B., Bouabaz M., Daira R. Short-Term Electric Load Forecasting Using Neuro-Fuzzy Modeling for Nonlinear System Identification. *Proceedings of International 3rd Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC'10) Ankara, Turkey*. Ankara, 2010, no. 64, 6 p.
6. Ines Romero Navarro. *Dynamic Load Models for Power Systems. Estimation of Time-Varying Parameters during Normal Operation.* Locentiate PhD Thesis. Printed in Sweden by Media-Tryck Lund, University Lund, 2002, 166 p.
7. Bulatov A. S. *Ekonomika : Uchebnik, 3-e izd., pererab. i dop*. [Economics: Textbook, e-d ed., revised and expanded]. Moscow, Yunost' Publ., 2002. 896 p.
8. Klemperer Paul D., Meyer Margaret A. Supply Function Equilibria. *Econometrica*. 1989, vol. 57, pp. 1243–1277.
9. Green Richard J., Newbery David M. Competition in the British Electric Spot Market. *Journal of Political Economy*. 1992, no. 100, pp. 929–953.
10. Davidson M. P., Dogadushkin Yu. V. Matematicheskaya model' konkurentnogo optovogo rynka elektroenergii v Rossii [Mathematical model of competitive wholesale electricity market in Russia]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Bulleitn of the Academy of Science of Russia. Management system theory]. 2004, no. 3, pp. 72–83.
11. Bohn R. E., Caramanis M. C., Schweppe F. C. Optimal Pricing in Electrical Networks Over Space and Time. *The RAND Journal of Economics*. 1984, vol. 15, no. 3, pp. 360–376.

12. Volkonskiy V. A., Kuzovkin A. I., Pomanskiy A. B. (1986): Ob opredelenii differentsirovannykh po vremeni tarifov na energiyu i uslugi [On determining time-differentiated power and service prices]. *Ekonomika i mat. metody* [Economics and mathematical methods]. 1986, vol. XX II, no. 1.
13. Schweppe F. C., Caramanis M. C. *Spot Pricing of Electricity*. Norwell, Kluwer Academic Publishers, 1988. 355 p.
14. Stoft S. Transmission Pricing in Zones : Simple or Complex? *The Electricity Journal*. 1997, vol. 10, no. 1, pp. 24–31.
15. Hogan W. W. Getting the Prices Right in PJM : What the Data Teaches Us. *The Electricity Journal*. 1998, vol. 11, no. 7, pp. 61 – 67.
16. Hogan W. W. Nodes and Zones in Electricity Markets : Seeking Simplified Congestion Pricing. In : Defining Competitive Electricity Markets. Hung-po Chao, Huntington H.G. (eds.). Norwell : Kluwer Academic Publishers. 1998, pp. 33–62.
17. *Cramton P., Wilson R.* A Review of ISO New England's Proposed Market Rules. MDI Report for ISO New England, September 9, 1998. 41 p. Available at : ftp://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf. (accessed 10.10.2018).
18. Alekseev V. I., Gnativ B. V., Kavalets' I. I., Kostrobiy P. P., Alekseev I. V., Khoma I. B. Uzagal'nena model' oligopoliyi Kurno – Pu ta stiykist' yiyi tochky rivnovagy pp. 51–70. – Matematuchni modeli regulyuvannya finansovykh potokiv. Monografiya [Cournout – Pu generalized oligopoly model and stability of its equilibrium point: monograph]. Lviv, "Rastr – 7" publ., 2012. 134 p.
19. Lu Y. L. Analysis of Duopoly Output Game With Different Decision-Making Rules. *Management Science and Engineering*. 2015, no. 9 (1), pp. 1–6.
20. Pu Xiaoson, Ma Junhai. Chaos Control on the Nonlinear Triopoly Model with Different Expectations. *JCIT : Journal of Convergence Information Technology*. 2012, vol. 7, no. 3, pp. 192–198.
21. Ma Junhai, Hongliang Tu. Complexity of a Duopoly Game in the Electricity Market with Delayed Bounded Rationality. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Volume 2012, Article ID 698270. 13 pages. DOI: 10.1155/2012/698270.
22. Ayzenberg N. I., Kiselyiova M. A. Modeli nesovershennoy konkurentsii primenitel'no k analizu elektroenergeticheskogo rynka Sibiri [Imperfect competition models for analyzing Siberian electricity and power market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012, pp. 186–216.
23. Dyusushe O. M. Statichnoe ravnovesie Kurno – Nyesha i refleksivnye igry oligopolii : sluchay lineynykh funktsiy sprosa i izderzhek [Cournout – Nash static equilibrium and reflexive oligopoly games: case of linear demand and expense]. *Ekonomicheskiy zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki* [Economical journal of Higher Economics School]. 2006, vol. 10, no. 1, pp. 3–32.
24. Du J. G., Huang T. W., Sheng Z. H., Zhang H. B. A new method to control chaos in an economic system. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, no. 217, pp. 2370–2380.
25. Zorkal'tsev V. I., Mokryy I. V. Imitatsionnaya model' povedeniya odnoproduktovogo rynka [Imitational model of behavior of single-product market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012. pp. 370–380.
26. Lyubchik L. M., Shpatenko S. A. Analiz dinamicheskikh modeley energorynka metodom razdeleniya dvizheniya [Analysis of power market dynamic model by separation of movements]. *Vestnik NTU "KhPI" : sb. nauch. tr. Temat. vyp. : Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of NTU "KhPI": collection of scientific works, special issue: System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2009. no. 10, pp. 117–120.
27. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.

Надійшла (received) 27.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozov Yevgen Pavlovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

Заїка Тетяна Сергіївна (Заика Татьяна Сергеевна, Zaika Tatyana Sergeevna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 655-39-28; e-mail: zaika.tats @gmail.com.

УДК 519.6

Е. П. ГОМОЗОВ, М. В.МЕЗЕРНАЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Приведен обзор существующих на сегодняшний день моделей функционирования финансового рынка. Однако, в силу сложного устройства современного глобального финансового рынка, неоднородной структуры имеющихся финансовых инструментов и трейдеров, использующих разные подходы и временные горизонты, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе сделан первый шаг по построению комбинированной модели динамического управления портфелем активов.

Ключевые слова: *p* – адические модели финансового рынка, уравнения в дробных производных, динамическое управление портфелем активов.

Є. П. ГОМОЗОВ, М. В.МЕЗЕРНА

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІЧНОГО УПРАВЛІННЯ ПОРТФЕЛЕМ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

Надано огляд існуючих на сьогодення моделей функціонування фінансового ринку. Однак, через складний устрій сучасного глобального ринку, неоднорідну структуру фінансових інструментів, що використовуються, трейдерів, які мають різні погляди та різні часові горизонти, прогнози зазвичай потребують великої кількості спостережень, погано працюють в околі біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б змогу робити прогнози у режимі реального часу. В роботі зроблено перший крок у побудуванні комбінованої моделі динамічного керування портфелем активів.

Ключові слова: *p* – одичні моделі фінансового ринку, рівняння у дробових похідних, динамічне управління портфелем активів.

© Е. П. Гомозов, М. В. Мезерная, 2018

E. P. GOMOZOV, M. V. MEZERNA

MODERN PROBLEMS OF DYNAMIC MANAGEMENT OF A PORTFOLIO OF FINANCIAL ASSETS

An overview of the present models of functioning of the financial market is provided. However, owing to the complex device of the modern global financial market, a heterogeneous structure of existing financial instruments, and traders using different approaches and time horizons, predictions require typically a large number of observations, work poorly in the vicinity of bifurcations, and don't have computer models that could build forecasts in real time. The work done is, as we see it, the first step to build a "synthetic" dynamic portfolio management model.

Key words: p – adic financial market models, equations in fractional derivatives, dynamic portfolio management.

Введение и краткий обзор литературы по теме исследования. Приведем определения базовых финансовых понятий. Под *инвестированием* в широком смысле понимается любой процесс, имеющий целью сохранение и увеличение стоимости денежных или других средств. Средства, предназначенные для инвестирования, представляют собой *инвестиционный капитал*. С течением времени этот капитал может принимать различные конкретные формы. Тот или иной конкретный вид инвестиционного капитала называется *инвестиционным активом*. Важнейший принцип инвестирования состоит в том, что стоимость актива меняется со временем. Время, на которое инвестор вкладывает инвестиционный капитал, называется *инвестиционным горизонтом*. При этом, хотя инвестиционный капитал имеет вполне определенную стоимость в начальный момент времени, его будущая стоимость в этот момент неизвестна.

Инвесторы, которые стараются выиграть за счет изменения биржевых курсов активов, называются *спекулянтами*. Спекулянты с коротким инвестиционным горизонтом называются *скальперами*. Предполагается, что инвесторы принимают решения в координатах *риск – доходность*.

Исходя из приведенных выше подходов, возникла так называемая *портфельная теория Марковица*, которая предполагает, что рынок имеет вероятностную природу, стоимость активов и их доходности – это случайные величины, а риск изменения доходности – суть среднее квадратичное отклонение случайной величины *доходность*. Под *портфелем* понимается некая совокупность активов, выступающая как целостный объект управления. Математическая модель портфеля – это вероятностный вектор

$$\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T,$$

где n – число активов в портфеле; x_i – доля инвестиции в i – тый актив; T – знак транспонирования.

В теории Марковица все x_i неотрицательны, в *теории Блека* – любые числа (причём отрицательность числа означает, что для приобретения данного актива использовались заемные средства). Сумма всех x_i равна единице. Такая диверсификация активов позволяет улучшить соотношение риск/доходность портфеля по отношению к каждому из входящих в портфель активов.

Инвесторов, работающих в рамках указанных выше подходов, принято называть *рациональными*. Инвесторов, которые способствуют надуванию так называемых *мыльных пузырей* финансового рынка, принято называть *шумовыми*. Например, рынок *криптовалют* – это рынок «шумовых» инвесторов; они же, в значительной мере, отвечают за финансовые крахи фондовых рынков.

Под динамическим управлением портфелем мы будем понимать изменение его структуры в режиме реального времени для улучшения инвестиционных свойств портфеля. Классические модели всех портфельных теорий требуют выполнения определенных гипотез для рынка активов.

В работе [1] был приведен краткий обзор основных гипотез функционирования финансовых рынков – *эффективная* (вероятностная) *модель рынка* (EMH) и *фрактальная модель рынка* (FMH), а также основанные на них методы моделирования прогнозов изменения курсов. Как показывают многочисленные исследования, те очень редкие и очень сильные колебания доходности, которые ранее считались несущественными и отбрасывались при проверке распределений на нормальность, на самом деле являются очень важными. Однако, в соответствии с классической теорией EMH, рынки должны быть почти всегда равновесны, а постарбитражные модели линейны. EMH для производных финансовых инструментов достаточно хорошо моделируется уравнениями типа диффузии и антидиффузии, что означает отсутствие у этой модели *памяти*. Эта модель плохо работает на коротких инвестиционных горизонтах и на таких достаточно экзотических рынках, как рынок криптовалют. Поэтому для прогнозирования курса *биткойна* в работе [1] был использован *метод SSA*, который позволяет строить прогнозы изменения курсов без использования гипотез EMH и построения в явном виде модели соответствующего эквидистентного временного ряда.

Модель FMH создавалась как альтернатива EMH. Эта гипотеза придает особое значение влиянию информации и инвестиционным горизонтам в поведении инвесторов. Предполагается, что люди не признают трендов и не реагируют на них до тех пор, пока эти тренды хорошо не установятся, после чего инвесторы принимают то решение, которое обусловлено накопленной (но до этого игнорируемой) информацией. Такое поведение коренным образом отличается от действий рационального инвестора, который, в соответствии с EMH, немедленно использует новую информацию для принятия инвестиционных решений. Основными инструментами FMH служат *фрактальная геометрия* и *теория хаотических систем*. Необходимость в применении теории хаотических систем возникает при анализе финансовых данных за большой период времени.

Были попытки создать новые или модифицированные гипотезы поведения фондовых рынков – *синергетическая модель*, *мультиагентная модель*, *модификация EMH* – на основе так называемой *теории игровой вероятности*.

Уже в течение многих лет в финансовом трейдинге используют *нейронные сети* [2]. Современная экономическая практика характеризуется наличием структурно неустойчивых рынков, включенных в качестве узлов в

функционирующую в режиме реального времени сеть мировой экономики. Из теории динамических систем следует, что модель, описывающая такую специфическую систему, должна содержать неустранимые области хаоса. С такими моделями на достаточно длинных инвестиционных горизонтах нейронные сети справляться пока не умеют. Хотя на очень коротких (в пределах от долей секунды до минуты) инвестиционных горизонтах в роли скальперов на *срочных рынках* (то есть рынках, на которых торгуются фьючерсы и опционы), скорее всего, уже выступают боты.

В работе [3] для прогнозирования курса акций использовался классический метод группового учета аргументов (МГУА). На основе МГУА была создана финансово-аналитическая система прогнозирования курсов, которая показала более точные результаты по сравнению с применением для такого же прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH, причём даже и в «критических» для этих моделей случаях.

В последнее время для прогнозирования на финансовых и фондовых рынках стали использовать методы *p – адического анализа* (смотри, например, работы [4, 5]). В статье [4] рассмотрена иерархическая модель финансового рынка ценных бумаг на временах, предшествующих обвалу рынка. Показано, что в рамках этой модели динамика взаимодействия агентов рынка описывается известным из *p* – адического анализа *модифицированным уравнением Владимирова* [6]. В работе [5] сделано обобщение *иерархической модели Джохансена – Сорнета* [7] на основе введения зависимости степени влияния агентов рынка на основе ультраметрического расстояния между ними.

Следует заметить, что:

- любая из рассмотренных выше математических моделей функционирования рынка инвестиционных активов основана на формализации гипотез о поведении типичного инвестора;
- обычно портфели акций соответствуют так называемому инвестиционному стилю – то есть, в портфель включаются однотипные ценные бумаги;
- традиционно, задачи оптимизации портфеля – это, чаще всего, задачи *квадратичного программирования*, хотя сейчас уже используют и гораздо более сложные модели оптимизации;
- в работе [7] был рассмотрен новый подход к пониманию риска как к вероятности обвала рынка в целом.

В настоящее время *эконофизика*, то есть использование физических моделей для решения финансовых задач, может уже считаться классикой.

Постановка задачи. На основе анализа преимуществ и недостатков известных моделей необходимо предложить общий подход к математической формализации финансовых рынков. Используя этот общий подход, целесообразно рассмотреть синтетическую модель динамического управления обобщенным портфелем инвестиционных активов, который содержит акции, фьючерсы, опционы и криптовалюты. Заметим, что в данной работе мы не рассматриваем очень специфический случай деривативов энергорынка.

Краткий анализ используемых математических моделей. Следует заметить, что все известные математические формализации функционирования рынка инвестиционных активов используют те или иные модели процессов диффузионного типа в стационарной среде. Однако такие процессы не имеют памяти. Кстати, это их свойство – один из основных постулатов технического анализа. С другой стороны, для прогнозирования курсов используют данные о курсах из прошедших периодов. Это противоречие неявно пытаются снять разными приемами в различных подходах к прогнозированию. Кроме того, в моделях – аналогах рассматривается конкретный рынок конкретных активов, а не реально существующий сейчас глобальный рынок.

Математическая модель. В настоящее время следует рассматривать глобальный рынок разнородных активов с практически бесконечным множеством агентов, имеющих разные типы поведения и разные инвестиционные горизонты. Заметим, что до сих пор не исследовались эффекты, связанные с топологическими структурами этого рынка. Во всяком случае, наблюдаемое поведение рынка не укладывается в стандартные гипотезы о независимости случайных величин в уравнениях диффузионного типа. Поэтому, на наш взгляд, следует объединить следующие подходы:

1. Учитывая современное понимание *длинного инвестиционного горизонта*, акции имеют практически бесконечный срок жизни. Следовательно, для инвесторов в акции более значимой проблемой является недетерминированное колебание курсов, а не риск обвала рынка. С этой точки зрения имеет смысл демпфировать колебания курса акций, взятых в качестве базового актива, применением *хедж-опционов* на эти акции. Поэтому, развивая идеи эконофизики, для моделирования глобального рынка акций в координатах риск-доходность имеет смысл применить модифицированные, известные в электрохимии, *модели нестационарной диффузии с эффектом Киркендаля* (с точки зрения финансового рынка, этот эффект описывает процесс взаимодействия базовых активов и опционов с фрактальной доходностью, то есть риски активов демпфируются с помощью хеджирования опционами). То есть это могут быть *модификации второго закона Фика* по следующим направлениям: нелинейные уравнения, фрактальная среда, дробные производные (что придаёт системе *псевдопамять*), *p* – адический анализ для сверхмалых инвестиционных горизонтов.
2. Деривативы имеют средний срок жизни, и, поэтому, для этого рынка также менее значимым, по сравнению с недетерминированностью колебаний курсов, является риск обвала курсов. По-видимому, имеет смысл связать и *фьючерсы* в качестве базового актива, применением хедж-опционов на эти фьючерсы.

Представляется разумным поэтому, следуя идеям, развитым в известной работе [8], использовать *модификацию известных уравнений Хатчинсона – Райта.*

3. Для рынка криптовалют наиболее важен риск обвала рынка, поэтому уместно использовать модификации на основе p – адического анализа метода SSA для прогнозирования курсов криптовалют и модели Джохансена – Сорнета для прогнозирования рисков обвала рынка.

Для оптимизации портфеля становится целесообразным использование модификаций на основе p – адического анализа метода МГУА.

Динамическая модель оценки акции. Обозначим через μ безрисковую ставку доходности; для ее подсчета используется модель *spot rate* для так называемых *оторванных* Treasury bill по программе *STRIPS*. Пусть, далее, D_{a+}^{α} – дробная *производная Римана – Лиувилля*, $\alpha \in C$, $\mathrm{Re}\,\alpha$ – индикатор оптимальной длины сканирования ряда [9] для курса акции, $\mathrm{Im}\,\alpha$ – дата исполнения хедж-опциона, a – минимальная цена предложения стоимости акции на продажу в момент покупки хедж-опциона, I – средневзвешенный курс фондовых индексов основных фондовых бирж мира, t – время, $V = V(I,t) \in C$, $\mathrm{Re}V$ – курс акции, $\mathrm{Im}V$ – цена хедж-опциона, выраженная p – адическим числом, $\sigma^2(I)$ – дисперсия, D^{β} – дробная *производная Рисса*, $\beta \in R$ – *показатель Херста* для ряда курса акции, выраженный p – адическим числом, $V_I(I,t)$ – частная производная, причём

$$D_{a+}^{\alpha} V(I,t) = -\left(\sigma^2(I)/I^2\right) D^{\beta}\left(I^2 V_I(I,t)\right) - \mu(t) V_I(I,t).$$

В принципе, данная модель также дает возможность прогнозирования точек перелома тренда. При переходе величины μ через критическое значение, описываемое моделью бифуркации типа *эффекта Фейгенбаума* могут дать прогноз поведения глобального рынка, который окажется близким к реальному в условиях мирового финансового кризиса.

Динамическая модель оценки портфеля деривативов. Мы предполагаем возможность хеджирования рисков резкого изменения цен фьючерсов портфелем фьючерсов и опционов.

Пусть, далее, существуют определяемые эмпирически по временным рядам курсов деривативов параметры управления таким портфелем.

Тогда, следуя идеям, развитым в известной работе [8], и модифицируя полученное там интегро-дифференциальное уравнение типа Хатчинсона – Райта, на основе p – адического анализа получаем следующую модель оценки портфеля деривативов в виде системы уравнений с использованием дробных производных:

$$D_{a+}^{\gamma}(F) = \lambda F[1 - D^{\alpha}(F)] - \mu F D;$$

$$D_{b+}^{\gamma}(O) = -\varepsilon O + \nu O G,$$

где $\lambda, \mu, \nu, \varepsilon$ – положительные параметры; $\nu > \varepsilon$; μ – бифуркационный параметр; N – значение индекса NASDAQ; $F(N,t)$ – цена предложения на рынке фьючерсов, выраженная p – адическим числом; $O(N,t)$ – цена предложения на рынке опционов, выраженная p – адическим числом; a – минимальная цена предложения на продажу на рынке фьючерсов, выраженная p – адическим числом; b – минимальная цена предложения на покупку на рынке опционов, выраженная p – адическим числом; $D_{a+}^{\gamma}, D_{b+}^{\gamma}$ – дробные производные Римана – Лиувилля; D^{α} – дробная производная Рисса.

Данная модель определяет единственное значение для равновесной цены. Система общего вида не является конечномерной. Однако в специальных случаях модель может быть сведена к системе из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих случаях циклы, рождающиеся при бифуркационном значении λ_0 параметра λ, асимптотически орбитально устойчивы.

На основе кросс-секционного анализа фрактальных неэквидисцентных временных рядов биржевых сделок и использования некоторого аналога для уравнения Хатчинсона – Райта, было получено семейство уравнений в дробных производных с параметрами:

$$0 < \gamma \le 2,\ 1 \le \alpha \le 2,\ -1 \le \nu \le 1,$$

где α – дробный порядок производной по пространству; ν – угловой коэффициент тренда базового актива; γ – дробный порядок производной по времени.

Дробная производная по пространству возникает в случае фрактальной среды, параметр производной зависит от *размерности Хаусдорфа – Безиковича*.

Дробная производная по времени возникает в первую очередь от неэквидисцентности указанных выше временных рядов и вычисляется как индикатор оптимальной длины сканирования ряда.

Если $\alpha = 2$ и $\gamma = 1$, и уравнение приобретает вид, близкий к *классическому уравнению Блека – Сколза.* В случае $1 < \alpha < 2$ цены меняются быстрее, чем по прогнозу классической модели. При $\alpha = 1$ теоретически должно получается что-то близкое к *флету*, но на практике этот режим не встречался. Для всякого значения параметра α различаем в зависимости от параметра γ такие случаи:

- если $0 < \gamma < 1$ – имеем режим *субантидиффузии*, в котором *показатель Херста* временного ряда деривата монотонно убывает со временем;

- если $1<\gamma<2$ − имеем режим субантидиффузии, в котором показатель Херста временного ряда деривативa монотонно возрастает со временем;
- если $\gamma \to 2$, то получаем уравнение волнового типа.

Подход к динамической оценке рынка криптовалют. Как оказалось (см. [1]), метод SSA хорошо работает на коротких временных горизонтах относительно далеко от момента обвала рынка. Исходя из общего анализа рынка криптовалют и соображений, аналогичных, например, [4], [5], [7], [8], можно предположить следующее: метод SSA для анализа и прогнозирования курсов криптовалют следует модифицировать на основе p – адического анализа в силу практически мгновенных инвестиционных горизонтов на этих рынках и практически полного отсутствия на них рациональных инвесторов. Это, в частности, означает, что логопериодические модели требуют либо фрактальных реализаций, либо использование комплексных экспонент. Аналогичные требования возникают и к моделям типа Джохансена – Сорнета и их модификациям.

Управление оптимизацией портфеля активов. Фактически, предлагаемые нами модели являются продвинутым техническим анализом, в котором устранены все поведенческие подходы и, как следствие, вероятностные модели. Поэтому, применяя некоторую общую идеологию теории динамических систем, мы использовали методы описания недетерминированных процессов без использования стохастических уравнений. Как сказано выше, мы рассматриваем портфельное инвестирование в самом широком смысле, с любым набором активов на глобальном рынке. В силу общих теорий динамических систем, можно предположить влияние самой структуры этого рынка на результаты торгов. Понятно, что бессмысленно строить какие бы то ни было априорные гипотезы о таком влиянии. Требуется большое количество реальных наблюдений и, возможно, создание какой-то новой ветви математики на основе, скажем, *КАМ – теории*. Однако понятно и то, что сейчас для оптимизации портфеля желательно использовать данные, лежащие за пределами чисто технического анализа. Нам представляется, что для использования таких данных в процедуре оптимизации портфеля уместно было бы использовать модификацию метода МГУА на основе теории нечетких множеств.

Выводы. Для рынков акций были построены динамические модели с модифицированными уравнениями типа второго закона Фика в дробных производных с использованием p – адического анализа. Необходимые параметры определяются по данным различных финансовых рынков.

Для рынков деривативов также были построены динамические модели с модифицированными уравнениями типа Хатчинсона – Райта в дробных производных с использованием p – адического анализа. Необходимые параметры определяются по данным различных финансовых рынков.

Для рынков криптовалют требуются некоторые дополнительные исследования, связанные с задачами модификации на основе p – адического анализа метода SSA для прогнозирования курсов и модели Джохансена – Сорнета.

Для портфельной оптимизации требуется модификация методов МГУА на основе теории нечетких множеств.

Построенные модели требует компьютерной реализации, способной работать в режиме реального времени.

В дальнейшем предложенную модель динамического управления портфелем вполне возможно улучшить за счет разработки корректных методов подбора наиболее влияющих на прогноз факторов, а также комбинируя ее с другими методами прогнозирования курсов и точек перелома тренда.

Список литературы

1. *Гардер С. Е., Гомозов Е. П.* Анализ и прогнозирование курсовой стоимости биткойна методом SSA // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – № 3 (1279). – С. 31 – 36.
2. *Ширяев В. И.* Финансовые рынки : Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. Изд. 2, испр. и доп. – М. : Либроком, 2009. – 232 с.
3. *Ахиезер И. А., Гомозов Е. П.* Прогнозирование курса акций на основе МГУА // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – 2012. – № 30. – С. 15 – 19.
4. *Бикулов А. Х., Зубарев А. П., Кайдалова Л. В.* Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p – адический математический анализ // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия : Физ.-мат. Науки. – 2006. – Вып. 42. – С. 135 – 140.
5. *Пивоварова А. С.* Моделирование логопериодических колебаний с помощью иерархических структур // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2012. – № 2 (33). – С. 266 – 273.
6. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p – адический анализ и математическая физика. – М. : Физматлит, 1994. – 352 с.
7. *Дидье Сорнетте* Как предсказывать крахи финансовых рынков. – М. – 2003. – 394 с.
8. *May R.* Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels // Ecology. – 1973. – № 54. – pp. 315 – 325.
9. *Лебедев А. В., Орлов Ю. Н., Шагов Д. О.* Индикатор оптимальной длины сканирования нестационарного временного ряда Препринты ИПМ им. В.М. Келдыша. – 2013. – №17. – 16 с. – Режим доступу : http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013_17. – Дата звертання : 30 вересня 2018.

References (transliterated)

1. Garder S. E., Gomozov E. P. Analiz i prognozirovanie kursovoy stoimosti bitcoina metodom SSA [Analysis and prediction of bitcoin rate by SSA method]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2018, no. 3 (1279), pp. 31–36.
2. Shiryaev V. I. Finansovyye rynki : Neyronnyye seti, khaos i nelineynaya dinamika. Izd. 2, ispr. i dop. [Financial Markets: Neural Networks, Chaos and Nonlinear Dynamics. 2-nd ed., revised and augmented]. Moscow, Librocom Publ., 2009. 232 p.
3. Akhiezer I. A., Gomozov E. P. Prognozirovanie kursa aktsiy na osnove MGUA [Prediction of stock prices based on MSUA]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Systemnyy analiz, upravlinnya ta informaciyni tekhnologiyi* [Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series : System analy-

sis, management and information technologies]. 2012, no. 30, pp. 15–19.
4. Bikulov A. H., Zubarev A. P., Kaydalova L. V. Ierarkhicheskaya dinamicheskaya model' finansovogo rynka vblizi tochki obvala i p – adicheskiy matematicheskiy analiz [Hierarchical dynamic model of the financial market near the collapse point and p-adic mathematical analysis]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University Series : Physical and mathematical sciences]. 2006, vol. 42, pp. 135–140.
5. Pivovarova A. S. Modelirovaniye logoperiodicheskikh kolebaniy s pomoshhyu iyerarkhicheskikh struktur [Modeling log-periodic oscillations using hierarchical structures]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Aerospace University]. 2012, no. 2(33), pp. 266 – 273.
6. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. p – adicheskiy analiz i matematicheskaya fizika [p-adic analysis and mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994. 352 p.
7. Didier Sornette. Kak predskazyvat' krakhi finansovykh rynkov [Why Stock Markets Crash]. Moscow, 2003. 394 p.
8. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.
9. Lebedev A. V., Orlov U. N., Shagov D. O. Indikator optimal'noy dliny skanirovaniya nestacionarnogo vremennogo ryada [Optimal set length indicator for non-stationary time-series]. *Preprinty IPM im. V. M. Keldysha* [Preprints of the Keldysh institute of applied mathematics]. 2013, no. 17. 16 p. Available at : http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013_17. (accessed 30.09.2018).

Поступила (received) 12.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozov Yevgen Pavlovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

Мезерна Марина Віталіївна (Мезерная Марина Витальевна, Mezerna Maryna Vitalijivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 386-74-22; e-mail: mezernyy@westron.kharkov.ua.

УДК 629.114.2.073.286

А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВ'ЯЗАНИХ КОЛИВАНЬ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА ТА ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ НА ПРЯМОМУ ШЛЯХУ ЗІ СКЛАДНИМ РЕЛЬЄФОМ

Наведено модель коливань колісного трактора та цистерни із рідиною, яка має вільну поверхню. Для перерозподілу рідини у цистерні, що викликаний коливаннями оболонки, використано характеристики поверхневих хвиль Релея. Знайдено спектр частот вільних механічних коливань у дозвуковому діапазоні і проаналізовано відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів трактора та цистерни. Виокремлено групу низькочастотних коливань, шкідливих для здоров'я тракториста, та створено уточнену математичну модель для розрахунку вимушених коливань, що виникають під час довготривалого руху по прямій дорозі. Запропоновано для математичного тестування динамічних якостей транспортного засобу описувати рельєф дороги двома гармоніками – короткою та довгою синусоїдальною хвилею. Розроблено метод визначення довжини короткої хвилі, що призводить до резонансного збільшення амплітуди коливань рідини та кабіни трактора.

Ключові слова: колісний трактор, цистерна, вільна поверхня рідини, механічні коливання, спектр частот, власна форма.

А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ Я

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА И ЦИСТЕРНЫ С ЖИДКОСТЬЮ НА ПРЯМОЙ ДОРОГЕ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

Описана модель колебаний колесного трактора и цистерны с жидкостью, имеющей свободную поверхность. Для перераспределения жидкости в цистерне, вызванного колебаниями оболочки, использованы характеристики поверхностных волн Релея. Найден спектр частот свободных механических колебаний в дозвуковом диапазоне и проанализированы формы взаимосвязанных движений элементов трактора и цистерны. Выделена группа низкочастотных колебаний, вредных для здоровья тракториста, и создана уточненная математическая модель для расчета вынужденных колебаний, возникающих при долговременном движении по прямой дороге. Предложено для математического тестирования динамики транспортного средства описывать рельеф дороги двумя гармониками – короткой и длинной синусоидальной волной. Указан метод определения длины волны, приводящей к резонансному увеличению амплитуды колебаний жидкости и кабины трактора.

Ключевые слова: колесный трактор, цистерна, свободная поверхность, механические колебания, спектр частот, собственная форма.

A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV

MODELING OF COUPLED OSCILLATIONS OF WHEELED TRACTORS AND TANKS WITH LIQUID ON A STRAIGHT ROAD WITH DIFFICULT TERRAIN

The model describes oscillations of a wheeled tractor and a tank with liquid having free surface. For the redistribution of fluid in the tank, caused by vibrations of the shell, the characteristics of Rayleigh surface waves are used. The frequency spectrum of free mechanical vibrations in the subsonic range is found and the forms of interrelated movements of the tractor and tank elements are analyzed. A group of low-frequency oscillations harmful to the health of the tractor driver is identified, and a refined mathematical model is created to calculate the forced oscillations that occur during long-term traffic on a straight road. It is proposed for mathematical testing of vehicle dynamics to describe the road terrain by two harmonics with long and short wavelengths. A method is developed for determining the wavelength leading to the resonant increase in the amplitude of oscillations of the fluid and tractor cabin.

Key words: wheeled tractor, cistern, free surface, mechanical vibrations, frequency spectrum, eigenform.

© А. П. Кожушко, О. Л. Григор'єв, 2018

Вступ, мета роботи та постановка задач дослідження. При розробці нової або модернізації старої колісної техніки, яка використовується в сільськогосподарських угіддях, необхідно враховувати їх можливу спрямованість, тобто розподіл робіт, які виконуються. Так в господарствах сьогодні проводяться транспортні, транспортно-технологічні та технологічні операції, причому на транспортні роботи припадає близько 50 % часу.

При виконанні транспортних робіт машинно-тракторний агрегат (МТА) передусім займається перевезенням вантажу, збиральними та розподільчими роботами. Вантаж, який перевозиться, ділиться на твердий та рідкий. Оскільки перевезення рідкого вантажу призводить до виникнення його суттєвих власних коливань, які впливають на рух цистерни та колісного трактора в цілому, то розвиток цього напрямку досліджень є актуальним. При чому, не лише для сільського господарства, а й для інших галузей промисловості і транспорту. Адже це дасть змогу значно підвищити технічні та економічні показники машинно-тракторного агрегату.

Розкриттю питань впливу зміни маси на експлуатаційні показники МТА присвячені наукові праці [1 – 6]. В даних статтях автори намагаються вирішити питання стабілізації його роботи шляхом створення моделі визначення швидкості руху [1 – 3] або енергетичних втрат [4], чи питання керованості та стійкості [5 – 6]. Окремо слід виділити роботи [7 – 10], в яких автори досліджують вплив коливання рідини в автоцистерні на безпеку руху. Проте забезпечення плавності руху МТА з метою створення комфортних умов роботи тракториста в цих роботах не розглядалося.

Під час руху МТА, що перевозить цистерну з рідиною, в елементах її конструкції збуджуються різноманітні механічні та гідромеханічні коливання, які утворюють широкий спектр частот. Відомо, що на самопочуття та здоров'я людини найбільш негативний вплив чинять коливання із частотою 0.5 … 2 Гц, які мають вертикальний напрямок (тобто, вздовж тулуба тракториста). Вимушені коливання зазначеної частоти і напряму можуть збуджувати нерівності дороги, проте їх амплітуда нівелюється дією ресор та амортизаторів кабіни й сидіння і залишається незначною. Інша ситуація виникає у разі, коли вимушені коливання резонують із власними коливаннями МТА. В роботі [13] було з'ясовано, що в цистернах із рідиною, які входять до МТА, виникають власні коливання рідини з частотами, меншими за 2 Гц. Проте ці дослідження не дають відповіді на питання, чи розповсюджуються коливання рідини з цистерни через зчіпний пристрій на кабіну тракториста та його сидіння. І чи матимуть відповідні пов'язані коливання у кабіні трактора шкідливу вертикальну проекцію.

До того ж слід додати, що у МТА можуть існувати в небезпечному інтервалі часто й інші власні коливання, не викликанні перетіканнями рідини. Проте, оскільки частоти поверхневих хвиль залежать від рівня рідини, а цей рівень при виконанні робіт сільськогосподарського призначення може бути довільним, то саме врахування цих хвиль породжує особливі труднощі і, одночасно, особливо великий інтерес.

а

б

в

г

Рис. 1 – Різновиди цистерн:
а – П-цистерна (з двома колісними парами); *б* – НП-цистерна (з двома колісними парами);
в – П-цистерна (з трьома колісними парами); *г* – НП-цистерна (з трьома колісними парами).

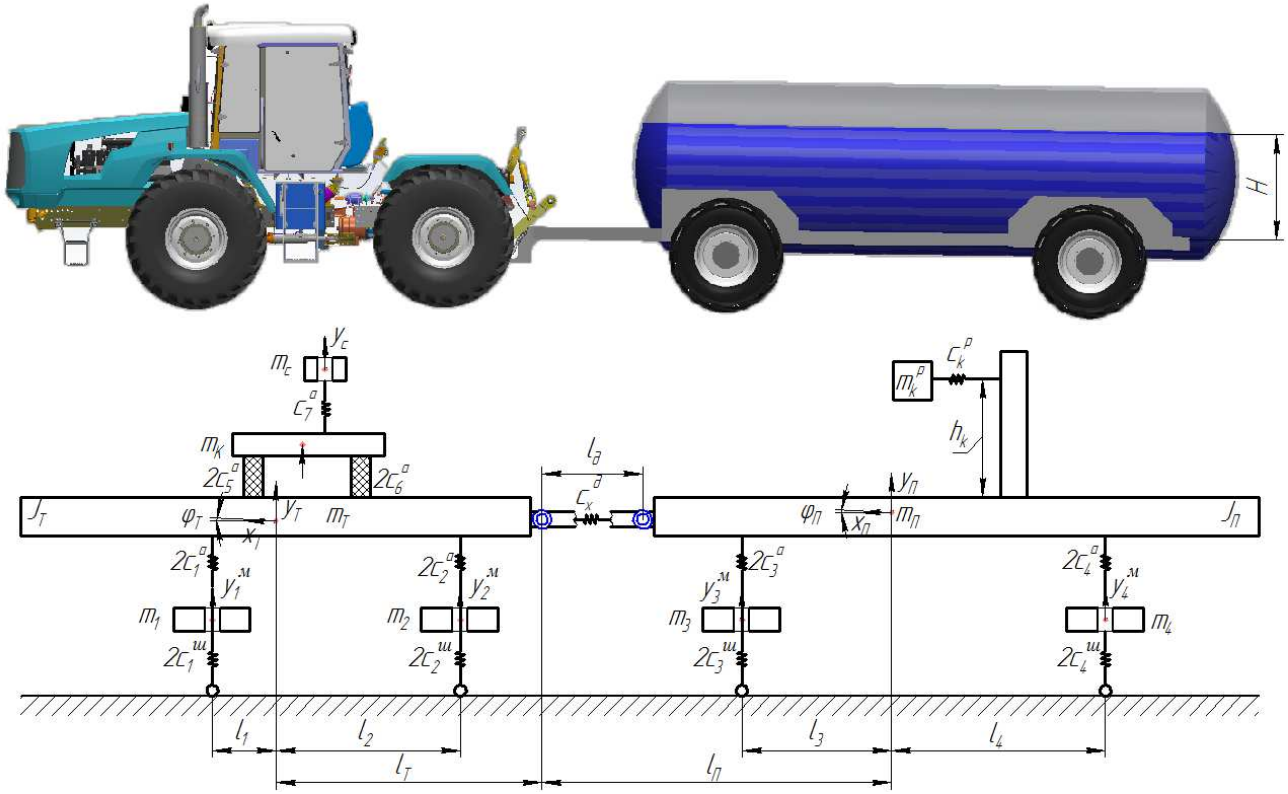


Рис. 2 – Спрощена схема машинно-тракторного агрегату з П-цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань в лінеаризованій моделі.

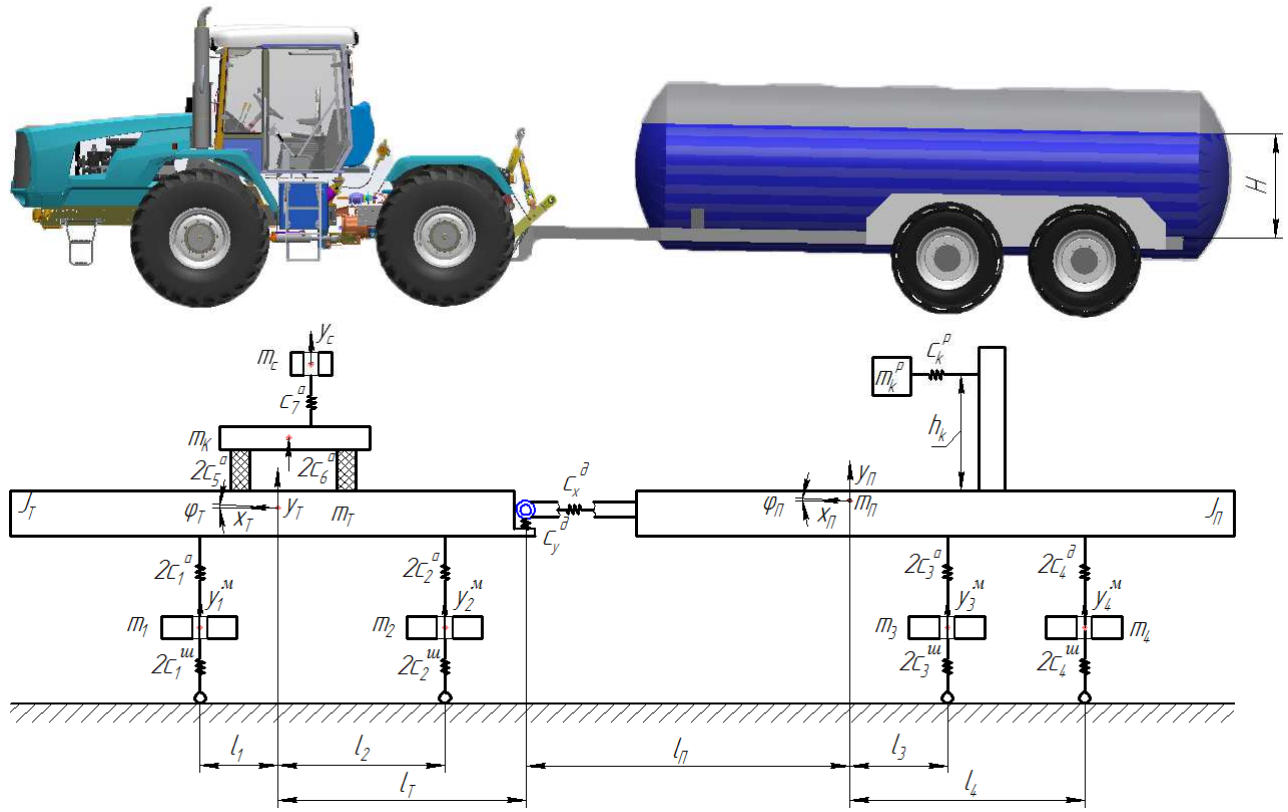


Рис. 3 – Спрощена схема машинно-тракторного агрегату з НП-цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань в лінеаризованій моделі.

В ході пошуку наукових робіт, присвячених оприлюдненню достатньо повних математичних моделей руху машинно-тракторного агрегату з цистерною, встановлено, що їх не так і багато чи не має зовсім, бо в досить

широке поле зору авторів цієї статті вони так і не потрапили. В наслідок високої складності математичного апарату, що необхідно використати для зазначеного моделювання, у відомих роботах розраховуються лише окремі складові руху МТА зі змінною масою. Таким чином, даний аналіз підкреслює вагому наукову новизну та доцільність обраної тематики досліджень.

Метою роботи є створення та оприлюднення відповідного математичного апарату, який дозволить провести моделювання руху колісного трактора з цистерною при виконанні транспортних робіт шляхом обчислення вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень агрегату з урахуванням перерозподілу мас в цистерні.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

– проаналізувати конструкції цистерн, що використовуються в транспортних роботах на сільськогосподарських угіддях, та визначити основні вузли трактора та цистерни, динамічні характеристики яких необхідно моделювати;

– скласти лінеаризовану математичну модель власних повздовжніх коливань, яка дасть змогу оцінити наявні частоти та проаналізувати відповідні форми пов'язаних коливань МТА, і, як наслідок, виділити групу вимушених коливань, що потребує уточненого розрахунку у нелінійній постановці;

– скласти уточнені нелінійні моделі вимушених повздовжніх коливань та виконати їх динамічний аналіз на прикладі колісного трактора ХТЗ-242К та причіп-цистерни BSA KTW 16 або напівпричіп-цистерни ВНЦ-20; порівняти отримані результати.

Аналіз конструкції цистерн. Основні рухомі елементи трактора та причепу. Платформа цистерни будується однаково як для причепів так і напівпричепів. Зображення причіп-цистерни (скорочено – П-цистерна) та напівпричіп-цистерни (НП-цистерна) наведено на рис. 1. Основні конструктивні особливості пов'язані з їх функціональністю. Відомо, що П-цистерна є самостійним транспортним засобом без двигуна, а НП-цистерна – це різновид П-цистерн, для яких необхідна додаткова точка опори. При аналізі П-цистерн слід виділити, що вони можуть мати дві або три колісних пар, при чому у випадку трьох пар – дві розміщуються у кінці цистерни. НП-цистерни мають від однієї до трьох колісних пар і всі вони розміщуються в задній частині цистерни (тобто за її центром мас). Кількість колісних пар встановлюється в залежності від повної ваги цистерни.

При моделюванні повздовжніх коливань трактора аналізують рухи наступних елементів:

– рама трактора разом з двигуном має можливість рухатися у горизонтальному та вертикальному напряму та обертатися в площині цих напрямів;

– два мости трактора можуть зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі рами, але обертаються та рухаються у напрямку цієї осі разом із нею;

– кабіна має можливість незалежно від рами трактора рухатися у горизонтальному та вертикальному напряму та обертатися в площині цих напрямів;

– сидіння з трактористом може зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі кабіни, але обертається і рухається у напряму цієї осі разом із нею;

– маховик і вали двигуна, вали й шестерні варіатора та карданної передачі, а також колеса трактора обертаються зі швидкостями, пропорційними швидкості руху контактної точки шин трактора по дорозі;

– як наслідок пружної тангенціальної піддатливості шин контактна точка може зсуватися відносно рами трактора.

При аналізі повздовжніх коливань у цистерні виокремлюються наступні динамічні елементи:

– рама разом із оболонкою та глибинною частиною рідини має можливість рухатися у двох напрямах та обертатися навколо загального центру мас;

– три поверхневі шари рідини рухаються паралельно осі цистерни, але обертаються та зсуваються перпендикулярно цієї осі разом із нею;

– кожний міст може зсуватися перпендикулярно до повздовжньої осі рами, але обертатися та рухатися у напрямку цієї осі разом із нею;

– шини на колесах всіх мостів обертаються з однаковою швидкістю, але контактна точка шин та дороги має можливість зміщуватися відносно рами цистерни, чому протидіє тангенціальна жорсткість шин.

Зв'язок коливань цистерни і трактора відбувається через сили, які діють у причіпному пристрою (*дишлі*). Перерізи дишла рухаються зі швидкостями, які визначаються рухом гака трактора та місця шарнірного (або жорсткого) з'єднання із рамою цистерни. У випадку П-цистерни маса та момент інерції дишла розподіляється між рамами трактора та цистерни порівну, а для НП-цистерни ці величини повністю приводяться до рами трактора.

Таким чином, у цьому пункті статті виконано аналіз конструкцій цистерн та основних динамічних елементів трактора та цистерни, завдяки чому стало можливо побудувати розрахункові схеми МТА з цистерною.

Лінеаризація моделі та динамічний аналіз транспортного засобу. При динамічному аналізі механізмів, в залежності від заданого діапазону частот, використовуються дискретні, континуальні або змішані (дискретно – континуальні) моделі. В діапазоні інфразвукових механічних коливань усі тверді або пружні елементи конструкції МТА допустимо моделювати за допомогою дискретних моделей із зосередженими параметрами, тобто системами звичайних диференційних рівнянь. Але, як показано в роботі [13], коливання рідини у цистерні описують рівняння в частинних похідних, тобто модель поверхневих хвиль Релея на начальному рівні є континуаль-

ною, а шукана модель МТА – змішаною. Проте, як показало подальше дослідження, розв'язки континуальної моделі допустимо трактувати як рішення системи звичайних диференційних рівнянь для так званих *парціальних осциляторів*. Кожний осцилятор – це умовний шар рідини, який зсувається впродовж вільної поверхні і взаємодіє із оболонкою шляхом натискання на бокову стінку та дно цистерни. Щоб спростити процес моделювання, умовний шар рідини допустимо вважати наявним, надавши йому конкретний розмір, масу та місце у цистерні. В [13] доведено, що для якісного моделювання досить розглянути три поверхневих шари, а усю іншу рідину вважати частиною оболонки цистерни. Таким чином, модель МТА, що використовується, є дискретною.

Перш ніж створювати складну математичну модель з урахуванням більшості факторів, які впливають на динамічну складову руху машинно-тракторного агрегату з цистерною, необхідно розробити лінійну (лінеаризовану) модель, яка буде враховувати усі відомі зв'язки між елементами та формуватися й аналізуватися при використанні матричного аналізу. Лінеаризовану модель для випадку транспортування П-цистерни (рис. 2) або НП-цистерни (рис. 3) утворюють 19 диференційних рівняння другого порядку, тобто при русі такого транспортного засобу збуджується 19 власних частот, які відповідають групі повздовжніх коливань.

Кожне рівняння лінеарізованої моделі у точності відповідає *другому закону Ньютона* і вказує на залежність прискорення (або кутового прискорення) від діючих сил (або моментів сил). При цьому деякі нелінійні чинники (наприклад, відомі *сили Коріоліса* або другий та інші члени розкладання синуса чи косинуса у степеневі ряди) у цих рівняннях не враховані, бо вони відповідають малим складовим більшого порядку, ніж перший.

Звертаємо увагу на те, що всі блоки лінеаризованої моделі симетричні та задовольняють *третьому закону Ньютона* (сила дії дорівнює силі протидії). *При формуванні лінеаризованої моделі величини поздовжньої сили* R_x *та коефіцієнтів зчеплення* ψ_T, $\psi_П$ *вважаються відомими константами*, які визначено із умови квазістатичного руху агрегату (тобто без урахування коливань). Крім того, оскільки ми зараз моделюємо вільні коливання, то *усі зовнішні чинники, які збуджують вимушені, вільні та супроводжуючі коливання тут ігноруються*. Зрозуміло, що зроблені припущення притаманні лише лінеарізованій моделі, і при моделюванні вимушених коливань вони відкидаються.

При моделюванні складові величини коливального процесу об'єднуються у вигляді вектора – стовпця

$$\vec{Y} = \left(y_{\text{Т}} \quad y_1^{м} \quad y_2^{м} \quad y_K \quad y_C \quad \varphi_{\text{Т}} \quad \varphi_K \quad y_{\text{П}} \quad y_3^{м} \quad y_4^{м} \quad \varphi_{\text{П}} \quad x_1^{p} \quad x_2^{p} \quad x_3^{p} \quad x_{\text{П}} \quad x_{\text{Т}} \quad x_K \quad x_{\text{Т}}^{ш} \quad x_{\text{П}}^{ш} \right)^{\text{Т}}, \qquad (1)$$

де $y_{\text{Т}}$, $y_1^{м}$, $y_2^{м}$, y_K, y_C – вертикальне переміщення остову (рами), переднього та заднього мостів, кабіни, сидіння трактора; $\varphi_{\text{Т}}$, φ_K – кут нахилу остову трактора та кабіни; $y_{\text{П}}$, $y_3^{м}$, $y_4^{м}$ – вертикальне переміщення платформи, першого та другого мостів причіпного агрегату; $\varphi_{\text{П}}$ – кут нахилу причіпного агрегату; x_1^{p}, x_2^{p}, x_3^{p} – рух рідини, яка приймає участь в коливальному процесі; $x_{\text{Т}}$, $x_{\text{П}}$ – повздовжній рух трактора та причіпного агрегату; x_K – поздовжній рух кабіни з сидінням; $x_{\text{Т}}^{ш}$, $x_{\text{П}}^{ш}$ – поздовжній рух контактної точки між шинами та дорогою на передніх колесах трактора та причіпного агрегату.

Рівняння коливань загальної форми для дискретної моделі має наступний вигляд

$$M \cdot \ddot{\vec{Y}} + F \cdot \dot{\vec{Y}} + C \cdot \vec{Y} = \vec{0}; \qquad (2)$$

$$M = diag\ (m_{\text{Т}}, m_1, m_2, m_K, m_C, J_{\text{Т}}, J_K, m_{\text{П}} + m_P, m_3, m_4, J_{\text{П}}, m_1^{p}, m_2^{p}, m_3^{p}, m_{\text{П}} + $$
$$+ m_3 + m_4 + m_P, m_T + m_1 + m_2, m_K + m_C, m_{\text{Т}}^{ш}, m_{\text{П}}^{ш}),$$

де M – це діагональна *інерційна матриця* , яка складена із мас та моментів інерції; F та C – *матриця демпфірування* та *матриця жорсткості*, відповідно; $m_{\text{Т}}$ – маса остову трактора (разом з двигуном та, для агрегату із причепом, половиною дишла); m_K – маса кабіни; m_C – маса сидіння (разом із трактористом), $m_{\text{П}}$ – маса рами та оболонки цистерни (разом з дишлом або, для причепу, його половиною); $m_{\text{Р}}$ – маса глибинної частини рідини, що рухається разом із оболонкою; $m_1^{p}, m_2^{p}, m_3^{p}$ – маси поверхневих шарів рідини, де відбуваються низькочастотні коливання [13]; $m_1, ..., m_4$ – маси мостів (разом із колесами); $m_{\text{Т}}^{ш}$ – сумарні обертальні маси коліс трактора та двигуна, що приведені до руху шини по дорозі,

$$m_{\text{Т}}^{ш} = (2 J_{\text{Т}}^{к} + J_{м}^{дв} i_{\text{тр}}^{\ 2}) / r_{к}^{\ 2};$$

$J_{\text{Т}}^{к}$ – момент інерції моста трактора; $J_{м}^{дв}$ – момент інерції маховика і валів двигуна; $i_{\text{тр}}$ – передавальне відношення трансмісії від валу двигуна до осі колеса; $r_{к}$ – радіус колеса трактора; $m_{\text{П}}^{ш}$ – сумарні обертальні маси коліс цистерни, що приведені до руху шини по дорозі; $J_{\text{Т}}, J_K, J_{\text{П}}$ – моменти інерції при обертанні трактора (разом із мостами), кабіни (разом з трактористом) та цистерни (разом із рамою, мостами і рідиною) на кути $\varphi_{\text{Т}}, \varphi_K, \varphi_{\text{П}}$ відносно їх центрів мас.

Відмітимо, що в лінеарізованої моделі матриця F, яка складена із коефіцієнтів внутрішнього тертя, роз-

глядатися не буде, адже задачею динамічного аналізу є знаходження резонансних частот, а коефіцієнт демпфірування на величину цих частот майже не впливає, тому ним можна знехтувати.

Для того, щоб на початковому етапі перевірити складену лінеарізовану модель, достатньо переконатися у виконанні умови $C = C^{\mathrm{T}}$; саме ця умова відповідає третьому закону Ньютона.

На горизонтальній дорозі трактор з цистерною має нескінчену безліч положень рівноваги, оскільки при виконанні умов

$$x_{\Pi} - x_{\mathrm{T}} = const\,,\ x_K - x_{\mathrm{T}} = 0,\ \ x_{\mathrm{T}}^{ш} - x_{\mathrm{T}} = 0,\ \ x_{\Pi}^{ш} - x_{\Pi} = 0\,;\ x_j^p - x_{\Pi} = 0,\ j = 1,2,3$$

координата x_T може залишатися довільною. Тому матриця C є виродженою, і одна із частот коливань нульова.

Якщо система, що моделюється, під час руху залишається динамічне стійкою, то виконується додаткова умова $C \geq 0$, тоді всі власні числа цієї матриці – невід'ємні. Проте при значному від'ємному значенні сили R_x ця система може втрачати стійкість; при цьому одна із частот матриці C також становиться від'ємною, а у агрегаті спостерігається так званий *галопуючий резонанс*.

При формуванні пов'язаних форм коливань машинно-тракторного агрегату приведемо рівняння (2) до наступного вигляду:

$$M^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}(M^{1/2}\cdot\vec{Y}) + C\cdot M^{-1/2}\left(M^{1/2}\cdot\vec{Y}\right) = \vec{0}\ ,\ \text{тоді}\ \ \frac{d^2}{dt^2}(M^{1/2}\cdot\vec{Y}) + M^{-1/2}C\cdot M^{-1/2}\left(M^{1/2}\cdot\vec{Y}\right) = \vec{0}\ ,$$

або

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{Y}^* + C^*\cdot\vec{Y}^* = \vec{0}\ ,\ \text{де}\ \ C^* = M^{-1/2}\cdot C\cdot M^{-1/2} > 0\,,\ \vec{Y}^* = M^{1/2}\cdot\vec{Y}\,.$$

Звідки отримаємо рівняння для власних кутових частот ω:

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0\,.$$

Матриці жорсткостей C для машинно-тракторного агрегату з П-цистерною (з індексом «а»), а для агрегату з НП-цистерною (з індексом «б») можуть бути наведені в блочному вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & \left[C_{TX}^T\right] \\ \left[\Theta_1^T\right] & [C_{\Pi}] & \left[C_{\Pi X}^T\right] \\ [C_{TX}] & [C_{\Pi X}] & [C_X] \end{bmatrix} + \frac{R_x}{l_{\partial}}\cdot\begin{bmatrix} \left[C_T^{\Psi}\right] & [C_{T\Pi}] & \left[\Theta_2^T\right] \\ \left[C_{T\Pi}^T\right] & \left[C_{\Pi}^{\Psi}\right] & \left[\Theta_2^T\right] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x\cdot\begin{bmatrix} \left[C_T^R\right] & [\Theta_1] & \left[\Theta_2^T\right] \\ \left[\Theta_1^T\right] & \left[C_{\Pi}^R\right] & \left[\Theta_2^T\right] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix}; \qquad (3а)$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & \left[C_{TX}^T\right] \\ \left[\Theta_1^T\right] & [C_{\Pi}] & \left[C_{\Pi X}^T\right] \\ [C_{TX}] & [C_{\Pi X}] & [C_X] \end{bmatrix} + C_y\cdot\begin{bmatrix} \left[C_T^{\Psi}\right] & [C_{T\Pi}] & \left[\Theta_2^T\right] \\ \left[C_{T\Pi}^T\right] & \left[C_{\Pi}^{\Psi}\right] & \left[\Theta_2^T\right] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x\cdot\begin{bmatrix} \left[C_T^R\right] & [\Theta_1] & \left[\Theta_2^T\right] \\ \left[\Theta_1^T\right] & \left[C_{\Pi}^R\right] & \left[\Theta_2^T\right] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix}, \qquad (3б)$$

де квадратні блоки C_{T}, C_{T}^{Ψ}, $C_{\mathrm{T}}^{\mathrm{R}}$, C_{Π}, C_{Π}^{Ψ}, C_{Π}^{R}, $C_{\mathrm{TП}}$ – це матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться, відповідно, до трактора, цистерни та агрегату в цілому і мають однаковий розмір $[7\times 7]$,

$$C_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1,2,5,6} c_j^a & -c_1^a & -c_2^a & -\sum\limits_{j=5,6} c_j^a & 0 & c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_{\mathrm{T}}\psi_{\mathrm{T}} & c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* \\ -c_1^a & c_1^a + c_1^{ш} & 0 & 0 & 0 & -c_1^{ш} L_1 - G_{\mathrm{T}}^1\psi_{\mathrm{T}} & 0 \\ -c_2^a & 0 & c_2^a + c_2^{ш} & 0 & 0 & c_2^{ш} L_2 - G_{\mathrm{T}}^2\psi_{\mathrm{T}} & 0 \\ -\sum\limits_{j=5,6} c_j^a & 0 & 0 & \sum\limits_{j=5,6,7} c_j^a & -c_7^a & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* \\ 0 & 0 & 0 & -c_7^a & c_7^a & 0 & c_7^a l_7^* \\ c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_{\mathrm{T}}\psi_{\mathrm{T}} & -c_1^{ш} L_1 - G_{\mathrm{T}}^1\psi_{\mathrm{T}} & c_2^{ш} L_2 - G_{\mathrm{T}}^2\psi_{\mathrm{T}} & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & 0 & \sum\limits_{j=1,2} c_j^a L_j^2 + \sum\limits_{j=5,6} c_j^a l_j^2 + \\ & & & & & +c_x^{\partial} H_{\mathrm{T}}^2 + c_{\mathrm{T}}^{ш} h_{\mathrm{T}}^2 + G_{\mathrm{T}} h_{\mathrm{T}} & -\sum\limits_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j \\ c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* & 0 & 0 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* & c_7^* l_7^* & -\sum\limits_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j & \sum\limits_{j=5,6,7} c_j^a l_j^{*2} + \\ & & & & & & +c_x^{\kappa} h_K^2 + G_K h_K \end{bmatrix};$$

$$C_{\Pi}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=3,4} c_j^a & -c_3^a & -c_4^a & G_{\Pi}\psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^a & c_3^a+c_3^{ш} & 0 & -c_3^{ш}L_3-G_{\Pi}^3\psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ -c_4^a & 0 & c_4^a+c_4^{ш} & c_4^{ш}L_4-G_{\Pi}^4\psi_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ G_{\Pi}\psi_{\Pi} & -c_3^{ш}L_3-G_{\Pi}^3\psi_{\Pi} & c_4^{ш}L_4-G_{\Pi}^4\psi_{\Pi} & \sum\limits_{j=3,4} c_j^{ш}L_j^2+\sum\limits_{k=1}^{3}(c_k^p h_k^2+G_k^p h_k)+ & -c_1^p h_1-G_1^p & -c_2^p h_2-G_2^p & -c_3^p h_3-G_3^p \\ & & & +c_x^{\partial}H_{\Pi}^2+c_{\Pi}^{ш}h_{\Pi}^2+G_{\Pi}h_{\Pi} & & & \\ 0 & 0 & 0 & -c_1^p h_1-G_1^p & c_1^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2^p h_2-G_2^p & 0 & c_2^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3^p h_3-G_3^p & 0 & 0 & c_3^p \end{bmatrix};$$

$$C_{\Gamma}^{\Psi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{\Gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{\Gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\quad C_{\Pi}^{\Psi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{\Pi} & 0 & 0 & l_{\Pi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\quad C_{\Gamma\Pi}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{\Gamma} & 0 & 0 & l_{\Gamma}l_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{\Gamma}^{R}=diag(0,0,0,0,0,l_{\Gamma},0);\quad C_{\Pi}^{R}=diag(0,0,0,l_{\Pi},0,0,0);$$

квадратний блок C_X – це матриця зв'язку повздовжніх переміщень (її розмір $[5\times5]$),

$$C_X=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} c_k^p+c_x^{\partial}+c_{\Pi}^{ш} & -c_x^{\partial} & 0 & 0 & -c_{\Pi}^{ш} \\ -c_x^{\partial} & c_x^{\partial}+c_x^{к}+c_{\Gamma}^{ш} & -c_x^{к} & -c_{\Gamma}^{ш} & 0 \\ 0 & -c_x^{к} & c_x^{к} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\Gamma}^{ш} & 0 & c_{\Gamma}^{ш} & 0 \\ -c_{\Pi}^{ш} & 0 & 0 & 0 & c_{\Pi}^{ш} \end{bmatrix};$$

$\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$ – нульові матриці розмірів $[7\times7]$, $[5\times7]$ та $[5\times5]$, які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів; $C_{TX}, C_{\Pi X}$ – неквадратні матриці жорсткості зв'язку, що мають розмір $[5\times7]$,

$$C_{TX}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x^{\partial}H_{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_K-c_x^{\partial}H_{\Gamma}+c_{\Gamma}^{ш}h_{\Gamma} & -c_x^{к}h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_K & c_x^{к}h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{\Gamma}^{ш}h_{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{\Pi X}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{j=1}^{3}(c_j^p h_j+G_j^p)-G_y-c_x^{\partial}H_{\Pi}+c_{\Pi}^{ш}h_{\Pi}-R_y & -c_1^p & -c_2^p & -c_3^p \\ 0 & 0 & 0 & c_x^{\partial}H_{\Pi}+G_y+R_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{\Pi}^{ш}h_{\Pi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В цих матрицях з літери «c» починаються позначення коефіцієнтів жорсткості. А саме, $c_1^a, c_2^a, ..., c_7^a$ – це жорсткість у вертикальному напрямку амортизаторів чи ресор мостів трактора і цистерни, опор кабіни, сидіння водія, відповідно; $c_1^{ш}, c_2^{ш}, ..., c_4^{ш}$ – сумарна радіальна жорсткість шин на відповідному мосту трактора або цистерни; $c_{\Gamma}^{ш}, c_{\Pi}^{ш}$ – сумарна тангенціальна жорсткість шин трактора або причіпного агрегату, підрахована для усіх мостів разом; $c_x^{к}$ – сумарна жорсткість опор кабіни у горизонтальному напрямку; $c_x^{\partial}, c_y^{\partial}$ – жорсткість дишла у

горизонтальному та вертикальному напрямках; c_1^p, c_2^p, c_3^p – коефіцієнти жорсткості зв'язку між шаром рідини та оболонкою цистерни, саме ці коефіцієнти використовуються у рівняннях низькочастотних коливань рідини [13]

$$m_k^p \cdot d^2 x_k^p / dt^2 + c_k^p \cdot x_k^p = c_k^p \cdot (x_\Pi + h_k \cdot \varphi_\Pi) + G_k^p \cdot \varphi_\Pi, \quad k = 1, 2, 3,$$

m_k^p – маса k – го шару; G_k^p – сила ваги цього шару. На рис. 4 наведено графіки, що характеризують перерозподіл рідини в цистерні при коливаннях її оболонки у площині головного вертикального перерізу.

Величини, які починаються з літери «l», як і на рис. 2, 3, позначають відстані у горизонтальному напрямку. Так $l_1 - l_6$ – це відстань від центру мас трактора або цистерни до їх мостів, опор кабіни, сидіння, відповідно; l_5^*, l_6^*, l_7^* – від центру мас кабіни до її опор і сидіння; $l_\text{Т}$, l_Π – від точок з'єднання дишла до центру мас трактора та цистерни (для НП-цистерни точкою з'єднання є гак трактора; для П-цистерни – гак трактора і шарнір дишла на рамі причепу); l_∂ – це довжина дишла.

Величини $L_1 - L_4$ – це значення плеча сили, скореговані з урахуванням тангенціальної жорсткості шини,

$$L_1 = l_1 + (G_\text{Т} / C_\text{Т}^ш) \cdot \Psi_\text{Т}, \; L_2 = l_2 - (G_\text{Т} / C_\text{Т}^ш) \cdot \Psi_\text{Т}; \; L_3 = l_3 + (G_\Pi / C_\Pi^ш) \cdot \Psi_\Pi; \; L_4 = l_4 - (G_\Pi / C_\Pi^ш) \cdot \Psi_\Pi;$$

$\psi_\text{Т}$, ψ_Π – коефіцієнт зчеплення шин трактора та причепа (напівпричепа) з дорогою.

Для коліс цистерни коефіцієнт зчеплення визначається за формулою

$$\psi_\Pi = \psi_\text{ТР} \cdot \dot{x}_\Pi,$$

де $\psi_\text{ТР}$ – це коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від властивостей дорожнього покриття, про що мова буде у цієї ж статті далі. Для трактора цей коефіцієнт, окрім тертя, залежить від крутного моменту двигуна (рис. 5) та передавального числа трансмісії і змінюється у достатньо широких межах, а саме:

– від від'ємного значення $\psi_\text{Т} \approx -1$, яке відповідає розгону при найбільшому передавальному відношенні;

– до позитивного значення $\psi_\text{Т} = \psi_\Pi$, що відповідає руху трактора при відключеній передачі.

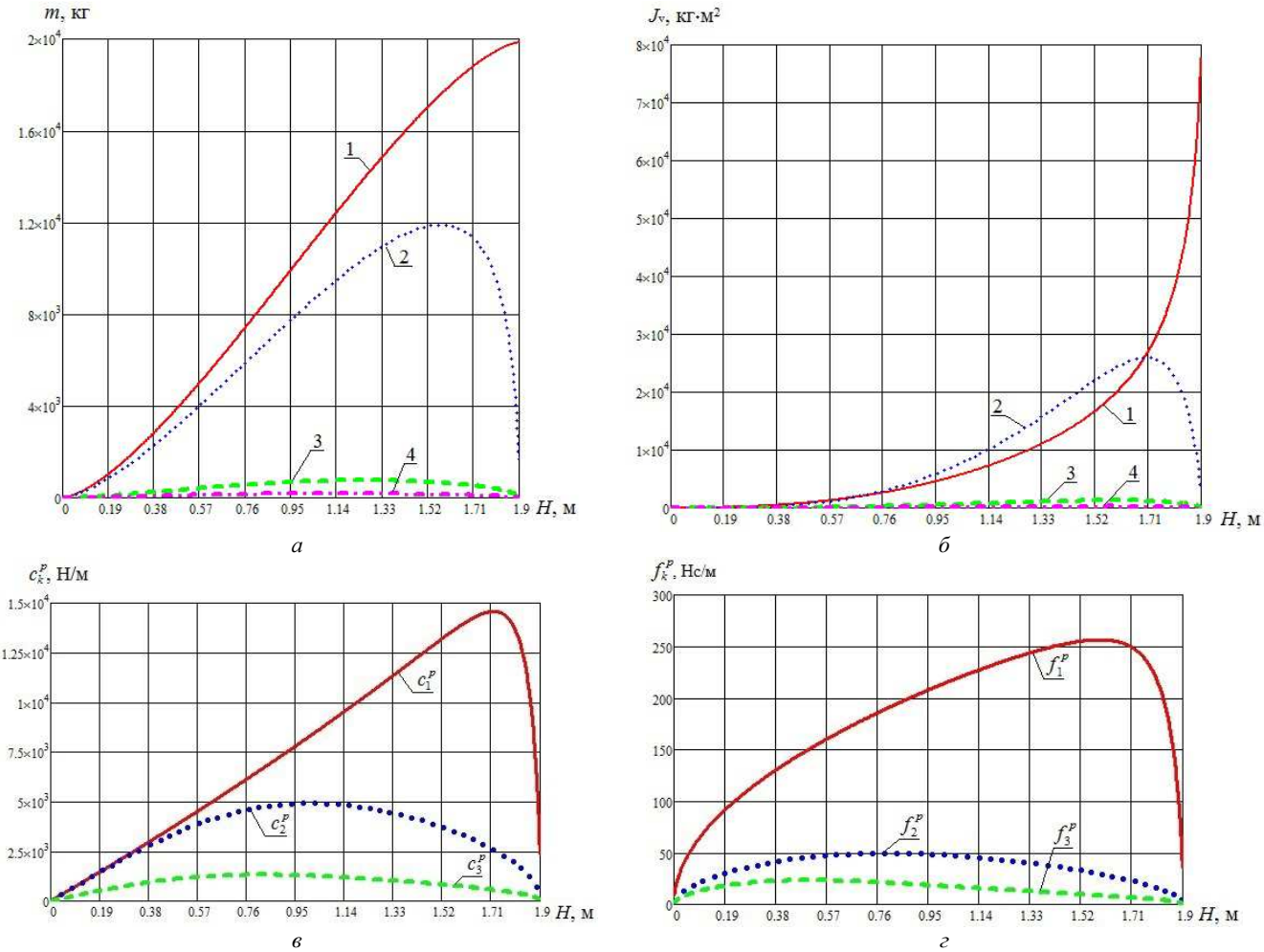


Рис. 4 – Характеристики перерозподілу рідини та діючих сил в залежності від висоти рівня рідини H :
а – маса рідини; *б* – момент інерції руху рідини в цистерні; *в* – жорсткість; *г* – коефіцієнт демпфірування;
1 – загальна залежність; 2, 3, 4 – складові, які приймають участь в коливальному процесі k – ого осцилятора.

Величини, які починаються з літери h, позначають відстані у вертикальному напрямку. Так $h_{\text{Т}}$, $h_{\text{П}}$ – це відстань від осі колеса до центру мас трактора або цистерни; $H_{\text{Т}}$, $H_{\text{П}}$ – відстані від точок приєднання зчіпного пристрою до центру мас трактора та цистерни (відповідні зміни відстаней для цистерни показано на рис.6); h_K – від центру мас кабіни до її опор; h_k, $k=1, 2, 3$ – це відстань між центрами мас k – го шару рідини та цистерни.

Літерою «G» позначено сили ваги. Так $G_{\text{Т}}$, $G_{\text{П}}$, G_K – це сила ваги трактора (разом із кабіною), причепа чи напівпричепа (разом із рідиною), кабіни трактора (разом із сидінням та трактористом); $G_{\text{Т}}^1, G_{\text{Т}}^2$, $G_{\text{П}}^3, G_{\text{П}}^4$ – частки ваги, які навантажують відповідний міст; R_y – вертикальна сила, що діє на гак трактора.

При моделюванні повздовжніх коливань МТА з причіп-цистерною вертикальна сила $R_y = 0$, а жорсткість $c_y > 0$ (її конкретне значення надано у табл. 1); для напівпричепа жорсткість $c_y = 0$, а сила знаходиться за формулою

$$R_y = G_{\text{Т}} + G_{\text{П}} - \frac{G_{\text{Т}} \cdot l_{\text{Т}}}{l_{\text{Т}} + 0.5(l_1 - l_2)} - \frac{G_{\text{П}} \cdot l_{\text{П}}}{l_{\text{П}} + 0.5(l_4 - l_3)}.$$

Величини $G_j^p = (g + a_{\text{ц.б}}) \cdot m_j^p$, як це вказано раніше, позначають силу ваги j – го шару рідини; g – це прискорення вільного падіння; $a_{\text{ц.б}}$ – центробіжне прискорення, яке на опуклих ділянках дороги корегує в межах ± 20 відсотків напруження g гравітаційного поля. Коефіцієнт пропорційності $g + a_{\text{ц.б}}$ використовується в цій моделі при переході від маси до сили ваги і в усіх інших випадках, в тому числі у моделі низькочастотних коливань рідини у цистерні. Маси m_j^p і жорсткості c_j^p визначають частоти ν_j^p вільних коливань рідини (рис. 7).

Константи та змінні параметри математичної моделі. Основні параметри трактора і цистерни, що були використані при проведенні динамічного аналізу МТА та під час його подальших розрахунків за нелінійною моделлю, наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Початкові дані для використання у математичних моделях коливального руху транспортного засобу

Максимальний крутний момент двигуна, Нм	$M_{\text{кр}}$	883	Маса остову цистерни, кг	$m_{\text{П}}$	3200
Номінальна кутова швидкість двигуна, рад/с	$\omega_{дв}$	220	Маса мостів, кг	$m_{3,4}$	1400
Діапазон зміни передавального числа трансмісії	$i_{\text{тр}}$	25.8 – 110.5	Момент інерції причепа, кНм^2	$J_{\text{П}}$	40
Радіус колеса трактора, м	r_K	0.715	Жорсткість ресор причепа, кН/м	$c_{3,4}^a$	12000
Маса рами трактора, кг	$m_{\text{Т}}$	4800	Коефіцієнт демпфірування причепа, кНс/м	f_j	12
Маса мостів трактора, кг	$m_{1,2}$	1450	Жорсткість шин причепа, кН/м	$c_j^{ш}$	3.5
Маса кабіни, кг	m_K	1000	Коефіцієнт демпфірування шин, кНс/м	$f_j^{ш}$	4.2
Маса сидіння з водієм, кг	m_C	200	Відстань від точки з'єднання зчіпного пристрою до центру мас цистерни, м	$l_{\text{П}}$	1.5
Момент інерції трактора, кНм^2	$J_{\text{Т}}$	20.5	Маса рідини в цистерні, т	m_B	0÷20
Сумарна жорсткість ресор трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	c_i^a	220; 24000	Рівень рідини в цистерні, м	H	0 ÷1.9
Коефіцієнт демпфірування ресор переднього мосту, кНс/м	f_i	12	Декремент затухання коливань рідини		0.1
Сумарна жорсткість шин трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	$c_i^{ш}$	4.2; 4.2	Відстань від точки з'єднання зчіпного пристрою до центру мас трактора, м	$l_{\text{Т}}$	2.6
Сумарний коефіцієнт демпфірування шин трактора, кНс/м – переднього мосту; – заднього мосту	$f_i^{ш}$	10.2; 10.2	Коефіцієнт в'язкого тертя: – асфальтобетон; – ґрунтова поверхня; – стерня колосових	$\psi_{\text{тр}}$	0.018; 0.03; 0.11
Повздовжня жорсткість дишла, кН/м	$c_x^{д}$	10000	Жорсткість дишла при згинанні у вертикального напрямку, кН/м	$c_y^{д}$	2000
Сумарна жорсткість опор кабіни у вертикальному напряму, кН/м – передніх; – задніх	c_i^a	10	Сумарний коефіцієнт демпфірування опор у вертикальному напрямку, кНс/м – передніх; – задніх	f_i	1
Сумарна жорсткість опор сидіння у вертикальному напряму, кН/м	c_7^a	1	Сумарний коефіцієнт демпфірування опор сидіння у верт. напрямку, кНс/м	f_i	0.9

Рис. 5 – Зовнішні характеристики двигуна.

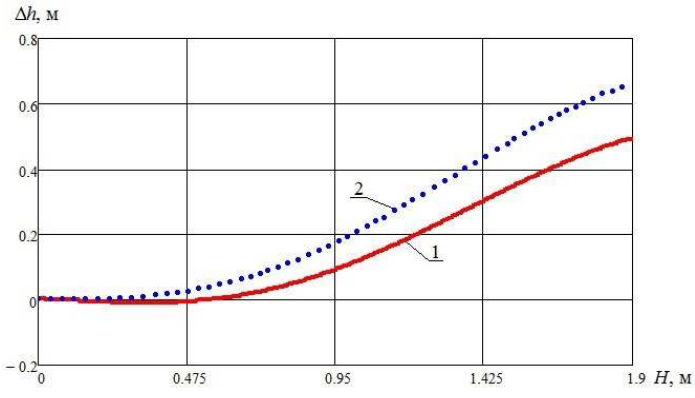


Рис. 6 – Зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня води:
1 – без врахування усадки коліс цистерни;
2 – з врахування усадки коліс цистерни.

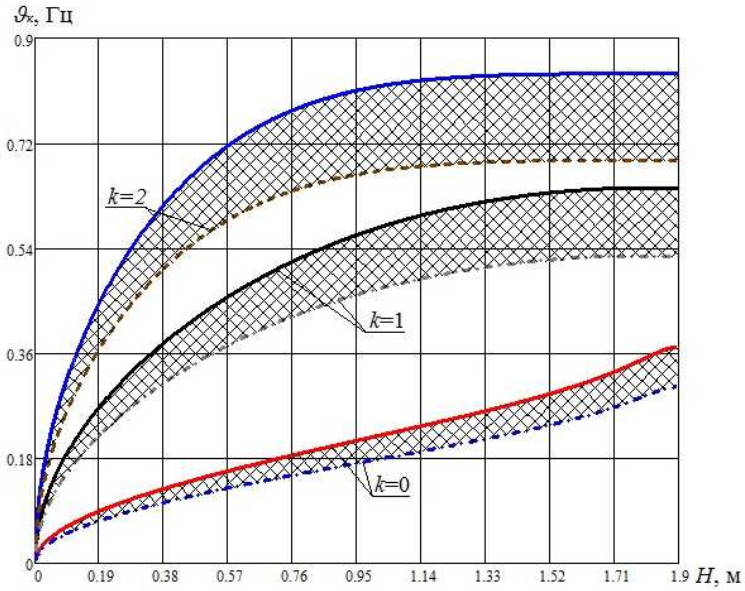


Рис. 7 – Залежність власних частот коливань рідини від висоти рівня H та центробіжного прискорення (вказано межу змін).

Таблиця 2 – Значення резонансних частот

Номер гармоніки	Частота ν, Гц	
	П-цистерна	НП-цистерна
0	0	0
1	0.27	0.27
2	0.34	0.34
3	0.54	0.54
4	0.57	0.58
5	0.72	0.72
6	0.76	0.76
7	0.86	1.02
8	1.21	1.02
9	1.32	1.35
10	1.58	1.53
11	3.96	1.69
12	4.99	4.24
13	6.26	4.99
14	6.93	6.92
15	12.56	12.56
16	21.09	21.09
17	22.33	22.32
18	22.61	22.59

Змінні параметри лінеарізованої моделі залежать від рівня рідини у цистерні (рис. 4), швидкості і прискорення руху МТА, передавального відношення, властивостей дорожнього покриття. Якщо МТА рухається без прискорення, а двигун працює на режимах зовнішньої швидкісної характеристики (рис. 5), що при сталому значенні коефіцієнта тертя $\psi_{ТР}$ визначає передавальне відношення $i_{тр}$ як функцію швидкості руху $\dot{x}_П$ та ваги $G_П$ цистерни, то ці параметри пов'язані наступними співвідношеннями:

$$R_x = \Psi_П \cdot G_П; \quad \Psi_Т = -\Psi_П \cdot (G_Т / G_П).$$

Такий режим далі називатимемо *характерним*; на ньому рейка паливного насосу дизеля є притисненою до упору і тому коливання кутової швидкості обертання колінчастого валу не впливає на крутний момент двигуна. На характерних режимах трактора ХТЗ-242К та П-цистерни BSA KTW 16 або НП-цистерни ВНЦ-20 виконується умова $\Psi_П \in [0.1; 0.2]$.

Порядок проведення та результати динамічного аналізу МТА. Використовуючи для характерного режиму складену лінеарізовану модель та конкретні значення параметрів для конструкції МТА з причепами двох типів отримуємо розподіли власних (резонансних) частот (табл. 2) при рівні рідини в цистерні $H = 1.5$ м (даний рівень обумовлено значенням максимального перерозподілу [13]). З'ясовано наявність чотирьох груп коливань.

Високі частоти – ця група має резонансні частоти, які перевищують 20 Гц; таких в системі є три. Вони передусім залежать від величини жорсткості амортизаторів заднього мосту трактора і мостів цистерни.

Середні частоти – група має частоти, які знаходяться в діапазоні від 2 до 20 Гц. Ці частоти залежать від коефіцієнтів жорсткості переднього моста трактора і дишла, а також передавального відношення варіатора.

Низькі частоти – група, яка складається з частот від 0.5 до 2 Гц. Саме ці коливання суттєво впливають на плавність руху, самопочуття тракториста, тому вони викликають найбільший інтерес.

Найнижчі частоти – в цю групу входять коливання, які мають частоти від 0 Гц (невизначеність рівноваги) до 0.5 Гц; для здоров'я людини вони є небезпечними.

Кожній частоті із табл. 2 відповідає форма власних коливань; форми для низьких частот наведено у табл. 3, 4. Нагадаємо, що коефіцієнти кожної (k – тої) власної форми було нормовано у відповідності до правила

$$\vec{Y}_j^* = M^{1/2}{}_{j,j} \cdot \vec{Y}_j,\ j = 0, 1, ..., 18 .$$

Якщо тепер утворити суми

$$T_k = 0.5 \cdot A_k{}^2 \cdot \omega_k{}^2 \cdot \sum_{j=0}^{18} (\vec{Y}_j^*)^2 ,$$

де A_k, $\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$ – амплітуда та кругова частота коливань, то ці суми відповідатимуть кінетичній енергії коливання. Тому сума квадратів координат $\vec{Y}_j^*$ дорівнює 1, а таке нормування називають *енергетичним*.

Жирним шрифтом в табл. 3, 4 показані максимальні значення, які свідчать про найбільший вплив складової на загальний коливальний процес. Оцінюючи значення складових гармонік, найбільш важливими для машинно-тракторного агрегату з П-цистерною є гармоніки № 6, 7, а з НП-цистерною – № 7, адже вони відповідатимуть досить тісному зв'язку між шкідливими коливаннями кабіни та рухами рідини у цистерні.

Таблиця 3 – Компоненти нормованих власних форм коливань для причіп-цистерни

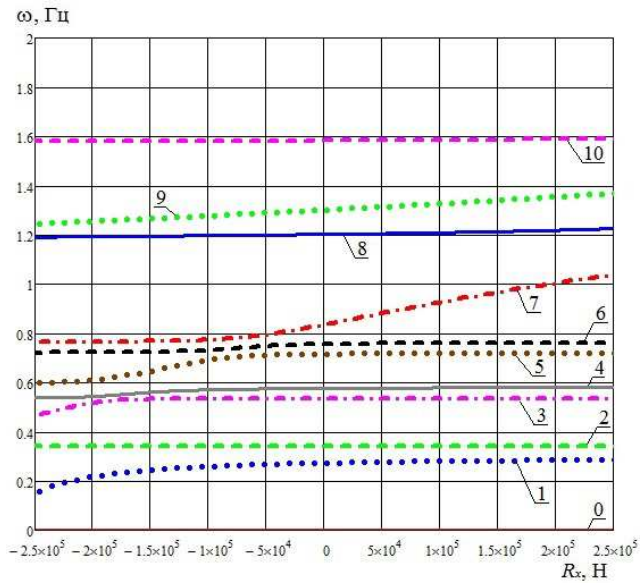
Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	***0***	***0.27***	***0.34***	***0.54***	***0.57***	***0.72***	***0.76***	***0.86***	***1.21***	***1.32***	***1.58***
$y_{\text{Т}}$	0	0.01	0.02	–0.01	0	0.14	0.01	0.16	**0.69**	**–0.43**	0.09
$y_1^{\text{м}}$	0	0.03	0	0.01	–0.02	–0.03	–0.04	–0.2	0	**–**0.06	–0.04
$y_2^{\text{м}}$	0	0	0.01	–0.01	0	0.06	0.01	0.07	**0.29**	–0.18	0.04
y_K	0	0	0.14	–0.01	0	**0.97**	–0.05	–0.14	–0.13	0.06	–0.01
y_C	0	–0.01	**0.99**	–0.02	–0.01	–0.15	0	0	0	0	0.02
$\varphi_{\text{Т}}$	0	0.09	–0.01	0.03	–0.07	–0.12	–0.12	**–0.62**	–0.21	–0.03	**–0.13**
φ_K	0	0.01	–0.03	–0.06	–0.04	–0.02	–0.03	–0.16	–0.09	–0.02	**0.98**
$y_{\text{П}}$	0	0.02	0	0.01	–0.02	–0.02	–0.06	–0.42	0.58	**0.57**	–0.01
$y_3^{\text{м}}$	0	0.01	0	0	–0.01	–0.01	–0.02	–0.1	0.14	0.14	0
$y_4^{\text{м}}$	0	0.01	0	0	–0.01	–0.01	–0.02	–0.1	0.14	0.14	0
$\varphi_{\text{П}}$	0	–0.11	0	–0.02	0.08	0.03	0.12	**0.48**	–0.04	**0.64**	0.1
x_1^p	**0.54**	**–0.83**	–0.01	0.05	–0.01	–0.01	–0.03	–0.1	0	–0.05	–0.01
x_2^p	0.14	0.08	0	**–0.3**	**0.93**	–0.01	–0.02	–0.1	0	–0.04	0
x_3^p	0.06	0.03	0	–0.03	–0.02	0.03	**0.98**	–0.19	0	–0.03	0
$x_{\text{П}}$	**0.57**	**0.35**	0	–0.13	–0.14	0	–0.04	0.08	0	0.05	–0.01
$x_{\text{Т}}$	**0.53**	**0.34**	0	–0.12	–0.14	0	–0.04	0.05	0	0.01	–0.01
x_K	0.17	0.16	0.02	**0.93**	**0.26**	0.01	0.02	0.02	0	0	0.07
$x_{\text{Т}}^{\text{ш}}$	0.21	0.13	0	–0.05	–0.05	0	–0.02	0.02	0	0	0
$x_{\text{П}}^{\text{ш}}$	0.1	0.06	0	–0.02	–0.02	0	–0.01	0.02	0	0.02	0

Таблиця 4 – Компоненти нормованих власних форм коливань для напівпричіп-цистерни

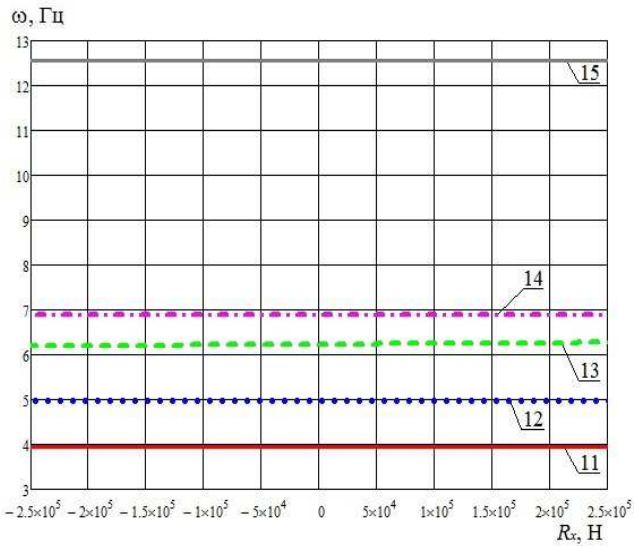
Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	***0***	***0.27***	***0.34***	***0.54***	***0.58***	***0.72***	***0.76***	***1.02***	***1.02***	***1.35***	***1.53***	***1.69***
$y_{\text{Т}}$	0	0	–0.02	–0.01	0	0.14	0	**–0.42**	0.28	–0.06	**0.56**	**–0.5**
$y_1^{\text{м}}$	0	0	0	0.01	0	–0.02	0	0.18	–0.11	–0.01	0.14	–0.28
$y_2^{\text{м}}$	0	0	–0.01	–0.01	0	0.06	0	–0.18	0.12	–0.03	**0.23**	–0.2
y_K	0	0	–0.14	–0.01	0	**0.97**	0	0.15	–0.1	0.01	–0.06	0.04
y_C	0	0	**–0.99**	–0.02	0	–0.15	0	0	0	0	0.02	0.01
$\varphi_{\text{Т}}$	0	0	0.02	0.03	0.01	–0.1	0	**0.63**	**–0.4**	–0.01	0.18	**–0.52**
φ_K	0	0	0.03	–0.07	–0.02	–0.02	0	0.2	–0.13	–0.01	**0.76**	**0.6**

Продовження таблиці 4												
$y_{\text{П}}$	0	–0.03	0	0	0.03	0	0.03	**0.47**	0.7	**–0.43**	–0.03	0.02
$y_3^{\text{м}}$	0	–0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.12	0.17	–0.1	–0.01	0.01
$y_4^{\text{м}}$	0	–0.01	0	0	0.01	0	0.01	0.11	0.17	–0.11	–0.01	0.01
$\varphi_{\text{П}}$	0	–0.11	0	0	0.08	0	0.07	0.22	**0.38**	**0.88**	0.04	–0.03
x_1^p	**0.54**	**–0.83**	0	0.04	–0.01	0	–0.01	–0.03	–0.06	–0.07	0	0
x_2^p	0.14	0.08	0	**–0.26**	**0.95**	0	–0.01	–0.03	–0.05	–0.05	0	0
x_3^p	0.06	0.03	0	–0.03	–0.02	0	**0.99**	–0.03	–0.05	–0.04	0	0
$x_{\text{П}}$	**0.57**	**0.36**	0	–0.13	–0.14	0	–0.05	0.03	0.05	0.07	–0.01	–0.01
$x_{\text{Т}}$	**0.53**	**0.34**	0	–0.12	–0.13	0	–0.05	0.01	0.02	0.01	–0.01	–0.01
x_K	0.17	0.15	–0.02	**0.94**	0.22	0.01	0.02	–0.01	0	0	0.05	0.05
$x_{\text{Т}}^{\text{ш}}$	0.21	0.13	0	–0.05	–0.05	0	–0.02	0.01	0.01	0	0	0
$x_{\text{П}}^{\text{ш}}$	0.1	0.06	0	–0.02	–0.02	0	–0.01	0.01	0.01	0.02	0	0

В процесі розрахунку отримуємо залежності власних (резонансних) частот від значення поздовжньої сили R_x, що діє на пристрій (рис. 8, 9), та від рівня рідини H (рис. 10, 11).

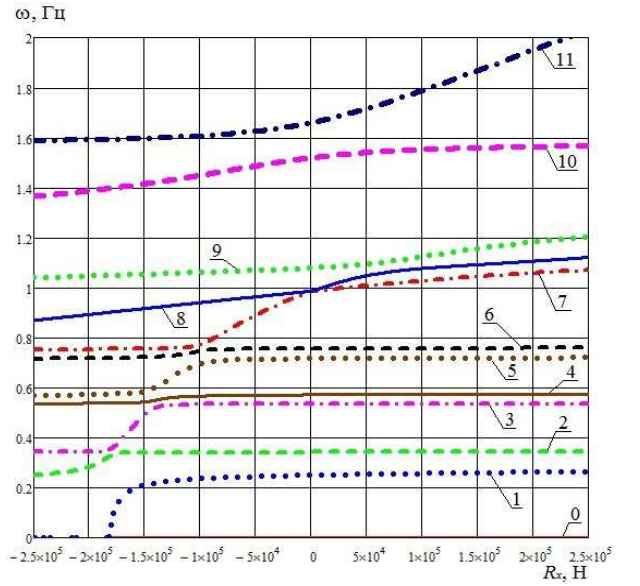


а

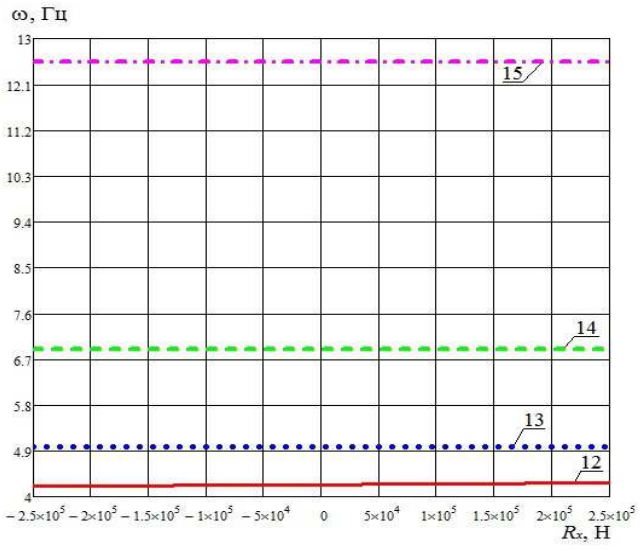


б

Рис. 8 – Залежність власних (резонансних) частот від поздовжньої сили R_x для агрегату з П-цистерною (*а, б*).

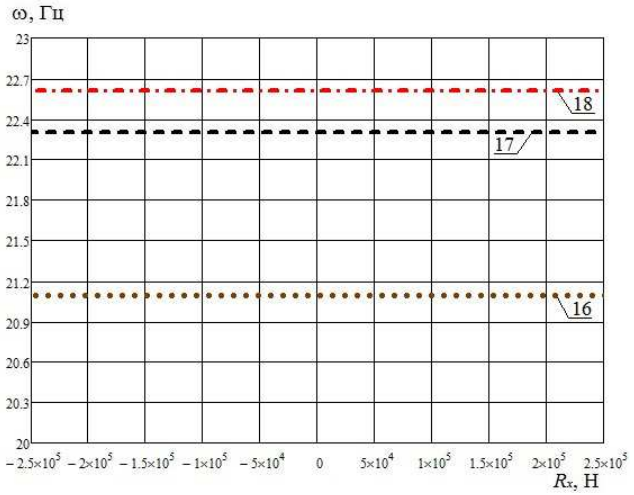


а



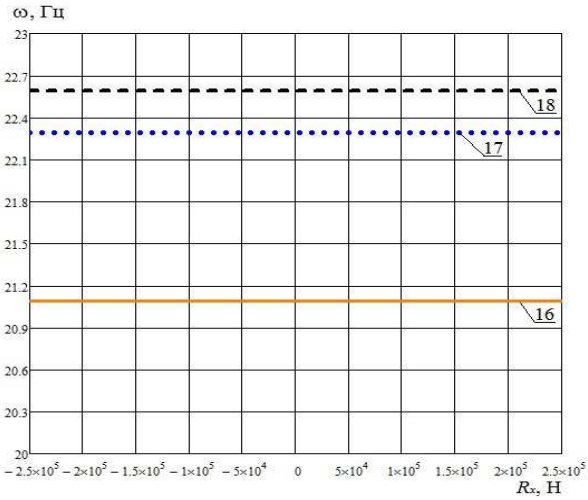
б

Рис. 9 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для агрегату з НП-цистерною (*а, б*).



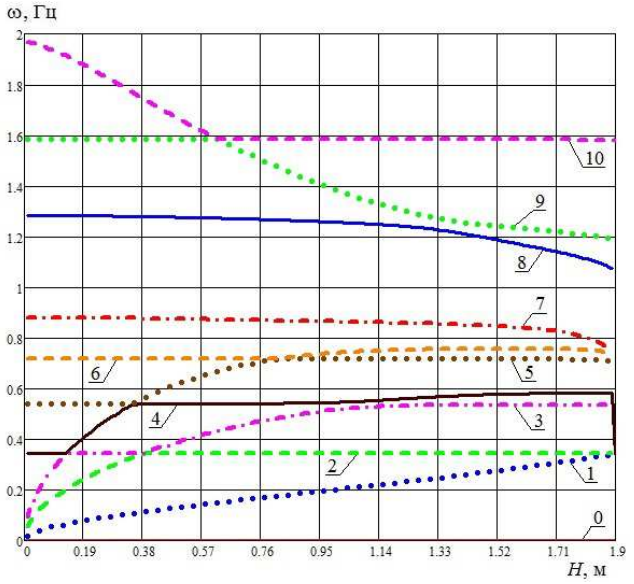
в

Рис. 8 – Залежність власних (резонансних) частот від поздовжньої сили R_x для агрегату з П-цистерною (*в*).

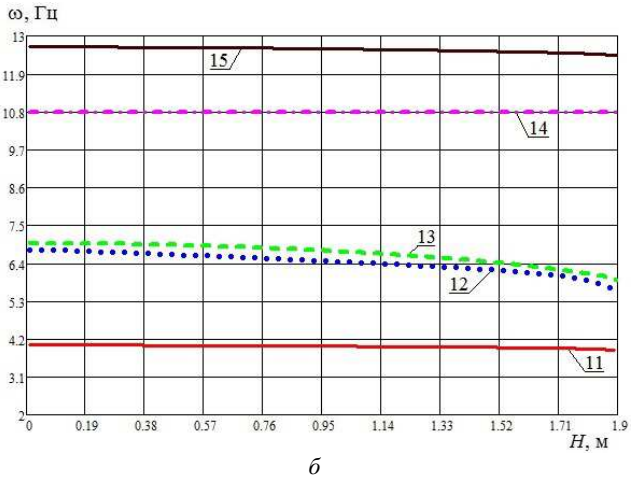


в

Рис. 9 – Залежність власних частот від поздовжньої сили R_x для агрегату з НП-цистерною (*в*).

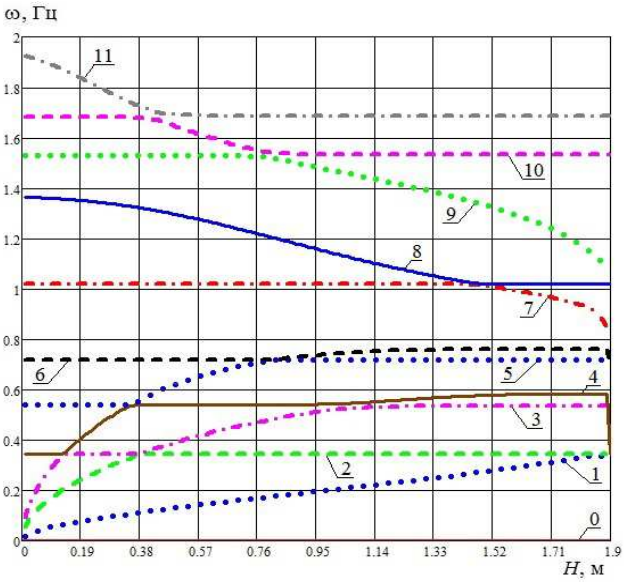


а

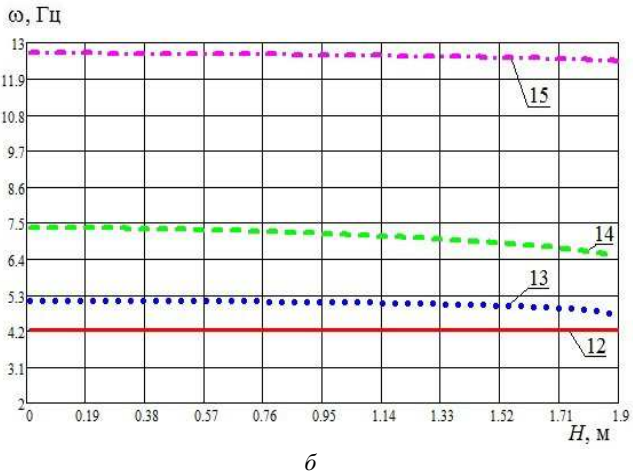


б

Рис. 10 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з П-цистерною (*а, б*).

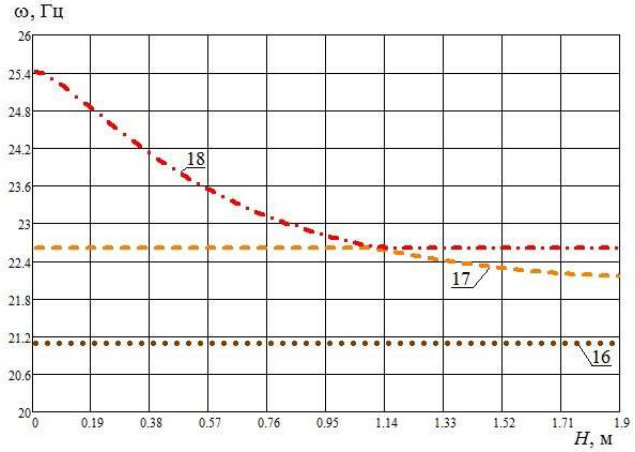


а



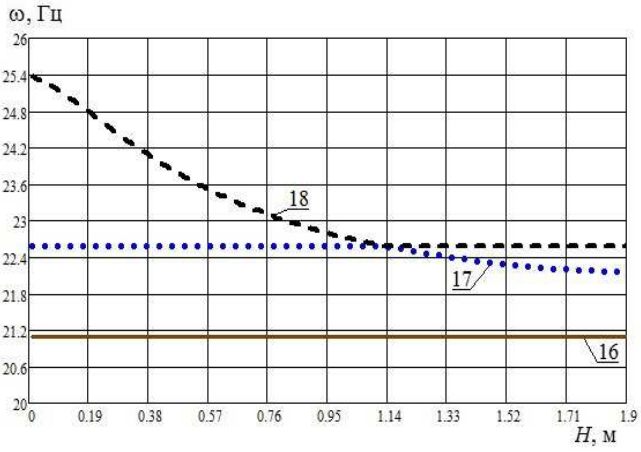
б

Рис. 11 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з НП-цистерною (*а, б*).



в

Рис. 10 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з П-цистерною (*в*).



в

Рис. 11 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з НП-цистерною (*в*).

Аналізуючи отримані залежності, зробимо висновок про те, що поздовжня сила R_x, що діє на пристрій, слабко впливає на власні (резонансні) частоти коливань МТА, на відміну від рівня рідини H, який має істотний вплив на частоти. Порівнюючи результати з рис. 4, 5, встановимо, що сила R_x забезпечує більшу зміну характеристик коливань у випадку транспортування НП-цистерни, ніж П-цистерни.

При русі МТА по дорозі зі складним рельєфом на нього у різні проміжки часу діє тягова сила ($R_x > 0$) та сила, що штовхає ($R_x < 0$). В першому випадку коливальна система має 3 (№ 7 – 9) змінні гармоніки для П-цистерни та 7 (№ 7 – 12) – для НП-цистерни. При виникненні від'ємної сили коливальна система має 6 (№ 1, 3, 5, 6, 8, 9) змінних гармонік для П-цистерни та 12 (№ 1 – 12) – для НП-цистерни. Така тенденція свідчить про якісний й кількісний вплив перерозподілу мас рідини на трактор через поздовжню силу R_x.

На рис. 8, 9, *а* можливо помітити виникнення динамічної нестійкості, коли частоти перетинають нульову лінію, після чого становляться уявними величинами, а замість гармонічних розв'язків ми отримаємо експоненти. Як бачимо, це виникає явище галопуючого резонансу у вертикальній площині, яке спостерігається при значному від'ємному значенні сили R_x, що відповідає руху МТА з гори під значним кутом. Фактори, які впливають на це явище, проаналізовано на рис. 12; зменшення жорсткості шини виникає при недостатньому тиску повітря у камері, а зазначені зміни коефіцієнтів зчеплення шин з дорогою відбуваються під час експлуатації транспортного засобу. При моделюванні результатів, які наведено на рис. 8, рівень рідини в цистерні був обраний максимальним, бо, як з'ясовано,

коливання рідини у цистерні на границю динамічної стійкості не впливають.

Як свідчать ці данні, МТА із НП-цистерною може стійко рухатися при більш значних нахилах дороги, ніж МТА із П-цистерною. Крім того, у випадку П-цистерни на границю динамічної стійкості суттєвий вплив чинить місце розміщення рухомої вісі шарніра на рамі цистерни, а саме відстань $l_П$. І, як виявилося за результатами дослідження,

вісь шарніра доречне розміщувати не з краю, а значно ближче до центру мас рами.

Окремо слід виділити те, що графіки частот, які спостерігаються на рис. 8, 9 не перетинаються та мають зламаний вигляд, а на рис. 10, 11 вони перетинаються. До того, при наближені спектральних значень одне до одного, спостерігається своєрідна «взаємодія» відповідних гармонік (наприклад, гармоніки 3 і 4 у табл. 2 або 7 і 8 у табл. 3). Це свідчить про такі особливості руху спектру у пучках лінійних операторів [16, 17], які потребують додаткового теоретичного дослідження.

Рекомендації щодо спрощення розрахункової моделі. На основі аналізу результатів динамічного аналізу встановлено можливість і доречність цілої низки спрощень математичної моделі. Перелічимо їх із додаванням необхідних пояснень.

Маса заднього моста об'єднується з остовом (рамою) трактора, а мостів причіпного агрегату з його платформою. При цьому жорсткість мостів приводиться до жорсткості шин за правилом обернених величин, а саме:

$$1/c_\Sigma = 1/c_1 + 1/c_2 \cdot$$

Коливання рам трактора та цистерни (разом з їхніми мостами) у горизонтальному напрямку вважаються синфазними, тобто поздовжня податливість дишла приймається нескінченно великою, і відповідний силовий зв'язок змінюється на кінематичний. Зауважимо, що об'єднання не стосується горизонтального руху кабіни і сидіння, які і надалі розглядаються як окрема маса.

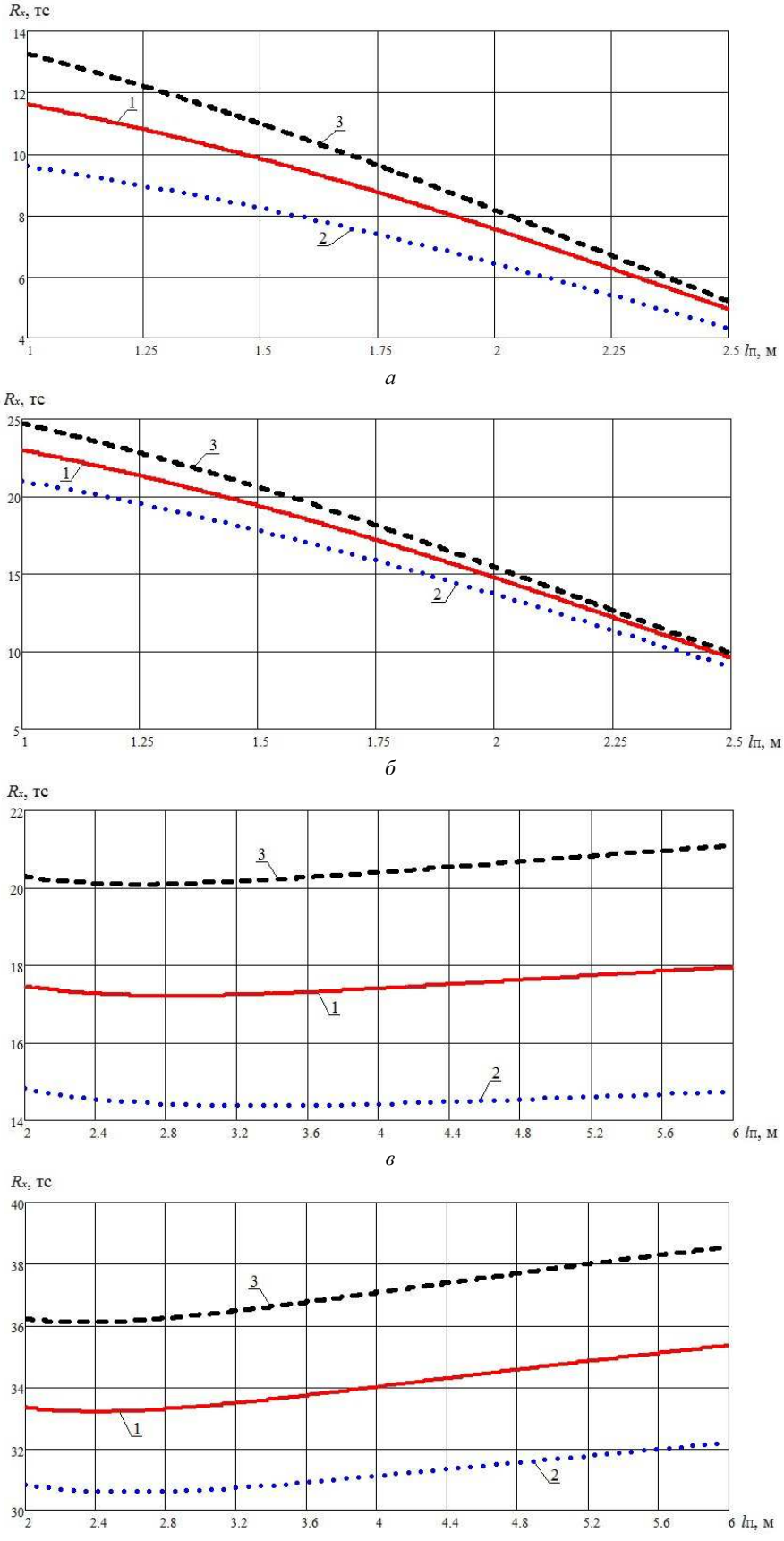


Рис. 12 – Залежність граничної динамічної стійкості по повздовжній складовій силі від розміщенням шарніра в причіпному агрегаті:
а, *б* – для причіп-цистерни; *в*, *г* – для напівпричіп-цистерни; *а*, *в* – при 50 % від значення стандартної жорсткості шин; *б*, *г* – стандартна жорсткість шин; 1 – $\psi_{\text{Т}} = 0$ та $\psi_{\text{П}} = 0$; 2 – $\psi_{\text{Т}} = 0.5$ та $\psi_{\text{П}} = -0.5$; 3 – $\psi_{\text{Т}} = -0.5$ та $\psi_{\text{П}} = -0.5$.

Тангенціальною податливістю шин та крутильною податливістю елементів трансмісії можливо знехтувати, що дає змогу привести момент інерції двигуна та шин до інерційних мас трактора (рис. 13) та причепа.

У моделі рідини третім поверхневим шаром, в наслідок його малої маси (рис. 5), можна знехтувати, і об'єднати відповідну масу із масою оболонки цистерни.

У випадку дослідження МТА з НП-цистерною показник жорсткості c_y^{∂} можна вважати нескінченно великим, і у математичній моделі замінити відповідний силовий зв'язок на кінематичний.

Як наслідок зроблених та втілених рекомендацій, кількість динамічних параметрів, що моделюються диференціальними рівняннями другого порядку, скорочується з 19 до 11, і це число добре відповідає кількості низькочастотних гармонік, які були наведені у табл. 2, 3.

Зауважимо, що динамічний аналіз спрощеної моделі можливо проводити за допомогою тих самих матриць (3), якщо відповідні коефіцієнти жорсткості зв'язку між масами, що об'єднуються, збільшити на декілька порядків. Дослідження довело, що після вказаної трансформації група низьких частот практично не змінюється.

Розрахункові схеми нелінійних моделей. Для комплексного формування математичної моделі руху вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень колісного трактора з цистерною необхідно побудувати розрахункові схеми з виділенням основних складових, які діють при русі по нерівній поверхні. Зауважимо, що як наслідок конструкції з'єднання дишла та крюка трактора, нерівності профілю дороги у поперечному напрямі призводять до відокремлених коливань трактора або цистерни, тобто коливання рідини на плавність руху трактора (яку розуміють у сенсі збереження здоров'я тракториста) не впливають. Тому під нерівностями шляху у цій роботі ми будемо розуміти їх миттєві середні значення для лівого та правого колеса на кожному із чотирьох мостів окремо; саме ці фактори збуджують пов'язані коливання, і для їх аналізу достатньо застосовувати так звані *велосипедні розрахункові схеми*, які й показано на рис. 13, 14.

Інша схема збудження пов'язаних коливань діє при повороті транспортного засобу. Проте, на відміну від нерівностей, під час руху повороти зустрічаються епізодично, а в паузах збуджені ними коливання затухають. Тому аналіз пов'язаних коливань трактора і цистерни з рідиною, які збуджуються під час поворотів шляху, буде досліджено у іншій публікації.

Оскільки дана стаття спрямована на формування комплексної оцінки пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни, то цілком доцільно наводити математичний апарат, розбивши всі складові на групи. Тобто, розглядати окремо вертикальні, поздовжні та кутові переміщення остова, кабіни, сидіння трактора, а також платформу цистерни та рідини, що знаходиться в ній. При цьому, оскільки кути передачі зусилля між трактором і причепом є малими, повздовжні коливання більшості зосереджених мас (корпусів трактора і цистерни, мостів і шин, але не рідини у цистерні або кабіни з сидінням) припустимо вважати синфазними.

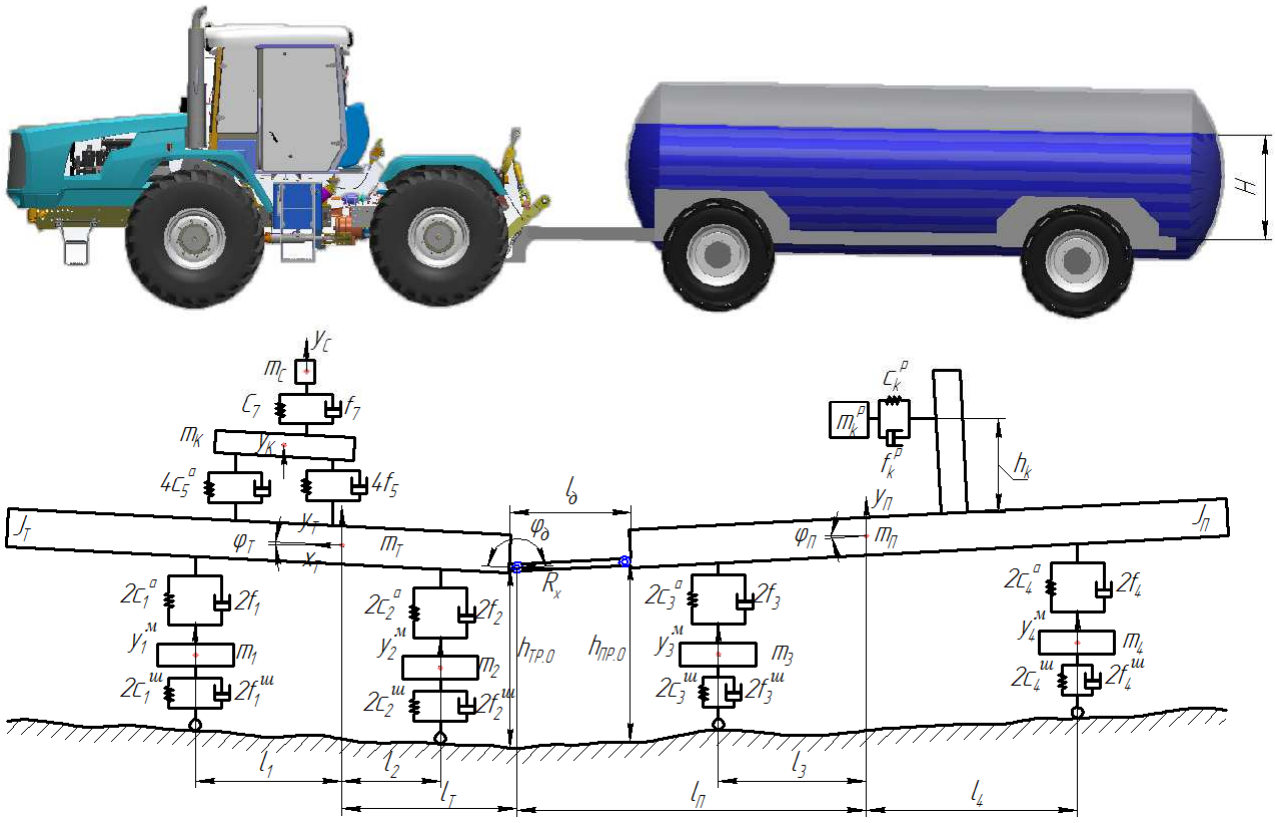


Рис. 13 – Розрахункова схема П-цистерни з двома колісними парами.

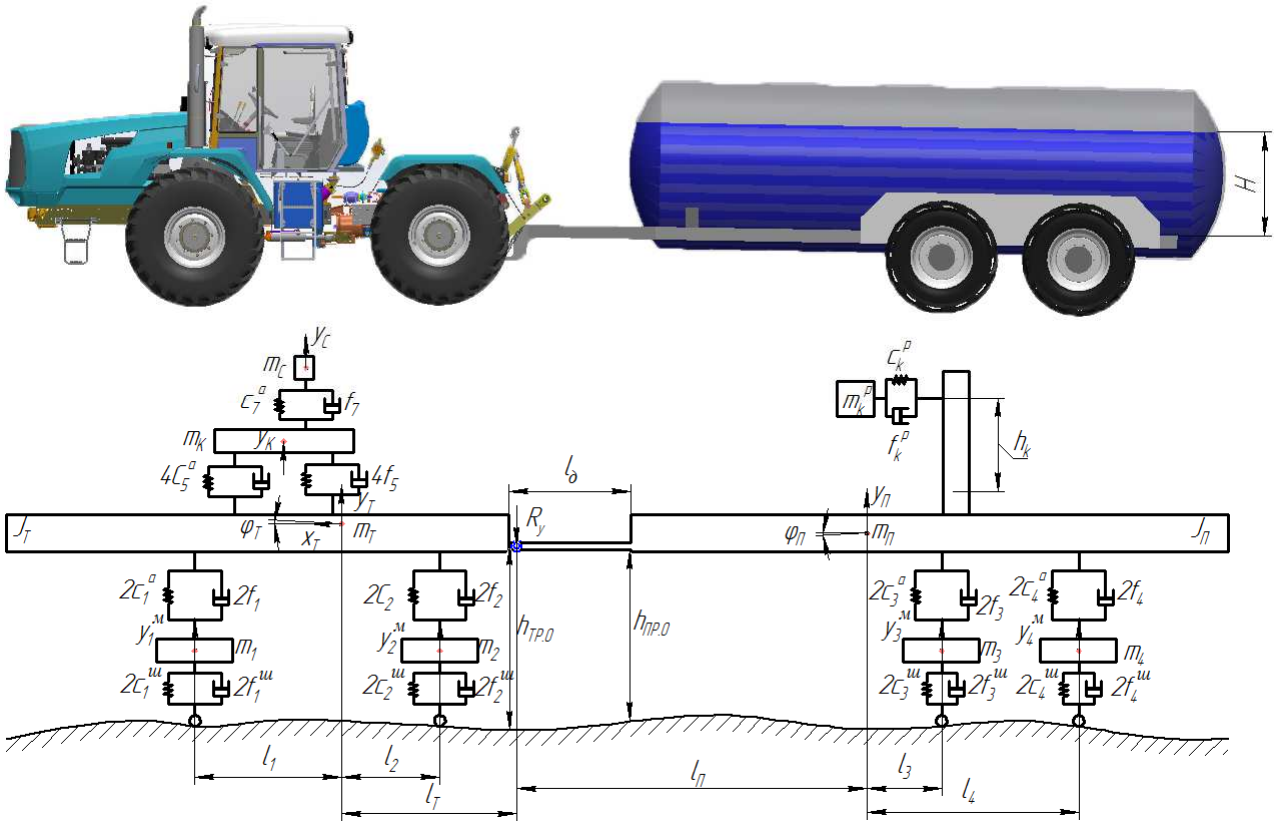


Рис. 14 – Розрахункова схема НП-цистерни з двома колісними парами.

В рівняннях, що наведено нижче, для опису динамічних характеристик ми у більшості випадків зберегли ті ж самі позначення, що вище було застосовано у елементах матриць. Надані у тексті підстрочні пояснення, головним чином, стосуються наступних позначень:

- для окремих діючих сил, які у лінеаризованій моделі не конкретизувалися;
- для коефіцієнтів тертя, які у лінеаризованій моделі не використовувалися;
- для чинників, які збуджують коливання.

Рівняння з додатковим позначенням «а» у його номері дійсне для колісного трактора в поєднанні з П-цистерною (рис. 13), а з позначенням «б» – для трактора з НП-цистерною (рис. 14).

Математична модель коливань рухомих вузлів трактора описується наступними рівняннями.

– Вертикальні переміщення корпусу, переднього моста, кабіни та сидіння відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

$$m_{\text{Т}} \cdot \ddot{y}_{\text{Т}} = \sum P_{\text{ТР}} \tag{4а}$$

або

$$m_{\text{Т}} \cdot \ddot{y}_{\text{Т}} = \sum P_{\text{ТР}} - R_y; \tag{4б}$$

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1^{м} = P_1^{м} - P_1 \ ; \tag{5}$$

$$m_K \cdot \ddot{y}_K = \sum_{l=5}^{6} P_l - P_C; \tag{6}$$

$$m_C \cdot \ddot{y}_C = P_C \, , \tag{7}$$

де похідна за часом позначена крапкою, а діючі сили визначаються за формулами

$$\sum P_{\text{ТР}} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{м} - \sum_{l=5}^{6} P_l + R_x \cdot (\varphi_\partial - \psi_{\text{Т}} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_П - \dot{\varphi}_T)); \tag{8}$$

$$P_1 = c_1^a \cdot (y_1^{м} - y_{T1}) + f_1 \cdot (\dot{y}_1^{м} - \dot{y}_{T1}); \; P_l = c_l^a \cdot \left((y_{\text{Т}} \mp l_l \cdot \varphi_{\text{Т}}) - (y_K \mp l_l \cdot \varphi_K) \right) + f_l \cdot \left((\dot{y}_{\text{Т}} \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_{\text{Т}}) - (\dot{y}_K \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_K) \right), \; l = 5,6;$$

$$P_1^{м} = c_1^{ш} \cdot \left(y_{\text{ГР1}} - y_1^{м} \right) + f_1^{ш} \cdot \left(\dot{y}_{\text{ГР1}} - \dot{y}_1^{м} \right) + G_1^{м}; \;\; P_2^{м} = c_2^{ш} \cdot (y_{\text{ГР2}} - y_{T2}) + f_2^{ш} \cdot (\dot{y}_{\text{ГР2}} - \dot{y}_{T2}) + G_2^{м};$$

$$P_{ГРТР} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{м} \dot{y}_{ГРi} + \dot{x}_T \psi_{ТР} \sum_{i=1}^{2} P_i^{м}; \;\; y_{\text{Т}i} = y_{\text{Т}} \mp l_i \cdot \varphi_{\text{Т}}, \;\; i = 1,2; \;\; P_C = c_7^a \cdot (y_K + l_7 \cdot \varphi_K - y_C) + f_7 \cdot (\dot{y}_K + l_7 \cdot \dot{\varphi}_K - \dot{y}_C).$$

– Поздовжні переміщення трактора (крім кабіни) і цистерни (крім поверхневих шарів рідини) відбуваються із однаковою швидкістю та прискоренням, що відповідає рівнянню поступального руху центра мас:

$$\left(m_{\text{Т}}+\sum_{i=1}^{4}m_i+m_{\text{П}}+m_P+m_{\text{DV}}\right)\cdot\ddot{x}_{\text{Т}}=\left(M_{\text{кр}}\cdot i_{\text{тр}}\right)\big/r_K-P_{\text{BΣ}}-P_{\Gamma PTP}-P_{\text{ГРПР}}+P_K\,; \tag{9}$$

де сила спротиву причепу об'єднує вплив тертя та кута нахилу дороги,

$$P_{\Gamma PTP}=\sum_{i=3}^{4}P_i^{\text{м}}\cdot\dot{y}_{\Gamma Pi}+\dot{x}_T\cdot\psi_{TP}\cdot\sum_{i=3}^{4}P_i^{\text{м}}\,,$$

$$P_i^{\text{м}}=c_i^{\text{ш}}\cdot\left(y_{\text{ГР}i}-y_{\Pi i}\right)+f_i^{\text{ш}}\cdot\left(\dot{y}_{\text{ГР}i}-\dot{y}_{\Pi i}\right)+G_i^{\text{м}};\ y_{\text{П}i}=y_{\text{П}}\mp l_i\cdot\varphi_{\text{П}},\ i=3,4\,;\ P_K=c_x^{\text{к}}\cdot\left(x_K-x_T\right)+f_x^{\text{к}}\cdot\left(\dot{x}_K-\dot{x}_T\right).$$

– Поздовжні переміщення кабіни і сидіння описуються диференційним рівнянням

$$\left(m_K+m_C\right)\cdot\ddot{x}_{\text{Т}}=-P_K\,.$$

– Кутові переміщення корпусу і кабіни трактора визначаються із диференціальних рівнянь обертального руху:

$$J_{\text{Т}}\cdot\ddot{\varphi}_{\text{Т}}=\sum M_{\text{ТР}}+R_x\left(H_{\text{Т}}-h_{\text{Т.0}}+l_{\text{Т}}\cdot\left(\varphi_\partial-\varphi_T\right)\right); \tag{10 а}$$

або

$$J_{\text{Т}}\cdot\ddot{\varphi}_{\Gamma}=\sum M_{\text{ТР}}+R_x\left(H_{\text{Т}}-h_{\text{Т.0}}-l_{\text{Т}}\cdot\varphi_T\right); \tag{10 б}$$

$$J_K\cdot\ddot{\varphi}_K=P_6\,l_6-P_5\,l_5-P_7\,l_7\,, \tag{11}$$

де

$$\sum M_{\text{ТР}}=P_2^{\text{м}}l_2-P_1l_1+P_5l_5-P_6l_6+R_x(h_{\text{Т}}-\psi_{\Gamma}R_{\Gamma}\text{sign}\left(\dot{\varphi}_{\Pi}-\dot{\varphi}_T\right))-H_{\text{Т}}\left(\left(M_{\text{кр}}i_{\text{тр}}\right)\big/r_K-P_{\Gamma PTP}-\left(1-\Delta l\right)P_{\Gamma PПР}\right)+R_yl_T\,;$$

$$h_{\text{Т}}=h_{\text{Т.0}}+l_{\text{Т}}\cdot\varphi_\partial\,.$$

В цих формулах та рівняннях m_{DV} – це складова інерційної маси трактора, яка визначається параметрами двигуна та трансмісії, $m_{\text{DV}}=J_{\text{м}}^{\text{дв}}\cdot i_{\text{тр}}^2\big/r_{\text{К}}^2$; $J_{\text{м}}^{\text{дв}}$ – момент інерції маховика та валів двигуна; P_i, P_l, P_7 – динамічні складові пружних сил, що діють на підресорені маси остова трактора, кабіни, сидіння; $P_i^{\text{м}}$ – динамічна складова сумарної радіальної сили, що діє на мости трактора з боку шин; P_K – сила взаємодії кабіни та рами трактора; R_x, R_y – повздовжня та вертикальна складова сили, яка прикладена до дишла з боку гаку трактора; $P_{\text{ГРТР}}$, $P_{\text{ГРПР}}$ – сумарна сила, що діє на трактор чи цистерну з боку ґрунту у горизонтальному напрямку; $\ddot{x}_{\text{Т}}$, $\dot{x}_{\text{Т}}$, $x_{\text{Т}}$ – поздовжнє прискорення, швидкість, переміщення трактора; $P_{\text{BΣ}}$ – сила, що створюється коливанням рідини в цистерні; $M_{\text{кр}}$ – крутний момент двигуна [11, 12]; $J_{\text{Т}}$, J_K – момент інерції трактора та кабіни; $H_{\text{Т}}$ – відстань від осей мостів до центру мас трактора; $h_{\text{Т.0}}$ – відстань (по вертикалі) від осі мостів до гаку трактора; ψ_{Γ} – коефіцієнт сухого тертя у гаку (та шарнірі дишла у випадку П-цистерни); R_{Γ} – радіус, на якому діє сила сухого тертя; Δl – сумарний коефіцієнт розкладання сил між мостами цистерни і гаком трактора.

На рис. 11, *а* наведено результат моделювання зовнішньо-швидкісної характеристики двигуна прототипу, яка розраховувалась на основі робіт [11, 12], при цьому на рис. 15 наведено залежності зміни сумарної інерційної маси трактора (разом з інерційністю двигуна) від зміни передавального числа трансмісії. Слід зауважити, що при максимальному передавальному числі інерційна маса більше ніж в 2 рази за гравітаційну.

Математична модель рухомих вузлів цистерни описується наступними рівняннями.

– Вертикальні переміщення корпусу разом з мостами знаходимо з диференціальних рівнянь

$$\left(m_{\text{П}}+m_P\right)\cdot\ddot{y}_{\text{П}}=\sum P_{\text{ПР}}+R_y \tag{12а}$$

або

$$\left(m_{\text{П}}+m_P\right)\cdot\ddot{y}_{\text{П}}=\sum P_{\text{ПР}}\,, \tag{12б}$$

де діючі сили

$$\sum P_{\text{ПР}}=\sum_{i=3}^{4}P_i^{\text{м}}-R_x\cdot(\varphi_\partial-\psi_{\Gamma}\cdot\text{sign}\left(\dot{\varphi}_{\Pi}-\dot{\varphi}_T\right)); \tag{13}$$

– Поздовжні переміщення корпусу цистерни визначаються за формулою

$$x_{\text{П}}=x_{\text{Т}}+h\cdot\varphi_{\text{П}}\,. \tag{14}$$

– Кутові переміщення корпусу цистерни визначаються із рівнянь обертального руху

$$J_{\text{П}}\cdot\ddot{\varphi}_{\text{П}}=\sum M_{\text{ПР}}+R_x\left(\left(h_{\Pi}-\Delta h\right)-l_{\text{П}}\cdot\left(\varphi_\partial-\varphi_{\text{П}}\right)\right) \tag{15а}$$

або

$$J_{\text{П}} \cdot \ddot{\varphi}_{\text{П}} = \sum M_{\text{ПР}} + R_x \left(\left(h_{\text{П}} - \Delta h \right) + l_{\text{П}} \cdot \varphi_{\text{П}} \right) - \left(l_{\text{П}} + l_{\partial} \right) \cdot R_y , \tag{15б}$$

де

$$\sum M_{\text{ПР}} = P_4^{\text{м}} l_4 - P_3^{\text{м}} l_3 - M_{\text{В}\Sigma} + \Delta l \cdot P_{\text{ГРПР}} \cdot \left(H_{\text{П}} + \Delta h \right) + R_x \cdot \psi_{\Gamma} R_{\Gamma} \cdot \text{sign} \left(\dot{\varphi}_{\text{Т}} - \dot{\varphi}_{\text{П}} \right); \tag{16}$$

$$h_{\text{П}} = h_{\text{П.0}} - \Delta h - l_{\text{П}} \cdot \varphi_{\partial} ; \quad \Delta h = m_{\text{В}} / \left(m_{\text{П}} + m_{\text{В}} \right) \cdot \left(H - h/2 \right) ; \qquad h = S \Big/ \left(2 \cdot \sqrt{H \cdot \left(2R_{\text{Ц}} - H \right)} \right);$$

$$S = \begin{cases} R_{\text{Ц}}^2 \cdot \arcsin \left(l / R_{\text{Ц}} \right) - l \cdot \left(R_{\text{Ц}} - H \right), \text{ якщо } H < R_{\text{Ц}}; \\ \pi \cdot R_{\text{Ц}}^2 - R_{\text{Ц}}^2 \cdot \arcsin \left(l / R_{\text{Ц}} \right) - l \cdot \left(R_{\text{Ц}} - H \right), \text{ якщо } H \ge R_{\text{Ц}}, \end{cases}$$

$$l = \sqrt{H \cdot \left(2R_{\text{Ц}} - H \right)} ,$$

$J_{\text{П}}$ – момент інерції цистерни; L – відстань від центру до краю цистерни; $R_{\text{Ц}}$ – радіус цистерни; Δh – зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня рідини; $h_{\text{П.0}}$ – відстань (по вертикалі) від осі мостів до точок з'єднання зчіпного пристрою, які розташовані на цистерні; $H_{\text{П}}$ – відстань від осі мостів до центру мас цистерни; H – рівень рідини в цистерні; S – площа вільної поверхні рідини, яка відповідає відомій висоті H ; h – еквівалентний рівень рідини (у цистерні прямокутної форми та того ж самого об'єму [13]).

Модель зчіпного пристрою. Поздовжня сила, яка діє на пристрій, описується рівнянням

$$R_x = \frac{\left[\left(M_{\text{кр}} \cdot i_{\text{тр}} \right) / r_K - P_{\text{ГРТР}} - \left(1 - \Delta l \right) P_{\text{ГРПР}} + P_K \right] \cdot m_{П.x} + \left[\Delta l \cdot P_{\text{ГРПР}} + P_{\text{В}\Sigma} \right] \cdot m_{T.x}}{m_{T.x} + m_{П.x}} ,$$

а кут нахилу дишла становитиме

$$\varphi_{\partial} = \left(y_{\text{П}} - l_{\text{П}} \cdot \varphi_{\text{П}} - y_{\text{Т}} - l_{\text{Т}} \cdot \varphi_{\text{Т}} - \Delta c - \Delta h_{\partial} \right) / l_{\partial} \tag{17 а}$$

або

$$\varphi_{\partial} = 0 , \tag{17 б}$$

де

$$\Delta c = m_{\Sigma P} \cdot g \cdot \Delta l \Big/ \left(\sum_{i=3}^{4} \frac{1}{1/c_i^a + 1/c_i^{ш}} \right) + \Delta h_{\partial} ;$$

$$\Delta l = 1 \tag{18 а}$$

або

$$\Delta l = \frac{2 \left(l_{\text{П}} + l_{\partial} \right)}{l_4 - l_3 + 2 \left(l_{\text{П}} + l_{\partial} \right)} , \tag{18 б}$$

$m_{T.x} = m_{\text{Т}} + m_1 + m_2$ – це маса остову та мостів трактора; $m_{T.x} = m_{\text{Т}} + m_1 + m_2$ – маса остову та мостів цистерни; $m_{\Sigma P}$ – маса рідини у цистерні; $\varphi_{\text{П}}$ – кут нахилу цистерни; Δc – усадка цистерни на власні ресори після заповнення її рідиною; Δh_{∂} – різниця висот між крюком трактора та віссю дишла для порожньої цистерни; l_{∂} – довжина зчіпного пристрою (від краю трактора до краю цистерни).

Вертикальна реакція R_y в поєднанні з причіп-цистерною є відсутньою, а для напівпричепу її величина знаходиться із розв'язку системи диференційних рівнянь (4б), (10б), (12б), (15б) та рівняння

$$\ddot{x}_{\text{Т}} + l_{\text{Т}} \cdot \ddot{\varphi}_{\text{Т}} = \ddot{x}_{\text{П}} - l_{\text{П}} \cdot \ddot{\varphi}_{\text{П}} , \tag{19}$$

що є наслідком співвідношення

$$x_{\text{Т}} + l_{\text{Т}} \cdot \varphi_{\text{Т}} = x_{\text{П}} - l_{\text{П}} \cdot \varphi_{\text{П}} + \Delta c_0 .$$

Таким чином, зіставляючи рівняння (4б), (10б), (12б), (15б) та (19), отримуємо

$$\Sigma P_{\text{ТР}} / m_{\text{Т}} - R_y / m_{\text{Т}} + l_{\text{Т}} \cdot \Sigma M_{\text{ТР}} / J_{\text{Т}} - l_{\text{Т}}^2 \cdot R_y / J_{\text{Т}} = \Sigma P_{\text{ПР}} / m_{\text{П}} + R_y / m_{\text{П}} + l_{\text{П}}^2 \cdot R_y / J_{\text{П}} - \left(\Sigma M_{\text{ПР}} \cdot l_{\text{П}} \right) / J_{\text{П}} ,$$

тобто

$$R_y = \frac{\left(\sum P_{\text{ТР}} \right) / m_{\text{Т}} + l_{\text{Т}} \cdot \left(\sum M_{\text{ТР}} \right) / J_{\text{Т}} - \left(\sum P_{\text{ПР}} \right) / \left(m_{\text{П}} + m_{\text{В}} \right) + \left(l_{\text{П}} + l_{\partial} \right) \cdot \left(\sum M_{\text{ПР}} \right) / J_{\text{П}}}{1/m_{\text{Т}} + l_{\text{ТР}}^2 / J_{\text{Т}} + 1/\left(m_{\text{П}} + m_{\text{В}} \right) + \left(l_{\text{П}} + l_{\partial} \right)^2 / J_{\text{П}}} .$$

Коливання рідини. Аналіз коливань рідини у цистерні базується на застосуванні методів, які описано в роботі [13]. Проте задля врахування вертикальних прискорень центру мас цистерни деякі залежності було уточнено. Крім того, як показано при виконанні динамічного аналізу, для досягнення необхідної точності розрахунку достатньо моделювати рух перших двох поверхневих шарів, а іншу масу приєднати до оболонки цистерни.

В роботі [13] було отримано наступні формули для розрахунку власної частоти υ_k та коефіцієнту жорсткості c_k^p коливань k -го шару рідини;

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\beta_k \cdot (g + \sigma_\rho \cdot \beta_k{}^2) \cdot th(\beta_k h)}\ ,\ c_k^p = m_k^p \cdot \left(2\pi \cdot \nu_k\right)^2,\ \beta_k = \pi \cdot (k - 0.5)/L,\ k = 1, 2, \ldots,$$

де σ_ρ – питомий коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

Зважаючи на мале значення цього коефіцієнту ($\sigma_\rho < 0.1 м/с^2$), для першого та другого шарів ним можливо знехтувати, та використовувати спрощені формули

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)}\ ;\quad c_k^p = m_k^p \cdot g \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)\ . \tag{20}$$

В умовах дії вертикального прискорення $\ddot{y}_П$ формули (20) набувають вигляду

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(g + \ddot{y}_П) \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)}\ ;\quad c_k^p = m_k^p \cdot (g + \ddot{y}_П) \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h),$$

звідки

$$G_k^p = m_k^p \cdot (g + \ddot{y}_П)\ .$$

В результаті континуальну модель низькочастотних коливань вдалося замінити дискретною моделлю, яка з достатньою для практики точністю описується наступними рівняннями:

$$m_k^p \cdot \ddot{x}_k^p + f_k^p \cdot \left(\dot{x}_k^p - \dot{x}_П\right) + c_k^p \cdot \left(x_k^p - x_П\right) = G_k^p \cdot \varphi_П,\ \ k = 1, 2\ ; \tag{21}$$

$$P_{BΣ} = \sum_{k=1}^{2}\left[f_k^p \cdot \left(\dot{x}_П - \dot{x}_k^p\right) + c_k^p \cdot \left(x_П - x_k^p\right) + G_k^p \cdot \varphi_П \right]; \tag{22}$$

$$M_{BΣ} = \sum_{k=1}^{2}\left[f_k^p \cdot \left(\dot{x}_П - \dot{x}_k^p\right) + c_k^p \cdot \left(x_П - x_k^p\right) + G_k^p \cdot \varphi_П \right] \cdot h_k^p\ , \tag{23}$$

де $P_{BΣ}$, $M_{BΣ}$ – це сумарна сила та момент сили, які діють на платформу цистерни.

Рівняння для визначення коефіцієнтів демпфірування має наступний вигляд:

$$f_k^p = 2d_p \cdot \upsilon_k \cdot m_k^p\ , \tag{24}$$

де d_p – логарифмічний декремент затухання цих коливань.

У формулах (24) залежність від прискорення $\ddot{y}_П$ не враховується.

Відстані h_k^p між центрами мас поверхневого шару та цистерни розраховується по отриманим для цієї задачі аналітичним залежностям як відомі функції від рівня рідини та геометричних розмірів цистерни.

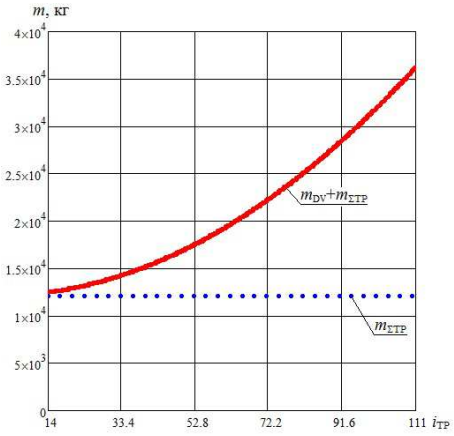


Рис. 15 – Гравітаційна та інерційна маси трактора в залежності від передавального числа трансмісії.

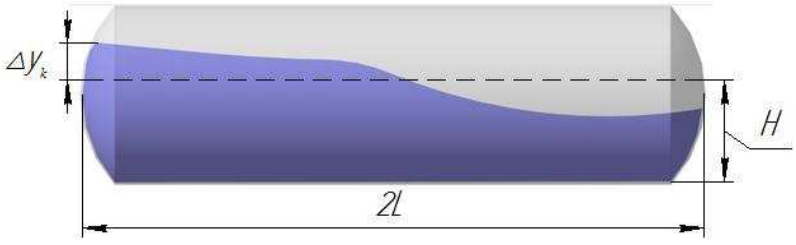


Рис. 16 – Приклад підняття рівня рідини при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату.

Для поглибленого сприйняття коливань рідини в цистерні доречно аналізувати підняття рівня рідини (рис. 16) при розгоні або гальмуванні машинно-тракторного агрегату. Відповідна величина обчислюється

$$\Delta y_k = \left(-P_{BΣ}\right)/\left(2 \cdot S \cdot \rho \cdot g\right),$$

де ρ – щільність рідини, яка знаходиться в цистерні.

Опис рельєфу дорожнього покриття. Задля формування математичної моделі при дослідженні пов'язаних вимушених коливань машино-тракторного агрегату при експлуатації необхідно окреслити зміну вертикальних переміщень ґрунту. В роботі [14] сформовано випадкову функцію мікропрофілю поверхні, по якій рухається колісний трактор при виконанні транспортних та технологічних операцій. В нашій роботі опис нерівностей поверхні відбувається із застосуванням двох гармонійних складових, які описують зміну мікропрофілю та макропрофілю дороги, а саме:

$$y_{\text{ГРj}} = A_\lambda \cdot \sin\left(2\pi \cdot (x_\text{Т} - \Delta L_j)/L_\lambda\right) + A_\Lambda \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \cdot (x_\text{Т} - \Delta L_j)/L_\Lambda\right)\right),\ j = 1, 2, 3, 4,$$

де A_λ – амплітуда мікроколивань ґрунту (нерівностей); L_λ – довжина хвилі мікроколивань; A_Λ – амплітуда макроколивань поверхні (бугри та впадини); L_Λ – довжина хвилі макроколивань; ΔL_j – фазові зсуви, які визначаються відстанню між мостами транспортного засобу,

$$\Delta L_1 = 0;\ \Delta L_2 = l_1 + l_2;\quad \Delta L_3 = l_1 + l_\text{Т} + l_\partial + l_\text{П} \pm l_3;\quad \Delta L_4 = l_1 + l_\text{Т} + l_o + l_\text{П} + l_4. \tag{25}$$

Співвідношення (25) виконуються як для П-цистерни, так і для НП-цистерни; у першому випадку значення розміру l_3 використовується зі знаком « – » (рис. 13), а у другому – зі знаком « + » (рис. 14).

Хвилі мікроколивань у випадку резонансу спроможні призвести до високоамплітудних вібрацій, що є шкідливими для здоров'я тракториста. За допомогою хвилі макроколивань стає можливим дослідити дію центробіжних сил на опуклих ділянках дороги, а також виникнення галопуючого резонансу на крутих спусках.

Відстані між мостами та їх співвідношення з довжиною L_λ мікрохвилі суттєво впливає на характер і амплітуди коливань трактора і цистерни. Так, якщо

$$\Delta L_2 \approx L_\lambda \text{ або } \Delta L_2 \approx L_\lambda / 2$$

то у тракторі, головним чином, збуджуються зсувні коливання центру мас у вертикальному напрямку або кутові коливання корпусу і кабіни. Аналогічні умови для цистерни мають вигляд

$$\Delta L_4 - \Delta L_3 \approx L_\lambda \text{ та } \Delta L_4 - \Delta L_3 \approx L_\lambda / 2.$$

При виконанні умов

$$0.5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0.5 \cdot \Delta L_2 \approx L_\lambda \text{ або } 0.5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0.5 \cdot \Delta L_2 \approx (0.5 + k) L_\lambda,\ k = 0, 1, 2, ...$$

центри мас трактора та цистерни під дією збурюючи чинників збоку коліс будуть зсуватися синфазно або у противофазі, проте на цей рух накладаються пов'язані коливання, які передаються через зчіпний пристрій. Тому остаточні висновки про характер та амплітуди коливань можна зробити за результатами динамічних розрахунків.

Вибір метода і шага інтегрування. У правих частинах формул (22), (23) використовується значення старшої похідної $\ddot{y}_{\Pi}$, тому диференціальні рівняння моделі, перш за все, потребують приведення до так званого *нормального вигляду*. Зробити нормалізацію не складно, оскільки складові із похідною $\ddot{y}_{\Pi}$ входять до вказаних частин адитивно. Фактично нормалізації підлягає лише рівняння (15а,б), а у інших випадках значення $\ddot{y}_{\Pi}$ використовується як вже відома величина. Після нормалізації система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\left\{ d\vec{X}/dt = \vec{V};\ d\vec{V}/dt = f(\vec{X}, \vec{V}, t) \right.$$

і для її інтегрування було обрано *схему модифікованого метода Ейлера*, а для проведення розрахунків застосовано програмне – діалогове середовище MatCAD. Такий вибір був пов'язаний із забезпеченням найбільш простого і прозорого програмування, а також враховував можливість подальшого розвитку і уточнення нелінійної моделі. Якщо таке уточнення буде моделювати удари, які відбуваються у зчіпному пристрої під час перекладання зазорів, то використовувати для інтегрування відому *схему Рунге-Кутта четвертого порядку* є недоречним.

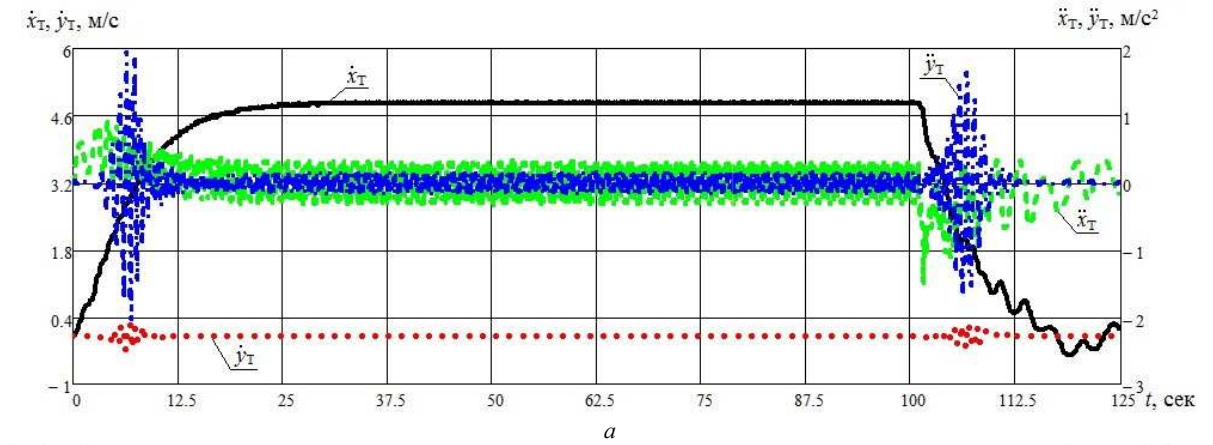
Модифікований метод Ейлера має наступні рекурентні формули:

$$\vec{V}(t + \Delta t) = \vec{V}(t) + f(\vec{X}(t), \vec{V}(t), t) \cdot \Delta t;\ \vec{X}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + 0.5 \cdot (\vec{V}(t + \Delta t) + \vec{V}(t)) \cdot \Delta t.$$

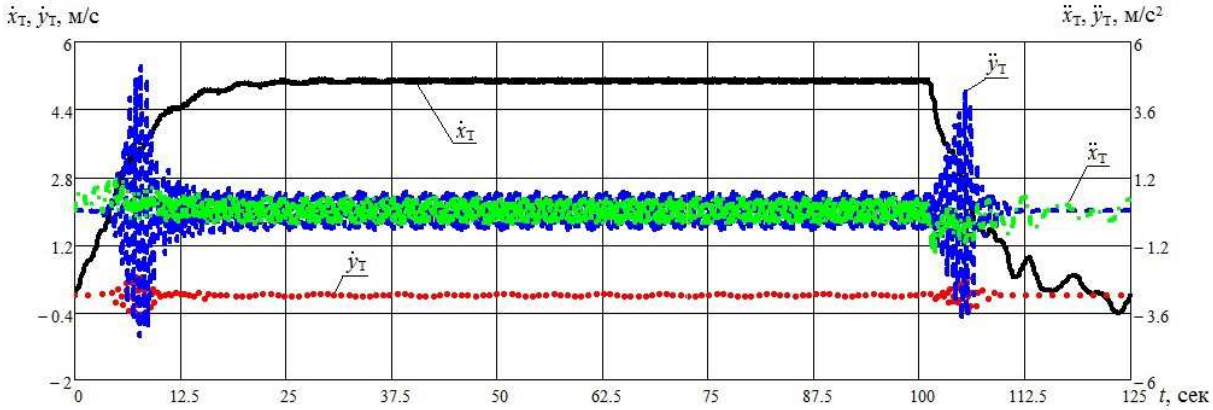
Такий метод добре зарекомендував себе при розрахунках систем пневмоавтоматики ракетної техніки [18]. Якщо права частина $f(\vec{X}, \vec{V}, t)$ фактично не містить залежності від вектора швидкостей $\vec{V}$ (тобто силами тертя знехтували), то цей метод має другий порядок точності і еквівалентний відомій схемі, де сітки за часом для переміщень $\vec{X}(t)$ і швидкостей $\vec{V}(t)$ зсунуті одна відносно іншої на половину розрахункового шагу Δt. Після врахування тертя порядок метода знижується, але якщо тертя є слабким, то цей порядок наближається до другого. Нагадаємо що стандартний (не модифікований) метод Ейлера має перший порядок точності, і сучасним вимогам з ефективності він не задовольняє.

Шаг інтегрування $\Delta t = 0.007\,\text{с}$ було обрано з урахуванням досягнення необхідної точності розрахунку і стійкості алгоритму. Для цього за допомогою методів [15] були зроблені наступні оцінки.

За результатами динамічного аналізу після спрощення математичної моделі максимальна частота власних коливань становила $\nu_M \approx 4.2\,\text{Гц}$, тобто на одному періоді цих коливань розташовується 60 кроків розрахунку (при мінімально допустимій кількості 12), а для групи низькочастотних коливань та для вимушених коливань цей п'ятикратний запас щонайменше подвоюється.

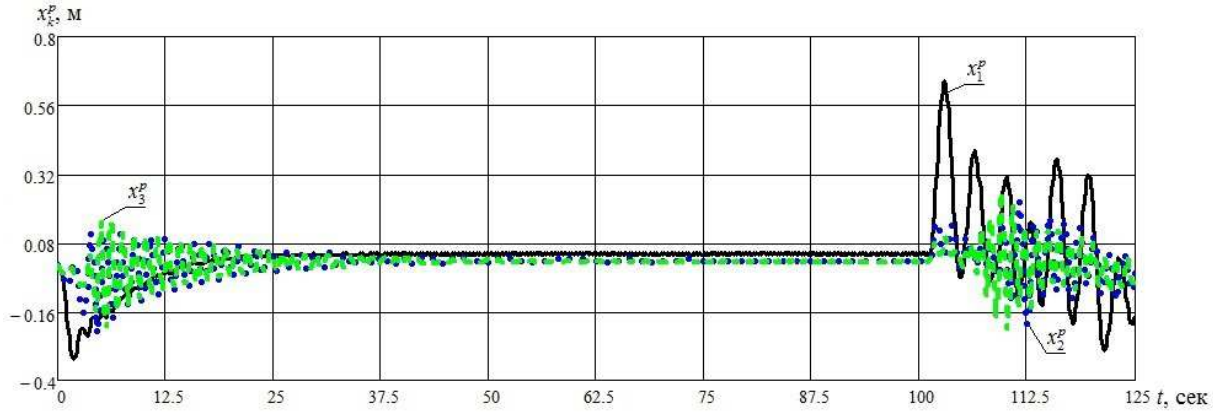


а

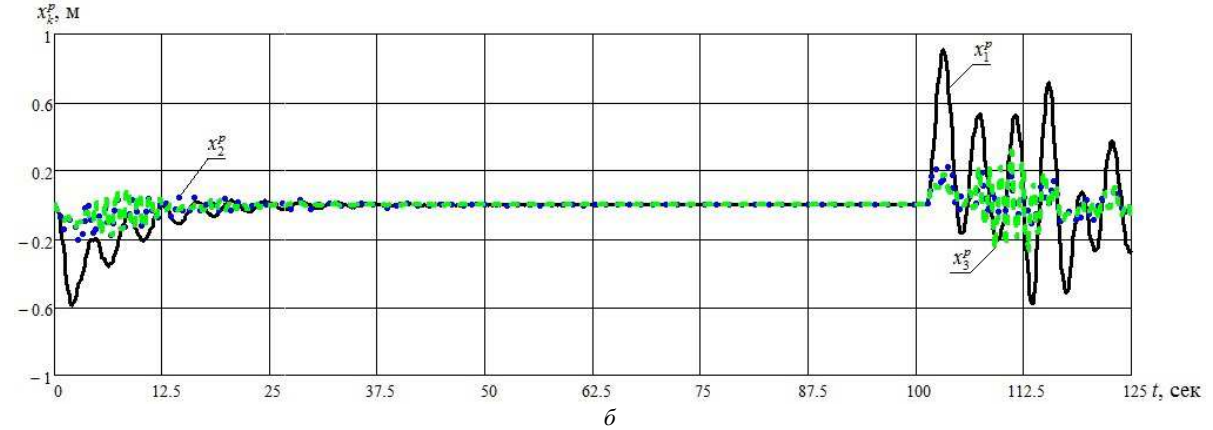


б

Рис. 17 – Графіки швидкості та прискорення остова трактора: *а* – МТА із П-цистерною; *б* – із НП-цистерною.



а



б

Рис. 18 – Графіки горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини: *а* – МТА із П-цистерною; *б* – із НП-цистерною.

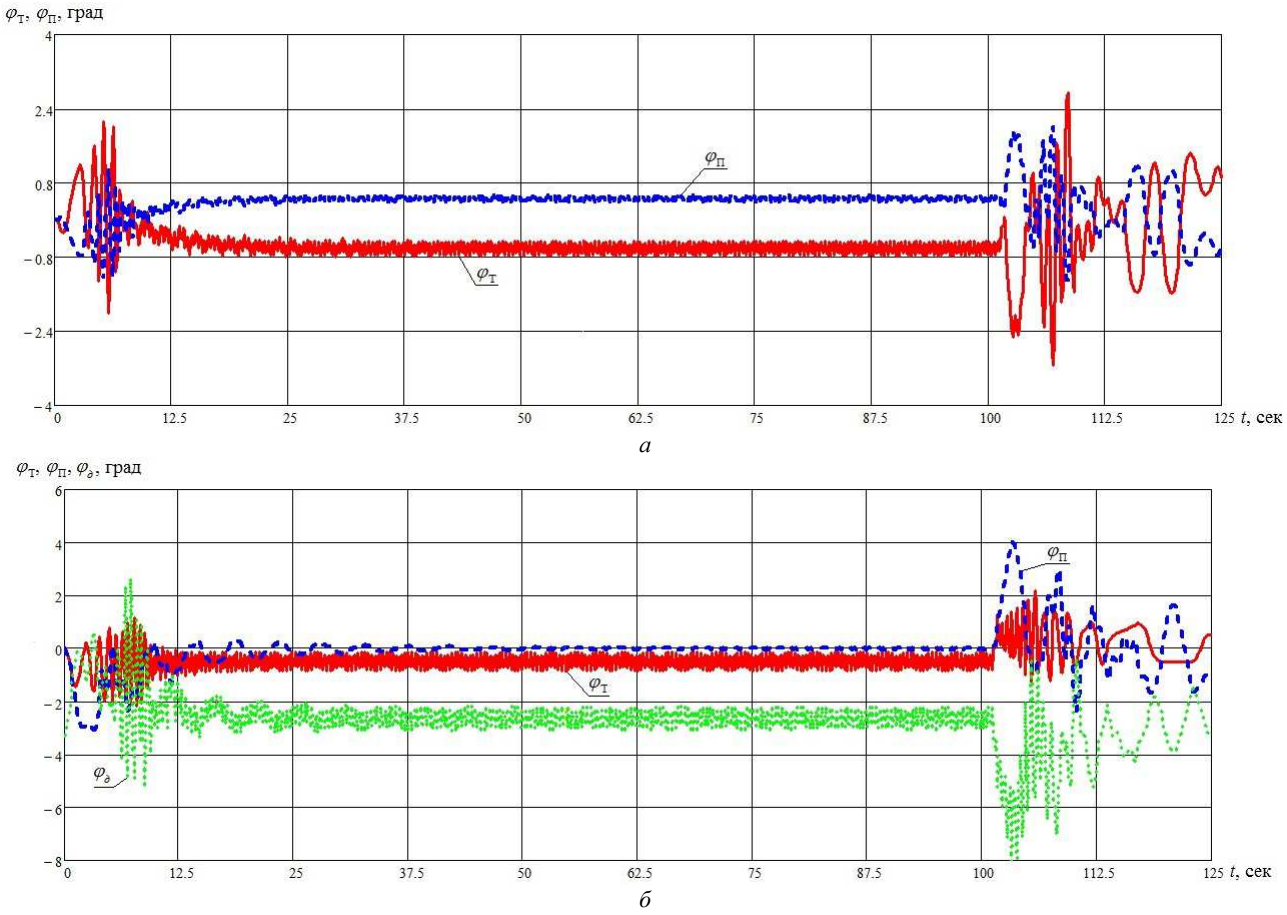


Рис. 19 – Графіки зміни кутів нахилу рами трактора, цистерни та дишла: *а* – МТА із П-цистерною; *б* – із НП-цистерною.

Стійкість модифікованого алгоритму Ейлера залежить від співвідношення кроку інтегрування і так званого *показника коливальності* системи $d_{кол}$, тобто для забезпечення стійкості необхідно задовольнити умову

$$\Delta t < d_{кол}.$$

Величина показника коливальності приблизно дорівнює мінімуму величини f_j / c_j, де f_j, c_j – це коефіцієнти демпфірування та жорсткості, які використовуються при моделюванні руху j – тої маси. Для системи, що досліджується, виходячи з даних табл. 1 отримаємо оцінку $d_{кол} \approx 0.01$ с, і, як бачимо, саме ця умова, а не точність розрахунку, лімітує вибір кроку інтегрування.

Результати тестових розрахунків. Значення констант і змінних величин, які використовуються при розрахунках, наведено в табл. 1.

На рис. 17 – 21 показано результати моделювання руху машинно-тракторного агрегату з П-цистерною та НП-цистерною при рівні рідини в цистерні 1.4 м; передавальне число трансмісії – 25.8. Зміни крутного моменту двигуна та коефіцієнтів тертя на етапах розгону та гальмування у цьому розрахунку задано наближеними аналітичними залежностями, адже головна мета дослідження – це моделювання сталого процесу руху. Амплітуда мікроколивань нерівностей становила $A_\lambda = 0.02$ м; а довжина хвилі мікроколивань $L_\lambda = 2$ м, що співпадає з довжиною дорожніх плит, які інколи укладають у основу траси. Рис. 16 – 20 відображають характеристики руху МТА по горизонтальній дорозі, рис. 21 – по дорозі з істотною опуклістю рельєфу та значним максимальним нахилом.

Значні коливання сили R_x, які показано на рис. 20, 21, свідчать про певну обмеженість припущень, що приймалися на етапі динамічного аналізу, де використовувалася лінеаризовану модель та умова $R_x = const$. Теж саме стосується зміни коефіцієнтів зчеплення шин з дорогою. Проте, оскільки вплив цих констант на результати динамічного аналізу був не дуже значним, то й основні висновки того аналізу залишаються вірними.

Так, при розрахунковому дослідженні МТА за допомогою нелінійної моделі відмічено, що під час руху з гори в з'єднанні причіпного пристрою колісного трактора та П-цистерни виникають резонансні закручування дишла в зчіпному пристрої (рис. 22). Тому наведена на рис. 12 залежність набуває більшої актуальності.

Розрахунок коефіцієнту в'язкого тертя. Завдяки відомим із технічної документації значенням $\dot{x}_{\text{Tmax}}$ максимальної швидкості руху колісного трактора ХТЗ-242К на дорогах з різною якістю покриття можливо встановити зміну коефіцієнту в'язкого тертя в залежності від якості. Для цього було складено наступні рівняння:

$$\psi_{\text{ТР}} \cdot \dot{x}_{\text{Tmax}} \cdot m_{\text{Т}} \cdot g = \left(M_{\text{кр}} \cdot i_{\text{тр}}\right) \Big/ r_K \; ; \quad i_{\text{тр}} = \omega_{дв} / \omega_K = \omega_{дв} \Big/ \left(\dot{x}_{\text{Tmax}} / r_K\right) = \left(\omega_{дв} \cdot r_K\right) \Big/ \dot{x}_{\text{Tmax}} \, ,$$

де ω_K – кутова швидкість колеса.

Виконавши перетворення, отримаємо

$$\psi_{\text{ТР}} = \left(M_д \cdot \omega_{дв}\right) \Big/ \left(m_{\text{Т}} \cdot g \cdot \dot{x}^2_{\text{Tmax}}\right) . \tag{26}$$

Таким чином, було встановлено значення коефіцієнту в'язкого тертя (для асфальтобетону – 0.018; для ґрунтової поверхні – 0.03; для стерні колосових – 0.11), що в подальшому дозволить якісно оцінювати техніко-економічні показники машинно-тракторного агрегату.

Визначення резонансної величини для відстані між нерівностями дороги. Середнє значення відстані між нерівностями визначає основний період зміни профілю дороги, тобто довжину хвилі мікроколивань. Зауважимо, що конкретний вигляд розподілу нерівностей впливає на амплітуди другої, третьої та інших гармонік, які, по перше, виявляються значно меншими, ніж у основної гармоніки, а по-друге, збуджуватиме коливання більших частот, які ефективно демпфіруються силами тертя. Тому вищі гармоніки в нашій роботі не досліджуються.

Залежність (26) для коефіцієнту в'язкого тертя надає можливість встановити взаємозв'язок між резонансною величиною середньої відстані між нерівностями, рівнем рідини, яка знаходиться в цистерні, та швидкістю руху машинно-тракторного агрегату (табл. 5). Такий зв'язок допомагає організації ефективного тестування динамічних якостей МТА при сталому русі по прямій дорозі з конкретним типом дорожнього покриття.

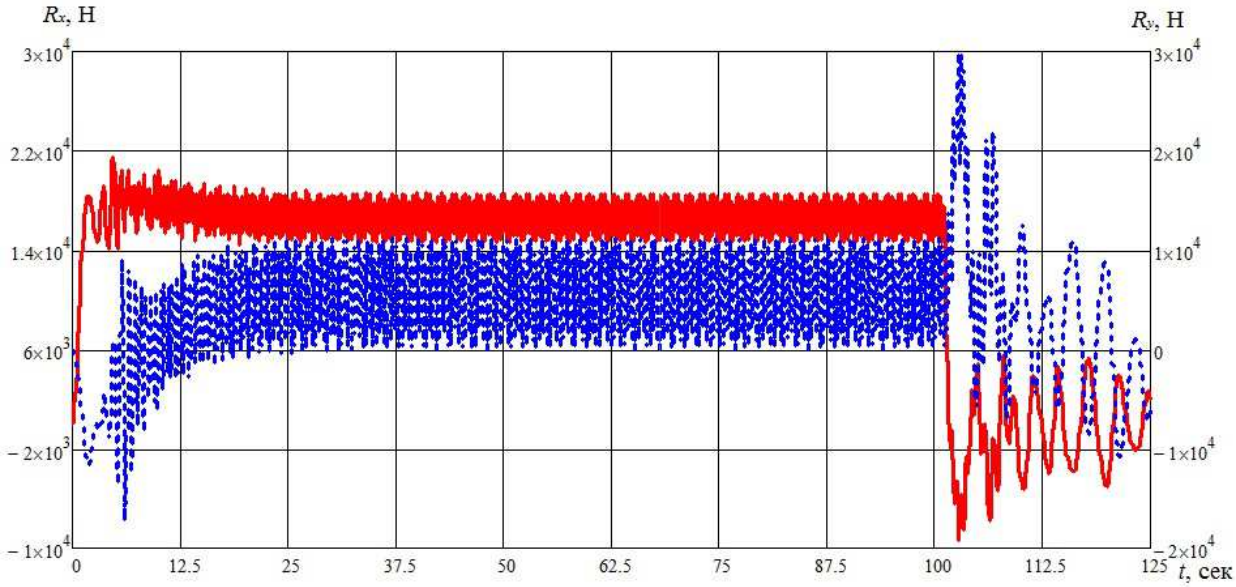


Рис. 20 – Графіки горизонтальної та вертикальної компоненти сили на крюку трактора із НП-цистерною.

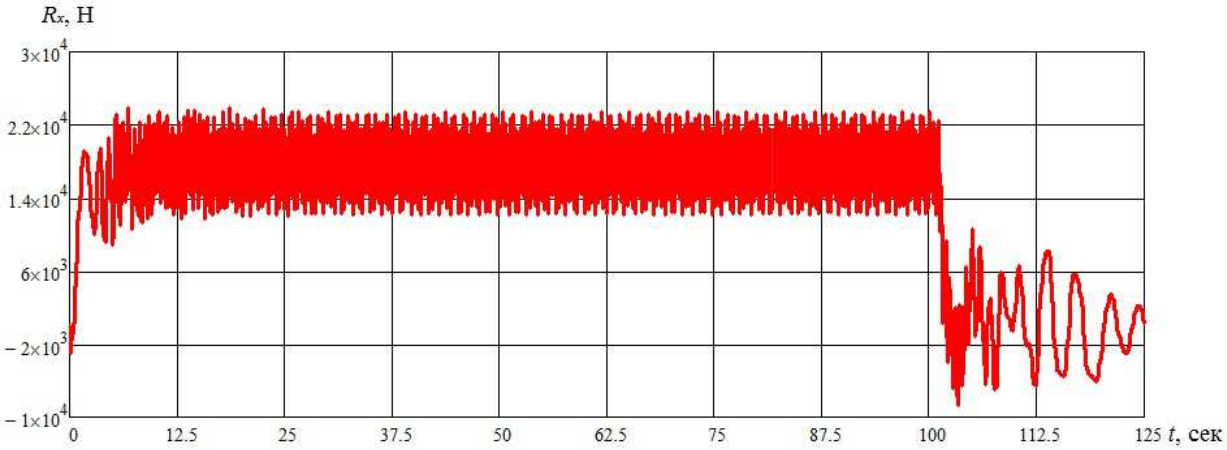


Рис. 21 – Графіки поздовжньої сили на крюку трактора із П-цистерною.

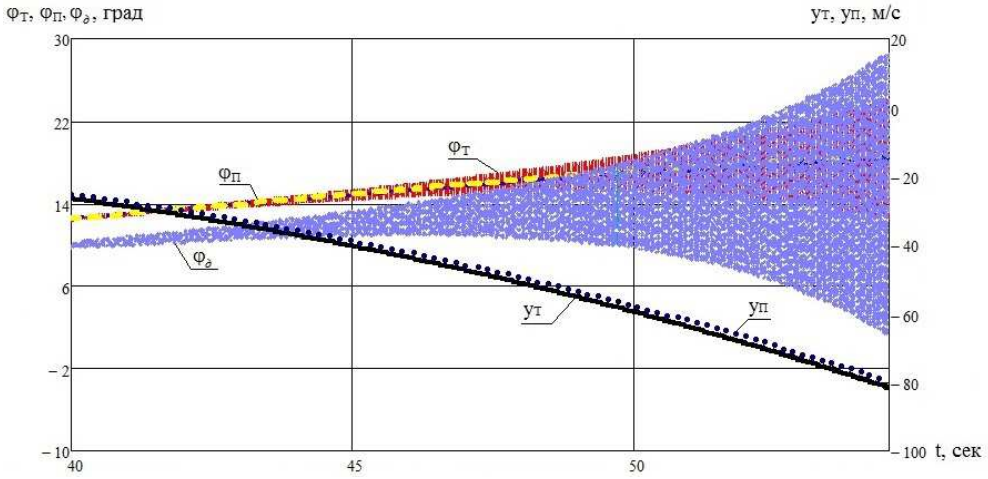


Рис. 22 – Результати моделювання руху з гори машинно-тракторного агрегату з П-цистерною при максимальному куті нахилу дороги 30° та зменшеною жорсткістю шин.

Із динамічного аналізу для кожного рівня рідини, яка знаходиться в цистерні, стає відомою частота власних коливань, що є найбільш шкідливими для здоров'я тракториста. Звідки за допомогою визначення періоду коливань T та швидкості руху $\dot{x}_{\text{Т}}$ можна визначити резонансну довжину шляху між нерівностями:

$$T = 1/\upsilon_k \; ; \quad L_\lambda = T \cdot \dot{x}_{\text{Т}} \, .$$

Результати розрахунку залежать від передавального числа трансмісії, яке є обмеженим в наслідок обмеження крутного моменту дизеля. У табл. 5 знаком «+» відмічено параметри характерних режимів, при яких треба досліджувати динаміку МТА; жирним шрифтом виокремлено *характерні режими*, які відповідають зовнішній швидкісній характеристиці і на яких це можна робити за допомогою описаної вище нелінійної математичної моделі. На інших резонансних значеннях швидкості руху двигун працює вздовж регуляторних характеристик, тому до описаної моделі МТА бажано додавати блок, який розраховує перехідні процеси у регуляторі.

Для ілюстрації впливу довжини хвилі на амплітуду коливань було виконано моделювання руху по асфальтобетонній поверхні машинно-тракторного агрегату з НП-цистерною, яка заповнена рідиною до висоти $H = 1.5$ м та при русі на передачі $i_{\text{тр}} = 31.2$ з відстанню між нерівностями $L_\lambda = \Delta A_{1,2}$.

Таблиця 5 – Діапазони взаємопов'язаних резонансних значень довжини мікрохвилі та швидкості сталого руху МТА

Передавальне число $i_{\text{тр}}$	Швидкість руху $\dot{x}_{\text{Т}}$, км/год (при 1800 – 2100 об/хв валу двигуна)	Відстань між нерівностями L_λ, м (при $H = 0.5 \div 1.5$, м)	Поверхня		
			Асфальтобетон	Ґрунтова	Стерня колосових
110.5	4.3 – 4.97	1.76 – 2.7	+	+	+
99.63	4.86 – 5.51	2 – 3	+	+	+
93.47	5.18 – 5.88	2.1 – 3.18	+	+	+
82.39	5.88 – 6.66	2.4 – 3.6	+	+	+
63.62	7.64 – 8.63	3.1 – 4.7	+	+	+
57.36	8.46 – 9.57	3.5 – 5.2	+	+	**+**
53.82	8.99 – 10.2	3.7 – 5.5	+	+	–
47.44	10.2 – 11.57	4.2 – 6.3	+	+	–
34.61	13.9 – 15.87	5.7 – 8.6	+	+	–
31.2	15.4 – 17.6	6.3 – 9.5	+	**+**	–
29.27	16.34 – 18.76	6.7 – 10.1	+	–	–
25.8	18.42 – 21.28	7.6 – 11.5	**+**	–	–

Як видно з рис. 23, при сталому русі коливання рідини при резонансному значенні $L_\lambda = 9.5$ м переважає в багато разів, ніж отримане при нерезонансному значенні $L_\lambda = 2$ м, а на етапі розгону та гальмування спостерігається зворотна ситуація. Проте, такий результат є зрозумілим, і він не суперечить основним висновкам цієї роботи. Розгін і гальмування МТА відбуваються епізодично, через великі проміжки часу сталого руху, тому коливання, що збуджуються, швидко загасають і не спроможні надати шкоди здоров'ю тракториста.

Аналіз сил Коріоліса та інших факторів нелінійності моделі. Під час зсуву у вертикальному напрямі сидіння тракториста або переднього мосту трактора виникають бокові сили, значення яких даються формулами

$$F_к^C = m_C \cdot \dot{y}_C \cdot \dot{\psi}_K \, , \quad F_к^M = m_1 \cdot \dot{y}_1^M \cdot \dot{\psi}_T \, .$$

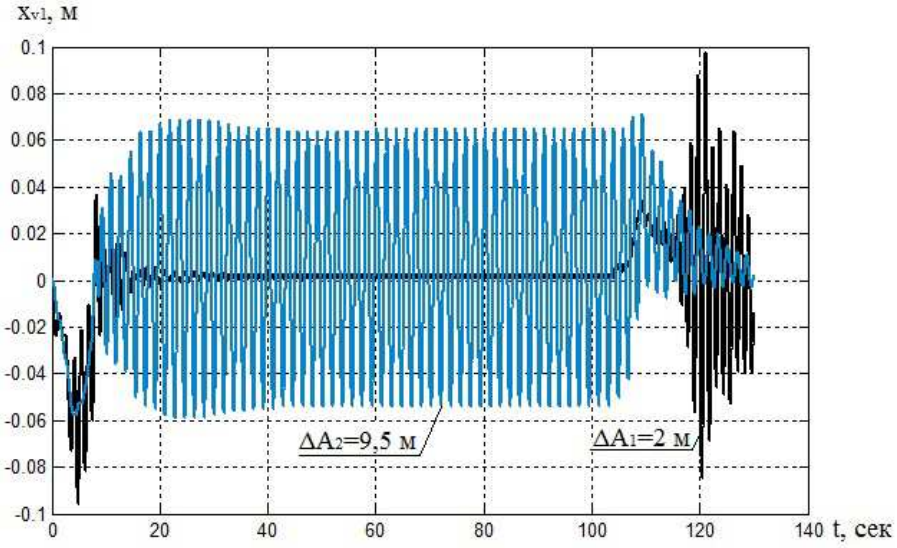


Рис. 23 – Графіки зміщення поверхневого шару рідини в цистерні при русі МТА на тестовому швидкісному режимі.

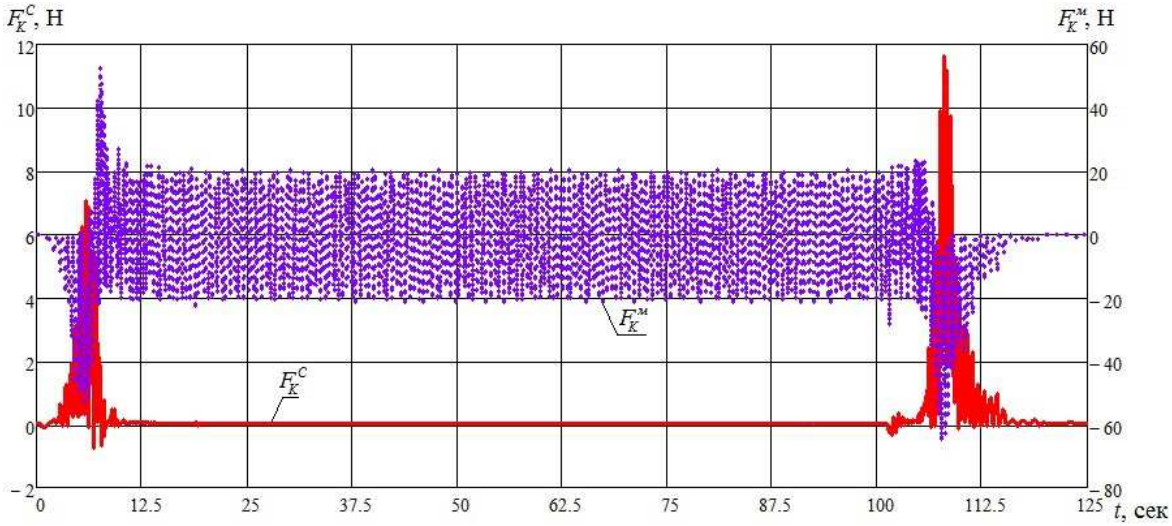


Рис. 24 – Графіки сил Коріоліса, які діють на сидіння водія та передній міст колісного трактора.

Ці сили діють відповідно й на кабіну та раму трактора, намагаючись посунути їх у горизонтальному напрямі а також розгорнути навколо центрів мас. Проте моделювання цих сил (рис. 24), яке виконувалося під час тестування нелінійної моделі, засвідчило, що вони є дуже малими (наприклад, вони на три порядки менше ніж сили, показані на рис. 20, 21). Тому присутністю сил Коріоліса доречно знехтувати.

Це ж саме стосується й інших відомих факторів нелінійності, а саме старших складових розкладання синуса або косинуса у степеневі ряди. Зауважимо, що, наприклад, замість формул (8) або (13) кінематика пропонує використовувати більш точні вирази

$$\sum P_{\text{ТР}} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{M} - \sum_{l=5}^{6} P_l + R_x \cdot [\sin\varphi_O - \psi_\Gamma \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_П - \dot{\varphi}_\Gamma)] \quad \text{або} \quad \sum P_{\text{ПР}} = \sum_{i=3}^{4} P_i^{M} - R_x \cdot [\sin\varphi_O - \psi_\Gamma \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_П - \dot{\varphi}_\Gamma)],$$

а замість рівняння (10 а) – його аналог

$$J_\Gamma \cdot \ddot{\varphi}_\Gamma = \sum M_{\text{ТР}} + R_x \left(H_\Gamma - h_{\Gamma.0} + l_\Gamma \cdot \sin\left(\varphi_O - \varphi_\Gamma\right)\right).$$

Але, якщо кути нахилу залишаються в тих межах, що спостерігаються на рис. 18, то припустимо користуватися спрощеннями

$$\sin\varphi_O \approx \varphi_O,\ \sin\left(\varphi_O - \varphi_\Gamma\right) \approx \varphi_O - \varphi_\Gamma,\ \sin\left(\varphi_O - \varphi_П\right) \approx \varphi_O - \varphi_П,\ \cos\varphi_O \approx 1,$$

які створюють відносну похибку, що не перебільшує 0.5%.

Сили спротиву повітря розраховуються за формулами

$$F_{пов} = \psi_{пов} \cdot S_{пов} \cdot \rho_{пов} \cdot \left|\dot{x}_{\text{ТР}}\right| \cdot \dot{x}_{\text{ТР}},$$

де $\rho_{пов}$ – це щільність повітря; $S_{пов}$ – площа міделевого перерізу кабіни трактора або цистерни; $\psi_{пов} \approx 0.4$ – коефіцієнт тертя [19].

Для автомобілів, які рухаються зі швидкостями понад 100 км/год, ці сили є суттєвими, проте при русі МТА зі швидкостями, які не перебільшують 20 км/год, вони є малими, і при розрахунку ними доречно знехтувати.

Таким чином,

- поздовжня сила R_x у зчіпному пристрої, змінами якої під час руху (як це засвідчили графіки, показані на рис. 21) нехтувати неприпустимо;
- а також коефіцієнти в'язкого ψ_{TP} або сухого ψ_{T} тертя (які залежать від змінної швидкості руху трактора і кутових швидкостей зміни нахилу рами трактора та дишла);
- та коефіцієнти c_k^p пружності поверхневих хвиль у рідині (які залежать від змінної величини вертикального прискорення оболонки цистерни);

послуговують тими факторами, які призводять до нелінійності моделі.

Перспективи подальших досліджень. Матеріал, наведений у статті, складає теоретичний фундамент для проведення конкретних досліджень машинно-тракторного агрегату з цистерною, як коливальної системи.

Перспективним напрямком розвитку започаткованих досліджень є проведення динамічного аналізу коливань МТА з цистерною у горизонтальній площині, які впливають на безпеку руху. А також вивчення динаміки розгону, гальмування та повороту, і хоча ці процеси не є довготривалими й не призводять до шкідливих наслідків для здоров'я тракториста, але значною мірою впливають на техніко-економічні показники та безпеку руху.

Висновки. Проаналізовано конструктивні особливості сільськогосподарських цистерн, які використовуються спільно з колісним трактором при виконанні транспортних робіт.

Наведено лінеарізовану модель пов'язаних поздовжніх коливань колісного трактора з причіп- та напівпричіп-цистернами. Для опису перерозподілу рідини у цистерні використано розроблені раніше аналітичні залежності для характеристик поверхневих хвиль Релея. Модель дозволяє знайти спектр наявних частот вільних механічних коливань у інфразвуковому діапазоні частот, а також проаналізувати відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів, амплітуди яких нормовані за їх вкладом до загальної кінетичної енергії коливань.

За допомогою лінеарізованої моделі встановлено групу низькочастотних власних коливань та створено нелінійну математичну модель, яка дозволяє розрахувати вимушені коливання, що відбуваються під час руху транспортного засобу по прямій дорозі зі складним рельєфом.

Запропоновано для математичного тестування динамічних якостей транспортного засобу описувати рельєф дороги двома гармоніками, які мають, відповідно, велику (у діапазоні декілька сотень метрів) та малу (у діапазоні декілька метрів) довжину хвилі. Розроблено метод визначення довжини хвилі, яка призводить до резонансного збільшення амплітуди коливань рідини у цистерні та сидіння тракториста.

Список літератури

1. *Леженкин А. Н., Григоренко С. М.* Моделирование процесса движения агрегата с переменной массой // Науковий вісник ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 80 – 86.
2. *Кравченко А. П., Ноженко Е. С., Вершина Г. А., Пилатов А. Ю.* Общая методика минимизации функции расхода топлива машинотракторного агрегата с прицепом переменной массы // Вісник СевНТУ. – Севастополь, 2013. – Вип. 143. – С. 215 – 219.
3. *Леженкин А. Н., Коломиец С. М.* Механико-математические основі анализа движения прицепного уборочного агрегата с переменной массой // Университетская наука. – 2017. – №1 (3). – С. 125 – 130.
4. *Шуляк М. Л.* Підвищення ефективності експлуатації енергонасиченого трактора в агрегаті з сільськогосподарською машиною змінної маси // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2014. – Вип. 148. – С. 280 – 286.
5. *Лебедєв А. Т., Артьомов М. П., Шуляк М. Л., Лебедєв І. А.* Забезпечення стійкості і керованості сільськогосподарських агрегатів із змінною масою // Технічні науки : зб. Наук. Праць ВНАУ. – Вінниця : ВНАУ, 2015. – Вип. 1 (89). – Т. 1. – С. 57 – 62.
6. *Колесник І. В., Шуляк М. Л., Шевченко І. О.* Визначення керованості транспортного агрегату в залежності від зміни маси вантажу // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2015. – №. 160. – С. 255 – 260.
7. *Кулаковский Б. Л.* Исследование поведения жидкости в ёмкости автоцистерны в дорожных условиях // Пожарная техника и тушение пожаров. – 1979. – Вып. 18. – С. 10 – 16.
8. *Mallikarjunarao C., Fancher P. S.* Tank trailer stability analysis // Ann Arbor : Highway Safety Research Institute, 1979. – 153 p.
9. *Шимановский А. О., Куземкина Г. М.* Динамическая нагруженность конструкции цистерны при торможении // Автомобильный транспорт. – 2006. – № 19. – С. 32 – 34.
10. *Гаврилов А. А., Власов Ю. Л., Морозов Н. А.* Динамическая модель относительного покоя жидкости в автоцистерне при равномерном движении по криволинейному участку дороги // Вестник ОГУ. – 2014. – №10 (171). – С. 44 – 48.
11. *Кожушко А. П.* Підвищення техніко-економічних показників колісних тракторів з безступінчастими трансмісіями раціональною зміною параметрів регулювання гідромашин в процесі розгону : автореф. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.22.02 / А.П. Кожушко. – Харків, 2016. – 24 с.
12. *Ребров А. Ю., Коробка Т. А., Лахман С. В.* Математическая модель дизельного двигателя в безразмерных величинах с учетом его загрузки и подачи топлива // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Транспортне машинобудування. – 2012. – № 19. – С. 31 – 36.
13. *Кожушко А. П., Григор'єв О. Л.* Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 41 – 51.
14. *Кальченко Б. І., Кожушко А. П., Кісельов А. Р.* Оцінка плавності руху самохідної машини при впливі нерівностей поверхні // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 56 – 63.
15. *Геворкян Ю. Л., Григорьев А. Л.* Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2002. – 542 с.
16. *Кожушко А. П.* Коливання механічних систем в автомобіле- та тракторобудуванні : навчальний посібник. – Харків : ФОП Панов А.М., 2018. – 316 с.

17. *Кальченко Б. І., Ребров О. Ю., Кожушко А. П., Мамонтов А. Г.* Плавність руху як складова динаміки трактора : монографія. – Харків : ФОП Панов А.М., 2018. – 164 с.
18. *Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С.* Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 7 (124). – С. 100 – 110.
19. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. – М. : Мир, 1982. – 520 с.

References (transliterated)

1. Lezhenkin A. N., Grigorenko S. M. Modelirovanie protsessa dvizheniya agregata s peremennoy massoy [Modeling the process of movement of a unit of variable mass]. *Naukovyy visnyk TDATU* [Scientific herald of TDATU]. Melitopol, 2012, vol. 2, pp. 80–86.
2. Kravchenko A. P., Nozhenko E. S., Vershina G. A., Pilatov A. Yu. Obschaya metodika minimizatsii funktsii raskhoda topliva mashinotraktornogo agregata s pritsepom peremennoy massy [General methodology for minimizing fuel consumption by tractor unit with variable mass trailer]. *Visnyk SevNTU* [Journal of the Sevastopol National Technical University]. Sevastopol, 2013, vol. 143, pp. 215–219.
3. Lezhenkin A. N., Kolomiets S. M. Mekhaniko-matematicheskie osnovy analiza dvizheniya pritsepnogo uborochnogo agregata s peremennoy massoy [Mechanical and mathematical foundations of motion analysis of a trailed harvesting unit with variable mass]. *Universitetskaya nauka* [University science]. 2017, vol. 1, pp. 125–130.
4. Shulyak M. L. Pidvyshchennia efektyvnosti ekspluatatsii energonasychenogo traktora v agregati z sil's'kogospodars'koiu mashynoyu zminnoyi masy [Improving performance efficiency of power tractors in the unit with variable mass agricultural machines]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil's'kogo gospodarstva imeni Petra Vasylenka* [Journal of Petro Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2014, vol. 148, pp. 280–286.
5. Lebediev A. T., Artyiomov M. P., Shulyak M. L., Lebediev I. A. Zabezpechennya stiykosti i kerovanosti sil's'kogospodars'kykh agregativ iz zminnoyu masoyu [Providing stability and controllability of agricultural units of variable weight]. *Tekhnichni nauky : zb. Nauk. Prats' VNAU* [Technical sciences : Col. of Scientific Works of VNUU]. Vinnytsia, VNAU Publ., 2015, vol. 1, pp. 57–62.
6. Kolesnyk I. V., Shulyak M. L., Shevchenko I. O. Vyznachennia kerovanosti transportnogo agregatu v zalezhnosti vid zminy masy vantazhu [Determination of the handling of a transport unit depending on the weight change of the load]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu sil's'kogo gospodarstva imeni Petra Vasylenka* [Journal of Petro Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, KhNTUSG Publ., 2015, vol. 160, pp. 255–260.
7. Kulakovskiy B. L. Issledovanie povedeniya zhidkosti v emkosti avtotsisterny v dorozhnykh usloviyakh [Investigation of the behavior of fluid in the container tanker on the road]. *Pozharnaya tekhnika i tushenie pozharov* [Fire equipment and fire extinguishing]. 1979, vol. 18, pp. 10–16.
8. Mallikarjunarao C., Fancher P. S. Tank trailer stability analysis. Ann Arbor : Highway Safety Research Institute. 1979. 153 p.
9. Shimanovskiy A. O., Kuzemkina G. M. Dinamicheskaya nagruzhennost' konstruktsii tsisterny pri tormozhenii [Dynamic loading of the tank structure during braking]. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2006, vol. 19, pp. 32–34.
10. Gavrilov A. A., Vlasov Yu. L., Morozov N. A. Dinamicheskaya model' otnositel'nogo pokoya zhidkosti v avtotsisterne pri ravnomernom dvizhenii po krivolineynomu uchastku dorogi [Dynamic model of relative rest of fluid in a tank truck during uniform motion along a curved section of the road]. *Vestnik OGU* [Bulletin of OGU]. 2014, vol. 10 (171), pp. 44–48.
11. Kozhushko A. P. (2016). *Pidvyshchennya tekhniko-ekonomichnykh pokaznykiv kolisnykh traktoriv z bezstupinchastymy transmisiyamy ratsional'noyu zminoyu parametriv regulyuvannya gidromashyn v protsesi rozggonu : avtoref. na zdobuttya nauk. stupenya kand. tekhn. nauk : spets. 05.22.02* [Improving technical and economic indicators of wheeled tractors with continuously variable transmission by rational change of regulation parameters of hydromachines during acceleration : Candidate of Science Thesis, spec. 05.22.02]. Kharkiv, 2016. 24 p.
12. Rebrov A. Y., Korobka T. A., Lakhman S. V. Matematicheskaya model' dizel'nogo dvigatelya v bezrazmernykh velichinakh s uchetom ego zagruzki i podachi topliva [Mathematical model of diesel engine in terms of dimensionless quantities accounting for its load and fuel supply]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Transtortne mashinobuduvannya* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Transport Engineering]. 2012, vol. 19, pp. 31–36.
13. Kozhushko A. P., Grygoriev A. L. Matematychne modelyuvannya nyz′kochastotnykh kolyvan′ v″yazkoyi ridyny v horyzontal′niy yemnosti z vil′noyu poverkhneyu [Mathematical modeling of ow-friquency oscillations of viscous fluid in horizontal container with free surface]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, vol. 3 (1279), pp. 41–51.
14. Kal'chenko B. I., Kozhushko A. P., Kiselev A. R. Otsinka plavnosti rukhu samokhidnoyi mashyny pry vplyvi nerivnostey poverkhni [Evaluation of smoothness of motion of self-propelled machine when exposed to surface irregularities].Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI» [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, vol. 30 (1252), pp. 56 – 63.
15. Gevorkyan Yu. L., Grigoriev A. L. *Osnovy lineynoy algebry i eyo prilozheniy v tekhnike : uchebnik* [Fundamentals of linear algebra and its applications in technology : Textbook]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2002. 542 p.
16. Kozhushko A. P. *Kolyvannya mekhanichnykh system v avtomobile- ta traktorobuduvanni : navchal'nyy posibnyk* [Vibrations of mechanical systems in automotive and tractor engineering : tutorial]. Kharkov, FOP Panov A.M. Publ., 2018. 316 p.
17. Kal'chenko B. I., Rebrov A. Y., Kozhushko A. P., Mamontov A. G. *Plavnist' rukhu yak skladova dynamiky traktora : monografiya* [Smoothness of motion as a component of tractor dynamics: monograph]. Kharkov, FOP Panov A.M. Publ., 2018. 164 p.
18. Shevchenko S. A., Grigoriev A. L., Stepanov M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchete teploobmena gaza so stenkami polostey i utochnenii sil, deystvuyushhikh na klapany regulyatorov [Modelling of the LRE pneumatic starting system at taking into account the heat exchange between gas and cavity walls, as well as refinement of the forces acting on the regulator poppets]. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aviation and space equipment and technology]. 2015, no. 7(124), pp. 100–110.
19. Kukhling H. *Spravochnik po fizike* [Handbook of Physics]. Moscow, Mir Publ., 1982. 520 p.

Надійшла (received) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

УДК 006.9:53.089.68:543

І. М. КОРЖОВ

ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ І ПРАКТИКИ КОНТРОЛЮ ТА ДІАГНОСТУВАННЯ В РОЗРІЗІ ПЕРЕВІРКИ КВАЛІФІКАЦІЇ ЛАБОРАТОРІЙ

Розглянуто перспективи розвитку теорії та практики контролю та діагностування складних промислових об'єктів шляхом підвищення точності вимірювань, що забезпечується принципом єдності вимірювання в Україні, для забезпечення якого є необхідним організація та проведення перевірок кваліфікацій калібрувальних, повірочних, випробувальних лабораторій. Розглянуто світовий стан, тенденції, перспективи перевірки кваліфікації та міжлабораторних порівнянь результатів калібрувальних, повірочних, випробувальних лабораторій. Розглянуті основні вимоги міжнародних нормативних документів у сфері перевірки кваліфікації щодо учасників програм перевірки кваліфікації та провайдерів перевірки кваліфікації, також розглянуті основні питання щодо переваг та необхідності перевірки кваліфікації, її сучасний стан в Україні та перспективи розвитку. Наведені результати діяльності Державного підприємства «Харківстандартметрологія» в якості провайдера перевірки кваліфікації згідно з міжнародним стандартом EN ISO/IEC 17043 «Conformity assessment – General requirements for proficiency testing» («Оцінка відповідності. Загальні вимоги до перевірки кваліфікації») та допоміжні статистичні інструменти, що надає зазначений провайдер перевірки кваліфікації для аналізу та підтримки якості метрологічних послуг, що надають учасники програм перевірки кваліфікації. Викладений матеріал може бути корисним для подальшого розвитку теорії та практики контролю та діагностування складних промислових об'єктів, для використання персоналом калібрувальних, повірочних, випробувальних лабораторій України та для виробників засобів, приладів, систем контролю та діагностування складних промислових об'єктів з точки зору вибору постачальника якісних метрологічних послуг для досягнення цілей підвищення точності та надійності своєї продукції.

Ключові слова: єдність вимірювань, перевірка кваліфікація, EN ISO/IEC 17043, провайдер перевірки кваліфікації, міжлабораторні порівняння, координатор.

И. М. КОРЖОВ

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ В РАЗРЕЗЕ ПРОВЕРКИ КВАЛИФИКАЦИИ ЛАБОРАТОРИЙ

Рассмотрены перспективы развития теории и практики контроля и диагностирования сложных промышленных объектов путем повышения точности измерений, обеспечивающиеся принципом единства измерения в Украине, для обеспечения которого необходимо организация и проведение проверок квалификации калибровочных, поверочных, испытательных лабораторий. Рассмотрены мировое состояние, тенденции, перспективы проверки квалификации и межлабораторных сравнений результатов калибровочных, поверочных, испытательных лабораторий. Рассмотрены основные требования международных нормативных документов в области проверки квалификации в отношении участников программ проверки квалификации и провайдеров проверки квалификации, также рассмотрены основные вопросы о преимуществах и необходимости проверки квалификации, её современное состояние в Украине и перспективы развития. Приведены результаты деятельности Государственного предприятия «Харьковстандартметрология» в качестве провайдера проверки квалификации в соответствии с международным стандартом EN ISO/IEC 17043 «Conformity assessment – General requirements for proficiency testing» («Оценка соответствия. Общие требования к проверке квалификации») и вспомогательные статистические инструменты, которые предоставляет указанный провайдер проверки квалификации для анализа и поддержки качества метрологических услуг, предоставляемых участниками программ проверки квалификации. Изложенный материал может быть полезным для дальнейшего развития теории и практики контроля и диагностирования сложных промышленных объектов, для использования персоналом калибровочных, поверочных, испытательных лабораторий Украины и для производителей средств, приборов, систем контроля и диагностирования сложных промышленных объектов с точки зрения выбора поставщика качественных метрологических услуг для достижения целей повышения точности и надежности своей продукции.

Ключевые слова: единство измерений, проверка квалификация, EN ISO/IEC 17043, провайдер проверки квалификации, межлабораторные сравнения, координатор.

I. M. KORZHOV

PERSPECTIVES FOR THE DEVELOPMENT OF THEORY AND PRACTICE OF CONTROL AND DIAGNOSTICS IN TERMS OF PROFICIENCY TESTING OF LABORATORIES

The prospects of development of the theory and practice of control and diagnostics of complex industrial objects by increasing the accuracy of measurements, which is ensured by the principle of unity of measurement in Ukraine, are considered. To ensure the unity of measurement in Ukraine, it is necessary to organize and conduct inspections of proficiency of calibration, verification, and testing laboratories. The world situation, trends, prospects of proficiency testing and interlaboratory comparisons of the results of calibration, verification, testing laboratories are considered. The main requirements of the international proficiency testing regulations regarding proficiency testing program participants and proficiency testing providers are considered. The main questions regarding the advantages and necessity of proficiency testing, its current state in Ukraine, and prospects of development are considered. The results of the activity of the State Enterprise «Kharkivstandardmetrology» as the proficiency testing provider in accordance with the international standard EN ISO/IEC 17043 "Conformity assessment – General requirements for proficiency testing" and the auxiliary statistical tools provided by the specified proficiency testing provider for the analysis and quality assurance of metrological services are discussed. The presented material may be useful for further development of the theory and practice of control and diagnostics of complex industrial objects, for use by personnel of calibration, verification, testing laboratories of Ukraine, and for manufacturers of tools, devices, systems of control and diagnostics of complex industrial objects in terms of choosing the provider of quality metrological services.

Key words: unity of measurement, proficiency testing, EN ISO/IEC 17043, proficiency testing provider, interlaboratory comparison, coordinator.

Вступ. Напрям наукових і технічних досліджень в області контролю та діагностування об'єктів промисловості (дизельні і газотурбінні двигуни, будівельні, дорожні, сільськогосподарські машини і механізми, технологічні агрегати, енергетичне обладнання і т.д.) є досить перспективним [1 – 2]. Над подальшим розвитком теорії і практики в цій області працює багато вчених, організацій, фірм. Спрямувань з удосконалення пристроїв, систем, технологій, алгоритмічного і програмного забезпечення є величезна кількість. Як правило, всі дослідження стосуються удосконалення первинних і вторинних перетворювачів неелектричних величин, розробки нових та удо-

© І. М. Коржов, 2018

сконаленню існуючих алгоритмічних і програмних забезпечень координатора (спостерігача) другого рівня ієрархії [2 – 3], підвищення технічних властивостей джерел живлення, допоміжної апаратури тощо [1 – 3].

Не менш важливим напрямом досліджень в області контролю і діагностування є єдність вимірювань лабораторіями України. Така задача була виявлена під час наукового співробітництва між НТУ «Харківський політехнічний інститут» та ДП «Харківський регіональний науково-виробничий центр стандартизації, метрології та сертифікації». Саме цей напрям, *перевірка кваліфікації (proficiency testing)* – оцінювання характеристик функціонування учасників по заздалегідь встановленим критеріям за допомогою міжлабораторних порівнянь [4], розглянуто у цій статті.

Аналіз сучасного стану перевірки кваліфікації. Перевірка кваліфікації – ефективний інструмент зовнішньої оцінки якості метрологічних робіт та підтвердження поточної компетентності лабораторії, дозволяє виявляти недоліки в роботі лабораторії, підвищує довіру замовників до результатів метрологічних робіт. Участь в перевірці кваліфікації є необхідною умовою відповідності лабораторії ISO/IEC 17025 [5], що визначено у ISO/IEC 17011 [6] та оформлено у вигляді концепції та політики Національного агентства з акредитації України (НААУ) «Концепція оцінювання компетентності випробувальних лабораторій на основі результатів участі в МПР» [7] та «Політика НААУ щодо участі органів з оцінки відповідності у перевірках кваліфікації» [8], а також результати участі враховуються при оцінюванні стану вимірювань на відповідність ISO 10012 [9].

Основні вимоги до проведення перевірки кваліфікації визначені у міжнародному стандарті EN ISO/IEC 17043 [4], документах ILAC, EA, APLAC, НААУ. Стандарт EN ISO/IEC 17043 [4] є базовим документом, що регламентує проведення перевірки кваліфікації, включно з основними вимогами до організацій, що проводять перевірку кваліфікації, та організаційними аспектами, такими як підготовка зразка перевірки кваліфікації, перевірка його однорідності та стабільності, статистична обробка результатів участі у перевірці кваліфікації тощо. Стандарт EN ISO/IEC 17043 [4] було підготовлено для забезпечення всіх зацікавлених сторін узгодженою базою для визначення компетентності організацій, які надають послуги перевірки кваліфікації, та містить не лише настанови щодо розроблення та проведення перевірки кваліфікації, вибору та застосування перевірки кваліфікації органами з акредитації лабораторій, настанови стосовно належних статистичних методів, але й корисні описи типових видів перевірки кваліфікації.

Згідно EN ISO/IEC 17043 [4] перевірку кваліфікації реалізує провайдер перевірки кваліфікації. У світі існує велика кількість акредитованих провайдерів перевірки кваліфікації, наприклад, у міжнародній електронній базі провайдерів перевірки кваліфікації EPTIS (http://www.eptis.org/about.htm) [10] учасникам пропонується більше трьох тисяч дев'ятисот програм перевірки кваліфікації з більше ніж сорока країн світу, що свідчить про ефективність та необхідність проведення такої перевірки. На сьогоднішній день в Україні існує лише один акредитований НААУ провайдер перевірки кваліфікації – ДП «Харківстандартметрологія» (атестат № 50003 від 03.12.2018 р.) [11].

Аналіз досвіду діяльності і сталої практики таких організацій як ILAC, Eurachem, EUROLAB, EA, APLAC тощо, показує, що саме перевірка кваліфікації (професійного рівня) зі застосуванням міжлабораторних порівнянь є найбільш раціональним методом перевірки технічної компетентності калібрувальних та вимірювальних лабораторій.

Необхідність у постійній впевненості у відповідній діяльності лабораторії є принципово важливою не лише для лабораторії та їхніх користувачів, але й для інших зацікавлених сторін, зокрема регуляторних органів, органів з акредитації лабораторій та інших організацій, що встановлюють вимоги до лабораторій. Потреба в перевірці кваліфікації (професійного рівня) зростає й для інших видів діяльності з оцінювання відповідності, таких як інспектування або сертифікація виробів.

ILAC – це міжнародний орган з акредитації лабораторій, що складається з органів акредитації і зацікавлених організацій зі всього світу. Вимоги ILAC щодо перевірки кваліфікації викладені у ILAC-P9:06 [12], у якому викладені основні положення та вимоги до формування політик органів з акредитації, що входять до ILAC, стосовно участі лабораторій всіх типів (калібрувальних/випробувальних) та органів з інспектування (при необхідності) у перевірці кваліфікації для цілей підтвердження своєї компетенції у заявлених сферах акредитації. Зазначений документ опублікований та доступний на офіційній веб-сторінці ILAC (ilac.org).

EA – це об'єднання національних органів акредитації в Європі, що офіційно визнані їхніми національними урядами для оцінки та перевірки на відповідність міжнародним стандартам організації, що здійснюють оціночні послуги, такі як сертифікація, верифікація, перевірка, випробування та калібрування (також відомі як послуги оцінки відповідності). Вимоги EA щодо перевірки кваліфікації викладені у EA-4/18 INF [13], у якому викладені принципи визначення рівня участі (кількості суб-дисциплін (напрямків), за якими слід прийняти участь у перевірці кваліфікації) та частоти участі (кількість участей у перевірках кваліфікації, рекомендований мінімум складає один раз за зазначеними суб-дисциплінами за період циклу акредитації (час між повторними оцінками органу акредитації)) з приведенням прикладів з практики. Зазначений документ опублікований та доступний на офіційній веб-сторінці EA (www.european-accreditation.org/).

APLAC – це об'єднання органів акредитації в Азіатсько-Тихоокеанському регіоні, які акредитують лабораторії, інспекційні органи та виробників референтних матеріалів, що визнано Азіатсько-Тихоокеанським економічним співробітництвом як один із п'яти регіональних органів спеціалістів. Вимоги APLAC щодо перевірки кваліфікації викладені у серії документів APLAC PT і в тому числі такими: APLAC PT 001 [14], APLAC PT 002 [15], APLAC PT 003 [16], APLAC PT 005 [17], APLAC PT 006 [18]. В зазначених документах розглядаються основні питання організації та проведення перевірки кваліфікації; серед висвітлюваних питань слід зазначити чітке завдання мінімальної частоти участі у перевірках кваліфікації в залежності від виду суб-дисциплін, які розді-

лені за видом на калібрувальні (розділені за видом вимірювальної величини на сімнадцять груп, рекомендований мінімум участі у перевірках кваліфікації складає один раз на два роки) та випробувальні (розділені за сферою діяльності (медична, біологічна, хімічна, тощо) на тринадцять груп, рекомендований мінімум участі у перевірках кваліфікації складає від одного разу на два роки до десяти раз на один рік).

EUROLAB було створено в Брюсселі на основі меморандуму про взаєморозуміння, підписаного делегаціями, які представляють приватні та державні лабораторії 17 з 19 країн ЕЕС та EFTA. EUROLAB є юридичною особою у формі міжнародної асоціації згідно з законодавством Бельгії (AISBL – Association Internationale Scientifique sans but Lucratif), яке встановлює її як Європейську федерацію національних асоціацій вимірювань, тестування та аналітичних лабораторій. Вимоги EUROLAB щодо перевірки кваліфікації викладені у серії документів EUROLAB cookbooks – короткі документи з питань якості, які допоможуть лабораторіям дотримуватись вимог ISO/IEC 17025 [5] і в тому числі такими: EUROLAB «Cook Book» – Doc No.2. Rev.2017 [19], EUROLAB «Cook Book» – Doc No.17. 2013 [20], EUROLAB «Cook Book» – Doc No.4. [21], EUROLAB «Cook Book» – Doc No.4.2. [22]. В зазначених документах розглядаються основні питання участі лабораторій у перевірках кваліфікації, з точки зору лабораторій, у тому числі вибір схеми перевірки кваліфікації, використання та аналіз результатів участі тощо.

Вимоги НААУ, як органа з акредитації лабораторій, щодо проведення та участі у перевірках кваліфікації, викладені у документах: Наказ № 108 від 22.04.2015 [23], ЗД-08.00.29:ред. 02 [8], ЗД-08.01.21-ред. 01 [7], ЗД-08.15.31 [24]. Зазначені документи опубліковані на офіційній веб-сторінці НААУ (naau.org.ua). Перевірка кваліфікації розглядається НААУ як важливий інструмент для демонстрації компетентності та підтримання якості технічної діяльності лабораторій та органів з інспектування (якщо це доречно). З цієї причини, лабораторії та органи з інспектування, які перебувають у процесі акредитації або є акредитованими, повинні мати розроблену стратегію участі у відповідних перевірках кваліфікації, що бере до уваги ризики діяльності органів з оцінки відповідності та інші процеси контролю якості та забезпечення якості технічної діяльності. Таку стратегію розробляють для кожного циклу акредитації та у разі потреби актуалізують.

Програми перевірки кваліфікації провайдера перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія». ДП «Харківстандартметрологія», в якості провайдера перевірки кваліфікації, та Відділ прикладної метрології вимірювальних систем і процесів (ВСП), в якості координатора перевірки кваліфікації, регулярно проводить програми перевірки кваліфікації за такими напрямками як калібрування (сорок програм) та випробовування (чотири програми). Програми перевірки кваліфікації за напрямком калібрування охоплюють наступні види вимірювання:

– **AUV** – акустика, ультразвук, вібрація;
– **EM** – електрика та магнетизм;
– **L** – довжина;
– **M** – маса та пов’язані з нею величини;
– **PR** – фотометрія та радіометрія;
– **QM** – фізико-хімічні вимірювання;
– **T** – термометрія;
– **TF** – час і частота.

Кількість програм перевірки кваліфікації за напрямками та видами вимірювань наведено на рис. 1.

Рис. 1 – Програми перевірки кваліфікації за напрямками та видами вимірювань.

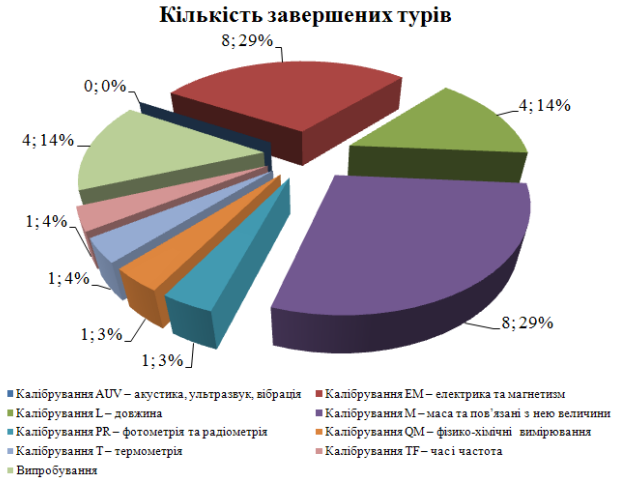


Рис. 2 – Проведені тури програм перевірки кваліфікації за напрямками та видами вимірювань.

Перелік програм перевірки кваліфікацій з інформацією про них, умови участі, а також звіти за завершеними турами програм перевірки кваліфікації наведені на офіційній веб-сторінці провайдера перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія» (http://khsms.com/primaryactivity/metrology/about/type/remont/id/23/) [11].

У період з 2016 року по грудень 2018 року було завершено 28 турів програм перевірки кваліфікації, в яких прийняли участь більше 50-и організацій зі всієї України, у тому числі акредитовані НААУ на відповідність

ISO/IEC 17025 [5] калібрувальні лабораторії. Кількість завершених турів програм перевірки кваліфікації за напрямками та видами вимірювань наведено на рис. 2.

Слід зазначити, що за трьома програмами перевірки кваліфікації проведено більше одного туру, в яких прийняли повторну участь щонайменше десять лабораторій, що складає 25,6 % від загальної кількості лабораторій, що приймали участь у зазначених програмах. Повторна участь у турах програм перевірки кваліфікації необхідна для виконання положень ISO 13528 [25], згідно з якими учасник, у якого діє система управління якістю та який отримав задовільні результати в декількох турах, має право використовувати ці результати в якості доказу того, що він в змозі послідовно отримувати задовільні результати калібрування/випробування.

Повторна участь у турах програм перевірки кваліфікації дає змогу оцінити лабораторії, їх стабільність шляхом побудови контрольних *карт Шухарта* та/або контрольних *карт кумулятивних сум* (*Кусум-карта*) z (z') – індексів згідно з ISO 13528 [25].

Контрольні карти Шухарта – це графічний засіб, що демонструє зміну параметрів процесу проведення вимірювання/калібрування у часі. Контрольна карта Шухарта z (z') – індексів застосовується для забезпечення статистичного контролю стабільності процесу проведення вимірювання/калібрування та своєчасного виявлення нестабільності цього процесу для отримання його керованості. Побудову та інтерпретацію контрольних карт Шухарта описано в ISO 7870-2 [26].

Контрольна карта кумулятивних сум (Кусум-карта) – інформативне графічне представлення даних, один з розповсюджених методів визначення зміни показників якості процесу проведення вимірювання/калібрування. На відміну від контрольних карт Шухарта, контрольні карти кумулятивних сум наглядно демонструють наявні тенденції змін показників якості процесу проведення вимірювання/калібрування. Контрольні карти кумулятивних сум (Кусум-карти) z (z') – індексів можуть забезпечити раннє виявлення того моменту, коли процес проведення вимірювання/калібрування вийде з-під контролю, і дають більш чітке уявлення про поведінку процесу проведення вимірювання/калібрування, ніж звичайна контрольна карта Шухарта. Побудова та інтерпретація контрольних карт кумулятивних сум (Кусум-карт) описано в ISO 7870-4 [27].

Зазначені вище статистичні засоби використовуються провайдером перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія», що дає змогу учасникам програм перевірки кваліфікації отримати додаткову статистичну інформацію про стан своєї лабораторії, зробити висновки про якість своєї роботи, планувати поліпшення якості своїх метрологічних послуг. Приклад контрольної карти Шухарта наведено на рис. 3.

Наведена на рис. 3 контрольна карта Шухарта z – індексів учасника III туру програми перевірки кваліфікації MetrCentr-PT-T-01:2016 свідчить про поліпшення результатів лабораторії у зв'язку з коригувальними діями, проведення яких були рекомендовані через наявність сумнівних результатів участі у першому турі програми перевірки кваліфікації MetrCentr-PT-T-01:2016.

Приклад контрольної карти кумулятивних сум (Кусум-карт) наведено на рис. 4.

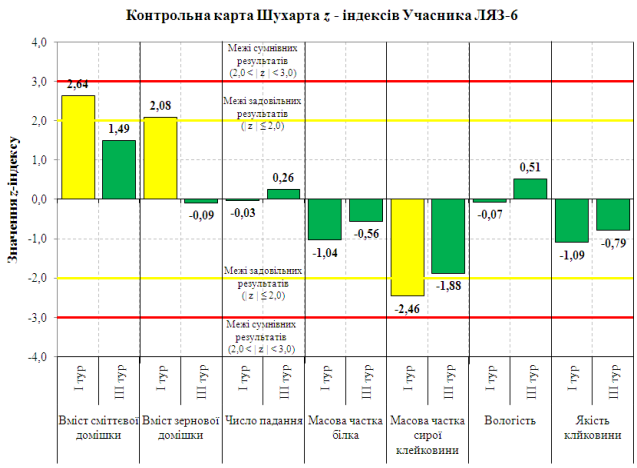


Рис. 3 – Контрольна карта Шухарта z – індексів учасника III туру програми перевірки кваліфікації MetrCentr-PT-T-01:2016.

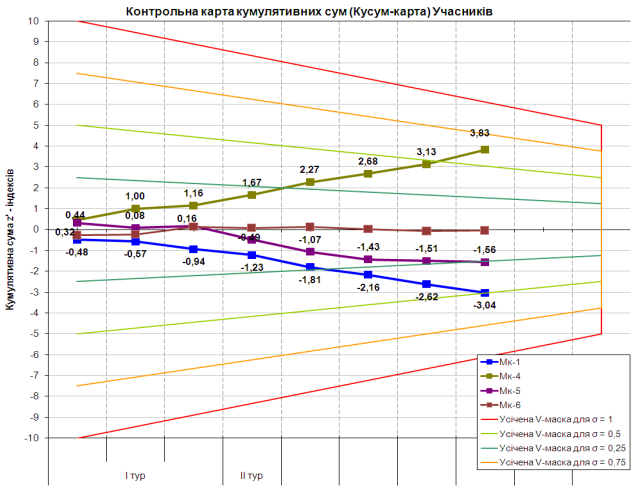


Рис. 4 – Контрольна карта кумулятивних сум (Кусум-карт) z' – індексів учасників II туру програми перевірки кваліфікації MetrCentr-PT-C-01-03:2016.

Наведена на рис. 4 контрольна карта кумулятивних сум (Кусум-карт) z' – індексів учасників II туру програми перевірки кваліфікації MetrCentr-PT-C-01-03:2016 є суміщенням на одному графіку контрольних карт кумулятивних сум (Кусум-карт) чотирьох учасників, що дає змогу порівняти їх результати на протязі двох турів. Для більш зручної інтерпретації також наведені усічені V – маски (один з наглядних графічних методів, що викладено у ISO 7870-4 [27]) для різних значень σ.

У доповнення слід зазначити, що провайдер перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія» у повній відповідності до положень EN ISO/IEC 17043 [4] суворо дотримується вимог конфіденційності учасників програми перевірки кваліфікації та не передає/публікує інформацію про результати участі у програмах перевірки кваліфікації та документи учасників програми перевірки кваліфікації без їх письмової згоди. У всіх офіцій-

них документах провайдера перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія» за результатами програм перевірки кваліфікації учасників знеособлено шляхом присвоєння їм шифрів, які повідомляються виключно учаснику. Своїм шифром учасник може розпоряджатися на власний розсуд. Виключенням є проведення відкритих турів програм перевірки кваліфікації, в яких учасники не зашифровуються. Перед проведенням таких турів всі учасники повідомляються про це письмово, а також вся інформація про особливості відкритого туру публікується на офіційній веб-сторінці провайдера перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія» (http://khsms.com/primaryactivity/metrology/about/type/remont/id/23/) [11].

Висновки. Підсумовуючи все вище зазначене, можливо зробити наступні висновки: використання перевірок кваліфікації є ефективним та об'єктивним засобом для забезпечення єдності вимірювань в Україні, що сприяє розвитку теорії та практики контролю та діагностування складних промислових об'єктів. Участь у перевірці кваліфікації – ефективний та необхідний інструмент для компетентного функціонування вимірювальних та калібрувальних лабораторій, що підтверджує розповсюдженість провайдерів перевірки кваліфікації в світі та значний попит на участь в програмах перевірки кваліфікації, що проводить провайдер перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія».

Список літератури

1. *Щапов П. Ф., Мигущенко Р. П., Кропачек О. Ю., Коржов І. М.* Дослідження кореляційних моделей спектральної нестаціонарності випадкових сигналів // Метрологія та прилади. Науково-виробничий журнал. – Харків, 2018. – №. 5 (73). – С. 11 – 14.
2. *Щапов П. Ф., Аврунин О. Г.* Повышение достоверности контроля и диагностики объектов в условиях неопределённости : монография. – Х. : ХНАДУ, 2011. – 191 с.
3. *Коржов І. М., Кропачек О. Ю.* Реалізація обчислювальних процедур системного інформаційного перетворення нестаціонарних вібросигналів засобами labview // Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава : ПНТУ, 2017. – Т. 6 (46). – С. 76 – 80.
4. EN ISO/IEC 17043:2010 Conformity assessment – General requirements for proficiency testing. – 2010. – 39 p.
5. ISO/IEC 17025:2017 General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. – 2017. – 30 p.
6. ISO/IEC 17011:2017 Conformity assessment – Requirements for accreditation bodies accrediting conformity assessment bodies. – 2017. – 29 p.
7. ЗД-08.01.21-ред. 01 Концепція оцінювання компетентності випробувальних лабораторій на основі результатів участі в МПР. – Режим доступу : https://naau.org.ua/dokumenti-dlya-akreditaciyi/mpr/koncepciya-ocinyuvannya-kompetentnosti-viprobuvalnix-laboratorij-na-osnovi-rezultativ-uchasti-v-mpr/. – Дата звертання : 20 жовтня 2018.
8. ЗД-08.00.29:ред. 02 Політика НААУ щодо участі органів з оцінки відповідності у перевірках кваліфікації. – Режим доступу : https://naau.org.ua/english-polityka-naau-shhodo-uchasti-organiv-z-otsinky-vidpovidnosti-u-mizhlaboratornyh-porivnyannyah-ta-perevirkah-kvalifikatsiyi/. – Дата звертання : 20 жовтня 2018.
9. ISO 10012:2003 Measurement management systems – Requirements for measurement processes and measuring equipment. – 2003. – 19 p.
10. Міжнародна база EPTIS. – Режим доступу : http://www.eptis.org/about.htm. – Дата звертання : 20 жовтня 2018.
11. Перевірка кваліфікації (міжлабораторні порівняння результатів) / Офіційна веб-сторінка провайдера перевірки кваліфікації ДП «Харківстандартметрологія». – Режим доступу : http://khsms.com/primaryactivity/ metrology/about/type/remont/id/23. – Дата звертання : 20 жовтня 2018.
12. ILAC-P9:06 ILAC Policy for Participation in Proficiency Testing Activities. – Australia, 2014. – 8 p.
13. EA-4/18 INF Guidance on the level and frequency of proficiency testing participation. – 2010. – 15 p.
14. APLAC PT 001 Issue No. 5, 03/08 Calibration Interlaboratory Comparisons. – 2008. – 23 p.
15. APLAC PT 002 Issue No. 6, 03/08 Testing Interlaboratory Comparisons. – 2008. – 25 p.
16. APLAC PT 003 Issue No. 15, 11/10 Proficiency Testing Directory. – 2010. – 37 p.
17. APLAC PT 005 Issue No. 2, 09/10 Artefacts for Measurement Audits. – 2010. – 17 p.
18. APLAC PT 006 Issue No. 2, 09/10 Proficiency Testing Frequency Benchmarks. – 2010. – 6 p.
19. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.2. Rev.2017 – Criteria for the Selection of a Proficiency Testing Scheme. – 2017. – 2 p.
20. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.17. Rev.2017 – Interlaboratory Comparison : the Views of Laboratories. – 2017. – 3 p.
21. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.4. Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories. – 2010. – 2 p.
22. EUROLAB "Cook Book" – Doc No.4.2. Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories – rev. 2. – 2010. – 2 p.
23. Наказ № 108 від 22.04.2015 «Щодо впровадження стандарту ISO/IEC 17043:2010 в діяльності НААУ». – Київ : НААУ, 2015. – 2 с.
24. ЗД-08.15.31 Оцінка відповідності. Основні вимоги до проведення перевірки кваліфікації (відповідно до ISO/IEC 17043:2010). – Режим доступу : https://naau.org.ua/rozmishheno-zd-08-15-31-vidpovidno-do-iso-iec-17043-2010-v-redaktsiyi-01/. – Дата звертання : 20 жовтня 2018.
25. ISO 13528:2015 Statistical methods for use in proficiency testing by interlaboratory comparison. – 2015. – 89 p.
26. ISO 7870-2:2013 Control charts – Part 2: Shewhart control charts. – 2011. – 44 p.
27. ISO 7870-4:2011 Control charts – Part 4: Cumulative sum charts. – 2011. – 63 p.

References (transliterated)

1. Schapov P. F., Mygushchenko R. P., Kropachek O. Ju., Korzhov I. M. Doslidzhennya korelyatsiynykh modeley spektral'noyi nestatsionarnosti vypadkovykh sygnaliv [Studying correlation models of spectral non-stationarity of random signals]. *Metrologiya ta prylady*. *Naukovo-vyrobnychyy zhurnal* [Metrology and devices. Scientific and industrial journal]. Kharkiv, 2018, no. 5 (73), pp. 11–14.
2. Schapov P. F., Avrunin O. G. *Povyshenie dostovernosti kontrolya i diagnostiki ob"ektov v usloviyakh neopredelyennosti : monografiya* [Improving reliability of monitoring and diagnostics of objects under indeterminate conditions: monograph]. Kharkov, KnNADU Publ., 2011. 191 p.
3. Korzhov I. M., Kropachek O. Ju. Realizatsiya obchyslyuval'nykh protsedur systemnogo informatsiynogo peretvorennya nestatsionarnykh vibrosygnaliv zasobamy labview [Implementation of computing procedures for system information transformation of non-stationary vibration signals by labview tools]. *Sistemy upravlinnya, navigatsiyi ta zv"yazku. Zbirnyk naukovykh prats'* [Management, navigation, and communication systems. Collection of scientific works]. Poltava, PNTU Publ., 2017, vol. 6 (46), pp. 76–80.
4. EN ISO/IEC 17043:2010 *Conformity assessment – General requirements for proficiency testing*. 2010. 39 p.
5. ISO/IEC 17025:2017 *General requirements for the competence of testing and calibration laboratories*. 2017. 30 p.
6. ISO/IEC 17011:2017 *Conformity assessment – Requirements for accreditation bodies accrediting conformity assessment bodies*. 2017. 29 p.
7. ЗД-08.01.21-rev. 01 *Kontseptsiya otsinyuvannya kompetentnosti vyprobuval'nykh laboratoriy na osnovi rezul'tayiv uchasti v MPR* [Concept of assessment of the proficiency of test laboratories based on the results of participation in the MND]. Available at : https://naau.org.ua/dokumenti-dlya-akreditaciyi/mpr/koncepciya-ocinyuvannya-kompetentnosti-viprobuvalnix-laboratorij-na-osnovi-rezultativ-uchasti-v-mpr/. (accessed 20.10.2018).
8. ЗД-08.00.29-rev. 02 *Polityka NAAU shhodo uchasti organiv z otsinky vidpovidnosti u perevirkakh kvalifikatsiyi* [NAAU policy on participation of conformity assessment bodies in proficiency testing]. Available at : https://naau.org.ua/english-polityka-naau-shhodo-uchasti-organiv-z-otsinky-vidpovidnosti-u-mizhlaboratornyh-porivnyannyah-ta-perevirkah-kvalifikatsiyi/. (accessed 20.10.2018).

9. ISO 10012:2003 *Measurement management systems – Requirements for measurement processes and measuring equipment*. 2003. 19 p.
10. *Mizhnarodna baza EPTIS* [EPTIS international database]. Available at : http://www.eptis.org/about.htm. (accessed 20.10.2018).
11. *Perevirka kvalifikatsiyi (mizhlaboratorni porivnyannya rezul'tativ)* [Proficiency testing (interlaboratory comparison of results)]. Ofitsiyna veb-storinka provaydera perevirky kvalifikatsiyi DP "Kharkivstandartmetrologiya" [Official web-site of the proficiency testing provider SOE “Kharkiv standard metrology”]. Available at : http://khsms.com/primaryactivity/metrology/about/type/repair/id/23. (accessed 20.10.2018)
12. ILAC-P9:06 *ILAC Policy for Participation in Proficiency Testing Activities*. Australia, 2014. 8 p.
13. EA-4/18 INF *Guidance on the level and frequency of proficiency testing participation*. 2010. 15 p.
14. APLAC PT 001 Issue No. 5, 03/08 *Calibration Interlaboratory Comparisons*. 2008. 23 p.
15. APLAC PT 002 Issue No. 6, 03/08 *Testing Interlaboratory Comparisons*. 2008. 25 p.
16. APLAC PT 003 Issue No. 15, 11/10 *Proficiency Testing Directory*. 2010. 37 p.
17. APLAC PT 005 Issue No. 2, 09/10 *Artefacts for Measurement Audits*. 2010. 17 p.
18. APLAC PT 006 Issue No. 2, 09/10 *Proficiency Testing Frequency Benchmarks*. 2010. 6 p.
19. EUROLAB “Cook Book” – Doc No.2. Rev.2017 – *Criteria for the Selection of a Proficiency Testing Scheme*. – 2017. – 2 p.
20. EUROLAB “Cook Book” – Doc No.17. Rev.2017 – *Interlaboratory Comparison : the Views of Laboratories*. – 2017. – 3 p.
21. EUROLAB “Cook Book” – Doc No.4. *Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories*. – 2010. – 2 p.
22. EUROLAB “Cook Book” – Doc No.4.2. *Use of Interlaboratory Comparison Data by Laboratories – rev. 2*. – 2010. – 2 p.
23. Nakaz № 108 vid 22.04.2015 "Schodo vprovadzhennya standartu ISO/IEC 17043:2010 v diyal'nosti NAAU" [Order No. 108 dated April 22, 2015 "Regarding the implementation of the ISO / IEC 17043: 2010 standard in the activities of the NAAU"]. Kyiv, NAAU Publ., 2015. 2 p.
24. 3Д-08.15.31 *Ocinka vidpovidnosti. Osnovni vymohy do provedennja perevirky kvalifikaciji (vidpovidno do ISO/IEC 17043:2010)* [Conformity assessment. Essential requirements for proficiency testing (according to ISO / IEC 17043: 2010)]. Available at : https://naau.org.ua/rozmishheno-zd-08-15-31-vidpovidno-do-iso-iec-17043-2010-v-redaktsiyi-01/. (accessed 20.10.2018).
25. ISO 13528:2015 *Statistical methods for use in proficiency testing by interlaboratory comparison*. 2015. 89 p.
26. ISO 7870-2:2013 *Control charts -- Part 2: Shewhart control charts*. 2011. 44 p.
27. ISO 7870-4:2016 *Control charts – Part 4: Cumulative sum charts*. 2011. 63 p.

Надійшла (received) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Коржов Ігор Михайлович (Коржов Игорь Михайлович, Korzhov Ihor Mykhailovych) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 953-34-69; e-mail: korgiov_igor@mail.ru.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

КОЛИВАННЯ БАЛКИ З БІНАРНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ КРАЇВ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Описано динамічне згинання балки короткочасним силовим імпульсом, симетрично розподіленим по її довжині. Розглянуто варіант спеціального закріплення країв, при якому граничні умови залежать від напряму очікуваного повороту торців балки. Припускається, що під час дії зовнішнього навантаження, та деякий час після нього, кінці балки жорстко затиснуті, а при згинанні розвантаженої балки у протилежний бік вони вільно обіперті, тобто відбувається зміна крайових умов у процесі руху. Цей процес поділено на два етапи. На першому з них розв’язок задачі динаміки розкладено в ряд за формами вільних коливань балки з затиснутими краями, при яких переміщення і кути повороту країв дорівнюють нулю. На другому етапі переміщення і згинальні моменти розкладено в ряд синусів, що задовольняє умовам вільного опирання країв, та реалізовано зшивання розв’язків. Проведені розрахунки показали, що при дії рівномірно розподіленого по довжині балки імпульсу малої тривалості порівняно з періодом основного тону коливань, амплітуда прогину в бік дії навантаження менша за амплітуду переміщення розвантаженої балки у протилежному напрямі, при її вільних коливаннях. Це стосується і амплітуд згинальних моментів по середині балки. Вказаний динамічний ефект, властивий системам з несиметричною характеристикою пружності, пов’язаний з тривалістю дії зовнішнього імпульсу на балку.

Ключові слова: силовий імпульс, згинання балки, бінарне закріплення країв, динамічний ефект несиметрії характеристики пружності.

В. П. ОЛЬШАСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ

КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С БИНАРНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ КРАЕВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Описан динамический изгиб балки кратковременным силовым импульсом, симметрично распределенным по ее длине. Рассмотрен вариант специального закрепления краев, при котором граничные условия зависят от направления ожидаемого поворота торцов балки. Предполагается, что во время действия внешнего нагружения и некоторое время после него, концы балки жестко защемлены, а при изгибе разгруженной балки в противоположную сторону они свободно опертые, то есть происходит изменение граничных условий в процессе движения. Этот процесс разделен на два этапа. На первом из них решение задачи динамики разложено в ряд по формам свободных колебаний балки с защемленными краями, при которых перемещения и углы поворота краев равны нулю. На втором этапе перемещения и изгибающие моменты разложено в ряд синусов, что удовлетворяет условиям свободного опирания краев, и реализовано припасовывание построенных решений. Проведенные расчеты показали, что при действии равномерно распределенного по длине балки импульса малой продолжительности по сравнению с периодом основного тона колебаний, амплитуда прогиба в сторону действия нагрузки меньшая, нежели амплитуда перемещения разгруженной балки в противоположную сторону, при ее свободных колебаниях. Это касается и амплитуд изгибающих моментов по середине балки. Указанный динамический эффект, свойственный системам с несимметричной характеристикой упругости, связан с продолжительностью действия внешнего импульса на балку.

Ключевые слова: силовой импульс, изгиб балки, бинарное закрепление краев, динамический эффект несимметрии характеристики упругости.

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2018

V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY

OSCILLATIONS OF A BEAM WITH BINARY FIXED ENDS UNDER PULSE LOAD

The dynamic bending of a beam by a short-time force pulse symmetrically distributed along its length is described. An option of special fixing of the edges is considered in which the boundary conditions depend on the direction of the expected turning of the ends of the beam. It is assumed that during the action of external loading and for some time thereafter, the ends of the beam are tightly fixed, and when bending the unloaded beam in the opposite direction they are loosely restrained, that is, there is a change in the boundary conditions in the course of motion. This process is divided into two stages. At the first of these the solution to the dynamic problem is decomposed into a series of forms of free oscillations of the beam with fixed edges, under which conditions the displacements and the angles of the edges are equal to zero. At the second stage the displacements and bending moments are decomposed into a series of sines, which satisfies the conditions of free support of the edges. The solutions obtained at each stage are then "stitched" together. The performed calculations show that with the action of a pulse uniformly distributed along the length of the beam, of a small duration in comparison with the period of the main tone of oscillation, the amplitude of the deflection in the direction of the action of the load is smaller than the amplitude of displacement of the unloaded beam in the opposite direction during its free oscillations. This also applies to the amplitudes of bending moments in the middle of the beam. The indicated dynamic effect inherent in systems with asymmetric characteristics of elasticity is related to the duration of the action of the external impulse on the beam.

Key words: force impulse, bending of beam, binary fixing of edges, dynamic effect of asymmetry of elasticity characteristics.

Вступ, актуальність проблеми та огляд публікацій. Імпульсні та ударні навантаження виникають в процесі експлуатації механічних систем. Названі навантаження можуть призвести до руйнування пружних елементів конструкцій або передчасно вивести їх з ладу. Тому дослідженням динаміки коливальних систем при дії імпульсних навантажень приділялась і продовжує приділятись значна увага. Свідченням тому є численні статті та монографічні видання, із яких відзначимо [1 – 4]. В них в основному проводили математичне моделювання руху лінійних систем. Значно менше публікацій стосуються динаміки нелінійних систем при дії короткочасних силових імпульсів. Зазвичай, це системи з одним ступенем вільності [5 – 7]. Виходячи з цього, тут розглядаємо деформування балки з подвійним закріпленням країв, коли граничні умови змінюються в ході руху. Така континуальна система має несиметричну характеристику пружності відносно положення рівноваги, що накладає певні особливості на її динамічну поведінку, при короткочасному навантаженні. Зазначимо, що розглянуте тут закріплення країв втрачає сенс в умовах статичного навантаження балки, як конструктивного елемента. Специфіка закріплення країв проявляється лише в умовах коливань, коли з плином часу замінюються кути нахилу торців балки.

Формування мети дослідження. Метою статті є теоретичне дослідження особливостей руху балки з бінарним закріпленням країв при короткочасному імпульсному навантаженні.

Для досягнення поставленої мети використовуємо метод припасовування розв'язків, які розгортаємо в ряди за формами власних коливань. Рядами виражаємо не тільки прогини, а й згинальні моменти в балці.

Постановка задачі та її розв'язок. На першому етапі $t\in[0;t_*]$ рух балки описуємо диференціальним рівнянням:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=q\left[H\left(x-x_1\right)-H\left(x-x_2\right)\right]\left[H\left(t\right)-H\left(t-\tau\right)\right], \tag{1}$$

у якому $y=y(x,t)$ – переміщення балки вниз відповідно з розрахунковою схемою на рис. 1; $EJ-$ згинальна жорсткість балки; $\rho F-$ її погонна маса; $q-$ інтенсивність рівномірного розподілу навантаження на ділянці $x\in[x_1;x_2]$; $\tau-$ тривалість імпульсу; $H(z)-$ *одиничні функції Хевісайда*; $x-$ поздовжня координата; $t-$ час.

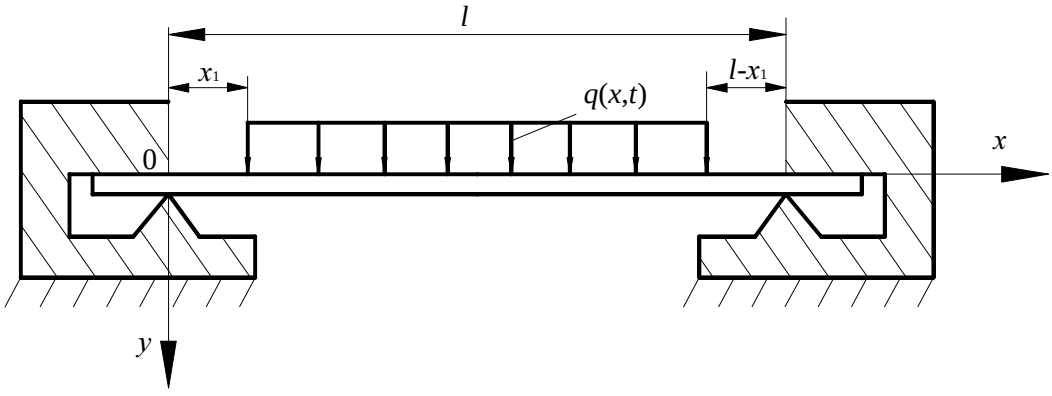


Рис. 1 – Розрахункова схема балки.

Тут припускаємо симетричний розподіл динамічного навантаження відносно середини балки, тобто приймаємо $x_2=l-x_1$, де $l-$ довжина балки.

Її прогини розкладаємо в ряд:

$$y(x,t)=\sum_{m=1,3,\ldots} f_m(t)\cdot X\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right), \tag{2}$$

який задовольняє умовам жорсткого затиснення країв:

$$y(0,t)=0;\quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0;\quad y(l,t)=0;\quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

Множник $X(\xi_m)$ виражаємо через тригонометричні та гіперболічні функції за формулою:

$$X(\xi_m)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(\xi_m)-\cos(\xi_m)-\beta_m\left(\operatorname{sh}(\xi_m)-\sin(\xi_m)\right)\right],$$

де $\xi_m=\lambda_m x/l$.

Власні числа λ_m – це корені трансцендентного рівняння:

$$\operatorname{ch}(\lambda_m)\cdot\cos(\lambda_m)=1.$$

Перше з них має наближене значення $\lambda_1\approx 4,730040745$. Решту λ_m, при $m>1$, можна обчислити за ітераційною формулою:

$$\lambda_m=(2m+1)\frac{\pi}{2}-(-1)^m\arcsin\frac{2\exp(-\lambda_m)}{1+\exp(-2\lambda_m)},$$

приймаючи початковим наближенням $\lambda_m\approx(2m+1)\frac{\pi}{2}$.

Параметр β_m пов'язаний з λ_m співвідношенням:

$$\beta_m=\frac{\operatorname{ch}\lambda_m-\cos\lambda_m}{\operatorname{sh}\lambda_m-\sin\lambda_m}=\frac{1+\exp(-2\lambda_m)-2\exp(-\lambda_m)\cos\lambda_m}{1-\exp(-2\lambda_m)-2\exp(-\lambda_m)\sin\lambda_m}.$$

Тому, знаючи λ_m, легко обчислити і відповідне йому β_m.

Підставляючи ряд (2) в (1), з урахуванням того, що:

$$\int_0^l X\left(\lambda_m\frac{x}{l}\right)\cdot X\left(\lambda_m\frac{x}{l}\right)dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ l/4 & m=n,\end{cases}$$

одержуємо диференціальні рівняння для визначення невідомих функцій $f_m(t)$:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2}+\Omega_m^2 f_m=\frac{4q}{l\rho F}\cdot S(\lambda_m)\left[H(t)-H(t-\tau)\right]. \tag{3}$$

Тут $\Omega_m=\frac{\lambda_m^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$; $S(\lambda_m)=\int_{x_1}^{x_2}X\left(\lambda_m\frac{x}{l}\right)dx$.

Останній інтеграл виражається в елементарних функціях:

$$S(\lambda_m)=\frac{l}{2\lambda_m}\left\{\operatorname{sh}(z_2)-\operatorname{sh}(z_1)-\sin(z_2)+\sin(z_1)-\beta_m\left[\operatorname{ch}(z_2)+\cos(z_2)-\operatorname{ch}(z_1)-\cos(z_1)\right]\right\}, \tag{4}$$

де $z_1=\frac{\lambda_m x_1}{l}$; $z_2=\frac{\lambda_m x_2}{l}$.

Зі збільшенням m швидко зростають λ_m і значення гіперболічних функцій. Щоб запобігти переповненню при комп'ютерних обчисленнях $S(\lambda_m)$, виразу (4) можна надати іншу форму. Для цього слід ввести допоміжну функцію:

$$F(z)=\frac{1}{2}(1-\beta_m)e^z=\frac{\cos\lambda_m-\sin\lambda_m-\exp(-\lambda_m)}{1-\exp(-2\lambda_m)-2\exp(-\lambda_m)\sin\lambda_m}\exp\left(-(\lambda_m-z)\right), \tag{5}$$

яка спадає при зростанні λ_m.

Тоді:

$$S(\lambda_m)=\frac{l}{2\lambda_m}\left\{F(z_2)-F(z_1)+\frac{1+\beta_m}{2}\left[\exp(-z_1)-\exp(-z_2)\right]-\sin z_2+\sin z_1-\beta_m(\cos z_2-\cos z_1)\right\}$$

і не буде суттєвого зростання доданків у виразі $S(\lambda_m)$.

Обчислення $S(\lambda_m)$ спрощується, коли балка рівномірно навантажена за всією її довжиною, тобто коли $z_1=0$, $z_2=\lambda_m$. У цьому випадку:

$$S(\lambda_m)=\frac{l}{2\lambda_m}\left\{2\beta_m+(1-\beta_m)\cos\lambda_m-(1+\beta_m)\left[\sin\lambda_m+\exp(-\lambda_m)\right]\right\}. \tag{6}$$

Щоб одержати вираз (6), користуючись (4), треба прийняти до уваги, що:

$\operatorname{ch}\lambda_m-\beta_m\operatorname{sh}\lambda_m-\cos\lambda_m+\beta_m\sin\lambda_m=0$; $(1-\beta_m)\exp(\lambda_m)=2\cos\lambda_m-2\beta_m\sin\lambda_m-(1+\beta_m)\exp(-\lambda_m)$.

Розв'язки диференціальних рівнянь (3) при нульових початкових умовах:

$$f_m(0)=0;\quad \left.\frac{d\,f_m}{d\,t}\right|_{t=0}=0,$$

мають вигляд:

$$f_m(t)=\frac{4qS(\lambda_m)}{l\rho F\Omega_m^2}\varphi_m(t),\quad \varphi_m(t)=\begin{cases}1-\cos(\Omega_m t) & t\le\tau\\ 2\sin\dfrac{\Omega_m\tau}{2}\sin\left(\Omega_m\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\right) & \text{при}\\ & t\ge\tau.\end{cases} \tag{7}$$

Тому, у відповідності з (2) і (7):

$$y(x,t)=\frac{4q}{l\rho F}\sum_{m=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2}\varphi_m(t)\cdot X(\xi_m), \tag{8}$$

Взявши з цього виразу дві похідні по x, одержуємо ряд для обчислення згинального моменту:

$$M(x,t)=4ql\sum_{m=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)\varphi_m(t)}{\lambda_m^2}\cdot X_*(\xi_m). \tag{9}$$

Тут:

$$X_*(\xi_m)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\xi_m+\cos\xi_m-\beta_m\left(\operatorname{sh}\xi_m+\sin\xi_m\right)\right].$$

Із (9) випливає формула згинальних моментів на опорах:

$$M(0,t)=M(l,t)=4ql\sum_{m=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)\varphi_m(t)}{\lambda_m^2}.$$

Щоб запобігти переповненню при комп'ютерному обчисленні доданків в часткових сумах рядів (8) і (9), слід прийняти до уваги, що:

$$X_*(\xi_m)=\frac{1}{2}\left[F(\xi_m)+\frac{1+\beta_m}{2}\exp(-\xi_m)+\cos\xi_m-\beta_m\sin\xi_m\right],$$

де $F(\xi_m)-$ допоміжна функція (5).

Побудовані вище формули мають чинність при $t\le t_*$, де t_* час, коли:

$$M(0,t_*)=M(l,t_*)=0.$$

Припускаючи, що тривалість імпульсу $\tau<t_*$, для розрахунку подальшого руху балки розв'язуємо однорідне рівняння:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

при крайових умовах:

$$y(0,t)=y(l,t)=0;\quad \left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0.$$

Розв'язок подаємо у вигляді ряду:

$$y(x,t)=\sum_{n=1,3,\ldots}\left[a_n\cos\left(\omega_n(t-t_*)\right)+b_n\sin\left(\omega_n(t-t_*)\right)\right]\sin(\alpha_n x), \tag{11}$$

де $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{l}$; a_n,b_n- невідомі коефіцієнти.

Із рівності прогинів (8) і (11) при $t=t_*$ випливає, що:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}a_n\sin(\alpha_n x)=\frac{4q}{l\rho F}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2}\varphi_m(t_*)X(\xi_m). \tag{12}$$

Тому

$$a_n=\frac{8q}{l^2\rho F}\sum_{m=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2}\varphi_m(t_*)\int_0^l X(\xi_m)\sin(\alpha_n x)\,dx. \tag{13}$$

Рівність, аналогічну (12), маємо і для похідних по t:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}b_n\omega_n\sin(\alpha_n x)=\frac{4q}{l\rho F}\sum_{m=1,3,\ldots}\frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2}\dot\varphi_m(t_*)X(\xi_m),$$

де $\dot\varphi_m(t_*)=2\Omega_m\cdot\sin\dfrac{\Omega_m\tau}{2}\cos\left(\Omega_m\left(t_*-\dfrac{\tau}{2}\right)\right)$.

Звідси одержуємо:

$$b_n = \frac{8q}{l^2 \rho F \omega_n} \sum_{m=1,3,\ldots} \frac{S(\lambda_m)}{\Omega_m^2} \dot{\varphi}_m(t) \int_0^l X(\xi_m) \sin(\alpha_n x)\, d\, x\,. \qquad (14)$$

Інтеграл по x у виразах (13) і (14) подається в елементарних функціях:

$$\int_0^l X(\xi_m) \sin(\alpha_n x)\, d\, x = n\pi l\, \lambda_m^2 \frac{1+\cos\lambda_m - \beta_m \sin\lambda_m}{\lambda_m^4 - (n\pi)^4},$$

що спрощує обчислення a_n і b_n, які входять в (11). Вони також потрібні і для обчислення згинальних моментів в балці при $t \ge t_*$, бо:

$$M(x,t) = -EJ \sum_{n=1,3,\ldots} \left[a_n \cos\left(\omega_n (t-t_*)\right) + b_n \sin\left(\omega_n (t-t_*)\right) \right] \alpha_n^2 \sin(\alpha_n x)\,. \qquad (15)$$

Отже, є можливість порівняти амплітуди не тільки прогинів, а і згинальних моментів під час відхилення балки вниз і вгору від горизонтального положення.

Аналіз результатів розрахунків. Вони одержані при $EJ = 7{,}35 \cdot 10^5$ Па·м^4; $\rho F = 11{,}5$ кг/м (двотавр № 12), $l = 5$ м; $q = 1800$ Н/м і різних тривалостях імпульсу τ. Обчислені прогини середини балки $(x = l/2)$ для трьох тривалостей імпульсу записано в табл. 1. Там також вказано наближено час, коли прогини досягають екстремальних значень. При $\tau = 0{,}01$ с і $\tau = 0{,}015$ с амплітуди прогинів балки вниз менші за амплітудні переміщення балки вгору. При $\tau = 0{,}025$ с маємо супротивну нерівність. Таким чином, динамічний ефект несиметрії пружної характеристики балки не проявляється у третьому випадку навантаження.

Це стосується і згинальних моментів по середині балки, що записані в табл. 2. При $\tau = 0{,}01$ с і $\tau = 0{,}015$ с амплітуди згинальних моментів при відхиленні балки вниз менші за амплітуди моментів при переміщеннях балки вгору.

Таблиця 1 – Прогини балки при різних тривалостях імпульсу

$10^2 t$, с	$\tau = 0{,}01$ с	$\tau = 0{,}015$ с	$\tau = 0{,}025$ с
	Значення $10^3 y(0{,}5l, t)$, м		
0,5	2,325	2,325	2,325
1,0	6,609	6,609	6,609
1,189	7,322 (max)	–	–
1,4	6,513	8,010	8,010
1,417	–	8,012 (max)	–
1,417	–	–	8,012 (max)
2,0	–1,829	2,460	4,785
2,5	–8,129	–5,621	0,747
3,448	–14,793 (min)	–	–
3,727	–	–16,212 (min)	–
4,0	–12,522	–15,059	–4,826
4,271	–	–	–5,073 (min)
4,5	-7,131	–11,476	–4,751
5,0	–0,586	–4,615	–3,601

Таблиця 2 – Екстремальні значення згинальних моментів при $x = l/2$ і час їх досягнення

τ, с	$M(l/2,\ t_0)$, Нм	t_0, с	$M(l/2,\ t_1)$, Нм	t_1, с
0,010	3765	0,0120	–4912	0,0343
0,015	4017	0,0154	–5312	0,0373
0,025	4015	0,0155	–1787	0,0430

На рис. 2 зображено графіки згинальних моментів на опорах, що виникають на першому етапі руху. Максимуми цих моментів більші ніж екстремальні значення згинальних моментів по середині балки. Отже перерізи балки на опорах найбільш небезпечні з позицій руйнування.

Інформація про швидкість збіжності рядів (8), (9) і (11), (15) надана в табл. 3. Ряди для прогинів збігаються досить швидко, де частково сума з $m_* = 5$ членів дає точність в три знаки після коми. Збіжність рядів для згинальних моментів значно гірша. Для отримання задовільної точності в рядах (13), (14), (15) по m і n доводиться обчислювати по $m_* = n_* = 50$.

Аналіз показує, що динамічний ефект несиметрії пружної характеристики системи залежить від тривалості навантаження і найбільш чітко проявляється, коли:

$$\tau \approx (2j-1)\frac{\pi}{\Omega_1},$$

де $j = 1, 2, 3, \ldots$.

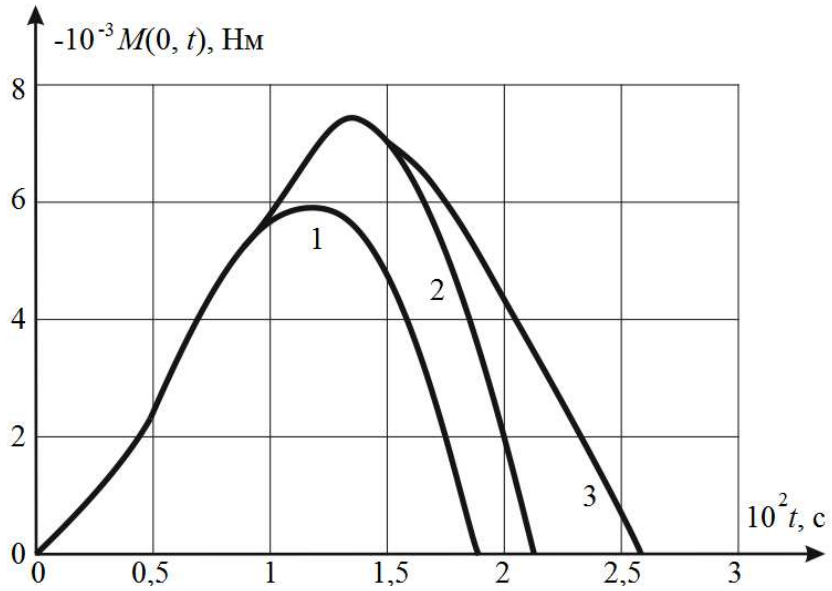


Рис. 2 – Графіки згинальних моментів на опорах: 1 – $\tau = 0{,}01$ с; 2 – $\tau = 0{,}015$ с; 3 – $\tau = 0{,}025$ с.

Таблиця 3 – Інформація про швидкість збіжності рядів

$100t$, с	m_*	$10^3 y(l/2,t)$, Нм	$M(l/2,t)$, Нм	$M(0,t)$, Нм
1,0	1	6,608	3327,27	–5474,08
1,0	5	6,609	3361,73	–5558,46
1,0	50	6,609	3362,63	–5574,67
1,0	200	6,609	3362,63	–5574,93
1,5	1	7,942	3998,78	–6578,87
1,5	5	7,938	3994,37	–6741,90
1,5	50	7,938	3984,89	–6778,15
1,5	200	7,938	3984,88	–6778,46
2,5	1	–5,625	–1632,22	–
2,5	5	–5,621	–1559,31	–
2,5	50	–5,621	–1566,82	–
2,5	200	–5,621	–1566,91	–

Вказаний ефект не виникає при тривалостях імпульсу:

$$\tau \approx 2j\frac{\pi}{\Omega_1}.$$

Висновки. Застосований метод припасовування розв'язків у вигляді рядів за формами вільних коливань виявився ефективним при розрахунку динамічного деформування балки з нетрадиційним закріпленням країв. Дослідження показало, що існують такі тривалості імпульсного навантаження балки з бінарними граничними умовами, коли її прогини у напрямі прикладеного імпульсу менші за прогини у зворотному напрямі. Це стосується і згинальних моментів в окремих перерізах, зокрема по середині балки. Максимуми згинальних моментів на опорах при рівномірному розподілі навантаження по довжині балки більші ніж максимуми згинальних моментів по середині балки, що має місце і в умовах статичного навантаження.

Список літератури

1. *Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г.* Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – Киев : Наукова думка, 1978. – 183 с.
2. *Кохманюк С. С., Дмитриев А. С., Шелудько Г. А.* Динамика конструкций при воздействии кратковременных загрузок. – Киев : Наукова думка, 1989. – 304 с.
3. *Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
4. *Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.
5. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94.
6. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка і міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 61– 66.
7. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Коливання осцилятора з м'якою характеристикою пружності, спричинені силовим імпульсом // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2018. – № 1 (88). – С. 38 – 45.

References (transliterated)

1. Filippov A. P., Kokhmanuk S. S., Yanutin E. G. *Deformirovaniye elementov konstruktsiy pod deystviyem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under impact and pulse loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 183 p.
2. Kokhmanuk S. S., Dmitriev A. S., Shelud'ko G. A. *Dinamika konstruktsiy pri vozdeystvii kratkovremennykh zagruzok* [Dynamics of structures under short-term loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989. 304 p.
3. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
4. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
5. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kubichno neliniynogo ostsylyatora, sprychyneni impul'snym navantazhennyam [Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematyhcne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 6 (1228), pp. 86–94.
6. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kvadratychno neliniynogo ostsylyatora sprychyneni impul'snym navantazhennyam [Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnict' mashyn* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Dynamics and durability of machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 39 (1261), pp. 61–68.
7. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya ostsylyatora z m"yakoyu kharakterystykoyu pruzhnosti, sprychyneni sylovym impul'som [Oscillations of an oscillator with soft characteristic of elasticity caused by force pulse]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in engineering and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnytsya, 2018, no. 1 (88), pp. 38–45.

Надійшла (received) 24. 09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО УДАР В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ТІЛА ОБ ЖОРСТКУ ПЕРЕШКОДУ

Проведено математичне моделювання удару в'язко-пружного тіла з невеликою швидкістю об нерухому абсолютно жорстку перешкоду. В основу моделі покладено теорію удару, запропоновану Г. Герцем, але додатково враховано втрати енергії при деформуванні одного із тіл. Аналітичний розв'язок нелінійної задачі виражено через затабульовану двохзначну функцію Ламберта від'ємного аргументу. Показано, що максимум зусилля удару досягається раніше, ніж максимум зближення тіл при їх стисканні, а коефіцієнт відновлення швидкості залежить від початкової швидкості зіткнення тіл. Він зменшується зі зростанням цієї швидкості.

Ключові слова: нормальний удар, в'язко-пружне тіло, абсолютно жорстка перешкода, еліптична площадка контакту, коефіцієнт відновлення швидкості, нелінійне диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок.

В. П. ОЛЬШАСКИЙ

ПРО УДАР ВЯЗКО-УПРУГОГО ТЕЛА О ЖЕСТКОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

Проведено математическое моделирование удара вязко-упругого тела с небольшой скоростью о неподвижное абсолютно жесткое препятствие. В основу модели положена теория удара, предложенная Г. Герцем, но дополнительно учтены потери энергии при деформировании одного из тел. Аналитическое решение нелинейной задачи выражено через затабулированную двухзначную функцию Ламберта отрицательного аргумента. Показано, что максимум усилия удара достигается раньше, нежели максимум сближения тел при сжатии, а коэффициент восстановления скорости зависит от начальной скорости столкновения тел. Он уменьшается с увеличением этой скорости.

Ключевые слова: нормальный удар, вязко-упругое тело, абсолютно жесткое препятствие, эллиптическая площадка контакта, коэффициент восстановления скорости, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение.

V. P. OLSHANSKIY

ON THE IMPACT OF A VISCO-ELASTIC BODY ON A RIGID OBSTACLE

Mathematical modeling of the impact of a low speed visco-elastic body on a fixed absolutely rigid obstacle is carried out. The model is based on the theory of impact proposed by G. Hertz, but additionally takes into account the loss of energy during the deformation of one of the bodies. The analytical solution of the non-linear problem is expressed in terms of the negative-argument tabulated two-valued Lambert function. It is shown that the maximum impact force is reached earlier than the maximum approach of the bodies during compression, and the coefficient of speed recovery depends on the initial velocity of the bodies colliding. It decreases as speed increases.

Key words: normal impact, visco-elastic body, absolutely rigid obstacle, elliptical contact area, speed recovery factor, nonlinear differential equation, analytical solution.

© В. П. Ольшанський, 2018

Вступ. Теорія удару, яку запропонував *Г. Герц* [1, 2], грунтується на врахуванні лише місцевих контактних деформацій і стосується ідеально пружних тіл. За цією теорією при нормальному ударі тіла об абсолютно жорстку перешкоду коефіцієнт відновлення швидкості дорівнює одиниці, що не підтверджується практикою. В дійсності, цей коефіцієнт менший одиниці, внаслідок втрати енергії при деформуванні тіл. Один із простих способів урахування цих втрат полягає в заміні ідеально пружного тіла на в'язко-пружне. Саме про таку заміну йдеться в цій статті, де припускається, що втрати енергії залежать від швидкості деформацій.

Метою роботи є математичне моделювання удару в'язко-пружного тіла об абсолютно жорстку перешкоду при невеликих швидкостях зіткнення тіл. Для досягнення поставленої мети використано припущення, властиві *теорії Г. Герца*, але додатково враховано в'язкість при деформуванні одного із тіл, що призводить до нових розрахункових формул і нових закономірностей.

Постановка задачі та її розв'язок. Тіло, яке піддається удару, вважаємо нерухомим абсолютно жорстким півпростором з плоскою поверхнею контакту. Поверхню в'язко-пружного тіла, що вдаряє,? в області контакту апроксимуємо параболоїдом:

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2},$$

де $R_1, R_2 -$ його головні радіуси кривизни.

Такі припущення можливі, коли модуль пружності та маса тіла, що вдаряє, значно менші за аналогічні характеристики тіла, що сприймає удар. Йдеться насамперед про удар тіл рослинного походження (зернівки, деякі овочі та фрукти) об жорстку підлогу або масивну металеву платформу транспортного засобу. Такі варіанти удару можливі також в деяких технологічних процесах сепарування зерна [3].

У відповідності з вказаними спрощеннями, переміщення центру мас в'язко-пружного тіла $x(t)$ з моменту зіткнення з півпростором описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} = -\beta\left(1+\eta\dot{x}\right)x^{3/2}. \qquad (1)$$

Тут $\eta = \xi / E$; $m -$ маса тіла, що вдаряє по півпростору; $\xi -$ сталий коефіцієнт в'язкості матеріалу; $\beta -$ сталий коефіцієнт контактних деформацій; крапка над x означає похідну за часом t.

Для обчислення значення β використовуємо відомий розв'язок контактної задачі теорії пружності [4, 5]:

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}R_1^{1/2}\frac{\left[D(\varepsilon)\right]^{1/2}}{\left[K(\varepsilon)\right]^{3/2}},$$

у якому $D(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[K(\varepsilon) - L(\varepsilon)\right]$; $E, \nu -$ модуль пружності та *коефіцієнт Пуассона* тіла, що вдаряє; $\varepsilon -$ ексцентриситет еліптичної площадки контакту двох тіл під час удару; $K(\varepsilon), L(\varepsilon) -$ повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду, затабульовані в [6, 7] та інших виданнях зі спеціальних функцій.

У випадку $R_1 = R_2$, $\varepsilon = 0$, $D(\varepsilon) = \pi/4$; $K(\varepsilon) = \pi/2$ маємо кругову площадку контакту і для неї:

$$\beta = \frac{4}{3}\frac{E}{1-\nu^2}R_1^{1/2},$$

що використано в [8], де приймали $\eta = 0$.

Ексцентриситет ε залежить від відношення R_2 / R_1 головних радіусів кривизни граничної поверхні в'язко-пружного тіла. З метою спрощення обчислень β, а також інших величин, які характеризують удар, наводимо складену спеціальну табл. 1.

Таблиця 1 – Значення ε^2, $K(\varepsilon)$ і $D(\varepsilon)$ для різних R_2 / R_1

$10\,R_2/R_1$	$10\,\varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$D(\varepsilon)$	$10\,R_2/R_1$	$10\,\varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$D(\varepsilon)$
0,2	9,93	3,872	2,881	5,2	5,81	1,930	1,069
0,4	9,84	3,464	2,480	5,4	5,60	1,909	1,051
0,6	9,74	3,226	2,249	5,6	5,38	1,888	1,034
0,8	9,63	3,054	2,084	5,8	5,16	1,868	1,018
1,0	9,50	2,908	1,945	6,0	4,94	1,849	1,003
1,2	9,38	2,805	1,848	6,2	4,71	1,830	0,988
1,4	9,24	2,708	1,757	6,4	4,48	1,812	0,973
1,6	9,10	2,628	1,683	6,6	4,25	1,795	0,959
1,8	8,95	2,555	1,616	6,8	4,02	1,779	0,946
2,0	8,80	2,493	1,559	7,0	3,78	1,763	0,933
2,2	8,65	2,438	1,509	7,2	3,55	1,748	0,922
2,4	8,48	2,383	1,460	7,4	3,31	1,732	0,910
2,6	8,32	2,337	1,419	7,6	3,06	1,717	0,898

Продовження таблиці 1							
2,8	8,15	2,293	1,380	7,8	2,82	1,704	0,887
3,0	7,97	2,250	1,342	8,0	2,57	1,690	0,876
3,2	7,79	2,212	1,309	8,2	2,32	1,676	0,866
3,4	7,61	2,177	1,278	8,4	2,07	1,663	0,856
3,6	7,42	2,142	1,248	8,6	1,82	1,651	0,846
3,8	7,23	2,111	1,221	8,8	1,57	1,639	0,837
4,0	7,04	2,081	1,196	9,0	1,31	1,626	0,827
4,2	6,84	2,052	1,172	9,2	1,05	1,615	0,819
4,4	6,64	2,025	1,149	9,4	0,79	1,603	0,810
4,6	6,44	2,000	1,127	9,6	0,53	1,592	0,802
4,8	6,23	1,975	1,107	9,8	0,27	1,582	0,793
5,0	6,02	1,952	1,087	10,0	0,00	1,571	0,785

Етап стискання тіл. Розв'язок диференціального рівняння (1) на етапі стискання тіл будуємо при початкових умовах:

$$x(0)=0\,;\ \dot{x}(0)=\upsilon_0\,, \tag{2}$$

де υ_0- швидкість зіткнення тіл. Для цього подаємо (1) у вигляді:

$$m\,\dot{x}\frac{d\,\dot{x}}{d\,x}=-\beta\left(1+\eta\,\dot{x}\right)x^{3/2}. \tag{3}$$

Подальшим інтегруванням після розділення змінних в (3), отримуємо з точністю до сталої c:

$$\frac{1}{\eta^2}\left[\eta\,\dot{x}-\ln\left(1+\eta\,\dot{x}\right)\right]=c-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}x^{5/2}.$$

Задовольнивши початковим умовам (2), знаходимо, що:

$$c=\frac{1}{\eta^2}\left[\eta\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\upsilon_0\right)\right].$$

Таким чином, перший інтеграл рівняння руху (1) набуває вигляд:

$$1+\eta\,\dot{x}-\ln\left(1+\eta\,\dot{x}\right)=f\left(x\right), \tag{4}$$

де $f\left(x\right)=1+\eta\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\upsilon_0\right)-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}\eta^2x^{5/2}$.

Розв'язок функціонального рівняння (4) виражається через другу гілку $W_2\left(-\zeta\right)$ *двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу* [9]. Тому:

$$1+\eta\,\dot{x}=-W_2\left[-\exp\left(-f\left(x\right)\right)\right].$$

Звідки випливає, що:

$$\dot{x}=-\frac{1}{\eta}\left\{1+W_2\left[-\exp\left(-f\left(x\right)\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

При обчисленні $\dot{x}$ значення $W_2\left(-\zeta\right)$ можна знаходити за допомогою табл. 1.2, що надрукована в [9]. Там $W_2\left[-\exp\left(-1\right)\right]=-1$. Тому при $f\left(x\right)=1$ швидкість $\dot{x}=0$. Отже, максимальне зближення тіл x_c при динамічному стисканні, коли $\dot{x}=0$, визначається рівнянням $f\left(x\right)=1$ або:

$$\eta\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\upsilon_0\right)-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}\eta^2x^{5/2}=0.$$

Звідки одержуємо:

$$x=x_c=\left\{\frac{5m}{2\beta\eta^2}\left[\eta\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\upsilon_0\right)\right]\right\}^{2/5}. \tag{6}$$

Граничний перехід $\eta\to 0$ в (6) дає:

$$x_c=\left(\frac{5m\upsilon_0^2}{4\beta}\right)^{2/5},$$

що узгоджується з [8, 10].

В момент максимального стискання тіл піввісі області контакту a_c, b_c дорівнюють:

$$a_c=\left[2R_1\,\frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}x_c\right]^{1/2};\ \ b_c=a_c\sqrt{1-\varepsilon^2}\,,$$

а зусилля удару F_c і тиск в центрі площадки контакту q_c подаються формулами:

$$F_c = \beta x_c^{3/2};\ \ q_c = \frac{3}{2}\frac{F_c}{\pi a_c b_c}.$$

Зазначимо, що на відміну від удару абсолютно пружних тіл, F_c і q_c не є максимальними. Щоб знайти максимуми цих величин, дослідимо на екстремум функцію:

$$F(t) = \beta(1+\eta\dot{x})x^{3/2}. \tag{7}$$

Прирівнявши до нуля похідну з виразу (7), одержуємо рівняння:

$$\eta x\ddot{x} + \frac{3}{2}(1+\eta\dot{x})\dot{x} = 0. \tag{8}$$

Далі, використовуючи (1), йому надаємо вигляд:

$$\eta\dot{x} = \frac{2}{3}\frac{\beta\eta^2}{m}x^{5/2}. \tag{9}$$

Щоб вилучити тут невідоме $x^{5/2}$, врахуємо (4), звідки випливає, що:

$$\frac{2}{5}\frac{\beta\eta^2}{m}x^{5/2} = \eta\upsilon_0 - \ln(1+\eta\upsilon_0) - \eta\dot{x} - \ln(1+\eta\dot{x}).$$

Тому, у підсумку, замість (8), одержуємо:

$$\frac{8}{5} + \frac{8}{5}\eta\dot{x} - \ln\left(\frac{8}{5} + \frac{8}{5}\eta\dot{x}\right) = F(\upsilon_0), \tag{10}$$

де $F(\upsilon_0) = \frac{8}{5} - \ln\frac{8}{5} + \eta\upsilon_0 - \ln(1+\eta\upsilon_0)$.

Розв'язок функціонального рівняння (10) виражається через другу гілку $W_2(-\zeta)$ двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу [9]. Тому:

$$\dot{x} = \dot{x}_e = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + \frac{5}{8}W_2\left[-\exp\left(-F(\upsilon_0)\right)\right]\right\}$$

і, згідно з (9), цій швидкості відповідає стискання:

$$x = x_e = \left(\frac{3}{2}\frac{m}{\beta\eta}\dot{x}_e\right)^{2/5}.$$

Отже максимум сили стискання F_e дорівнює:

$$F_e = \beta(1+\eta\dot{x}_e)x_e^{3/2}.$$

При цьому максимальний тиск в центрі площадки контакту становить:

$$q_e = \frac{3}{2}\frac{F_e}{\pi a_e b_e},$$

де $a_e = \left[2R_1\frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}x_e\right]^{1/2}$; $b_e = a_e\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Для обчислення максимального зусилля удару і тиску, який йому відповідає, можна теж використовувати табл. 1.2 в [9], яка стосується другої гілки функції Ламберта від'ємного аргументу.

Час t_e, коли досягається максимум сили удару, подається інтегралом:

$$t_e = \eta\int_{x_e}^{0}\frac{dx}{1+W_2\left[-\exp\left(-f(x)\right)\right]}.$$

Він не виражається в елементарних, чи відомих спеціальних функціях, але його досить просто обчислювати на комп'ютері в *середовищі «Maple»* [11], де передбачено обчислення значень $W_2(-\zeta)$.

Тривалість етапу стискання t_c при ударі становить:

$$t_c = \eta\int_{x_c}^{0}\frac{dx}{1+W_2\left[-\exp\left(-f(x)\right)\right]}.$$

Цей інтеграл відноситься до невласних інтегралів другого роду, бо при $x = x_c$ підінтегральна функція є нескінченною. Але значення t_c теж можна обчислювати на комп'ютері, після виділення і аналітичного інтегрування сингулярної частини. Для цього слід використати асимптотику:

$$\dot{x} \to \left(2\frac{\beta}{m}x_c^{3/2}y\right)^{1/2} \text{ при } x \to x_c - y,\ y \to 0.$$

Тоді:

$$t_c \approx \frac{\sqrt{2m\,y}}{\beta x_c^{3/2}} + \eta \int\limits_{x_c - y}^{0} \frac{d\,x}{1 + W_2\left[-\exp\left(-f\,(x)\right)\right]}.$$

Задавши малим значення y порівняно з x_c, другий доданок (квадратуру) тут досить просто обчислити на комп'ютері любим із числових методів в середовищі «Maple».

Етап розтискання тіл. На етапі розтискання розв'язуємо рівняння (3) при початковій умові:

$$\dot{x}\left(x_c\right) = 0.$$

Провівши його інтегрування, отримуємо:

$$1 + \eta\,\dot{x} - \ln\left(1 + \eta\,\dot{x}\right) = \varphi\left(x\right), \tag{11}$$

де:

$$\varphi\left(x\right) = 1 + \frac{2}{5}\frac{\beta\eta^2}{m}\left(x_c^{5/2} - x^{5/2}\right). \tag{12}$$

Розв'язок рівняння (11) виражається через першу гілку $W_1\left(-\zeta\right)$ двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу [12] і має вигляд:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-\varphi\left(x\right)\right)\right]\right\}.$$

Значення цієї функції для окремих аргументів вказано в табл. 1.1 в [9], що спрощує обчислення $\dot{x}$, яке тепер від'ємне або дорівнює нулю.

Тривалість етапу розтискання t_p при ударі подається інтегралом:

$$t_p = \eta \int\limits_0^{x_c} \frac{d\,x}{1 + W_1\left[-\exp\left(-\varphi\left(x\right)\right)\right]},$$

що належить до невласних збіжних інтегралів другого роду. Його теж можна обчислювати на комп'ютері, після виділення сингулярності в точці $x = x_c$.

Швидкість υ_1, яку має в'язко-пружне тіло в кінці процесу удару, можна знайти за формулою:

$$\upsilon_1 = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-1 - \eta\,\upsilon_0 + \ln\left(1 + \eta\,\upsilon_0\right)\right)\right]\right\},$$

що випливає з (11), з урахуванням (12).

Тому коефіцієнт відновлення швидкості K подається виразом:

$$K = \frac{\left|\upsilon_1\right|}{\upsilon_0} = \frac{1}{\eta\,\upsilon_0}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-1 - \eta\,\upsilon_0 + \ln\left(1 + \eta\,\upsilon_0\right)\right)\right]\right\}.$$

Коефіцієнт K залежить від значення $\eta\upsilon_0$. Ця залежність графічно подана на рис. 1.

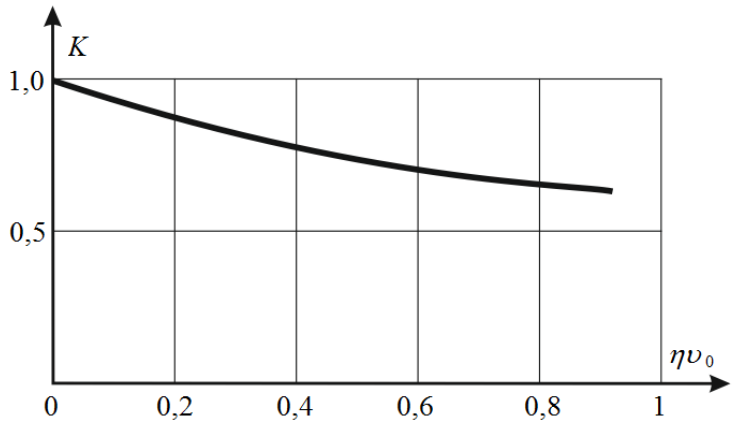


Рис. 1 – Залежність K від $\eta\upsilon_0$.

При $\eta = \text{const}$ зі зростанням швидкості удару υ_0 маємо зменшення коефіцієнта відновлення швидкості.

Зазначимо, що наведений вище графік можна також використовувати для ідентифікації значення коефіцієнта в'язкості ξ при експериментальному вимірюванні K для заданих υ_0. Наприклад, коли $K = 0{,}75$, то $\eta\upsilon_0 \approx 0{,}5$, і в цьому випадку $\xi = 0{,}5E / \upsilon_0$.

З метою перевірки вірогідності виведених формул проведемо розрахунки параметрів удару гумової кульки

по півпростору. Приймаємо наступні числові дані: $R_1 = R_2 = 10^{-2}$ м; $E = 4{,}5 \cdot 10^6$ Па; $\nu = 0{,}5$; $\rho = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\upsilon_0 = 4$ м/с; $\eta\upsilon_0 = 0{,}4$. Для цих вихідних даних знаходимо: $\beta = 8 \cdot 10^5$ Па$\cdot$м$^{1/2}$; $m = 6{,}283 \cdot 10^{-3}$ кг; $x_c = 0{,}00173$ м; $a_c = b_c = 0{,}00416$ м; $F_c = 57{,}565$ Н; $q_c = 1{,}588 \cdot 10^6$ Па; $F(\upsilon_0) = 1{,}1935$; $W_2 = -1{,}757$; $\dot{x}_e = 0{,}981$ м/с; $x_e = 0{,}00168$ м; $F_e = 60{,}492$ Н; $q_e = 1{,}719 \cdot 10^6$ Па; $W_1 = -0{,}6841$; $\upsilon_1 = -3{,}159$ м/с; $K = 0{,}79$. Розрахунки підтвердили, що $F_e > F_c$, а $q_e > q_c$.

Перспективи подальших досліджень. Викладений спосіб можна поширити на випадок нелінійної залежності зусилля удару від швидкості зіткнення тіл. Зокрема, аналітичний розв'язок можна одержати, коли сила удару залежить від квадрату швидкості.

Висновки. В рамках розглянутої моделі аналітичний розв'язок нелінійної задачі удару виражається через затабульовану спеціальну функцію Ламберта. Максимум зусилля удару і максимум контактного тиску досягаються не в момент максимального стискання тіл, а дещо раніше в ході стискання. Коефіцієнт відновлення швидкості залежить не лише від коефіцієнта в'язкості та модуля пружності матеріалу деформованого тіла, а й від швидкості удару. Він зменшується зі зростанням цієї швидкості.

Список літератури

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – Москва : Стройиздат, 1965. – 447 с.
2. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1989. – 304 с.
3. *Богомолов А. В.* Сепарация трудноразделимых сыпучих смесей. – Харьков : ХНТУСГ, 2013. – 308 с.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. – Москва – Ленинград : ОГИЗ, 1947. – 465 с.
5. *Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзків Т. Б.* Опір матеріалів. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с.
6. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – Москва : Наука, 1979. – 832 с.
7. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
8. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХПІ» Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
9. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук А.О., 2013. – 204 с.
10. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механического удара. – Москва : Наука, 1987. – 223 с.
11. *Дьяконов В. П.* Maple 8 в математике, физике и образовании. – Москва : Солон-Пресс, 2013. – 656 с.
12. *Ольшанський В. П., Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.

References (transliterated)

1. Goldsmith W. *Udar. Teoriya i fizicheskiye svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of colliding bodies]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1965. 447 p.
2. Kil'chevskiy N. A. *Dinamacheskoye kontaktnoye szhatiye tvyerdykh tel. Ydar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989. 304 p.
3. Bogomolov A. V. *Separatsiya trudnorazdelimykh sypuchikh smesey* [Separation of hardly separable loose mixtures]. Kharkov, KNTUSG Publ., 2013. 308 p.
4. Leibenzon L. S. *Kurs teorii uprugosti* [Course in elasticity theory]. Moscow–Leningrad, OGIZ Publ., 1947. 465 p.
5. Gurniak L. I., Gutsulyak Yu. V., Yuzkiv T. B. *Opir materialiv* [Resistance of materials]. Lviv, Novyy svit Publ., 2005. 364 p.
6. Abramovits A., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Science Publ., 1979. 832 p.
7. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
8. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozvyazku zadachi Gertsa pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Matematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
9. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [Lambert function in the material point ballistics problems]. Kharkiv, Publisher Savchuk A.O., 2013. 204 p.
10. Panovko Ya. G. *Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to the theory of mechanical shock]. Moscow, Science Publ., 1987. 223 p.
11. D'yakonov V. P. *Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii* [Maple 8 in mathematics, physics and education]. Moscow, Solon-Press Publ., 2013. 656 p.
12. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [Lambert function in the mathematical pendulum oscillation problem]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Matematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 18 (1061), pp. 116–119.

Надійшла (received) 24.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

УДК 519.816

С. П. ОНИЩЕНКО, А. И. ЛЕОНТЬЕВА

ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВА ПРОГРАММЫ РАЗВИТИЯ В УСЛОВИЯХ «НЕЧЕТКОСТИ» УСЛОВИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ

Рассматривается модель формирования оптимального состава программы. По своей структуре и содержанию модель учитывает основные параметры и отражает основные требования, которые предъявляются к программам развития. В частности, в качестве целевой функции предлагается использовать «ценность» программы. Одним из «узких» мест практической реализации предлагаемой модели является сложность в установлении композиции функций принадлежностей множества проектов в различных комбинациях и «дефаззификация» полученных значений в рамках оптимизационной модели. Потому в рамках данного исследования продемонстрирован прием, позволяющий избежать указанной процедуры и обеспечивающий сведение исходной модели к модели, детерминированной с одновременным снижением ее размерности.

Ключевые слова: программа, проект, ценность, управление содержанием, модель, нечеткие множества.

С. П. ОНИЩЕНКО, А. І. ЛЕОНТ'ЄВА

ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДУ ПРОГРАМИ РОЗВИТКУ В УМОВАХ «НЕЧІТКОСТІ» УМОВ І РЕЗУЛЬТАТІВ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОЕКТІВ

Розглядається модель формування оптимального складу програми. За своєю структурою і змістом модель враховує основні параметри і відображає основні вимоги, які пред'являються до програм розвитку. Зокрема, в якості цільової функції пропонується використовувати «цінність» програми. Одним з «вузьких» місць практичної реалізації пропонованої моделі є складність у встановленні композиції функцій приладдя множини проектів в різних комбінаціях і «дефазифікація» отриманих значень в рамках оптимізаційної моделі. Тому в рамках даного дослідження продемонстрований прийом, що дозволяє уникнути зазначеної процедури і забезпечує зведення вихідної моделі до моделі детермінованої з одночасним зниженням її розмірності.

Ключові слова: програма, проект, цінність, управління змістом, модель, нечіткі множини.

S. P. ONYSHCHENKO, A. I. LEONTIEVA

PRACTICAL ASPECTS OF DEVELOPMENT PROGRAM OPTIMIZATION UNDER "FUZZY" CONDITIONS AND PROJECT RESULTS

The model of formation of the optimal development program composition is considered. The model takes into account the basic parameters and reflects the main requirements for development programs. In particular, it is proposed to use the program's "value" as an optimization criterion. One of the "narrow" places for the practical implementation of the proposed model is the difficulty in establishing the composition of the functions of belonging to the set of projects in various combinations and "defuzzification" the obtained values within the optimization model. Therefore, in this study, a special technique has been demonstrated which makes it possible to avoid this procedure and ensures that the original model is reduced to a deterministic model while simultaneously reducing its dimension. Experimental verification of a model using fuzzy values was successfully carried out and the following results were obtained: the model was confirmed to be correct and the results obtained on its basis were proved to be reliable; the procedure of operating with fuzzy data outside the model and the use of "defuzzified" values for further optimization was demonstrated; the possibility of reducing the dimension of the original problem on the basis of a preliminary analysis of the initial data for the model was demonstrated; the flexibility of modeling and the possibility of moving from one form of the model to another with the help of aggregation and change of variables, which allows to operate with standard optimization applications in the absence of special software, was demonstrated as well.

Key words: program, project, value, program score management, model, fuzzy sets.

Введение. Все мероприятия, направленные на развитие современных компаний, реализуются посредством *проектов* и *программ*. Современная теория управления проектами пополняется новыми средствами обоснования решений в процессах управления, в том числе разрабатываются *математические модели*, которые формализуют процессы отбора проектов, оптимизируют их параметры и т.п.

Математические модели являются средством, которое позволяет получать обоснованные математически с учетом системных связей решения и осуществлять эксперименты «что будет, если…» в рамках подготовки соответствующих решений. При этом следует отметить, что даже теоретически «выверенная» и корректная модель может оказаться сложно применимой на практике. Причин этому несколько, основные из них: прежде всего, отсутствие необходимой информации при формировании числового вида модели для конкретных условий; а также невозможность использования стандартных приложений и необходимость разработки соответствующего программного обеспечения.

Поэтому практическая апробация моделей и их экспериментальная проверка являются неотъемлемой частью любого исследования. В рамках практических расчетов могут применяться различные приемы и процедуры, направленные на:

а) уменьшение размерности решаемой задачи;

б) использование возможностей стандартного программного обеспечения.

Анализ последних исследований. Программы развития компаний, как правило, разрабатываются в условиях отсутствия достоверной информации о будущем состоянии среды и самой компании. Неопределенность, которая при этом наблюдается, не всегда может быть охарактеризована и описана в терминах *теории вероятностей*, прежде всего, ввиду отсутствия информации, достаточной для использования *методов математической статистики*. Поэтому в теории управления проектами широкое распространение получили модели и методы, оперирующие нечеткими множествами (например, [1 – 4]). В частности, в работе [2] представлен *метод отбора*

© С. П. Онищенко, А. И. Леонтьева, 2018

проектов и его экспериментальная апробация на базе *теории возможностей* и использовании *трапециевидных нечетких интервалов*. В [3, 4] разработаны *модели оптимизации портфеля проектов* с учетом нечеткой природы входной информации. В [5] для формализации процесса отбора проектов в программу развития разработана модель, в которой используемая информация является нечеткой. Тем не менее, в данном исследовании задача решается только теоретически и не иллюстрируется соответствующими расчетами.

В современных публикациях представлены также работы, посвященные практическим аспектам расчетов по *моделям с нечеткими значениями*. В частности, в работе [6] сравнивается использование различных методов оптимизации в условиях «нечеткости». Тем не менее, каждая конкретная модель дает возможность применения специфических подходов и распространения данного опыта на близкие по структуре и структуре информации модели. Таким образом, обращение к проблеме практической апробации и экспериментальных расчетов по моделям с «нечеткими» данными является актуальным ввиду их широкого их применения на теоретическом уровне и незначительным исследованием вопросов реализации на практике.

Постановка задачи. Рассматривается модель формирования оптимального состава программы, предложенная в [4]. Одним из «узких» мест практической реализации предлагаемой модели является, в частности, сложность в установлении композиции функций принадлежностей множества проектов в различных комбинациях и «дефаззификация» полученных значений в рамках оптимизационной модели. Потому в рамках данного исследования продемонстрирован прием, позволяющий избежать указанной процедуры и обеспечивающий сведение модели к модели, детерминированной с одновременным снижением ее размерности.

В качестве теоретической базы оперирования нечеткими данными использовались результаты [7].

Математическая модель. По своей структуре и содержанию модель учитывает основные параметры и отражает основные требования, которые предъявляются к программам развития. В частности, в качестве целевой функции предлагается использовать «ценность» программы.

Пусть выделены n целей технического развития, количественная характеристика которых $Ц_i, i=\overline{1,n}$, которые являются нечеткими множествами. Будем полагать, что $\mu_{Ц_i}(x_i), i=\overline{1,n}$ – функция принадлежности, соответствующая поставленной $i-$ой цели; x_i – возможные значения нечеткой величины, характеризующей $i-$ую цель.

Пусть рассматриваются m – проектов. Результаты реализации проекта с позиции конкретной цели являются нечетким числом $\tilde{П}_j^i$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{П}_j^i}(x_i)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Поставим в соответствие каждому проекту переменную $y_j \in \{0;1\}$, $j=\overline{1,m}$, которая «отвечает» за отбор проекта в программу. При этом может быть задано ограничение на количество проектов программы.

В качестве критерия оптимизации используется достижение первой по приоритетности цели, таким образом, *целевая функция модели* имеет вид:

$$\sup_{x_1}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{П}_j^1\cdot y_j}(x_1)\cap\mu_{Ц_1}(x_1)\right\}\to\max; \tag{1}$$

ограничения по достижению целей с заданной степенью:

$$\sup_{x_i}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{П}_j^i\cdot y_j}(x_i)\cap\mu_{Ц_i}(x_i)\right\}\ge\alpha_i,\ \ i=\overline{1,n}; \tag{2}$$

ограничение по финансированию:

$$\sup_{z}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j}(z)\cap\mu_F(z)\right\}\ge\alpha_F, \tag{3}$$

где $0<\alpha_F<1$ – определяет нижнюю границу степени принадлежности установленному бюджету; $\mu_{\tilde{F}}(z)$ – функция принадлежности для ограничения по бюджету $\tilde{F}$. Таким образом, (3) не позволяет суммарным затратам по проектам $\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j$ принадлежать «бюджетному» множеству со степенью принадлежности меньше, чем α_F.

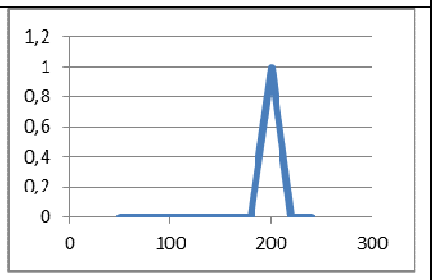
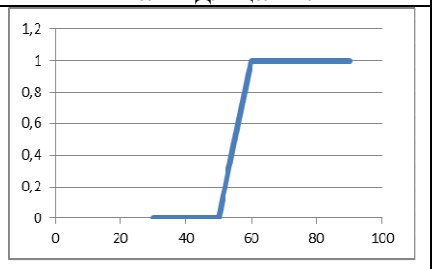
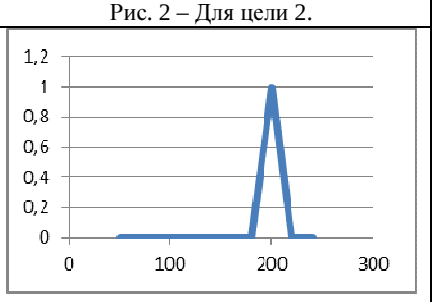
Последнее условие:

$$y_j \in \{0;1\}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Результаты экспериментальных расчетов. Как известно, практическая ценность любой модели состоит в получении на ее основе достоверной информации. Поэтому экспериментальные исследования являются неотъемлемой частью теоретических разработок. Поэтому в данной работе проведем практическую апробацию предложенной модели.

Пусть для рассматриваемой компании заданы три основные цели развития, которые с учетом неопределенности внешней среды задаются в виде нечетких множеств с соответствующими функциями распределения $\mu_{II_i}(x_i)$, $i = \overline{1,3}$, представленными в табл. 1.

Таблица 1 – Характеристики целей развития компании

Характеристики	Степень приоритетности α_i	Функция принадлежности количественного значения цели $\mu_{II_i}(x_i)$	Графическое изображение функции принадлежности $\mu_{II_i}(x_i)$
Цель 1	0,5	$\mu_{II_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - 180}{20}, & x_1 \in [180, 200]; \\ \frac{x_1 - 220}{20}, & x_1 \in [200, 220]; \\ 0, & x_1 \notin [180, 200]. \end{cases}$	 Рис. 1 – Для цели 1.
Цель 2	0,5	$\mu_{II_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 - 50}{10}, & x_2 \in [50, 60]; \\ 1, & x_2 > 60; \\ 0, & x_2 < 50. \end{cases}$	 Рис. 2 – Для цели 2.
Цель 3	0,5	$\mu_{II_3}(x_3) = \begin{cases} 1, & x_3 \geq 180; \\ 0, & x_3 < 180. \end{cases}$	 Рис. 3 – Для цели 3.

Пусть к рассмотрению представлены 5 проектов, результаты которых с позиции каждой цели охарактеризованы *треугольным нечетким числом* (особым видом *нечеткого множества*), а функции принадлежности $\mu_{\tilde{П}_j^i}(x_i)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,5}$ представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Характеристики проектов с позиции достижения целей развития
(функции принадлежности $\mu_{\tilde{П}_j^{k,1}}(x_i)$ результатов реализации проекта с позиции каждой цели)

Характеристики	Цель 1	Цель 2	Цель 3
Проект 1	$\langle 90, 110, 125 \rangle$	$\langle 30, 35, 40 \rangle$	$\langle 120, 130, 140 \rangle$
Проект 2	$\langle 110, 115, 130 \rangle$	$\langle 20, 25, 30 \rangle$	
Проект 3		$\langle 30, 35, 40 \rangle$	$\langle 120, 130, 140 \rangle$
Проект 4	$\langle 85, 110, 130 \rangle$	$\langle 15, 20, 25 \rangle$	$\langle 90, 100, 110 \rangle$
Проект 5	$\langle 95, 110, 125 \rangle$		

Отметим, что результаты реализации проектов задаются в виде треугольных нечетких чисел, что соответствует практическим оценкам по принципу – минимальная, наиболее возможная, максимальная. Треугольные числа имеют специфическую функцию принадлежности, в частности, для первого проекта и первой цели:

$$\mu_{\tilde{\Pi}_1^1}(x_1)=\begin{cases}\dfrac{x_1-90}{20},\ x_1\in[90,110];\\ \dfrac{x_1-125}{15},\ x_1\in[110,125];\\ 0,\ x_1\notin[90,125].\end{cases}$$

Отметим, что каждый проект не обязательно вносит вклад в достижение каждой цели (что, собственно, отражено в исходных данных). Расходы на реализацию каждого проекта являются также нечеткими треугольными числами $\tilde{R}_j$, $j=\overline{1,5}$, представленными в табл. 3.

Таблица 3 – Расходы на реализацию проектов

Проект	Расходы по проекту $\tilde{R}_j$
Проект 1	$\langle 90, 95, 100\rangle$
Проект 2	$\langle 50, 55, 60\rangle$
Проект 3	$\langle 45, 50, 55\rangle$
Проект 4	$\langle 60, 65, 70\rangle$
Проект 5	$\langle 40, 45, 50\rangle$

Таким образом, параметры управления $y_j\in\{0;1\}$, $j=\overline{1,5}$.

Пусть требуется отобрать три проекта для дальнейшей реализации, таким образом, должно быть выполнено условие:

$$\sum_{j=1}^{5} y_j = 3. \tag{5}$$

Основным ограничением в рассматриваемой модели является ресурсное ограничение, согласно которому бюджет программы ограничен финансовыми возможностями компании, заданными нечетким множеством $\tilde{F}=\langle 0, 0, 170, 180\rangle$ – *нечетким интервалом*.

Основной сложностью при численной реализации рассматриваемой модели является (в условиях отсутствия специального программного обеспечения) подготовка данных для определения величин

$$\sup_{x_i}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{\Pi}_j^i\cdot y_j}(x_i)\cap\mu_{\Pi_i}(x_i)\right\},\ \ i=\overline{1,n}\ \ \text{и}\ \ \sup_{z}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j}(z)\cap\mu_{\tilde{F}}(z)\right\}$$

для решения задачи посредством стандартного «Поиск решения» Excel.

Всю подготовленную информацию сведем в табл. 4.

Варианты программы по составу проектов идентифицируем в виде наборов $(1,1,1,0,0)$, в частности, данный набор означает, что в программу вошли первые три проекта. Таких наборов согласно комбинаторным формулам для данного количества проектов – $C_5^3=\dfrac{5!}{3!2!}=10$.

Отметим, что из возможных процедур дефаззификации был использован наиболее простой для расчетов вариант, при котором детерминированным аналогом нечеткого числа служит такое значение, при котором обеспечивается максимум функции принадлежности, то есть значение, соответствующее

$$\sup_{x_i}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{\Pi}_j^i\cdot y_j}(x_i)\cap\mu_{\Pi_i}(x_i)\right\},\ \ i=\overline{1,n}\ \ \text{и}\ \ \sup_{z}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j}(z)\cap\mu_{\tilde{F}}(z)\right\}.$$

Таблица 4 – Характеристика вариантов состава программы

Состав программы	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^1\cdot y_j}(x_1)$	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^2\cdot y_j}(x_2)$	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^3\cdot y_j}(x_3)$	$\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j}(z)$	Дефаззификация $\mu_{\sum_{j=1}^{m}\tilde{R}_j^i\cdot y_j}(z)\cap\mu_{\tilde{F}}(z)$
$(1,1,1,0,0)$	$\langle 200, 225, 255\rangle$	$\langle 80, 95, 110\rangle$	$\langle 240, 260, 280\rangle$	$\langle 185, 200, 215\rangle$	$\varnothing$
$(1,1,0,1,0)$	$\langle 285, 335, 385\rangle$	$\langle 65, 80, 95\rangle$	$\langle 210, 230, 250\rangle$	$\langle 200, 215, 230\rangle$	$\varnothing$
$(1,1,0,0,1)$	$\langle 295, 335, 380\rangle$	$\langle 65, 80, 95\rangle$	$\langle 210, 230, 250\rangle$	$\langle 180, 195, 210\rangle$	180
$(1,0,1,1,0)$	$\langle 175, 220, 255\rangle$	$\langle 75, 90, 105\rangle$	$\langle 330, 360, 380\rangle$	$\langle 195, 210, 225\rangle$	$\varnothing$
$(1,0,0,1,1)$	$\langle 270, 330, 380\rangle$	$\langle 45, 55, 65\rangle$	$\langle 210, 230, 250\rangle$	$\langle 190, 215, 220\rangle$	$\varnothing$
$(1,0,1,0,1)$	$\langle 185, 220, 250\rangle$	$\langle 60, 70, 80\rangle$	$\langle 240, 260, 280\rangle$	$\langle 175, 190, 205\rangle$	178
$(0,0,1,1,1)$	$\langle 180, 220, 255\rangle$	$\langle 45, 55, 65\rangle$	$\langle 210, 230, 250\rangle$	$\langle 145, 160, 175\rangle$	160
$(0,1,0,1,1)$	$\langle 290, 335, 385\rangle$	$\langle 35, 45, 55\rangle$	$\langle 90, 100, 110\rangle$	$\langle 150, 165, 180\rangle$	165
$(0,1,1,0,1)$	$\langle 205, 225, 255\rangle$	$\langle 50, 60, 70\rangle$	$\langle 120, 130, 140\rangle$	$\langle 135, 150, 165\rangle$	150
$(0,1,1,1,0)$	$\langle 195, 225, 260\rangle$	$\langle 65, 80, 95\rangle$	$\langle 210, 230, 250\rangle$	$\langle 155, 170, 185\rangle$	170

Продолжение таблицы 4

Состав программы	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^1\cdot y_j}(x_1)\cap\mu_{П_1}(x_1)$	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^2\cdot y_j}(x_2)\cap\mu_{П_2}(x_2)$	$\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^3\cdot y_j}(x_3)\cap\mu_{П_3}(x_3)$
$(1,1,1,0,0)$	214	95	260
$(1,1,0,1,0)$	$\varnothing$	80	230
$(1,1,0,0,1)$	$\varnothing$	80	230
$(1,0,1,1,0)$	208	90	360
$(1,0,0,1,1)$	$\varnothing$	60	230
$(1,0,1,0,1)$	210	70	260
$(0,0,1,1,1)$	208	60	230
$(0,1,0,1,1)$	$\varnothing$	55	$\varnothing$
$(0,1,1,0,1)$	214	60	$\varnothing$
$(0,1,1,1,0)$	212	80	230

Продолжение таблицы 4

Состав программы	$\sup_{x_1}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^1\cdot y_j}(x_1)\cap\mu_{П_1}(x_1)\right\}$	$\sup_{x_2}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^2\cdot y_j}(x_2)\cap\mu_{П_2}(x_2)\right\}$	$\sup_{x_3}\left\{\mu_{\sum_{j=1}^{5}\tilde{П}_j^3\cdot y_j}(x_3)\cap\mu_{П_3}(x_3)\right\}$
$(1,1,1,0,0)$	0,4	1	1
$(1,1,0,1,0)$	0	1	1
$(1,1,0,0,1)$	0	1	1
$(1,0,1,1,0)$	0,65	1	1
$(1,0,0,1,1)$	0	0,9	1
$(1,0,1,0,1)$	0,55	1	1
$(0,0,1,1,1)$	0,68	0,9	1
$(0,1,0,1,1)$	0	0,38	0
$(0,1,1,0,1)$	0,38	1	0
$(0,1,1,1,0)$	0,5	1	1

Следует отметить, что после анализа

$$\sup_z \left\{ \mu_{\sum_{j=1}^{m} \tilde{R}_j^i \cdot y_j}(z) \cap \mu_{\tilde{F}}(z) \right\}$$

для вариантов программы только последние четыре набора проектов – $(0,0,1,1,1)$, $(0,1,0,1,1)$, $(0,1,1,0,1)$, $(0,1,1,1,0)$ – удовлетворяют условию (3), следовательно, остальные варианты наборов могут не рассматриваться в дальнейшем. Отметим, что такой предварительный анализ данных позволяет сократить размерность модели в дальнейшем. Таким образом, от модели (1) – (4) мы переходим к модели, записанной в терминах «наборов» проектов (альтернативных вариантов программы развития).

С учетом уже фильтрации наборов проектов с точки зрения ресурсного ограничения, его в модели не учитываем. В качестве параметров управления используем s_1, s_2, s_3, s_4, соответствующие указанным наборам проектов.

Продолжение таблицы 4

Состав программы	$\sup_z \left\{ \mu_{\sum_{j=1}^{5} \tilde{R}_j \cdot y_j}(z) \cap \mu_{\tilde{F}}(z) \right\}$
$(1,1,1,0,0)$	0
$(1,1,0,1,0)$	0
$(1,1,0,0,1)$	0
$(1,0,1,1,0)$	0
$(1,0,0,1,1)$	0
$(1,0,1,0,1)$	0,2
$(0,0,1,1,1)$	1
$(0,1,0,1,1)$	1
$(0,1,1,0,1)$	1
$(0,1,1,1,0)$	1

Целевая функция модели имеет вид:

$$0,68 \cdot s_1 + 0,38 \cdot s_3 + 0,5 \cdot s_4 \to \max; \quad (6)$$

ограничения по достижению целей с заданной степенью

$$0,68 \cdot s_1 + 0,38 \cdot s_3 + 0,5 \cdot s_4 \geq 0,5; \quad (7)$$

$$0,9 \cdot s_1 + 0,38 \cdot s_2 + s_3 + s_4 \geq 0,5; \quad (8)$$

$$s_1 + s_4 \geq 0,5; \quad (9)$$

условие выбора только одного набора проектов

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1; \quad (10)$$

возможные значения параметров управления

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{0;1\}. \quad (11)$$

Согласно результатам оптимизации, набор проектов $(0,0,1,1,1)$ обеспечивает достижение цели в рамках установленных ограничений. Интерпретируя результаты – рекомендуется формировать программу развития из проекта 3, проекта 4, проекта 5.

Перспективы дальнейших исследований. Данное исследование может быть продолжено в двух направлениях:

1) рассматриваемая модель может быть адаптирована к специфическим программам или портфелям компаний с учетом определенной их специфики (например, отраслевой);

2) предложенные примы и процедуры практического применения модели (оперирования нечеткими данными, снижение размерности) могут быть распространены на множество оптимизационных моделей с нечеткими данными.

Кроме того, указанное может быть учтено при разработке новых моделей, учитывающих «нечеткую» природу условий.

Выводы. Таким образом, в данной работе успешно проведена экспериментальная проверка модели, использующей нечеткие значения, в ходе которой:

1) подтверждена корректность модели и достоверность результатов, полученных на ее основе;

2) продемонстрирована процедура оперирования нечеткими данными вне модели и использования «дефаззифицированных» значений в дальнейшем оптимизации;

3) продемонстрирована возможность снижения размерности изначальной задачи на базе предварительного анализа исходных данных для модели;

4) продемонстрирована гибкость моделирования и возможность перехода от одной формы модели к другой с помощью укрупнения и замен переменных, что позволяет в условиях отсутствия специального программного обеспечения оперировать стандартными оптимизационными приложениями.

Список литературы

1. *Онищенко С. П., Арабаджи Е. С.* Формирование оптимального состава программы развития предприятия // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 6. – № 3 (54). – С. 60 – 66.
2. *Rudenko S., Andrievska V.* Concept of project selection and its formalization in the absence of complete information // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 2. – Issue 3 (80). – P. 4 – 10.
3. *Кононенко И. В., Букреева К. С.* Метод формирования портфеля проектов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 6/2 (42). – С. 15 – 19.
4. *Аньшин В. М., Демкин И. В., Никонов И. М., Царьков И. Н.* Модели управления портфелем проектов в условиях неопределенности. – М. : МАТИ, 2007. – 117 с.
5. *Onyshchenko S., Leontieva A.* Modeling of the optimal composition of the enterprise technical development program // Technology audit and production reserves. – 2018. – № 5(2). – С. 36 – 41.
6. *Артемов М. А., Матвеев М. Г., Стародубцев И. Ю.* Исследование задачи линейного программирования с нечеткими параметрами // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – №. 7. – Вып. 12 – 1. – С. 39 – 42.
7. *Леоненков А.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 719 с.

References (transliterated)

1. Onyshchenko S. P. Arabadzhi E. S. Formirovanie optimal'nogo sostava programmy razvitiya predpriyatiya [Forming optimal enterprise development program]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European Journal of Advanced Technologies]. 2011, vol. 6, no. 3 (54), pp. 60–66.
2. Rudenko S., Andrievska V. Concept of project selection and its formalization in the absence of complete information. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 2, issue 3 (80), pp. 4–10.
3. Kononenko I. V., Bukreeva K. S. Metod formirovaniya portfelya proyektov [The method of project portfolio formation]. *Vostochno-Yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European Journal of Advanced Technologies]. 2009, issue 6/2 (42), pp. 15–19.
4. An'shin V. M, Demkin I. V., Nikonov I. M., Tsar'kov I. N. *Modeli upravleniya portfelem proyektov v usloviyakh neopredelennosti* [Models of project portfolio management in conditions of uncertainty]. Moscow, MATI Publ., 2007. 117 p.
5. Onyshchenko S., Leontieva A. Modeling of the optimal composition of the enterprise technical development program. *Technology audit and production reserves*. 2018, no. 5 (2), pp. 36–41.
6. Artemov M. A., Matveyev M. G., Starodubtsev I.Yu. Issledovaniye zadachi lineynogo programmirovaniya s nechetkimi parametrami [Research of the linear programming problem with fuzzy parameters]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Voronezh State Technical University]. 2011, no.7, issue 12–1, pp. 39–42.
7. Leonenkov A. V. *Nechetkoe modelirovanie v srede MATLAB i fuzzyTECH* [Fuzzy modeling in MATLAB environment and fuzzyTECH]. Saint Petersburg, BKHV Peterburg Publ., 2005. 736 p.

Поступила (received) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Онищенко Світлана Петрівна (Онищенко Светлана Петровна, Onyshchenko Svitlana Petrivna) – доктор економічних наук, професор, директор навчально-наукового інституту морського бізнесу Одеського національного морського університету, м. Одеса; тел.: (067) 557-76-46; e-mail: onyshenko@gmail.com.

Леонтьєва Анна Ігорівна (Леонтьева Анна Игоревна, Leontieva Anna Igorivna) – аспірант, Одеський національний морський університет, м. Одеса; тел.: (063) 121-28-92; e-mail: leontieva.ann.13@gmail.com.

УДК 519.6

Ю. І. ПЕРШИНА, Т. Т. ЧЕРНОГОР, С. О. САПРИКІН

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ МІНІМАКСУ

Запропоновано метод, за допомогою якого можна наблизити функцію двох змінних з розривами першого роду розривним білінійним сплайном, використовуючи метод мінімаксу. Вважається, що розриви функції, яку наближуємо, лежать на прямих, паралельних осям координат. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайну не співпадають з точками розриву функції. Запропонований метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Ключові слова: розривна функція, сплайн, метод мінімаксу, розрив першого роду, апроксимація, інтерполяція.

Ю. И. ПЕРШИНА, Т. Т. ЧЕРНОГОР, С. А. САПРЫКИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ МИНИМАКСА

Предложен метод, с помощью которого можно приблизить функцию двух переменных с разрывами первого рода разрывным билинейным сплайном, используя метод минимакса. Считается, что разрывы функции, которую приближаем, лежат на прямых, параллельных осям координат. В дальнейшем планируется обобщить этот метод на случай, когда узлы сплайна не совпадают с точками разрыва функции. Предложенный метод можно будет использовать для восстановления внутренней структуры объектов, имеющих различную плотность, в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Ключевые слова: разрывная функция, сплайн, метод минимакса, разрыв первого рода, аппроксимация, интерполяция.

I. I. PERSHYNA, T. T. CHERNOGOR, S. O. SAPRYKIN

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY THE MINIMAX METHOD

The article suggests a method for approximating a function of two variables with discontinuities of the first kind by a discontinuous bilinear approximation spline. The spline of the best approximation is considered to be the spline, which on each rectangular element has the smallest maximum deviation from the function that we approximate. It is supposed that the discontinuities of the function that we are approaching lie on the straight lines parallel to the axes of coordinates. In the future we plan to generalize this method to the case when the spline nodes do not coincide with the points of discontinuity of the function. The proposed method can be used to restore the internal structure of objects with different densities in medical, geological, space, and other studies.

Key words: discontinuous function, spline, minimax method, discontinuity of the first kind, approximation, interpolation.

Вступ. На протязі багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, повені, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Для багатьох промислових підприємств наявність засобів неруйнівного контролю якості продукції на різних етапах її виробництва є актуальним завданням. Рентгенівські засоби неруйнівного контролю не мають альтернативи в тих випадках, де параметрами контролю якості виробів можуть бути внутрішні геометричні розміри складових частин виробів, просторове розташування внутрішніх деталей, структура матеріалів і наповнювачів, наявність домішок, раковин або тріщин. Необхідно відзначити, що при неруйнівному контролі великогабаритних виробів (з радіаційної товщиною >1000 мм) не можуть бути застосовані традиційні методи плівкової рентгенографії через високу вартість витратних матеріалів і тривалого часу контролю. Найбільш перспективними, в даному випадку, є методи цифрової радіографії, особливо обчислювальна томографія. Обчислювальні томографічні системи неруйнівного контролю на сьогодні є єдиними технічними засобами, які дозволяють визначити місце розташування і геометричні розміри прихованих дефектів в контрольованому виробі, а також контроль виробу в реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції, оскільки вказані явища відіграють величезну роль в житті людства. Тому кожний крок, направлений на створення теоретичного підґрунтя опису вказаних явищ та процесів без сумніву може значно змінити подальший розвиток людства і всієї планети в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не

© Ю. І. Першина, Т. Т. Черногор, С. О. Саприкін, 2018

обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. В своїх роботах *Петухов А. П.* [1] досліджує наближення *розривних функцій в метриці Хаусдорфа*. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як *Сергієнко І. В., Дейнека В. С., Скопецький В. В., Литвин О. М.* та інші [2]. В роботі *Агеева А. Л., Антонової Т. В.* [3] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання *явища Гіббса*. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розривів, що знаходяться близько один від одного. В роботі [4] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонійні вейвлети, які мають нескінчений носій. Такого типу конструкції в загалі кажучи можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів. Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. Також не існує загальної теорії наближення розривних функцій розривними сплайнами. В даній роботі автори пропонують таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включає множину неперервних та неперервно-диференційовних до заданого порядку сплайнів, які можуть мати розриви першого роду у заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів

В роботі [5] авторами запропонований метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε – розриву за допомогою *методу інтерполяції*. В [6] в якості методу наближення розглядається оператор *розривної інтерлінації*. В статті [7] запропонований метод наближення розривної функції однієї змінної *розривним сплайном*, використовуючи *метод мінімаксу*. Дана робота присвячена узагальненню статті [7] на випадок наближення розривної функції двох змінних.

Постановка задачі. Нехай в області $D=[0,1]^2$ задано розривну функцію $f(x,y)$ та деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_1<x_2<...<x_m=1$, $0=y_1<y_2<...<y_n=1$. Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$, або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i-1,j}$, або $\Pi_{i,j-1}$, функція $f(x,y)$ може мати розриви першого роду, причому в кожній точці (x_i,y_j) може бути задано чотири різних значення функції, що наближуємо:

$$C_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y);\ C_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y);\ C_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y);\ C_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}} f(x,y).$$

Визначення 1. Будемо називати розривним кусково-білінійним інтерполяційним сплайном на прямокутній сітці сплайн вигляду

$$S(x,y)=p_{ij}(x,y,C)=C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$

$$+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j};\ (x,y)\in\Pi_{i,j},\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{1,n-1}. \quad (1)$$

Треба знайти такі параметри $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$ у розривному інтерполяційному сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімаксу [8].

Метод наближення розривних функцій. Сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x,y)$.

Теорема 1. *Якщо на кожному з прямокутних елементів* $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ *невідомі параметри* $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i,j+1}^{--}$ *знаходити з умови*

$$\max_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}}\left|f(x,y)-p_{ij}(x,y)\right|\to\min_{C}, \quad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Доведення витікає з того, що кожний з елементів, який треба мінімізувати, дорівнює максимальному відхиленню сплайну від функції $f(x,y)$. Тому при знаходженні параметрів з умови (2), отримаємо $C_{i,j}^{++}$, $C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i,j+1}^{--}$, які забезпечують найменше відхилення.

Теорема 2. *Якщо наближувана функція* $f(x,y)$ *є розривною кусково-лінійною функцією з лініями розриву* $x=x_i$, $i=\overline{1,m}$, $y=y_j$, $j=\overline{1,n}$ *і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном* $S(x,y)$, *що визначається*

формулами (1), і невідомі параметри-елементи $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$ *знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто* $S(x,y)=f(x,y)$.

Доведення. Нехай функція $f(x,y)$ на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$ має вигляд:

$$f_{ij}(x,y,A)=A_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+A_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+A_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+A_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},$$

де A – матриця заданих односторонніх значень функції $f(x,y)$ у вузлах прямокутної сітки вузлів.

Розглянемо максимум різниці функції $f(x,y)$ та сплайну (1) на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$

$$\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\left|f(x,y)-S(x,y)\right|=\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\left\{\left|f_{ij}(x_i+0,y_j+0,A)-p_{ij}(x_i+0,y_j+0,C)\right|,\right.$$
$$\left|f_{ij}(x_{i+1}-0,y_j+0,A)-p_{ij}(x_{i+1}-0,y_j+0,C)\right|,\ \left|f_{ij}(x_{i+1}+0,y_j-0,A)-p_{ij}(x_{i+1}+0,y_j-0,C)\right|,$$
$$\left.\left|f_{ij}(x_{i+1}-0,y_{j+1}-0,A)-p_{ij}(x_{i+1}-0,y_{j+1}-0,C)\right|\right\}=\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\left\{\left|A_{i,j}^{++}-C_{i,j}^{++}\right|,\ \left|A_{i+1,j}^{-+}-C_{i+1,j}^{-+}\right|,\right.$$
$$\left.\left|A_{i,j+1}^{+-}-C_{i,j+1}^{+-}\right|,\left|A_{i+1,j+1}^{--}-C_{i+1,j+1}^{--}\right|\right\}.$$

Знайдемо мінімум отриманого максимуму

$$\min\max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}}\left\{\left|A_{i,j}^{++}-C_{i,j}^{++}\right|,\ \left|A_{i+1,j}^{-+}-C_{i+1,j}^{-+}\right|,\ \left|A_{i,j+1}^{+-}-C_{i,j+1}^{+-}\right|,\left|A_{i+1,j+1}^{--}-C_{i+1,j+1}^{--}\right|\right\}.$$

Звідси витікає, що

$$\begin{cases}A_{i,j}^{++}-C_{i,j}^{++}=0,\\ A_{i+1,j}^{-+}-C_{i+1,j}^{-+}=0,\\ A_{i,j+1}^{+-}-C_{i,j+1}^{+-}=0,\\ A_{i+1,j+1}^{--}-C_{i+1,j+1}^{--}=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_{i,j}^{++}=C_{i,j}^{++},\\ A_{i+1,j}^{-+}=C_{i+1,j}^{-+},\\ A_{i,j+1}^{+-}=C_{i,j+1}^{+-},\\ A_{i+1,j+1}^{--}=C_{i+1,j+1}^{--}.\end{cases}$$

Теорема доведена.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайну. Знайдемо найкраще наближення сплайну до функції. На кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайну від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{\Pi_{i,j}}(C)=\max_{\substack{[x_i,x_{i+1}]\\[y_j,y_{j+1}]}}\left\{\left|f(x_i,y_j)-p_{ij}(x_i,y_j,C)\right|,\left|f(x_i,y_{j+1})-p_{ij}(x_i,y_{j+1},C)\right|,\right.$$
$$\left|f(x_{i+1},y_j)-p_{ij}(x_{i+1},y_j,C)\right|,\ \left|f(x_{i+1},y_{j+1})-p_{ij}(x_{i+1},y_{j+1},C)\right|,$$
$$\left.\left|f(D_1)-p_{ij}(D_1,C)\right|,...,\left|f(D_K)-p_{ij}(D_K,C)\right|,\ \left|f(B_1)-p_{ij}(B_1,C)\right|,...,\left|f(B_L)-p_{ij}(B_L,C)\right|\right\},\qquad(3)$$

де D_k, $k=\overline{1,K}$ – стаціонарні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C)=f(x,y)-p_{ij}(x,y,C)$ всередині прямокутного елемента $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$; K – кількість стаціонарних точок; B_ℓ, $\ell=\overline{1,L}$ – критичні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C)$ на сторонах прямокутного елемента $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$; L – кількість критичних точок.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх прямокутних елементах:

$$W=\min_{\substack{1\le i\le m-1\\1\le j\le n-1}}\left(J_{\Pi_{ij}}(C)\right)=\min_{\substack{1\le i\le m-1\\1\le j\le n-1}}\left(\max_{x\in D}\left|f(x,y)-p_{ij}(x,y,C)\right|\right).$$

Отримуємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$.

Приклад 1. Нехай задано функцію $f(x,y)$ на прямокутнику $[0;1]\times[0;1]$, яка має розриви на лініях $x=0,5$; $y=0,5$ першого роду (рис. 1):

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x<0.5, 0\le y<0.5;\\ x-y, & 0\le x<0.5, 0.5\le y<1;\\ y-x, & 0.5\le x\le 1, 0\le y<0.5;\\ -x-y, & 0.5\le x\le 1, 0.5\le y\le 1.\end{cases}$$

Нехай область $D=[0,1]^2$ розбивається на наступні прямокутні елементи (рис. 1):

$$\Pi_{1,1}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_1<y<y_2\},\ \Pi_{1,2}=\{(x,y): x_1<x<x_2, y_2<y<y_3\};$$

$$\Pi_{2,1} = \{(x,y) : x_2 < x < x_3, y_1 < y < y_2\}, \quad \Pi_{2,2} = \{(x,y) : x_2 < x < x_3, y_2 < y < y_3\}.$$

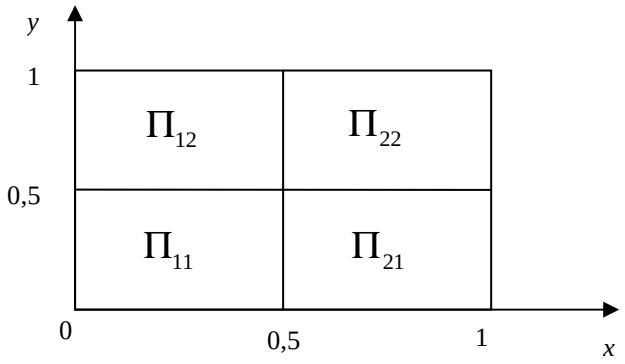


Рис. 1 – Область визначення розривної функції $f(x,y)$.

Задамо функцію $f(x,y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки (рис. 2):

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, (x,y) \in \Pi_{1,1}, \\ x-y, (x,y) \in \Pi_{1,2}, \\ -x+y, (x,y) \in \Pi_{2,1}, \\ -x-y, (x,y) \in \Pi_{2,2}. \end{cases}$$

У цьому випадку маємо п’ять точок, в яких побудована функція має розриви першого роду:

$$f^{-+}(0,5;0) = 0,5, \quad f^{++}(0,5;0) = -0,5, \quad f^{+-}(0;0,5) = 0,5, \quad f^{++}(0;0,5) = -0,5,$$
$$f^{--}(0,5;0,5) = 1, \quad f^{-+}(0,5;0,5) = 0, \quad f^{++}(0,5;0,5) = -1, \quad f^{+-}(0,5;0,5) = 0,$$
$$f^{--}(1;0,5) = -0,5, \quad f^{-+}(1;0,5) = -1,5., \quad f^{--}(0.5,1) = -0.5, \quad f^{+-}(0.5,1) = -1.5.$$

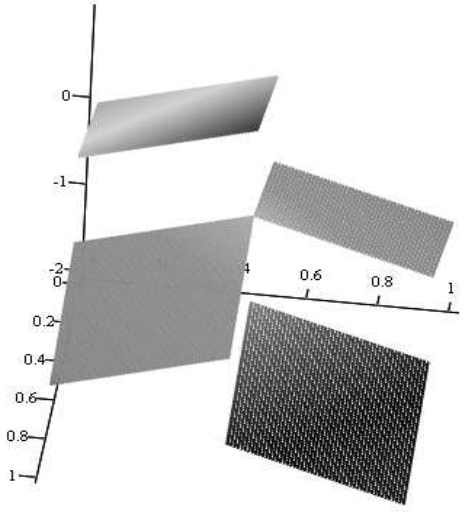


Рис. 2 – Графічний вигляд наближуваної функції $f(x,y)$.

Будемо наближувати функцію $f(x,y)$ сплайном, який визначений формулою (1).

У даному прикладі лінії розриву збігаються з лініями розриву наближувального сплайну і найкраще наближення сплайну до функції виконуємо аналітично.

На кожному з прямокутних елементів знаходимо максимальне значення відхилення сплайну $S(x,y)$ від функції $f(x,y)$ за наступним алгоритмом: оскільки і сплайн, і функція, яку наближуємо, на кожному прямокутному елементі є площинами, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з чотирьох значень відхилення на прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$:

$$J_{i,j} \max(C) = \max\left(\left|f(X_i + 0, Y_j + 0) - S(X_i + 0, Y_j + 0, C)\right|, \left|f(X_{i+1} - 0, Y_j + 0) - S(X_{j+1} + 0, Y_j + 0, C)\right|,\right.$$

$$\left| f(X_i + 0, Y_{j+1} - 0) - S(X_i + 0, Y_{j+1} - 0, C) \right|, \left| f(X_{i+1} - 0, Y_{j+1} - 0) - S(X_{i+1} - 0, Y_{j+1} - 0, C) \right|). \quad (3)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів C, за яких будуть виконуватися умови

$$J_{i,j} \max(C) \to \min_C .$$

У цьому прикладі сплайн матиме вигляд

$$S(x,y) = \begin{cases} C_{1,1}^{++} \frac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25} - C_{2,1}^{-+} \frac{x(y-0,5)}{0,25} - C_{1,2}^{+-} \frac{(x-0,5)y}{0,25} + C_{2,2}^{--} \frac{xy}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{1,1}; \\ -C_{1,2}^{++} \frac{(x-0,5)(y-1)}{0,25} + C_{2,2}^{-+} \frac{(x-1)(y-1)}{0,25} - C_{1,3}^{+-} \frac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25} + C_{2,3}^{--} \frac{x(y-0,5)}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{1,2}; \\ C_{2,1}^{++} \frac{(x-1)(y-0,5)}{0,25} - C_{3,1}^{-+} \frac{(x-0,5)(y-0,5))}{0,25} - C_{2,2}^{+-} \frac{(x-1)y}{0,25} + C_{3,2}^{--} \frac{(x-0,5)y}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{2,1}; \\ C_{2,2}^{++} \frac{(x-1)(y-1)}{0,25} - C_{3,2}^{-+} \frac{(x-0,5)(y-1)}{0,25} - C_{2,3}^{+-} \frac{(x-1)(y-0,5)}{0,25} + C_{3,3}^{--} \frac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{2,2}, \end{cases}$$

де C – матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1}^{++} & C_{2,1}^{-+} & C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--} \\ C_{1,2}^{++} & C_{2,2}^{-+} & C_{1,3}^{+-} & C_{2,3}^{--} \\ C_{2,1}^{++} & C_{3,1}^{-+} & C_{2,2}^{+-} & C_{3,2}^{--} \\ C_{2,2}^{++} & C_{3,2}^{-+} & C_{2,3}^{+-} & C_{3,3}^{--} \end{pmatrix}.$$

Треба знайти такі елементи матриці C, щоб вираз (3) набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу $F(C) \to \min$. Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad та була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & 0 & -1 & -0,5 \\ -0,5 & -1 & 0 & -0,5 \\ -1 & -1,5 & -1,5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції $f(x,y)$ має вигляд:

$$S(x,y) = \begin{cases} -0,5\frac{x(y-0,5)}{0,25} - 0,5\frac{(x-0,5)y}{0,25} + \frac{xy}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{11}; \\ 0,5\frac{(x-0,5)(y-1)}{0,25} + \frac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25} - 0,5\frac{x(y-0,5)}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{12}; \\ -0,5\frac{(x-1)(y-0,5)}{0,25} + \frac{(x-0,5)(y-0,5))}{0,25} - 0,5\frac{(x-0,5)y}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{21}; \\ -\frac{(x-1)(y-1)}{0,25} + 1,5\frac{(x-0,5)(y-1)}{0,25} + 1,5\frac{(x-1)(y-0,5)}{0,25} - 2\frac{(x-0,5)(y-0,5)}{0,25}, & (x,y) \in \Pi_{22}. \end{cases}$$

Після спрощення отримаємо наближувану функцію $f(x,y)$. Тобто побудований білінійний сплайн відновив точно задану кусково-лінійну розривну функцію двох змінних, що підтверджує вище викладену теорію.

Приклад 2. Нехай задано функцію $f(x,y)$, яка є нелінійною, на області $[0;\pi]\times[0;1]$ з однією лінією розриву (рис. 3):

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1; \\ \sin(x+y), & \frac{\pi}{2} < x \le \pi,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Обираємо сітку вузлів: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = \pi,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Наближуємо сплайном вигляду (1).

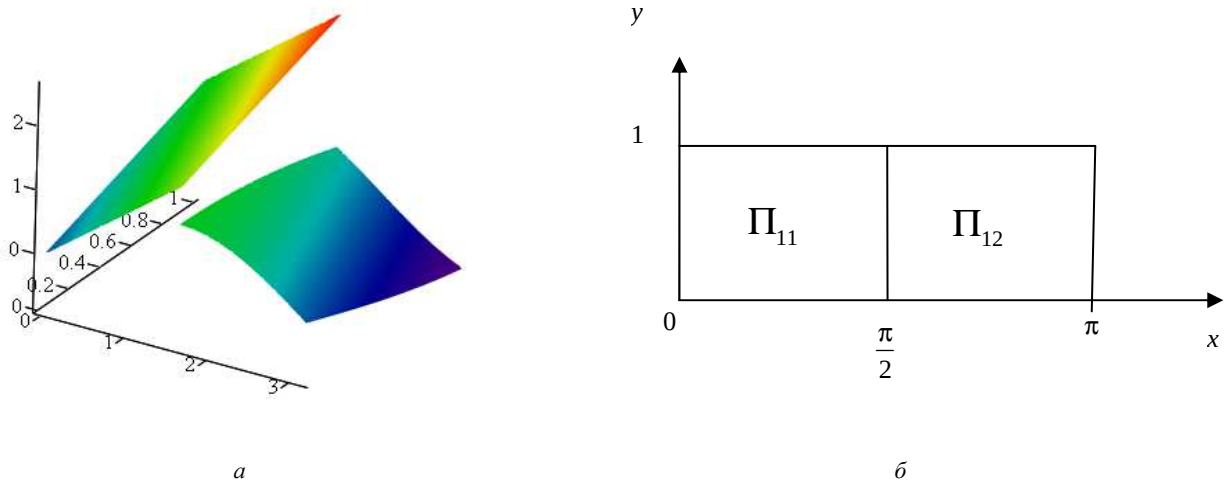
У цьому випадку маємо дві точки, в яких побудована функція має розриви першого роду:

$$f^{-+}\left(\frac{\pi}{2};0\right) = 1,57;\ f^{++}\left(\frac{\pi}{2};0\right) = 0;\ f^{--}\left(\frac{\pi}{2};1\right) = 2,57;\ f^{+-}\left(\frac{\pi}{2};1\right) = -0.9.$$

На кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайну $S(x,y)$ від функції $f(x,y)$. Оскільки на прямокутному елементі $\Pi_{1,1}$ і сплайн, і функція, яку наближуємо, є площина-

ми, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з чотирьох значень відхилення:

$$J_{1,1}\max(C)=\max\Big(\big|f(X_1+0,Y_1+0)-S(X_1+0,Y_1+0,C)\big|,\big|f(X_2-0,Y_1+0)-S(X_2+0,Y_1+0,C)\big|,$$
$$\big|f(X_1+0,Y_2-0)-S(X_1+0,Y_2-0,C)\big|,\ \big|f(X_2-0,Y_2-0)-S(X_2-0,Y_2-0,C)\big|\Big).$$



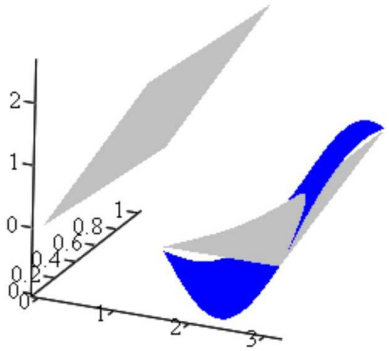
а *б*

Рис. 3 – Графічний вигляд: *а* – функції $f(x,y)$; *б* – області визначення функції $f(x,y)$.

На прямокутному елементі $\Pi_{1,2}$ функція є нелінійною, то максимальне відхилення буде мати вигляд

$$J_{1,2}\max(C)=\max\Big(\big|f(X_2+0,Y_1+0)-S(X_2+0,Y_1+0,C)\big|,\big|f(X_2-0,Y_2+0)-S(X_2+0,Y_2+0,C)\big|,$$
$$\big|f(X_3+0,Y_1-0)-S(X_3+0,Y_1-0,C)\big|,\ \big|f(X_3-0,Y_2-0)-S(X_3-0,Y_2-0,C)\big|,$$
$$\big|f(D_1)-S(D_1,C)\big|,...,\big|f(D_K)-S(D_K,C)\big|,\ \big|f(B_1)-S(B_1,C)\big|,...,\big|f(B_L)-p_{ij}(B_L,C)\big|\Big).$$

$D_k, k=\overline{1,K};\ B_\ell, \ell=\overline{1,L}$ – стаціонарні точки всередині та на сторонах прямокутника $\Pi_{1,2}$ відповідно.



f1 , S1 , f2 , S2

Рис. 4 – Графічний вигляд функції $f(x,y)$ (світлий колір) та сплайну $S(x,y)$ (темний колір).

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів C, за яких будуть виконуватися умови

$$J_{i,j}\max(C)\to\min_{C}.$$

Наближувальний сплайн в цьому прикладі матиме вигляд:

$$S(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\left(2xyC_{2,2}^{--}+2(y-1)(x-\dfrac{\pi}{2})C_{1,1}^{++}-2(y-1)C_{1,2}^{+-}-2y(x-\dfrac{\pi}{2})C_{2,1}^{-+}\right), & (x,y)\in\Pi_{11};\\ \dfrac{1}{\pi}\left(2(y-1)(x-\pi)C_{2,1}^{++}-2(y-1)(x-\dfrac{\pi}{2})C_{2,2}^{+-}-2y(x-\pi)C_{3,1}^{-+}+2y(x-\dfrac{\pi}{2})C_{3,2}^{--}\right), & (x,y)\in\Pi_{12}.\end{cases}$$

де C – матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix}C_{1,1}^{++} & C_{2,1}^{-+} & C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--}\\ C_{2,1}^{++} & C_{2,2}^{+-} & C_{3,1}^{-+} & C_{3,2}^{--}\end{pmatrix}.$$

За допомогою системи комп'ютерної математики MathCad була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1.57 & 1 & 2.57 \\ 0 & 0 & -0.9 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції $f(x, y)$ (рис. 4) має вигляд:

$$S(x,y) = \begin{cases} 1,64xy - 2 \cdot \frac{1}{\pi}(y-1)(x-\frac{\pi}{2}) - x(y-1), & (x,y) \in \Pi_{11}; \\ y(0,58x - 1,82) + y(0,58x - 0,9), & (x,y) \in \Pi_{21}; \end{cases} = \begin{cases} x + y, & (x,y) \in \Pi_{11}; \\ 1,16xy - 2,73y, & (x,y) \in \Pi_{21}. \end{cases}$$

Висновки. Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію двох змінних з розривами першого роду розривним білінійним сплайном, використовуючи метод мінімаксу. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайну не співпадають з точками розриву функції $f(x, y)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних [9], геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список литературы

1. *Петухов А. П.* О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С. 25 – 40.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление: монография. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
3. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск, 2012. – Т. 15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
4. *Rossini M.* Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1. – No. 1. – P. 1 – 13.
5. *Першина Ю. І., Пасічник В. О.* Чисельна реалізація методу виявлення точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2017. – № 3 (62). – Т. 1. – С. 80 – 84.
6. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 2 (19). – С. 59 – 70.
7. *Першина Ю. І, Пасічник В. О.* Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімаксу // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2018. – № 3 (66). – Т. 2. – С. 82 – 87.
8. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.*. Введение в минимакс. – Москва : Наука, 1972. – 368 с.
9. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації // Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів». – Київ : Національний авіаційний університет, 2008. – С. 85 – 86.

References (transliterated)

1. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metrike Khausdorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. l985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
2. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007.703 p.
3. Ageev A. L., Antonova T. V. Aproksimatsiya liniy razryva zashumlyennoy funktsii dvukh peremennykh [Approximation of discontinuity lines of noisy function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics]. Novosibirsk, 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.
4. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2007. vol. 1, no. 1, pp. 1–13.
5. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Chysel'na realizaciya metodu vyyavlennya tochok rozryvu pershogo rodu funktsiyi odnieyi zminnoyi [Numerical implementation of the method of detecting the first kind discontinuity points of a function of one variable]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2017, no. 3 (62), vol. 1, pp. 80–84.
6. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy dvokh zminnykh rozryvnymy splayn-interlinantamy z vykorystannyam trapecevydnykh elementiv [Approximation of discontinuous functions of two variables by discontinuous interlinational spline using trapezoidal elements]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Tavrichnyi Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2011, no. 2 (19), pp. 59–70.
7. Pershyna I. I., Pasichnyk V. O. Nablyzhennya rozryvnykh funktsiy rozryvnymy splaynamy metodom minimaksu [Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines by minimax method]. *Visnyk KhNTU* [Bulletin of KhNTU]. Kherson, 2018, vol. 2, no. 3(66), pp. 82–87.
8. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 368 p.
9. Lytvyn O. M., Pershyna I. I. Matematychne modelyuvannya v komp"yuterniy tomografiyi z vykorystannyam mishanoyi aproksymatsiyi [Mathematical modeling in computer tomography using blending approximation]. *Materialy drugoyi mizhnarodnoyi konferentsiyi "Teoriya ta metody obrobky sygnaliv"* [Materials of the Second International Conference "Theory and methods of signal processing"]. Kyiv, Natsional'nyy aviatsiynyy universytet Publ., 2008. pp. 85–86.

Надійшла (received) 06. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна (Першина Юлия Игоревна, Pershyna Iuliia Igorivna) – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Черногор Тетяна Тимофіївна (Черногор Татьяна Тимофеевна, Chernogor Tetyana Tymofiyivna) – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: tatyanachernogor54@gmail.com.

Саприкін Сергій Олександрович (Сапрыкин Сергей Александрович, Saprykin Sergey Oleksandrovych) – студент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 839-07-60; e-mail: saprik280679sa@gmail.com.

УДК 629.7.05

Ю. А. ПЛАКСІЙ, І. О. ГОМОЗКОВА

НОВІ ДВОЧАСТОТНІ ЕТАЛОННІ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА ДЛЯ ТОЧНОСНОГО АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ БІНС

Запропоновано нові аналітичні представлення розв'язків рівнянь обертання твердого тіла і основані на них неперервні двочастотні еталонні моделі обертання. Отримано аналітичні залежності для квазікоординат і компонент кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримано чисельні реалізації моделей і проведено чисельний аналіз поведінки оцінки похибки дрейфу для алгоритму орієнтації третього порядку. Показано, що тестовий обертальний рух на основі двочастотних еталонних моделей приводить до значно більшої похибки визначення орієнтації, ніж це має місце при регулярній прецесії.

Ключові слова: кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації, похибка дрейфу.

Ю. А. ПЛАКСИЙ, И. А. ГОМОЗКОВА

НОВЫЕ ДВУХЧАСТОТНЫЕ ЭТАЛОННЫЕ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ ТОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС

Предложены новые аналитические представления решений уравнений вращения твердого тела и основанные на них непрерывные двухчастотные эталонные модели вращения. Получены аналитические зависимости для квазикоординат и кватерниона, соответствующего такому вращательному движению. Для нескольких наборов параметров получены численные реализации моделей и проведен численный анализ поведения оценки погрешности дрейфа для алгоритма ориентации третьего порядка. Показано, что тестовое вращательное движение на основе двухчастотных эталонных моделей приводит к значительно большей погрешности определения ориентации, нежели это имеет место при регулярной прецессии.

Ключевые слова: кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации, погрешность дрейфа.

YU. A. PLAKSIY, I. A. HOMOZKOVA

NEW TWO-FREQUENCY REFERENCE MODELS OF RIGID BODY ROTATION FOR ERROR ANALYSIS OF SINS ORIENTATION ALGORITHMS

New analytical representations of solutions of the equations of rigid body rotation and continuous two-frequency reference models of rotation based on them are proposed. Analytical dependences are obtained for the quasi-coordinates and the quaternion corresponding to such rotational motion. For several sets of parameters the models are implemented numerically and the behaviour of the drift error for the third-order orientation algorithm is numerically analyzed. It is shown that the test rotational motion based on the two-frequency reference models leads to a much larger error in determining orientation than is the case with regular precession.

Key words: quaternion, reference model, test motion, quasicoordinates, trajectories in configuration space, algorithm of orientation, drift error.

Вступ. Як вбачається з [1], проблема розробки ефективних алгоритмів *безплатформених інерціальних навігаційних систем* (БІНС) в теперішній час вважається вичерпаною. Зусиллями багатьох дослідників розроблено значну кількість алгоритмів БІНС, зокрема алгоритмів орієнтації [2 – 4]. Однак, задача отримання коректних оцінок похибок розроблених алгоритмів орієнтації і вибору найкращого алгоритму для конкретного рухомого об'єкту є все ж актуальною. Для оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації традиційно застосовуються тестові рухи твердого тіла, такі як регулярна прецесія та конічне обертання [5, 6], для яких ідеальні сигнали з виходів гіроскопів і відповідні параметри орієнтації задаються в аналітичному вигляді. Розроблено також методики оптимізації коефіцієнтів алгоритмів орієнтації під конічний рух [7 – 9] або під регулярну прецесію [10] шляхом мінімізації локальної похибки обчисленого дрейфу. Такі оптимізовані алгоритми в умовах рухів, під які були відкоректовані їх коефіцієнти, на 2 порядки точніші, ніж відповідні неоптимізовані алгоритми, але в умовах довільного руху вони демонструють більш низьку точність, поступаючись відповідним неоптимізованим алгоритмам. При цьому оптимізовані в умовах конічного руху алгоритми орієнтації незалежно від їх порядку точності у випадку довільного руху є алгоритмами 3-го порядку точності [1]. Оскільки конічний рух вбачається достатньо ідеалізованим для опису руху реальних об'єктів, була зроблена спроба оцінювання ефективності використання алгоритмів орієнтації з оптимізованими під конічний рух коефіцієнтами в умовах більш загальних видів руху. При цьому дослідження проводились як в напрямку ускладнення детермінованого руху об'єкта, так і в напрямку переходу до стохастичного опису руху. В роботі [11] представлені результати дослідження похибок визначення кутової орієнтації об'єкта в умовах узагальненого конічного руху, коли складові кутової швидкості об'єкта описуються еліптичними функціями Якобі. Наведені результати підтверджують той факт, що алгоритми з оптимізованими для конічного руху коефіцієнтами втрачають оптимальність в умовах більш складного руху.

Тестові рухи, для яких оптимізуються коефіцієнти алгоритмів орієнтації, – це фактично відомі розв'язки сукупності динамічних і кінематичних рівнянь твердого тіла. Аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, відмінні від класичних, представлені в роботах [12, 13]. В даній роботі розглядаються нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, основані на мультиплікативних аналітичних представленнях компонент кватерніона орієнтації, і наводяться побудовані на цих розв'язках неперервні еталонні моделі обертання.

Постановка задачі. Розглядається обертальний рух твердого тіла навколо його центру мас, який описуєть-

© Ю. А. Плаксій, І. О. Гомозкова, 2018

ся системою динамічних рівнянь

$$I_1\dot{\omega}_1(t)-(I_2-I_1)\omega_2(t)\omega_3(t)=M_1(t),\ (1,2,3)\,, \tag{1}$$

де I_i, $i=1,2,3$ – моменти інерції твердого тіла; $M_i(t)$, $i=1,2,3$ – проекції вектора головного моменту; ω_i, $i=1,2,3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ на зв'язані осі; $(1,2,3)$ – символ кругової перестановки індексів і кінематичного кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t)=0,5\Lambda(t)\circ\omega(t)\,, \tag{2}$$

де $\Lambda(t)=(\lambda_0(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t))$ – кватерніон орієнтації; $\omega(t)=(0,\omega_1(t),\omega_2(t),\omega_3(t))$ – кватерніон кутової швидкості; $\circ$ – символ кватерніонного множення.

Необхідно отримати двочастотні розв'язки системи рівнянь (1), (2) у вигляді аналітичних залежностей $\omega_i=\omega_i(k_1,k_2,t)$, $i=1,2,3$, $\lambda_j=\lambda_j(k_1,k_2,t)$, $j=\overline{0,3}$ і основані на цих розв'язках параметричні аналітичні *еталонні моделі обертання твердого тіла* у вигляді сукупності *квазікоординат*

$$\theta^*_{ni}=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\omega_i(t)dt,\quad i=1,2,3 \tag{3}$$

на такті обчислень $[t_{n-1},t_n]$ і модельного кватерніона орієнтації $\Lambda(t)$, що відповідає цим кутовим рухам.

Методика отримання аналітичних еталонних моделей детально описана в [13]. Вона основана на представленні модельного кватерніона орієнтації $\Lambda(t)=(\lambda_0(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t))$ тригонометричними функціями кутів лінійних поворотів k_it, що забезпечує виконання умови нормування модельного кватерніона $\|\Lambda(t)\|=1$.

В даній роботі розглядаються два нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, основані на тригонометричних представленнях модельного кватерніона орієнтації, і наводяться побудовані на цих розв'язках неперервні еталонні моделі обертання.

Нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла.

Перший двочастотний розв'язок. Задамо аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (2) у вигляді:

$$\lambda_0(t)=\eta\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\,;\ \lambda_1(t)=\xi\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t)-\sin(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\,;$$
$$\lambda_2(t)=\xi\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)+\sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\,;\ \lambda_3(t)=\eta\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\,, \tag{4}$$

де k_1, k_2 – невідомі частоти $(k_1\neq k_2)$; η і ξ – параметри, для яких виконується умова $\eta^2+\xi^2=1$.

Для цього представлення кватерніона орієнтації згідно оберненого кінематичного рівняння

$$\vec{\omega}(t)=2\tilde{\Lambda}(t)\circ\dot{\Lambda}(t)\,,$$

де $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон, отримаємо, що проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\omega_1(t)=-2\eta k_1\cos(2k_2t)\,;\ \omega_2(t)=2\eta k_1\sin(2k_2t)\,;\ \omega_3(t)=-2\xi k_1+2k_2\,. \tag{5}$$

Отриманий аналітичний розв'язок рівнянь обертання (1), (2) відповідає початковим умовам $\Lambda(0)=(\eta,0,\xi,0)$, $\vec{\omega}(0)=(-2\eta k_1,0,-2\xi k_1+2k_2)$. При цьому перша та друга компоненти вектора кутової швидкості змінюються за гармонійним законом, а третя компонента є постійною, як це має місце при класичній регулярній прецесії динамічно симетричного твердого тіла $(I_1=I_2\neq I_3)$. Дійсно, у випадку $I_1=I_2\neq I_3$ для кінетичного моменту твердого тіла $\vec{K}$ будемо мати $K^2=4\eta^2k_1^2I_1^2+4I_3^2(-\xi k_1+k_2)^2=const$. Однак, як це буде показано далі, запропонований розв'язок (4), (5) є більш узагальненим випадком обертального руху твердого тіла.

Для цього розв'яжемо обернену задачу динаміки, тобто знайдемо зовнішні моменти, які забезпечують рух твердого тіла з компонентами кутової швидкості (5). Отримаємо з (1):

$$M_1(t)=4\eta k_1\sin(2k_2t)(I_1k_2+(I_2-I_3)(\xi k_1-k_2))\,;\ M_2(t)=4\eta k_1\cos(2k_2t)(I_2k_2+(I_3-I_1)(-\xi k_1+k_2))\,;$$
$$M_3(t)=2\eta^2k_1^2\sin(4k_2t)(I_1-I_2)\,. \tag{6}$$

Очевидно, що в загальному випадку несиметричного твердого тіла його рух під дією моментів (6) не є вільним обертанням. Для динамічно симетричного твердого тіла у випадку, коли $I_1=I_2$, знайдемо проекції зовнішнього моменту, що підтримує регулярну прецесію:

$$M_1(t)=4\eta k_1\sin(2k_2t)(I_3k_2+(I_1-I_3)\xi k_1)\,;\ M_2(t)=4\eta k_1\cos(2k_2t)(I_3k_2+(I_1-I_3)\xi k_1)\,;\ M_3(t)=0\,. \tag{7}$$

Очевидно, що тільки в умовах, коли $I_3k_2+(I_1-I_3)\xi k_1=0$ ($k_1\neq0$, $k_2\neq0$, $\eta\neq0$), рух твердого тіла з проекціями кутової швидкості (5) є класичним випадком регулярної прецесії. Це має місце, якщо параметр ξ набуває значення:

$$\xi=\frac{I_3k_2}{(I_3-I_1)k_1}\,.$$

Розглянемо загальний випадок розв'язку (4), коли $\eta=0$ $(\xi=\pm1)$. При цьому маємо вільний обертальний рух твердого тіла ($M_i=0$, $i=1,2,3$) з постійною кутовою швидкістю навколо третьої осі:

$$\omega_1(t)=0\,;\ \omega_2(t)=0\,;\ \omega_3(t)=-2\xi k_1+2k_2\,. \tag{8}$$

Кватерніон орієнтації для цього випадку руху має вигляд

$$\Lambda(t)=(0,\ \sin((k_2-k_1)t),\ \cos((k_2-k_1)t),\ 0)\,, \tag{9}$$

тобто $\Lambda(0)=(0,\ 0,\ 1,0)$.

Якщо в загальному випадку розв'язку (4) покласти $\xi=0$, $\eta=1$, отримаємо, що це рух твердого тіла під впливом моменту $\vec{M}(t)=(4k_1k_2\sin(2k_2t)(I_1-I_2+I_3),\ 4k_1k_2\cos(2k_2t)(I_2+I_3-I_1),\ 2k_1^2\sin(4k_2t)(I_1-I_2))$, який характеризується вектором кутової швидкості $\vec{\omega}(t)=(-2k_1\cos(2k_2t),\ 2k_1\sin(2k_2t),\ 2k_2)$ і кватерніоном орієнтації $\Lambda(t)=(\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t);\ -\sin(k_1t)\cdot\cos(k_2t);\ \sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t),\ \cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t))$. Тоді для кінетичного моменту твердого тіла $\vec{K}$ будемо мати $K^2=4k_1^2(I_1^2\cos^2(2k_2t)+I_2^2\sin^2(2k_2t)+4I_3^2k_2^2)\neq const$, тобто регулярна прецесія не спостерігається. Для динамічно симетричного твердого тіла $(I_1=I_2)$ отримаємо: $K^2=4k_1^2I_1^2+4I_3^2k_2^2=const$, тобто у цьому випадку має місце вимушена регулярна прецесія.

Другий двочастотний розв'язок. Аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (2) задамо у вигляді:

$$\lambda_0(t)=\eta\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)+\xi\sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\,;\ \lambda_1(t)=\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\,;$$
$$\lambda_2(t)=\sin(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\,;\ \lambda_3(t)=\xi\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)-\eta\sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\,, \tag{10}$$

де k_1, k_2 – невідомі частоти $(k_1\neq k_2)$; η і ξ – параметри, для яких виконується умова $\eta^2+\xi^2=1$.

Відповідний розв'язок динамічних рівнянь (1) згідно оберненого кінематичного рівняння (2) матиме вигляд:

$$\omega_1(t)=2\xi k_1\cos(2k_2t)+2\eta k_2\,,\ \omega_2(t)=2\eta k_1\cos(2k_2t)-2\xi k_2\,,\ \omega_3(t)=-2k_1\sin(2k_2t)\,. \tag{11}$$

Зазначимо, що перша та друга компоненти вектора кутової швидкості містять постійні складові, а третя компонента змінюється за гармонійним законом і не залежить від параметрів η і ξ. Цей розв'язок відповідає початковим умовам: $\Lambda(0)=(\eta,0,0,\xi)$, $\vec{\omega}(0)=(2\xi k_1+2\eta k_2,\ 2\eta k_1-2\xi k_2,\ 0)$. Оскільки жодна компонента вектора кутової швидкості (11) в загальному випадку значень параметрів η і ξ не є постійною, то таке обертання суттєво відрізняється від випадків регулярної прецесії та конічного руху.

Знайдемо моменти, під дією яких відбувається рух твердого тіла з компонентами кутової швидкості (11):

$$M_1(t)=-4k_1\sin(2k_2t)(I_1\xi k_2-(I_2-I_3)(\eta k_1\cos(2k_2t)-\xi k_2))\,;$$
$$M_2(t)=-4k_1\sin(2k_2t)(I_2\eta k_2-(I_3-I_1)(\xi k_1\cos(2k_2t)+\eta k_2))\,;$$
$$M_3(t)=-4I_3k_1k_2\cos(2k_2t)-4(I_1-I_2)(\xi k_1\cos(2k_2t)+\eta k_2)(\eta k_1\cos(2k_2t)-\xi k_2)\,. \tag{12}$$

Розглянемо частинний випадок розв'язку (10), коли $\eta=0$, $\xi=1$. Для кватерніона орієнтації матимемо: $\Lambda(t)=(\sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t);\ \cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t);\ \sin(k_1t)\cdot\cos(k_2t);\ \cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t))$, а вектор кутової швидкості набуває вигляду: $\vec{\omega}(t)=(2k_1\cos(2k_2t);\ -2k_2;\ -2k_1\sin(2k_2t))$. Даний обертальний рух відбувається під дією вектора моменту $\vec{M}(t)=(-4k_1k_2(I_1+I_2-I_3)\sin(2k_2t);\ 2k_1^2(I_3-I_1)\sin(4k_2t);\ 4k_1k_2(I_1-I_2-I_3)\cos(2k_2t))$. Початкові умови руху: $\Lambda(t)=(0;\ 0;\ 0;\ 1)$, $\vec{\omega}(t)=(2k_1;\ -2k_2;\ 0)$. Для динамічно симетричного твердого тіла $I_1=I_3$ цей рух є вимушеною регулярною прецесією $(K^2=4I_1^2k_1^2+4I_2^2k_2^2=const)$.

Якщо у розв'язку (10) задати значення параметрів $\eta=1$, $\xi=0$, то отримаємо розв'язок динамічних рівнянь (1) у вигляді:

$$\vec{\omega}(t)=(2k_2;\ 2k_1\cos(2k_2t);\ -2k_1\sin(2k_2t))\,,$$

а кватерніон орієнтації при цьому має вигляд:

$$\Lambda(t)=(\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t);\ \cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t);\ \sin(k_1t)\cdot\cos(k_2t);\ -\sin(k_1t)\cdot\sin(k_2t))\,.$$

Цей обертальний рух відбувається під дією зовнішнього моменту

$$\vec{M}(t)=(2k_1^2(I_2-I_3)\sin(4k_2t);\ -4k_1k_2(I_1+I_2-I_3)\sin(2k_2t);\ -4k_1k_2(I_1-I_2+I_3)\cos(2k_2t))$$

з початковими умовами: $\Lambda(t)=(1;\ 0;\ 0;\ 0)$, $\vec{\omega}(t)=(2k_2;\ 2k_1;\ 0)$. Для динамічно симетричного твердого тіла $I_2=I_3$ цей рух є вимушеною регулярною прецесією. Для вектора кінетичного моменту тіла $\vec{K}$ в цьому випадку маємо: $K^2=4I_1^2k_2^2+4I_2^2k_1^2=const$.

Еталонні моделі обертання, основані на нових представленнях двочастотних розв'язків.

Перша еталонна модель обертання. В основу еталонної моделі обертання в цьому випадку покладено аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (4) в умовах, коли значення параметрів η, ξ і частот k_1, k_2 задані. Останні можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимацій реального руху об'єкта. Модель включає також аналітичні

залежності для квазікоординат у вигляді:

$$\theta^*_{n1} = -\eta\frac{k_1}{k_2}(\sin(2k_2t_n) - \sin(2k_2t_{n-1}));\ \theta^*_{n2} = -\eta\frac{k_1}{k_2}(\cos(2k_2t_n) - \cos(2k_2t_{n-1}));\ \theta^*_{n3} = 2(k_2 - \xi k_1)\Delta t, \qquad (13)$$

де $\Delta t = t_n - t_{n-1}$.

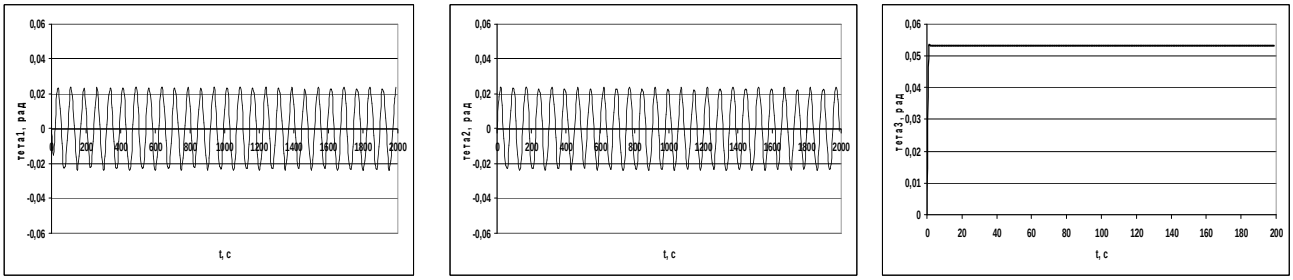
Друга еталонна модель обертання. Модель включає аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (10) із заданими значеннями параметрів η, ξ, частот k_1, k_2 і аналітичні залежності для квазікоординат:

$$\theta^*_{n1} = \xi\frac{k_1}{k_2}(\sin(2k_2t_n) - \sin(2k_2t_{n-1})) + 2\eta k_2\Delta t;\ \theta^*_{n2} = \eta\frac{k_1}{k_2}(\sin(2k_2t_n) - \sin(2k_2t_{n-1})) - 2\xi k_2\Delta t;$$

$$\theta^*_{n3} = \frac{k_1}{k_2}(\cos(2k_2t_n) - \cos(2k_2t_{n-1})). \qquad (14)$$

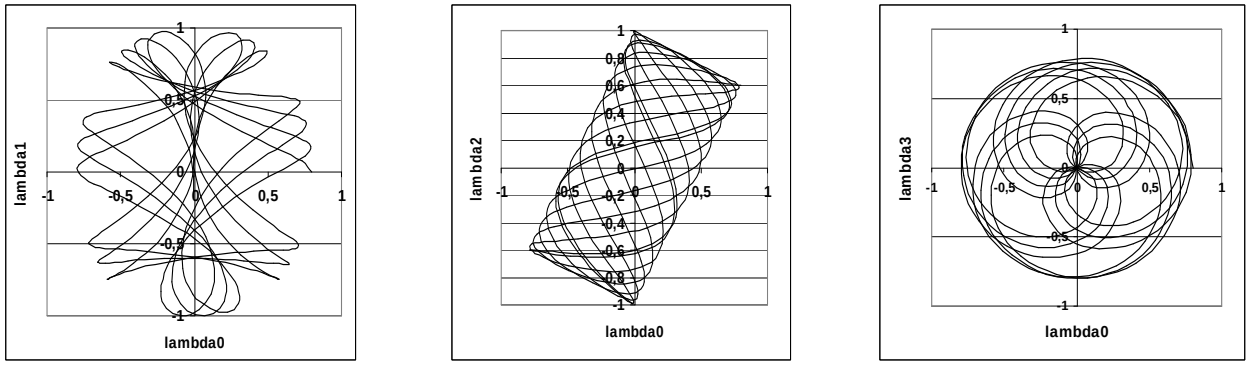
Чисельна реалізація двочастотних еталонних моделей обертання. Реалізуємо запропоновані двочастотні моделі для конкретних значень частот і параметрів, такту обчислень $\Delta t = 0{,}1\text{c}$ на інтервалі часу $200\,\text{c}$.

Для значень частот $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}356$ і параметрів $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}6$ результати реалізації еталонної моделі для першого двочастотного розв'язку (4) у вигляді залежностей квазікоординат θ^*_{ni} від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 1 та рис. 2 відповідно.

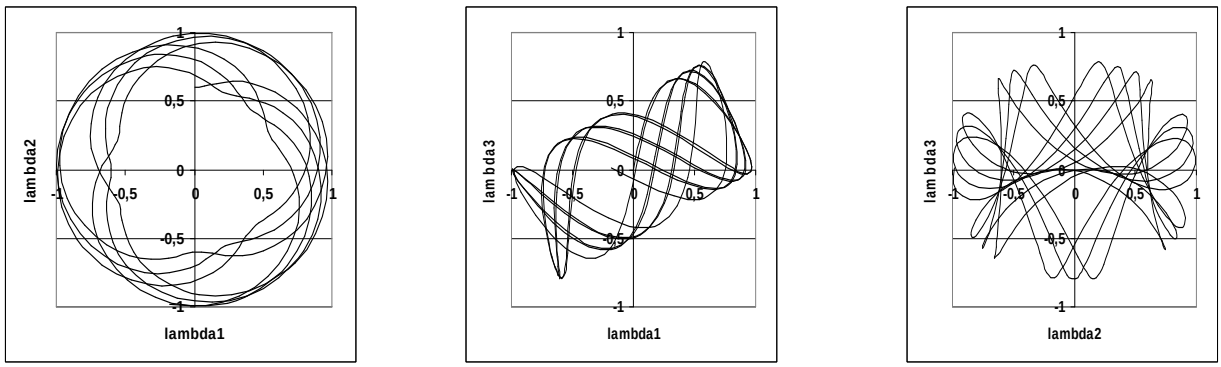


а *б* *в*

Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}356$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}6$: *а* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

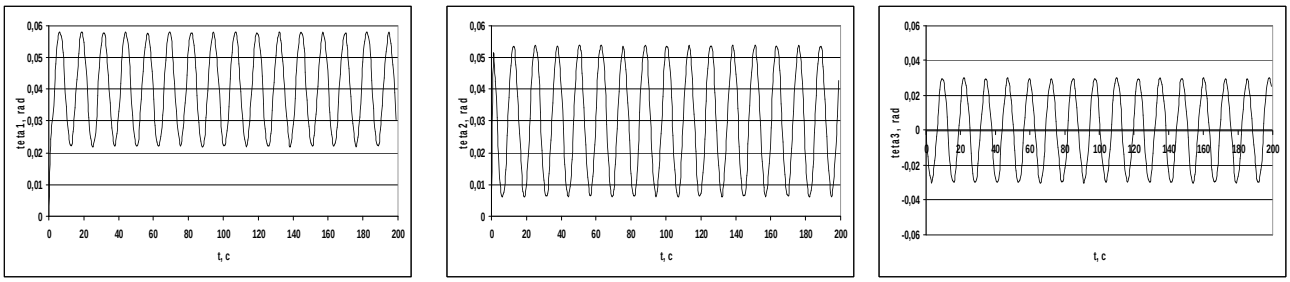


а *б* *в*



г *д* *е*

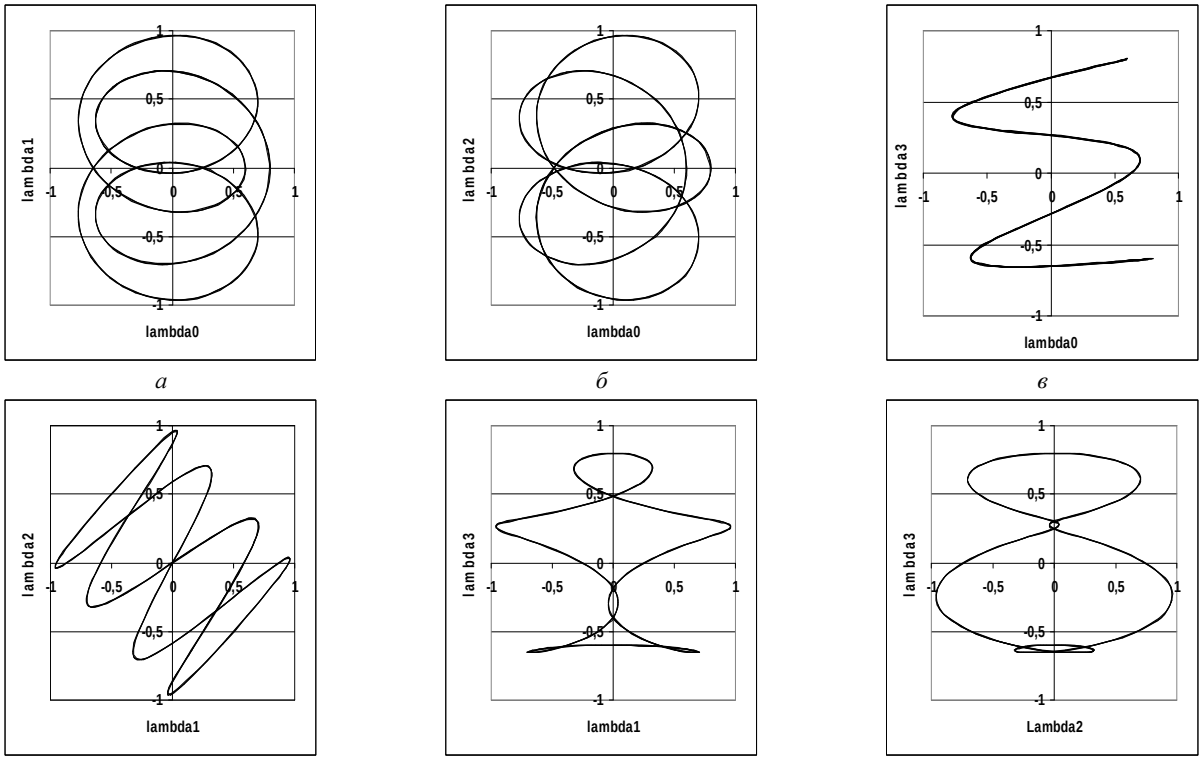
Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}356$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = 0{,}6$: *а* – $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; е – $\lambda_3(\lambda_2)$.



а *б* *в*

Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}25$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = -0{,}6$: *а* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

Залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при значеннях частот $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}25$ і параметрів $\eta = 0{,}8$, $\xi = -0{,}6$ представлені на рис. 3. Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку наведено на рис. 4.



а *б* *в*

г *д* *е*

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0{,}15$, $k_2 = 0{,}25$, $\eta = 0{,}8$, $\xi = -0{,}6$: *а* – $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; *е* – $\lambda_3(\lambda_2)$.

На рис. 5 представлені траєкторії у конфігураційному просторі параметрів, отримані для моделі регулярної прецесії на інтервалі часу 200 с з початковими умовами $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ і $\vec{\omega}(0) = (0{,}012;\ -0{,}011;\ 0{,}015)$ рад/с.

Порівняння результатів, отриманих для еталонних моделей двочастотних розв'язків, з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що траєкторії, реалізовані для запропонованих двочастотних моделей в загальному випадку значень частот k_1, k_2 і параметрів η, ξ, суттєво відрізняються від траєкторій, отриманих для регулярної прецесії, і є більш складними.

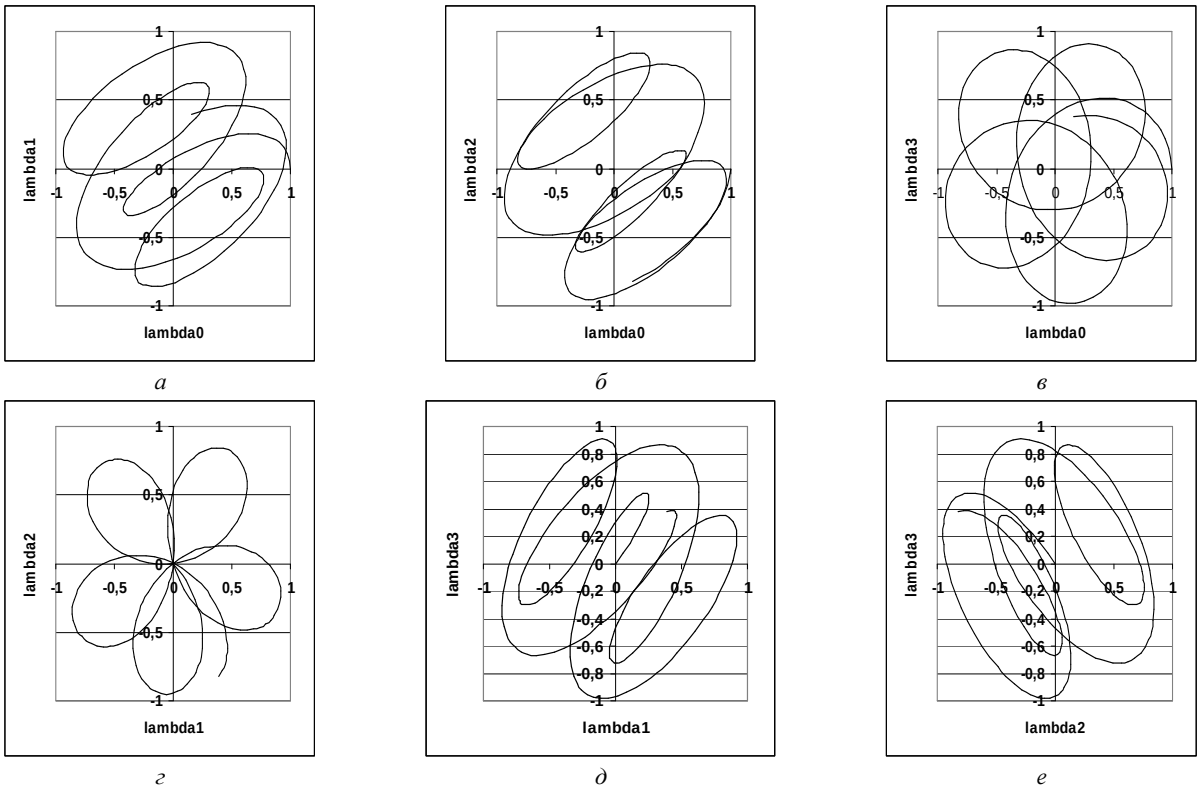
Точносний аналіз алгоритму орієнтації третього порядку на двочастотних еталонних моделях. Застосуємо побудовані чисельні реалізації двочастотних еталонних моделей для отримання оцінки точності алгоритму третього порядку, для якого кватерніон повороту $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\vec{\lambda}_n^*)$ на такті $[t_{n-1}, t_n]$ має вигляд [14]:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \quad \Delta\vec{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^*\left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{24}\left(\vec{\theta}_{n-1}^* \times \vec{\theta}_n^*\right), \tag{15}$$

де $\theta_n^{*2} = \theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}$. Для оцінювання точності алгоритму в якості похибки будемо визначати неусувну похибку орієнтації – накопичений малий кут повороту (дрейф) обчисленого тріедру осей відносно його істинного положення, яке задається еталонною моделлю. Для цього використаємо методику визначення дрейфу, запропо-

новану в [14].

На рис. 6 представлені залежності похибки дрейфу від часу на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с, отримані з кроком $\Delta t = 0{,}1$ с на еталонних моделях обертання, які основані на першому та другому двочастотних розв'язках, для випадку $|\vec{\omega}(t)| = 0{,}5831$ рад/с. Для порівняння на рис. 6 приведена відповідна залежність похибки дрейфу від часу, що отримана на еталонній моделі регулярної прецесії з початковими умовами $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$ і $\vec{\omega}(0) = (0{,}15;\ -0{,}356;\ 0{,}437)$ рад/с, для якої також виконується умова $|\vec{\omega}(t)| = 0{,}5831$ рад/с.



а *б* *в*

г *д* *е*

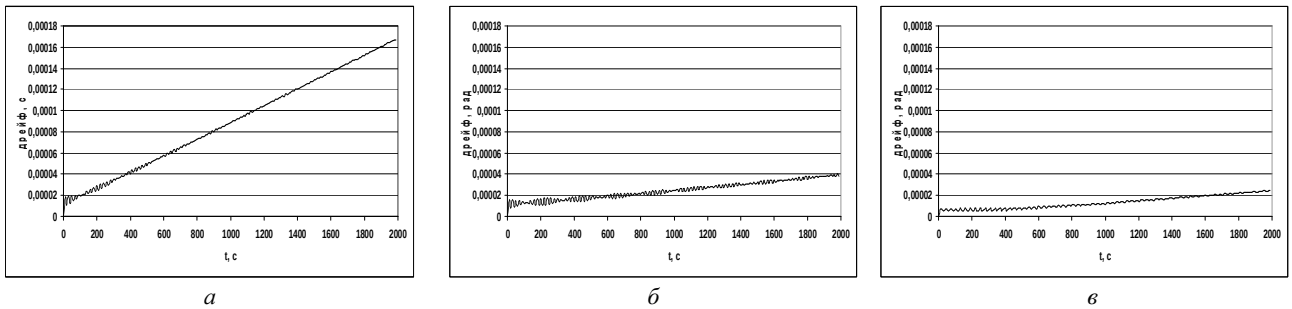
Рис. 5 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі регулярної прецесії з початковими умовами $\Lambda(0) = (1,0,0,0)$ і $\vec{\omega}(0) = (0{,}15;\ -0{,}356;\ 0{,}437)$ рад/с : *а* – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; *е* – $\lambda_3(\lambda_2)$.

Аналіз приведених залежностей на рис. 6 дозволяє зробити наступні висновки:

– похибка дрейфу (за однакових умов по модулю вектора кутової швидкості для всіх тестових рухів) зростає з часом, але швидкість зростання похибки дрейфу в умовах нових еталонних моделей перевищує швидкість зростання похибки дрейфу у випадку моделі регулярної прецесії;

– найгіршим тестовим рухом з точки зору похибки дрейфу для вибраного алгоритму є еталонна модель, що основана на першому двочастотному розв'язку;

– тестовий рух у вигляді регулярної прецесії не є найгіршим тестовим рухом для аналізу похибок алгоритмів орієнтації БІНС, як це вважалося раніше.



а *б* *в*

Рис. 6 –Залежності похибки дрейфу від часу для алгоритму 3-го порядку, отримані: *а* – на еталонній моделі (4), (13) першого двочастотного розв'язку; *б* – на еталонній моделі (10), (14) другого двочастотного розв'язку; *в* – на еталонній моделі регулярної прецесії.

Висновки. Запропоновано два нові двочастотні розв'язки системи динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла і отримано на їх основі еталонні моделі обертання. Чисельна реалізація еталонних моделей показала, що відповідний рух суттєво відрізняється від випадку класичної регулярної прецесії, та є більш склад-

ним рухом. Реалізації еталонних моделей використані, як тестові рухи, для оцінювання похибки дрейфу алгоритму орієнтації третього порядку. При цьому похибка дрейфу, що має місце для запропонованих моделей, значно більша, ніж та, що має місце для моделі регулярної прецесії з таким самим модулем вектора кутової швидкості.

Список літератури

1. *Литманович Ю.* Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор». – 2003. – С. 250 – 260.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
3. *Панов А. П.* Математические основы теории инерциальной навигации. – К. : Наукова думка, 1995. – 280 с.
4. *Savage P. G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms // Journal of Guidence, Control and Dynamics. – Vol. 21. – No 1. – 1998. – P.19 – 28.
5. *Панов А. П.* Двушаговые алгоритмы вычислений параметров ориентации // Косм. иссл. на Украине. – К. : Наукова думка, 1974. – Вып. 5. – С. 76 – 82.
6. *Ткаченко А. И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22.
7. *Miller R. B. A new* strapdown attitude algorithm // Journal of Guidence, Control and Dynamics. – Vol. 6. – No 4. – 1983. – P. 287 – 291.
8. *Ignagni M. B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms // Journal of Guidence, Control and Dynamics. – Vol. 13. – No 2. – 1990. – P. 363 – 369.
9. *Панов А. П.* Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Механика гироскопических систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112.
10. *Панов А. П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернетика и вычислительная техника. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
11. *Musoff H., Murphy J. H.* A Study of strapdown integration algorithms // Journal of Guidence, Control and Dynamics. – Vol. 18. – No 2. – 1995. – P. 287 – 290.
12. *Плаксій Ю. А.* Мультиплікативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2016. – № 16 (1188). – С. 72 – 80.
13. *Плаксій Ю. А.* Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – С. 175 – 185.
14. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.

References (transliterated)

1. Litmanovich Yu. Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialakh Sankt-Peterburgskikh konferentsiy za desyatiletie [Progress in the development of SINS in the West and East in the materials of the St. Petersburg conferences over the decade]. *X Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. konf.* [X St. Petersburg International Conference]. St. Petersburg, TsNII "Yelektropribor" Publ., 2003, pp. 250–260.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inertsial'nykh navigatsionnykh sistem* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
3. Panov A. P. *Matematicheskie osnovy teorii inertsial'noy navigatsii* [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1995. 280 p.
4. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms. *Journal of Guidence, Control and Dynamics*. 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
5. Panov A. P. Dvushagovye algoritmy vychisleniy parametrov orientatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]. *Kosm. issl. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no. 5, pp. 76–82.
6. Tkachenko A. I. O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientatsii ob"ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in the algorithms of determining object orientation]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Technology]. Kyiv, 1970, no. 5, pp. 20–22.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidence, Control and Dynamics.* 1983, vol. 6, no. 4, pp. 287–291.
8. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. *Journal of Guidence, Control and Dynamics*. 1990, vol. 13, no. 2, pp. 363–369.
9. Panov A. P. Optimizatsiya metodov vychisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions in the case of conic vibrations of a rigid body]. *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
10. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of recession of a rigid body]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Technolog]. K. 1987. Vyp. 73, pp. 3–9.
11. Musoff H., Murphy J. H. A Study of strapdown integration algorithms. *Journal of Guidence, Control and Dynamics.* 1995, vol. 18, no. 2, pp. 287–290.
12. PlaksIy Yu. A. Mul'typlikatyvni triekhchastotni modeli obertannya tverdogo tila [Multiplicative three-frequency models of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Matematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 72–80.
13. Plaksiy Yu. A. Triekhchastotni analitychni etalonni modeli obertannya tverdogo tila [Three-frequency reference analytical models of rigid body rotation]. *Visnik NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Matematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 6 (1049), pp. 175–185.
14. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [*Application of quaternions in the problems of a rigid body orientation*]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.

Надійшла (received) 25.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Плаксій Юрій Андрійович (Плаксий Юрий Андреевич, Plaksiy Yuriy Andriyovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Гомозкова Ірина Олександрівна (Гомозкова Ирина Александровна, Homozkova Iryna Oleksandrivna) – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: arinhomozkova@gmail.com.

UDC 517.968

T. S. POLYANSKAYA, O. O. NABOKA

NUMERICAL SOLUTION OF FIRST KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH HILBERT-TYPE MULTIPLE INTEGRAL

In the paper a first kind singular integral equation containing a Hilbert-type double integral over the domain $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ is studied. The necessary conditions providing solvability of this equation are given. The equation studied is discretized under additional assumptions by the method of discrete singularities. The unique solvability of the discrete problem obtained is proved. The speed of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the initial singular integral equation is estimated.

Key words: singular integral equation, method of discrete singularities.

Т. С. ПОЛЯНСЬКА, О. О. НАБОКА

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ З КРАТНИМ ІНТЕГРАЛОМ ТИПУ ГІЛЬБЕРТА

Досліджено сингулярне інтегральне рівняння першого роду з подвійним інтегралом типу Гільберта, у випадку, коли областю інтегрування є добуток $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Наведено необхідні умови, за яких це рівняння має розв'язок. Проведено дискретизацію рівняння, що вивчається, за додаткових умов на основі метода дискретних особливостей. Доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дана оцінка скорості збіжності розв'язку цієї задачі до точного розв'язку заданого сингулярного інтегрального рівняння.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, Е. А. НАБОКА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С КРАТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ТИПА ГИЛЬБЕРТА

Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение первого рода с двукратным интегралом типа Гильберта, когда область интегрирования является произведением $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Приведены необходимые условия разрешимости этого уравнения. Проведена дискретизация рассматриваемого уравнения с дополнительными условиями на основе метода дискретных особенностей. Доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дана оценка скорости сходимости решения этой задачи к точному решению заданного сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

Introduction. It is shown in [1], that the problem of a flow over a rectangular wing can be reduced to a singular integral equation containing a double singular integral. Thus studying such equations is of importance for applications. In the present paper a first kind singular integral equation with a double Hilbert-type integral is solved by the numerical method of discrete singularities.

Problem setting. We are looking for the solution $u(\varphi_1,\varphi_2)$ to the following *singular integral equation* (SIE):

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\theta_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2-\theta_2}{2}u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2=g(\theta_1,\theta_2),\quad(1)$$

where $K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)$ and $g(\theta_1,\theta_2)$ are 2π – periodic functions belonging to the functional class $C^{\mu,\gamma}$ in each variable uniformly with respect to the other variables. Here $C^{\mu,\gamma}$ stands for the class of μ times differentiable functions such that their μ – th derivatives satisfy *the Hilbert condition with the exponent* γ $(0<\gamma\le 1)$.

We introduce the operators:

$$\left(\Gamma_\varphi u\right)(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}u(\varphi)\,d\varphi,$$

where the integral should be understood in the sense of *the Cauchy principal value* and

$$(Ku)(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Using the operators introduced above equation (1) admits the following representation:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K\right)u\right)(\theta_1,\theta_2)=g(\theta_1,\theta_2).\quad(2)$$

We introduce two regularization functions for equation (2):

$$h_s(\varphi_s)=\left\{\Gamma_{\theta_s}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(Ku)(\theta_1,\theta_2)-g(\theta_1,\theta_2)\right]d\theta_r\right\}(\varphi_s),\quad r,s=1,2,\ r\ne s,$$

© T. S. Polyanskaya, O. O. Naboka, 2018

and a regularization constant:

$$h = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(Ku)(\theta_1,\theta_2) - g(\theta_1,\theta_2)\right]d\theta_1 d\theta_2.$$

The regularization functions satisfy the additional conditions:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_s(\varphi_s)\,d\varphi_s = 0,\ \ s = 1, 2.$$

In case $u(\varphi_1, \varphi_2)$ is a solution to SIE (2), the following conditions hold along this solution: $h_s(\varphi_s) \equiv 0,\ \ s = 1, 2,$ $h = 0$, which are the necessary conditions providing solvability of equation (2). Nevertheless, the numerical method can be applied for solving equation (2) only if stricter conditions are imposed. Namely, in what follows we assume that

$$\int_0^{2\pi} K(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)\,d\theta_s \equiv 0,\ \ s = 1, 2, \quad \int_0^{2\pi} g(\theta_1, \theta_2)\,d\theta_s \equiv 0,\ \ s = 1, 2.$$

The operator Γ_φ satisfies the following property (see [3]): $\Gamma_\varphi : 1 \to 0$, which implies that

$$\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} : 1 \to 0; \qquad \Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} : x(\varphi_s) \to 0,\ \ s = 1, 2.$$

In view of this remark, following the ideas of [1], we conclude that to ensure the unique solvability of the standard equation

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} u\right)(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2)$$

the following conditions are required:

$$\begin{cases} \left(\Gamma_{\varphi_s}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\varphi_1, \varphi_2)\,d\varphi_r\right)(\theta_s) = C_s(\theta_s), \quad r, s = 1, 2, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varphi_1, \varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2 = C, \end{cases} \tag{3}$$

where C is a known constant, $C_s(\theta_s) \in C^{\mu,\gamma},\ \ s = 1, 2$ are known 2π – periodic function satisfying equalities:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_s(\theta_s)\,d\theta_s = 0, \quad s = 1, 2. \tag{4}$$

If all the above assumptions hold, then the unique solution to the standard equation is given by the function:

$$u(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\Gamma_{\theta_1}\Gamma_{\theta_2} g\right)(\varphi_1, \varphi_2) - \left(\Gamma_{\theta_1} C_1\right)(\varphi_1) - \left(\Gamma_{\theta_2} C_2\right)(\varphi_2) + C\ .$$

Henceforth we assume that SIE (2) admits the unique solution $u(\varphi_1, \varphi_2)$ satisfying additional conditions (3).

Regularization and discretization of given equation. Let $\varphi_k^{(n)},\ \ k = \overline{0, 2n}$ be the points of the unit circle centered at the origin dividing this circle into $2n+1$ equal arcs, and the points $\varphi_{0j}^{(n)}$ be the centers of the corresponding arcs $\varphi_j^{(n)}\ \varphi_{j+1}^{(n)},\ \ j = \overline{0, 2n}$, $\left(\varphi_{2n+1}^{(n)} = \varphi_0^{(n)}\right)$.

We introduce the notations for two trigonometric interpolation polynomials:

$$\left(P_n^{(1)} f\right)(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f\left(\varphi_k^{(n)}\right)\frac{\sin\left[\dfrac{2n+1}{2}\left(\varphi - \varphi_k^{(n)}\right)\right]}{\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(\varphi - \varphi_k^{(n)}\right)\right]},$$

and

$$\left(P_n^{(2)} f\right)(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f\left(\varphi_{0j}^{(n)}\right)\frac{\sin\left[\dfrac{2n+1}{2}\left(\varphi - \varphi_{0j}^{(n)}\right)\right]}{\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(\varphi - \varphi_{0j}^{(n)}\right)\right]}.$$

According to the method of discrete singularities, the solution $u_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \left(P_{n_1\varphi_1}^{(1)} P_{n_2\varphi_2}^{(1)} u_{\bar{n}}\right)(\varphi_1, \varphi_2),\ \ \bar{n} = (n_1, n_2)$ to problem (2), (3) approximating the exact solution $u(\varphi_1, \varphi_2)$ to initial problem (1) is found by solving the following SIE:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar{n}}\right)u_{\bar{n}}\right)(\theta_1,\theta_2)+\sum_{s=1}^{2}\left(\Gamma_{\varphi_s}h_{s\bar{n}}\right)(\theta_s)+h_{\bar{n}}=\left(P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g\right)(\theta_1,\theta_2) \tag{5}$$

supplemented by the conditions:

$$\begin{cases}\left(\Gamma_{\varphi_s}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u_{\bar{n}}(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_r\right)(\theta_s)+h_{C_s\bar{n}}=\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s), \quad r,\ s=1,2, \quad r\neq s,\\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{\bar{n}}(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2=C,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}h_{s\bar{n}}(\varphi_s)\,d\varphi_s=0, \quad s=1,2.\end{cases} \tag{6}$$

Here $K_{\bar{n}}(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)=\left(P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}P^{(1)}_{n_1\varphi_1}P^{(1)}_{n_2\varphi_2}K\right)(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)$; $h_{s\bar{n}}(\varphi_s)$, $s=1,2$ and $h_{\bar{n}}$ are accordingly the regularization functions and regularization constant for the following SIE:

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar{n}}\right)u_{\bar{n}}=P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g; \quad h_{C_s\bar{n}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s)\,d\theta_s, \quad s=1,2$$

are regularization corrections which are due to the fact that in general $\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s)$, $s=1,2$, do not satisfy conditions (4).

Considering system of equations (5), (6) at the points $\theta_s=\varphi^{(n_s)}_{0j_s}$, $j_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ and computing the integrals using quadrature formulas (see [3]), we arrive at the following system of linear algebraic equations (SLAE) with respect to the variables $u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$; $h_{C_s\bar{n}}$, $s=1,2$; $h_{\bar{n}}$; $h_{s\bar{n}}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_1)}_{i_1}-\varphi^{(n_1)}_{0j_1}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_2)}_{i_2}-\varphi^{(n_2)}_{0j_2}}{2}+K\left(\varphi^{(n_1)}_{0j_1},\varphi^{(n_2)}_{0j_2},\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]\times\\ \times u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)+\displaystyle\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{2n_s+1}\sum_{i_s=0}^{2n_s}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_s)}_{i_s}-\varphi^{(n_s)}_{0j_s}}{2}h_{s\bar{n}}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)+h_{\bar{n}}=g\left(\varphi^{(n_1)}_{0j_1},\varphi^{(n_2)}_{0j_2}\right),\\ j_1=\overline{0,2n_1}, \quad j_2=\overline{0,2n_2},\\ \dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_s)}_{i_s}-\varphi^{(n_s)}_{0j_s}}{2}u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)+h_{C_s\bar{n}}=C_s\left(\varphi^{(n_s)}_{0j_s}\right),\\ i_s=\overline{0,2n_s}, \quad s=1,2,\\ \dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)=C,\\ \dfrac{1}{2n_s+1}\displaystyle\sum_{i_s=0}^{2n_s}h_{s\bar{n}}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)=0, \quad s=1,2.\end{cases} \tag{7}$$

In (7) $u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ stand for the values of the unknown function $u_{\bar{n}}(\varphi_1,\varphi_2)$ at the interpolation nodes. In case these values are known, then

$$u_{\bar{n}}(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}u_{\bar{n}}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\frac{\sin\left[\dfrac{2n_1+1}{2}\left(\varphi_1-\varphi^{(n_1)}_{i_1}\right)\right]\sin\left[\dfrac{2n_2+1}{2}\left(\varphi_2-\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]}{\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(\varphi_1-\varphi^{(n_1)}_{i_1}\right)\right]\sin\left[\dfrac{1}{2}\left(\varphi_2-\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]}.$$

We note that the regularization unknowns $h_{C_s\bar{n}}$, $s=1,2$; $h_{\bar{n}}$; $h_{s\bar{n}}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ were introduced by *I. K. Lifanov*, [4]. Apparently the number of equations in SLAE (7) equals the number of its unknowns.
SLAE (7) admits a unique solution if and only if problem (5), (6) does.

Proof of solvability. In order to prove the unique solvability of problem (5), (6) we consider an equivalent problem

with homogeneous additional conditions. After introducing a new unknown function $v(\varphi_1, \varphi_2) = u(\varphi_1, \varphi_2) + y(\varphi_1, \varphi_2)$, where

$$y(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{s=1}^{2} \left(\Gamma_{\theta_s} C_s\right)(\varphi_s) - C,$$

equation (2) and conditions (3) become respectively:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K\right)v\right)(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) \tag{8}$$

and

$$\begin{cases} \left(\Gamma_{\varphi_s} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_r\right)(\theta_s) = 0, \;\; r, s = 1, 2, \;\; r \neq s, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

where $f(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) + (Ky)(\theta_1, \theta_2)$. Apparently, for equation (8) the following conditions hold:

$$\int_0^{2\pi} K(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)\, d\theta_s \equiv 0, \;\; s = 1, 2, \qquad \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_s \equiv 0, \;\; s = 1, 2. \tag{10}$$

We introduce special functional spaces in which our operators are defined. Denote:

$L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ – the Hilbert space of the functions of two variables with the scalar product defined by the formula:

$$(x, y)_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\varphi_1, \varphi_2)\, \overline{y}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2;$$

$L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ – a subspace of $L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ consisting of the functions satisfying (9).

In view of conditions (9), (10), equation (8) can be considered in the pair of spaces

$$\left(L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}, L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\right), \tag{11}$$

in which the operator $\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}$ is continuously invertible. Then the assumption about the unique solvability of problem (2), (3) implies the continuous invertibility of the operator $\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K$ in the pair of spaces (11).

Consider $w(\theta_1, \theta_2) \in L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$, $e(\theta_1, \theta_2) \equiv 1$. Define the regularized function $w^R(\theta_1, \theta_2) \in L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ by the relation:

$$w^R(\theta_1, \theta_2) = w(\theta_1, \theta_2) + \sum_{\substack{r,s=1 \\ r\neq s}}^{2} \left\{\Gamma_{\psi_s}\left[\left(\Gamma_{\theta_r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_s\right)(\psi_r)\right]\right\}(\theta_r) - - \frac{1}{(2\pi)^2}(w, e)_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}.$$

The approximate solution $v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \left(P^{(1)}_{n_1\varphi_1} P^{(1)}_{n_2\varphi_2} v_{\bar{n}}\right)(\varphi_1, \varphi_2)$ to problem (8), (9) is determined by the following SIE:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K^R_{\bar{n}}\right)v_{\bar{n}}\right)(\theta_1, \theta_2) = f^R_{\bar{n}}(\theta_1, \theta_2), \tag{12}$$

supplemented by the additional conditions:

$$\begin{cases} \left(\Gamma_{\varphi_s} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_r\right)(\theta_s) = 0, \;\; r, s = 1, 2, \;\; r \neq s, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

In (12) $f^R_{\bar{n}}(\theta_1, \theta_2)$ is the regularization of the function $f_{\bar{n}}(\theta_1, \theta_2)$:

$$f_{\bar{n}}(\theta_1, \theta_2) = \left(P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} g\right)(\theta_1, \theta_2) + (K_{\bar{n}} y_{\bar{n}})(\theta_1, \theta_2), \;\; y_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{s=1}^{2}\left[\Gamma_{\theta_s}\left(P^{(2)}_{n_s} C_s\right)\right](\varphi_s) - C,$$

and the kernel $K_{\bar{n}}(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)$ is regularized in the variables θ_1, θ_2.

Regularization in the left- and right-hand parts of equation (12) enables us to consider it in the pair of spaces (11), which implies that the necessary solvability conditions are satisfied. Moreover, regularization brings the regularization

variables about.

If $v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)$ is the unique solution to problem (12), (13), then $u_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2) = v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2) - y_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)$ is the unique solution to problem (5), (6), hence, SLAE (7) admits a unique solution.

Regularizing equation (12) as defined above, we arrive at the equation equivalent to SIE (12):

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K_{\bar{n}}\right)v_{\bar{n}}\right)(\theta_1, \theta_2) + \sum_{s=1}^{2}\left(\Gamma_{\varphi_s} h_{s\bar{n}}\right)(\theta_s) + h_{\bar{n}} = \left(P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} f\right)(\theta_1, \theta_2),$$

where $h_{s\bar{n}}(\varphi_s)$, $s = 1, 2$ and $h_{\bar{n}}$ are respectively the regularization functions and regularization constant for the SIE

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K_{\bar{n}}\right)v_{\bar{n}} = P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} f\ .$$

Being invariant with respect to the change of the unknown function in the equation, they are the same as the regularization functions and regularization constant for the SIE

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K_{\bar{n}}\right)u_{\bar{n}} = P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} g.$$

Let the space $\Phi^0_{\bar{n}} \subset L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ consist of trigonometric polynomials of order not greater than n_1 in φ_1, and n_2 in φ_2, satisfying conditions (13). We consider equation (12) in the pair of spaces

$$\left(\Phi^0_{\bar{n}}, \Phi^0_{\bar{n}}\right). \tag{14}$$

We prove that equation (12) admits a unique solution in the pair of spaces (14) for $n = \min\{n_1, n_2\}$ sufficiently large.

By *Jackson's theorem* and properties of interpolation polynomials, [5], it can be proved that for $n > \mu$ the following estimates hold (see, for example, [2]):

$$\left\|\left(K - K^R_{\bar{n}}\right)v_{\bar{n}}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} \le C(K)\cdot\varepsilon_{\bar{n}}(K)\cdot\|v_{\bar{n}}\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}},\ \text{where } \varepsilon_{\bar{n}}(K) = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right) \text{ for } n\to\infty,$$

$$\left\|f - f^R_{\bar{n}}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} \le D(f)\cdot\omega_{\bar{n}}(f),\ \text{where } \omega_{\bar{n}}(f) = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right) \text{ for } n\to\infty,$$

$C(K)$ и $D(f)$ are constants independent of $\bar{n}$.

The above estimates imply (see [6]), that there exists $N > \mu$ such that for $n > N$ equation (12) admits a unique solution $v_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)$ in the pair of spaces (14), and if $v(\varphi_1, \varphi_2)$ is the solution to equation (8) in the pair of spaces (11), then

$$\|v - v_{\bar{n}}\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} \le \alpha_{\bar{n}},$$

where $\alpha_{\bar{n}} = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

Hence, for $n > N$ SIE (5) supplemented by additional conditions (6) has the unique solution $u_{\bar{n}}(\varphi_1, \varphi_2)$. If $u(\varphi_1, \varphi_2)$ is the solution to problem (2), (3), then

$$\|u - u_{\bar{n}}\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} \le \beta_{\bar{n}},$$

where $\beta_{\bar{n}} = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

Moreover, for the regularization unknowns the following estimates hold:

$$\left|h_{C_s\bar{n}}\right| \le \delta_{n_s}(C_s) = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right) \text{ for } n\to\infty,\ s = 1, 2;$$

$$|h_{\bar{n}}| \le \frac{1}{2\pi}\nu_{\bar{n}};\ \ \|h_{s\bar{n}}\|_{L^2_{[0,2\pi]}} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\nu_{\bar{n}},\ s = 1, 2,$$

where $\nu_{\bar{n}} = \left\|(Ku - g) - \left(K_{\bar{n}}u_{\bar{n}} - P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} g\right)\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} = \mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

Conclusions. The metod of discrete singularities is applied for setting up a system of linear algebraic equations approximating the first kind singular integral equation with double Hilbert-type integral over the domain $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. It is proved that under additional smoothness assumptions on the right-hand part and the kernel of the regular part of this singular integral equation the system of linear algebraic equations obtained admits a unique solution. Moreover, the rate of convergance of the approximate solution to the exact one is estimated.

Bibliography

1. *Лифанов И. К.* О произведении одномерных сингулярных интегральных операторов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Изд. ХГУ, 1984. – Вып. 42. – С. 67 – 71.
2. *Гандель Ю. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних зарядов. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков : Изд. ХГУ, 1991. – 67 с.
3. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков : Изд. ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
4. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // *ДАН СССР*. – 1980. – Т. 255. – № 5. – С. 1046 – 1050.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М. – Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.
6. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231с.

References (transliterated)

1. Lifanov I. K. O proizvedenii odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov [On the product of one dimensional singular integral equations]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis, and their applications]. Kharkov, Kharkov State University Publishing, 1984, vol. 42, pp. 67–71.
2. Gandel Y. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnikh zaryadov. Ucheb. posobiye. Ch. I* [Mathematical problems of the method of discrete charges.Tutorial.Part I]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1991. 67 p.
3. Gandel Y. V. *Lekzii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integralnykh uravneniy. Ucheb.posobie. Ch.I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Textbook. Part I]. Kharkov, V. N. Karazin Kharkov National University Publ., 2001. 92 p.
4. Lifanov I. K. O nekorrektnosti i regulyarizatsii chislennogo resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [On ill-posedness and regularization of numeriacal solution to first kind singular integral equation]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1980, vol. 255, no. 5, pp. 1046–1050.
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow – Leningrad, State Publishing of Technical and Theoretical Literature (GTTI), 1949. 688 p.
6. Gabdulkhaev B. G. *Optimal'nye approksimazii resheniy lineynykh sadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. – Kazan, Kazan. University Publ., 1980. 231 p.

Received (поступила) 06. 09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna) – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.

УДК 621.923

В. И. ПОЛЯНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

На основе разработанной математической модели управления упругими перемещениями при механической обработке показано, что с точки зрения повышения производительности и точности размера обработки при точении с низкой жесткостью технологической системы целесообразно съем припуска производить за один проход инструмента или использовать упругую схему шлифования с фиксированным радиальным усилием. Для достижения высокой точности формы обрабатываемой поверхности и повышения производительности обработки необходимо съем припуска производить по схемам многопроходной обработки абразивными и лезвийными инструментами. Аналитически установлена эффективность применения в этом случае лезвийной обработки, в особенности инструментами из синтетических сверхтвердых материалов, обеспечивающих снижение интенсивности трения в зоне резания и соответственно повышение точности и производительности обработки по сравнению с процессом шлифования.

Ключевые слова: упругое перемещение, технологическая система, точность обработки, производительность обработки, точение, шлифование, инструмент, трение.

В. І. ПОЛЯНСЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ПРУЖНИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ ПРИ МЕХАНІЧНІЙ ОБРОБЦІ

На основі розробленої математичної моделі управління пружними переміщеннями при механічній обробці показано, що з точки зору підвищення продуктивності та точності розміру обробки при точінні з низькою жорсткістю технологічної системи доцільно зняття припуску здійснювати за один прохід інструменту або використовувати пружну схему шліфування з фіксованим радіальним зусиллям. Для досягнення високої точності форми оброблюваної поверхні та підвищення продуктивності обробки необхідно зняття припуску здійснювати за схемами багатопрохідної обробки абразивними та лезовими інструментами. Аналітично встановлено ефективність застосування в цьому випадку лезової обробки, особливо інструментами з синтетичних надтвердих матеріалів, що забезпечують зниження інтенсивності тертя в зоні різання й відповідно підвищення точності та продуктивності обробки порівняно з процесом шліфування.

Ключові слова: пружне переміщення, технологічна система, точність обробки, продуктивність обробки, точіння, шліфування, інструмент, тертя.

© В. И. Полянский, 2018

V. I. POLYANSKY

MATHEMATICAL MODEL OF ELASTIC MOVEMENT MANAGEMENT IN MECHANICAL PROCESSING

Based on the developed mathematical model of controlling elastic displacements during machining, it is shown that from the point of view of increasing productivity and precision of machining size when turning with low rigidity of the technological system, it is advisable to remove the allowance in one tool pass or use an elastic grinding scheme with fixed radial force. To achieve high accuracy of the shape of the surface processed and to increase the productivity of the treatment, it is necessary to remove the allowance using multi-pass processing schemes with abrasive and blade tools. Calculations established the effectiveness of blade cutting in this case, especially with tools made of synthetic superhard materials, which provide reduction of friction intensity in the cutting zone and, consequently, increase in the accuracy and productivity of the treatment compared to the grinding process. It is also proposed to use a progressive scheme of high-speed milling of holes on modern machine tools with CNC machining center type using carbide mills with wear-resistant coatings of foreign production.

Key words: elastic movement, technological system, machining accuracy, machining productivity, turning, grinding, tool, friction.

Введение. Обеспечение высоких показателей качества, точности и производительности при механической обработке является основным условием создания конкурентоспособной машиностроительной продукции. Это требует применения новых эффективных технологий, современных металлорежущих станков с ЧПУ и сборных твердосплавных и керамических режущих инструментов с износостойкими покрытиями зарубежного производства. В настоящее время на предприятиях Украины накоплен определенный опыт в данном направлении, что позволило повысить эффективность производства. Однако для более полного использования технологических возможностей нового оборудования и инструментов необходимо располагать новыми знаниями о закономерностях осуществления эффективных методов механической обработки: условиях уменьшения силы и температуры резания, повышения показателей качества, точности и производительности обработки и т.д. Все это требует проведения теоретического анализа технологических закономерностей процесса резания. В связи с этим в работе приведена математическая модель управления упругими перемещениями, возникающими в технологической системе при механической обработке, позволяющая определить основные направления повышения точности и производительности обработки.

Анализ последних исследований. Проблеме математического моделирования упругих перемещений, возникающих в технологической системе при механической обработке, в научно-технической литературе уделено достаточно большое внимание [1, 2] и в основном при шлифовании [3, 4]. Это позволяет научно обоснованно подходить к выбору оптимальных условий обработки с учетом ограничения по точности обрабатываемой поверхности. Вместе с тем, с применением на предприятиях Украины современных металлорежущих станков с ЧПУ и твердосплавных режущих инструментов с износостойкими покрытиями зарубежного производства появилась возможность повышения точности и производительности обработки, что требует изыскания новых технологических решений для их практической реализации. Учитывая сказанное выше, актуальной задачей является теоретический анализ условий высокоточной механической обработки деталей машин.

Постановка задачи. Для определения технологических возможностей эффективного применения современных режущих лезвийных инструментов на финишных операциях необходимо разработать математическую модель управления упругими перемещениями при механической обработке и на ее основе аналитически описать основные параметры точности обрабатываемых поверхностей деталей: точность размера и точность формы, которые, как правило, определяются упругими перемещений, возникающими в технологической системе. Использование полученных аналитических зависимостей позволит установить условия повышения точности и производительности обработки на финишных операциях и оценить возможность эффективного перехода от традиционно применяемого процесса шлифования к более эффективной финишной лезвийной обработке.

Математическая модель. Упругое перемещение, возникающее в технологической системе при механической обработке, обусловлено действием радиальной составляющей силы резания P_y, которая при продольном точении с учетом зависимости для определения коэффициента резания $K_{рез} = P_z \cdot \cos\varphi / P_y$ выражается [1]:

$$P_y = \frac{\sigma \cdot S \cdot t \cdot \cos\varphi}{K_{рез}} = \frac{\sigma \cdot Q \cdot \cos\varphi}{K_{рез} \cdot V}, \qquad (1)$$

где σ – условное напряжение резания, Н/м^2; P_y, P_z – соответственно радиальная и тангенциальная составляющие силы резания, Н; S – подача, м/об.; t – глубина резания, м; φ – главный угол резца в плане; $Q = S \cdot t \cdot V$ – производительность обработки, м^3/с; V – скорость резания, м/с.

Тогда упругое перемещение y, возникающее в технологической системе, определится:

$$y = \frac{P_y}{c} = \frac{\sigma \cdot Q \cdot \cos\varphi}{c \cdot K_{рез} \cdot V}, \qquad (2)$$

где c – приведенная жесткость технологической системы, Н/м.

Из зависимости (2) вытекает, что уменьшить упругое перемещение y и повысить точность обработки при продольном точении можно уменьшением параметров σ, Q и увеличением c, $K_{рез} = P_z / P_y$, V, φ. Следовательно, увеличить величину y можно, главным образом, на окончательных операциях обработки с относительно небольшой производительностью. Применение режущих лезвийных инструментов из синтетических сверхтвердых материалов (СТМ) с увеличенной скоростью резания на получистовых операциях также позволяет уменьшить величину y. Однако при резании с небольшой толщиной среза увеличивается условное напряжение резания σ и уменьшается коэффициент $K_{рез} = P_z / P_y$, что ограничивает возможности уменьшения величины y.

При шлифовании в зависимости (2) вместо скорости резания V необходимо рассматривать скорость шлифовального круга $V_{кр}$, которая, как известно, больше скорости резания при лезвийной обработке. Это потенциально позволяет добиться меньших значений величины y. Вместе с тем, при шлифовании (по сравнению с точением) условное напряжение резания σ принимает большие значения в связи с интенсивным трением связки шлифовального круга с обрабатываемым материалом. Поэтому основным условием осуществления процесса высокоэффективного шлифования следует рассматривать обеспечение высокой режущей способности круга, снижение трения связки круга с обрабатываемым материалом. Это достигается применением высокопористых, импрегнированных и прерывистых абразивных кругов, а также алмазных кругов на относительно мягких связках, работающих в режиме интенсивного самозатачивания и обеспечивающих снижение силы и температуры резания [5].

Для более точного расчета упругого перемещения y при продольном точении следует воспользоваться уравнением равновесия технологической системы, находящейся под действием радиальной составляющей силы резания P_y и упруго-восстанавливающей силы $c \cdot y$:

$$\frac{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}{K_{рез}} \cdot (t - y_1) = c \cdot y_1 . \tag{3}$$

Тогда величина упругого перемещения на первом проходе инструмента y_1 равна:

$$y_1 = \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} . \tag{4}$$

При условии $\dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi} >> 1$ зависимость (4) принимает вид зависимости (2). Следовательно, чем больше выражение $\dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}$, тем меньше упругое перемещение y_1 и выше точность обработки. Знаменатель зависимости (4) определяет уточнение на размер $\varepsilon = t / y_1$ [6].

При втором и третьем проходах инструмента величины упругого перемещения y_2 и y_3 с учетом зависимости (4) выражаются:

$$y_2 = \frac{t + y_1}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} = \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} + \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)^2} ; \tag{5}$$

$$y_3 = \frac{t + y_2}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} = \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} + \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)^2} + \frac{t}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)^3} . \tag{6}$$

В итоге пришли к геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)}$. Как видно, с увеличением количества проходов инструмента n величина упругого перемещения y_n непрерывно увеличивается, асимптотически приближаясь к максимальному значению, определяемому суммой бесконечной геометрической прогрессии:

$$y_n = t \cdot \left(\frac{a_1}{q - 1}\right) = \frac{t}{\left(\dfrac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}\right)} , \tag{7}$$

где $a_1 = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)}$ – первый член геометрической прогрессии.

Анализ теоретического решения и определение рациональных условий обработки. Сравнивая зависимости (7) и (4), видно, что при первом проходе инструмента упругое перемещение y_1 меньше, чем при $n-$ом проходе (то есть $y_1 < y_n$). Следовательно, эффективно съем всего припуска при продольном точении осуществлять за один проход инструмента. Это позволит уменьшить величину упругого перемещения, возникающего в технологической системе, и соответственно повысить точность и производительность обработки.

В особой мере это относится к процессу шлифования, где величина

$$\frac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S}<1$$

и упругие перемещения y_1 и y_n существенно отличаются. Поэтому при шлифовании с относительно низкой жесткостью технологической системы необходимо исключить переходной процесс, описываемый геометрической прогрессией. Это достигается, например, применением упругой схемы шлифования с постоянным радиальным усилием $P_y = c\cdot y_n$, определяемым из зависимости (7), что идентично зависимости (2) при условии $\varphi = 0$. В результате повышается производительность обработки, то есть, по сути, в процессе шлифования реализуется условие (7), определяющее установившийся во времени процесс обработки.

Таким образом, показано, что при предварительной высокопроизводительной обработке целесообразно съем всего припуска осуществлять за один продольный ход инструмента. При окончательной обработке, когда необходимо обеспечить высокую точность формы обрабатываемой поверхности, следует съем припуска осуществлять за несколько продольных ходов инструмента, управляя величиной упругого перемещения, возникающего в технологической системе, в соответствии с геометрической прогрессией. Например, при растачивании отверстия (при несовпадении осей вращающегося инструмента и обрабатываемого отверстия на величину Δ) разность наибольшего y_1 и наименьшего y_2 упругого перемещений в двух противоположных направлениях при первом проходе инструмента в соответствии с зависимостью (4) равна [7]:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_2 = \frac{t_1}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} - \frac{t_2}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} = \frac{2\Delta}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)}, \qquad (8)$$

где $t_1 = t+\Delta$ – максимальная фактическая глубина резания, м; $t_2 = t-\Delta$ – минимальная фактическая глубина резания, м.

При втором проходе инструмента:

$$\Delta y_2 = \frac{t+y_1}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} - \frac{t+y_2}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} = \frac{y_1-y_2}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} = \frac{\Delta y_1}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)} = \frac{2\Delta}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)^2}. \qquad (9)$$

При $n-$ом проходе инструмента:

$$\Delta y_n = \frac{2\Delta}{\left(1+\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}\right)^n}. \qquad (10)$$

Как следует из зависимости (10), с увеличением количества проходов инструмента n величина y_n стремится к нулю, и погрешность формы обрабатываемого отверстия в виде неосесимметричности устраняется, причем, с увеличением выражения $\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}>1$ – более интенсивно. Следовательно, при лезвийной обработке, характеризующейся большими значениями выражения $\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}>1$, можно значительно быстрее добиться заданной точности формы обрабатываемой поверхности, чем при шлифовании ($\dfrac{c\cdot K_{рез}}{\sigma\cdot S\cdot\cos\varphi}<1$). Этим объясняется эффективность применения процесса растачивания отверстий, в особенности резцами из СТМ, которые характеризуются высокой твердостью и остротой режущей кромки. Значительными технологическими возможностями в этом направлении располагает прогрессивная схема высокоскоростного расфрезеровывания отверстий [8], получившая достаточно широкое применение в последние годы в связи с использованием на предприятиях современных металлорежущих станков с ЧПУ типа «обрабатывающий центр» и твердосплавных режущих инструментов (фрез) с износостойкими покрытиями зарубежного производства. Целесообразно также применение для обработки отверстий схемы многопроходного внутреннего шлифования абразивными кругами, которые ха-

рактеризуются относительно низкой интенсивностью трения в зоне резания и повышенной режущей способностью. Как следует из зависимости (4), в этом случае за счет уменьшения условного напряжения резания σ можно уменьшить величину упругого перемещения в технологической системе и повысить точность и производительность обработки.

Для более полного представления о технологических возможностях высокоточной обработки отверстий следует теоретически определить величину погрешностей обработки при рассверливании (сверлом с двумя лезвиями) со смещением оси сверла относительно оси обрабатываемого отверстия на величину Δ. В этом случае уравнение равновесия технологической системы, находящейся под действием радиальной составляющей силы резания P_y и упруго-восстанавливающей силы $c \cdot y$, принимает вид:

$$\frac{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}{K_{рез}} \cdot (t + \Delta - y) - \frac{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi}{K_{рез}} \cdot (t - \Delta - y) = c \cdot y. \tag{11}$$

Откуда

$$y = \frac{2 \cdot \Delta}{\left(\frac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi} \right)}. \tag{12}$$

В результате величина неосесимметричности Δ_1 сверла и обработанного отверстия определится:

$$\Delta_1 = \Delta - y = \Delta \cdot \left[1 - \frac{2}{\left(\frac{c \cdot K_{рез}}{\sigma \cdot S \cdot \cos\varphi} \right)} \right]. \tag{13}$$

Как видно, чем больше знаменатель второго слагаемого зависимости (13), тем больше величина $\Delta_1 \to \Delta$. Это условие выполняется при повышенной жесткости технологической системы и небольших значениях σ и S, то есть при обеспечении высокой режущей способности сверла. В противном случае, то есть при увеличенной податливости технологической системы, величина $\Delta_1 \to 0$, и обрабатываемое отверстие будет принимать форму овала, что, естественно, снижает точность обработки. Из этого следует, что повысить точность обработки отверстия можно увеличением жесткости технологической системы c, угла в плане сверла φ и уменьшением σ и S. Повысить точность обработки также можно повторным прохождением сверла большего диаметра.

Сравнивая зависимости (8) и (12), видно, что они фактически одинаковы при растачивании и рассверливании отверстия. Однако в зависимости (8) знаменатель больше, поэтому при растачивании будут меньше погрешности обработки отверстия, чем при его рассверливании, что подтверждается практическими данными. Этим можно объяснить эффективность применения растачивания для обработки высокоточных отверстий.

Перспективы дальнейших исследований. Автор считает перспективными пути исследования, связанные с определением технологических возможностей повышения точности и производительности обработки за счет применения перспективного метода – высокоскоростного расфрезеровывания отверстий, обеспечивающего уменьшение силы и температуры резания.

Выводы. В работе на основе разработанной математической модели управления упругими перемещениями, возникающими в технологической системе при механической обработке, теоретически обоснованы основные направления повышения точности и производительности. Теоретически доказана эффективность применения на финишных операциях современных режущих лезвийных инструментов, позволяющих уменьшить интенсивность трения в зоне резания и обеспечить высокоточную и высокопроизводительную обработку. Обоснованы условия повышения точности и производительности обработки отверстий методом рассверливания.

Список литературы

1. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф.В. Новикова и А.В. Якимова. В десяти томах. – Т. 1. «Механика резания материалов». – Одесса : ОНПУ, 2002. – 580 с.
2. *Новиков Ф. В.* Основы математического моделирования технологических процессов механической обработки : монография. – Днепр: ЛИРА, 2018. – 400 с.
3. *Лурье Г. Б.* Прогрессивные методы круглого наружного шлифования. – Л. : Машиностроение, 1984. – 103 с.
4. *Новоселов Ю. К.* Динамика формообразования поверхностей при абразивной обработке. – Саратов, 1979. – 232 с.
5. *Якимов А. В.* Абразивно-алмазная обработка фасонных поверхностей. – М.: Машиностроение, 1984. – 212 с.
6. *Маталин А. А.* Технология машиностроения: учебник. – Л.: Машиностроение, 1985. – 496 с.
7. *Полянский В. И.* Расширение технологических возможностей повышения точности механической обработки отверстий // Перспективні технології та прилади : Збірник наукових праць. – Луцьк : Луцький НТУ, 2017. – №11 (2). – С. 87 – 92.
8. *Рябенков І. О.* Підвищення ефективності фінішної обробки деталей гідроапаратури на основі вибору раціональної структури і параметрів операцій: автореф. дис. … канд. техн. наук : спец. 05.02.08 «Технологія машинобудування». − Одеса, 2009. – 21 с.

References (transliterated)

1. *Fiziko-matematicheskaya teoriya protsessov obrabotki materialov i tekhnologii mashinostroyeniya. V desyati tomakh. Vol. 1. "Mekhanika rezaniya materialov"* [Physical and mathematical theory of material processing and engineering technology. In ten volumes. Vol. 1. «Mechanics of material cutting»]. Ed. F. V. Novikov, A. V. Yakimov. Odessa, ONPU Publ., 2002. 580 p.
2. Novikov F. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov mekhanicheskoy obrabotki : monografiya* [Fundamentals of Mathematical Modeling of Technological Processes of Mechanical Processing : Monograph]. Dnepr, LIRA Publ., 2018. 400 p.
3. Lur'ye G. B. *Progressivnyye metody kruglogo naruzhnogo shlifovaniya* [Progressive methods of external round grinding]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1984. 103 p.
4. Novoselov Yu. K. *Dinamika formoobrazovaniya poverkhnostey pri abrazivnoy obrabotke* [Dynamics of formation of surfaces during abrasive machining]. Saratov, 1979. 232 p.
5. Yakimov A. V. *Abrazivno-almaznaya obrabotka fasonnykh poverkhnostey* [Abrasive-diamond processing of shaped surfaces]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 212 p.
6. Matalin A. A. *Tekhnologiya mashinostroyeniya : uchebnik* [Engineering Technology : textbook]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1985. 496 p.
7. Polyanskiy V. I. Rasshireniye tekhnologicheskikh vozmozhnostey povysheniya tochnosti mekhanicheskoy obrabotki otverstiy [Expansion of technological capabilities to improve the accuracy of machining holes]. *Perspektyvni tekhnolohiyi ta prylady : Zbirnyk naukovykh prats'* [Perspective technologies and devices: Collection of scientific works]. Lutsk, Luts'kyy NTU Publ., 2017, no. 11 (2), pp. 87–92.
8. Ryabenkov I. O. *Pidvyshchennya efektyvnosti finishnoyi obrobky detaley gidroaparatury na osnovi vyboru ratsional'noyi struktury i parametriv operatsiy: avtoref. dys. kand. tekhn. nauk : spets. 05.02.08 "Tekhnologiya mashynobuduvannya"* [Increasing the efficiency of finishing the details of hydroequipment on the basis of the choice of rational flow and operation parameters: author's abstract, dis. Candidate Tech. Sciences : specialty 05.02.08 "Technology of mechanical engineering"]. Odesa, 2009. 21 p.

Поступила (received) 17.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянський Володимир Іванович (Полянский Владимир Иванович, Polyansky Vladimir Ivanovich) – кандидат технических наук, Генеральный директор, ООО «Империя металлов», м. Харків; тел.: (067) 578-09-06; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 631.37

О. Ю. РЕБРОВ

РОЗПОДІЛ ДОПУСТИМОГО ТИСКУ НА ҐРУНТ ХОДОВИХ СИСТЕМ КОЛІСНИХ ТРАКТОРІВ ЗА ТЕРИТОРІЄЮ УКРАЇНИ

Запропоновано методику оцінки впливу на ґрунт ходових систем колісних тракторів згідно встановленому розподілу за територією України допустимого тиску на ґрунт колісних тракторів відповідно до вимог стандарту та урахуванням особливостей ґрунто-кліматичних умов та фактичних середньобагаторічних параметрів вмісту вологи в ріллі в середньобагаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період.

Ключові слова: колісний трактор, ходові системи, максимальний тиск на ґрунт, допустимий тиск на ґрунт, параметри вмісту вологи в ріллі.

А. Ю. РЕБРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМОГО ДАВЛЕНИЯ НА ГРУНТ ХОДОВЫХ СИСТЕМ ТРАКТОРОВ ПО ТЕРРИТОРИИ УКРАИНЫ

Предложена методика оценки воздействия на почву ходовых систем колесных тракторов согласно установленному распределению по территории Украины допустимого давления на почву колесных тракторов в соответствии с требованиями стандарта и учетом особенностей почвенно-климатических условий и фактических среднемноголетних параметров содержания влаги в пашне в среднемноголетние сроки проведения работ при подготовке почвы под ранние яровые культуры весной и под озимую пшеницу в летне-осенний период.

Ключевые слова: колесный трактор, ходовые системы, максимальное давление на грунт, допустимое давление на грунт, параметры содержания влаги в пашне.

O. YU. REBROV

DISTRIBUTION OF ADMISSIBLE PRESSURE OF RUNNING GEARS OF COLLECTOR TRACTORS ON THE SOIL THROUGHOUT THE TERRITORY OF UKRAINE

The paper proposes a methodology for estimating the impact on the soil of the running systems of wheeled tractors according to the established distribution throughout the territory of Ukraine of permissible pressure on the soil in accordance with standard requirements and taking into account the peculiarities of soil and climatic conditions and the actual long-term average moisture content parameters in arable land during the long-term average work period of preparing the soil for early spring crops and under winter wheat in the summer-autumn period. The maximum pressure on the soil for modern tires of agricultural tractors is in the range of 78 – 177 kPa. At such a maximum pressure, the probability of a tire fulfilling the requirements of the standard for the performance of running gears on the soil will be in the range from 0.078 – 0.104 to 0.698 – 0.730. It is necessary to use conversion track systems or crawler tractors to ensure an impact on the soil within the limits of permissible in the cultivation of agricultural land, the area of which is more than 27 – 30 % of Ukraine's territory. The use of conversion track systems allows to reduce the maximum pressure on the soil by 65 %, which greatly improves the environmental friendliness of the tractors.

Key words: wheeled tractor, running gears, maximum pressure on the soil, permissible pressure on the soil, parameters of moisture content in arable land.

© О. Ю. Ребров, 2018

Вступ. Забезпечення високої врожайності сільськогосподарських культур при одночасному підвищенні родючості ґрунтів та ефективності сільськогосподарського виробництва можливе при суттєвому зниженні негативного руйнуючого впливу колісних ходових систем на ґрунт та його жорсткого нормування.

Норми дії ходових систем мобільної сільськогосподарської техніки на ґрунти зазнали суттєвих змін з 1 січня 2007 року введенням Україною власного стандарту [1] замість діючого в колишньому СРСР [2].

Тому оцінка впливу на ґрунт ходових систем колісних тракторів та встановлення розподілу за територією України допустимого тиску на ґрунт відповідно до діючих вимог стандарту з урахуванням особливостей ґрунто-кліматичних умов та фактичних середньобагаторічних параметрів вмісту вологи в ріллі в середньобагаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період є актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень. Найбільш ефективний механічний обробіток спостерігається при відповідному стані ґрунту, який визначається, насамперед, гранулометричним складом, рівноважною щільністю у верхньому шарі, наявністю вологи та рядом інших факторів [3 – 7].

Стан ґрунту, що є оптимальним для механічного обробітку, відповідає фізичній стиглості. Фізична стиглість ґрунту різного гранулометричного складу наступає при різній вологості в доволі вузькому інтервалі значень. Підвищення вологості спричиняє вразливість ґрунту до ущільнення, що може суттєво знизити ефективність його обробітку. Тому, виключно стан ґрунту визначає час, вид та інтенсивність сільськогосподарських технологій механічного обробітку. Найбільш інтенсивно сільськогосподарські операції механічного обробітку ґрунту на території України проводяться навесні під час його підготовки під ранні ярові культури і восени – під озиму пшеницю [3 – 7].

Стискання ґрунту, в ході якого він руйнується, є найбільш небажаним тому, що після такого впливу порушується здатність ґрунту відновлювати вихідні характеристики. Так може бути порушена здатність ґрунту відновлюватися – фундаментальна характеристика, що є визначальною для збереження усереднених параметрів ґрунту в часі при антропогенному навантаженні.

Виявлені факти принципової різниці в післядії на ґрунт різних способів деформування послужили основою для обґрунтування допустимого рівня впливу на ґрунт ходових систем машино-тракторних агрегатів [1, 3 – 7]. Допустимий рівень впливу на ґрунт не повинен перевищувати суму опорів розриву і здвигу. Після навантажень, що дорівнюють цим опорам, ґрунт відновлює свої усереднені показники за час зимово-весняних циклів замерзання-розмерзання. Проте питаннями аналізу і прогнозування відповідності максимального тиску на ґрунт колісних тракторів з урахуванням особливостей ґрунто-кліматичних умов та фактичних середньобагаторічних параметрів вмісту вологи в ріллі в середньобагаторічні терміни проведення робіт навесні та в літньо-осінній період уваги не приділено.

Метою роботи є розробка методики оцінки впливу на ґрунт ходових систем колісних тракторів та встановлення розподілу за територією України допустимого тиску на ґрунт відповідно до вимог стандарту з урахуванням особливостей ґрунто-кліматичних умов та фактичних середньобагаторічних параметрів вмісту вологи в ріллі в середньобагаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період. В подальшому методика може використовуватися при обґрунтуванні комплектації тракторів типорозмірами шин, а також при прогнозуванні техніко-економічних показників тракторів і машино-тракторних агрегатів.

Розподіл допустимого тиску на ґрунт ходових систем за територією України. Вихідними даними для визначення розподілу за територією України допустимого тиску на ґрунт колісних тракторів, безумовно, є вимоги стандарту [1].

Таблиця 1 – Вологість ґрунту під час проведення передпосівного і основного обробітку [3, 5]

Передпосівний обробіток ґрунту			Основний обробіток ґрунту		
Вологість ґрунту в долях фізичної стиглості (ФС)	Площа ріллі		Вологість ґрунту в долях фізичної стиглості (ФС)	Площа ріллі	
	%	млн. га		%	млн. га
–	–	–	< 0,7	4,9	1,5
< 0,8	9,4	2,8	0,7 – 0,8	8,1	2,4
0,8 – 0,9	5,0	1,5	0,8 – 0,9	59,1	17,7
0,9 – 1,0	75,8	22,7	0,9 – 1,0	14,1	4,2
> 1,0	9,9	3,0	> 1,0	13,8	4,2

Великий обсяг досліджень і систематизацію даних щодо стану ґрунтів України проведено в роботах професора *В. В. Медведєва* [3 – 7]. Він запропонував методи і сучасну інформаційну базу даних стосовно стану ґрунтів, а також синтезу ґрунтових карт України з вихідними і похідними розрахунковими параметрами. Сутність запропонованих методів полягає в формуванні і постійному оновленні за результатами моніторингу стану земельних ресурсів сільськогосподарського призначення окремих ґрунто-кліматичних зон України, а також синтезу картографічного і статистичного матеріалів за окремими показниками ґрунтів. Так, в роботах [3, 5] наведені дані

відносно фактичних середньобагаторічних параметрів вмісту вологи в ріллі України в середньобагаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період (табл. 1).

Розподіл вологості ґрунтів України за даними [3, 5] (табл. 1) наведений у долях фізичної стиглості (ФС), яка має відповідний розподіл за територією держави. Розрахунок допустимого тиску на ґрунт, згідно [1], проводиться залежно від вологості ґрунту у долях найменшої вологоємності (НВ).

Вологість фізичної стиглості і найменша вологоємність – це пов'язані характеристики ґрунтів. Фізична стиглість ґрунтів різного гранулометричного складу знаходиться в межах 0,6 – 0,8 НВ. В такому стані ґрунти мають найнижчу міцність (рис. 1), тому питомий опір механічному обробітку та енергоємність технологічного процесу будуть найменшими.

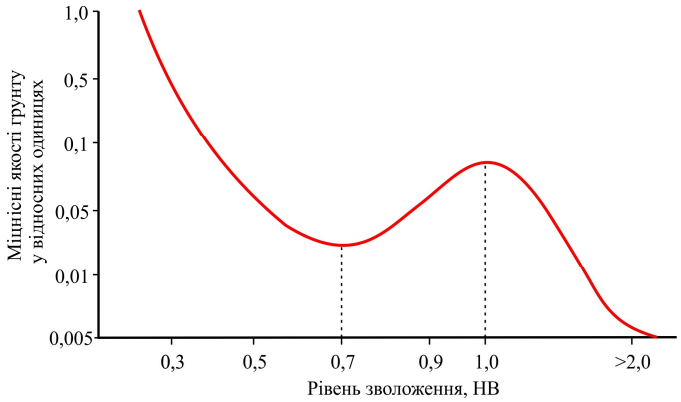


Рис. 1 – Залежність міцності ґрунту від рівня зволоження.

При суттєвому перезволоженні механічна міцність ґрунтів теж знижується, але механічний обробіток стає неможливим внаслідок низької несучої здатності ґрунту.

Зробимо припущення, що вологість ґрунту під час проведення передпосівного і основного обробітку є випадковою величиною, яка має нормальний або логарифмічно нормальний розподіл за територією України. Це припущення дозволяє отримати математичне очікування і середньоквадратичне відхилення розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт [1, табл. 1] під час проведення передпосівного (навесні) і основного (восени) обробітку.

Допустимий тиск тракторної шини на ґрунт визначається відповідно до нормативної величини допустимого тиску і поправок, які враховують режим роботи шини, висоту протектору і число проходів по одному сліду.

Використовуючи дані робіт [3, 5] (табл. 1), можна визначити оцінку математичного очікування вологості ґрунту у долях фізичної стиглості під час обробітку:

$$M\left[ФС\right]=\sum_{i=1}^{n}ФС_i\cdot\tau_i\,, \tag{1}$$

де $ФС_i$ – вологість ґрунту під час проведення передпосівного або основного обробітку в долях фізичної стиглості в i – му інтервалі; τ_i – доля ґрунтів України в i – му інтервалі.

Для передпосівного і основного обробітку оцінка математичного очікування складає: $M[ФС]_{\text{пп}}=0,927ФС$, $M[ФС]_{\text{осн}}=0,878ФС$ відповідно.

Враховуючи, що $ФС=0,7$ НВ, згідно [1], отримуємо оцінку математичного очікування нормативної величини допустимого тиску на ґрунт. Під час проведення передпосівного обробітку для пухкого і помірно ущільненого ґрунту: $M[q_n]_{\text{пп,пух}}=60$ кПа, $M[q_n]_{\text{пп,пом}}=100$ кПа, та під час основного обробітку для ущільненого і рівноважного ґрунту: $M[q_n]_{\text{осн,ущ}}=120$ кПа, $M[q_n]_{\text{осн,рів}}=147$ кПа.

Оцінка середньоквадратичного відхилення нормативної величини допустимого тиску на ґрунт під час проведення передпосівного обробітку для пухкого і помірно ущільненого ґрунту: $\sigma[q_n]_{\text{пп,пух}}=18$ кПа, $\sigma[q_n]_{\text{пп,пом}}=31$ кПа, та під час основної обробки для ущільненого і рівноважного ґрунту: $\sigma[q_n]_{\text{осн,ущ}}=36$ кПа, $\sigma[q_n]_{\text{осн,рів}}=44$ кПа.

Для передпосівного обробітку приймаємо логарифмічно нормальний, а для основного – нормальний закони розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт з параметрами:

$$M_{\text{ипп,пух}}=4,051\left(e^{M_{\text{ипп,пух}}}=57,5\text{ кПа}\right),\ \sigma_{\text{ипп,пух}}=0,294;\ M_{\text{ипп,пом}}=4,559\left(e^{M_{\text{ипп,пом}}}=95,5\text{ кПа}\right),\ \sigma_{\text{ипп,пом}}=0,303;$$

$$M_{\text{осн,ущ}}=120\text{ кПа},\ \sigma_{\text{осн,ущ}}=36\text{ кПа};\ M_{\text{осн,рів}}=147\text{ кПа},\ \sigma_{\text{осн,рів}}=44\text{ кПа}.$$

Тоді щільність ймовірності загального закону розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт можна визначити залежністю:

$$f\left([q_n]\right)=\sum_{i=1}^{4}\tau_i\cdot f\left([q_n]_i\right), \tag{2}$$

де $f\left([q_n]_i\right)$ – щільності ймовірності розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт розглянутих чотирьох станів ґрунту ($i=1,...,4$) з наведеними параметрами (рис. 2); τ_i – частка відповідного стану ґрунту в річному обсязі робіт з механічної обробки, яку приймаємо однаковою для всіх станів.

Щільність ймовірності загального закону розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт за територією України наведена на рис. 3.

Отримані дані дають змогу оцінити відповідність трактора або машино-тракторного агрегату нормам дії його ходової системи на ґрунт.

Згідно стандарту України [1], допустимий тиск на ґрунт:

$$[q]=[q_n]\cdot k_\Sigma, \tag{3}$$

де k_Σ – коефіцієнт, що враховує умови роботи рушія; $[q_n]$ – нормативна величина допустимого тиску [1, табл. 1].

При русі колісного трактора по ґрунту необхідне виконання умови:

$$q_{\max}\le[q], \tag{4}$$

де $q_{\max}$ – максимальний тиск шини на ґрунт, що визначається згідно стандарту України [8].

З урахуванням (3) нерівність (4) приймає вигляд:

$$\frac{q_{\max}}{k_\Sigma}\le[q_n]. \tag{5}$$

Після визначення максимального тиску тракторної шини на ґрунт, згідно [8], ймовірність виконання умови (5), тобто відповідності трактора або машино-тракторного агрегату нормам дії його ходової системи на ґрунт [1] з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України можна розрахувати з використанням залежності:

$$p\left(\frac{q_{\max}}{k_\Sigma}\le[q_n]\right)=F\left([q_n]\right)=1-\int_0^{q_{\max}}f\left([q_n]\right)d[q_n]. \tag{6}$$

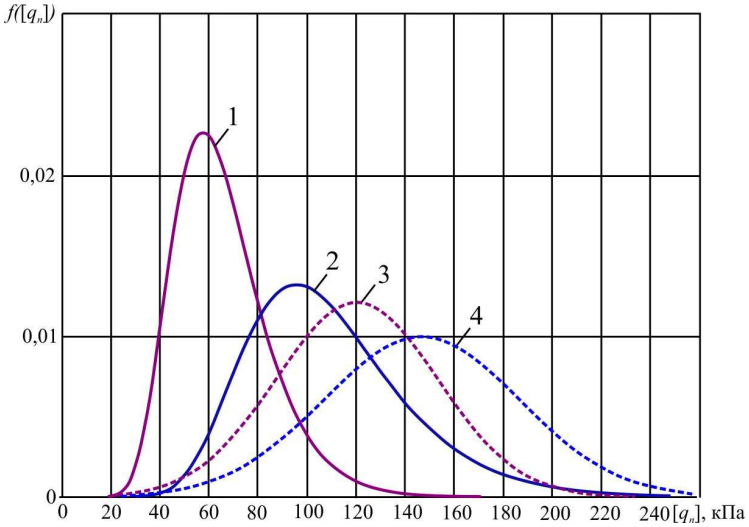


Рис. 2 – Щільності ймовірності розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт:
1 – передпосівний обробіток (пухкий ґрунт); **2** – передпосівний обробіток (помірно ущільнений ґрунт);
3 – основний обробіток (ущільнений ґрунт); **4** – основний обробіток (рівноважний ґрунт).

Функція розподілу ймовірності нормативної величини допустимого тиску на ґрунт (6) (рис. 4) свідчить про більш жорсткі вимоги щодо дії на ґрунт у порівнянні зі стандартом, що діяв раніше [9, 10].

Аналіз результатів дослідження. Відповідно до запропонованої методики, був проаналізований вплив сільськогосподарських тракторних шин на ґрунт, який базується на даних таких відомих виробників шин, як *Michelin*, *Trelleborg*, *Good Year*, *Firestone*, *Mitas*.

Дані виробників тракторних сільськогосподарських шин свідчать про те, що середній тиск на жорстку основу при мінімально допустимому внутрішньому тиску повітря в шині знаходиться в межах 60 – 130 кПа. Відповідно до стандарту України [8], який повністю відповідає заміненому стандарту [11], максимальний тиск на

ґрунт для шин енергонасичених тракторів можна прийняти рівним 78 – 177 кПа. Розрахунки показують, що в такому інтервалі максимального тиску на ґрунт ймовірність виконання вимог стандарту [1] буде знаходитись в межах від 0,078 – 0,104 до 0,698 – 0,730.

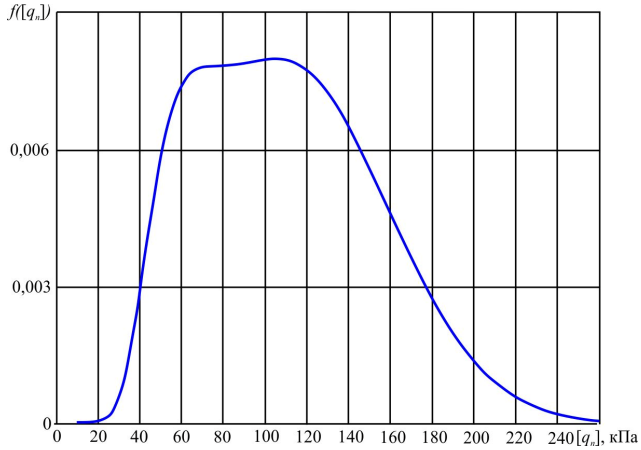


Рис. 3 – Щільність ймовірності загального закону розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт за територією України.

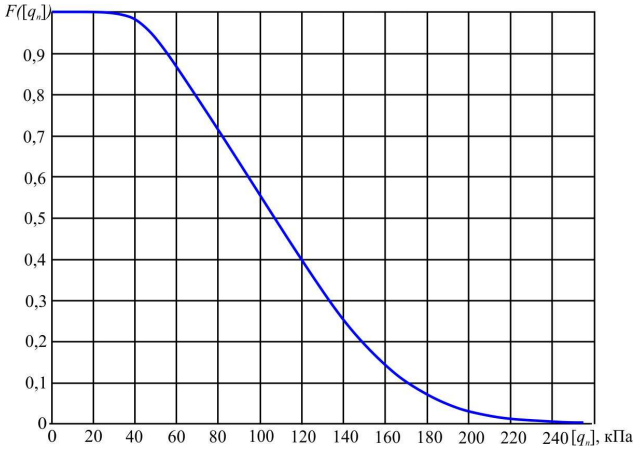


Рис. 4 – Функція розподілу ймовірності нормативної величини допустимого тиску на ґрунт для аналізу відповідності ходової системи вимогам ДСТУ.

Отриманий результат свідчить про те, що сучасні, навіть інноваційні шини категорій IF та VF, не задовольняють агроекологічним вимогам щодо дії ходових систем на ґрунт на всій території України, а максимум на 70 – 73 % площі сільськогосподарських угідь. Головним чином це проявляється при передпосівному обробітку ґрунту. Тому на весняних польових роботах необхідно застосовувати змінні гусеничні рушії або гусеничні трактори, щоб забезпечити вплив на ґрунт в межах екологічно допустимого при обробітку сільськогосподарських угідь, площа яких складає понад 27 – 30 % території України.

За даними провідних виробників змінних гусеничних рушіїв сільськогосподарських тракторів, таких як *Camso*, *Soucy Track*, *Zuidberg* [12], максимальний тиск на ґрунт при заміні колісного рушія на гусеничний може бути зменшений на 65%. Тому така комплектація тракторів є перспективною як з позицій більш ефективних тягових показників, так і з позицій екологічної безпеки.

Наведені дані можуть бути використані в якості вихідних для аналізу і прогнозування парку колісних і гусеничних тракторів, а також розгляду питання щодо активного впровадження змінних гусеничних рушіїв для тракторів, виконаних за схемами 4К4а та 4К4б.

Також слід відзначити, що здвоювання шин повною мірою не вирішить проблему відповідності максимального тиску на ґрунт колісних тракторів вимогам стандарту за всією територією України, хоча використання інноваційних здвоєних шин з низьким внутрішнім тиском (0,4 – 0,5 кг/см^2) суттєво розширить область застосування таких тракторів, особливо на весняно-польових роботах.

Оскільки максимальний допустимий тиск на ґрунт становить 210 кПа [6], а середній тиск на ґрунт перевищує внутрішній тиск повітря в шині залежно від її характеристик на 10 – 40 кПа (в середньому на 30 кПа), то при внутрішньому тиску повітря в шині понад 120 кПа (1,2 кг/см^2) жодна шина не задовольнятиме нормам дії на ґрунти України взагалі.

Так, наприклад, шина 23,1 R26, якою комплектуються трактори виробництва Харківського тракторного заводу, при мінімально допустимому внутрішньому тиску повітря 60 кПа (0,6 кг/см^2) має максимальний тиск на ґрунт 139 – 142 кПа, що забезпечує відповідність нормам тиску на ґрунт з ймовірністю 0,24 – 0,26. Тобто, ця шина може експлуатуватися на 24 – 26 % території України без порушення вимог стандарту [1] і майже виключно під час основного обробітку ґрунту.

Враховуючи різноманітність ґрунто-кліматичних умов України, питання відповідності окремих типорозмірів і конструкцій шин нормам максимального тиску на ґрунт потребує подальшої розробки і уточнення з метою виявлення відповідності окремих шин різним ґрунтовим зонам, а також таких шин, які за своїми характеристиками не можуть використовуватись як такі, що шкідливо впливають на ґрунт і сприяють його деградації.

Загалом наведена методика оцінки відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини агроекологічним вимогам з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України може використовуватись при проектуванні і модернізації існуючих тракторів, а також при розгляді питання комплектування трактора шинами і змінними гусеничними рушіями.

Перспективи подальших досліджень. Матеріал, наведений у статті, є достатнім для аналізу відповідності тракторних сільськогосподарських шин вимогам стандарту щодо норм дії рушіїв на ґрунт. Проте, у близькій перспективі наведена методика може стати складовою комплексної методики з оцінки технічного рівня та тягових показників колісних тракторів.

Висновки. Норми дії ходових систем мобільної сільськогосподарської техніки на ґрунти зазнали суттєвих змін та стали більш жорсткими з введенням Україною власного стандарту.

Дані щодо особливостей ґрунто-кліматичних умов України та фактичного середньобагаторічного вмісту вологи в ріллі в середньобагаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період дають змогу поставити їх у відповідність нормам дії ходових систем колісних тракторів на ґрунт.

Запропонована методика оцінки впливу на ґрунт ходових систем колісних тракторів згідно отриманого розподілу за територією України допустимого тиску на ґрунт та відповідно до діючих вимог стандартів дає змогу аналізувати екологічність існуючих та створюваних конструкцій рушіїв колісних тракторів.

Максимальний тиск на ґрунт для сучасних, у тому числі інноваційних сільськогосподарських шин категорій IF та VF, знаходиться в межах 78 – 177 кПа. При такому максимальному тиску ймовірність виконання шиною вимог стандарту щодо дії ходових систем на ґрунт буде знаходиться в межах від 0,078 – 0,104 до 0,698 – 0,730. Це свідчить про те, що навіть найкращі на сьогодні зразки тракторних сільськогосподарських шин не задовольняють агроекологічним вимогам щодо дії ходових систем на ґрунт на всій території України, а максимум тільки на 70 – 73 % площі сільськогосподарських угідь.

Проблема високого тиску на ґрунт особливо гостро стоїть при весняних польових роботах. Тому необхідно застосовувати змінні гусеничні рушії або гусеничні трактори, щоб забезпечити вплив на ґрунт в межах екологічно допустимого при обробітку сільськогосподарських угідь, площа яких складає понад 27 – 30 % території України. За даними провідних виробників змінних гусеничних рушіїв для колісних тракторів впровадження гусеничних ходових систем дає змогу знизити максимальний тиск на ґрунт на 65%, що суттєво покращує екологічність тракторів.

Здвоювання шин повною мірою не вирішить проблему відповідності максимального тиску на ґрунт колісних тракторів вимогам стандарту за всією територією України, хоча використання інноваційних здвоєних шин з низьким внутрішнім тиском (0,4 – 0,5 кг/см^2) суттєво розширить область застосування таких тракторів, особливо на весняно-польових роботах.

При внутрішньому тиску повітря в шині понад 120 кПа (1,2 кг/см^2) жодна з існуючих шин взагалі не задовольнить нормам дії на ґрунти України.

Одна з поширених на вітчизняних тракторах шина 23,1 R26 при мінімально допустимому внутрішньому тиску повітря 60 кПа (0,6 кг/см^2) забезпечує відповідність нормам тиску на ґрунт з ймовірністю 0,24 – 0,26. Ця шина може експлуатуватися на 24 – 26 % території України без порушення вимог стандарту виключно під час основного обробітку ґрунту.

Список літератури

1. ДСТУ 4521:2006. Техніка сільськогосподарська мобільна. Норми дії ходових систем на ґрунт. – К. : Держстандарт України, 2007. – 9 с.
2. ГОСТ 26955-86. Техника сельскохозяйственная мобильная. Нормы воздействия движителей на почву. – М. : Государственный комитет СССР по стандартам, 1986. – 7 с.
3. *Медведев В. В.*, *Лактионова Т. Н.* Почвенно-технологическое районирование пахотных земель Украины. – Харьков : Изд. "13 типография", 2007. – 395 с.
4. *Медведев В. В.*, *Лактионова Т. Н.* Гранулометрический состав почв Украины (генетический, экологический и агрономический аспекты). – Харьков : Апостроф, 2011. – 292 с.
5. *Медведев В. В.* Физические свойства и обработка почв в Украине. – Харьков : Изд-во. "Городская типография", 2013. – 224 с.
6. *Медведев В. В.* Нульовий обробіток ґрунту в європейських країнах. – Харків : ТОВ "ЕДЕНА", 2010. – 202 с.
7. *Медведев В. В.* Мониторинг почв Украины. Концепция. Итоги. Задачи. (2-ое пересмотренное и дополненное издание). – Харьков: КП "Городская типография", 2012. – 536 с.
8. ДСТУ 4428:2005. Техніка сільськогосподарська мобільна. Методи визначення дії ходових систем на ґрунт. – К. : Держстандарт України, 2006. – 9 с.
9. *Ребров О. Ю.* Аналіз відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини агроекологічним вимогам імовірнісним методом з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України // Вісник НТУ «ХПІ» : Зб. наук. пр. Сер. : Транспортне машинобудування. – Харків : НТУ "ХПІ", 2017. – № 14 (1236). – С. 58 – 64.
10. *Ребров О. Ю.* Інтегральна імовірнісна оцінка відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам в ґрунто-кліматичних умовах України // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – №6 (1228). – С. 127 – 136.
11. ГОСТ 26953-86. Техника сельскохозяйственная мобильная. Методы определения воздействия на почву. – М. : Издательство стандартов, 1986.
12. Soucy Track – 2013. –15 р. – Режим доступу: http://www.soucy-track.com/en-CA/gpc/_media/Document/ag2013en.pdf. – Дата звертання : 10 жовтня 2018.

References (transliterated)

1. DSTU 4521:2006. *Tekhnika sil's'kogospodars'ka mobil'na. Normy diyi khodovykh system na grunt* [Mobile agricultural machinery. Norms of the running system impact on the soil]. Kyiv, Derzkstandart Ukrayiny Publ., 2007. 9 p.
2. GOST 26955-86. *Tekhnika sel'skokhozyaystvennaya mobil'naya. Normy vozdeystviya dvizhiteley na pochvu* [Mobile agricultural machinery. Rates of impact of propelling agents on soil]. Moscow, Gosudarstvennyy komitet SSSR po standartam Publ., 1986. 7 p.
3. Medvedev V. V., Laktionova T. N. *Pochvenno-tekhnologicheskoe rayonirovanie pakhotnykh zemel' Ukrainy* [Soil and technological regionalization of arable land in Ukraine]. Kharkov, Izd. "13 tipografiya" Publ., 2007. 395 p.
4. Medvedev V. V., Laktionova T. N. *Granulometricheskiy sostav pochv Ukrainy (geneticheskiy, ekologicheskiy i agronomicheskiy aspekty)* [Grain size distribution of soils of Ukraine (genetic, environmental, and agronomic aspects)]. Kharkov, Apostrof Publ., 2011. 292 p.
5. Medvedev V. V. *Fizicheskie svoystva i obrabotka pochv v Ukraine* [Physical properties and treatment of soils in Ukraine]. Kharkov, Izd-vo. "Gorodskaya tipografiya" Publ., 2013. 224 p.
6. Medvedev V. V. *Nulyovyy obrobitok gruntu v yevropeys'kykh krayinakh* [Zero tillage in Europe]. Kharkiv, TOV "EDENA" Publ., 2010. 202 p.
7. Medvedev V. V. *Monitoring pochv Ukrainy. Kontseptsiya. Itogi. Zadachi. (2-oe peresmotrennoe i dopolnennoe izdanie)* [Monitoring of Ukraine

soil. Concept. Results. Tasks. (2nd revised and expanded edition)]. Kharkov, KP "Gorodskaya tipografiya" Publ., 2012. 536 p.
8. DSTU 4428:2005. *Tekhnika sil's'kogospodars'ka mobil'na*. *Metody vyznachennya diyi khodovykh system na grunt* [Mobile agricultural machinery. Methods for determining the impact of running gears on soil]. Kyiv, Derzkstandart Ukrayiny Publ., 2006. 9 p.
9. Rebrov O. Yu. Analiz vidpovidnosti maksymal'nogo tysku na grunt traktornoyi shyny agroekologichnym vymogam imovirnssnym metodom z urakhuvannyam grunto-klimatychnykh umov Ukrainy [Analysis of compliance of tractor tires maximum pressure on soil with agro-ecological requirements by using probabilistic method taking into account soil and climatic conditions of Ukraine]. *Visnyk NTU "KhPI"* : *Zb*. *nauk*. *pr*. *Ser*.: *Transportne mashynobuduvannia* [Bulletin of NTU "KhPI", Series : Transport Engineering]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 14 (1236), pp. 58–64.
10. Rebrov O. Yu. Integral'na imovirnisna otsinka vidpovidnosti traktornoyi shyny agroekologichnym vymogam v grunto-klimatychnykh umovakh Ukrainy [Integral probabilistic evaluation of the conformity of the tractor tire to agro-ecological requirements under the soil and climatic conditions of Ukraine]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI», Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2017, no. 6 (1228), pp. 127–136.
11. GOST 26953-86. *Tekhnika sel'skokhozyaystvennaya mobil'naya. Metody opredeleniya vozdeystviya na pochvu* [Mobile agricultural machinery. Methods for determining impact on soil]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1986.
12. Soucy Track. 2013. 15 p. Available at : http://www.soucy-track.com/en-CA/gpc/_media/Document/ag2013en.pdf. (accessed 10.10.2018).

Надійшла (received) 26.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ребров Олексій Юрійович (Ребров Алексей Юрьевич, Rebrov Oleksiy Yuriyovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: alexrebrov0108@gmail.com.

УДК 629.7.05

В. Б. УСПЕНСКИЙ, М. В. НЕКРАСОВА, И. А. БАГМУТ

СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ БИНС ПО ИЗМЕРЕНИЯМ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА, КОТОРЫЙ БЫСТРО ВРАЩАЕТСЯ

Предложен метод повышения точности определения ориентации в бесплатформенной инерциальной навигационной системе для быстровращающегося вокруг продольной оси объекта. Метод основан на использовании измерений вектора кажущегося ускорения от специально размещенных акселерометров для периодической коррекции угла крена. Показано, что разработанный способ существенно ограничивает ошибку определения угла крена. Сформулирован сам алгоритм коррекции, применение которого позволяет значительно повысить точность определения ориентации, что было доказано при моделировании.

Ключевые слова: кажущееся ускорение, датчик, ориентация, акселерометр, гироскоп, угол крена, навигация, инерциальная система.

В. Б. УСПЕНСЬКИЙ, М. В. НЕКРАСОВА, І. А. БАГМУТ

СПОСІБ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ БІНС З ВИМІРЮВАННЯ УЯВНОГО ПРИСКОРЕННЯ ДЛЯ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТА, ЩО ШВИДКО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано метод підвищення точності визначення орієнтації в безплатформовій інерціальній навігаційній системі для об'єкта, що швидко обертається навколо поздовжньої осі. Метод заснований на використанні вимірювань вектору позірного (уявного?) прискорення від спеціальним чином розміщених акселерометрів для періодичної корекції куту крену. Доведено, що розроблений спосіб суттєво зменшує похибку визначення куту крену. Сформульований сам алгоритм корекції, застосування якого дозволяє значно підвищити точність визначення орієнтації, що було доведено при моделюванні.

Ключові слова: позірне прискорення, датчик, орієнтація, акселерометр, гіроскоп, кут крену, навігація, інерціальна система.

V. B. USPENSKIY, M. V. NEKRASOVA, I. A. BAGMUT

METHOD OF INCREASING THE ACCURACY OF BINS ACCORDING TO MEASUREMENTS OF APPEARING ACCELERATION FOR CONTROLL OF FAST ROTATING OBJECT

A method for increasing the accuracy of determining the orientation in a strapdown inertial navigation system for an object rotating fast around the longitudinal axis is proposed. The method is based on the use of measurements of the apparent acceleration vector from specially arranged accelerometers for periodic correction of the roll angle. It is shown that the developed method significantly limits the error in determining the roll angle. The correction algorithm itself is formulated, the use of which can significantly improve the accuracy of orientation determination, which has been proven in modeling. This method can be used to construct high-precision control systems.

Key words: apparent acceleration, sensor, orientation, an accelerometer, roll angle, navigation, a gyroscope, a correction angle of roll error, inertial system, traffic control.

Введение. Использование *бесплатформенной инерциальной навигационной системы* (БИНС) для высокодинамичного объекта является проблематичным из-за сильного влияния мультипликативных погрешностей датчиков на точность работы системы. Один из возможных способов повышения точности БИНС состоит в периодической коррекции вектора состояния с помощью информации от спутниковых радионавигационных систем. Однако недостатками такого способа являются, во-первых, зависимость от внешних условий, во-вторых, небольшая частота реализации коррекции, обусловленная низкой частотой обновления спутниковой информации. Все это делает проблемным использование такого способа в условиях высокодинамичных объектов. А, следовательно, возникает необходимость разработать новые способы коррекции в этих условиях.

© В. Б. Успенский, М. В. Некрасова, И. А. Багмут, 2018

Анализ последних исследований. Известен способ повышения точности систем ориентации на базе усовершенствования методики предварительной калибровки датчиков [1]. Он основывается на определении систематической компоненты ошибки, математическом описании ее зависимости от определенных факторов, идентификации параметров этой зависимости и использовании данной модели в качестве компенсирующей во время эксплуатации датчика. Такой способ имеет недостатки, связанные с высокой стоимостью специального оборудования, длительным сроком проведения эксперимента, а также невозможностью достижения стабильного качества компенсации на протяжении всего времени жизненного цикла изделия. Стоит отметить, что этот способ существенно повышает также и конечную стоимость навигационной системы, что не всегда является экономически оправданным.

Еще один из известных способов – это повышение точности систем ориентации за счет усовершенствования алгоритмической базы обработки измерений во время функционирования [2 – 3]. Он состоит в применении более эффективных алгоритмов обработки информации с гироскопических датчиков. Суть его в том, что он предоставляет возможность использовать дешевые и менее габаритные датчики (гироскопы и акселерометры, а иногда только акселерометры), компенсируя алгоритмически их невысокую точность и обрабатывая информацию с этих датчиков таким образом, чтобы возможно было получить все необходимые навигационные параметры с достаточной точностью. Недостатком такого способа является, во-первых, существенные ограничения на допустимую скорость, которая измеряется, учитывая необходимую точность определения ориентации, во-вторых, чувствительность к инструментальным погрешностям гироскопа. А также необходимым условием эффективного применения такого способа является использование в системе все же гироскопов высокой точности.

Наконец, наиболее близкий по технической сути способ повышения точности систем ориентации в БИНС состоит в периодической коррекции вектора состояния (в том числе и углов ориентации) за счет использования избыточной для системы в целом информации, которую предоставляет приемник сигналов спутниковой навигационной системы [4]. Эта коррекция осуществляется с помощью *алгоритма фильтра Калмана* и требует достаточно сложного программно-математического обеспечения. Недостатками указанного способа являются, во-первых, зависимость от наличия радиосигналов от спутниковых систем и от внешних помех на пути прохождения радиосигналов, во-вторых, невысокая частота осуществления коррекции, обусловленная низкой частотой обновления спутниковой информации. Все это делает проблемным применение такого способа в условиях быстрого вращения объекта.

Постановка задачи. Предлагается алгоритм вычисления с высокой точностью ориентации быстровращающегося вокруг продольной оси объекта за счет коррекции угла крена по измерениям вектора кажущегося ускорения с помощью специально расположенных акселерометров. Вследствие вращения такие измерения имеют модулированный характер, и моменты прохождения через максимум или минимум несут информацию о точной ориентации объекта по крену.

Таким образом, целью исследования является усовершенствование приведенных известных способов коррекции. В основу разработанного метода положен способ коррекции по избыточной информации параметров ориентации объекта, который быстро вращается вокруг продольной оси, путем дополнительной высокочастотной коррекции угла крена на основании использования измерений вектора кажущегося ускорения, проекции которого на оси чувствительности акселерометров вследствие вращения имеют модулированный характер.

Поставленная задача решается, таким образом, как и в известном способе, что состоит в том, что по сигналами трех гироскопов, пропорциональных значениям проекций вектора угловой скорости на измерительные оси, и по сигналам трех акселерометров, пропорциональных значениям проекций вектора кажущегося ускорения на измерительные оси, вычисляют навигационные параметры, которые пропорциональны компонентам вектора координат объекта, компонентам вектора скорости объекта и углам его ориентации. Далее навигационные параметры фильтруют и корректируют по сигналам приемника радионавигационных сигналов, пропорциональных компонентам вектора координат объекта и компонентам вектора скорости объекта. Дополнительно по сигналам акселерометров каналов рыскания и тангажа проводится выделение экстремального значения и формирование корректирующего сигнала, который используют для переопределения текущего значения угла крена, который был определен при вычислении навигационных параметров. И далее этот угол крена вместо сигнала, пропорционального углу крена с блока определения навигационных параметров, фильтруют и корректируют совместно с остальными навигационными параметрами.

Математическая модель. Пусть объект, помимо траекторного движения, совершает также вращение вокруг своей продольной оси x, сонаправленной с вектором скорости, с большой скоростью ω. Назовем угол поворота вокруг оси x *углом крена* γ.

В БИНС, расположенной на объекте, среди штатного набора измерителей дополнительно размещены два акселерометра A_y и A_z на расстоянии ρ от оси вращения (рис. 1).

В известном способе, описанном выше, с помощью трех гироскопов, трех акселерометров и приемника спутниковых сигналов определяются углы, скорости и координаты объекта. Но в условиях быстрого вращения объекта ошибка масштабного коэффициента $x-$гироскопа приводит к быстрому монотонному возрастанию ошибки определения угла крена. В этих условиях для повышения точности определения угла крена предлагается с увеличенной в четыре раза частотой вращения объекта проводить коррекцию его значения по показаниям $y-$ и $z-$акселерометров, которые в общем случае имеют вид кривой с медленной амплитудой модуляцией и медленной тенденцией средней линии (рис. 2). Фиксируя с помощью электронных устройств прохождение по-

следовательностью измерений y – акселерометра своего локального максимума или локального минимума, формируется сигнал коррекции, соответствующий истинному значению угла крена $\gamma_e = 0$ или $\gamma_e = \pi$. Для максимального и минимального значения измерений z – акселерометра формируется сигнал коррекции, который отвечает истинному значению угла крена $\gamma_e = 3/2\pi$ или $\gamma_e = 1/2\pi$. Сформированная таким образом оценка истинного значения угла крена поступает в алгоритм определения ориентации БИНС, где производится переопределение текущего значения угла крена по правилу $\gamma = \gamma_e$.

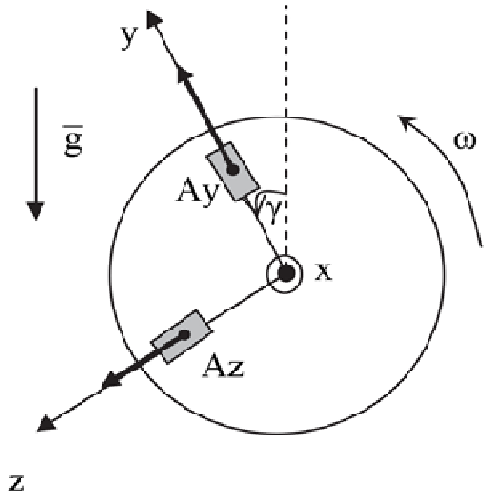


Рис. 1 – Размещение дополнительных акселерометров на объекте.

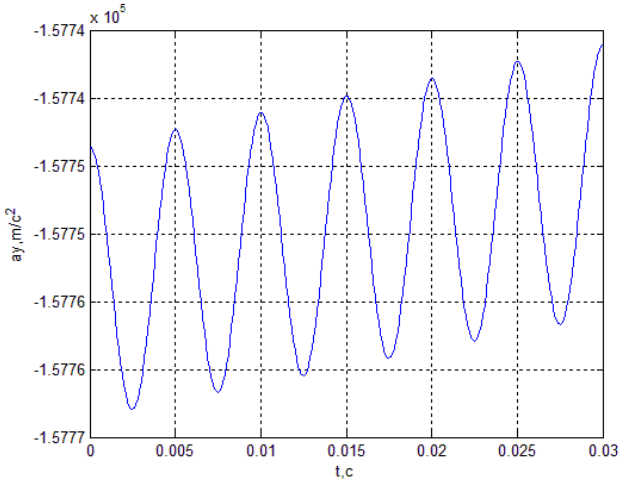


Рис. 2 – Качественный характер измерений y – акселерометра.

Для обоснования изложенного способа обратимся к соответствующим математическим моделям.

Проекция кажущегося вектора ускорения объекта на ось чувствительности y – акселерометра имеет вид:

$$a_y(t) = W_{Oy}(t) - \rho \cdot \omega^2(t) + g \cdot \cos\theta(t) \cdot \cos\gamma(t), \quad (1)$$

где $a_y(t)$ – измерения y – акселерометра в момент времени t; $W_{Oy}(t)$ – текущее значение проекции действительного ускорения начала координат связанной системы на ось Oy; ρ – расстояние размещения чувствительного элемента y – акселерометра от оси вращения Ox; $\omega(t)$ – текущая скорость вращения объекта вокруг продольной оси; g – значение ускорения свободного падения; $\theta(t)$ – текущее значение *угла тангажа*; $\gamma(t) = \omega(t) \cdot t$ – текущее значение угла крена.

Отметим, что $\omega(t)$ и $\theta(t)$ изменяются во времени со скоростью, намного меньшей, чем другие переменные.

Действительное ускорение точки O является результатом действия всех внешних сил, которые приведены к точке O, и состоит, в частности, из силы тяжести $Q_W = g \cdot m$, силы сопротивления среды $Q_R(t)$, подъемной силы $Q_U(t) = q_U(t) \cdot m$ и, возможно, реактивной силы $Q_T(t)$ двигателей (рис. 3).

Поскольку в случае коллинеарности вектора скорости и продольной оси объекта сила сопротивления и реактивная сила ортогональны осям чувствительности y – акселерометра, проекция $W_{Oy}(t)$ с учетом вращения объекта вокруг оси Ox, выглядит как

$$W_{Oy}(t) = (q_U(t) - g \cdot \cos\theta(t)) \cdot \cos\gamma(t). \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$a_y(t) = q_U(t) \cdot \cos\gamma(t) - \rho \cdot \omega^2(t). \quad (3)$$

Таким образом, измерения y – акселерометра имеют медленно *меняющуюся составляющую*, связанную с изменением скорости вращения $\omega(t)$, и *высокочастотную составляющую*, связанную с быстрым изменением угла крена и модулированную медленно меняющимся ускорением $q_U(t)$ от подъемной силы. Из (3) следует, что при *квазистационарном характере* $q_U(t)$ локальный максимум на периоде оборота объекта соответствует $\gamma = 0$, а локальный минимум достигается при $\gamma = \pi$, что позволяет использовать эти значения для коррекции ориентации объекта и подтверждает представленный способ такой коррекции.

Аналогичные рассуждения справедливы и для z – акселерометра.

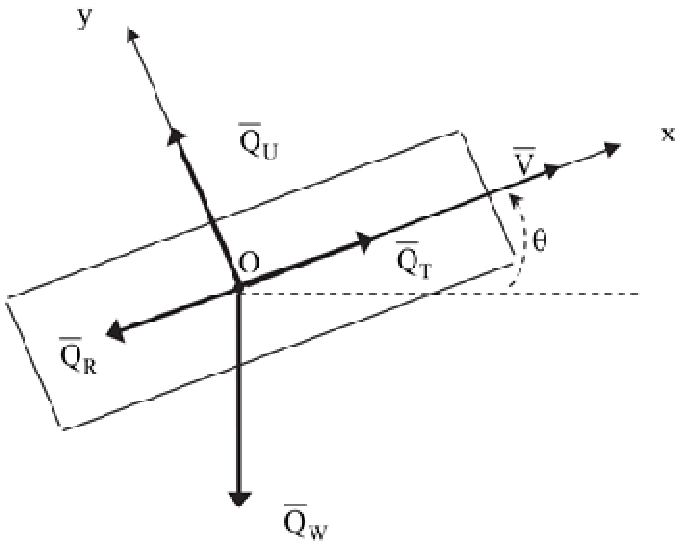


Рис. 3 – Диаграмма сил, которые приложены к объекту.

Результаты работы программы. Промоделируем движение объекта, который вращается вокруг продольной оси с угловой скоростью 100 об./с. Погрешность масштабного коэффициента гироскопа установлена на уровне 0,1 %, частота обновления информации – 10 кГц. Построим зависимость ошибки определения угла крена без коррекции и с коррекцией (рис. 4).

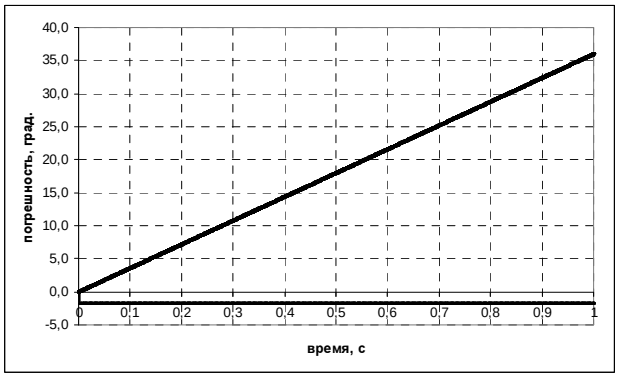


Рис. 4 – Погрешность определения угла крена по алгоритмам без коррекции и с коррекцией.

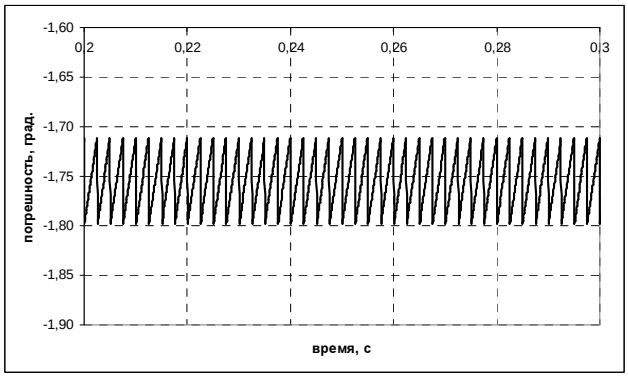


Рис. 5 – Фрагмент ошибки определения угла крена по алгоритму с коррекцией.

Прямая с наклоном – это погрешность определения угла крена на протяжении одной секунды по алгоритму, который не предусматривает коррекции. Вторая линия, практически параллельная оси абсцисс, является погрешностью определения угла крена по алгоритму с коррекцией, которая проводится по экстремумам измерений $y-$ и $z-$акселерометров четыре раза за период вращения. В увеличенном масштабе на укороченном промежутке времени она имеет вид, как на рис. 5. Скачки на графике соответствуют моментам коррекции, а медленный рост – с накоплением погрешности между моментами коррекции.

Из графиков видно, что разработанный способ существенно ограничивает ошибку определения угла крена. Средний уровень остаточной погрешности связан со скоростью вращения и периодом обновления измерений и составляет угол, на который поворачивается объект за половину периода обновления информации.

Таким образом, приведенный метод за счет использования акселерометров обеспечивает повышение точности определения параметров ориентации для быстровращающихся объектов по сравнению с известными методами.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными проведенные исследования, связанные с коррекцией по углу крена, поскольку удается значительно повысить точность определения ориентации. Проведенный анализ определяет, в частности, необходимые условия эффективности предложенного способа – это наличие подъемной силы. Создание и управление такой силой выполняет бортовая система управления движением с помощью рулей высоты, которые поворачиваются относительно корпуса. Предложенный способ именно и предназначен для обеспечения такой системы управления высокоточной угловой информацией. А

значит, это предоставляет возможность построить более совершенные системы управления движением.

Выводы. Разработан метод повышения точности вычисляемой в БИНС ориентации для быстровращающегося вокруг продольной оси объекта. Он основан на использовании измерений дополнительно введенных акселерометров для периодической коррекции угла крена. Разработанный метод существенно ограничивает ошибку определения угла крена, причем сама ошибка не растет с течением времени.

Список литературы

1. *Lee S-J., Tunik A. A., Kim J-Ch.* Determination of Error Parameters of Strapdown INS Sensor Unit Using the 3-axis Motion Table // Proceeding of the KSASSpring Annual Meeting'99. – Korea. – 1999. – P. 485 – 488.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
4. *Grewal M. S., Weill L. R., Andrews A. P.* Global Positioning Systems, Inertial Navigation. – New York : John Wiley & Sons, Inc, 2001. – 392 p.

References (transliterated)

1. Lee S-J., Tunik A. A., Kim J-Ch. Determination of Error Parameters of Strapdown INS Sensor Unit Using the 3-axis Motion Table. *Proceeding of the KSASSpring Annual Meeting'99*. Korea, 1999, pp. 485–488.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Quaternions in the problems of solid orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.
3. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inertsial'nykh navigatsionnykh system* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
4. Grewal M. S., Weill L. R., Andrews A. P. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation*. New York : John Wiley & Sons, Inc Publ., 2001. 392 p.

Поступила (received) 06.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Успенський Валерій Борисович (Успенский Валерий Борисович, Uspenskiy Valerii Borisovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-54; e-mail: uspensky61@gmail.com.

Некрасова Марія Володимирівна (Некрасова Мария Владимировна, Nekrasovaa Mariya Vladimirovna) – доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-54; e-mail: masha12dec@gmail.com.

Багмут Іван Олександрович (Багмут Иван Александрович, Bagmut Ivan Oleksandrovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-54; e-mail: ivan.bagmut@gmail.com.

УДК 629.114.2.073.286

Д. О. ЧАЙКА, И. А. ЕМЕЛЬЯНОВА, П. Н. АНДРЕНКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОДАЧИ СТРОИТЕЛЬНЫХ СМЕСЕЙ БЕСПОРШНЕВЫМ ШЛАНГОВЫМ БЕТОНОНАСОСОМ

В современном строительстве беспоршневые шланговые бетононасосы могут использоваться при выполнении торкрет-работ мокрым способом и транспортирования строительных смесей к месту их укладки. Оснащение шлангового бетононасоса гидравлическим приводом позволяет значительно расширить диапазон режимов работы машины, а также повысить его надежность. Для проектирования гидравлического привода, которым оснащен универсальный шланговый бетононасос? и расчета основных параметров машины были разработаны математические модели процессов подачи строительных смесей. В результате моделирования процесса подачи получены графические зависимости рабочих параметров бетононасоса, определена длительность выхода бетононасоса на установившийся режим работы, а также оценено влияние плотности и вязкости перекачиваемой смеси на максимальные давления в системе, на затрачиваемую мощность и крутящий момент.

Ключевые слова: универсальный шланговый бетононасос, гидравлический привод, математическая модель, подача строительных растворов, гидродинамический процесс.

Д. О. ЧАЙКА, І. О. ЄМЕЛЬЯНОВА, П. М. АНДРЕНКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСОВ ПОДАЧІ БУДІВНИЧИХ СУМІШЕЙ БЕЗПОРШНЕВИМ ШЛАНГОВИМ БЕТОНОНАСОСОМ

У сучасному будівництві безпоршневі шлангові бетононасоси можуть використовуватися при виконанні торкрет-робіт мокрим способом і транспортування будівельних сумішей до місця їх укладання. Оснащення шлангового бетононасосу гідравлічним приводом дозволяє значно розширити діапазон режимів роботи машини, а також підвищити його надійність. Для проектування гідравлічного приводу, яким оснащено універсальний шланговий бетононасос, і розрахунку основних параметрів машини були розроблені математичні моделі процесів подачі будівельних сумішей. В результаті моделювання процесу подачі отримано графічні залежності робочих параметрів бетононасосу, визначена тривалість виходу бетононасосу на сталий режим роботи, а також оцінено впливання щільності і в'язкості перекачуємої суміші на максимальні тиски в системі, на потужність, що витрачається, і крутний момент.

Ключові слова: універсальний шланговий бетононасос, гідравлічний привод, математична модель, подача будівельних розчинів, гідродинамічний процес.

© Д. О. Чайка, И. А. Емельянова, П. Н. Андренко, А. Л. Григорьев, 2018

D. O. CHAYKA, I. O. EMELJANOVA, P. M. ANDRENKO, A. L. GRIGORYEV

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF SUPPLYING BUILDING MIXTURES WITH PISTONLESS HOSE CONCRETE PUMP

Presently constructors use pistonless hose concrete pumps for wet shotcreting processes or for transferring building mixtures to the place of their placement. Fitting the flexible-hose concrete pump with a hydraulic drive allows both making the range of its operating modes much broader and enhancing its reliability. Numerically simulated models of the building mixtures pumping processes were developed to design a hydraulic drive to fit the general-service flexible-hose concrete pump and to calculate its basic parameters. Simulation of the building mixtures pumping processes resulted in the characteristic curves of the concrete pump operating parameters, allowed determining the time of ramping the concrete pump up to the steady state mode and estimating the impact of the transferred mixture density and viscosity on the maximal system pressure, supplied power, and torque values.

Key words: universal hose concrete pump, hydraulic drive, mathematical model, building mixtures pumping, hydrodynamic process.

Введение и постановка задачи. Применение гидроприводов в технологических и мобильных машинах позволяет упростить их кинематику, снизить металлоемкость, повысить точность, надежность и уровень автоматизации. Использование гидроприводов в машинах и оборудовании для условий строительных площадок определяется рядом их весомых преимуществ перед другими типами приводов и, прежде всего, возможностью получения больших усилий и мощностей при ограниченных размерах гидромоторов. Гидроприводы обеспечивают широкий диапазон бесступенчатого регулирования скорости, возможность работы в динамических режимах с требуемым качеством переходных процессов, защиту систем от перегрузок.

В современных машинах и гибких системах с высокой степенью автоматизации цикла требуется реализация множества разнообразных движений. Компактные гидромоторы могут быть легко встроены в существующие машины и оборудование. Использование объемных гидромоторов в приводах позволяет отказаться от громоздких и малонадежных редукторов и обеспечить большие крутящие моменты при малых частотах вращения. С помощью гидроцилиндров удается получить прямолинейное движение без кинематических преобразований и обеспечить определенное соотношение скоростей прямого и обратного ходов. Гидроприводы позволяют легко оптимизировать рабочие процессы, применить адаптивные или программированные системы управления, легко поддаются модернизации, и состоят, главным образом, из унифицированных изделий, серийно выпускаемых специализированными предприятиями. К основным преимуществам гидроприводов следует также отнести достаточно высокие значения КПД, повышенную жесткость и долговечность.

Для проектирования гидравлического привода, которым оснащен универсальный шланговый бетононасос [1] (рис. 1), и выбора соответствующей гидроаппаратуры были разработаны математические модели процессов подачи строительного раствора и бетонной смеси. Моделирование данных процессов позволяет учесть все тонкости при разработке нового шлангового бетононасоса с гидравлическим приводом.

Целью исследований является разработка математических моделей гидродинамических процессов и алгоритма расчета шлангового бетононасоса для случаев подачи строительного раствора и бетонной смеси.

Обзор последних исследований и публикаций. В работе [2] приведен аналитический обзор конструктивных особенностей, характеристик и сфер использования перистальтических насосов. Основное внимание в этой статье уделено техническим возможностям управления данными насосами. Вопросы моделирования рабочих процессов подачи строительных смесей в ней не рассматриваются.

Известны также результаты исследований рабочего процесса двух пьезоэлектрических мембранных микронасосов, управляемых микроконтроллером [3]. Исследовалось влияние частоты вращения вала привода на величину пульсации потока. Результаты этих исследований могут быть использованы только для выбора рабочих параметров группы мембранных микронасосов. Приведенная методика для моделирования рабочих процессов подачи строительного раствора и бетонной смеси шланговым бетононасосом неприменима.

Используя уравнения механики жидкости, в работе [4] рассматриваются влияние реологии, трибологии, расхода и радиуса трубопровода на давление при перекачивании бетонной смеси. Приведены результаты многофакторного эксперимента. Однако в этом труде также не рассматриваются рабочие процессы подачи строительных смесей.

Предложена методика численного моделирования ряда *SCC-смесей* [5], полученных на основе биополимера, которые увеличивают их вязкость, существенно улучшая пластичность, однородность, а также сопротивление сегрегации и водоотделение. В статье используется методика *несжимаемой нечеткой сглаженной частицы гидродинамики* (SPH) и *структурная модель типа Бингама*, которая не может быть правомерно использована для моделирования рабочих процессов подачи цементного раствора или бетонной смеси шланговым насосом.

В статье [6] рассмотрено численное моделирование потока свежей бетонной смеси с использованием модели вязкого зернистого материала и гидродинамики сглаженных частиц. Для описания поведения потока свежей бетонной смеси использована *реологическая модель VGM* (вязкий гранулированный материал). Показано, что данная модель более точна, чем модель Бингама. Однако предложенная модель не учитывает термодинамические процессы, происходящие в бетонной смеси, и упругость материала трубопровода. Она не позволяет определить длительность процесса стабилизации колебаний в камерах насоса и шлангах. Следовательно, разработанная методика и алгоритмы численного моделирования не могут быть правомерно применены для моделирования рабочего процесса подачи бетонной смеси шланговым насосом.

В работе [7] приведены общие уравнения движения жидкости в трубопроводе, которые могут быть использованы при составлении математической модели рабочего процесса подачи цементного раствора шланговым насосом. Однако данные уравнения не учитывают упругость стенок трубопроводов, а в работе не приведена мате-

матическая модель, позволяющая исследовать рабочие процессы в шланговых перистальтических насосах.

Проведенный анализ литературных источников позволил установить, что в указанных работах не рассматриваются вопросы динамики подачи строительного раствора или бетонной смеси шланговым насосом, не определена его мощность и коэффициент полезного действия, влияние на эти показатели средней плотности и вязкости перекачиваемой строительной смеси. Поставленная в этой работе задача решается впервые. Похожие задачи решались при разработке дизельной топливной аппаратуры [8] и гидросистем ракетных двигателей [9], поэтому накопленный опыт был изучен и использован при создании математических моделей и методов расчета нового шлангового бетононасоса. Решение таких вопросов является актуальной научно-технической задачей.

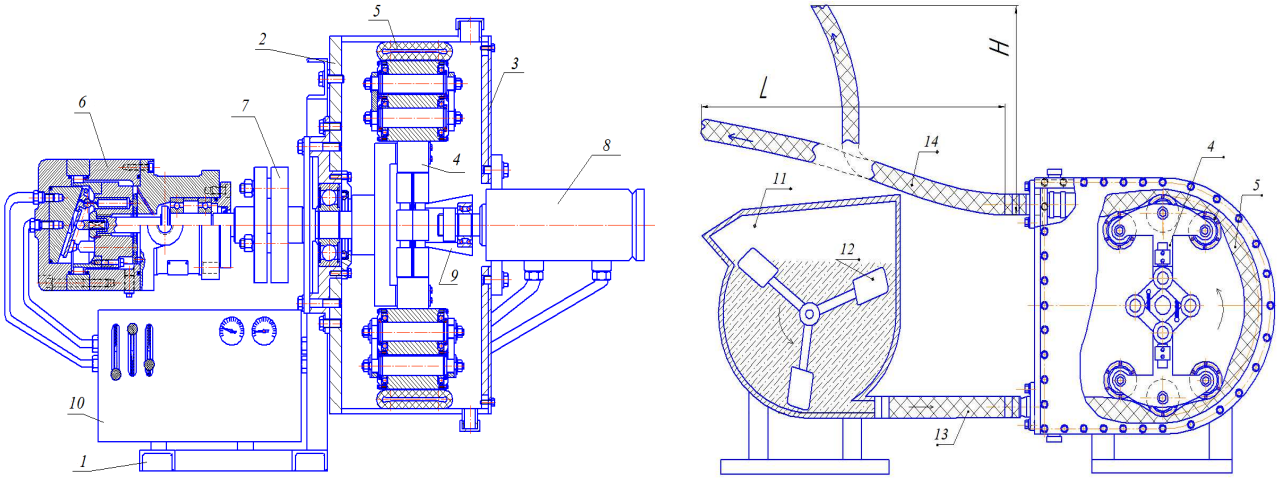


Рис. 1. – Универсальний беспоршневой (шланговый) бетононасос с гидравлическим приводом:
1 – рама; 2 – корпус насоса; 3 – крышка корпуса; 4 – ротор с роликами; 5 – гибкий шланг; 6 – гидромотор; 7 – муфта;
8 – гидроцилиндр; 9 – конический наконечник; 10 – гидрораспределительный узел; 11 – бункер с бетонной смесью;
12 – ворошитель; 13 – впускной патрубок; 14 –транспортный трубопровод.

Схема и общие принципы работы бетононасоса. Насосы данного типа могут работать как в составе технологических комплектов, так и как самостоятельные строительные машины. Принцип работы шлангового бетононасоса довольно простой, что обеспечивает надежность и простоту его эксплуатации [1] (рис. 1). Бетонная смесь из загрузочного бункера **11** через впускной патрубок **13** поступает в рабочий участок шланга **5**, проложенного по внутреннему периметру корпуса насоса **2**. При этом смесь, которая находится в шланге перед роликом **4**, выдавливается в транспортный трубопровод **14**. За прохождением прижимных роликов шланг восстанавливает форму, что способствует всасыванию очередной порции перекачиваемой бетонной смеси из бункера.

Ротор представляет собой две траверсы, оснащенные каждая тремя роликами. Центральный прижимной ролик и два дополнительных ролика на каждой траверсе ротора составляют пакет (рис. 2). Оси роликов в нем располагаются на разных расстояниях от оси вращения ротора. Максимальную деформацию шланга осуществляет центральный ролик, а дополнительные используются для обеспечения постепенного нагружения шланга до максимальной деформации, что продлевает срок его эксплуатации и уменьшает динамические нагрузки на привод [10].

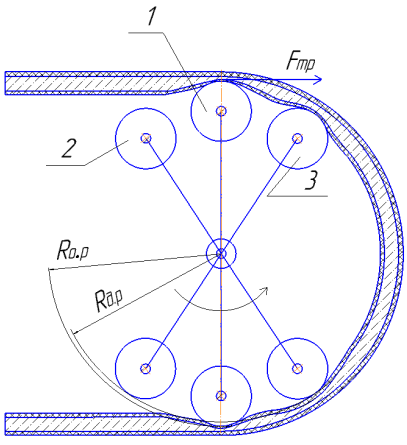


Рис. 2 – Схема расположения прижимных роликов относительно шланга: *1* – основной; *2, 3* – дополнительные ролики.

Рис. 3 – Резинотканевые шланги для перистальтического растворобетононасоса.

Таблица 1 – Основные параметры перистальтических, напорно-всасывающих шлангов

Толщина стенки	10 мм	15 мм	20 мм
Внутренний диаметр	32 мм	50 мм	75 мм
Материал	Натуральный каучук	Резина	
Модуль упругости Юнга	8 МПа	5 МПа	
Коэффициент Пуассона	0,47	0,495	

В насосе используются перистальтические шланги 3-ех типоразмеров (рис. 3, табл. 1): внутренний слой шланга изготовлен из каучука, а внешний резиновый слой армирован нейлоновыми нитями.

При моделировании процессов подачи строительных смесей в конкретном случае длина выпускного трубопровода составляет 60 м, а высота подъема подаваемой насосом смеси – до 30 м. Перед началом эксплуатации шлангового бетононасоса через него пропускают строительный раствор, который служит смазочным материалом для рабочего пространства машины. Для построения математической модели работы насоса на строительных смесях вначале анализируются условия его эксплуатации на строительных растворах.

Математическая модель работы насоса при подаче строительного раствора: общая характеристика.

Разработанная модель основывается на следующих основных допущениях.

1. Строительный раствор в процессе подачи обладает свойствами несжимаемой изотермической жидкости, величина изменения его состояния не зависит от давления и градиента скоростей (то есть, учитывая большие градиенты давления, действующие в рабочей части насоса и шланга, сухим трением между частицами песка пренебрегаем и считаем эту жидкость ньютоновской).

2. Внутренний диаметр шланга деформируется пропорционально увеличению давления в движущейся смеси, что создает эффект, аналогичный сжимаемости самого раствора. Поэтому изменение давления описывается уравнением сжимаемости, а импульсы давления распространяются по раствору вдоль оси шланга с конечной скоростью звука.

3. Столбы строительного раствора во впускном патрубке и выпускном трубопроводе моделируются как системы с распределенными параметрами, при этом учитываются инерционность раствора, а также и силы сопротивления его течению в результате появления пристенного эффекта на внутренней поверхности рабочей части шланга в корпусе бетононасоса. Распределение скоростей движения раствора в поперечном сечении принимается таким же, как при установившемся ламинарном течении (*парабола Пуазейля*, рис. 4, кривая 1).

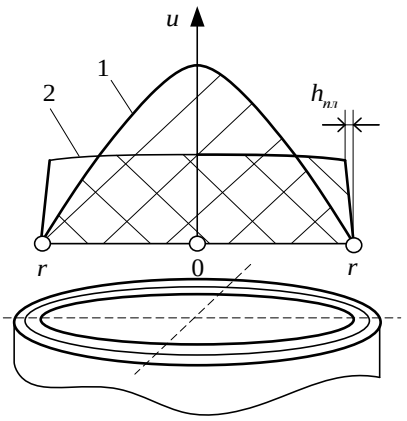


Рис. 4 – Профили скорости течения смеси в поперечном сечении шланга: *1* – при подаче строительного раствора; *2* – при подаче бетонной смеси.

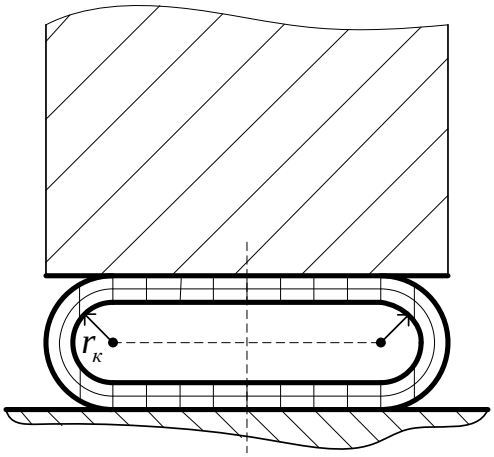


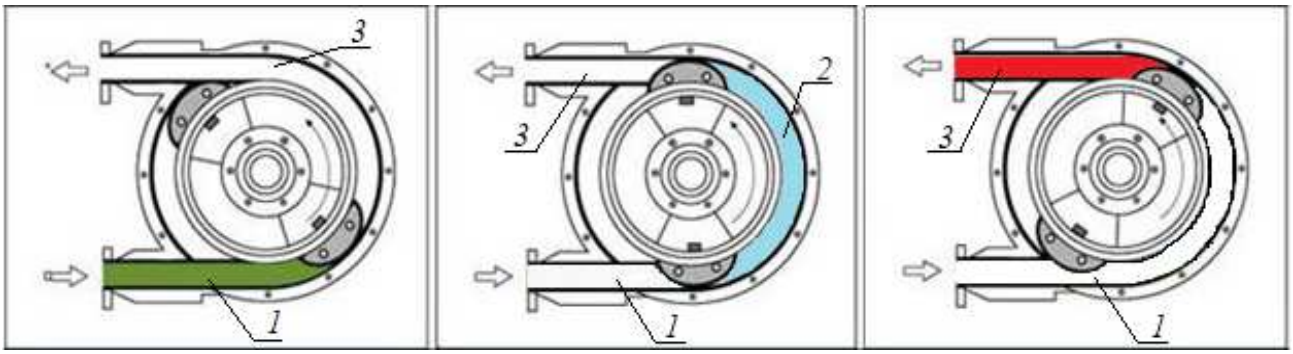
Рис. 5 – Форма зазора в деформированном шланге.

4. При деформации стенки шланга роликом периметр поперечного сечения жесткого слоя шланга и толщина этого слоя остаются неизменными, причем свободные участки этой границы описываются дугами одинакового радиуса (рис. 5).

5. Участок шланга внутри корпуса насоса моделируется в зависимости от фазы движения раствора по нему. При этом шланг подразделяется на 3 рабочих зоны (рис. 6); в пределах каждой зоны расчетное значение давления считается одинаковым, то есть этот шланг моделируется как система с сосредоточенными параметрами.

6. При движении роликов суммарный объем зон не изменяется, а могут перераспределяться объемы отдельных зон в зависимости от режима работы насоса (рис. 6).

7. Движение раствора через зазор в деформированном шланге подчиняется *соотношению Бернулли* (так называемому *закону потерянных скоростей*); расчетная эффективная площадь зазора определяется 3-мя прижимными роликами пакета (рис. 2) без учета их взаимного влияния (то есть в соответствие с *законом обратных квадратов*).



а *б* *в*

Рис. 6 – Особенности процесса подачи смеси бетононасосом: *а* – режим всасывания; *б* – промежуточное состояние; *в* – режим нагнетания. *1* – зона всасывания; *2* – промежуточная зона; *3* – зона нагнетания.

8. Упругими деформациями металлических деталей привода роликов, а также крутильными колебаниями ротора и вала двигателя пренебрегаем.

9. Давления раствора при входе во впускной патрубок (в бункере) и выходе из выпускного трубопровода считаются неизменными величинами, близкими к атмосферному давлению.

Постоянные и переменные коэффициенты модели. Коэффициент сжимаемости α для смеси в рабочей зоне шланга под действием центрального ролика определяется упругостью его стенок по формуле [8, 11]

$$\alpha = V^{-1}\, dV / dp = \left\| V = \pi R_{mp}^2 L;\; dV = 2\pi R_{mp} \cdot dR_{mp};\; dR_{mp} = K_к^{-1} \cdot h_к dp \right\| = (2h_к / R_{mp}) \cdot K_к^{-1},$$

где V, L, R_{mp} – объем, длина и радиус зоны; p – избыточное давление, под которым находится смесь внутри рабочей зоны шланга; $K_к$ – модуль объемной упругости материала шланга,

$$K_к = E_к \cdot [(1-\mu_к)/(1+\mu_к)]/(1-2\mu_к) \approx E_к /(3\cdot(1-2\mu_к));$$

$E_к = 8$ МПа, $\mu_к = 0.47$, $h_к = 0.4\, h_{ст}$ – соответственно *модуль упругости Юнга*, *коэффициент Пуассона* каучука [12], h_k – толщина слоя каучука; $h_{ст}$ – толщина стенки шланга.

Коэффициент сжимаемости определяется по формуле [13]

$$a = 1/\sqrt{\alpha \rho_{0p}} = \sqrt{(2h_к / r) \cdot K_к / \rho_{0p}},$$

где $\rho_{0p} = 1500$ кг/м^3 – средняя плотность строительного раствора, от которой зависит скорость звука a в канале с упругой стенкой.

Как видно, величины α и a не зависят от давления и для всего расчета являются константами. Значение скорости звука для шлангов такого типа обычно лежит в диапазоне 150 … 200 м/с, а запаздывание импульса подачи раствора при распространении по выпускному трубопроводу соизмеримо с периодом работы насоса. Именно по этой причине для расчета такого шланга необходимо учитывать инерционность смеси, то есть волновые эффекты.

Внутренний радиус R_{mp} шланга в диапазоне действующих в насосе гидростатических давлений $p_{ст} = 0.1 ... 0.5$ МПа, создаваемых силой тяжести, изменяется незначительно, чем можно пренебречь. Гидродинамические давления, создаваемые силами инерции и трения, учитываются как эффект сжимаемости, и на расчетную величину радиуса R_{mp} не влияют. Поэтому для всех сечений впускного патрубка и выпускного трубопровода за период всего времени расчета является константой площадь поперечного сечения трубопровода:

$$S_{шл} = \pi R_{mp}^2,$$

где R_{mp}, ρ_{0p} и ν_p, используемые в формуле для определения касательного напряжения $\tau_к$ на внутренней стенке шланга, также являются константой. Касательное напряжение $\tau_к$ определяется как:

$$\tau_к = \rho_{0p} \nu_p \cdot (8\pi / R_{mp}^2) \cdot v_{ср},$$

где ν_p – кинематическая вязкость строительного раствора, ($\nu_p \approx 600$ сСт [14]); $v_{ср}$ – средняя скорость движения смеси через поперечное сечение шланга.

Что касается внутреннего диаметра шланга, то при контакте с роликом эффективная площадь его поперечного сечения уменьшается и описывается формулой:

$$S_{шл} = \mu_p\, \pi\, r_к\, (2R_{mp} - r_к),$$

где μ_p – коэффициент расхода, который определяется в соответствии с рекомендациями [15]; $r_к(\varphi)$ – минимальный внутренний радиус деформированного сечения рабочей части шланга (рис. 6), который определяется как:

$$r_к = R_{тр} - (r_{рол} - l_{\min})/2,$$

$r_{рол}$ – радиус ролика; $l_{\min}(\varphi)$ – минимальное расстояние от внешней стенки деформированного шланга до оси ролика. Эта величина зависит от угла $\varphi_j \in [0, 2\pi]$, (рис. 7),

$$l_{\min} = \begin{cases} l_0 - R_{o.p} \cdot \left| \cos\varphi_j \right|, & \varphi_j \le \pi; \\ l_0 - R_{o.p}, & \varphi_j > \pi, \end{cases}$$

где $R_{o.p}$ – расстояние между осями вращения ролика и ротора; l_0 – расстояние от внешней поверхности шланга до оси вращения ротора.

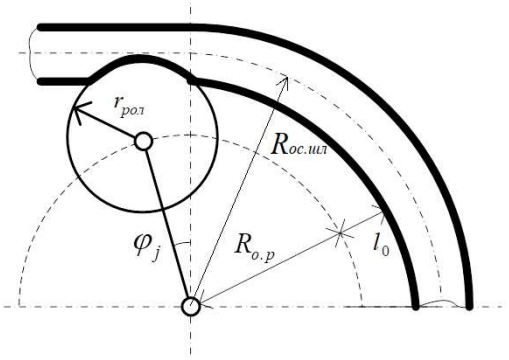


Рис. 7 – Схема деформации шланга роликом.

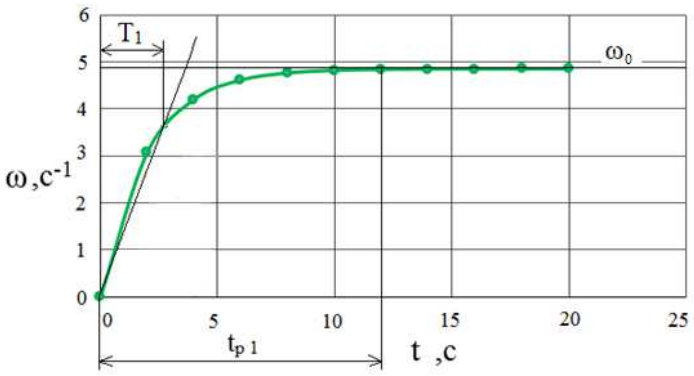


Рис. 8 – Зависимость угловой скорости ротора от времени.

При существенной величине давления p_2 за роликом (рис. 6, *в*) в период нагнетания зазор $h_{\min} = 2r_к$ увеличивается до значения

$$h_{\min} = 2r_к + 2h_к \cdot (p_2 / K_к),$$

что учитывает податливость каучукового слоя на внутренней поверхности шланга, в результате чего минимальный зазор и расход протекающей смеси увеличиваются примерно на 10 %.

Если при данном угле поворота кривошипа со шлангом контактирует 2 или 3 ролика из пакета, то образуемые ими проходные сечения μf_j суммируются по *закону обратных квадратов* и используется соотношение

$$\frac{1}{(\mu f)^2} = \sum_j \frac{1}{(\mu f_j)^2}.$$

Заметим, что такое же правило можно применить для двух пакетов роликов и, после деления полученной величины $\mu f_{эф}$ на площадь $f_{тр}$ внутреннего сечения шланга, получаем эффективный коэффициент $\Delta\mu f$ для всех зазоров насоса, работающих последовательно. Зависимость этого коэффициента от угла поворота ротора имеет период 180°. Ее график приведен на рис. 9; минимум коэффициента соответствует вертикальному расположению ротора (на рис. 1). Как видим, для проектируемого бетононасоса этот коэффициент оказался малым, следовательно, эффективный зазор, создаваемый двумя пакетами роликов, имеет высокую плотность, достаточную для нагнетания строительной смеси по шлангу. Но, что очевидно, на отдельных фазах рабочего цикла ротора первый или второй пакет роликов создает зазор низкой плотности, либо вообще не контактирует со шлангом.

В том случае, если

$$\mu f > 0.3 \cdot f_{тр}, \qquad (1)$$

то перепад давления между камерами, соединяемыми каналом с эффективной площадью сечения μf, станет настолько малым, что им можно пренебречь. Это означает, что указанные полости объединяются в одну, и мы получаем расчетную схему с двумя камерами (рис. 6, *а, в*).

Когда с некоторого момента времени (обозначим его t_0) условие (1) начинает нарушаться, то камера 1 либо камера 3 разделяются на две части (соответственно, 1 и 2 либо 3 и 2); в момент разъединения в этих частях давления одинаковы –

$$p_2(t_0) = p_1(t_0) \text{ либо } p_2(t_0) = p_3(t_0),$$

но далее, при условии $t > t_0$, эти равенства для давлений не соблюдаются.

Кроме проходного сечения ролик влияет на величину объема рабочей зоны, причем изменение ΔV этого объема описывается следующей формулой:

$$\Delta V = (\pi/3) \cdot \sqrt{r_{рол}^2 - l_{\min}^2} \cdot (r_{рол} - l_{\min})^2 \cdot [1 - 0.5\, l_{\min} / r_{рол}],$$

если $l_{\min} / r_{рол} < 1$; иначе принимается $\Delta V = 0$.

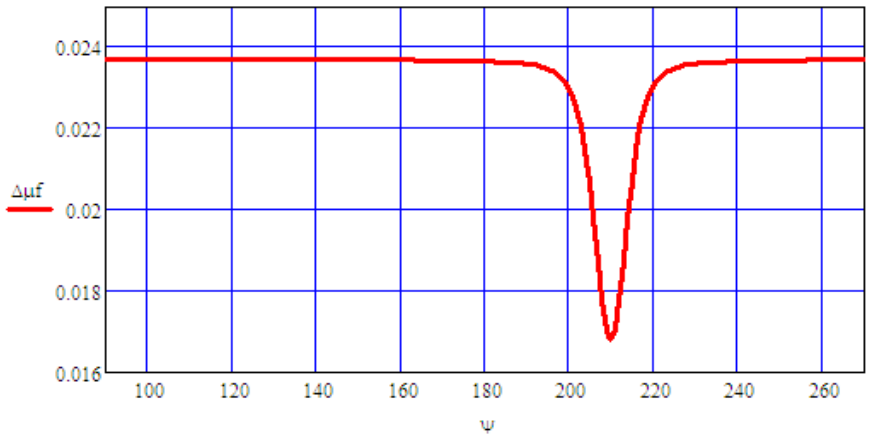


Рис. 9 – Изменение эффективного коэффициента плотности зазора в зависимости от угла поворота ротора.

Изменение объема зон при вращении ротора вызывает неравномерность подачи смеси. Теоретическое значение коэффициента неравномерности определяется формулой

$$\delta q = q_{наг}^{-1} \cdot d(\Delta V)/dt ,$$

где $q_{наг}$ – теоретическая подача шлангового бетононасоса (без учета сжимаемости и обратных перетечек смеси),

$$q_{наг} = S_{шл} v_{наг} ,$$

$v_{наг}$ – характерная скорость движения потока строительной смеси,

$$v_{наг} = R_{ос.шл} \cdot \omega ;$$

$R_{ос.шл}$ – расстояние от оси ротора до оси шланга; ω – угловая скорость вращения ротора.

Угловую скорость при длительной подаче раствора можно считать постоянной величиной:

$$\omega = \omega_0 ,$$

где $\omega_0 = \pi n_0 / 30$; n_0 – это номинальная частота вращения ротора, для анализируемого бетононасоса $n_0 = 45$ об/мин . Поэтому все процессы в камерах насоса и шлангах будут иметь период повторения 180° по углу поворота ротора, либо период $T = \pi / \omega_0 \approx 0.67$ секунды – по времени t . Но, чтобы выйти на режим установившихся колебаний, приходится моделировать переходной процесс, имитирующий повторное включение двигателя после краткой остановки насоса. Из графической зависимости рис. 8 видно, что стабилизация скорости вращения ротора, а, следовательно, и режима работы насоса наступают через 12 секунд после его включения.

Теоретический коэффициент неравномерности зависит от угла поворота ротора и, как это можно видеть на рис. 10, на начальном и конечном участках деформирования шланга достигает больших значений – 0.6 и более. Именно по этой причине, чтобы сгладить колебания давления в рабочих полостях, которые без этого уточнения расчета оказывались нереально большими, в математической модели пришлось учесть эффект сжимаемости, вызванный упругостью шланга, и инерционность столба жидкости в трубопроводе.

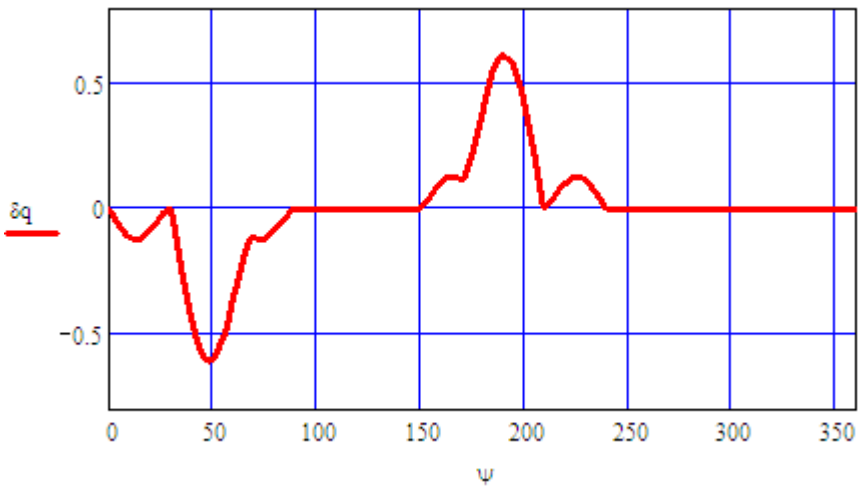


Рис.10 – Зависимость теоретического коэффициента неравномерности нагнетания смеси от угла ψ , град поворота ротора.

Дифференциальные уравнения модели и начальные/краевые условия для их интегрирования. Расчет скоростей движения смеси по впускному патрубку и выпускному трубопроводу проводится посредством однотипных систем дифференциальных уравнений в частных производных [16], включающих уравнение движения смеси

$$\partial u(x,t)/\partial t + \rho_0^{-1}\partial p(x,t)/\partial x = -\xi_p \cdot u(x,t) \qquad (2)$$

и уравнение её сжимаемости

$$a^{-2}\partial p(x,t)/\partial t + \rho_0\, \partial u(x,t)/\partial x = 0\,, \qquad (3)$$

где $\xi_p = 8\nu_p \cdot R_{mp}^{-2}$ – коэффициент сопротивления; ν_p – кинематическая вязкость раствора; u, p – средняя (по сечению) скорость и гидродинамическая компонента давления, под которым находится раствор в поперечном сечении шланга с координатой x в момент времени t.

Координата x отсчитывается от внешних сечений, контактирующих с бункером и точкой назначения подачи; длины впускного патрубка и выпускного трубопровода обозначаются L_1 и L_3, а рабочей части шланга внутри корпуса насоса – L_2.

После интегрирования уравнений (2) и (3) необходимое давление $p(x,t)$ находится по формуле

$$p_a(x,t) = p(x,t) + p_{ст}(x)\,,$$

где $p_{ст}(x)$ – статическая составляющая давления, величина которого пропорциональна разности высот между уровнем сечения выпускного трубопровода и уровнем сечения x в рабочей части шланга.

Граничные и начальные условия для уравнений (2) и (3) являются однородными и выглядят так:

$$p(0,t) = 0,\;\; p(x,0) = 0,\;\; u(x,0) = 0\,.$$

В зонах внутреннего сечения шланга соблюдаются условия непрерывности давления:

$$p(L_{1,3},t) = p_{1,3}(t)\,,$$

где $p_{1,3}$ – это динамические компоненты давления в 1-ой и 3-ей зонах (рис. 5).

В уравнениях (2) и (3) не учитываются слагаемые, описывающие эффекты переноса; это объясняется тем, что для всего потока смеси в шланговом насосе *числа Маха* малы (не превосходят 0.01).

Для зон шланга внутри корпуса насоса записываются уравнения сжимаемости [8], число и вид которых зависит от фазы процесса. Наиболее сложный случай соответствует расчетной схеме, показанной на рис. 6, *б*, используются три уравнения сжимаемости:

$$\begin{aligned}
\alpha V_1\, dp_1/dt &= S_{шл}\cdot u_{вп}(L_{\text{in}},t) + k_p S(\varphi+\pi)\cdot\sigma(p_2 - p_1 - \Delta p_{ст}) - q_{наг}\cdot(1+\delta q(\varphi+\pi))\,;\\
\alpha V_2\, dp_2/dt &= k_p S(\varphi)\cdot\sigma(p_3 - p_2 - \Delta p_{ст}) - k_p S(\varphi+\pi)\cdot\sigma(p_2 - p_1 - \Delta p_{ст})\,;\\
\alpha V_3\, dp_3/dt &= q_{наг}\cdot(1+\delta q(\varphi)) - k_p S(\varphi)\cdot\sigma(p_3 - p_2 - \Delta p_{ст}) - S_{шл}\cdot u_{вып}(L_{out},t)\,,
\end{aligned} \qquad (4)$$

а также, поскольку частота вращения ротора может быть переменной, добавлено уравнение для определения угла поворота ротора

$$d\varphi/dt = \omega(t)\,. \qquad (5)$$

Когда угол φ превышает π, в этот момент времени пакет роликов, который на рис. 2 был нижним, становится верхним, а верхний пакет – нижним, что полностью отвечает логике работы данного бетононасоса.

В системе уравнений (4) $\sigma(p)$ – расходная функция, определяется по *формулое Бернулли*

$$\sigma(\Delta p) = \sqrt{(2/\rho_p)\cdot|\Delta p|}\cdot\Delta p\,.$$

Статический перепад давления $\Delta p_{ст}$ соответствует потере напора при подъеме на высоту $R_{ос.шл}$; объемы зон V_1, V_3 определяются с учетом насосного эффекта роликов и изменяются соответственно на величины $\Delta V(\varphi+\pi)$ и $\Delta V(\varphi)$.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4), (5) производится при нулевых начальных условиях

$$p_1(0) = 0,\;\; p_2(0) = 0,\;\; p_3(0) = 0,\;\; \varphi(0) = 0$$

совместно с уравнениями (2), (3), записанными для впускного патрубка и выпускного трубопровода, до установления параметров рабочего процесса и скорости движения потока смеси.

Расчетные уравнения. Интегрирование уравнений (4), (5) выполняется численно с постоянным шагом по времени $\Delta t \approx 10^{-4}$ с при использовании метода Эйлера. Производные по времени заменяются конечными разностями. Так, для примера, второе уравнение системы (4) и уравнение (5) после замены и элементарных преобразований получает следующий вид:

$$p_{2.j+1} = p_{2.j} + \frac{\Delta t}{\alpha V_2}\left[k_p S(\varphi_j)\cdot\sigma(p_{3.j} - p_{2.j} - \Delta p_{ст}) - k_p S(\varphi_j+\pi)\cdot\sigma(p_{2.j} - p_{1.j} - \Delta p_{ст})\right];$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + \omega(t_j)\cdot\Delta t;\;\; t_{j+1} = t_j + \Delta t\,,$$

откуда получаем расчетное давление p_1 в момент времени $t_{j+1} = \Delta t \cdot j$.

Для интегрирования уравнений (2), (3) используется *дискретная модель* и алгоритм расчета нестационарного изотермического течения с определенным коэффициентом динамической вязкости смеси по трубопроводу, которые обычно связывают с именем *акад. Приснякова* [9]. Впускной патрубок бетононасоса и выпускной трубопровод разбиваются на отдельные отрезки равной длины $\Delta x = L / n$. Для устойчивости расчета, длина отрезка обязана удовлетворять *условию Куранта* [17]

$$\Delta x \geq a \cdot \Delta t ,$$

где a – это скорость звука в смеси, а время Δt то же самое, что указано выше.

Результаты расчета для конкретного примера. Расчет подачи строительного раствора проводился при следующих значениях основных параметров бетононасоса:

- длины трубопроводов – $L_1 = 1$ м; $L_2 = 0.75$ м; $L_3 = 60$ м; высота подъёма 30 м;
- внутренний диаметр шланга $2r = 50$ мм; толщина стенки $h_{ст} = 15$ мм;
- радиус ролика $r_{рол} = 50$ мм; расстояния $R_{о.р}$ между осями вращения ротора и роликов – 210 мм для основного и 185 мм для вспомогательного; минимальный зазор при деформации шланга – $2r_к = 1$ мм.
- номинальная частота вращения ротора $n_0 = 45$ мин$^{-1}$.

При этом длины расчетных отрезков составляли $\Delta x_1 = 3$ м, $\Delta x_3 = 0.1$ м, а величина $a \cdot \Delta t < 0.02$ м, то есть условие Куранта выполнялось с многократным запасом.

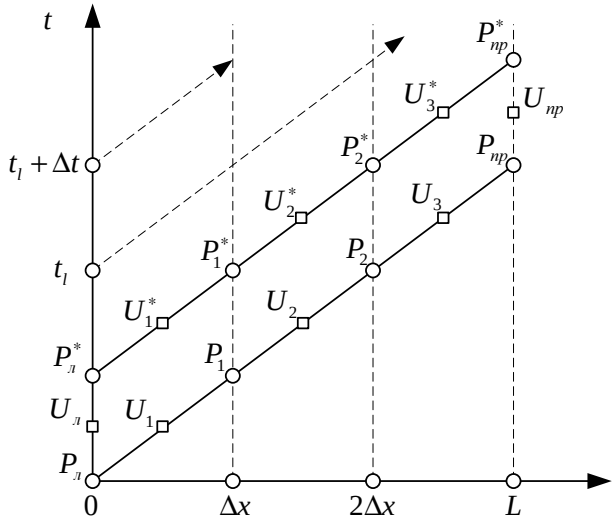


Рис. 11 – Расчетная схема для впускного патрубка и выпускного трубопровода.

На рис. 11 для компактности изложения теории трубопровод разбит на 3 отрезка, но в реальных расчетах по данному методу число таких отрезков, как правило, составляет 10 … 20. Интегрирование производится вдоль восходящей наклонной прямой линии, отмеченной пунктиром. Узловые значения скорости и давления обозначены большими буквами U и P соответственно. Давление $P^*_л$ в конце трубопровода, расположенного слева, на графике известно, на параллельной линии, проведенной ниже, давления $P_1, P_2, P_{пр}$ и скорости U_1, U_2, U_3 в промежуточных узлах, а также скорость $U_{пр}$ на границе трубопровода и рабочей зоны насоса с объемом $V_{пр}$, были рассчитаны на предыдущем шаге. Скорости и давления, отмеченные звездочкой, вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$U^*_1 = U_1 + (a\rho_0)^{-1}(P^*_л - P_1)\cdot(\Delta t/\Delta x) - \xi_p\, U_1 \Delta t\,, \quad P^*_1 = P_1 \cdot [1 + (U^*_1 - U_2)\cdot(\Delta t/\Delta x)]\,,$$

$$U^*_2 = U_2 + (a\rho_0)^{-1}(P^*_1 - P_2)\cdot(\Delta t/\Delta x) - \xi_p U_2 \Delta t\,, \quad P^*_2 = P_2 \cdot [1 + (U^*_2 - U_3)\cdot(\Delta t/\Delta x)]\,,$$

$$U^*_3 = U_3 + (a\rho_0)^{-1}(P^*_2 - P_3)\cdot(\Delta t/\Delta x) - \xi_p\, U_3 \Delta t\,.$$

Скорости $U^*_3 = u(L - 0.5\Delta x, t_j + 0.5\Delta t)$ и $U_{пр} = u(L, t_j + 0.5\Delta t)$ связаны соотношением

$$\frac{U^*_3 - U_{пр}}{0.5\Delta x} = \frac{\alpha \cdot (P^*_{пр} - P_{пр})}{\Delta t}\,,$$

причем величины $U_{пр}$, $P^*_{пр} = p_{1,3}(t_j + \Delta t)$, $P_{пр} = p_{1,3}(t_j)$ используются в равенствах, заменяющих первое и третье

уравнения системы (4). После временного исключения из этих соотношений неизвестной скорости $U_{пр}$, получаем расчетные уравнения для давлений:

$$p_{1.j+1} = p_{1.j} + \frac{\Delta t}{\alpha V^*_{1,j}}\left[S_{шл}\cdot u_{вп}(L_1 - 0.5\Delta x_1, t_j) + k_p S(\varphi_j + \pi)\cdot\sigma(p_{2.j} - p_{1.j} - \Delta p_{ст}) - q_{наг}\cdot(1+\delta q(\varphi_j + \pi))\right];$$

$$p_{3.j+1} = p_{3.j} + \frac{\Delta t}{\alpha V^*_{3,j}}\left[q_{наг}\cdot(1+\delta q(\varphi_j)) - S_{шл}\cdot u_{вып}(L_3 - 0.5\Delta x_3, t_j) - k_p S(\varphi_j)\cdot\sigma(p_{3.j} - p_{2.j} - \Delta p_{ст})\right],$$

где скорректированные значения объемов рабочих камер включают объемы соседних отрезков впускного патрубка или выпускного трубопровода,

$$V^*_{1,j} = V_{1,j} + S_{шл}\cdot\Delta x_1/2;\quad V^*_{3,j} = V_{3,j} + S_{шл}\cdot\Delta x_3/2.$$

В завершение этого шага расчета по формулам

$$U^*_{л} = U_1 \quad \text{и} \quad U_{пр} = U^*_3 + \alpha\cdot(P^*_{пр} - P_{пр})\cdot 0.5\cdot\Delta x/\Delta t$$

определяются расчетные значения скорости на концах шланга.

Узлы каждого расчетного слоя имеют смещение по времени; между концами трубопровода величина смещения составляет

$$\tau_{см} = n\cdot\Delta t.$$

Величина смещения оказывается значительно меньше запаздывания импульса $\tau = L/a$, которая для впускного патрубка незначительна, но у выпускного трубопровода соизмерима с основным периодом колебаний давления.

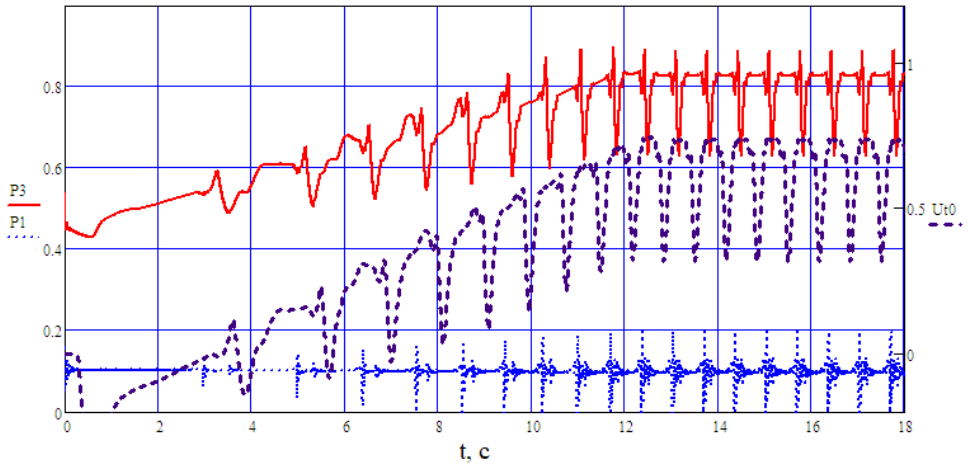


Рис. 12– Расчетные кривые изменения давлений P1 и P3, МПа в камерах насоса и скорости смеси Ut0, м/с на выходе из выпускного трубопровода; время t, с отсчитывается от начала включения насоса.

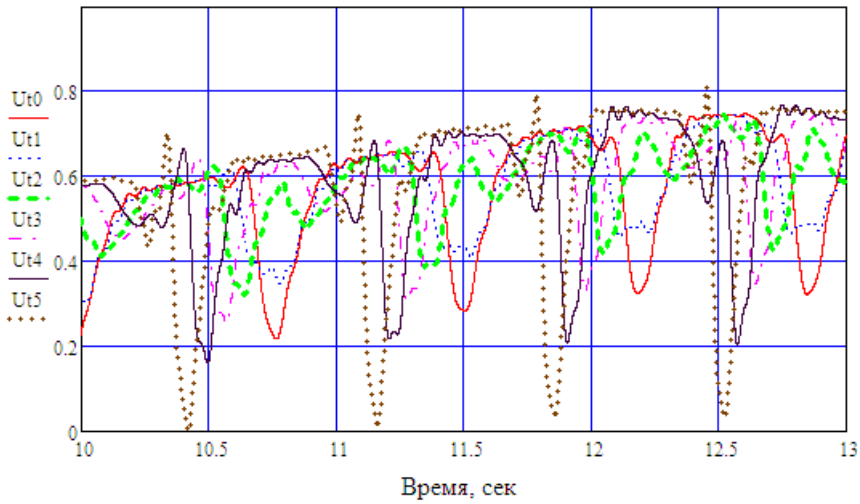


Рис. 13 – Изменения скорости в шести равноотстоящих сечениях выпускного трубопровода (включая выходное и входное сечения).

По окончании расчета вычисляются пиковые и средние индикаторные (то есть, не учитывающие трение в механических узлах бетононасоса) значения мощности N и крутящего момента M при использовании формул:

$$N(t) = S_{шл} \cdot (p_3(t) - p_1(t)) \cdot v_{наг} \quad \text{и} \quad M(t) = S_{шл} \cdot (p_3(t) - p_1(t)) \cdot R_{ос.тр} .$$

Кроме того, интегрируя расчетные значения скорости $u_3(t)$, определяется значение коэффициента расхода насоса.

Графические зависимости на рис. 12 показывают, что стабилизация рабочих параметров насоса происходит через 12 секунд от момента пуска бетононасоса, что подтверждает ранее полученные результаты (рис. 8). Коэффициент расхода близок к 50 %.

Кривые на рис. 13 доказывают необходимость учета инерционности жидкости в выпускном трубопроводе; колебания скоростей сдвинуты на различные фазовые углы и имеют сложный полигармонический характер. Уровень пульсаций скорости по мере продвижения по трубопроводу уменьшается, и вблизи выходного конца его можно считать приемлемым для выполнения бетонных работ.

Что касается результатов расчета впускного трубопровода, то там картина другая – кривые скоростей в разных сечениях практически накладываются друг на друга. Объяснение понятное: этот трубопровод достаточно короткий, и запаздыванием импульсов здесь можно пренебречь.

Математическая модель работы насоса при подаче бетонной смеси. Упомянутая модель, в основном, совпадает с описанной выше, но имеет отличительные особенности*:*

- внутри шлангов бетонная смесь рассматривается как двухкомпонентная изотермическая вязкая несжимаемая жидкость, состоящая из щебня и цементно-песчаного раствора, которые имеют одинаковое давление и скорость течения, но разные объемные части;
- причиной изменения объемных частей является узкий зазор у деформированного шланга, который пропускает цементно-песчаный раствор, но задерживает щебень;
- ламинарное течение бетонной смеси по шлангам имеет две области – центральное ядро, где по причине очень высокой вязкости смеси (она выше вязкости ν_p цементно-песочного раствора не менее чем в 10 раз) скорости в поперечном сечении практически одинаковы (рис. 4, кривая 2), и тонкую жидкую пленку, образованную цементно-песчаным раствором и примыкающую к стенке шланга.

При учете силы гидравлического сопротивления формула для коэффициента трения принимает вид:

$$\xi_p = 2\nu_{ц.р} \cdot (\rho_ц / \rho_б) \cdot (R_{тр} \cdot h_{пл})^{-1},$$

где значение $\nu_{ц.р} \approx 400$ сСт отвечает вязкости жидкой пленки, которая имеет (по сравнению с исходным раствором) повышенное процентное содержание воды; $\rho_ц \approx 1100$ кг/м^3 – плотность этой пленки; $\rho_б = 2200$ кг/м^3 – плотность бетонной смеси.

Толщина пленки $h_{пл}$ принята равной $0.06\,R_{тр}$; в дальнейшем эта величина (и сама концепция расчета коэффициента ξ_p) будет уточняться по результатам экспериментальных исследований.

В формуле для скорости звука увеличивается плотность:

$$a = 1/\sqrt{\alpha\rho_б} = \sqrt{(2h_к / r) \cdot K_к / \rho_б} ,$$

следовательно, для подачи бетонной смеси эта скорость уменьшается примерно в 1.2 раза.

Условие (1) нарушается при зазорах, меньших характерного диаметра осколков щебня:

$$2r_к < 0.8\,d_{щ.max} \approx 8 \text{ мм}.$$

Поэтому формула для расходной функции $\sigma(\Delta p)$ использует плотность $\rho_ц$ и учитывает фильтрацию раствора через щебень [18]:

$$\sigma(\Delta p) = \sqrt{(2/\rho_ц)} \cdot \left[\sqrt{(|\Delta p| + p_ф)} - \sqrt{p_ф} \right] \cdot \Delta p , \qquad (6)$$

где величина давления $p_ф \approx 0.2$ МПа отвечает выбранному коэффициенту $K_ф = 0.5$ м/с и пути $L_ф = 1$ м фильтрации; $L_ф$ – это среднее расстояние между центрами соседних камер насоса.

При использовании формулы (6) учитывается, что по причине фильтрации основное падение давления происходит не при входе жидкости в зазор (как при подаче раствора), а в объемах соединяемых камер. Поэтому в зоне минимального зазора действует повышенное давление $p_{ср}$, равное полусумму давлений между камерами, которое сжимает каучуковый слой шланга и увеличивает зазор в 1.1 … 1.3 раза, до значения

$$h_{\min} = 2r_к + 2\,h_к \cdot (p_{ср} / K_к) .$$

Заметим, что изменение объемных частей бетонной смеси не влияет на динамику давлений и скоростей. Но без результатов динамического анализа фракционного состава смеси в рабочих камерах насоса гидродинамический расчет процесса трудно назвать полным.

Объемная часть ψ_0 цементно-песчаного раствора в бетонной смеси, загруженной в бункер, определяется в соответствии со стандартом для данной марки бетона; его характерное значение, которое использовалось в расчетах, составляет $\psi_0 = 0.42$. В рабочих камерах эта величина может быть иной, обозначим её $\psi_{1,2,3}$. Тогда рассмотренные выше системы рекуррентных уравнений дополнится следующими тремя соотношениями:

$$\psi_{1.j+1} = (\psi_{1.j} \cdot V^*_{1.j} + [\, f_{mp} u_{вп}(L_1 - 0.5\Delta x_1, t_j) \cdot \psi_0 + k_p f(\varphi_j + \pi) \cdot \sigma(p_{2.j} - p_{1.j} - \Delta p_{cm})] \cdot \Delta t) / V^*_{1.j+1},$$

$$\psi_{2.j+1} = (\psi_{2.j} \cdot V^*_{2.j} + [k_p f(\varphi_j) \cdot \sigma(p_{3.j} - p_{2.j} - \Delta p_{cm}) - k_p f(\varphi_j + \pi) \cdot \sigma(p_{2.j} - p_{1.j} - \Delta p_{cm})] \cdot \Delta t) / V^*_{2.j+1},$$

$$\psi_{3.j+1} = (\psi_{3.j} \cdot V^*_{3.j} - [k_p f(\varphi_j) \cdot \sigma(p_{3.j} - p_{2.j} - \Delta p_{cm}) + f_{mp} u_{вп}(L_3 - 0.5\Delta x_3, t_j) \cdot \psi_{3.j}] \cdot \Delta t) / V^*_{3.j+1}.$$

Анализ и сопоставление результатов расчета. Шланговый насос, используемый для моделирования подачи бетонной смеси, имел те же основные параметры, что и для подачи строительного раствора. Некоторые результаты моделирования представлены на рис. 14 – 16.

Рис. 14 и рис. 12 описывают аналогичные процессы и дают удобный материал для сравнения результатов. Увеличение плотности и вязкости нагнетаемой смеси повысило статические и суммарные давления примерно в 1.5 раза; в такой же пропорции увеличились максимальные значения мощности и крутящего момента в приводе. Коэффициент подачи уменьшился до 45 %. Значительно (более чем в 3 раза) снизилась амплитуда колебаний скорости в выходном сечении выпускного трубопровода, что говорит о более стабильном потоке бетонной смеси в сравнении со строительным раствором. Незначительные пульсации давления на установившемся режиме работы не влияют на целостность и качество потока бетонной смеси на выходе из бетононасоса.

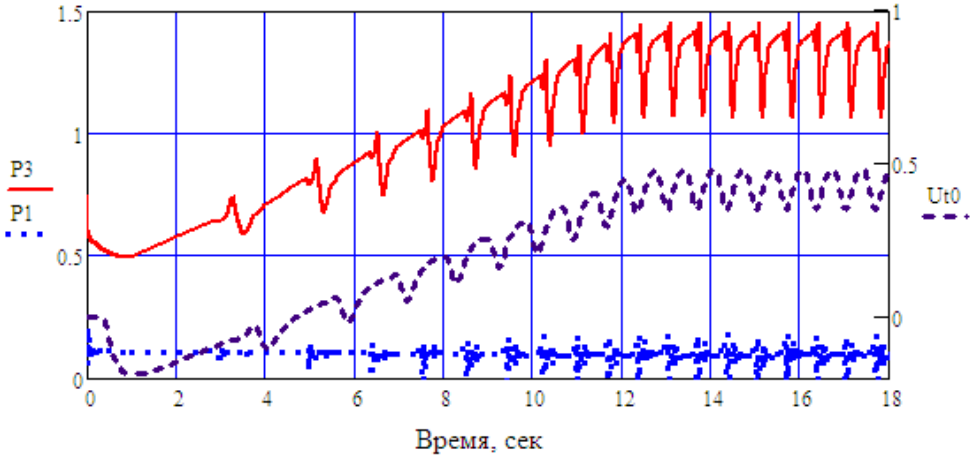


Рис. 14 – Расчетные кривые давлений P1 и P3, МПа в камерах бетононасоса и скоростей Ut0, м/с на выходе из выпускного трубопровода при подаче бетонной смеси.

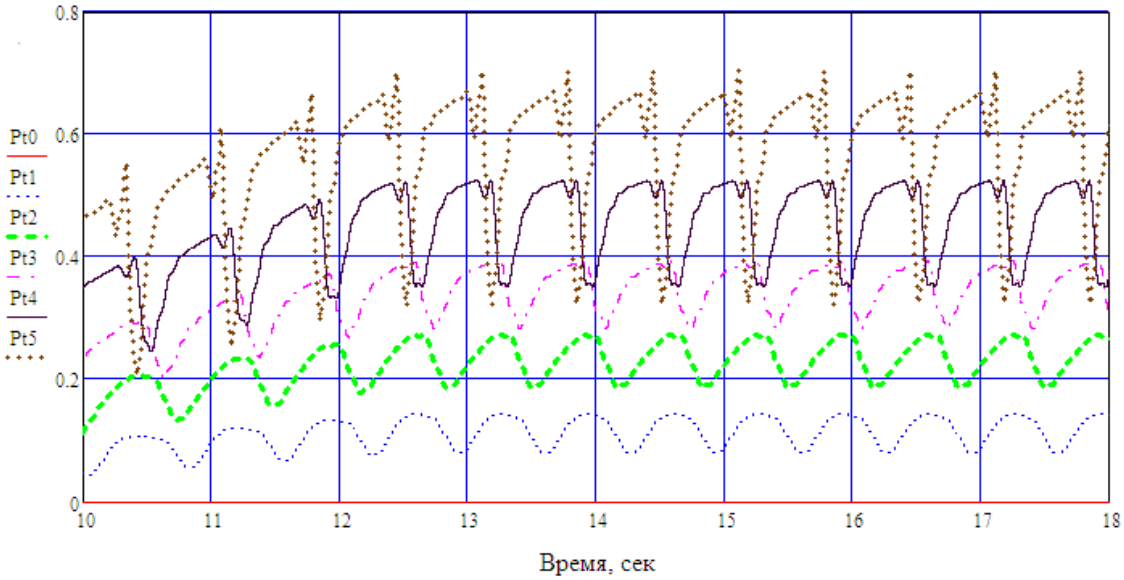


Рис. 15 – Изменение динамической компоненты давления бетонной смеси Pt, МПа в шести равноотстоящих сечениях выпускного трубопровода (включая выходное и входное сечения).

Из графика на рис. 14 также видно, что при подаче бетонной смеси имеются незначительные пульсации давления на установившемся режиме работы бетононасоса, которые сопровождается достаточно быстрой реакцией стабилизации 0.2 с. Исходя из полученных результатов можно сказать, что данные пульсации давления при стабильном режиме работы насоса не влияют на целостность и качество потока бетонной смеси на выходе из бетононасоса.

Если зазор при деформировании трубы уменьшать до нуля, то кривые на рис. 14 будут сближаться, и существенно возрастет производительность насоса. Однако значительно возрастут максимальные нагрузки, которые выйдут за допустимые пределы для данной конструкции бетононасоса.

Рис. 15 доказывает отсутствие газовых пробок внутри выпускного шланга; в противном случае модель течения бетонной смеси пришлось бы усложнять.

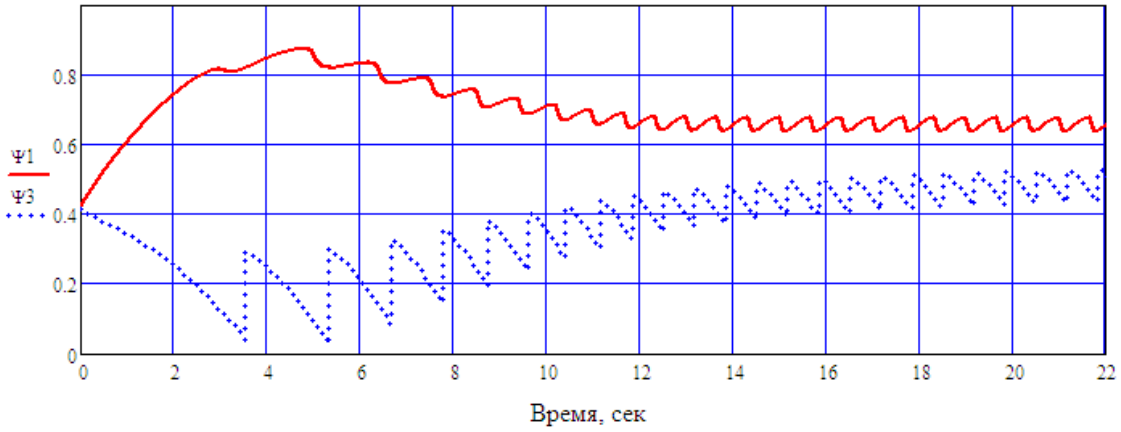


Рис. 16 – Расчетные кривые изменения объемных частей жидкой части бетонной смеси в камерах насоса.

Рис. 16 иллюстрирует изменение влагосодержания бетонной смеси в рабочих камерах насоса. В начальный период времени смесь в верхней камере оказывается сильно осушенной, поэтому, перед очередным запуском в бункер добавляют воду (или мыльный раствор). На установившемся режиме бетонная смесь в нижней камере получает избыточную порцию влаги (что значительно снижает трение о внутреннюю стенку шланга, и поэтому мы это трение не учитываем). В верхней камере она отдает эту влагу и восстанавливает заданную рецептуру бетонной смеси. Поскольку весь этот процесс сопровождается заметной вибрацией, на качество бетонной смеси временное расслоение не влияет.

Выводы. Разработаны новые математические модели и алгоритмы расчета, предназначенные для динамического анализа рабочего процесса шлангового насоса при подаче строительного раствора или бетонной смеси.

Модели используют известные уравнения изотермического движения жидкости с определенным коэффициентом динамической вязкости по трубопроводам с упругой стенкой. Показано, что при моделировании рабочего процесса подачи раствора допустимо игнорировать наличие сухого трения и представлять его как однородную жидкость. При моделировании рабочего процесса подачи бетонной смеси целесообразно использовать двухслойную модель движения вязкой смеси, включающую вязкое ядро и пристенный слой у внутренней поверхности шланга.

Получены новые формулы для расчета эффективного сечения в зазоре максимально деформированного шланга, а также насосного эффекта, возникающего в периоды захода на шланг и схода с него пакета роликов.

В результате моделирования рабочего процесса подачи определена длительность выхода рабочих параметров насоса на установившийся режим, а также оценено влияние плотности и вязкости перекачиваемой смеси на максимальные давления в системе, на затрачиваемую мощность и крутящий момент.

Разработанные математические модели и алгоритмы расчета могут быть использованы в дальнейшем для динамического анализа рабочего процесса шланговых насосов при подаче ими строительных растворов или бетонных смесей, а также при разработке гидравлического привода бетононасосов.

Список литературы

1. *Emeljanova A. I., Zadorozhniy A. O., Klimenko M. V., Chayka D. O.* Pat. 112585, Ukraine. Universal hose-type concrete pump. Kharkiv National University of Construction and Architecture. – 2006.
2. *Klespitz J., Kovács L.* Peristaltic pumps – a review on working and control possibilities // SAMI 2014, IEEE 12th international symposium on applied machine intelligence and informatics, January 23 – 25. – Slovakia, Herl'any, 2014. P. 191 – 194.
3. *Dhananchezhiyan P., Somashekhar S. Hiremath.* Optimization of multiple micro pumps to maximize the flow rate and minimize the flow pulsation // 1-st global colloquium on recent advancements and effectual researches in engineering, science and technology – RAEREST 2016 on April 22nd & 23rd April 2016. – Vol. 25, P. 1226 – 1233.
4. *Feys D., Kamal H. Khayat, Rami Khatib.* How do concrete rheology, tribology, flow rate and pipe radius influence pumping pressure? // Cement and Concrete Composites. – 2016. – Vol. 66. – P. 38 – 46.
5. *Abo Dhaheer M. S., Kulasegaram S., Karihaloo B. L.* Simulation of self-compacting concrete flow in the J-ring test using smoothed particle hydrodynamics (SPH) // Cement and Concrete Research. – 2016. – Vol. 89. – P. 27 – 34.

6. *Guodong Cao, Zhuguo Li*. Numerical flow simulation of fresh concrete with viscous granular material model and smoothed particle hydrodynamics // Cement and ConcreteResearch. – 2017. – Vol. 100. – P. 263 – 274.
7. *Daszczenko A., Glinski J., Krasowski E*. Hydraulika: Maszyny hydrauliczne. – Lublin : Polska Akademia Nauk, Oddzial w Lublinie, 2010. – 385 p.
8. *Грехов Л. В., Иващенко Н. А., Марков В. А*. Топливная аппаратура и системы управления дизелей. Учебник для вузов. – М. : Легион-Автодата, 2004. – 344 с.
9. *Присняков В. Ф*. Динамика жидкостных ракетных двигательных установок. – М. : Машиностроение, 1983. – 248 с.
10. *Чайка Д. О*. Дослідження умов роботи нового універсального шлангового гідравлічного бетононасосу з урахуванням його динамічних характеристик // Науковий вісник будівництва. – 2017. – №. 3 (89). – С. 230 – 234. – ISSN 2311-7257.
11. *Башта Т. М*. Гидропривод и гидропневмоавтоматика. – М. : Машиностроение, 1972. – 320 с.
12. *Прохоров А. М*. Модули упругости. Большая Советская энциклопедия в 30 т. 3-е изд. – М. : Сов. энциклопедия, 1974. – Т. XVI. – С. 406 – 616 с.
13. *Лойцянский Л. Г*. Механика жидкости и газов. – М. : Наука, 1978. – 736 с.
14. *Neville A. M*. Properties of concrete. – London : Longman, Harlow, 1995. – 4th ed. – 844 p.
15. *Гамынин Н. С*. Гидравлический привод систем управления. – М. : Машиностроение, 1972. – 376 с.
16. *Атанов Г. А*. Основы одномерной нестационарной газодинамики. – Київ : Вища школа, 1979. – 183 с.
17. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H*. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // Mathematische Annalen. – 1928. – Т. 100. – № 1. – С. 32 – 74.
18. *Бочевер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М*. Основы гидрогеологических расчетов. – М. : Недра, 1965. – 308 с.

References (transliterated)

1. Emeljanova A. I., Zadorozhniy A. O., Klimenko M. V., Chayka D. O. Universal hose-type concrete pump. Kharkiv National University of Construction and Architecture. Patent Ukraine, no. 112585, 2006.
2. Klespitz J., Kovács L. Peristaltic pumps – a review on working and control possibilities. *SAMI 2014*, *IEEE 12th international symposium on applied machine intelligence and informatics*, *January 23–25.* Slovakia, Herl'any, 2014, pp. 191–194.
3. Dhananchezhiyan P., *Somashekhar S. Hiremath*. Optimization of multiple micro pumps to maximize the flow rate and minimize the flow pulsation. *1st global colloquium on recent advancements and effectual researches in engineering, science and technology* – olloquium on recent advancements and effectual researches in engineering, science and technology – RAEREST 2016 on April 22nd & 23rd April. 2016, vol. 25, pp. 1226–1233.
4. Feys D., *Kamal H. Khayat*, Rami Khatib. How do concrete rheology, tribology, flow rate and pipe radius influence pumping pressure? *Cement and Concrete Composites*. 2016, vol. 66, pp. 38–46.
5. *Abo Dhaheer* M. S., Kulasegaram S., Karihaloo B. L. Simulation of self-compacting concrete flow in the J-ring test using smoothed particle hydrodynamics (SPH). *Cement and Concrete Research*. 2016, vol. 89, pp. 27–34.
6. Guodong Cao, Zhuguo Li. Numerical flow simulation of fresh concrete with viscous granular material model and smoothed particle hydrodynamics. *Cement and Concrete Research*. 2017, vol. 100, pp. 263–274.
7. Daszczenko A., Glinski J., Krasowski E. *Hydraulika: Maszyny hydrauliczne*. Lublin : Polska Akademia Nauk, Oddzial w Lublinie Publ., 2010. 385 p.
8. Grekhov L. V., Ivaschenko N. A., Markov V. A. *Toplivnaya apparatura i sistemy upravleniya dizeley*. *Uchebnik dlya vuzov* [Fuel equipment and control systems for diesel engines. College textbook]. Moscow, Legion-Avtodata Publ., 2004. 344 p.
9. Prisnyakov V. F. *Dinamika zhidkostnykh raketnykh dvigatel'nykh ustanovok* [Dynamics of liquid rocket propulsion systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1983. 248 p.
10. Chayka D. O. Doslidzhennya umov roboty novogo universal'nogo shlangovogo gidravlichnogo betononasosu z urakhuvannyam yogo dynamichnykh kharakterystyk [Investigation of the working conditions of a new general-service hydraulic flexible-hose pump considering its dynamic characteristics]. *Naukovyy visnyk budivnytstva* [Scientific Bulletin for Construction]. 2017, no. 3 (89), pp. 230–234. ISSN 2311-7257.
11. Bashta T. M. *Gidroprivod i gidropnevmoavtomatika* [Hydraulic drive and hydropneumoautomatics]. Moscow, Machinostroenie Publ., 1972. 320 p.
12. Prokhorov A. M. *Moduli uprugosti*. *Bol'shaya Sovetskaya Yentsiklopediya v 30 m. 3-e izd*. [Modulus of elasticity. Great Soviet Encyclopedia in 30 volumes. 3rd edition]. Moscow, Soviet Encyclopedia Publ., 1974. Vol. XVI. pp. 406–616.
13. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gazov* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 736 p.
14. Neville A. M. *Properties of concrete*. London, Longman, Harlow, 1995. 4th ed. 844 p.
15. Gamynin N. S. *Gidravlicheskiy privod system upravleniya* [Hydraulic drive of control systems]. Moscow, Machinostroenie Publ., 1972. 376 p.
16. Atanov G. A. *Osnovy odnomernoy nestatsionarnoy gazodinamiki* [Fundamentals of one-dimensional unsteady gas dynamics]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1979. 183 p.
17. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*. 1928, vol. 100, no. 1, pp. 32–74.
18. Bochever F. M., Garmonov I. V., Lebedev A. V., Shestakov V. M. *Osnovy gidrogeologicheskikh raschyitov* [Basics of hydrogeological calculations]. Moscow, Nedra Publ., 1965. 308 p.

Поступила (received) 25.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Чайка Денис Олегович (Чайка Денис Олегович, Chayka Denys Olehovich) – аспірант, Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків; тел.: (063) 895-46-56; e-mail: d.chayka93@gmail.com.

Ємельянова Інга Анатолійовна (Емельянова Инга Анатольевна, Emeljanova Inga Anatolijevna) – доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків; тел.: (067) 571-56-84; e-mail: emeljanova-inga@ukr.net.

Андренко Павло Миколайович (Андренко Павел Николаевич, Andrenko Pavlo Micolajovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 103-88-83; e-mail: andrenko47@mail.ru.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoryev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

UDC 621.646.42: 621.05: 621.016

S. A. SHEVCHENKO, V. I. KONOKH, YU. A. MITIKOV, A. L. GRIGORIEV

UNIVERSAL ORTHOMETRIC REAL GAS EQUATION OF STATE FOR MODELING PROCESSES IN ROCKET-AND-SPACE TECHNOLOGY UNITS

A domain of the working parameters of the gas unified for all units of pneumatic automation, limited by isochore, adiabatic and two isotherms is formed. The requirements on the real gas equation suitable for dynamic calculations of these units are formulated. The known equations of state for real gas are analyzed and the reasons of their being not convenient to use are indicated. To obtain a new equation, it is proposed to use the theory of orthometric states of gas and the Boyle scales to measure its parameters. The form of the target equation is chosen and by using the standard tabular data the values of its three tuning coefficients are obtained. It turns out that nitrogen, argon, krypton, xenon, methane, oxygen, and air have the same two coefficients of the model, which result boosts the development of the theory of real gas. Similar equations are obtained for helium, xenon, krypton, and methane. It is shown that in the domain of gas working parameters all thermodynamic properties and caloric characteristics follow from the equation of state, the formulas for calculating these functions are given. The calculated characteristics are compared with standard tabular data; the maximum of the compressibility factor error is 0.05 ... 0.1%. An improved compressibility equation for real gas in a cavity is deduced. Methods for solving algebraic equations for the density and temperature arising at the phases of formation of initial conditions and at integration of the equations of compressibility and continuity are described. Directions of further development of the model and its practical applications are indicated.

Key words: pneumatic control unit, LRE of multiple ignitions, gas-dynamic analysis, real gas, equation of state, compressibility factor.

С. А. ШЕВЧЕНКО, В. І. КОНОХ, Ю. О. МІТІКОВ, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

УНІВЕРСАЛЬНЕ ОРТОМЕТРИЧНЕ РІВНЯННЯ СТАНУ РЕАЛЬНОГО ГАЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У АГРЕГАТАХ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

Для агрегатів пневмоавтоматики ракетної техніки визначена область зміни параметрів робочого тіла й сформульовані вимоги до рівняння стану реального газу, придатному для динамічних розрахунків цих агрегатів. Обрана ортометрична форма шуканого рівняння й отримані значення його настроювальних коефіцієнтів. Наведено формули для розрахунків термодинамічних і калоричних функцій, визначена похибка моделі. Отримано уточнене рівняння стисливості реального газу в порожнині. Зазначено напрямки подальшого розвитку моделі та її практичного застосування.

Ключові слова: агрегат пневмоавтоматики, РРД багаторазового включення, газодинамічний розрахунок, реальний газ, рівняння стану, фактор стисливості.

С. А. ШЕВЧЕНКО, В. И. КОНОХ, Ю. А. МИТИКОВ, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОРТОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В АГРЕГАТАХ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Сформирована унифицированная для всех агрегатов пневмоавтоматики область изменения рабочих параметров газа, ограниченная изохорой, адиабатой и двумя изотермами. Сформулированы требования к уравнению состояния, пригодному для газодинамических расчетов. Выполнен анализ известных уравнений реального газа и указаны причины, по которым они неудобны для использования. Предложено для нового уравнения использовать теорию ортометрических состояний газа и бойлевые масштабы измерения его параметров. Выбрана форма уравнения и, при использовании табличных данных, получены значения трех настроечных коэффициентов. Оказалось, что у азота, аргона, кислорода и воздуха два коэффициента модели одинаковы, и этот результат дает импульс для развития теории реального газа. Аналогичные уравнения получены для гелия, ксенона, криптона и метана. Показано, что в области рабочих параметров газа из уравнения состояния следуют все термодинамические свойства и калорические характеристики, приведены формулы для расчета этих функций. Выполнено сопоставление расчетных характеристик со стандартными табличными данными; максимальная погрешность фактора сжимаемости составила 0.05 … 0.1%. Получено уточненное уравнение сжимаемости реального газа в полости. Описаны методы решения алгебраических уравнений для плотности и температуры, которые возникают при формировании начальных условий и интегрировании уравнений сжимаемости и неразрывности. Указаны направления дальнейшего развития модели и её практических приложений.

Ключевые слова: агрегат пневмоавтоматики, ЖРД многократного включения, газодинамический расчет, реальный газ, уравнение состояния, фактор сжимаемости.

Introduction and formulation of the problem. When developing complex gas-dynamic systems used in liquid-propellant rocket engines (LRE) as well as pneumatic units mathematical modeling of their dynamic characteristics is performed. The modern level of computerization of scientific researches makes it possible to significantly refine the mathematical models of these processes and improve the quality and the reliability of the obtained results. To this end it is necessary to revise and upgrade some of the theoretical principles (for example, the principles describing the properties of a gaseous working fluid), which were set as a basis for calculations more than 50 years ago and with rare exceptions [1, 2], are still being used. First of all it concerns the change of the equation for describing the state of the gas, from which its refined thermodynamic properties taken into account in the calculations will follow.

The domain of working parameters of the gas used in the automation units of rocket technology is shown in Fig. 1; it is bounded by isochore and adiabat from above simulating slow cooling and rapid release of gas from gas bottles, and at the junction point the gas pressure reaches 34 MPa.

Experts are aware of the fact that at such pressures the compressibility factor of the gas specifies the density up to 10–20 %, therefore the further ignoring this factor by the dynamic calculations (possibly acceptable in first-approximation models) a priori causes a distrust towards their results.

© S. A. Shevchenko, V. I. Konokh, YU.A. Mitikov, A. L. Grigoriev, 2018

The equation of state of real gas that solves the indicated problem should be of high accuracy and low complexity (at the level of the well-known *Beatty – Bridgman* [3] or *Novikov – Vukalovich equations* [4]). The error of calculating pressure in the domain of operating parameters should not exceed 0.1 %, which is higher than the capabilities of the models [3, 4]. Moreover the equation of state must hold for all gases listed in Table 1.

Helium is mainly used as a working fluid to control pneumatic valves in rocket technology, since it has the high speed of sound (about 1000 m/s) and provides the minimal duration of transient processes after turning on or off the electromagnetic valves [5]. In Fig. 2, for example, a diagram of a multiple launch system of the LRE installed on the upper stages of launch rocket vehicles is shown. Gas bottle 11 of the pneumatic control unit is filled with helium, and helium or nitrogen pumped into gas bottle 1 can be used for starting-up the turbopump.

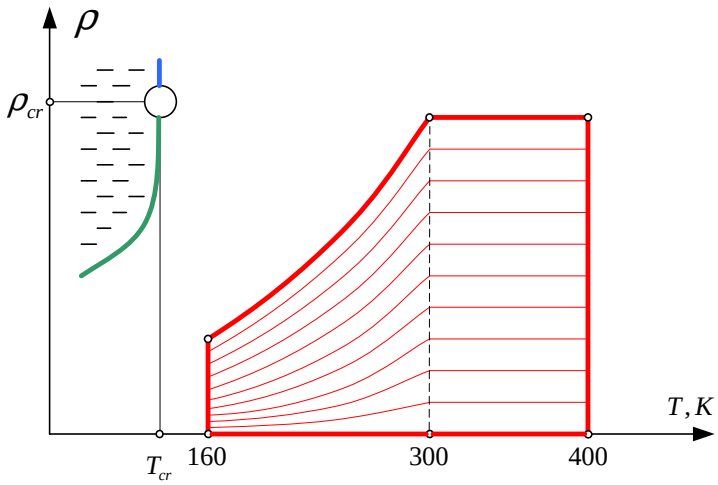


Fig. 1 – Unified domain of gas working parameters for automation units of LRE and inert fluid for spacecraft orientation engines
(here and below ρ – densities; T – temperatures; to the left from the critical point there is the two-phase region).

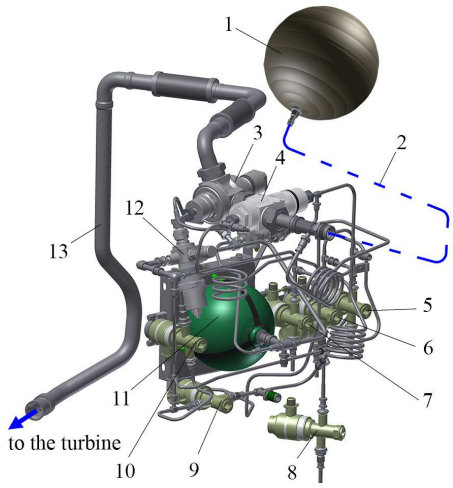
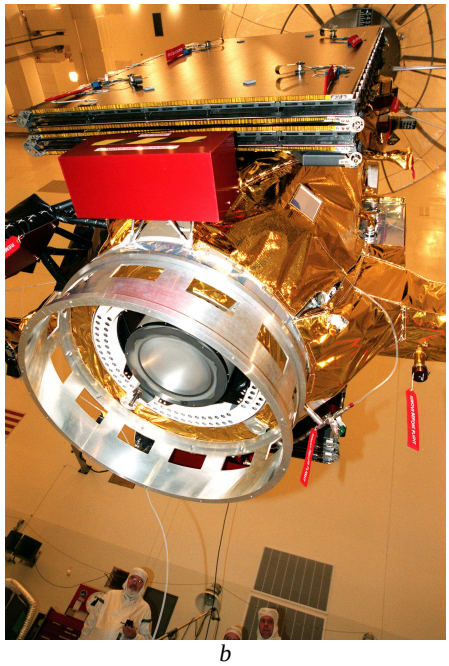


Fig. 2 – Pneumatic starting system of LRE RD861K, Yuzhnoye SDO, UA:
1, 11 – gas bottles; 2, 13 – inlet and outlet pipelines; 3, 12 – pressure regulators; 4 – pneumatic valve; 5 – 10 – electro-pneumatic valves.

a



b

Fig. 3 – Spacecraft Deep Space 1 (NASA, 1998) ion engines using xenon:
a –Deep Space 1 spacecraft against the background of Borelli's comet;
b – preparation for installation in the launch vehicle DELTA II, McDonnell Douglas, USA.

Fig. 4 – The Hall-engine-based Electric Jet Propulsion System (EJPS) is designed for spacecraft orbit correction, stabilization, and interplanetary flights, Yuzhnoye SDO, UA.

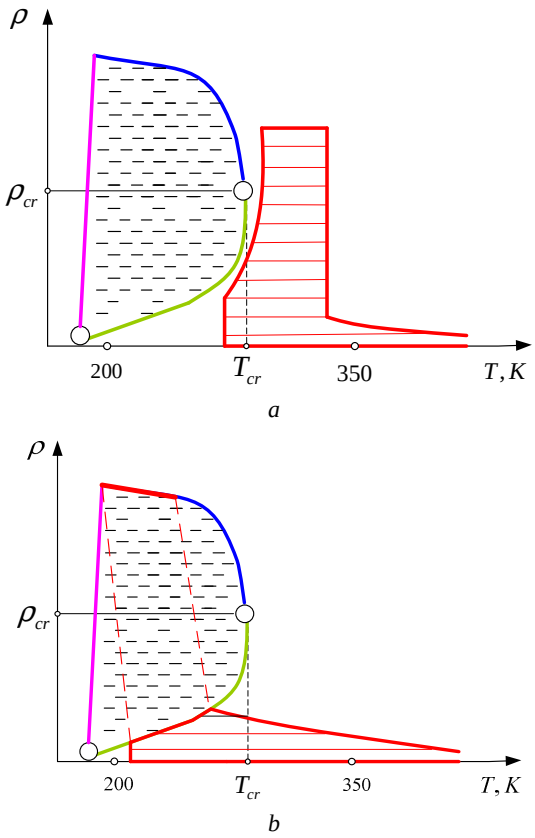


Fig. 5 – Domain of working parameters of xenon for ion (plasma) engine:
a – gas stored at supercritical pressure [7];
b – kept cooled and liquefied at low pressure [8].

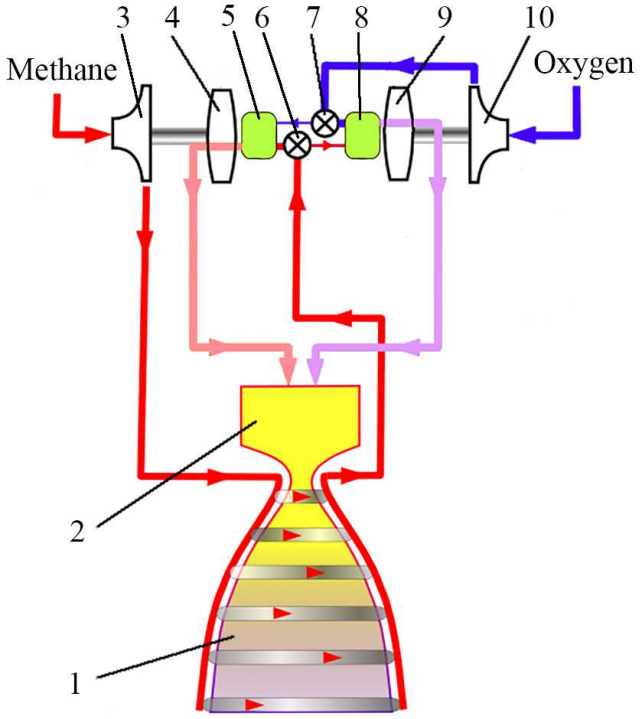


Fig. 6 – Setup of RAPTOR-type LRE:
1 – nozzle; 2 – combustion chamber; 3 – fuel pump;
4, 9 – turbines; 5, 8 – gas generators;
6, 7 – control valves; 10 – oxidizer pump.

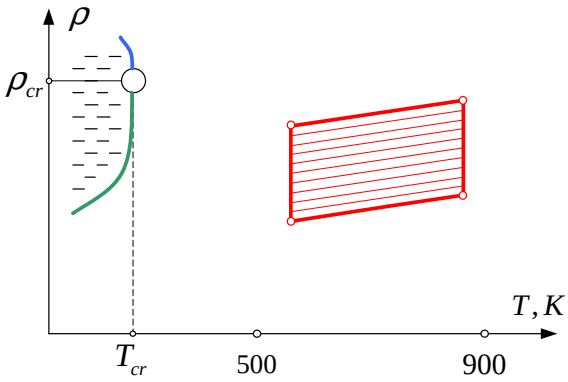


Fig. 7 – Calculated domain of working parameters of methane and oxygen for gasified fuel components of RAPTOR-type LRE.

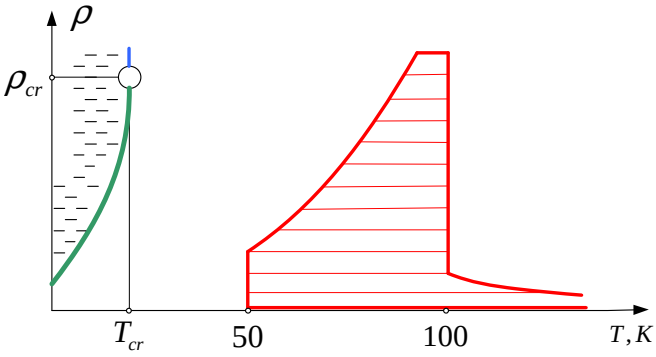


Fig. 8 – Calculated domain of working parameters of helium for system [2] above cold pressurization of tanks of launch vehicle ZENIT, Yuzhnoye SDO, UA.

Table 1 – Basic physical gas constants and critical point parameters

Gas	k	R, $J/(\mathrm{kg}\cdot K)$	ρ_{cr}, kg/m^3	T_{cr}, K	p_{cr}, MPà	z_{cr}
Nitrogen	1.4	296.8	313.1	126.2	3.40	0.2899
Argon	1.667	208.1	535.7	150.7	4.80	0.2857
Helium	1.667	2078	69.64	5.19	0.227	0.3030
Oxygen	1.4	259.8	436.2	154.6	5.04	0.2878
Krypton	1.667	99.22	912.7	209.4	5.49	0.2895
Xenon	1.667	63.33	1109.9	289.7	5.83	0.2863
Methane	1.333	518.3	163.5	190.8	4.63	0.2862
Air	1.4025	287.1	316.5	132.5	3.77	0.3128

In low thrust engines of gas-jet stabilization and orientation systems of spacecrafts compressed argon is used for creating impulse and/or angular momentum. The ignition systems of some LRE operate on an injection of compressed gaseous oxygen, which is stored in their gas bottles the same way as argon. The main physical parameters of the bodies used, such as gas constants R, adiabatic indices k, critical temperatures T_{cr}, densities ρ_{cr}, pressure p_{cr}, and compressibility factor z_{cr}, are listed in Table 1; the critical temperature is below the operating cycle temperatures, which is required for normal operation of the pneumatic system. Due to this and other reasons other gases as well as gas mixtures are not used.

In the laboratory researches of the developed units compressed air is used, that is why its parameters are also listed in Table 1. In addition the same table includes the parameters of krypton and xenon used as working fluids of the electric jet engine ([6], Fig. 3 – 5), and methane used as fuel for the methane-oxygen full-flow staged combustion cycle rocket engine (RAPTOR-type, Fig. 6, 7). Besides the control systems, helium is used to pressurize tanks with liquid fuel components (Fig. 8).

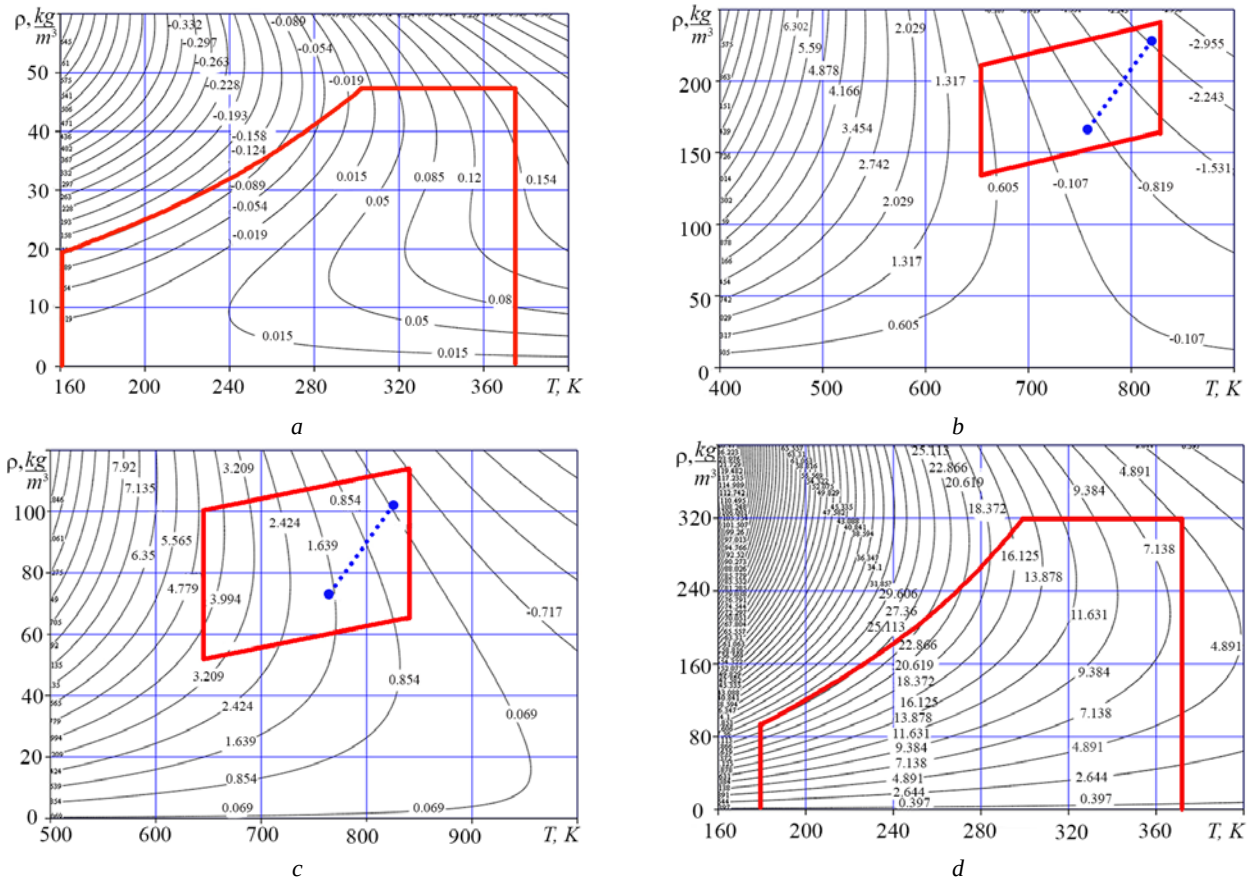


Fig. 9 – Change Abel model of the relative error of calculation z, % : *a* – for helium; *b* – for oxygen; *c* – for methane; *d* – for nitrogen.

Analysis of the known equations of gas state. If the gas has low density $\rho << \rho_k$, then it is in the so-called "ideal gas state" and its thermodynamic properties are described by the *Clapeyron equation*:

$$p = \rho R T,$$

binding pressure p, density ρ, and temperature T, as well as Mayer's formulas for specific heat capacities:

$$c_v = R/(k-1); \quad c_p = k \cdot R/(k-1),$$

and the simplest equation for enthalpy: $h = c_p \cdot T$.

The individual features of the gas are transferred to the model by the values of the first two constants from Table 1 and its equations remain unchanged, which allows using a unified approach to modeling any gaseous fluid.

In work [9] a closed discrete-continual model of the system shown in Fig. 2 is presented. The oscillations of gas parameters in 8 pipelines are simulated using the equations of one-dimensional gas dynamics and changes in gas pressure and temperature in 20 cavities. The parameters of compressed helium used as the working fluid of the pneumatic system are described by the equation of state of ideal gas.

In work [10] this model was refined to take into account the helium compressibility factor z used in the equation:

$$p = z\,\rho\,R\,T\,.$$

It is shown that in the range of operating modes of this system the condition $\rho << \rho_k$ is not fulfilled and in some cavities (for example, in gas bottles) the maximum density reaches the point $0.7\rho_k$. As a result, the factor z changes here within the range 1 ... 1.2, which affects the dynamic characteristics.

For helium the condition $T >> T_k$ holds in all cavities of the system, which means that the gas is in the high-temperature region. That is why to simulate its properties the simplest model of real gas (the *Abel model*, Fig. 9, *a*) is used, in which

$$z = 1/(1-c_2\,\rho) = 1 + b_2\,p/T\,,\quad h = c_p\,T + c_2\,p\,,\quad b_2 = c_2/R\,,\ c_2 = 0.002862\ m^3/kg\ ,$$

and the gas state equation has the form $p/\rho = RT + b_2\,R\,p$.

In work [10], simple formulas were obtained for calculating the speed of sound a in a pipeline and the gas flow rate $\dot{m}_{i,j}$ through throttles taking into account the change in the compressibility factor. In the gas compressibility equation for the i –th cavity of volume V_i the modulus of elasticity and the formula for the energy flow during mass exchange are specified:

$$\frac{V_i\,\dot{p}_i}{k\,z_i\,p_i} = -\dot{V}_i - R\sum\nolimits_j \left[\frac{b_2}{k} + \frac{\sigma_{i,j}}{p_i}\right]\cdot \dot{m}_{i,j} - \frac{(k-1)}{k\,p_i}\cdot \dot{Q}_i\,; \qquad \sigma_{i,j} = \begin{bmatrix} T_i + b_2(1-1/k)\,p_i\,,\ \dot{m}_{i,j} > 0; \\ T_j + b_2(1-1/k)\,p_j\,,\ \dot{m}_{i,j} \le 0, \end{bmatrix} \tag{1}$$

where $\dot{Q}_i$ is the heat flow extending into the cavity walls. In the continuity equation:

$$\dot{m}_i = -\sum\nolimits_j \dot{m}_{i,j}\ , \tag{2}$$

the mass flow $\dot{m}_{i,j}$ is calculated taking into account the amendments to the formulas of Saint-Venant. The temperature is from the closure equation:

$$zT = T + b_2\,p = p/(R\rho)\,, \tag{3}$$

which for this model is linear.

Note that the temperature can be obtained in other way by integrating the energy conservation equation and from (3) the pressure can be found. But this approach is not used for the following reasons:

– it complicates the use of the method of invariants for calculation of pipelines;

– for pipelines of small cross section the equation for energy is replaced by isotherm formulas;

– the compressibility equation is considered to be more trustworthy and its solution is directly controlled in the experiment.

Unfortunately, for other gases from Table 1 the condition $T >> T_k$ is not fulfilled and the Abel model has an inadmissibly high error (Fig. 9, *b* – *d*). At the same time the maximum relative density ρ/ρ_k here is greater than that for helium, and reaches 1 (Fig. 5, *a*, Fig. 8).

For these gases the *Van der Waals model* is more accurate [11], where the dependence of the compressibility factor on density and temperature is the following:

$$z = 1/(1-c_2\,\rho) - a_2\,\rho/T\,.$$

The constants c_2 and a_2 are expressed in terms of the parameters of the critical point (Table 1); that is why using the Van der Waals equations would be a good solution to the problem. However, even for this model at tight densities $\rho \approx \rho_k$ the noticeable deviations of the results from the table values given in monographs [12 – 17] are observed; in addition to this fact the Van der Waals gas has the heat capacity c_v that does not depend on pressure, which is not the case with the real gases from Table 1.

In [12 – 17] alongside the tables describing the thermodynamic properties, the so-called virial equations of real gas are given in the following form:

$$z = 1 + \sum_{i=1,2,\ldots} B_i(T)\rho^i = 1 + \sum_{i=1,2,\ldots}\ \sum_{j=0,1,\ldots} b_{i,j}\,\rho^i T^{-j}\ . \tag{4}$$

These equations approximate the experimental data in a wide range of changing parameters including the area in

Fig. 1. But the sums in (4) contain about 50 terms and it is impossible to reduce this number without a serious loss of accuracy. The closure equation for the temperature T is no longer linear as (3) but of high degree (from 5th for argon to 7th for nitrogen and air) and its solution is laborious. That is why using virial equations for calculating the transient processes is considered irrational.

Analysis of these and many other models of real gas reveals a general pattern – they were compiled for domains rectangular in the coordinates $p-T$ or $\rho-T$. When moving along the upper boundary of such a rectangle the decrease in temperature results in the drop of entropy, and the gas parameters approach the critical values. Then to ensure the high accuracy it is necessary to complicate the equation of state.

In the process of gas consumption from gas bottles the working fluid of the automation units preserves (and with noticeable heat exchange with the walls increases) the initial entropy s_0, which for all gases is higher than the entropy of the critical point. As the result, the adiabat of the upper boundary of the area in Fig. 1 passes further significantly below the critical point.

As a result of the above mentioned facts it is inexpedient to involve well-known models for solving the problem under consideration and it is necessary to develop a new model of real gas which in the best way is going to take into account these features. The authors called this new model *the orthometric high-entropic gaseous fluid* and its equation of state (abbreviated) – the

OGF-equation.

If it turns out that among the thousands of previously proposed equations of state of real gas its complete namesake is found then it will have to be remained but this will not affect the practical significance of the proposed solution.

Orthometric equation of state of real gas. The term orthometric state of gas was introduced into thermodynamics by *A. I. Bachinsky* [18] in the beginning of the 20th century. By orthometric, he understood such combinations of temperature and density for which the compressibility factor z equaled 1.

On the thermodynamic surface of the graph of the function $z = f(\rho, T)$ the condition $z = 1$ is obviously satisfied by the straight line $\rho = 0$, which corresponds to the ideal gas state. And also, what is not obvious but is a firmly established scientific fact, the condition is satisfied by the straight line (Fig. 10)

$$\rho / \rho_b + T / T_b = 1, \tag{5}$$

where T_b is the *Boyle temperature* and the density ρ_b is called the *Boyle density*. Their values are given in Table 2; the values of the associated pressure $p_b = R\rho_b T_b$ and temperature of the inversion T_{in} are also shown there.

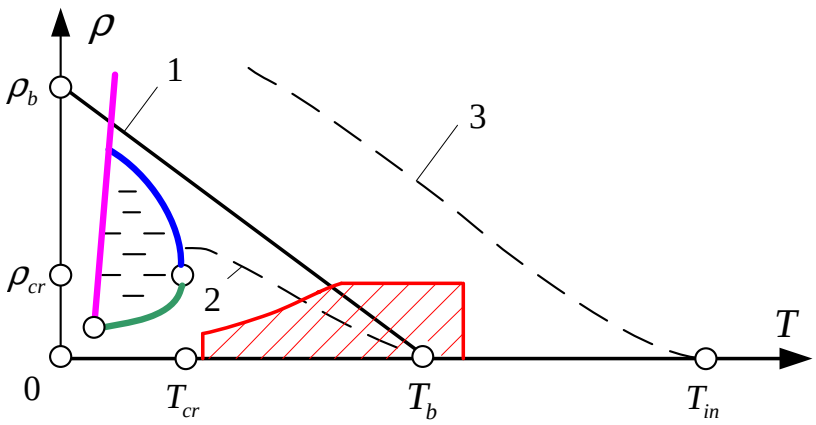


Fig. 10 – "Ideal curves" of a thermodynamic surface: 1 – *ideal gas* ($z = 1$), 2 – *Boyle* ($z'_\rho = 0$), 3 – *Joule – Thomson* ($h'_\rho = 0$).

Bachinsky called the gas satisfying condition (5) an *orthometer* and attributed its equation of state to the *Van der Waals type* since Van der Waals gas turned out to be the simplest orthometric model. All gases from Table 1 are orthometers. The compressibility factor of any gas-orthometer is described by the formula:

$$z = 1 + \psi(\rho, T) \cdot \rho \cdot \left(\rho / \rho_b + T / T_b - 1\right), \tag{6}$$

where the function $\psi(\rho, T)$ takes into account the individual characteristics of the gas and can be determined by processing the results of the experiment.

Acting in a similar way Bachinsky obtained the equations of state for isopentane and ethyloxide. The type of the functions $\psi(\rho, T)$ turned out to be different and was not used by the authors of this work. Bachinsky could not get a one-type equation of state for any class of gases because during his life period the necessary experimental materials were unavailable.

Table 2 – Orthometric scales and inversion temperature

Real gas	T_b, K	ρ_b, kg/m^3	p_b, MPa	T_i, K	$T_b \div T_k$	$\rho_b \div \rho_k$	$T_i \div T_b$
Nitrogen	325.2	1130	109.1	611.1	2.5769	3.6088	1.8792
Argon	408.2	1870	158.9	746.1	2.7089	3.4908	1.8278
Helium	24.21	211.8	10.65	48.4	4.6647	3.0419	1.9356
Oxygen	407.0	1549	163.8	786.6	2.6329	3.5517	1.9327
Krypton	566.6	3232	181.7	1036.4	2.7059	3.5414	1.8292
Xenon	791.0	3892	195.0	1446.9	2.7301	3.5064	1.8292
Methane	507.5	579.1	152.3	1010.0	2.6603	3.5416	1.9771
Air	342.1	1215	119.3	642.8	2.5819	3.8382	1.8790
Van der Waals model	–	–	–	–	2.6667	3.0000	∞

The straight line of orthometric states is now called the *ideal gas curve*, by analogy with the Boyle, Joule – Thomson, etc. curves (Fig. 10), but its deviations from the straight line have not been detected in experiments. The authors [16] believe that its straightness is a consequence of physical law which is yet to be discovered.

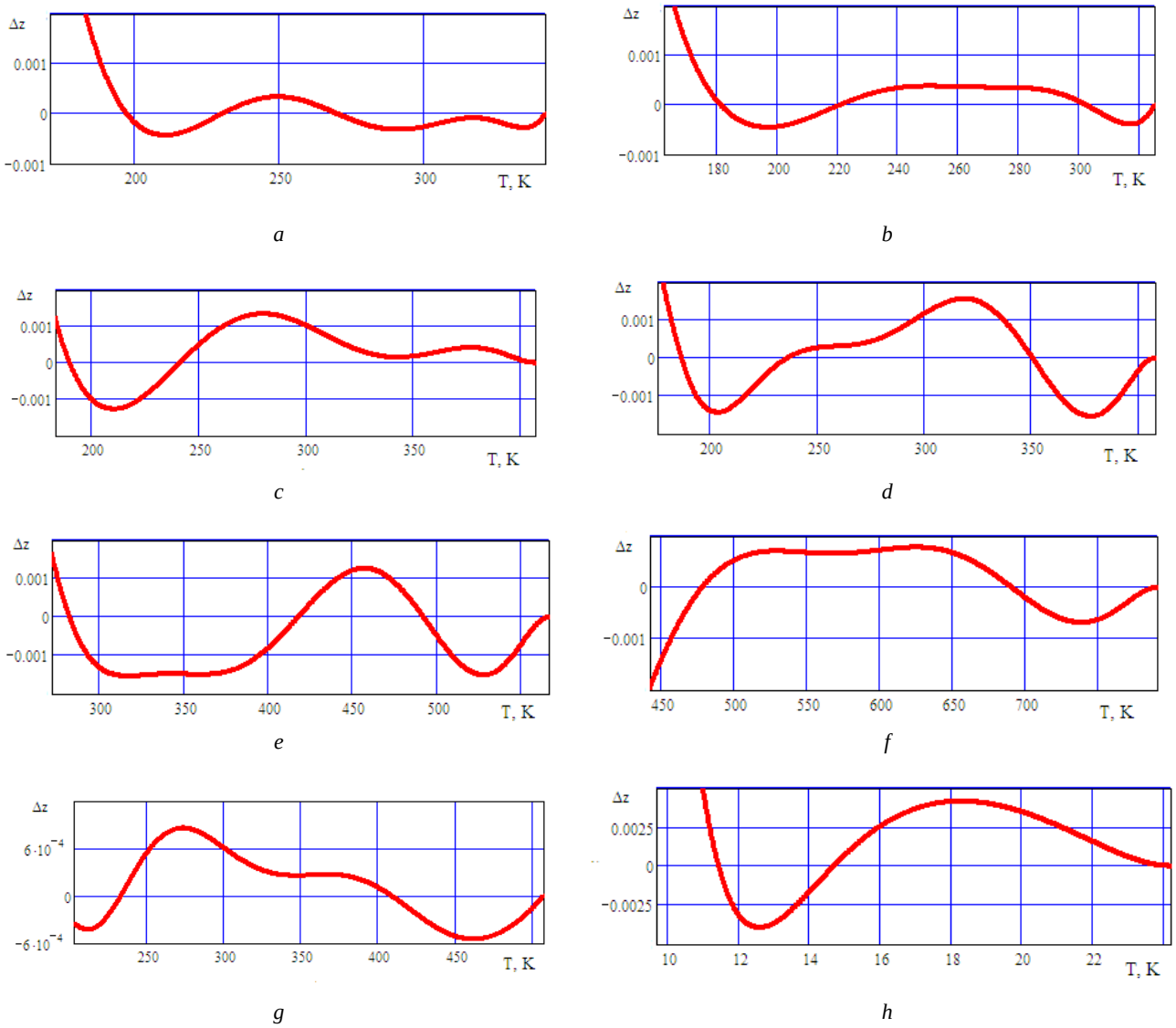


Fig. 11 – Approximation error of the ideal gas curve by virial equations: *a* – for air [13]; *b* – for nitrogen [15]; *c* – for oxygen [14]; *d* – for argon [16]; *e* – for krypton [16]; *f* – for xenon [16]; *g* – for methane [17]; *h* – for helium [12].

As for virial equations (4) from [12 – 17], this condition holds approximately as illustrated in Fig. 11. Moreover, for nitrogen, oxygen, and air, virial coefficients $B_2(T)$ are negative at temperature $T = T_b$. This contradicts the requirements of [18] resulting from the physical meaning of these coefficients and complicates the analysis.

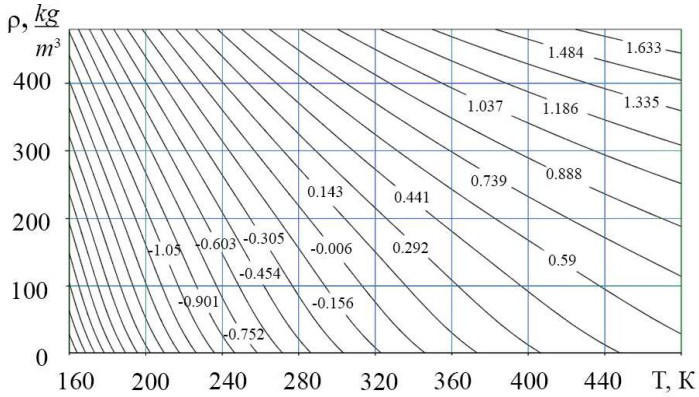


Fig. 12 – Thermodynamic surface level lines $\psi(\rho, T)$ for the virial air equation [13].

In [16], a differential relation between virial coefficients in the vicinity of the Boyle temperature was noted:

$$B_j(T) \approx B_1^{(j-1)}(T) \cdot (T_b / \rho_b)^{j-1} / (j-1)!, \quad j = 2, 3, \ldots . \tag{7}$$

The consistent implementation of this idea leads to an approximate replacement of the thermodynamic surface

$$\psi(\rho, T) = (z(\rho, T) - 1) / \rho$$

by the ruled surface and results in the equality

$$z = 1 + \rho B_1(T + T_b \cdot \rho / \rho_b) . \tag{8}$$

Note that formula (8) is a special case of (6). We believed that with reliable values of the virial coefficient $B_1(T)$ it opened the way to creating the desired equation of state of gas. However, verification of equalities (7) and (8) using the data from works [12 – 17] dispelled these hopes. The accuracy of equality (7) is poor even for $j = 2$ and formula (8) provides a good approximation of the table data only in a small vicinity of the ideal gas curve. Moreover, the best one was the ruled approximation of the surface for argon which is theoretically justified in [16].

The cause of failure lies in the errors of the empirical virial equations obtained in [12 – 17] by the least squares method as well as in the change in the slope of the level lines of the function $\psi(\rho, T)$ (Fig. 12) which is not taken into account in equation (8).

In monograph [16] and in a number of other works, it is hypothesized that if we choose the end points of the ideal gas curve as scale values and change to dimensionless quantities

$$\omega = \rho / \rho_b, \ \theta = T_b / T, \ \pi_b = p / p_b$$

for density, temperature, and pressure, the equations of state of many gases will be the same. But this assumption is exactly fulfilled only for Van der Waals gases, which equation in the new (Boyle) coordinates becomes:

$$z = 1/(1-\omega) - \omega\theta ;$$

or in orthometric form:

$$z = 1 + \frac{1}{1-\omega} \cdot \omega\left(1 - \theta \cdot (1-\omega)\right) . \tag{9}$$

Fig. 13 shows the graphs of virial coefficients $B_1(\theta)$ describing the cross section $\omega = 0$ of the surface of the function

$$\psi(\omega, \theta) = (z(\omega, \theta) - 1) / \omega ,$$

determining the deviation of gas from the ideal state. And Fig. 14 shows the graphs of the functions

$$\Omega_1 = (z(\omega, 1) - 1) / \omega^2 ,$$

which correspond to the cross section $T = T_b$ of the thermodynamic surface for nitrogen, argon, oxygen, and air (the curves coincide for argon, krypton, and xenon).

As one can see there is no complete match, but for the gap $\omega \in (0.07; 0.3)$ in Fig. 14 the differences are leveled by choosing an individual constant d that determines the vertical displacement of the graphs, and for the values $\omega < 0.07$ in calculating the compressibility factor they are insignificant since here $\Omega_1 \cdot \omega^2 \approx 0$ and $z(\omega, 1) \approx 1$. After aligning the curves they are approximated by the dependence

$$y = c / (1 - c \cdot \omega) ,$$

which generalizes the function

$$y = 1/(1-\omega) ,$$

used in (9), and for $\theta \to 0$ provides the same asymptotics as the *Abel model*.

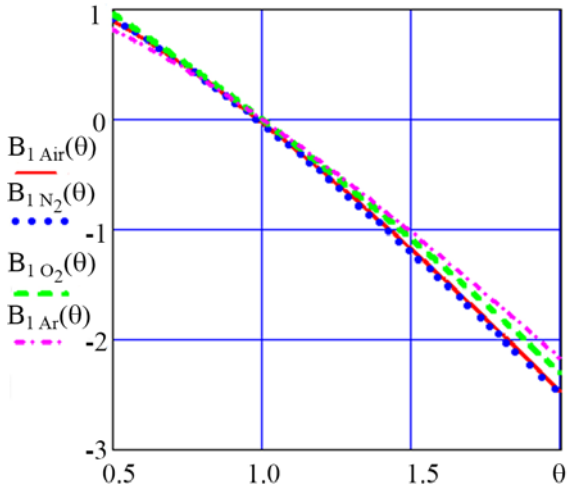


Fig. 13 – Graphs of virial coefficient $B_1(\theta)$ for air, nitrogen, oxygen, and argon.

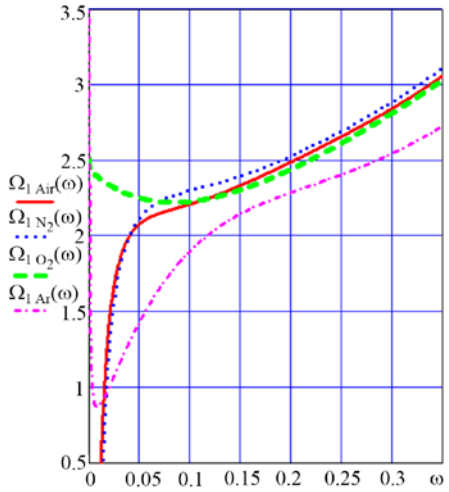


Fig. 14 – Sections $T = T_b$ of thermodynamic surface for air, nitrogen, oxygen, and argon.

The values of the constants d and c are given in Table. 3; it turned out that for the 7 gases the constant $c = 1.278$. The value c' corresponding to the recalculation c on the critical density is also given. For air $c' = 1/3$, which is fully consistent with the theory of the Van der Waals gas, but for the other gases $c' \neq 1/3$. Let us change in (6) to the Boyle coordinates:

$$z = 1 + \psi_b(\omega, \theta)\,\omega\big(1 - \theta \cdot (1 - \omega)\big),$$

where, as follows from the previous argument,

$$\psi_b(\omega, 1) = c / (1 - c\,\omega) + d\,.$$

Based on this result and the known inversion temperatures T_i corresponding to the root of the equation

$$\theta B_1'(\theta) + B_1(\theta) = 0,$$

for all graphs shown in Fig. 6 a one-type approximation is derived:

$$B_1(\theta) \approx (c + d \cdot \theta^{\gamma}) \cdot (1 - \theta), \quad \theta \in (0.5;\, 2),$$

where $\gamma = 0.45$.

Table 3 – Constants of orthometric model

Gas	c	c'	d	γ
Nitrogen	1.278	0.354	0.800	0.45
Argon	1.278	0.366	0.500	0.45
Krypton	1.278	0.361	0.600	0.45
Xenon	1.278	0.365	0.600	0.45
Oxygen	1.278	0.360	0.670	0.45
Oxygen-HT	1.278	0.360	0.765	0.45
Methane	1.278	0.361	0.670	0.45
Methane-HT	1.278	0.361	0.716	0.45
Air	1.278	0.333	0.750	0.45
Helium-LT	0.578	0.190	0.400	0
Helium-HT	0.578	0.190	1.000	1.00

This means that the initial orthometric equation of state of gas has the form:

$$z = 1 + \left[\frac{c}{1 - c\,\omega} + d\,\theta^{\gamma}\right]\omega\big(1 - \theta(1 - \omega)\big). \tag{10}$$

To simplify the solution of the closure equation an approximate replacement is performed in (10):

$$\theta^{\gamma} \approx \gamma \cdot \theta + 1 - \gamma\,. \tag{11}$$

Equation (10) was further tested using amendment (11); it is also recommended for practical use of the model.

The constants for the helium-LT equation (for $T < 50$ K) are given in Table. 3 to compare results and generalizations; in automatic units such temperatures are not realized. A similar equation was obtained for helium-HT in the high-temperature range ($T > 100$ K); its constants are also given in Table. 3

Comparing the results one notes that the values of the approximating coefficients d, γ that simulate the effects of

the association of atoms (formation and decay of short-lived dimers [19]) for helium undergo restructuring in the temperature range of 50 ... 100 K. The coefficient c determining the size of the force field of an individual atom does not change.

A similar restructuring of the model occurs with other gases from Table. 1 at $T > 600 \dots 700$ K, that is why the results obtained cannot be extended to their high-temperature range.

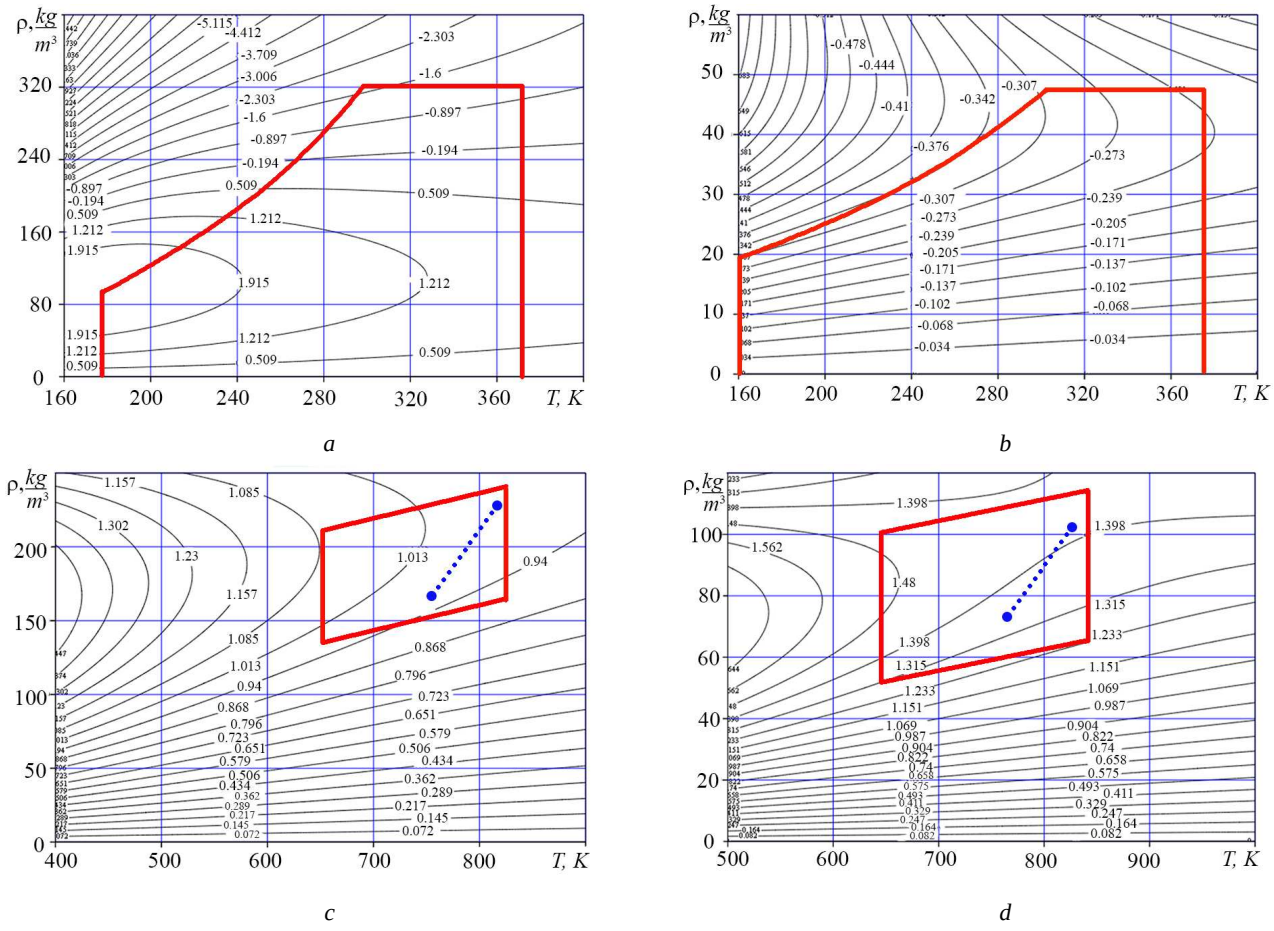


Fig. 15 – Deviations Δk_T of the thermal adiabat index of real gas from the standard value of the indicator k_T, %:
a – for nitrogen; *b* – for helium; *c* – for oxygen; *d* – for methane.

Thermodynamic functions of gas. For helium and argon the heat capacities c_{v0}, c_{p0} in the ideal gas state do not depend on temperature and for nitrogen, oxygen and air in the range $T = 160 \dots 360$ K this dependence is weak and can be ignored. As a result, the known formulas [20] for the calculation of specific heats c_v, c_p and enthalpy h are simplified and take the form:

$$c_v = R \cdot \left[\frac{1}{k-1} + \int_0^{\omega} \theta^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \right]; \quad c_p = c_v + R \cdot \left[z_\theta{}^2 / z_\omega \right]; \quad h = h_0{}^0 + c_{p0} T + (z-1)RT + RT_b \int_0^{\omega} \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{d\omega}{\omega},$$

where $z_\theta = z - \theta \cdot \partial z / \partial \theta$; $z_\omega = z + \omega \cdot \partial z / \partial \omega$; $h_0{}^0$ – sublimation heat; $c_{p0} = k \cdot R / (k-1)$.

For convenience of integration and differentiation equality (10) is reduced to the form:

$$z = \frac{1 - \frac{c-1}{c} \cdot \theta}{1 - c \cdot \omega} + \frac{c-1}{c} \cdot \theta - \omega \cdot \theta + d \cdot \omega \cdot (\gamma \cdot \theta + 1 - \gamma)(1 - \theta + \omega \cdot \theta),$$

which implies

$$z_\theta = \frac{1}{1 - c\omega} + d\omega \cdot \left[\gamma \theta^2 (1-\omega) + 1 - \gamma \right]; \quad z_\omega = 1 - \frac{(c-1) \cdot (2 - c\omega)}{(1 - c\omega)^2} - 2\theta\omega - d\,\omega(\gamma\theta + 1 - \gamma) \cdot (2\omega - 2 - 3\theta\omega);$$

$$\int_0^{\omega} \theta^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = 2\gamma d\, \theta^2 \omega \cdot (1 - \omega/2); \quad \int_0^{\omega} \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \frac{c-1}{c} \cdot \ln \frac{1}{1 - c\omega} - \omega - d\omega \cdot \left[(1 - \omega/2) \cdot (2\gamma\theta + 1 - \gamma) - \gamma \right].$$

Note that in the helium-HT model the coefficients $d, \gamma = 1$ and the results are significantly simplified:

$$z_\theta = \frac{1}{1-c\omega} + \theta^2 \cdot \omega \cdot (1-\omega); \quad z_\omega = 1 - \frac{(c-1)\cdot(2-c\,\omega)}{(1-c\,\omega)^2} - 2\theta\,\omega - \omega \cdot \theta \cdot (2\omega - 2 - 3\theta\,\omega);$$

$$\int_0^\omega \theta^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = 2\theta^2 \omega \cdot (1 - \omega/2); \quad \int_0^\omega \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \frac{c-1}{c} \cdot \ln \frac{1}{1-c\omega} - \omega - \omega \cdot \left[(2-\omega) \cdot \theta - 1 \right].$$

From here the working formulas for calculating the speed of sound a are obtained:

$$a = \sqrt{z_\omega (c_p / c_v) RT}\ ;$$

and two adiabatic indices of real gas [21] are deduced:

$$k_\rho = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{z_\omega}{z}; \; k_T = \frac{(c_p / c_v)\, z_\theta}{z + (c_p / c_v)(z_\theta - z)}.$$

For ideal gas these indices are the same and equal k, and for real gas they are different and satisfy two differential adiabatic equations of different form:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{k_\rho} \cdot \frac{dp}{p}; \quad \frac{dT}{T} = \frac{k_T - 1}{k_T} \cdot \frac{dp}{p}.$$

For the range of gas working parameters the indicator k_ρ varies widely and its change must be taken into account. Whereas the indicator k_T deviates from the value k no more than by 2 % (for helium – by 0.4 %) which can be neglected (Fig. 15). For this reason to calculate the gas flow through the throttle at critical pressure drops one can use the theory described in [10] and keep common with [1] recommendation to include a correction factor of the type $1/\sqrt{z}$ in the *Saint-Venant formula*. The same correction can be applied in the case of non-critical pressure drops, taking into account the known errors of the flow coefficients.

The errors of the model. To test the OGF-equation, its thermodynamic functions were compared with tabular data from [12 – 17], and from [22] for argon, which defined the standards of the USSR and the USA. The mean (in absolute value) relative deviations of the compressibility factor δz, specific enthalpy δh, and speed of sound δa were calculated for 200 points from the domain of working parameters located on 10 polygonal chains (Fig. 1). The results are shown in Table. 4.

Table 4 – Average deviations from standard values, %

Gas	δz	δh	δa
Nitrogen	0.068	0.054	0.125
Argon	0.156	0.233	0.157
Oxygen	0.091	0.059	0.233
Air	0.067	0.040	0.082
Helium	0.032	0.041	0.057

In addition to the mean values the maximum deviations were controlled which turned out to be as small as the mean ones. The nature of the change of z error for nitrogen, methane, oxygen, and helium is shown in Fig. 16. The boundary of the domain of working parameters is superimposed on the level lines. Within this domain the deviations do not exceed ± 0.1 % but at low temperatures and high densities (where the gas entropy is significantly lower than the value s_i) they are large. Here the shape of the line of the error level is close to the adiabatic graph, which is the line of the entropy level. That is why it should be recognized that in order to maintain the high accuracy of the model it is the decrease in entropy that requires the complication of the equation of state of real gas.

The lowest error values for the OGF-equation were shown for helium; compared with the model of Abel, they decreased by an order of magnitude.

Note that the tabular data have their own errors as shown for example in Fig. 15. The greatest errors are observed in argon, which is explained by the smaller amount of experimental material. But even here the situation is improving and if the virial equations [16, 1975] and the US standard [22, 1999] are compared, the discrepancy (we are sure that the refinement) of the results averaged for the parameter range under research is:

$$\delta z = 0.064\ \%, \quad \delta h = 0.051\ \%, \quad \delta a = 1.22\ \%.$$

It should be noted that the OGF-equation has a calculated critical point at which the pressure is overestimated by about 20 %. This point corresponds to the critical compressibility factor $z_{cr} \approx 0.35$ which is 15 % higher than for real gas but lower than the value $z_{cr} = 0.375$ for Van der Waals gas. In the vicinity of the critical point the developed model

cannot be used but, as a rule, pneumatic automation units are not designed to work with a two-phase working fluid.

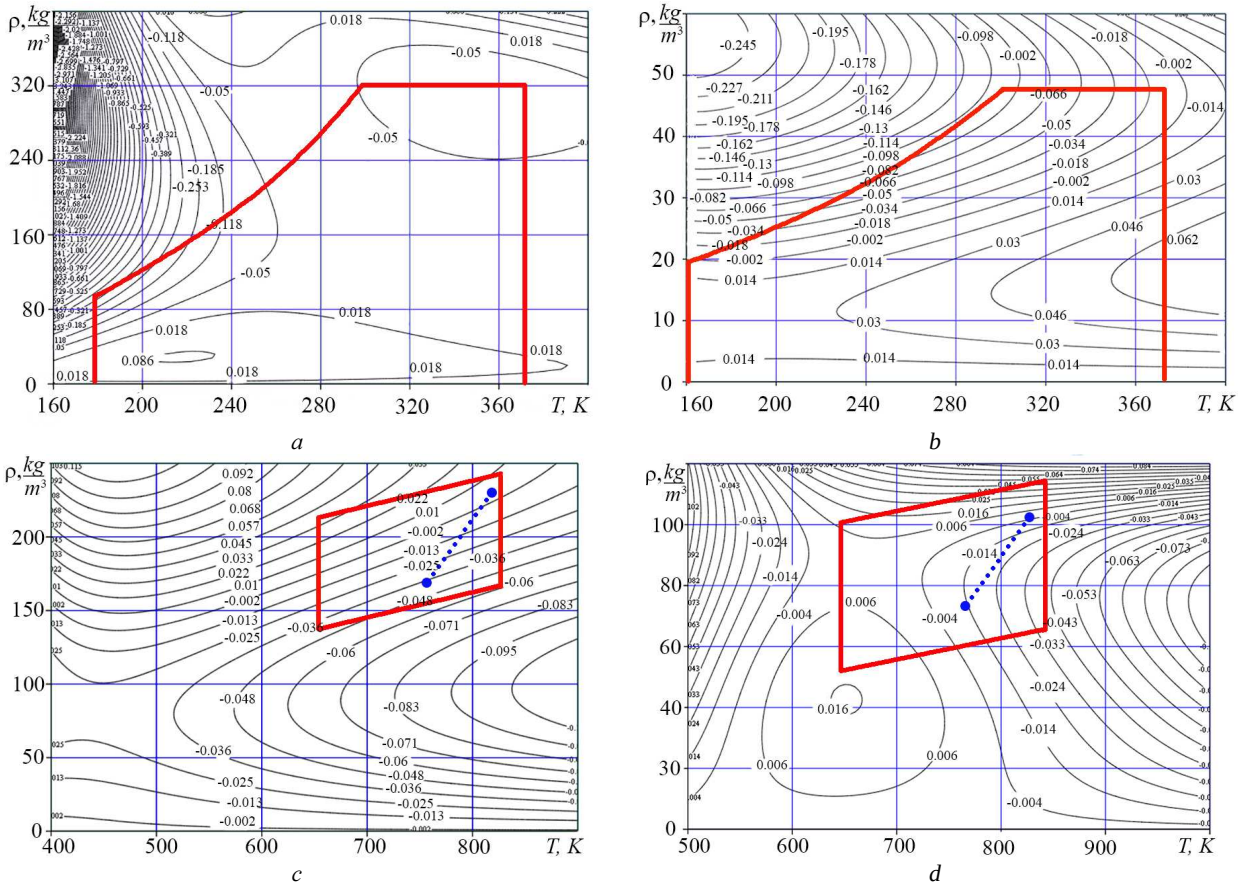


Fig. 16 – Change of the relative error of calculation z,%: *a* – for nitrogen; *b* – for helium-HT; *c* – for oxygen-HT; *d* – for methane-HT
(the dotted line indicates the change of gas parameters in the turbopump assembly of the engine RAPTOR, SpaceX, USA).

The compressibility equation of real gas. Its formal derivation uses the equation of state and the first law of thermodynamics; we show its main points. The equation of state in differentials is:

$$\frac{dp}{p} = \frac{z_\omega}{z} \cdot \frac{d\rho}{\rho} + \frac{z_\theta}{z} \cdot \frac{dT}{T},$$

where z_θ / z is the change in the thermal pressure coefficient and the ratio z_θ / z_ω describes the change in the coefficient of volumetric expansion.

On a short time interval any gas-dynamic process can be considered as the result of superposition of the adiabatic and isochoric processes. For adiabat and isochore we get

$$\frac{dp_{ad}}{k_\rho p} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dp_{is}}{k_\rho p} = \frac{z_\theta}{k_\rho z T} \cdot \frac{\Delta h \cdot dm - dQ}{c_v m},$$

where Δh is the difference of specific enthalpies between the gas in the cavity and the gas of small mass dm participating in the exchange; dQ is a small portion of heat going into the wall; m is the mass of gas in the cavity.

We add the left and right sides of the equations:

$$\frac{dp}{k_\rho p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{z_\theta}{k_\rho c_v} \cdot \frac{\Delta h \cdot dm - dQ}{zmT}.$$

Analyzing the coefficients of the resulting equation we note that

$$zMT = \frac{pV}{R}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - \frac{dV}{V}, \quad \frac{z_\theta}{c_v k_\rho} = \frac{k_T - 1}{R k_T},$$

besides it is permissible to assume that $k_T = k$. As a result, for i – th cavity we get the equality:

$$\frac{V_i \cdot \dot{p}_i}{k_{\rho.i} \cdot p_i} = -\dot{V}_i + \frac{\dot{m}_i}{\rho_i} - \frac{k-1}{k \cdot p_i}\left(\sum_j \Delta h_{i,j} \cdot \dot{m}_{i,j} + \dot{Q}_i\right), \qquad (12)$$

which is a generalization of equation (1).

When using equation (12), the heat of sublimation $h_0{}^0$ in the formula for calculating the specific enthalpy is not taken into account because it does not affect the value of the enthalpy difference $\Delta h_{i,j}$ between $i-$th and $j-$th cavities.

Solutions of closure equations. In Boyle coordinates pressure, density, and temperature are related by the equation

$$\frac{\pi_b \theta}{\omega} = 1 + \left[\frac{c}{1 - c\,\omega} + \gamma d\,\theta + (1-\gamma) d \right] \omega \left(1 - \theta(1-\omega)\right). \tag{13}$$

Algebraic form (13) of the gas state equation is used in the method of dynamic calculation of the system for forming the initial conditions and numerical integrating the equations.

The initial conditions for each cavity are pressure p and temperature T, thus $\pi_b = p / p_b$ and $\theta = T_b / T$ and the density $\rho = \omega \rho_b$ is determined from equation (13). After elementary transformations we get the equation:

$$A\omega^4 + B\omega^3 + C\omega^2 + D\omega + E = 0 \tag{14}$$

with known coefficients A, B, C, D, E.

Algebraic equation (14) is solved by either using the poliroots procedure of the Mathcad package or in the iterative cycle:

$$\omega_0 = 0;\ \omega_{j+1} = -\frac{E + A\omega_j{}^4 + B\omega_j{}^3 + C\omega_j{}^2}{D},\ j = 0, 1, 2 \ldots .$$

To achieve the required accuracy it is necessary to have 10 iterations. Since the initial conditions are determined here, this task does not affect the overall complexity of the calculation method of the pneumatic system.

After integrating the differential equations in the Boyle values of pressure π_b and density ω, from equation (13) the temperature is found. Thanks to approximation (11) this equation for θ turns out to be quadratic, the positive root corresponds to the initial temperature. The simple solution of the problem, which is repeated millions of times for each cavity during the simulation of the pneumatic system, allows to escape the complexity of the calculation algorithm.

Perspectives of further research. The OGF-equation and its thermodynamic functions are used by the Yuzhnoye State Design Office for developing the new automation units for rocket technology; results valuable for science and practice will be published.

To simulate the conditions of super cold supercharging [2] of the fuel tanks of the Zenit-type launch vehicle the orthometric equation of state is refined to expand its field of use. Similar works concern the refinement of xenon orthometric equations which are relevant for the storage of this working fluid in a cooled liquefied state.

The third perspective direction is the development of similar equations for gas mixtures arising from gasification of oxygen and methane in the gas generators of the Raptor engine.

Besides, the orthometric equations of methane and its mixtures can be used in calculating the equipment used in the transportation of natural gas via high-pressure pipelines. Newly developed space scientific technologies need to be useful in solving problems on the Earth.

Conclusions. The domain of variation of the working fluid parameters for pneumatic automation units is formed and the requirements for the equation of real gas suitable for dynamic calculations are formulated.

The analysis of the known equations of state of real gas is performed and the reasons for which they cannot be used to solve the indicated problem are shown.

It is proposed to use the theory of A. I. Bachinsky of orthometric states of gas and the Boyle scaling of its parameters for obtaining a new equation.

The form of the initial equation is chosen and by using tabular data the values of its coefficients are obtained. It turnes out that nitrogen, argon, krypton, xenon, oxygen, methane, and air have two same coefficients of the model (out of three) and this new result gives impetus to the development of the theory of real gas.

It is shown that in the domain of variation of the working fluid parameters all thermodynamic properties including caloric characteristics follow from its equation of state and simple formulas for calculating these functions are given.

The calculated characteristics of gas are compared to the tabular data; the average and maximum error do not exceed 0.1 %.

A refined equation of the compressibility of real gas in a cavity is obtained and the methods for solving the closure equations for density and temperature arising at the stages of the formation of initial conditions and integration of the compressibility and continuity equations are described.

Bibliography

1. *Присняков В. Ф., Галась М. И., Логвиненко А. И., Мосейко В. А.* Определение параметров газа при опорожнении емкости с учетом сжимаемости и сопротивления магистрали // Проблемы высокотемпературной техники. Сб. н. тр. – Днепропетровск, 1981. – С. 86 – 94.
2. *Митиков Ю. А.* Математическое моделирование параметров сверххолодной системы наддува топливного бака с керосином // Космічна наука і технологія. – 2015. – Т. 21. – №5. – С.43 – 47.
3. *Beattie J. A., Bridgeman O. C.* A New Equation of State for Fluids. I. Application to Gaseous Ethyl Ether and Carbon Dioxide // Journal of the

American Chemical Society. – 1927. – vol. 49. – С. 1665 – 1667.
4. *Вукалович М. П.*, *Новиков И. И.* Уравнение состояния реальных газов. – М.–Л. : Госэнергоиздат, 1948. – 340 с.
5. *Шевченко С. А.* Экспериментальное исследование динамических характеристик регулятора давления газа в системе запуска ЖРД многократного включения // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : Сб. науч. тр. – Харьков: «ХАИ», 2015. Вып. 4 (84). – С. 49 – 68.
6. *Важенин Н. А.*, *Обухов В. А.*, *Плохих А. П.*, *Попов Г. А.* Электрические ракетные двигатели космических аппаратов и их влияние на радиосистемы космической связи. – М. : Физматлит, 2013. – 432 с.
7. *Снытко А. В.*, *Кравченко И. А.*, *Ладыгин А. П.*, *Бородин Л. М.* Проблемы разработки блока подачи ксенона для системы коррекции с апогейной двигательной установкой космического аппарата // Решетневские чтения. Сборник трудов. – Красноярск, 2015. – С. 134 – 136.
8. Валентьян Доминик (FR). Патент RU2529084C2. Система хранения криогенной жидкости для космического аппарата. – 2014.
9. *Шевченко С. А.*, *Григорьев А. Л.*, *Степанов М. С.* Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 7(124). – С. 100 – 110.
10. *Шевченко С. А.*, *Митиков Ю. А. Григорьев А. Л.* Особенности расчета агрегатов автоматики пневмосистем ракетной техники при учете фактора сжимаемости гелия // Вестник двигателестроения. – 2016 – № 2 – С. 148 – 159.
11. *Кириллин В. А.*, *Сычев В. В.*, *Шейндлин А. Е.* Техническая термодинамика. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 416 с.
12. *Сычев В. В. Вассерман А. А.*, *Козлов А. Д.*, *Спиридонов Г. А.*, *Цымарный В. А.* Термодинамические свойства гелия. – М. : Изд-во стандартов, 1984. – 320 с.
13. *Сычев В. В. Вассерман А. А.*, *Козлов А. Д.*, *Спиридонов Г. А.*, *Цымарный В. А.* Термодинамические свойства воздуха. – М. : Изд-во стандартов, 1978. – 276 с.
14. *Сычев В. В. Вассерман А. А., Козлов А. Д., Спиридонов Г. А., Цымарный В. А.* Термодинамические свойства кислорода. – М. : Изд-во стандартов, 1981. – 304 с.
15. *Сычев В. В. Вассерман А. А.*, *Козлов А. Д.*, *Спиридонов Г. А.*, *Цымарный В. А.* Термодинамические свойства азота. – М. : Изд-во стандартов, 1977. – 352 с.
16. *Рабинович В. А.*, *Вассерман А. А.*, *Недоступ В. И.*, *Векслер Л. С.* Теплофизические свойства неона, аргона, криптона и ксенона. – М. : Изд-во стандартов, 1975. – 636 с.
17. *Сычев В. В. Вассерман А. А.*, *Загорученко В. А.*, *Козлов А. Д.*, *Спиридонов Г. А.*, *Цымарный В. А.* Термодинамические свойства метана. – М. : Изд-во стандартов, 1979. – 348 с.
18. *Бачинский А. И.* Избранные труды. – М. : Изд-во АН СССР, 1960 – 414 с.
19. *Мейсон Э.*, *Сперлинг Т.* Вириальное уравнение состояния. – М. : Мир, 1972. – 280 с.
20. *Шехтман А. М.* Газодинамические функции реальных газов : Справочник. – М. : Энергоатомиздат, 1988 – 175 с.
21. *Истомин В. А.* Показатели изоэнтропы реального газа : особенности их применения в термогазодинамике // Журнал физической химии. – 1998. – Т. 72. – № 3. – С. 409 – 415.
22. Tegeler Ch., Span R., Wagner W. A New Equation of State for Argon Covering the Fluid Region for Temperatures from the Melting Line to 700 K at Pressures up to 1000 MPa // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 1999. – vol. 28(3). – P. 779 – 850.

References (transliterated)

1. Prisnyakov V. F., Galas' M. I., Logvinenko A. I., Moseyko V. A. Opredelenie parametrov gaza pri oporozhnenii emkosti s uchetom szhimaemosti i soprotivleniya magistrali [Determining parameters of gas during draining taking into account line compressibility and resistance]. *Problemy vysokotemperaturnoy tekhniki*. *Sb*. *nauch*. *tr*. [Problems of high-temperature equipment. Collection of scientific works]. Dnepropetrovsk, 1981, pp. 86–94.
2. Mitikov Ju. A. Matematicheskoe modelirovanie parametrov sverkhkholodnoy sistemy nadduva toplivnogo baka s kerosinom [Mathematical modeling of kerosene fuel tank super cold pressurization system parameters]. *Kosmichna nauka i tekhnologiya* [Space science and technology]. 2015, vol. 21, no. 5, pp. 43–47.
3. Beattie J. A., Bridgeman O. C. A New Equation of State for Fluids. I. Application to Gaseous Ethyl Ether and Carbon Dioxide. *Journal of the American Chemical Society*. 1927, vol. 49, pp. 1665–1667.
4. Vukalovich M. P., Novikov I. I. *Uravnenie sostoyaniya real'nykh gazov* [The equation of state for real gases]. Moscow – Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1948. 340 p.
5. Shevchenko S. A. Eksperimental'noe issledovanie dinamicheskikh kharakteristik regulyatora davleniya gaza v sisteme zapuska ZhRD mnogokratnogo vklyucheniya [Experimental research and adjustment of dynamic characteristics of the gas pressure regulator for startup system of the multiple run LRE]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktsii letatel'nykh apparatov*. *Sb*. *nauch*. *tr*. [Problems of design and production of spacecraft units. Collection of scientific works]. Kharkiv, Nac. Aerokosm. Un-t «KhAI» Publ., 2015, no. 4 (84), pp. 49–68.
6. Vazhenin N. A., Obukhov V. A., Plokhikh A. P., Popov G. A. *Elektricheskie raketnye dvigateli kosmicheskikh apparatov i ikh vliyanie na radiosistemy kosmicheskoy svyazi* [Electric rocket engines of spacecrafts and their influence on the radio systems of space communications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013. 432 p.
7. Snytko A. V., Kravchenko I. A., Ladygin A. P., Borodin L. M. Problemy razrabotki bloka podachi ksenona dlya sistemy korrektsii s apogeynoy dvigatel'noy ustanovkoy kosmicheskogo apparata [Problems of developing a xenon supply unit for a correction system with the apogee propulsion system of a spacecraft]. *Reshetnevskie chteniya*. *Sbornik trudov* [Reshetnev readings. Collection of papers]. Krasnoyarsk, 2015. pp.134–136.]
8. Valentian Dominiqu (FR). *Cryogenic Liquid Storage System for a Spacecraft*. Patent US2010/0000232 A1, 2010.
9. Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchete teploobmena gaza so stenkami polostey i utochnenii sil, deystvuyushhikh na klapany regulyatorov [Modeling the LRE pneumatic starting system taking into account the heat exchange between gas and cavity walls and specifying the forces acting on the regulator poppets]. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aviation and space equipment and technology]. 2015, no. 7(124), pp. 100–110.
10. Shevchenko S. A., Mitikov Yu. A., Grigor'ev A. L. Osobennosti rascheta agregatov avtomatiki pnevmosistem raketnoy tekhniki pri uchete faktora szhimaemosti geliya [Features of computing control units of rocketry pneumatic systems with allowance for the helium compressibility factor]. *Vestnik dvigatelestroeniya* [Bulleting of drive engineering]. 2016, no. 2, pp. 148–159.
11. Kirillin V. A., Sychev V. V., Sheyndlin A. E. *Tekhnicheskaya termodinamika* [Engineering thermodynamics]. Moscow, Jenergoatomizdat Publ., 1983. 416 p.
12. Sychev V. V., Vasserman A. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva geliya* [Thermodynamic properties of helium]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1984. 320 p.
13. Sychev V. V., Vasserman A. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva vozdukha* [Thermodynamic properties of air]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1978. 276 p.
14. Sychev V. V., Vasserman A. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva kisloroda* [Thermodynamic properties of oxygen]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1981. 304 p.
15. Sychev V. V., Vasserman A. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva azota* [Thermodynamic properties of nitrogen]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1977. 352 p.

16. Rabinovich V. A., Vasserman A. A., Nedostup V. I. *Teplofizicheskie svoistva neona, argona, kriptona i ksenona* [Thermodynamic properties of neon, krypton and xenon]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1975. 636 p.
17. Sychev V. V., Vasserman A. A., Zagorutschenko V. A., Kozlov A. D., Spiridonov G. A., Tsymarny V. A. *Termodinamicheskie svoystva metana* [Thermodynamic properties of methane]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1979. 348 p.
18. Bachinskiy A. I. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR Publ., 1960. 414 p.
19. Meyson E. A., Sperling,T. H. *Virtual'noe uravnenie sostoyaniya* [Virial state equation]. Moscow, Mir Publ., 1972. 280 p.
20. Shekhtman A. M. *Gazodinamicheskie funktsii real'nykh gazov : Spravochnik* [Gasdynamic functions of real gases: reference]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988. 175 p.
21. Istomin V. A. Pokazateli izoentropy real'nogo gaza : osobennosti ikh primeneniya v termo-gazodinamike [Isentrope indicators of real gas: features of their application in thermogasdynamics]. *Zhurnal fizicheskoy khimii* [Journal of physical chemistry]. 1998, vol. 72, no. 3, pp. 409–415.
22. Tegeler Ch., Span R., Wagner, W. A New Equation of State for Argon Covering the Fluid Region for Temperatures from the Melting Line to 700 K at Pressures up to 1000 MPa. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1999, 28(3), pp. 779–850.

Received (надійшла) 08.09.2018

Information about authors / Відомості про авторів / Сведения об авторах

Shevchenko Sergey Andreevich (Шевченко Сергій Андрійович, Шевченко Сергей Андреевич) – candidate of technical sciences, leading scientific worker at the Department of LRE Control Units, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro; e-mail: info@yuzhnoe.com.

Konokh Vladimir Ivanovich (Конох Володимир Іванович, Конох Владимир Иванович) – candidate of technical sciences, head of the Department of LRE Control Units, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro; e-mail: info@yuzhnoe.com.

Mitikov Yurii Alekseevich (Мітіков Юрій Олексійович, Митиков Юрий Алексеевич) – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of Rocket Engines, Oles Gonchar Dnipro National University, Dnipro; e-mail: mitikov2017@gmail.com.

Grigoriev Alexandr L'vovich (Григор'єв Олександр Львович, Григорьев Александр Львович) – doctor of technical sciences, professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

УДК 539.3

Е. Г. ЯНЮТИН, Г. А. ГНАТЕНКО, П. А. ЕГОРОВ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Предложен метод идентификации нестационарной нагрузки, воздействующей на шарнирно-опертые подкрепленные цилиндрические оболочки. Рассмотрены два случая: подкрепление деформирующегося объекта по всей длине охватывающей оболочкой, подкрепление ребрами жесткости, ширина которых мала по сравнению с длиной оболочки. В качестве вспомогательного этапа решения основной задачи приводится решение прямой задачи по исследованию деформированного состояния системы, достоверность которого подтверждается путем сопоставления с МКЭ. Достоверность решения задачи идентификации подтверждена путем сопоставления с исходными данными соответствующей прямой задачи. Интегральные уравнения Вольтерра, получаемые при решении задач, анализируются численно. Некорректность поставленных задач преодолевается с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: оболочка, ребро жесткости, условие контакта, ряд Фурье, преобразование Лапласа, метод регуляризации.

Є. Г. ЯНЮТІН, Г. О. ГНАТЕНКО, П. А. ЄГОРОВ

НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Запропоновано метод ідентифікації нестаціонарного навантаження, яке діє на шарнірно-обперті підкріплені циліндричні оболонки. Розглянуто два випадки: підкріплення об'єкту, що деформується, за всією довжиною оболонкою, що охоплює дану, підкріплення ребрами жорсткості, ширина котрих є малою у порівнянні з довжиною оболонки. У якості допоміжного етапу розв'язку основної задачі наводиться розв'язок прямої задачі з дослідження деформованого стану системи, достовірність якого підтверджується шляхом зіставлення з МСЕ. Достовірність розв'язку задачі ідентифікації підтверджена шляхом зіставлення з вихідними даними відповідної прямої задачі. Інтегральні рівняння Вольтерра, які отримані при розв'язку задач, аналізуються чисельно. Некоректність поставлених задач долається за допомогою методу регуляризації А. Н. Тихонова.

Ключові слова: оболонка, ребро жорстокості, умова контакту, ряд Фур'є, перетворення Лапласа, метод регуляризації.

YE. G. YANYUTIN, G. A. GNATENKO, P. A. YEGOROV

NONSTATIONARY DEFORMATION OF REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS

The article suggests a method of identifying nonstationary load acting on hinged reinforced cylindrical shells. Two cases are considered: reinforcement of a deformable object along the entire length with enclosing shell, reinforcement with stiffeners whose width is small compared to the length of the shell. As a substep of solving the main problem, the solution of the direct problem of studying the deformed state of the system is given. The reliability of solving the direct problem is confirmed by comparison with FEM. The reliability of the identification problem solution is confirmed by comparison with the initial data for the corresponding direct problem. Volterra integral equations obtained in the process of solving the problems are numerically analyzed. The ill-posedness of the problem is succeeded with using Tikhonov's regularization method.

Key words: shell, stiffener, contact condition, Fourier series, Laplace transformation, regularization method.

© Е. Г. Янютин, Г. А. Гнатенко, П. А. Егоров, 2018

Введение. Зачастую в процессе проектирования различных конструкций, в частности оболочечного типа, возникают вопросы правильного выбора величины и характера изменения во времени воздействующих нагрузок, которые, как правило, являются неизвестными. Их знание позволяет уже на стадии создания конструкции произвести прочностной расчет в полном объеме и установить наиболее удачные параметры исследуемой конструкции с целью обеспечения заданной прочности, несущей способности и долговечности. Упомянутое приводит к необходимости решения так называемых обратных задач, а именно задач, заключающихся в обращении причинно-следственных связей между деформациями и нагрузками.

Современные математические методы и вычислительная техника позволяют решать весьма сложные обратные задачи. Однако, принципиальные трудности, возникающие в процессе решения таких задач, требуют разработки специальных подходов и методов их исследования. Разработке методов решения обратных задач в области нестационарной механики деформируемого твердого тела для конструкций в виде подкрепленных оболочек и посвящено данное исследование.

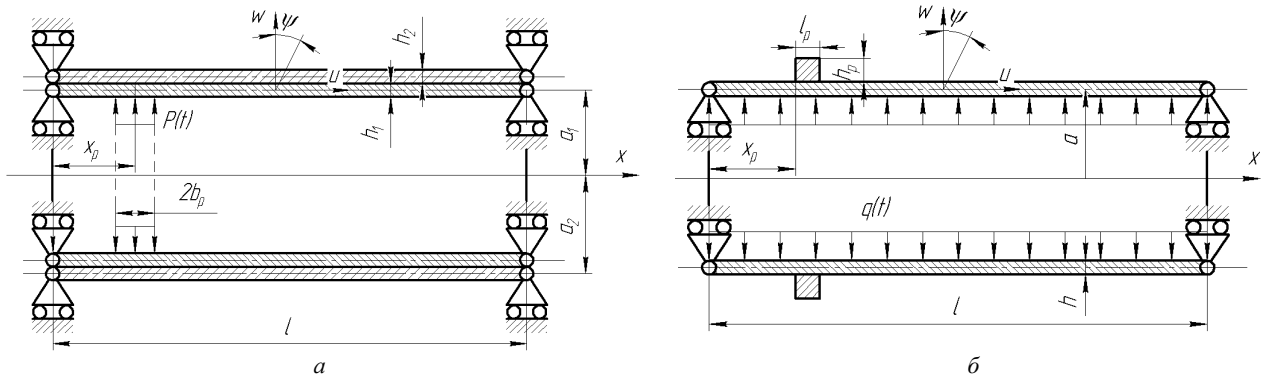
Анализ последних исследований. Решение многих практических задач, связанных с исследованием динамического деформирования оболочек, приведено в монографии [1]. Авторами исследованы проблемы нестационарной динамики конструктивно неоднородных оболочечных конструкций: оболочки с отверстиями, дискретно подкрепленные оболочки, многослойные оболочки, оболочки с жидкостью. Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния при нестационарных осесимметричных и неосесимметричных нагрузках в широком диапазоне изменений геометрических и физико-механических параметров объектов. Рассмотрены различные численные алгоритмы решения начально-краевых задач теории подкрепленных оболочек и приведены численные результаты по динамическому деформированию указанных конструкций.

В публикациях [2, 3, 4] приведены результаты исследований динамики оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. С применением различных моделей исследовано нестационарное деформирование взрывных камер.

Значительное число исследований, направленных на решение прямых и обратных задач, содержится в монографиях [5, 6]. Развитие методов идентификации нестационарных нагрузок, воздействующих на различные механические объекты, в особенности составные и подкрепленные, представляет значительный интерес.

Постановка задачи. Рассмотрим процесс деформирования подкрепленных изотропных круговых цилиндрических оболочек. В первом случае механическая система состоит из вложенных друг в друга без зазора и натяга двух цилиндрических оболочек одинаковой длины, деформирующихся осесимметрично (рис. 1, *а*). При совместном деформировании нормальные перемещения оболочек совпадают по всей их длине. Условия контакта сопряженных поверхностей оболочек исключают их взаимное проскальзывание, вследствие чего осевые перемещения оболочек совпадают на цилиндрических поверхностях контакта. Этими поверхностями контакта для внутренней оболочки является внешняя лицевая поверхность, а для охватывающей оболочки – её внутренняя лицевая поверхность. К внутренней оболочке прикладывается некоторая нормальная возмущающая нагрузка, равномерно распределенная по некоторому участку вдоль длины оболочки, вследствие чего рассматриваемая система оболочек совершает колебания. Схема системы вложенных оболочек и прикладываемой к ней нагрузки изображена на рис. 1, *а*.

Во втором случае подкрепление оболочки осуществлено с помощью присоединения ребра жесткости, ширина которого мала по сравнению с длиной объекта исследования (рис. 1, *б*). Подкрепляющее ребро жесткости закреплено без возможности проскальзывания. К внутренней поверхности оболочки приложена распределенная нестационарная сила.



а *б*

Рис. 1 – Схемы исследуемых механических систем:
а – подкрепление по всей длине; *б* – подкрепление ребром, ширина которого мала по сравнению с длиной оболочки.
На рисунке: w – радиальные перемещения; u – осевые перемещения; ψ – угол поворота нормали к срединной поверхности; l – длина оболочки; h, h_1, h_2 – толщины оболочек; a, a_1, a_2 – радиусы оболочек; l_p – ширина ребра жесткости; h_p – толщина ребра жесткости; $P(t)$, $q(t)$ – возмущающие нагрузки; $2b_p$ – ширина площадки нагружения; x_p – координата приложения нагрузки либо расположения ребра жесткости на рис. *а* и *б* соответственно.

В рамках решения обратной задачи необходимо идентифицировать возмущающее воздействие, при этом

одна из кинематических характеристик движения оболочки (радиальное, осевое перемещение, угол поворота нормали к срединной поверхности) или деформация в некоторой точке является известной. Как вспомогательный этап, решению обратной задачи по поиску неизвестного возмущающего воздействия будет предшествовать решение прямой задачи по исследованию деформированного состояния оболочки под действием известной нагрузки.

Решение прямой задачи. Изучение процесса деформирования дискретно-структурной механической системы (рис. 1, *а*) можно производить на основе подходов, опубликованных в [7]. Так, для каждого слоя можно принять справедливой гипотезу ломаной нормали. В соответствии с этой гипотезой, нормаль к срединной поверхности слоя до деформации остаётся прямолинейной и после деформации, но не перпендикулярной к деформированной координатной поверхности.

Для исследования деформирования оболочек воспользуемся уравнениями, учитывающими влияние инерции вращения и поперечного сдвига [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2}+\dfrac{\nu_j l}{a_j}\dfrac{\partial w_j}{\partial \xi}-\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2}=\dfrac{l^2}{E_j'}n_j\left(\xi,t_j\right); \\ \bar{k}_j^2\left(\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2}+l\dfrac{\partial \psi_j}{\partial \xi}\right)-\dfrac{1}{a_j}\left(\dfrac{l^2}{a_j}w_j+\nu_j l\dfrac{\partial u_j}{\partial \xi}\right)-\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial t_j^2}=\dfrac{l^2}{E_j'}q_j\left(\xi,t_j\right); \\ \dfrac{h_j^2}{12}\dfrac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2}-\bar{k}_j^2\left(l\dfrac{\partial w_j}{\partial \xi}+\psi_j l^2\right)-\dfrac{h_j^2}{12}\dfrac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2}=\dfrac{l^2}{E_j'}m_j\left(\xi,t_j\right), \end{cases} \quad (1)$$

где $j=1;2$ – индекс, обозначающий параметры внутренней и наружной оболочек соответственно; E'_j – *модуль упругости* материала оболочки; υ_j – *коэффициент Пуассона*; $\bar{k}_j$ – коэффициент сдвига; a_j – радиус срединной поверхности; h_j – толщина оболочки; l – длина оболочки; $n(\xi,t_j)$, $q(\xi,t_j)$, $m(\xi,t_j)$ – интенсивность сил и моментов, действующих на оболочку; ξ – безразмерная координата.

Рассмотрим более детально некоторый участок оболочек и воздействующие на них нагрузки (рис. 2).

На рис. 2 изображены фрагменты контактирующих оболочек, а также все нагрузки, воздействующие в области контакта на каждую из оболочек ($n_j(\xi,t_j)$ и $q_j(\xi,t_j)$ – осевые и контактные реакции соответственно).

Подчеркнем, что в процессе деформирования на сопряженных поверхностях оболочек возникают некоторые неизвестные нагрузки. В соответствии с применяемой теорией деформирования оболочек и условием контакта сопряженных поверхностей, запишем следующие кинематические зависимости:

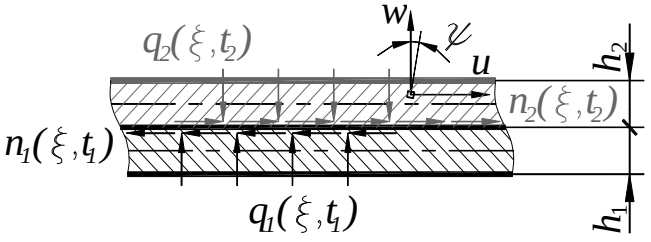


Рис. 2 – Участок системы вложенных оболочек.

$$w_1(\xi,t_1)=w_2(\xi,t_2);$$

$$u_1(\xi,t_1)+\frac{h_1}{2}\psi_1(\xi,t_1)=u_2(\xi,t_2)-\frac{h_2}{2}\psi_2(\xi,t_2). \quad (2)$$

Справедливы и следующие динамические соотношения между функциями нагрузок:

$$q_1(\xi,t_1)=-q_2(\xi,t_2);\ \ n_1(\xi,t_1)=-n_2(\xi,t_2). \quad (3)$$

Осевые нагрузки, возникающие на поверхности каждой оболочки, можно заменить нагрузками на нейтральной линии, а именно: соответствующими осевой нагрузкой и изгибающим моментом $0.5h_j\cdot n_j\left(\xi,t_j\right)$.

Приведенная система уравнений (1) такова, что из неё путем элементарных алгебраических операций можно исключить все контактные нагрузки: нормальные, касательные и моментные. Если обозначить через $w_1=w_2=w$, то на основе уравнений (1) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{2}E_j'\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2}+\frac{\nu_j l}{a_j}\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2}\right)=0; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2}E_j'\left(\bar{k}_j^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+l\frac{\partial \psi_j}{\partial \xi}\right)-\frac{1}{a_j}\left(\frac{l^2}{a_j}w+\nu_j l\frac{\partial u_j}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2}\right)=l^2 q(\xi,t_1); \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\frac{E_j'}{h_j}\left(\frac{h_j^2}{12}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2}-\bar{k}_j^2\left(l\frac{\partial w}{\partial \xi}+\psi_j l^2\right)-\frac{h_j^2}{12}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2}\right)=0; \\ \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2}+\dfrac{\nu_j l}{a_j}\dfrac{\partial w}{\partial \xi}-\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t_j^2}-\dfrac{2}{h_j}\left(\dfrac{h_j^2}{12}\dfrac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2}-\bar{k}_j^2\left(l\dfrac{\partial w}{\partial \xi}+\psi_j l^2\right)-\dfrac{h_j^2}{12}\dfrac{\partial^2 \psi_j}{\partial t_j^2}\right)=0, \end{cases} \quad (4)$$

где $q(\xi;t_1)$ – функция возмущающей нагрузки, прикладываемой к первой оболочке.

Укажем, что рассматривается только случай внешней нагрузки, приложенной к внутренней оболочке, как основному объекту исследования.

Запись системы уравнений (4) несколько упростится, если ввести следующие величины:

$$C_E = E_2'/E_1'; \quad C_t = \frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1\rho_2(1-\nu_2{}^2)}{E_2\rho_1(1-\nu_1{}^2)}. \tag{5}$$

Из второго соотношения в (2) вытекает следующее равенство:

$$\psi_2 = \frac{2}{h_2}\left(u_2 - u_1 - \frac{h_1}{2}\psi_1\right). \tag{6}$$

После подстановки выражений (5) и (6) в уравнение (4) получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} + \dfrac{\nu_1 l}{a_1}\dfrac{\partial w}{\partial\xi} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + C_E\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\nu_2 l}{a_2}\dfrac{\partial w}{\partial\xi} - C_t\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right) = 0; \\ \bar{k}_1^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + l\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\right) - \dfrac{1}{a_1}\left(\dfrac{l^2}{a_1}w + \nu_1 l\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}\right) - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C_E\left(\bar{k}_2^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + l\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{2}{h_2}\left(u_2 - u_1 - \dfrac{h_1}{2}\psi_1\right)\right)\right)\right) - \\ -\dfrac{1}{a_2}\left(\dfrac{l^2}{a_2}w + \nu_2 l\dfrac{\partial u_2}{\partial\xi}\right) - C_t\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Bigg) = l^2 q(\xi,t); \\ \dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi^2} - \bar{k}_1^2\left(l\dfrac{\partial w}{\partial\xi} + \psi_1 l^2\right) - \dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} - C_E\dfrac{h_1}{h_2}\left(\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\dfrac{2}{h_2}\left(u_2 - u_1 - \dfrac{h_1}{2}\psi_1\right)\right)\right) - \\ -\bar{k}_2^2\left(l\dfrac{\partial w}{\partial\xi} + \dfrac{2}{h_2}\left(u_2 - u_1 - \dfrac{h_1}{2}\psi_1\right)l^2\right) - C_t\dfrac{h_2^2}{12}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{2}{h_2}\left(u_2 - u_1 - \dfrac{h_1}{2}\psi_1\right)\right)\Bigg) = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} + \dfrac{\nu_1 l}{a}\dfrac{\partial w}{\partial\xi} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \dfrac{2}{h_1}\left(\dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi^2} - \bar{k}_1^2\left(l\dfrac{\partial w}{\partial\xi} + \psi_1 l^2\right) - C_t\dfrac{h_1^2}{12}\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где t – безразмерное время; $t = t_1 = \bar{t}\sqrt{E_1}\Big/ l\sqrt{\rho_1(1-\nu_1^2)}$.

В соответствии с принятыми граничными условиями (шарнирное опирание оболочек по торцам с возможностью проскальзывания шарнира вдоль оси Ox) разложение искомых функций может быть найдено в виде

$$u_j(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk}(t)\cos\lambda_k\xi; \quad w(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\sin\lambda_k\xi; \quad \psi_j(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_{jk}(t)\cos\lambda_k\xi, \tag{8}$$

где $\lambda_k = k\pi$, $\psi(\xi,t) = \psi_1(\xi,t)$.

Подставим разложения (8) в систему уравнений (7) и, применив к ним преобразование Лапласа по переменной времени t, перейдем к следующей алгебраической системе для изображений искомых функций:

$$\begin{cases} \left(s^2 + \lambda_k^2\right)u_{1k}^L - l\lambda_k\left(\dfrac{\nu_1}{a_1} + C_E\dfrac{\nu_2}{a_2}\right)w_k^L + C_E\left(C_t s^2 + \lambda_k^2\right)u_{2k}^L = 0; \\ \left(\dfrac{\nu_1}{a_1} + C_E\bar{k}_2^2\dfrac{2}{h_2}\right)u_{1k}^L - \dfrac{1}{l\lambda_k}\left(\left(1 + C_E C_t\right)s^2 + \bar{k}_1^2\lambda_k^2 + \dfrac{l^2}{a_1^2} + C_E\left(\bar{k}_2^2\lambda_k^2 + \dfrac{l^2}{a_2^2}\right)\right)w_k^L + \left(C_E\bar{k}_2^2\dfrac{h_1}{h_2} - \bar{k}_1^2\right)\psi_k^L + \\ + C_E\left(\dfrac{\nu_2}{a_2} - \bar{k}_2^2\dfrac{2}{h_2}\right)u_{2k}^L = Q_k^L(s); \\ 2C_E\left(C_t s^2 + \lambda_k^2 + 12\dfrac{\bar{k}_2^2}{h_2^2}l^2\right)\left[u_{2k}^L - u_{1k}^L\right] + 12l\lambda_k\left(C_E\dfrac{\bar{k}_2^2}{h_2} - \dfrac{\bar{k}_1^2}{h_1}\right)w_k^L - \Bigg(\left(1 + C_E C_t\right)s^2 + \Bigg(\lambda_k^2 + 12\dfrac{\bar{k}_1^2}{h_1^2}l^2 + \\ + C_E\left(\lambda_k^2 + 12\dfrac{\bar{k}_2^2}{h_2}l^2\right)\Bigg)\Bigg)h_1\psi_k^L = 0; \\ \left(s^2 + \lambda_k^2\right)u_{1k}^L - \left(\dfrac{\nu_1}{a_1} + \dfrac{2\bar{k}_1^2}{h_1}\right)l\lambda_k w_k^L - \left(s^2 + \lambda_k^2 + \dfrac{12\bar{k}_1^2}{h_1^2}l^2\right)\dfrac{h_1}{6}\psi_k^L = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $Q_k^L(s)$ – изображение функции, характеризующей воздействующую на механическую систему нагрузку, $Q_k(t)=\frac{2l^2}{E_1'}\int_0^1 q(\xi,t)\sin\lambda_k\xi d\xi$.

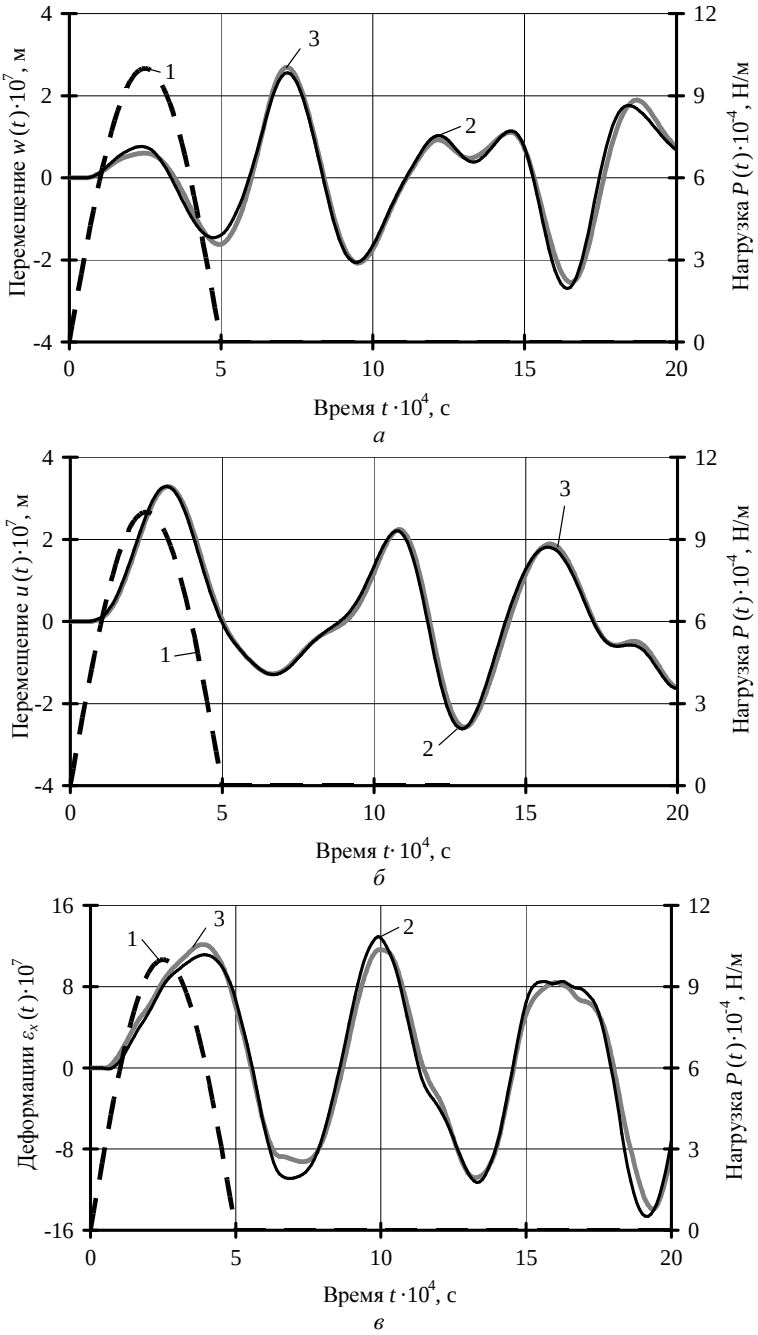


Рис. 3 – Изменение параметров оболочки: *а* – радиальных перемещений; *б* – осевых перемещений; *в* – деформаций.

Решив систему уравнений (9) методом Крамера, получим следующие выражения для определения изображений искомых коэффициентов:

$$u_{jk}^L(s)=\Delta_{jk}^U(s)/\Delta_k(s);\quad w_k^L(s)=\Delta_k^W(s)/\Delta_k(s);\quad \psi_k^L(s)=\Delta_k^\Psi(s)/\Delta_k(s), \tag{10}$$

где $\Delta_{jk}^U(s)$, $\Delta_k^W(s)$, $\Delta_k^\Psi(s)$ и $\Delta_k(s)$ – вспомогательные и главный определители матриц, составленных из коэффициентов системы линейных уравнений (9). Явные выражения для определения соответствующих определителей здесь не приводятся, поскольку они вычислялись непосредственно на ЭВМ.

Переход от изображений функций к их оригиналам осуществляется путем выполнения *обратного преобразования Лапласа*. Искомые выражения для кинематических параметров на основании (8) запишутся в форме ряда, как это показано далее на примере функции прогиба w

$$w(\xi,t)=-\frac{4l^2}{E_1'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_k\xi_P\sin\lambda_k\xi_b\cos\lambda_k\xi}{\lambda_k}\int_0^t P(\tau)\sum_{i=1}^{4}\frac{\Delta_k^W(\omega_{ik})}{\Delta_k'(\omega_{ik})/2}\sin\omega_{ik}(t-\tau)d\tau, \quad (11)$$

где ω_{ik} – модули мнимых корней уравнения $\Delta_k(s)=0$; $P(t)$ – временная составляющая функции $q(\xi,t)$.

При исследовании деформированного состояния оболочки зачастую возникает необходимость определения деформаций, возникающих вдоль оси Ox. Деформации определяются по следующей зависимости:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (12)$$

где z – расстояние до нейтральной поверхности оболочки.

В случае измерения деформаций на внешней поверхности охватывающей оболочки и с учетом соотношений (6) можно записать следующее выражение для определения осевых деформаций:

$$\varepsilon_{2x}=\frac{1}{l}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\frac{h_1}{2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\right). \quad (13)$$

Тестовая задача решена с использованием следующих исходных данных: длины оболочек $l=1.5$ м, внутренняя оболочка ($h_1=0.215$ м; $a_1=0.289$ м) изготовлена из стали ($\rho_1=7850$ кг/м^3; $E_1=2.1\cdot10^{11}$ Па; $\nu_1=0.3$), а внешняя оболочка ($h_2=0.0215$ м; $a_2=0.5(h_1+h_2)+a_1$) изготовлена из титана ($\rho_2=4600$ кг/м^3; $E_2=1.1\cdot10^{11}$ Па; $\nu_1=0.33$). Нагрузка определяется координатами: $x_p=0.6$ м; $b_p=0.15$ м.

На рис. 3 изображены графики изменения прогиба w, осевого перемещения u и осевых деформаций ε_x, возникающих на внешней поверхности наружной оболочки, в точке $x=0.9$ м.

Кривая 1 соответствует функции, возмущающей нагрузки во времени, кривые 2 и 3 – указанные кинематические параметры, рассчитанные с помощью предлагаемого метода и рассчитанные с применением метода конечных элементов (МКЭ) соответственно.

Кривые, приведенные на рисунках, демонстрируют хорошее согласование результатов, полученных принципиально различными методами. Это свидетельствует о достоверности разработанной методики решения прямых задач для вложенных цилиндрических оболочек.

В случае подкрепления оболочки концентрическими ребрами жесткости (рис. 1, *б*), колебания оболочки под действием осесимметричной системы сил также можно рассматривать с использованием механической модели типа *модели Тимошенко* [8]. Переходя к безразмерным времени и координате вдоль оси оболочки согласно зависимостям:

$$x=\xi l,\ t_p=tT,$$

где l – длина оболочки; $T=\sqrt{\left(\rho(1-\upsilon^2)l^2\right)/E}$; будем иметь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}+\dfrac{\upsilon l}{a}\dfrac{\partial w}{\partial\xi}=\dfrac{T^2}{\rho h}P_x(\xi,t);\\ \dfrac{\upsilon l}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{l^2}{a^2}w-(k')^2\dfrac{\partial^2w}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}-l(k')^2\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}=\dfrac{T^2}{\rho h}P_z(\xi,t);\\ -\dfrac{12l(k')^2}{h^2}\dfrac{\partial w}{\partial\xi}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\dfrac{12l^2(k')^2}{h^2}\psi-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\dfrac{12T^2}{\rho h^3}M_x(\xi,t).\end{cases} \quad (14)$$

Здесь E – модуль упругости материала оболочки, υ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала оболочки, a – радиус срединной поверхности, h – толщина оболочки, k' – коэффициент сдвига, $P_x(x;t)$, $P_z(x;t)$, $M_x(x;t)$ – интенсивность сил и моментов, действующих на оболочку.

Наличие ребра жесткости на оболочке обуславливает возникновение соответствующих контактных сил и моментов:

$$P_x(\xi,t)=-p_x(t)[H(\xi-\xi_p)-H(\xi-\xi_p-l_p/l)];$$
$$P_z(\xi,t)=Q(\xi,t)-p_z(t)[H(\xi-\xi_p)-H(\xi-\xi_p-l_p/l)];$$
$$M_x(\xi,t)=\frac{h}{2}p_x(t)[H(\xi-\xi_p)-H(\xi-\xi_p-l_p/l)]. \quad (15)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (14) при нулевых начальных условиях и граничных условиях, соответствующих шарнирному опиранию, также можно найти в виде разложения в *ряды Фурье*, аналогичном (8).

Колебания ребра жесткости можно моделировать уравнениями стержневой теории, приведенными в [9]:

$$\begin{cases} \rho_p F_p \dfrac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} + \dfrac{E_p F_p}{R_p^2} w_p = p_{zp}; \\ \rho_p F_p \dfrac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = p_{xp}; \\ \rho_p I_p \dfrac{\partial^2 \psi_{xp}}{\partial t^2} + \dfrac{E_p I_z}{R_p^2} \psi_{xp} = M_{xp}, \end{cases} \tag{16}$$

где I_z – момент инерции относительно оси z; I_p – полярный момент инерции; p_{zp}, p_{xp}, M_p – радиальная и осевая силы и момент внешних сил, отнесенные к единице длины ребра.

Условия контакта исключают проскальзывание ребра на поверхности оболочки. Предполагается, что ширина зоны контакта оболочки с ребром по сравнению с длиной оболочки мала, поэтому условия контакта можно записать, как следующие:

$$w_p(t) = \frac{l}{l_p} \int\limits_{\xi_p}^{\xi_p + \frac{l_p}{l}} w(\xi; t) d\xi; \qquad u_p(t) - \frac{h_p}{2} \psi_p(t) = \frac{l}{l_p} \int\limits_{\xi_p}^{\xi_p + \frac{l_p}{l}} \left(u(\xi; t) + \frac{h}{2} \psi(\xi; t) \right) d\xi. \tag{17}$$

Решив систему дифференциальных уравнений (16) с использованием преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях для безразмерного времени, на основе условий контакта (17) получаем *систему интегральных уравнений Вольтера*, дальнейшее решение которой строится в последовательности, аналогичной (7).

Решение обратной задачи. Задача идентификации нестационарной нагрузки, воздействующей на систему вложенных цилиндрических оболочек, заключается в отыскании неизвестной нагрузки, воздействующей на одну из оболочек системы. В данном случае производится восстановление нагрузки, воздействующей на внутреннюю оболочку, по данным, регистрируемым в одной из точек на наружной стороне охватывающей оболочки. В качестве примера рассмотрим случай идентификации нагрузки по данным прогиба $w(t)$, который описывается заданной функцией во времени.

Для решения указанной задачи рассмотрим выражение (11) по определению прогиба $w(t)$. Выражение будет *линейным интегральным уравнением Вольтерра I-го рода* относительно функции $P(t)$. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\tilde{w}(\xi, t) = \int\limits_0^t P(\tau) K(t - \tau) d\tau, \tag{18}$$

где $K(t) = -\dfrac{4l^2}{E_1'} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k \xi_P \sin \lambda_k \xi_b \cos \lambda_k \xi \sum\limits_{i=1}^{4} \dfrac{\Delta_k^W(\omega_{ik})}{\Delta_k'(\omega_{ik})/2} \sin \omega_{ik} t$; $\tilde{w}(\xi, t)$ – задаваемый прогиб, который при решении обратной задачи считается известным.

При решении уравнения (18), вследствие некорректности задачи, будем использовать *метод регуляризации А. Н. Тихонова.* С этой целью воспользуемся матричной формой записи уравнения (18), применив аппроксимацию входящих в выражение интегралов

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_\mathbf{W} \cdot \mathbf{P}, \tag{19}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}$ – вектор-столбец, соответствующий функции прогиба w; $\mathbf{P}$ – вектор-столбец возмущающей нагрузки; $\mathbf{A}_\mathbf{W}$ – некоторый конечно-разностный аналог оператора, соответствующий ядру $K(t - \tau)$.

Последующее применение метода регуляризации А.Н. Тихонова, подробное описание которого изложено в [5, 6], приведет к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$\left(\mathbf{A}_\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{A}_\mathbf{W} + \alpha \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A}_\mathbf{W}^T \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tag{20}$$

где $\mathbf{A}_\mathbf{W}^T$ – транспонированная к $\mathbf{A}_\mathbf{W}$ матрица; $\mathbf{C}$ – симметричная трехдиагональная матрица, схема заполнения которой рассмотрена в [5]; α – параметр регуляризации.

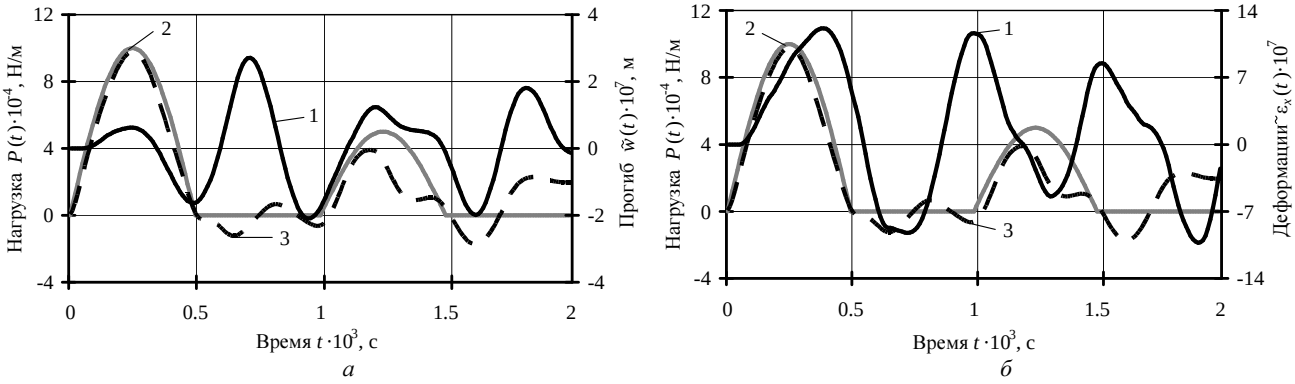
Решение СЛАУ (20), в сочетании с рациональным подбором входящего в систему параметра регуляризации α, позволяет найти значение искомого вектора нагрузки $\mathbf{P}$.

Далее рассмотрим численные примеры идентификации нестационарного воздействия в виде двух синусоидальных полуволн с разной амплитудой, которые являются разнесенными вдоль оси времени. Результаты таких исследований для обратной задачи показаны на рис. 4.

На рис. 4, *а* приведены результаты восстановления нестационарной нагрузки, воздействующей на оболочку с геометрическими и механическими параметрами, рассмотренными при решении прямой задачи. Идентификация производилась по данным прогиба $\tilde{w}(t)$, регистрируемым в сечении с координатой $\xi = 0.6$.

Кривая 1 соответствует исходным значениям прогиба, полученным в результате решения прямой задачи, с

применением МКЭ; кривые 2, 3 – нагрузка, задаваемая при моделировании соответствующей прямой задачи и нагрузка, идентифицированная в процессе решения обратной задачи.



а *б*

Рис. 4 – Результаты восстановления нагрузки: *а* – по прогибам; *б* – по деформациям.

Также приведены результаты решения обратной задачи при идентификации по данным осевых деформаций ε_x (рис. 4, *б*). Нумерация кривых на рисунке соответствует нумерации на рис. 4, *а*. Данные, представленные на рис. 4, свидетельствует о том, что процедура идентификации внешних нагрузок по значениям осевых деформаций и по нормальным перемещениям одинаково эффективна.

Решение обратной задачи для оболочки, подкрепленной ребром (ребрами) жесткости, вызывает необходимость решения системы интегральных уравнений Вольтера I-го рода, составленной на основе условий контакта и уравнения, описывающего изменение во времени одной из кинематических характеристик движения точки оболочки или деформации в некоторой точке. При этом присоединение каждого дополнительного ребра повлечет за собой необходимость введения дополнительной пары условий контакта. Решение получаемой при дискретизации СЛАУ можно произвести с использованием *обобщенного метода Гаусса* в совокупности с регуляризацией А. Н. Тихонова в виду некорректности поставленной задачи.

Выводы. В данной работе предложен метод идентификации временной составляющей нагрузки, воздействующей на шарнирно-опертые подкрепленные оболочки. Достоверность полученного решения тестовой задачи подтверждена сопоставлением с заранее известной функцией нагрузки. Ценность продемонстрированных подходов, используемых при решении прямой и обратной задач деформирования оболочек, заключается в возможности исследования составных конструкций, части которых изготовлены из различных материалов. Отыскание неизвестных нагрузок, воздействующих на подкрепленные оболочки, позволяет оценить напряженно-деформированное состояние ответственных конструкций с целью дальнейшего улучшения их свойств.

Список литературы

1. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К. : Изд. Полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
2. *Луговой П. З., Мейш В. Ф.* Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 54. – С. 79 – 82.
3. *Луговой П. З., Мукоид В. П., Мейш В. Ф.* Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. – К. : Наукова думка, 1991. – 280 с.
4. *Луговой П. З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 44 – 74.
5. *Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Воропай Н. И., Гнатенко Г. А., Гришакин В. Т.* Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : монография в 2-х частях. Часть I. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с.
6. *Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В.* Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел : монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
7. *Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угримов С. В.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. – Харьков : Изд-во ХНЭУ, 2004. – 252 с.
8. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
9. *Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – К. : Наукова думка, 1980. – 232 с.

References (transliterated)

1. Lugovoy P. Z., Meysh V. F., Shtantsel' E. A. *Nestatsionarnaya dinamika neodnorodnykh obolochechnykh konstructsyy* [Non-stationary dynamics of inhomogeneous shell structures]. Kyiv, Izd. Poligr. Tsentr «Kiyevskiy universitet» Publ., 2005. 537 p.
2. Lugovoy P. Z., Meysh V. F. Issledovanie rebristykh vzryvnykh kamer pri impul'snoy obrabotke materialov [Investigation of ribbed explosive chambers during pulsed processing of materials]. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy* [Strength of materials and construction theory]. 1989, vol. 54, pp. 79–82.
3. Lugovoy P. Z., Mukoid V. P., Meysh V. F. *Dinamika obolochechnykh konstruktsiy pri vzryvnykh nagruzkakh* [Dynamics of shell structures under explosive loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1991. 280 p.
4. Lugovoy P. Z. Dinamika tonkostennykh konstruktsiy pri nestatsionarnykh nagruzkakh [Dynamics of thin-walled structures under non-stationary loads]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2001, vol. 37, no. 5, pp. 44–74.

5. Yanyutin E. G, Bogdan D. I., Voropay N. I., Gnatenko G. A., Grishakin V. T. *Identifikaciya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' I* [Identification of loads during impulsive deformation of bodies : monograph in 2 parts. Part I]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 180 p.

6. Yanyutin E. G, Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikaciya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel : monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Identification of loads during impulsive deformation of bodies : monograph in 2 parts. Part II]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 212 p.

7. Shupikov A. N., Buz'ko Ya. P., Smetankina N. V., Ugrimov S. V. *Nestatsionarnye kolebaniya mnogosloynykh plastin i obolochek i ikh optimizatsiya* [Non-stationary vibrations of multilayer plates and shells and their optimization]. Kharkov, KhNEU Publ., 2004. 252 p.

8. Grigolyuk E. I. Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemykh tel. T.5. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of solid deformable bodies. Vol. 5. Non-classical theory of vibrations of beams, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272

9. Kohmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemykh sistem pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Oscillations of deformable systems under pulsed and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.

Поступила (received) 12.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Янютін Євген Григорович (Янютин Евгений Григорьевич, Yanyutin Yevgeniy Grigoryevich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Гнатенко Григорій Олександрович (Гнатенко Григорий Александрович, Gnatenko Grigiriy Alexandrovich) – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 799-08-41; e-mail: grisha_gnatenko@ukr.net.

Єгоров Павло Анатолійович (Егоров Павел Анатольевич, Yegorov Pavel Anatolyevich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.ua.

ЗМІСТ

Андренко П. М., Дмитрієнко О. В., Кулініч К. О., Еденко В. В. Математична модель клапана розвантаження з регульованим гістерезисом UZOP...NHY 3

Бомба А. Я., Климюк Ю. Є. Прогнозування зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень швидких багатошарових фільтрів 8

Girya N. P., Dukhopelnykov S. V. Mathematical model of H-polarized wave radiation from longitudinal slots of a cylindrical antenna 16

Гомозов Є. П., Заїка Т.С. Деякі математичні моделі ціноутворення на енергоринках 23

Гомозов Е. П., Мезерная М. В. Современные проблемы динамического управления портфелем финансовых активов 29

Кожушко А. П., Григор'єв О. Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом 34

Коржов І. М. Перспективи розвитку теорії і практики контролю та діагностування в розрізі перевірки кваліфікації лабораторій 62

Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Коливання балки з бінарним закріпленням країв при імпульсному навантаженні 67

Ольшанський В. П. Про удар в'язко-пружного тіла об жорстку перешкоду 73

Онищенко С. П., Леонтьева А. И. Практические аспекты оптимизации состава программы развития в условиях «нечеткости» условий и результатов реализации проектов 79

Першина Ю. І., Черногор Т. Т., Саприкін С. О. Наближення розривних функцій двох змінних методом мінімаксу 86

Плаксій Ю. А., Гомозкова І. О. Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точносного аналізу алгоритмів орієнтації БІНС 93

Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of first kind singular integral equation with Hilbert-type multiple integral 100

Полянский В. И. Математическая модель управления упругими перемещениями при механической обработке 105

Ребров О. Ю. Розподіл допустимого тиску на ґрунт ходових систем колісних тракторів за територією України 110

Успенский В. Б., Некрасова М. В., Багмут И. А. Способ повышения точности БИНС по измерениям кажущегося ускорения для управляемого объекта, который быстро вращается 116

Чайка Д. О., Емельянова И. А., Андренко П. Н., Григорьев А. Л. Математическое моделирование процессов подачи строительных смесей беспоршневым шланговым бетононасосом 120

Shevchenko S. A., Konokh V. I., Mitikov Yu. A., Grigoriev A. L. Universal orthometric real gas equation of state for modeling processes in rocket-and-space technology units 134

Янютин Е. Г., Гнатенко Г. А., Егоров П. А. Нестационарное деформирование подкрепленных цилиндрических оболочек 148

CONTENTS

Andrenko P. M., Dmitrienкo O. V., Kulinich K. O., Endeko V. V. Mathematical model of unloading valve with adjustable hysteresis ZOP ... NHY 3

Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye. Prediction of changes in the characteristics of piecewise homogeneous porous loads of rapid multilayer filters 8

Girya N. P., Dukhopelnykov S. V. Mathematical model of H-polarized wave radiation from longitudinal slots of a cylindrical antenna 16

Gomozov E. P., Zaika T. S. Some mathematical models of pricing in electricity markets 23

Gomozov E. P., Mezerna M. V. Modern problems of dynamic management of a portfolio of financial assets 29

Kozhushko A. P., Grigoriev A. L. Modeling of coupled oscillations of wheeled tractors and tanks with liquid on a straight road with difficult terrain 34

Korzhov I. M. Perspectives for the development of theory and practice of control and diagnostics in terms of proficiency testing of laboratories 62

Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Oscillations of a beam with binary fixed ends under pulse load 67

Olshanskiy V. P. On the impact of a visco-elastic body on a rigid obstacle 73

Onyshchenko S. P., Leontieva A. I. Practical aspects of development program optimization under "fuzzy" conditions and project results 79

Pershyna I. I., Chernogor T. T., Saprykin S. O. Approximation of discontinuous functions of two variables by the minimax method 86

Plaksiy Yu. A., Homozkova I. A. New two-frequency reference models of rigid body rotation for error analysis of SINS orientation algorithms 93

Polyanskaya T. S., Naboka O. O. Numerical solution of first kind singular integral equation with Hilbert-type multiple integral 100

Polyansky V. I. Mathematical model of elastic movement management in mechanical processing 105

Rebrov O. Yu. Distribution of admissible pressure of running gears of collector tractors on the soil throughout the territory of Ukraine 110

Uspenskiy V. B., Nekrasova M. V., Bagmut I. A. Method of increasing the accuracy of BINS according to measurements of appearing acceleration for controll of fast rotating object 116

Chayka D. O., Emeljanova I. O., Andrenko P. M., Grigoriev A. L. Mathematical modeling of the processes of supplying building mixtures with pistonless hose concrete pump 120

Shevchenko S. A., Konokh V. I., Mitikov Yu. A., Grigoriev A. L. Universal orthometric real gas equation of state for modeling processes in rocket-and-space technology units 134

Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. A., Yegorov P. A. Nonstationary deformation of reinforced cylindrical shells 148

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ». СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 27 (1303) 2018

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.

Відповідальний за випуск Костякова Е. В.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид. № 30-18.

Підп. до друку 17.12.2018 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк.
8,75. Тираж 100 пр. Зам. № 192424. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, віл Кирпичова, 2

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»
Ідент. код юридичної особи: 38093808
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ.

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях

- Внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.;
- У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включено у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA);**
- Видання індексується **Google Scholar**;
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний об'єм статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний об'єм** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може перевершувати 3-ох осіб. В номері збірнику не може міститися більше 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані версії журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронний варіант відразу ж після опублікування стає доступний на сайтах: Серії Вісника, Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та бібліотеки національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтесь:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt/

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Тел. +38-057-707-60-35