

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 6 (1228) 2017

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2017

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2017. – № 6 (1228). – 146 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська .

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

Координаційна рада:

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);
К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);
А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;
Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;
Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;
А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;
В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;
В. В. СПІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;
П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;
С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.;
Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.; О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;
В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.; П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.;
В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.;
В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.; Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.;
Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

Члени редколегії: Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. ГЕВОРКЯН, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. ГРИГОР'ЄВ, д-р техн. наук, проф.; В. К. ДУБОВИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.; О. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф.; О. М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф.; О. Г. НІКОЛАЄВ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. НОВОЖИЛОВА, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Г. РУТКАС, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф.; О. М. ШЕЛКОВИЙ, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. ЯНЮТІН, д-р техн. наук, проф.; Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 3 від 24 березня 2017 р.

Ministry of Education and Science of Ukraine
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

BULLETIN
OF NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

Series: "Mathematical modeling in engineering and technologies"

№ 6 (1228) 2017

Collected Works

Published since 1961

Kharkiv
NTU "KhPI", 2017

Bulletin of National Technical University "KhPI". Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2017. – No. 6 (1228). – 146 p.

State edition

Certificate of the State Committee for Information Policy of Ukraine

KB № 5256, July 2, 2001

Language: Ukrainian and Russian.

The Bulletin of the National Technical University "KhPI" is included in the List of Scientific Professional Editions of Ukraine, where the results of dissertations for the degree of doctor and candidate of sciences can be published approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 15, 2015. Decree No.1328 (Appendix No. 8) of 21.12.2015.

Coordinating Board:

L. L. Tovazhnyanskyy, Dr. Tech. Sci., Prof. (**chief**);
K. O. Gorbunov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof. (**secretary**);
A. P. Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, member NAS of Ukraine, Dr. Tech. Sci., Prof.;
E. E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A. V. Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
F. F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.;
A. I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. D. Dmitrienko, Dr. Tech. Sci., Prof.; I. F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. V. Epifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu. I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.;
P. O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. B. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
S. I. Kondrashov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
G. V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. K. Morachkovsky, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. I. Nikolaenko, PhD. His. Sci., Prof.; P. G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.;
V. A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.; G. M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
Yu. V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

Editorial Board of the Series:

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

Deputy Executive Editor: Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

Executive Secretary: S. V. Duhopelnikov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof.

Members of the Editorial Board: Yu. V. Gandel, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. M. Shelkovyy, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.;

Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

*In April 2013 the Bulletin of National Technical University "KhPI" series "Mathematical modeling in engineering and technologies" was included in the **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI".

Protocol number 3, March 24, 2017.

С. В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ**В ПАМЯТЬ О ПРОФЕССОРЕ ГАНДЕЛЕ Ю. В.**

Наведені деякі факти з біографії та професійної діяльності відомого харківського вченого та педагога Ю.В. Ганделя, які раніше не оприлюднювалися.

Ключові слова: Гандель Юрій Володимирович.

Приведены некоторые факты из биографии и профессиональной деятельности известного харьковского ученого и педагога Ю.В. Ганделя, которые ранее не обнародовались.

Ключевые слова: Гандель Юрий Владимирович.

Several facts on the biography and professional activity of the Kharkov famous scientist and educator Gandel Yu.V., which have never been previously published, are presented.

Key words: Yuriy V. Gandel.

Первого апреля 2017 года ушел из жизни Гандель Юрий Владимирович. Профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, член редколлегии Вестника национального технического университета «ХПИ» серии «Математическое моделирование в технике и технологиях».



Гандель Юрий Владимирович
(05.07.1934 – 01.04.2017).

Дата смерти больше ассоциируется с жизнерадостной душой Юрия Владимировича, который всегда любил пошутить, рассказать анекдот, веселую историю из жизни, которых он знал превеликое множество. Первое апреля для многих его учеников, коллег, друзей перестанет быть днем «Смеха».

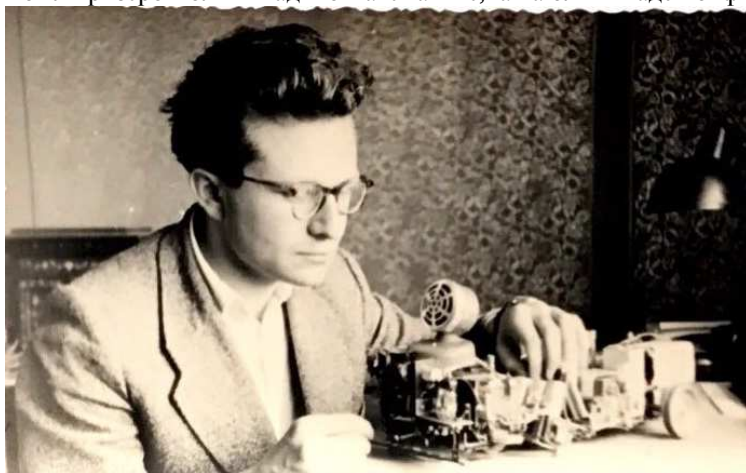
За свою жизнь Юрий Владимирович успел сделать многое, но, думаю, многие согласятся, что самое главное в его жизни это была семья. С Инной Михайловной, он успел отпраздновать золотую свадьбу. Очень гордился своей внучкой, которая была на далеком расстоянии от него и близком от его сердца. Семья давала ему желание и возможность творить науку. Взяв на себя все тяготы быта, Инна Михайловна дала возможность Учителю воспитать множество учеников.

Родился Гандель Юрий Владимирович 5 июля 1934 года в Харькове. В военные годы был в эвакуации вместе с матерью Гандель Марией Ароновной и младшим братом. Отец – Гандель Владимир Львович 5 июля 1942 года погиб, пропал без вести, при штурме немецко-фашистскими войсками г. Россошь Воронежской области. После освобождения Харькова в 1943 году семья вернулась из эвакуации. Юрий Владимирович продолжил свое обучение, начатое в Кзыл-Орде, в 131 мужской средней школе г. Харькова. Учился прилежно. Дисциплина поддерживалась строгая,

так как многие учителя были военные.

При этом, по словам Юрия Владимировича, не забывали о шалостях и розыгрышах, как своих сверстников, так и учителей. В школьные годы участвовал и был призером олимпиад по математике, а на олимпиаде по физике, впервые проводимой в г. Харькове, стал победителем. Окончил среднюю школу в июне 1952 года с серебряной медалью. Со слов одноклассников в некоторых вопросах учебы был сверх усердным; так, занимаясь черчением, довел мастерство трафаретной подписи до высшего уровня, но для этого выписывал шрифты в течение месяца. Возможно, это умение было получено с «молоком матери», Мария Ароновна до 1933 года работала чертежницей на заводе № 18 в городе Воронеже.

В школьные годы Юрий Владимирович посещал с 1946 по 1952 года радиотехнический кружок при дворце пионеров города Харькова. Юрий Владимирович рассказывал, что в школьные годы на Но-



Юрий Владимирович со своим изобретением –
10-ти ламповым супергетеродинным приемником.

вогодніе праздники во дворце пионеров проводились «Ёлки», и в этих праздниках принимали участия многие, в том числе и Людмила Гурченко. И, со слов Юрия Владимировича, ему даже довелось с ней танцевать.



Юрий Владимирович Гандель и Наум Ильич Ахиезер.

В 1958 году Гандель становится руководителем общекультурного кружка в Доме Культуры Харьковского управления трудовых резервов, но ненадолго.

Знакомство с курсом математики, который на инженерно-физическом факультете ХПИ читал выдающийся учёный и педагог, член-корреспондент Академии наук Украины Н. И. Ахиезер, приводит Юрия Владимировича в 1958 году в Харьковский государственный университет имени А. М. Горького, который он успешно заканчивает через пять лет. Юрий Владимирович, получив знания у всемирно известного математика, стал не просто учеником Наума Ильича Ахiezера, но и последователем, реализатором многих его идей.

По окончании ХГУ в 1962 году Юрий Владимирович идет работать учителем математики в трудовой школе № 5 г. Харькова. Но уже через год в 1963 году Юрий Владимирович приходит в университет на должность ассистента только что открывшейся кафедры математической физики; заведующим кафедрой назначается Наум Ильич Ахиезер. Наум Ильич становится для Юрия Владимировича не только начальником, но и учителем, о котором Достойный Ученик часто вспоминал и рассказывал уже своим ученикам. Под руководством Наума Ильича 25 июля 1971 года в Харькове Юрий Владимирович защищает кандидатскую диссертацию на тему «Интегральные уравнения некоторых аксиально-симметричных задач теории дифракции волн» по специальности 01.003 – дифференциальные и интегральные уравнения. Общение с семьей Ахiezеров не ограничивалось только Наум Ильичем. Юрий Владимирович поддерживал отношение и с его братом, академиком Александром Ильичем Ахiezером, который долгое время работал в Харьковском университете. Александр Ильич и Юрий Владимирович очень любили юмор и умели им пользоваться в учебном процессе и в научной жизни. Юрий Владимирович любил вспоминать анекдот из жизни Александра Ахiezера: «На физ.-тех. университета долгое время брали только мальчиков, но в один из годов поступила дочь директора УФТИ. Александр Ильич вел курс теоретической физики и по привычке стал рассказывать шутку «Сколько поле не квантуй, все равно получишь...», и тут он вспоминает про присутствующую девушку и продолжает «...нуль». А уже в 90-е годы во время болезни академика и потери зрения, Юрий Владимирович при посещении Александра Ильича «обязан» был рассказывать новый анекдот или новую юмористическую историю.

Важной идеей Наума Ильича была подготовка детей к изучению математики еще со школьной скамьи. Но долгое время эту важную и нужную идею не удавалось воплотить в жизнь, причем, только лишь из-за бюрократии чиновников, которые считали специализированную подготовку не нужным делом. В 1964 году этой инициативе дали ход, и Юрий Гандель участвует в создании Харьковского математического лицея. В учителя принимаются ведущие преподаватели по своим направлениям. Харьковская школа № 27 сразу же становится одной из лучших школ не только города, но и республики. По словам учителей, Наум Ильич был идейным вдохновителем, а Юрий Владимирович – реализатором этих идей. Он проводил факультативы и спецкурсы не только для школьников, но и для самих учителей. Юрий Владимирович всегда обожал олимпиадные математические зада-

По окончании школы Юрий Владимирович продолжает свое обучение в ХПИ. По рекомендации директора дворца пионеров Трусевича, за многолетние успехи в радиоконструировании, поступает на радиотехнический факультет в группу Р12-в. Во время учебы в ХПИ был отмечен за доклад по графике на VII научно-технической студенческой конференции и награжден грамотой за институтскую радиовыставку. В связи с желанием «сочетать глубокое изучение физико-математических наук с умением применять самые совершенные методы технического и радиотехнического исследования» переводится на инженерно-физический факультет, специальность «Динамика и прочность машин». Однако, по состоянию здоровья (по официальной версии) и в связи с разногласиями с партийным деятелем (по неофициальной версии) Юрий Владимирович в 1956 году уходит из ХПИ.

Учеба в ХПИ дала Юрию Владимировичу знакомство с Израилем Марковичем Глазманом. Причем это знакомство, по словам Юрия Владимировича, началось в юмористическом стиле: «Как-то в перерыве между парами я стоял в коридоре. И у меня на лацкане был прикреплен значок ДОСААФ, который я получил за активное участие в радиосвязи. Рядом проходил Израиль Маркович и, увидев этот значок, спросил: «Молодой человек, а что это у Вас за красивый значок?». А я отвечаю: «Это значок, который я получил за то, что в течение ночи смог совершить 36 связей». Израиль Маркович, который был большим жизнелюбом, помолчал и потом сказал: «Да, я бы столько не смог».

чи, и не только любил решать и составлять их для школьников, но и применять олимпиадные методы к сложным реальным математическим задачам.

В 1973 году переходит на должность доцента кафедры математической физики, а 18 мая 1977 получает звание доцента. В это время, с 1974 года, кафедру возглавляет его школьный товарищ Владимир Александрович Щербина.

Интерес к прикладным техническим задачам и необходимость находить приближенные решения таких задач заставляют Юрия Владимировича использовать Большие вычислительные машины. Она занимала в Университет пол этажа, очень сильно грелась во время работы, была «черепашкой» по сравнению с современными ЭВМ, и самое главное ее отличие, – это носители информации – перфокарты. По этим носителям определяли счастливых допущенных к этому «чуду».

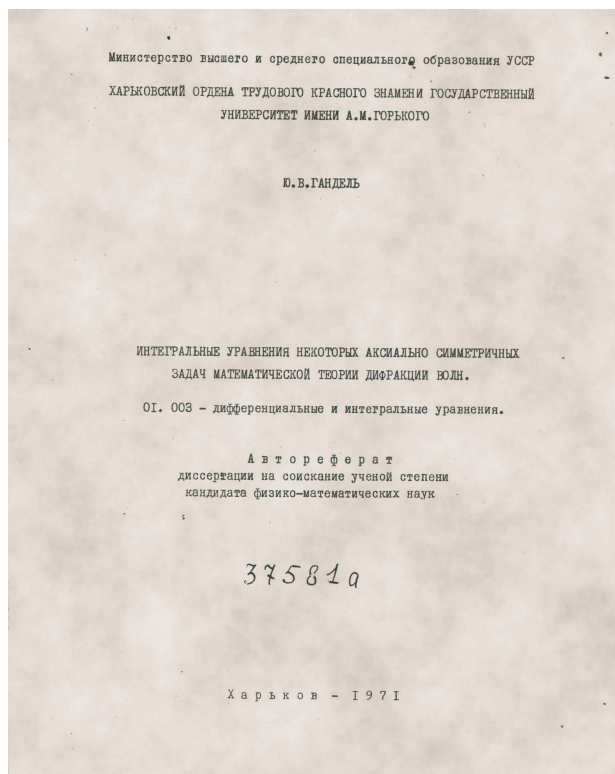
Юрий Владимирович рассказывал, что он имел специальный допуск для работы по ночам и в выходные дни на ЭВМ. И самое главное, по словам студентов, его пакет перфокарт был всегда самым большим.

Частые поездки в Москву знакомят Юрия Владимировича с Сергеем Михайловичем Белоцерковским и его учеником Иваном Кузмичем Лифановым, с которым в последствии они имели долгие плодотворные контакты как в научном, так и в дружеском плане.

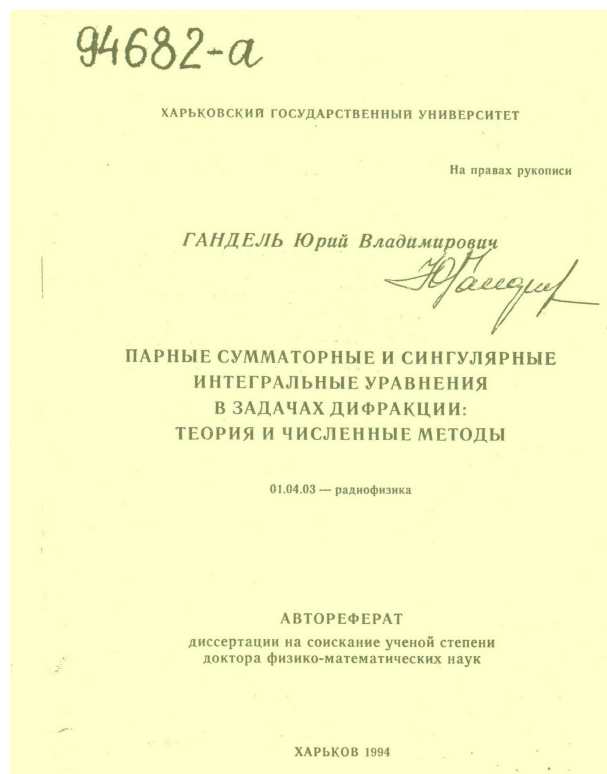
В 1983 году Юрий Владимирович совместно с Иваном Кузмичем организует сначала Всесоюзный, а потом Международный симпозиум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики", который проходил в г. Харькове. Симпозиум организовывался каждые два года. Четыре первых проходили в Харькове, а потом переместился на берег моря и в 1991 году прошел в г. Одессе. После этого вплоть до 2015 года встречи проходили в различных курортных пансионатах Украины. В 2001 году симпозиум был посвящен памяти проф. Белоцерковского С. М.. А в 2013 году прошел юбилейный симпозиум, посвященный 30-ти летию начала проведения. За эти годы немало ученых с мировым именем приняли участие в этом симпозиуме. Но также много участвовало и молодых ученых, которые получали первый опыт в общении с научным сообществом.



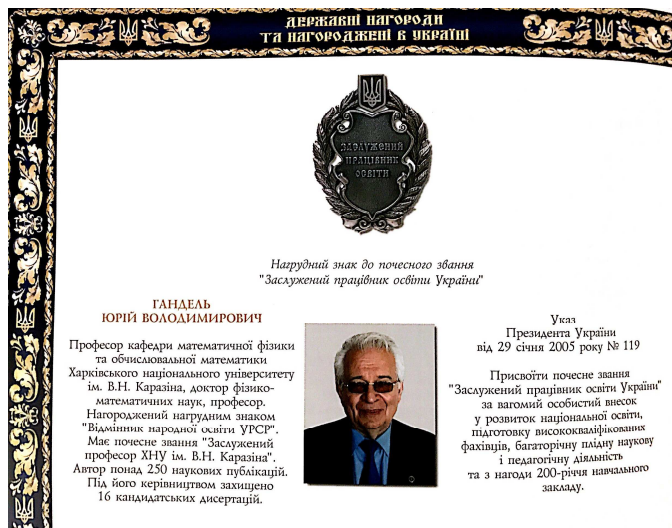
На фото слева на право: Щербина В. А., Лифанов И. К., Гандель Ю.В.



Титульный лист автореферата на соискание ученой степени кандидата наук.



Титульный лист автореферата на соискание ученой степени доктора наук.



Государственные награды и награжденные в Украине

Часто Юрий Владимирович помогал ученикам своих коллег, и во многом эта помощь касалась решения бюрократических вопросов. Благодаря своей коммуникабельности у него были знакомства во многих учреждениях Украины и не только, и эти знакомые могли в кратчайшие сроки уладить технические вопросы, которые до этого казались непреодолимыми.



Северный корпус Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Табличка на двери лаборатории в Северном корпусе ХНУ имени В. Н. Каразина.

Во многом благодаря инициативе и гражданской смелости Ганделя Юрия Владимировича Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина получил в 2004 году в дар от государства свой Северный корпус. В Северном корпусе на территории факультета компьютерных наук Юрий Владимирович получает комнаты, где открывает лабораторию: «Математического моделирования физических процессов». Изначально планировалось, что в этой лаборатории будет кроме научного кабинета еще и кабинет оснащенный компьютерами, а возможно и кластером. Этот кабинет, по задумке Юрия Владимировича и его ученика Виктора Олеговича Мищенко, должен был помочь, как в изучении новых численных возможностей, так и в ускоренных, за счет качества оборудования, расчетах уже построенных моделей различных устройств. Но, к сожалению, этой мечте не суждено было сбыться. Комнат в «новом» здании было много, а вот денег на оснащение у университета не хватило. В результате Юрий Владимирович получил красивую комнату, в которой, как он говорил, мог «спрятаться» от иногда назойливых собеседников. За 10 лет эта комната дала множество научных работ и самое главное математических идей и подходов позволивших решить множество задач. В 2005 году Юрий Владимирович за активное участие в жизни университета и за то, что внёс значительный вклад в развитие математической науки, подготовку специалистов-математиков, общественную жизнь университета и г. Харькова получает почетное звание: «Заслуженный працівник освіти». А в 26 декабря 2014 года большой совет ХНУ имени В. Н. Каразина присваивает Юрию Владимировичу почетное звание заслуженный профессор ХНУ имени В. Н. Каразина. Это звание заслужено было присвоено Артисту-математику с большой буквы. На лекции или на семинаре он заставлял слушателя обратить внимание даже на незначительные детали, которые впоследствии оказывались изюминкой всего решения, и делал он это с помощью жестов, интонаций, иногда даже шутки. Многие слушатели таких лекций

спустя годы вспоминали его искрометные высказывания и математический материал, к которому он относился.

Многие годы на механико-математическом факультете проходили дни факультета. В эти дни студентам разрешалось многое: шутить над профессорами, разыгрывать их, петь с ними, и даже ставить в неловкое положение вопросами с подтекстом. И Юрий Владимирович, благодаря своему чувству юмора, был одним из любящих профессоров, над которым много раз пытались подшутить и поставить в неловкое положение, но, увы, почти всегда профессор выходил сухим из воды, а иногда даже оборачивал шутку против шутника. Но все были довольны, так как шутка была всегда смешной и очень корректной.

Автор благодарит Инну Михайловну Гандель и Екатерину Витальевну Несвит за помощь в оформлении статьи, а также всех учеников и коллег Юрия Владимировича, вспомнивших и рассказавших интересные факты из жизни нашего Учителя. Все мы скорбим в связи с утратой учителя, ученого, доброго человека и высказываем глубочайшие соболезнования Инне Михайловне и всем кто знал Юрия Владимировича.

Список литературы

1. Професори Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна : Бібліографічний довідник / За редакцією В. С. Бакірова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2009. – 372 с.
2. Архів НТУ «ХПІ» Д.33473.
3. «Информация из донесения о безвозвратных потерях». ОБД "Мемориал". 2014. - Режим доступа: <<http://www.obd-memorial.ru/html/info.htm?id=51400713>>. - Дата обращения : 22 июня 2014.
4. Архив ХНУ имени В. Н. Каразина.
5. Сайт школы № 131 г. Харькова. - Режим доступа: <<http://school131.edu.kh.ua/>>. - Дата обращения : 22 мая 2017.
6. Сайт школы № 27 г. Харькова. - Режим доступа: <<http://pml27.klasna.com/>>. - Дата обращения : 22 мая 2017.

References (transliterated)

1. Bakirov V. S. *Profesory Kharkivs'kogo Natsional'nogo Universytetu imeni V. N. Karazina : Bibliografichnyy dovidnyk* [Professors of the V.N. Karazin Kharkiv National University: Bibliographic References]. Kharkiv, KhNU imeni V. N. Karazina Publ., 2009. 372 p.
2. Arkhiv NTU «KhPI» D.33473 [Archive of NTU «KhPI» D.33473].
3. "Informatsiya iz doneseniya o bezvozvratnykh poteryakh" OBD "Memorial" [«Information from the report on the irrevocable losses». Generalized Data Bank "Memorial"]. Available at: <http://www.obd-memorial.ru/html/info.htm?id=51400713>. (accessed 22.06.2014).
4. Arkhiv KhNU imeni V. N. Karazina [Arhive of the V.N. Karazin Kharkiv National University].
5. Sayt shkoly № 131 g. Khar'kova [Web page of the school № 131, Kharkov]. Available at: <http://school131.edu.kh.ua/>. (accessed: 22.05.2017).
6. Sayt shkoly № 27 g. Khar'kova [Web page of the school № 27, Kharkov]. Available at: <http://pml27.klasna.com/>. (accessed: 22.05.2017).

Поступила (received) 11.04.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

В пам'ять про професора Ганделя Ю. В. / С. В. Духопельников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 5 – 9. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

В память о профессоре Ганделе Ю. В. / С. В. Духопельников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 5 – 9. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

In memory of Gandel Yu. V. / S. V. Dukhopelnykov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 5 – 9. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Духопельников Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Духопельников Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Dukhopelnykov Sergey Vladimirovich – Candidate of Engineering Science, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, National Technical University «KhPI», Kharkov; tel.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

О. Р. БЕЛЯНСКА, М. Д. ВОЛОШИН, Д. М. КАЧАНОВ, Ю. А. КАЧАНОВА

ВИРОБНИЦТВО БІОГАЗУ ТА КОМПЛЕКСНОГО ДОБРИВА З ТВЕРДИХ ПРОМИСЛОВО – ПОБУТОВИХ ВІДХОДІВ ІЗ ДОДАВАННЯМ АКТИВНИХ ДОМІШОК

Наведено дослідження впливу додавання активних домішок до анаеробно зброджуваної суміші твердих промислово – побутових відходів на динаміку та швидкість виходу біогазу методом регресійного аналізу та лабораторних досліджень. Визначено вплив факторів, що впливають на якість процесу анаеробного бродіння, зокрема динаміку та швидкість виходу біогазу за отриманими результатами. Методом регресійного аналізу встановлено вплив біологічно активних домішок, доданих до зброджуваної суміші твердих промислово – побутових відходів, на швидкість та динаміку виходу біогазу.

Ключові слова: анаеробне бродіння, біогаз, активні домішки, тверді побутові відходи.

Приведено исследование влияния добавления активных примесей к анаэробно сбраживаемой смеси твердых промышленно – бытовых отходов на динамику и скорость выхода биогаза методом регрессионного анализа и лабораторных исследований. Определено влияние факторов, которые влияют на качество процесса анаэробного брожения, в частности динамику и скорость выхода биогаза по полученным результатам. Методом регрессионного анализа установлено влияние биологически активных примесей, прибавленных к сбраживаемой смеси твердых промышленно – бытовых отходов, на скорость и динамику выхода биогаза.

Ключевые слова: анаэробное брожение, биогаз, активные добавки, твердые бытовые отходы.

The effect of adding active admixtures to the fermentation mixture of solid industrial waste on the dynamics and speed of biogas emission is studied using regression analysis and laboratory tests. The influence of the factors that affect the quality of the process of anaerobic fermentation in particular dynamics and biogas emission speed is determined by the results. The method of regression analysis is used to study the influence of the biologically active admixtures added to the fermentation mixture of solid industrial waste on the speed and dynamics of biogas emission. It is found that the most optimal is the process of fermentation of solid industrial waste with the addition of enzymes in the amount of 0,05 g per 1 kg of fermentation mixture, then the final emission of biogas is increased by 1,5 times for 1 kg of dry substance. A technology scheme of producing biogas and complex fertilizer from solid industrial waste with the addition of active admixtures is proposed.

Key words: anaerobically fermented, biogas, active additives, solid industrial waste.

Вступ. В останній час в Україні існує проблема накопичення побутових та промислових відходів виробництва, що несуть екологічну загрозу для населення. Однією з важливих задач є збереження і поліпшення стану довкілля.

Водночас існує енергетична залежність України від імпортованих енергоносіїв. Україна щорічно споживає близько 200 млн. т. умовного палива і належить до енергодефіцитних країн, покриває свої потреби в енергії на 53 % (в основному за рахунок кам'яного вугілля) та імпортує 75 % необхідного обсягу природного газу та 85 % сирої нафти і нафтопродуктів. Така структура паливно-енергетичного комплексу утворює залежність економіки України від країн-експортерів нафти і газу, що є загрозою для її енергетичної і національної безпеки. Тому актуальною задачею буде створення технології виготовлення біопалива, що дасть можливість посилити енергетичну незалежність України і створити перспективу для розвитку сільського господарства [1].

Використовуючи альтернативні джерела енергії, такі як сонячне випромінювання, вітер, біомаса, вторинні енергетичні ресурси, можна зменшити використання традиційних джерел енергії та зменшити техногенний вплив на довкілля.

Використання процесів анаеробного зброджування дозволяє отримувати біогаз, який можливо використовувати на власні потреби, або потреби виробництва, в якості електричної, теплової енергії. Також метод анаеробного бродіння дозволяє переробляти та знезаражувати побутові та промислові відходи, що накопичуються на сміттєзвалищах та є екологічною загрозою для довкілля. В роботах Сачко В. В., Плахотника О. М., Бондаря І. Л., Ютиной А. С., Гольдфарба Л. Л. говориться про екологічні аспекти використання процесів анаеробного бродіння в технології одержання біогазу. Основним показником якості процесу зброджування є динаміка та швидкість виділення біогазу. Чим вище швидкість виходу біогазу, тим якісніше проходить процес бродіння [2]. Додавання активних домішок до зброджуваної суміші дозволить отримувати біогаз в менший проміжок часу.

Аналіз останніх досліджень. Незважаючи на те, що останнім часом в Україні реалізується все більше проєктів з альтернативної енергетики, загальна частина використання відновлювальних джерел енергії не перевищує 2 % [3]. Використання біогазових технологій дозволяє вирішувати проблеми, пов'язані з утилізацією та переробкою великої кількості накопичених відходів. Переробка органічних речовин у відходах відбувається за рахунок життєдіяльності мікроорганізмів. Перевагами анаеробної переробки відходів є низька енерговитратність, одержання біогазу, а саме метану, в якості енергоносія, та отримання осаду після процесу бродіння, що може використовуватись в якості добрива. Недоліком процесу метанування є недостатньо ефективний процес переробки органічної сировини мікроорганізмами.

Найчастіше інтенсифікація процесу метанування в біореакторі здійснюється за рахунок підігріву та перемішування завантажуваного субстрату [3]. Безперервне завантаження перероблюваної суміші дає можливість стабілізувати швидкість анаеробного розкладання субстрату, що зброджується, та забезпечується рівномірний вихід біогазу.

Перемішування осаду в біореакторах дозволяє забезпечити ефективне використання всього об'єму завантаженої суміші, виключає утворення кірки та «мертвих зон», сприяє покращенню газоутворення [4].

Результати досліджень [5] підтверджують можливість підвищення ефективності процесу метанового бродіння шляхом попередньої механічної обробки зброджувальної суміші, а саме шляхом диспергування. Цей метод дозволяє зменшити процес метанового бродіння до 20 діб, та збільшити кількість переробленої органічної частини.

Для підтримки концентрації необхідної кількості мікроорганізмів у зброджувальній суміші, застосовується рециркуляція, коли частина зброджених осадів повертається у завантажувальний бункер [6].

Постановка задачі. Дослідити вплив активних домішок, що додають до зброджувальної суміші, на кінетику та швидкість виходу біогазу. Методом регресійного аналізу та лабораторних досліджень визначити технологічні параметри процесу анаеробного бродіння твердих промислово – побутових відходів з додаванням активних домішок. Розробити принципову технологічну схему та визначити параметри технологічного режиму одержання біогазу та комплексного добрива на основі твердих промислово-побутових відходів.

Математична модель і метод розрахунку. Анаеробне зброджування проводили на лабораторній установці (рис. 1), що складалась з наступних частин: корпус внутрішньо теплоізолюваний, скляний циліндр для зброджування ємністю 0,5 дм³, що герметично закритий кришкою, газовідводна трубка, газозбірник, мірний циліндр для вимірювання об'ємів витісненої біогазом води. Для підтримки постійної температури мезофільного режиму (38°С) зброджування використовували електричний нагрівач з терморегулятором, занурений у біореактор.

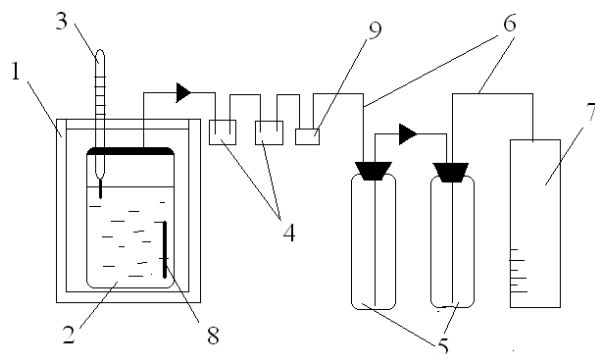


Рис. 1 – Схема лабораторної установки для одержання біогазу з твердих промислово - побутових відходів з додаванням активних домішок: 1 – корпус з внутрішньою теплоізоляцією; 2 – реактор для анаеробного бродіння; 3 – термометр; 4 – поглиначі вологи та CO₂; 5 – газозбірники; 6 – газовідводна трубка; 7 – циліндр для збору витісненої води; 8 – електричний нагрівач з терморегулятором; 9 – пікнометр.

користували наступну формулу:

Одночасно було запущено в дію три лабораторні установки анаеробного бродіння з різним складом зброджувальної суміші, а саме:

- відходи хлібозаводу – 45 %, соняшниковий шрот – 50 %, олія – 5 % (без додавання активних домішок);
- відходи хлібозаводу – 45 %, соняшниковий шрот – 45 %, олія – 5 %, курячий послід – 5 %;
- відходи хлібозаводу – 45 %, соняшниковий шрот – 50 %, олія – 4,99 %, біологічно активні домішки – 0,01 %.

Розрахунок щільності одержаного біогазу виконували згідно методики [7], та визначали за формулою:

$$\rho_{20} = \frac{m_{\Gamma} - m_{\Pi}}{KV} + 1,2047, \quad (1)$$

де m_{Γ} – маса пікнометра із газом, г; m_{Π} – маса пікнометра із вакуумом, г; V – об'єм пікнометра, дм³; K – коефіцієнт, що дорівнює 98,792.

Для визначення реального об'єму пікнометра ви-

$$V = \frac{m - m_{\Pi}}{\rho - 1,2047K}, \quad (2)$$

де m – маса пікнометра із дистильованою водою, г; ρ – щільність дистильованої води ($t = 20^{\circ}\text{C}$), що дорівнює 998,078, кг/м³; 1,2047 – щільність повітря ($t = 20^{\circ}\text{C}$).

Виділення біогазу на протязі всього часу експерименту на всіх трьох установках проходило з різною швидкістю. Дані експерименту вказують на те, що після 18 доби проведення процесу анаеробного бродіння, виділення біогазу у другій і третій установці, до яких додавали активні домішки, виділення біогазу значно зменшувалось, отже подальше ведення процесу отримання біогазу недоцільне.

Процес зброджування на трьох установках проходив з різною швидкістю. На всіх установках максимальне виділення біогазу (на 1 кг сухої речовини) спостерігалось на одинадцять – чотирнадцять добу: 0,067 дм³/доб – на установці без додавання активних домішок (рис. 1, а); 0,09 дм³/доб – на установці з додаванням курячого посліду в якості активних домішок; (рис. 1, б); 0,107 дм³/доб – на установці із сумішшю з додаванням ферментного препарату (рис. 1, в). На 18 добу експерименту виділення біогазу на всіх трьох установках став у різному ступеню малим: менше ніж 0,006 дм³/доб – на установці без додавання активних домішок (рис. 1, а); менше ніж 0,015 дм³/доб – на установці з додаванням курячого посліду (рис. 1, б); менше ніж 0,012 дм³/доб – на установці з додаванням біологічно активних домішок (рис. 1, в).

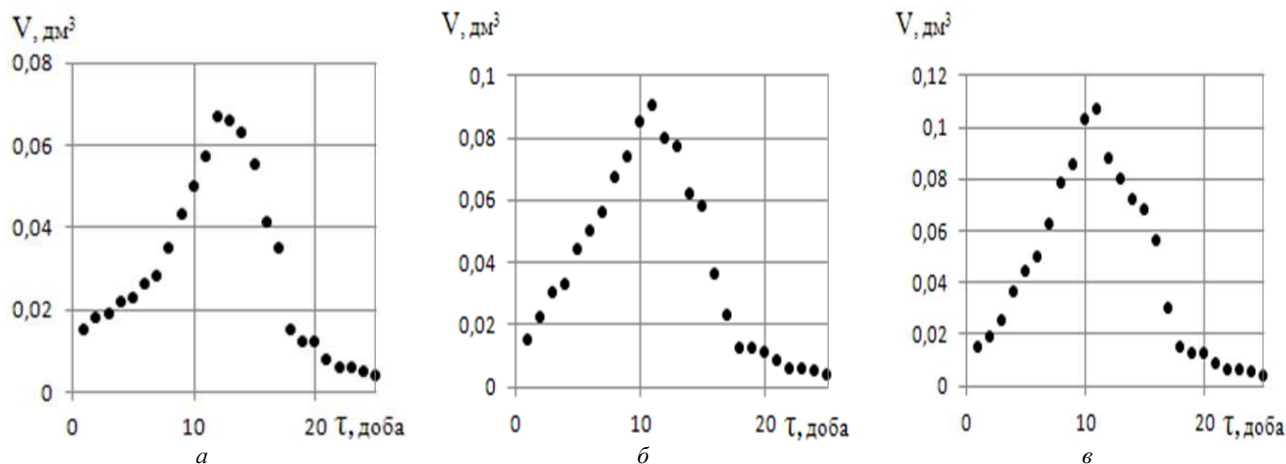


Рис. 2 – Динаміка виділення біогазу із зароджуваної суміші за часом в перерахунку на 1 кг сухої речовини: а – без додавання активних домішок; б – з додаванням курячого посліду; в – з додаванням біологічно активних домішок.

Встановлено, що для отримання максимальної кількості біогазу із зброджуваної суміші твердих промислово-побутових відходів з додаванням активних домішок достатньо 18 діб. Додавання біологічно активних домішок до зброджуваної суміші твердих промислово-побутових відходів дозволяє підвищити накопичення виходу біогазу та збільшити загальний об'єм одержаного біогазу в 1,5 рази, а саме з $0,54 \text{ dm}^3$ до $0,73 \text{ dm}^3$ на 1 кг сухої речовини. (рис. 3).

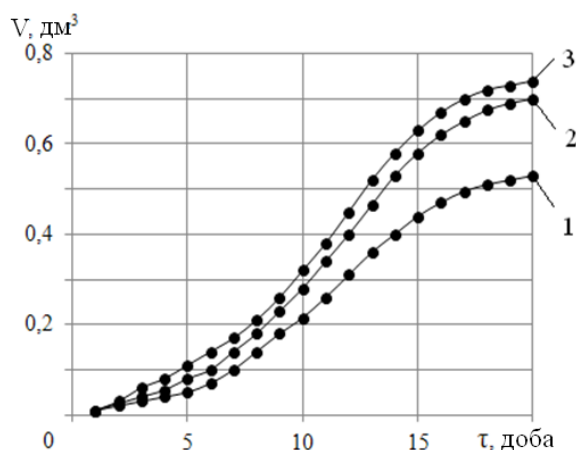


Рис. 3 – Кінетика накопичення біогазу від тривалості бродіння в перерахунку на 1 кг сухої речовини із суміші твердих промислово-побутових відходів: 1 – без додавання домішок; 2 – з додаванням курячого посліду; 3 – з додаванням біологічно активних домішок.

Результатом є рівняння, що описують процес накопичення біогазу за трьома установками:

а) без додавання активних домішок:

$$\hat{y} = 0,0003x^2 + 0,0252x - 0,0562, \quad R^2 = 0,9763; \quad (3)$$

б) при додаванні курячого посліду в якості біологічно активних домішок:

$$\hat{y} = 0,0005x^2 + 0,0322x - 0,0695, \quad R^2 = 0,9787; \quad (4)$$

в) при додаванні біологічно активних домішок:

$$\hat{y} = 0,0003x^2 + 0,0393x - 0,0736, \quad R^2 = 0,9788. \quad (5)$$

Перший коефіцієнт рівняння визначає швидкість накопичення біогазу в залежності від часу. Аналіз побудованих моделей дозволяє стверджувати, що процес анаеробного бродіння твердих побутових відходів з додаванням біологічно активних домішок, зокрема ферментів *Amylase* та *Lipase* був найбільш оптимальним (рис. 3). Йому майже не поступається друга дослідна проба з додаванням курячого посліду. А найменш ефективним був процес анаеробного бродіння в третій установці без додавання біологічно активних домішок.

Отриманий біогаз на установках з використанням активних домішок високої якості. Він має щільність $1,2092 \text{ m}^3/\text{kg}$, приблизно 61 % метану, та 38 % діоксиду вуглецю, без врахування домішок інших газів, вміст яких не перевищує 1 %. Такі показники дозволяють використовувати цей газ в промислових та побутових умовах.

Технологічна схема процесу. На основі отриманих даних створено принципову технологічну схему виробництва біогазу та комплексного добрива на основі твердих промислово-побутових відходів (рис. 4), яку можна впровадити на базі очисних споруд з біологічним очищенням стічних вод або як самостійну установку для переробки промислово-побутових відходів.

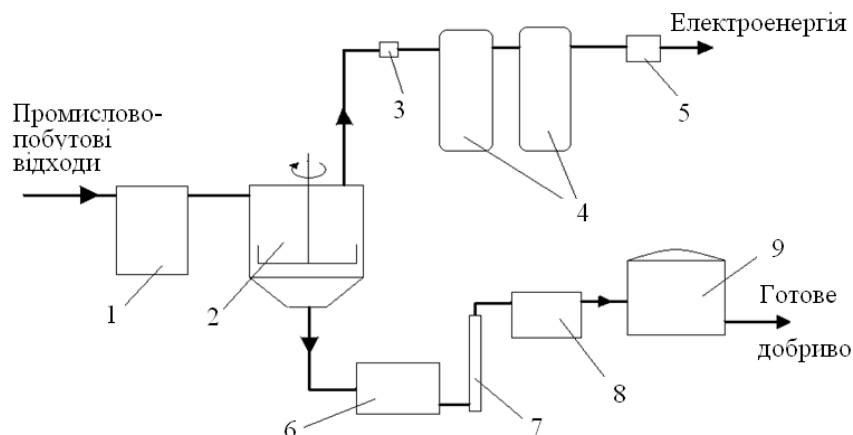


Рис. 4 – Принципова технологічна схема виробництва біогазу з твердих промислово-побутових відходів:
1 – ділянка механічної обробки; 2 – біореактор; 3 – компресор; 4 – газозбірники; 5 – газогенератор; 6 – центрифуга;
7 – елеватор; 8 – ділянка дозування та фасування комплексного добрива; 9 – склад готових добрив.

Принципова технологічна схема виробництва біогазу та комплексного добрива на основі твердих промислово-побутових відходів містить відділення механічної обробки 1, де відбувається подрібнення зброджувальної суміші у диспергаторі (тривалість обробки – 1 хв., *критерій Рейнольдса* $4,49 \times 10^4$, частота коливання рідини 533 с^{-1}). Далі суміш завантажується в біореактор 2, в якому відбувається процес анаеробного бродіння відходів в мезофільному режимі протягом 18 діб. Для прискорення процесу метанування в біореакторі 2 додають активні домішки *Amylase* та *Lipase* в концентрації 0,05 г/кг або курячого посліду концентрацією 5 г/кг, що прискорюють період розкладання органічної речовини в зброджувальній суміші. По завершенні зброджування утворену суміш подають до центрифуги 6 та елеватором 7 на ділянку 8 дозування та фасування комплексного добрива, після якої добрива вивантажуються на склад 9 готової продукції. Отриманий в результаті метанового бродіння біогаз, за допомогою компресора 3 перекачується в газозбірники 4. Після газозбірників біогаз подається на газогенератор 5, де за допомогою біогазу одержують електроенергію, яку можна використовувати на потреби виробництва.

Перспективи подальших досліджень. Перспективним є напрямок досліджень отримання комплексного добрива про утилізації промислово-побутових відходів при додаванні у якості біологічно активного компонента відходів харчової промисловості, що приведе до розширення сировинної бази добрив і знешкодження окремо взятих відходів харчової промисловості.

Висновки. Встановлено, що додавання біологічно активних домішок до анаеробно зброджувальної суміші промислово – побутових відходів дає позитивний результат, а саме прискорення процесу бродіння, що дозволяє зменшити тривалість процесу анаеробного бродіння з 50 до 18 діб. Додавання біологічно активних домішок *Amylase* та *Lipase* концентрацією 0,05 г на 1 кг сухої речовини збільшує кількість виділеного біогазу на 50 %. За отриманими результатами досліджень наведено математичний опис процесу анаеробного бродіння твердих промислово-побутових відходів з додаванням активних домішок. Для розроблення рекомендацій проведено порівняльний аналіз результатів досліджень побудованих моделей. Найбільш оптимальним є процес збродження твердих промислово-побутових відходів з додаванням ферментів, завдяки чому кінцевий вихід біогазу збільшується в 1,5 рази в перерахунку на 1 кг сухої речовини. Розроблено принципову технологічну схему одержання біогазу та комплексного добрива з твердих промислово-побутових відходів.

Список літератури

1. Гелетуха Г. Г., Железня Т. А., Жовмир Н. М., Матвеев Ю. Б. Оценка энергетического потенциала биомассы в Украине // Энергетические культуры, жидкие биотоплива, биогаз : Промышленная теплотехника. – 2011. – Т. 33. – № 1. – С. 57 – 64.
2. Селянська О. Р., Хольщин М. Д., Кармазіна В. В., Чунарьов О. В., Яцюк М. В. Відходи виробництва і споживання та їх вплив на ґрунти і природні води. – К. : Київський університет, 2007. – 152 с.
3. Коваленко Г. Соціально-екологічні проблеми сьогодення // Соціальний захист. – 2001. – № 3. – С. 54 – 57.
4. Lubbecke S. Niedrig-Energie-Membransystem für die biologische Abwasserreinigung // Chem.-Ing.-Techn. – 2000. – № 5. – С. 521 – 525.
5. Белянська О. Р., Хольщин М. Д., Кармазіна В. В. Моделювання впливу попереднього диспергування в технології одержання комплексного добрива // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6 (1115). – С. 12 – 20.
6. Лепке Пітер Пат. 4420111/7, Федеративна Республіка Німеччина. Спосіб біологічної очистки стічних вод / Пітер Лепке. – 1995.
7. Дорохов И. Н., Меньшиков В. В. Системный анализ процессов химической технологии. – М. : Наука, – 2005. – 583с.

References (transliterated)

1. Geletukha G. G., Zheleznya T. A., Zhovmir N. M., Matveev Yu. B. Otsenka energeticheskogo potentsiala biomassy v Ukraine [Assessment of the energy potential of biomass in Ukraine]. *Energeticheskie kultury, zhidkie biotopliva, biogas : Promyshlennaya teplotekhnika* [Energy crops, liquid biofuels, biogas: industrial thermal engineering]. 2011, no. 1, pp. 57–64.
2. Savits'kyy V. M., Khil'chev's'kyy V. K., Chunar'ov O. V. *Vidkhody vyrobnytstva i spozhyvannya ta yikh vplyv na grunt i pryrodni vody* [Industrial and consumption wastes and their impact on soil and natural water]. Kyiv, Kyivs'kyy universytet Publ., 2007, 152 p.
3. Kovalenko G. Sotsial'no-ekologichni problemy s'ogodennya [Modern social-and-ecological problems]. *Sotsial'nyy zakhyst* [Social protection]. 2001, no. 3, pp. 54–57.
4. Lubbecke S. Niedrig-Energie-Membransystem fur die biologische Awasserreinigung. *Chem.-Ing.- Techn.* 2000, no. 5, pp. 521–525.
5. Belyans'ka O. R., Voloshyn M. D., Karmazina V. V. Modelyuvannya vplyvu poperedn'ogo dysperguvannya v tekhnologiyi oderzhannya kompleksnogo dobryva [Modeling the influence of preliminary dispersing in the technology of complex fertilizer]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2015, no. 6 (1115), pp. 12–20.
6. Lepke Piter. *Verfahren zur Abwasserreinigung in einer biologischen Klaranlage*. Patent FRG, no. 4420111/7, 1995.
7. Dorokhov I. N., Men'shikov V. V. *Sistemnyy analiz protsessov khimicheskoy tekhnologii* [System analysis of chemical technology processes]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 583 p.

Надійшла (received) 09.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Виробництво біогазу та комплексного добрива з твердих промислово–побутових відходів із додаванням активних домішок / О. Р. Белянська, М. Д. Волошин, Д. М. Качанов, Ю. А. Качанова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 10 – 14. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Производство биогаза и комплексного удобрения из твердых промышленно–бытовых отходов с активными добавками / А. Р. Белянская, Н.Д. Волошин, Д. М. Качанов, Ю. А. Качанова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 10 – 14. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Producing biogas and complex fertilizer from solid industrial waste with active admixtures / O. R. Belianska, M. D. Voloshin, D. M. Kachanov, Ju. A. Kachanova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 10 – 14. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Белянська Олександра Ростиславівна – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри хімічної технології неорганічних речовин Дніпродзержинського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Белянская Александра Ростиславовна – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры химической технологии неорганических веществ Днепродзержинского государственного технического университета г. Каменское; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Belyanska Olexandra Rostyslavivna – Candidate of Engineering Sciences, Senior Lecturer, Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dneprodzerzhinsk State Technical University, Kamenskoe; tel.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Волошин Микола Дмитрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри хімічної технології неорганічних речовин Дніпродзержинського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Волошин Николай Дмитриевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры химической технологии неорганических веществ Днепродзержинского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Voloshin Nikolai Dmitrievich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Berdyansk State Polytechnic University, Berdyansk, tel.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Качанов Дмитро Михайлович – магістрант кафедри хімічної технології неорганічних речовин Дніпродзержинського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (063) 118-86-16; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Качанов Дмитрий Михайлович – магистрант кафедры химической технологии неорганических веществ Днепродзержинского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (063) 118-86-16; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Kachanov Dmytro Mykhaylovych – Undergraduate, Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dneprodzerzhinsk State Technical University, Kamenskoe; tel.: (063) 118-86-16; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Качанова Юлія Андріївна – магістрант кафедри хімічної технології неорганічних речовин Дніпродзержинського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (093) 635-54-23; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Качанова Юлия Андреевна – магистрант кафедры химической технологии неорганических веществ Днепродзержинского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (093) 635-54-23; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Kachanova Julia Andriyivna – Undergraduate, Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dneprodzerzhinsk State Technical University, Kamenskoe; tel.: (093) 635-54-23; e-mail: kachanov2010@i.ua.

Е. В. БЕРЕЖНАЯ, Э. П. ГРИБКОВ, В. Д. КУЗНЕЦОВ

ЧИСЛЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНСОЛИДАЦИИ ПОРОШКОВОЙ СРЕДЫ ЭЛЕКТРОКОНТАКТНЫМ МЕТОДОМ

Розроблено математичну модель напружено-деформованого стану та температурного поля порошкового матеріалу в термдеформаційній зоні при електроконтактному наплавленні деталей типу тіл обертання, що враховує утворення металевих зв'язків між порошковим середовищем та поверхнею деталі та дозволяє визначити раціональні технологічні режими процесу нанесення функціонального шару. Досліджено розподіл температур в шарі, що наплавляється в термдеформаційній зоні, що дозволяє визначити характер розподілу силових навантажень.

Ключові слова: математична модель, порошкова среда, термдеформация.

Разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния и температурного поля порошкового материала в термдеформационной зоне при электроконтактной наплавке деталей типа тел вращения, учитывающая образование металлических связей между порошковой средой и поверхностью детали и позволяющая определить рациональные технологические режимы процесса нанесения функционального слоя. Исследовано распределение температур в слое, наплавляемом в термдеформационной зоне, позволяющей определить характер распределения силовых нагрузок.

Ключевые слова: математическая модель, порошковая среда, термдеформация.

A mathematical model of the stress-strained state and temperature fields of powder material in the thermal deformation zone at the electric contact surfacing of the shaft type parts is developed. The mathematical model accounts for the metal connection arising between the powder material and the surface of the part and also allows determining efficient operating parameters of the coating formation process. Studying the distribution of the temperatures in the layer surfaced in the thermal deformation zone allows determining the character of power load distribution.

Key words: mathematical model, powder medium, thermal deformation.

Введение. Увеличение прочности, надежности и долговечности деталей механизмов и узлов трения, подвергающихся при эксплуатации повышенному воздействию тепловых и механических нагрузок, является актуальной проблемой современного машиностроения [1].

Анализ последних исследований. При восстановлении изношенных деталей наиболее распространенным технологическим процессом является электроконтактная наплавка композиционными материалами, позволяющая создавать на поверхности изделия необходимый рабочий слой [2]. Сложность проведения процесса наплавки связана с некоторыми ограничениями, обусловленными неравномерным и неконтролируемым распределением электрического тока в различных точках контакта поверхности изделия с порошковой средой, что может приводить к несплавлениям или перегревам и выплескам в отдельных участках [3 – 5]. Технологические режимы процесса электроконтактной наплавки, плотность и величина электрического тока оказывают влияние на протекание процесса спекания порошковых материалов, что делает актуальной разработку соответствующей математической модели [6].

Постановка задачи. Исследование влияния технологических режимов процесса электроконтактной наплавки и фракции порошкового материала на распределение температурных полей в термдеформационном очаге.

Математическая модель. Наличие получаемых в результате спекания достаточно прочных металлических связей между порошковой средой и поверхностью детали несколько видоизменяет как схему, так и методику расчета напряженно-деформированного состояния [7]. В частности, исходя из условия сохранения целостности наплавляемой композиции и считая поверхность детали пластически недеформируемой, можно сделать вывод об отсутствии продольных ε_l и поперечных ε_b деформаций порошковой среды [8], то есть:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_b = 0. \quad (1)$$

Используем методику расчета данной технологической схемы [7] и осуществим разбиение очага деформации на конечное множество элементарных объемов (рис. 1); тогда текущие значения нормальных σ_{xi} и нормальных контактных p_{xi} напряжений можно определить как:

$$p_{xi} = \sigma_{sxi} / 3 \sqrt{(1 + 4\alpha_{xi}) / \alpha_{xi}} \cdot \beta_{xi}; \quad (2)$$

$$\sigma_{xi} = (1 - 2\alpha_{xi}) / (1 + 4\alpha_{xi}) p_{xi}, \quad (3)$$

где α_{xi} , β_{xi} – текущие значения коэффициентов условия пластичности наплавляемой порошковой среды; i – порядковый номер поперечного сечения термдеформационного очага; σ_{sxi} – текущее значение предела текучести твердой фазы данной порошковой композиции, принимаемое величиной, переменной по длине термдеформационного очага и определяемой функционально в зависимости от текущего значения эквивалентной пластической деформации $\varepsilon_{\varepsilon xi}$.

Текущее значение эквивалентной пластической деформации в этом случае может быть определено равенством:

$$\mathcal{E}_{\partial xi} = 1/3 \sum_{i=1}^k \beta_{xi}^{1/2} (4 + 1/\alpha_{xi})^{1/2} \Delta \gamma_{xi} / \gamma_{xi}^2, \quad (4)$$

где k – порядковый номер анализируемого сечения; $\Delta\gamma_{xi}$ – приращение относительной плотности, получаемое при переходе от $(i-1)$ к i -му элементарному сечению.

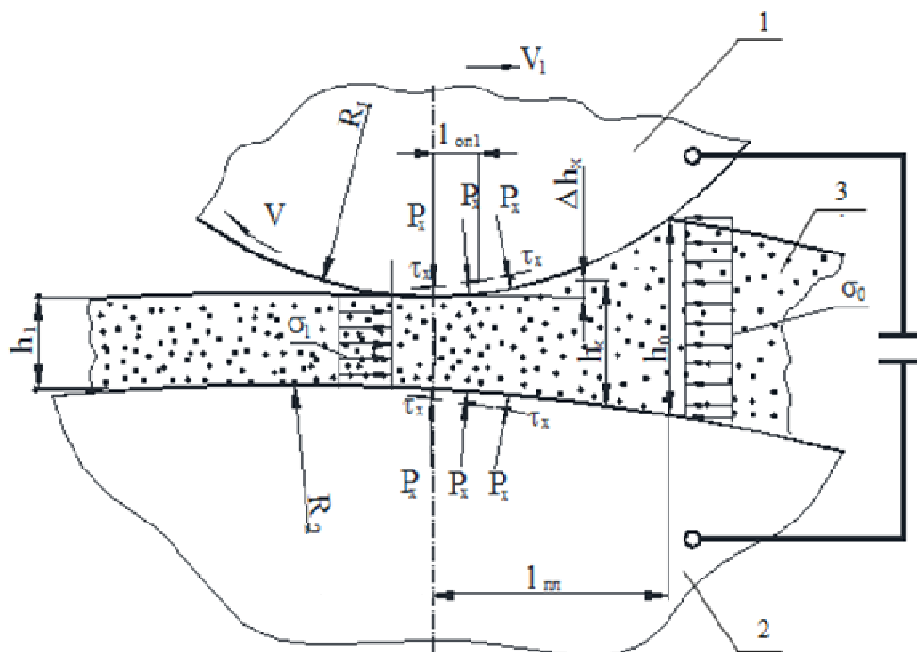


Рис. 1 – Расчетная схема при электроконтактной наплавке порошковых материалов:
1 – ролик-электрод машины для электроконтактной наплавки; 2 – деталь; 3 – слой порошкового материала.

Текущее значение относительной плотности γ_{xi} , знание которого необходимо для определения согласно (4) эквивалентной пластической деформации, может быть определено непосредственно из условия сохранения массы:

$$\gamma_{xi} = h_0 \gamma_0 / h_{xi}, \quad (5)$$

где h_0 – исходная толщина порошковой среды в сечении на входе в термомодеформационный очаг (рис. 1); γ_0 – исходная относительная плотность порошковой среды в сечении на входе в термомодеформационный очаг; h_{xi} – текущее значение толщины наплавляемой композиции.

Решив уравнение статического равновесия выделенного элементарного объема термдеформационного очага по отношению к сдвиговым напряжениям τ_{x1} , имеющим место в плоскости сопряжения порошковой композиции с поверхностью детали, получим:

$$\tau_{x1} = [\sigma_{x1} h_{x1} - \sigma_{x2} h_{x2} + (p_{x1} + p_{x2})(h_{x1} - h_{x2})/2] \Delta x - (p_{x1} f_{x1} - p_{x2} f_{x2})/2, \quad (6)$$

где положительные значения τ_{x1} соответствуют направлению перемещению наплавленной детали;

$$f_{x1(2)} = f_{om1(2)} \left[\frac{l_{n1} - x}{l_{n2}} \right]^{af1(2)}$$

– касательные контактные напряжения в очаге деформации, которые подчиняются закону трения Кулона – Аммонтона; $f_{om1(2)}$ – опорные значения коэффициентов трения, соответствующие значениям данных коэффициентов в сечении на входе ($x = l_{nl}$) и на выходе ($x = 0$) из зоны уплотнения; $a_{f1(2)}$ – степенные показатели, характеризующие форму эпюры распределения коэффициентов трения по длине контактных поверхностей на ролике-электроде и наплавляемой детали соответственно; 1, 2 – индексы, соответствующие условиям трения на ролике-электроде (1) и наплавляемой поверхности (2); Δx – шаг разбиения термомодеформационного очага.

Имеющая достаточно большое количество степеней свободы степенная форма аналитического описания была использована и при расчете текущего значения толщины наплавляемой композиции:

$$h_x = h_1 + (h_0 - h_1)(x/l_{nl})^{a_h}, \quad (7)$$

где h_1 – конечная толщина получаемого слоя (рис. 1); a_h – степенной показатель формы очага деформации, количественная оценка которого может быть принята равной $a_h = 2,0$ [5, 9].

Текущие значения коэффициентов α_x и β_x , согласно рекомендациям работы [9] могут быть определены равенствами:

$$\alpha_x = a(1 - \gamma_x)^m; \quad \beta_x = \gamma_x^{2n}, \quad (8)$$

где $\gamma_x = \rho_x / \rho_0$ – изменяющееся по длине очага деформации значение относительной плотности порошковой композиции; ρ_x, ρ_0 – текущая плотность и плотность твердой фазы данной порошковой композиции; a, m, n – постоянные для каждого конкретного состава значения коэффициентов, характеризующих интенсивность изменения α_x и β_x в зависимости от изменения показателя относительной плотности γ_x [9].

Для определения температурного поля в порошковом материале при электроконтактной наплавке на основе определения теплоемкости и закона Джоуля – Ленца, пренебрегая теплоотводом по рекомендациям работ [6], определяли объемную температуру:

$$t = \frac{U^2 x_i^2 h_{xi} b \gamma_{xi} \rho_0}{R V_{xi}} + t_0, \quad (9)$$

где U – напряжение электрического тока; R – сопротивление электрической цепи; b – ширина порошкового слоя; V_{xi} – текущее значение скорости электроконтактной наплавки; t_0 – температура порошковой среды перед наплавкой.

Сила, действующая на частицу порошка, будет определяться её формой и уровнем нормальных контактных напряжений. Для частиц сферической формы:

$$N_k = p_{xi} \frac{\pi d^2}{2}, \quad (10)$$

где d – диаметр частицы порошкового материала.

Для определения радиуса контакта между частицами, возникающего при пластической деформации использовали следующие известные зависимости [6]:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{N_k \exp(-4 f_{x1(2)} \xi \Delta x / h_{x2})}{\pi \sigma_{sx} m_k k_k (\cos(\varphi) + f_{x1(2)} (\pi / 2 - \varphi))}}, \quad (11)$$

где ξ – коэффициент бокового давления:

$$\xi = \frac{\mu}{1 - \mu} \gamma_x;$$

μ – коэффициент Пуассона; m_k, k_k – число столбцов и пар контактов, проводящих электрический ток:

$$m_k = h_{x2} / d; \quad k_k = m_k \Delta x / d;$$

φ – угол между нормалью к площади контакта и направлением приложения нагрузки.

Площадь контакта между частицами определяется равенством:

$$a_k = \pi \alpha_k k^2, \quad (12)$$

где k – коэффициент теплопроводности.

Обобщенная контактная проводимость была определена на основе решений уравнения Лапласа [6] формулой:

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\sigma_0 k_k}{\frac{2,13}{f_{x1(2)} \pi \xi \sqrt{HB} k_k / N_k} \frac{1}{\exp(2 f_{x1(2)} \xi \Delta x / h_{x2})} - \frac{2,4 \Delta x}{\pi^2 h_{x2}^2}}, \quad (13)$$

где σ_0 – удельная электропроводность; HB – твердость частиц порошкового слоя по Бринеллю.

Для дальнейшего определения температурного поля необходимо знание параметров электрической цепи. В частности, силы тока:

$$I = U \sigma_\varepsilon, \quad (14)$$

и плотности тока:

$$j = \frac{I}{h_{x2} b}. \quad (15)$$

Разность температур между геометрическим центром частицы и межчастичным контактом [6] составляет:

$$dT = \frac{0,2\rho_k d^4 j^2}{k a^2}, \quad (16)$$

где ρ_k – удельное электрическое сопротивление.

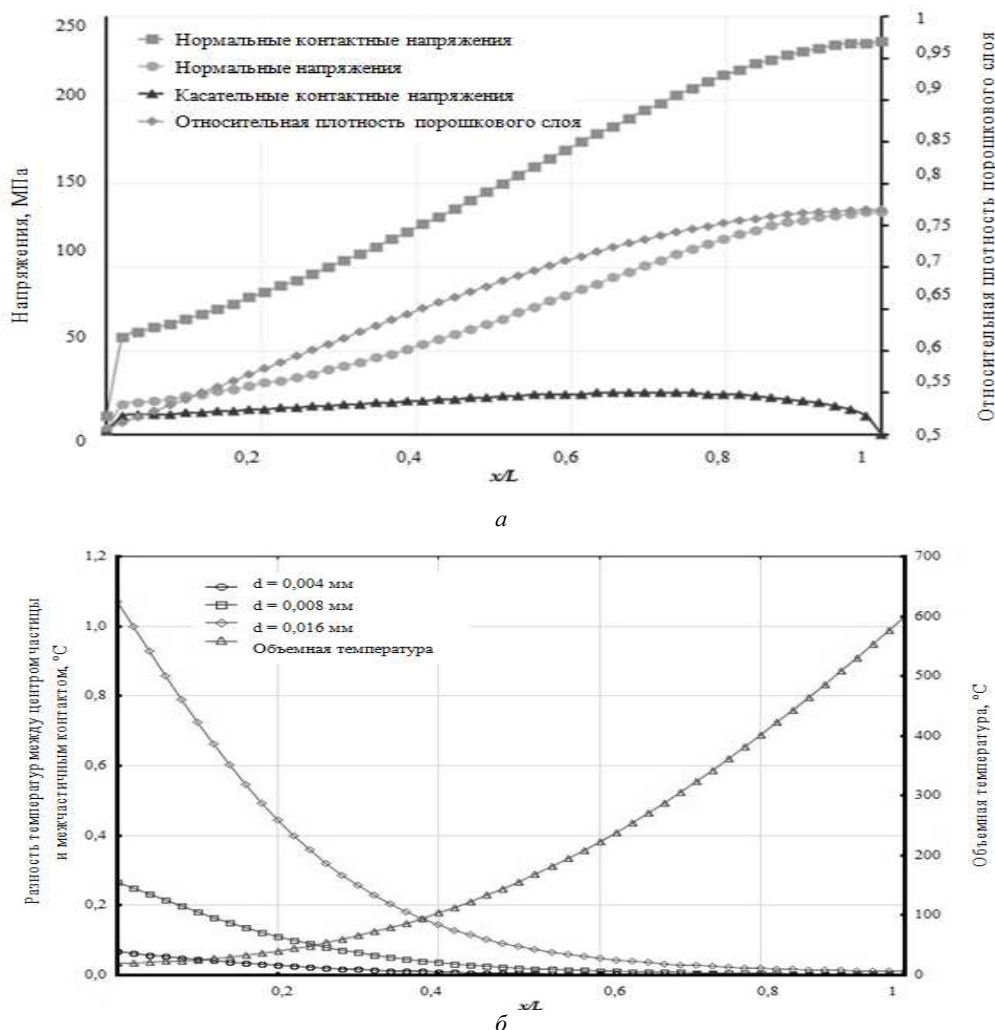


Рис. 2 – Расчетные распределения локальных характеристик процесса по длине термдеформационного очага при электро-контактной наплавке порошкового слоя: а – силовых; б – тепловых.

В качестве векторной направленности используемой рекуррентной схемы решения принимали направление, соответствующее движению электроконтактной наплавки, а в качестве условий связи при переходе от i – го к $(i+1)$ элементарному объему использовали следующие условия:

$$x_{1(i+1)} = x_{2i}; \quad h_{x1(i+1)} = h_{x2i}; \quad f_{x11(i+1)} = f_{x12i}; \quad f_{x21(i+1)} = f_{x22i}; \quad \gamma_{x1(i+1)} = \gamma_{x2i}; \quad p_{x1(i+1)} = p_{x2i}; \quad \sigma_{x1(i+1)} = \sigma_{x2i}, \quad (17)$$

где начальные условия, то есть геометрические и силовые характеристики для первого элементарного объема, соответствовали равенствам:

$$x_{1|i=1} = l_{nl}; \quad h_{x1|i=1} = h_0; \quad f_{x11|i=1} = f_{om}; \quad f_{x21|i=1} = f_{om}; \quad \gamma_{x1|i=1} = \rho_{ym} / \rho_0; \quad \sigma_{x1|i=1} = 0;$$

$$p_{x1|i=1} = 1.155 \sigma_{sx1|i=1} \sqrt{\frac{1 + \alpha_{x1|i=1}}{1 + 4\alpha_{x1|i=1}}} \beta_{x1|i=1}, \quad (18)$$

ρ_{ym} – плотность утряски порошковой среды.

По мере вычисления всех компонент напряженно-деформированного состояния и геометрии термдеформационного очага были определены основные интегральные характеристики процесса электроконтактной наплавки, в том числе усилие на ролике-электроде P_{np} , среднеинтегральное значение нормальных контактных напряжений P_{cp} и момент на ролике-электроде M_1 [9]:

$$P_{np} = b \sum_{i=2}^{Kr} \frac{P_{x2(i-1)} + P_{x2i}}{2} \Delta x; \quad (19)$$

$$p_{cp} = \frac{P_{np}}{bL_0}; \quad (20)$$

$$M_1 = \sum_{i=2}^{Kr} \tau_{xli} \Delta x R_1 b. \quad (21)$$

Представленные выше зависимости (1) – (21) легли в основу математической модели напряженно-деформированного состояния и температурного поля при электроконтактной наплавке порошковых материалов, на основе которых были разработаны соответствующие программные средства.

Пример моделирования. В качестве примера реализации разработанных программных средств на рис. 2 представлены расчетные распределения локальных характеристик по длине термдеформационного очага при электроконтактной наплавке никелевого порошка.

Согласно полученным расчетным данным в процессе электроконтактной наплавки происходит возрастание средней температуры порошкового слоя на выходе из термдеформационного очага при одновременном снижении разности температур между центром частицы и межчастичным контактом. Так, при электроконтактной наплавке порошковой композиции с размером частиц 8 мкм наблюдается снижение разности температур в центре термдеформационного очага почти в 5 раз, что существенно сказывается на протекании процессов спекания порошкового слоя. Кроме того, с увеличением фракции порошкового материала растет разность температур (частицы диаметром 16 мкм имеют начальную разность температур в 4 раза выше, чем порошковый материал с размером частиц 8 мкм). Это свидетельствует о неоднородности температурного поля в термдеформационном очаге, зависящей от изменения теплофизических свойств частиц порошкового материала в процессе нагрева.

Результаты работы использованы при проектировании технологии и оборудования для восстановления деталей, работающих в условиях износа на ряде предприятий машиностроительного комплекса Украины с экономическим эффектом 738 тыс. грн.

Выводы. Разработана математическая модель напряженно-деформированного и теплового состояния порошкового слоя при электроконтактной наплавке, позволяющая прогнозировать характер распределения силовых характеристик процесса по длине термдеформационного очага, а также определять механизм процесса наплавки по известным физико-механическим характеристикам порошкового слоя и заданным технологическим параметрам. На основе предложенной математической модели разработаны программные средства, которые использованы при автоматизированном проектировании энергосиловых и тепловых характеристик процесса консолидации материалов, а также при разработке технологических рекомендаций при получении рабочего слоя, причём как при напекании порошковых композиций, в том числе и рабочего подслоя, так и при синтезе новых материалов при электроконтактной наплавке порошковыми электродами.

Список литературы

1. Фролов К. В. Современная трибология : Итоги и перспективы. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – 480 с.
2. Бурков П. В. Спекание порошков TiC-NiTi пропусканием электрического тока // Тяжёлое машиностроение. – 2008. – № 12. – С. 21 – 23.
3. Чигарев В. В., Пресняков В. А., Кассова Е. В. Разработка технологии подготовки поверхности восстанавливаемого изделия под электроконтактное плакирование порошковым электродом // Захист металургійних машин від поломок : Зб. наук. праць. – Маріуполь : ПДТУ. – 2008. – №10. – С. 238 – 242.
4. Berezshnaya O., Chepel Ju., Tsyvinda N., Pikilnyak A. Mathematic modeling of detail's restoration combined process // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – № 10. – Р. 198 – 201.
5. Бережная Е. В., Грибков Э. П. Электроконтактное упрочнение слоя, нанесенного газотермическим напылением // Ресурсозберігаючі технології виробництва та обробки тиском матеріалів у машинобудуванні. – 2014. – №. 1. – С. 173 – 180.
6. Андрущук Л. О., Шпак А. П., Ошкарёв С. П. Физические основы получения мелкокристаллических и наноструктурных материалов спеканием металлических порошков электроконтактным нагревом // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии: Зб. наук. пр. – К. : РВВ ІМФ, 2008. – Т. 6, № 1. – С. 153 – 215.
7. Chigarev V. V., Belik A. G., Gribov E. P., Gavrish P. A. A mathematical model of the process of rolling flux-cored tapes // Welding International. – 2015. – Vol. 29. – Issue 1. – pp.70 – 74. DOI:10.1080/09507116.2014.888192.
8. Андрущук Л. О., Ошкарёв С. П., Шпак А. П., Курпас В. И. Физические основы получения высокопрочных порошковых материалов с помощью скоростной электротермической обработки // НАН Украины. Физ.-техн. ин-т металлов и сплавов. – К. : ФТИМС НАН Украины, 2007. – 84 с.
9. Gribov E. P., Perig A. V., Danilyuk V. A. Research into the process of producing powder tapes // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2015. – Vol. 77. – pp. 1087 – 1104. DOI: 10.1007/s00170-014-6496-x.

References (transliterated)

1. Frolov K. V. *Sovremennaya tribologiya : Itogi i perspektivy* [Contemporary tribology: results and perspectives]. Moscow, Izdatel'stvo LKI Publ., 2008. 480 p.
2. Burkov P. V. *Spekanie poroshkov TiC-NiTi propuskaniem elektricheskogo toka* [Sintering TiC-NiTi powders by conducting electric current]. *Tyazheloe mashinostroenie*. 2008, no. 12, pp. 21–23.
3. Chigarev V. V., Presnyakov V. A., Kassova E. V. *Razrabotka tekhnologii podgotovki poverkhnosti vosstanavliваемого izdeliya pod elektrokontaktnoe plakirovanie poroshkovym elektrodom* [Developing technology of preparing recoverable item surface for electric contact facing with

- powder electrode]. *Zakhyst metalurgiyynykh mashyn vid polomok: Zb. nauk. prats'* [Error protection of metallurgical equipment: collected works]. Mariupol', PDTU Publ., 2008, no. 10, pp. 238–242.
4. Berezhnaya O., Chepel' Ju., Tsyvinda N., Pikilnyak A. Mathematic modeling of detail's restoration combined process. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015, no. 10, pp. 198–201.
 5. Berezhnaya E. V., Gribkov E. P. Elektrokontaktnoe uprochnenie sloya, nanesennogo gazotermicheskim napyleniem [Electric contact strengthening of a gas thermal sprayed layer]. *Resursozberigayuchi tekhnologii' vyrobnytstva ta obrobky tyskom materialiv u mashynobuduvanni* [Resource-saving production and material forming technologies in mechanical engineering]. 2014, no. 1, pp. 173–180.
 6. Andrushchik L. O., Shpak A. P., Oshkaderov S. P. Fizicheskie osnovy polucheniya melkokristallicheskih i nanostrukturnykh materialov spekaniem metallicheskih poroshkov elektrokontaktnym nagrevom [Physical basis for producing fine crystalline and nanostructural materials by sintering metallic powders by electric contact heating]. *Nanosystemy, nanomaterialy, nanotekhnologii' : Zb. nauk. pr.* [Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies: Collected Works]. Kyiv, RVV IMF Publ., 2008, Vol. 6, no. 1, pp. 153–215.
 7. Chigarev V. V., Belik A. G., Gribkov E. P., Gavrish P. A. A mathematical model of the process of rolling flux-cored tapes. *Welding International*. 2015, Vol. 29, issue 1, pp. 70–74. DOI:10.1080/09507116.2014.888192.
 8. Andrushchik L. O., Oshkaderov S. P., Shpak A. P., Kurpas V. I. Fizicheskie osnovy polucheniya vysokoprochnykh poroshkovykh materialov s pomoshch'yu skorostnoy elektrotermicheskoy obrabotki [Physical basis for producing high-strength powder materials by high-speed electric thermal processing]. *NAN Ukrainy. Fiz.-tekhn. in-t metallov i splavov* [National Academy of Science of Ukraine. Physico-Technological Institute of Metals and Alloys]. Kyiv, FTIMS NAN Ukrainy Publ., 2007. 84 p.
 9. Gribkov E. P., Perig A. V., Danilyuk V. A. Research into the process of producing powder tapes. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2015, Vol. 77, pp. 1087–1104. DOI: 10.1007/s00170-014-6496-x.

Поступила (received) 27.02.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельне математичне моделювання процесу консолідації порошкової середі електроконтактним методом / О. В. Бережна, Е. П. Грибков, В. Д. Кузнецов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 15 – 20. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Численное математическое моделирование процесса консолидации порошковой среды электроконтактным методом / Е. В. Бережная, Э. П. Грибков, В. Д. Кузнецов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 15 – 20. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Numerical mathematical modeling of power medium consolidation by electric contact method / O. V. Berezhnaya, E. P. Gribkov, V. D. Kuznetsov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 15 – 20. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бережна Олена Валеріївна – кандидат технічних наук, докторант кафедри «Інженерія поверхні», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (044) 204-99-14; e-mail: elena.kassova@mail.ua.

Бережная Елена Валерьевна – кандидат технических наук, докторант кафедры «Инженерия поверхности», Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (044) 204-99-14; e-mail: elena.kassova@mail.ua.

Berezhnaya Olena Valeriivna – Candidate of Technical Sciences, Doctoral, Department of Surface Engineering, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv; tel.: (044) 204-99-14; e-mail: elena.kassova@mail.ua.

Грибков Едуард Петрович – доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри «Автоматизовані металургійні машини і обладнання», Донбаська державна машинобудівна академія, м. Донбас; тел.: (0626) 41-46-81; e-mail: amm@dgma.donetsk.ua.

Грибков Эдуард Петрович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные металлургические машины и оборудование», Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Донбасс; тел.: (0626) 41-46-81; e-mail: amm@dgma.donetsk.ua.

Gribkov Eduard Petrovich – Candidate of Technical Sciences, Docent, Automated Metal Forming Process and Machinery Department, Donbass State Engineering Academy, Donbass; tel.: (0626) 41-46-81; e-mail: amm@dgma.donetsk.ua.

Кузнецов Валерій Дмитрович – професор, доктор технічних наук, професор кафедри «Інженерія поверхні», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (044) 204-99-14; e-mail: v.kuznetsov@kpi.ua.

Кузнецов Валерий Дмитриевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры «Инженерия поверхности», Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (044) 204-99-14; e-mail: v.kuznetsov@kpi.ua.

Kuznetsov Valeriy Dmitrievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Surface Engineering, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv; tel.: (044) 204-99-14; e-mail: v.kuznetsov@kpi.ua.

Э. И. ВЕЛИЕВ

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Запропоновано методи розв'язання інтегральних рівнянь, які виникають у багатьох крайових задачах прикладної електродинаміки. Методи засновані на використанні ортогональних багаточленів, які дозволяють враховувати особливості шуканих функцій на кінцях області інтегрування. Ці особливості, як правило, в реальних радіофізичних завданнях пов'язані з поведінкою напруженості електромагнітних полів і поверхневих струмів, наприклад, на ребрах екранів.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне різницеве ядро, ортогональні багаточлени, спектральні співвідношення.

Предлагаются методы решения интегральных уравнений, которые возникают во многих краевых задачах прикладной электродинамики. Методы основаны на использовании ортогональных многочленов, которые позволяют учитывать особенности искомых функций на концах области интегрирования. Эти особенности, как правило, в реальных радиофизических задачах связаны с поведением напряжённости электромагнитных полей и поверхностных токов, к примеру, на рёбрах экранов.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое разностное ядро, ортогональные многочлены, спектральные соотношения.

The article offers the methods of solving integral equations (IE) arising in many boundary value problems of applied electrodynamics. These methods are based on the use of orthogonal polynomials (OP), which allow to consider features of the sought functions at the ends of the region of integration. As a rule, in real radiophysical problems these features are associated with the behavior of electromagnetic fields and surface currents, for example, on the edges of the screens.

Key words: integral equations with the log-difference kernel, orthogonal polynomials, spectral ratio.

Введение. В статье рассматриваются три типа интегральных уравнений (ИУ):

$$\int_{-1}^1 \rho(\xi) [\ln |\xi - \eta| + N_1(\xi, \eta; \varepsilon)] d\xi = f_1(\eta), \quad \eta \in [-1, 1]; \quad (1)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\phi) \left[\ln 2 \left| \sin \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \right| + N_2(\phi, \phi_0, \varepsilon) \right] d\phi = f_2(\phi_0), \quad \phi_0 \in [-\alpha, \alpha]; \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \rho(x) H_0^{(1)}(\varepsilon |x - x_0|) dx = f_3(x_0), \quad x_0 \in (0, \infty). \quad (3)$$

Здесь $\rho(\xi)$ – функции, которые нужно найти; $\{N_j\}_{j=1}^2$ и $\{f_j\}_{j=1}^3$ – известные функции; $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка; ε и α – вещественные параметры. Кроме того, функции $N_j, N_j' \in C$ и $f_j, f_j' \in C$, то есть они принадлежат классу непрерывных функций.

Уравнения (1), (2) – это ИУ 1-го рода с логарифмическим разностным ядром. Уравнение (3) является ИУ типа Винера-Хопфа. В уравнении (2) функция $\rho(\phi)$ и ядро являются периодическими.

Существуют множество внутренних и внешних краевых задач дифракции, которые могут быть сведены к уравнениям типа (1) – (3) [1, 2]. Например, проблемы дифракции плоских волн на бесконечно тонкой полосе и на незамкнутом круговом цилиндрическом экране могут быть сведены к решению ИУ следующего типа:

$$\int_{-1}^1 \rho(\xi) H_0^{(1)}(\varepsilon |\xi - \eta|) d\xi = f_1(\eta); \quad (4)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\phi) H_0^{(1)} \left(\varepsilon \left| \sin \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \right| \right) d\phi = f_2(\phi_0). \quad (5)$$

Здесь неизвестные функции $\rho(\xi)$ и $\rho(\phi)$ пропорциональны плотности тока на экране, $\varepsilon = ka = 2\pi a / \lambda$ – параметр частоты; числа a и α характеризуют геометрию экранов. Поскольку функция $H_0^{(1)}(x)$ может быть представлена формулой

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln x + N(x), \quad (6)$$

где i – мнимая единица; $N(x)$ – непрерывная функция, то ясно, что уравнения (4), (5) можно привести к ИУ (1), (2).

Предлагаемый ниже метод решения ИУ (1) – (3) основан на обращении сингулярной части интегрального

оператора, что позволит свести их к решению *матричных уравнений Фредгольма второго рода*, которые дают возможность определять искомые величины с любой наперед заданной точностью. Более того, обращение сингулярной части оператора позволяет создавать высокоэффективные численные алгоритмы [1 – 5].

Построим решения ИУ (1) – (3) с помощью *метода ортогональных многочленов (ОМ)*, который является довольно простым и общим. Этот метод является частным случаем более общей схемы *метода Бубнова*, применяемого к ИУ, но отличается двумя факторами. Сначала нужно исследовать предварительную структуру искомой функции вблизи краевой точки области интегрирования, а во-вторых, построить спектральные выражения для сингулярных частей ядер с ортогональными многочленами как собственные функции.

Метод ОМ широко используется для решения задач теории упругости и в задачах механики сплошной среды [6 – 8].

Интегральные уравнения с логарифмическим разностным ядром. Сначала рассмотрим ИУ (1). Предположим, что структура решения такова, что функция $\rho(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\rho(\xi) \underset{\xi \rightarrow \pm 1}{\sim} (1 - \xi^2)^{-1/2}. \quad (7)$$

Это означает, что $\rho(\xi)$ имеет корневую особенность на концах интервала $[-1, 1]$. Хорошо известно, что условие (7) следует из условия *Мейкснера* в задачах дифракции волн на бесконечно тонких экранах [1 – 5, 9].

Имеет место следующая **теорема**: если $f_1'(\eta) \in L_2^{1/2}[-1, 1; (1 - \eta^2)^{-1/2}]$, то существует единственное решение ИУ (1) такое, что

$$\rho(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2} \phi(\xi), \text{ где } \phi(\xi) \in L_2^{1/2}[-1, 1; (1 - \xi^2)^{-1/2}].$$

Здесь $L_2^{1/2}[-1, 1; (1 - \eta^2)^{-1/2}]$ – *гильбертово пространство*, в котором скалярное произведение определяется с весовой функцией $(1 - \eta^2)^{-1/2}$.

Представим неизвестную функцию $\rho(\xi)$ следующим образом:

$$\rho(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2} \phi(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n T_n(\xi), \quad (8)$$

где $\{T_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ – *многочлены Чебышёва 1-го рода*; $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Разложение (8) для $\rho(\xi)$ обусловлено тем, что многочлены Чебышёва $T_n(\xi)$ являются собственными функциями следующего интегрального оператора (ИО) [6, 8]:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \ln|\xi - \eta| d\xi = \omega_n T_n(\eta), \quad |\eta| \leq 1. \quad (9)$$

Здесь $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными значениями (ИО) и определяются формулой

$$\omega_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0; \\ 1/n, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

Для дальнейшего вывода нам необходимо условие ортогональности для полиномов Чебышёва, заданное формулой

$$\int_{-1}^1 T_n(\eta) T_k(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{1}{\beta_n} \pi \delta_{kn}; \quad \beta_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 2, & n \neq 0, \end{cases} \quad (11)$$

δ_{kn} – *символ Кронекера*.

Используя (9) и (11), можно показать, что для ядра (9) имеет место сходящееся билинейное разложение

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n T_n(\xi) T_n(\eta). \quad (12)$$

Подставим (8) в ИУ (1) и учтём спектральное выражение (9). Тогда, предполагая, что непрерывная функция $f_1(\eta)$ может быть представлена в виде ряда

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(\eta) \quad (13)$$

и используя условие ортогональности (11) для поиска коэффициентов $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)

$$\rho_k - \sum_{n_0}^{\infty} \alpha_{kn} \rho_n = \gamma_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Здесь

$$\alpha_{kn} = \frac{\beta_k}{2\omega_k} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_k(\eta) T_n(\xi)}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\xi^2)}} N_1(\xi, \eta; \varepsilon) d\eta d\xi, \quad \gamma_k = \pi f_k / (2\omega_k). \quad (15)$$

Можно показать, что $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_2$ и, кроме того,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{kn}|^2 < \infty. \quad (16)$$

Это означает, что матрица $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ порождает абсолютно непрерывный оператор A в l_2 . Следовательно, этот оператор может быть аппроксимирован конечномерным оператором. Другими словами, БСЛАУ (14) может быть решена методом редукции.

Заметим, что двойной интеграл в матричных элементах $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ можно преобразовать в одномерный при условии, что функция $N_1(\xi, \eta; \varepsilon)$ имеет представление

$$N_1(\xi, \eta; \varepsilon) = \int_0^{\infty} \delta(\alpha) \cos[\varepsilon(\eta - \xi)] \frac{d\alpha}{\alpha}; \quad \delta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\sim} O(\alpha^{-s}), \quad s > 1. \quad (17)$$

Чтобы показать это, подставим (17) в (15) и учтём, что [10]

$$\int_0^1 \left\{ \frac{T_{2k}(\eta) \cos(\varepsilon \alpha \eta)}{T_{2k+1}(\eta) \sin(\varepsilon \alpha \eta)} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = (-1)^k \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{J_{2k}(\varepsilon \alpha)}{J_{2k+1}(\varepsilon \alpha)} \right\}. \quad (18)$$

Здесь $J_k(x)$ – это функции Бесселя.

Тогда для α_{kn} получим

$$\alpha_{kn} \sim \frac{[1 + (-1)^{k+n}]}{\omega_k} \beta_k \int_0^{\infty} \frac{\delta(\alpha)}{\alpha} J_k(\varepsilon \alpha) J_n(\varepsilon \alpha) d\alpha. \quad (19)$$

На практике [7] данный метод решения ИУ (1) эффективен только при малых значениях параметра ε ($\varepsilon \sim 0 \div 10$). Как правило, этот параметр связан с волновыми размерами рассеивателей. Это может быть проиллюстрировано ИУ (4), (5), описывающими проблемы дифракции плоских волн цилиндрическими экранами.

Метод ортогональных многочленов, эффективных для произвольных значений ε . Теперь мы дадим альтернативный метод решения ИУ (1). Этот алгоритм основан также на методе ОМ [6], но он эффективен для всех значений ε , включая большие значения.

Выполним следующее преобразование переменных в ИУ:

$$\eta = \frac{\text{th}((\varepsilon/2)\xi)}{\text{th}(\varepsilon/2)} = \alpha; \quad \xi = \frac{\text{th}((\varepsilon/2)\xi_0)}{\text{th}(\varepsilon/2)} = \beta. \quad (20)$$

Тогда ядро ИУ принимает форму

$$\ln|\xi - \eta| = \ln \left| \frac{\text{sh}((\varepsilon/2)(\xi - \xi_0))}{\text{ch}((\varepsilon/2)\xi) \cdot \text{ch}((\varepsilon/2)\xi_0)} \right| - \ln(\text{th}(\varepsilon/2)). \quad (21)$$

Теперь неизвестная функция $\rho(\alpha)$ представляется формулой

$$\rho(\alpha) = \frac{\text{ch}((\varepsilon/2)\xi)}{\sqrt{2(\text{ch} \varepsilon - \text{ch} \varepsilon \xi)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(\alpha). \quad (22)$$

Разложение в ряд (22) следует из того факта, что многочлены Чебышёва $T_n(\alpha)$ являются собственными функциями (ИО) с ядром (21), и имеет место следующее спектральное выражение [3]

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\operatorname{sh}((\varepsilon/2)(\xi - \xi_0))}{\operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi) \cdot \operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi_0)} \right| \frac{T_n(\alpha)}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\varepsilon - \operatorname{ch}\varepsilon\xi)}} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi)} = \lambda_n T_n(\alpha). \quad (23)$$

Здесь $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ являются собственными значениями интегрального оператора и равны

$$\lambda_n = \begin{cases} \ln(2\operatorname{cth}(\varepsilon/2))/(\varepsilon\operatorname{ch}(\varepsilon/2)), & n=0; \\ 1/n\varepsilon\operatorname{ch}(\varepsilon/2), & n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Кроме того, можно показать, что многочлены Чебышёва в переменных вида (20) удовлетворяют ортогональному соотношению

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\alpha)T_k(\alpha)}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\varepsilon - \operatorname{ch}\varepsilon\xi)}} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi)} = \frac{1}{\beta_n} \frac{\pi}{\varepsilon\operatorname{ch}(\varepsilon/2)} \delta_{kn}. \quad (25)$$

Теперь подставим (22) в ИУ (1) и учтём спектральное разложение (23). Используя условие ортогональности (25) для поиска коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, получаем БСЛАУ

$$x_k + \sum_{n=0}^\infty c_{kn}x_n = q_k, \quad k=0, 1, \dots \quad (26)$$

Здесь

$$c_{kn} = \frac{\varepsilon\beta_k\operatorname{ch}(\varepsilon/2)}{8\pi\lambda_k} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{N_1(\alpha, \beta; \varepsilon)T_k(\alpha)T_n(\beta)}{\sqrt{(\operatorname{ch}\varepsilon - \operatorname{ch}\varepsilon\xi)(\operatorname{ch}\varepsilon - \operatorname{ch}\varepsilon\xi_0)}} \frac{d\xi d\xi_0}{\operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi) \cdot \operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi_0)} + \delta_{k0}\delta_{n0} \frac{\ln \operatorname{th}(\varepsilon/2)}{\ln(2\operatorname{cth}(\varepsilon/2))}, \quad (27)$$

$$q_k = -\frac{\beta_k}{2\lambda_k} \operatorname{sh} \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 \frac{f_1(\beta)T_k(\beta)}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\varepsilon - \operatorname{ch}\varepsilon\xi_0)}} \frac{d\xi_0}{\operatorname{ch}((\varepsilon/2)\xi_0)}. \quad (28)$$

Можно показать, что последовательность чисел $\{q_k\}_{k=0}^\infty \in l_2$, а оператор C , соответствующий матрице $\{c_{kn}\}_{k,n=0}^\infty$, абсолютно непрерывный в l_2 . Поэтому систему можно аппроксимировать конечномерным оператором.

Интегральные уравнения с периодическим логарифмическим разностным ядром. Рассмотрим теперь ИУ (2). Предположим снова, что неизвестная функция $\rho(\phi)$ удовлетворяет условию

$$\rho(\phi) \underset{\phi \rightarrow \pm\alpha}{\sim} (\phi^2 - \alpha^2)^{-1/2}. \quad (29)$$

Для удобства представляем функции $\rho(\phi)$ и $f_2(\phi)$ как суммы чётных и нечётных слагаемых:

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= \frac{1}{2}[\rho+(\phi) + \rho-(\phi)]; \quad f_2(\phi_0) = \frac{1}{2}[f+(\phi_0) + f-(\phi_0)]; \\ \rho\pm(\phi) &= \rho(\phi) \pm \rho(-\phi); \quad f\pm(\phi_0) = f_2(\phi_0) \pm f_2(-\phi_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда ИУ для функций $\rho\pm(\phi)$ примут вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho\pm(\phi) \left[-\ln \frac{1}{2|\sin(0,5(\phi - \phi_0))|} + N_2(\phi, \phi_0; \varepsilon) \right] d\phi = f\pm(\phi_0); \quad \phi_0 \in [-\alpha, \alpha]. \quad (31)$$

Для функций $\rho\pm(\phi)$ можно написать

$$\rho+(\phi) = \frac{\cos(0,5\phi)}{\sqrt{2(\cos\phi - \cos\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} T_{2n} \left(\frac{\sin(0,5\phi)}{\sin(0,5\alpha)} \right), \quad \phi \in [-\alpha, \alpha]; \quad (32)$$

$$\rho-(\phi) = \frac{1}{\cos(0,5\phi)\sqrt{2(\cos\phi - \cos\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n-1} T_{2n-1} \left(\frac{\operatorname{tg}(0,5\phi)}{\operatorname{tg}(0,5\alpha)} \right), \quad \phi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (33)$$

Как и ранее, представления (32), (33) обусловлены тем, что многочлены Чебышёва

$$T_{2n}(\sin((1/2)\phi)/\sin((1/2)\alpha)) \quad \text{и} \quad T_{2n-1}(\operatorname{tg}((1/2)\phi)/\operatorname{tg}((1/2)\alpha))$$

являются собственными функциями интегрального оператора, который соответствует сингулярной части ядра ИУ (31). Как показано в [7], существуют следующие спектральные выражения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2|\sin((\phi - \phi_0)/2)|} \frac{T_{2n}\left(\frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{2(\cos \phi - \cos \alpha)}} \cos \frac{\phi}{2} d\phi = \sigma_{2n} T_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi_0)}{\sin((1/2)\alpha)}\right); \quad (34)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{2|\sin((\phi - \phi_0)/2)|} \frac{T_{2n-1}\left(\frac{tg(\phi/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{2(\cos \phi - \cos \alpha)}} \frac{d\phi}{\cos((1/2)\phi)} = \sigma_{2n} T_{2n}\left(\frac{tg((1/2)\phi_0)}{tg((1/2)\alpha)}\right). \quad (35)$$

Здесь $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ – собственные значения ИО, которые равны

$$\sigma_{2n} = \begin{cases} -\ln \sin(\alpha/2), & n=0; \\ 1/(2n), & n=1, 2, \dots; \end{cases} \quad \sigma_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)\cos(\alpha/2)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (36)$$

Кроме того, можно показать, что для полиномов Чебышёва

$$T_n(\sin((1/2)\phi)/\sin((1/2)\alpha)) \text{ и } T_n(tg((1/2)\phi)/tg((1/2)\alpha))$$

имеют место следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} T_n\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right) T_k\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right) \frac{\cos((1/2)\phi)}{\sqrt{(\cos \phi - \cos \alpha)} \cdot 2} d\phi &= \frac{1}{\beta_n} \pi \delta_{nk}; \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} T_n\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2)\alpha)}\right) T_k\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2)\alpha)}\right) \frac{d\phi}{\cos((1/2)\phi) \sqrt{(\cos \phi - \cos \alpha)} \cdot 2} &= \frac{\pi}{\beta_n \cos((1/2)\alpha)} \delta_{nk}. \end{aligned} \quad (37)$$

Можно показать, что для ядра ИУ (34), (35) имеют место следующие билинейные разложения:

$$\ln \frac{1}{2|\sin((1/2)(\phi - \phi_0))|} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n} \beta_n T_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi_0)}{\sin((1/2)\alpha)}\right); \\ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n-1} T_{2n-1}\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2)\alpha)}\right) T_{2n-1}\left(\frac{tg((1/2)\phi_0)}{tg((1/2)\alpha)}\right). \end{cases} \quad (38)$$

Подставим теперь выражения (32), (33) в ИУ (31). Принимая во внимание спектральные выражения (34), (35) и ортогональность (37), получим две БСЛАУ для поиска неизвестных коэффициентов:

$$x_{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2k-2n} x_{2n} = f_{2k}^+, \quad k=0, 1, \dots; \quad (39)$$

$$x_{2k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2k-1-2n} x_{2n-1} = f_{2k-1}^-, \quad k=1, 2, \dots \quad (40)$$

Здесь мы обозначили

$$\begin{aligned} b_{2k-2n} &= \frac{\beta_k}{8\sigma_{2k}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi_0}{2} T_{2k}\left(\frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin(\phi_0/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{(\cos \phi - \cos \alpha)(\cos \phi_0 - \cos \alpha)}} N_2(\phi, \phi_0; \varepsilon) d\phi d\phi_0; \\ b_{2k-1-2n-1} &= \frac{2k-1}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{T_{2k-1}\left(\frac{tg(\phi/2)}{tg(\alpha/2)}\right) T_{2n-1}\left(\frac{tg(\phi_0/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{(\cos \phi - \cos \alpha)(\cos \phi_0 - \cos \alpha)}} \frac{N_2(\phi, \phi_0; \varepsilon)}{\cos(\phi/2) \cos(\phi_0/2)} d\phi d\phi_0; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} f_{2k}^+ &= \frac{\beta_k}{4\sigma_{2k}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f_+(\phi_0) \cos(\phi_0/2)}{\sqrt{2(\cos \phi_0 - \cos \alpha)}} T_{2k}\left(\frac{\sin(\phi_0/2)}{\sin(\alpha/2)}\right) d\phi_0; \\ f_{2k-1}^- &= \frac{2k-1}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f_-(\phi_0) T_{2k-1}\left(\frac{tg(\phi_0/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\cos(\phi_0/2) \sqrt{2(\cos \phi_0 - \cos \alpha)}} d\phi_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Можно показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{2k}^+|^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k-1}^-|^2 < \infty; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{2k \ 2n}|^2 < \infty; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |b_{2k-1 \ 2n-1}|^2 < \infty. \quad (43)$$

Другими словами, оператор B порождённый матрицей $\{b_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$, является абсолютно непрерывным и может быть аппроксимирован конечномерным оператором. Тогда решение БСЛАУ (39), (40) могут быть получены с любой заданной точностью методом усечения.

Что касается справедливости метода усечения, который применяется к решению БСЛАУ (14), (26), (39), (40), отметим следующее. В статье Г.Я. Попова [6] отмечено, что БСЛАУ, к которым сводятся ИУ (1), (2) на основе метода ОМ, всегда могут быть решены методом усечения при условии, что собственные значения ИО, связанные с сингулярной частью ядра, имеют асимптотику

$$\sigma_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} O(n^{-\gamma}), \quad 1 \leq \gamma < 2. \quad (44)$$

Не трудно заметить, что для собственных значений ИО имеет место асимптотика $\omega_n, \lambda_n, \sigma_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} O(n^{-1})$.

Таким образом, здесь выполняется условие (44).

Чтобы вычислить интегралы в матричных элементах ((15), (27), (41)) с полиномами Чебышёва, нужно использовать *квадратурную формулу Филона* [6]. Последнее даёт наилучшее приближение для этих интегралов.

В общем случае можно использовать квадратурную формулу, предложенную Г.Я. Поповым для интегралов [6]

$$J_m = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta P_m^{(\alpha, \beta)}(1-2t) f(t) dt, \quad (45)$$

где $\{P_m^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ – многочлены Якоби.

Эта квадратурная формула не использует значения нулей многочленов Якоби и учитывает колебания подинтегрального выражения. Вся информация по этой формуле содержится в [6].

Интегральное уравнение с разностным ядром на полубесконечном интервале. Наконец, рассмотрим частный случай ИУ (3), который возникает при дифракции E – поляризованной плоской волны

$$E_x^0 = \exp \left[ik \left(\alpha_0 x + \sqrt{1 - \alpha_0^2} y \right) \right], \quad (k = 2\pi / \lambda, \alpha_0 = \cos \theta, \theta - \text{угол падения})$$

на бесконечно тонкой идеально проводящей полуплоскости.

Он может быть записан в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} \rho(x_0) k_0(k' | x - x_0) dx_0 = \pi e^{-k' \alpha_0 x}. \quad (46)$$

Здесь $k' = -ik$, $k_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix)$ – функция Макдональда; $\rho(x_0)$ – плотность поверхностного тока.

Покажем, что, основываясь на методе ОМ, решение ИУ (46) можно получить аналитически.

Будем предполагать, что функция $\rho(x_0)$ удовлетворяет условию

$$\rho(x_0) \underset{x_0 \rightarrow 0}{\sim} O(x_0^{-1/2}). \quad (47)$$

Введём безразмерный параметр $\eta_0 = x_0 k'$, тогда функция $\rho\left(\frac{\eta_0}{k'}\right)$ может быть разложена в ряд:

$$\rho(\eta_0 / k') = \frac{e^{-\eta_0}}{\sqrt{\eta_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n L_n^{-1/2}(2\eta_0). \quad (48)$$

Здесь $\{L_n^{-1/2}(2\eta_0)\}_{n=0}^{\infty}$ – многочлены Лаггера; $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты.

Это выражение (48) следует из того факта, что многочлены Лаггера $L_n^{-1/2}(2\eta)$ являются собственными функциями ИО [6, 8]

$$\int_0^\infty \frac{k_0(|x-y|)}{\sqrt{y}e^y} L_n^{-1/2}(2y) dy \frac{\pi}{\sqrt{2}} \gamma_n L_n^{-1/2}(2x) e^{-x}, \quad (49)$$

а собственные значения ИО равны

$$\gamma_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} O(n^{-1/2}). \quad (50)$$

Условия ортогональности для многочленов Лаггера даются выражением [10]:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta}} L_n^{-1/2}(\eta) L_k^{-1/2}(\eta) d\eta = \gamma_n \delta_{nk}. \quad (51)$$

Из спектрального выражения (49) следует, что для ядра ИУ (46) справедливо билинейное разложение

$$k_0(|x-y|) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-(x+y)} \sum_{n=0}^\infty \gamma_n L_n^{-1/2}(x) L_n^{-1/2}(y);$$

$$iH_0^{(1)}(k|x-y|) = \sqrt{2} e^{ik(x+y)} \sum_{n=0}^\infty \gamma_n L_n^{-1/2}(-2ikx) L_n^{-1/2}(-2iky). \quad (52)$$

Подставим (48) в ИУ (46). Тогда с учётом спектрального выражения (49) и ортогональности (51) при условии $(1+\alpha_0) > 0$ получим для неизвестных коэффициентов $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ следующее представление:

$$\rho_n = 2k' \frac{1}{\gamma_n} \frac{(\alpha_0 - 1)^n}{(\alpha_0 + 1)^{n+1/2}}, \quad \alpha_0 = \cos \theta. \quad (53)$$

Таким образом, мы получили аналитическое представление для функции $\rho(\eta_0/k')$:

$$\rho\left(\frac{\eta_0}{k'}\right) = \frac{2k'e^{-\eta_0}}{\sqrt{\eta(1+\alpha_0)}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \left(\frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0 + 1}\right)^n L_n^{-1/2}(2\eta_0). \quad (54)$$

К сожалению, это представление справедливо только для углов падения $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Однако это ограничение можно обойти, если просуммировать ряд в (54) на основе формул из [8]:

$$\rho\left(\frac{\eta}{k'}\right) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\pi\eta}} k'(1+\alpha_0) {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; (1-\alpha_0)\eta\right) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\pi\eta}} k'(1+\alpha_0) \left\{1 - \sqrt{\pi\eta(1-\alpha_0)} e^{(1-\alpha_0)\eta} \left[1 - \operatorname{erf} \sqrt{\eta(1-\alpha_0)}\right]\right\}. \quad (55)$$

Здесь ${}_1F_1(a; b; t)$ – вырожденная гипергеометрическая функция; $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл вероятности.

Заметим, что представление (55) для плотности поверхностного тока совпадает с результатами других авторов [11], полученными с помощью других методов.

Используя представление (55) для $\rho(x)$, можно установить следующие асимптотики:

$$\text{а) } x \rightarrow 0; \quad \rho(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kx}} e^{i\left(kx - \frac{\pi}{4}\right)} k \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 4ikx \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] + O\left[\left(kx\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$\text{б) } x \rightarrow \infty; \quad \rho(x) \approx -ik \sin \theta e^{ikx \cos \theta} \left[1 + O\left(\frac{1}{kx}\right)\right].$$

Выводы. Таким образом, в данной работе с помощью ортогональных многочленов предложен эффективный алгоритм решения ИУ, в которых сингулярная часть оператора имеет логарифмическую особенность. Эффективность алгоритма обусловлена обращением сингулярной части оператора в явном виде.

Список литературы

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. – Москва : Мир, 1964. – 428 с.
2. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. – Киев : Наукова Думка, 1983. – 252 с.
3. Ikiz T., Koshikava S., Kobayashi K., Veliev E. I., Serbest A. H. Solution of the Plane wave diffraction problem by an impedance strip using a numerical-analytical method: E-polarized case // J. of Electromagn. Waves and Appl. – 2001. – Vol. 15. – № 3. – pp. 315 – 340.

4. Вавилов В. Н., Велиев Э. И., Веремей В. В., Шестопалов В. П. Эффективный метод решения задачи дифракции волн на цилиндрическом экране // ДАН СССР. – 1990. – Т. 313. – С. 585 – 589.
5. Vavilov V. N., Veliev E. I. Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges // Electromagnetics. – 1993. – Vol. 13. – pp. 339 – 357.
6. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва : Наука, 1982. – 343 с.
7. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва : Наука, 1983. – 488 с.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – Москва : Наука, 1986. – 336 с.
9. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – Москва : Мир, 1974. – 327 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Том 2. – Москва : Наука, 1983. – 752 с.
11. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – Москва : Наука, 1973. – 713 с.

References (transliterated)

1. Kheln Kh, Mauye A., Vestfal' K. *Teoriya difraktsii* [Theorie der Beugung]. Moscow, Mir Publ., 1964. 428 p.
2. Shestopalov, V. P. *Summatornye uravneniya v sovremennoy teorii difraktsii* [Series Equations in Modern Diffraction Theory]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983. 252 p.
3. Ikiz T., Koshikava S., Kobayashi K., Veliev E. I., Serbest A. H. Solution of the Plane wave diffraction problem by an impedance strip using a numerical-analytical method: E-polarized case. *J. of Electromagn. Waves and Appl.* 2001, vol. 15, no. 3, pp. 315–340.
4. Vavilov V. N., Veliev E. I., Veremey V.V., Shestopalov V. P. Effektivnyy metod resheniya zadachi difraktsii voln na tsilindricheskom ekrane [Effective method for solving diffraction problem for waves incident on a cylindrical screen]. *DAN SSSR*. 1990, vol. 313, pp. 585–589.
5. Vavilov V. N., Veliev E. I. Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges. *Electromagnetics*. 1993, vol. 13, pp. 339–357.
6. Popov G. Ya. *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy voze shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniy* [Concentration of Elastic Tensions Near Stamps, Cuts, Thin Inhomogeneities and Supports]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 343 p.
7. Aleksandrov V. M., Mkhitaran S. M. *Kontaknyye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami* [Contact Problems for Bodies with Thin Coating and Inlayers]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 488 p.
8. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Continuous Media Mechanics Problems with Mixed Boundary Condition]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 336 p.
9. Mittra R., Lee S. *Analiticheskie metody teorii volnovodov* [Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves]. Moscow, Mir Publ., 1974. 327 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii. Tom 2* [Integrals and Series. Special Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 752 p.
11. Born M., Wolf E. *Osnovy optiki* [Principles of Optics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 713 p.

Поступила (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельно-аналітичні методи розв'язання інтегральних рівнянь у двовимірних задачах теорії дифракції / Е. І. Велиєв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 21 – 28. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Численно-аналитические методы решения интегральных уравнений в двухмерных задачах теории дифракции / Э. И. Велиев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 21 – 28. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Numerical-analytical methods for solving integral equations in two-dimensional problems of the theory of diffraction / E. I. Veliyev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 21 – 28. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Велиєв Ельдар Ісмаїлович – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.

Велиев Эльдар Исмаилович – доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научно-педагогической работе, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.

Veliyev Eldar Ismailovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector for Scientific and Pedagogical Work, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.

А. В. ВОРОПАЙ, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭФРОСА ДЛЯ УЧЁТА ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На основі операційного обчислення і теореми Ефроса запропоновано новий підхід до аналізу перехідних процесів в пружному континуумі, викликаних нестационарними силовими збуреннями. Він дозволяє враховувати внутрішнє в'язке тертя в матеріалі, що описується моделлю тертя Кельвіна – Фойхтга. Зазначений підхід використовує згладжуючий лінійний інтегральний оператор з гаусовим різницею ядром і може бути застосований для будь-яких пружних рішень, які представлені у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки. Досліджено алгебраїчні властивості цього оператора. Наведено приклади розрахунків для балки та пластини в пружній і в'язкопружній постановках.

Ключові слова: механічні коливання, в'язкопружний континуум, перехідний процес, тертя Кельвіна – Фойхтга, операційне числення, теорема Ефроса, інтеграл Дюамеля, інтегральний оператор, функція Гауса, коливання балок та пластин.

На основе операционного исчисления и теоремы Эфроса предложен новый подход к анализу переходных процессов в упругом континууме, вызванных нестационарными силовыми возмущениями. Он позволяет учитывать внутреннее вязкое трение в материале, описываемое моделью трения Кельвина – Фойхтга. Указанный подход использует сглаживающий линейный интегральный оператор с гауссовым разностным ядром и может быть применен для любых упругих решений, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свертки. Исследованы алгебраические свойства этого оператора. Приведены примеры расчетов для балки и пластины в упругой и вязкоупругой постановках.

Ключевые слова: механические колебания, вязкоупругий континуум, переходной процесс, трение Кельвина – Фойхтга, операционное исчисление, теорема Эфроса, интеграл Дюамеля, интегральный оператор, функция Гаусса, колебания балок и пластин.

A new approach to the analysis of transient processes in the elastic continuum, caused by nonstationary force perturbations, on the basis of the operational calculus and the Efros theorem is proposed. It allows taking into consideration the internal viscous friction in the material, described by the Kelvin-Feucht friction model. This approach uses a smoothing linear integral operator with a Gaussian difference kernel and can be applied to any elastic solutions that are represented as Duhamel convolution type integrals. The algebraic properties of this operator are investigated. The examples of calculating for a beam and a plate in elastic and viscoelastic settings are given.

Key words: mechanical oscillations, viscoelastic continuum, transient process, Kelvin-Feucht friction, operational calculus, Efros theorem, Duhamel integral, integral operator, Gaussian function, beam and plate oscillations.

Введение и постановка задачи. К настоящему моменту в теории упругости получено значительное количество численно-аналитических решений для задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций [1]. Существует несколько общепринятых аналитических методов решения указанных задач. Один из основных методов получения численно-аналитического решения нестационарных задач – это использование интегрального преобразования Лапласа. Многие решения могут быть представлены в виде *свёрточных интегралов с ядрами Коши*, например, в монографии [2] дано несколько таких решений для случаев упругого деформирования различных элементов конструкции; всем этим решениям отвечает общая форма следующего вида:

$$u(t) = \int_0^t K(t-\tau) P_0(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $u(t)$ – перемещения объекта в некоторой точке $\mathbf{x}_S$, интересующей исследователя; $P_0(t)$ – внешняя нестационарная нагрузка, приложенная в точке $\mathbf{x}_0$ и вызывающая колебания; $K(t)$ – разностное ядро *интеграла Дюамеля*, несущее, по существу, всю информацию о деформируемом объекте.

Если нагрузка приложена не в одной точке, а в дискретном наборе или на континуальном множестве точек, то используется принцип линейной суперпозиции, и в правой части равенства (1) появляется сумма или еще один (внешний) интеграл.

Заметим, что для реальных элементов конструкций происходит не упругое, а вязкоупругое деформирование. Когда силы вязкого трения малы – ими, естественно, пренебрегают. Однако, в других случаях, диссипацию энергии при механических колебаниях необходимо учитывать. В работе [3] в общем виде описано применение операторного метода расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы; изложенный способ использован при разработке методики динамического расчета цилиндрических пружин (для модели тонкого винтового бруса). Более подробно решение задачи для винтового бруса приведено в [4]. В упомянутых работах анализировался случай кинематического возбуждения колебаний в одномерном вязкоупругом континууме; в данной статье рассматривается силовое возбуждение колебаний в вязкоупругом теле общего вида.

Учет диссипации приводит к корректировке соотношения (1), в котором используется другое интегральное ядро, форма которого сглажена трением:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Разностное ядро $y = K_\eta(t)$ может быть получено тремя основными способами:

1) как реакция системы на удар, полученная и зарегистрированная в результате физического моделирования динамики объекта (то есть специально поставленного и проведенного эксперимента);

2) как решение уравнений, описывающих аналогичный переходной процесс при учете трения;

3) путем соответствующей выглаживающей модификации ядра $y = K(t)$, полученного при математическом моделировании упругих деформаций без учета трения.

В данной статье подробно изучается третий путь, и анализируются его достоинства и недостатки применительно к простейшему виду внутреннего трения: вязкому, описываемому моделью Кельвина – Фойхта [5 – 7]. Будет показано, что такой подход является актуальным и эффективным, когда он применяется вслед за первым (лабораторным) способом получения ядра и позволяет, например, проанализировать влияние температуры материала на вынужденные колебания вязкоупругого континуума. Но прежде мы кратко остановимся на стандартном методе решения этой задачи, упомянутом выше под номером 2.

Влияние вязкого трения на частоты и амплитуды колебаний. Если в задаче не учитывается трение, то ядро интеграла (1), которое мы здесь и далее будем обозначать $K_0(t)$, может быть вычислено как сумма ряда [8]

$$K_0(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot \sin(\omega_j t), \quad (3)$$

где ω_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ – круговые частоты свободных колебаний континуума, перечисленные в порядке возрастания их величины; $f(\omega)$ – амплитудные функции, возникающие при локализации собственных форм колебаний с частотой ω в точке x_0 .

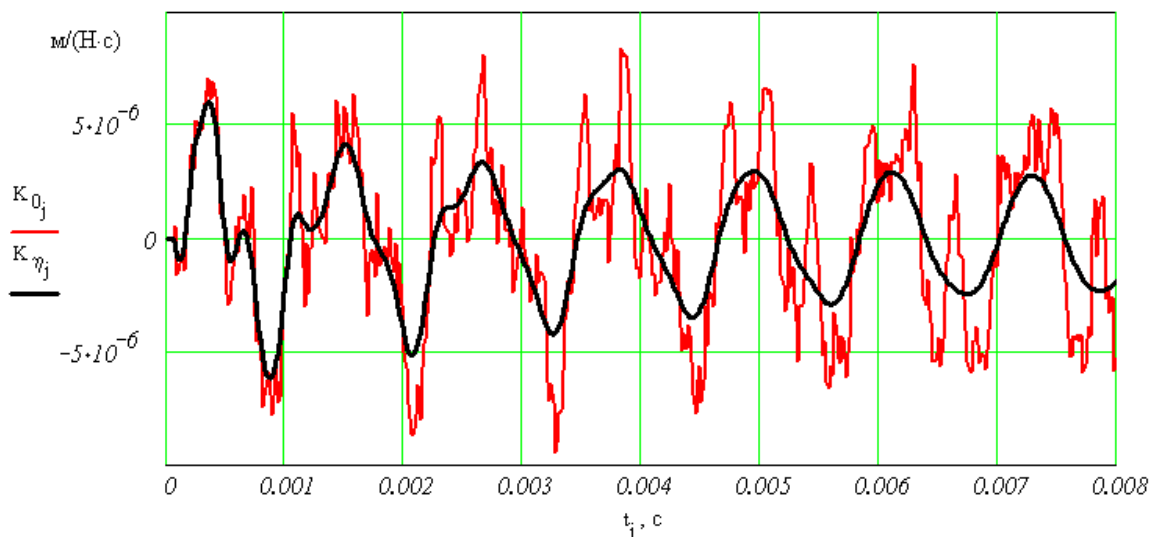


Рис. 1 – Ядра интегралов (1) и (2) для расчета колебаний прямоугольной пластины.

Все значения частот ω_j в этой сумме являются положительными числами, причем для двух- или трехмерных континуумов они не являются кратными, поэтому ядро $K_0(t)$, построенное для примера прямоугольной пластины на рис. 1, не имеет периода повторения, а снижение начальной амплитуды колебаний является следствием наложения гармоник с различными фазами. Дополнительные подробности, связанные с анализом колебаний пластины, приведены в конце этой статьи.

После учета внутреннего трения Кельвина – Фойхта, имеющего коэффициент трения η , равенство (3) приобретает следующий вид:

$$K_\eta(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} \operatorname{Re}[f(i \cdot \lambda_j) \cdot \sin(i \cdot \lambda_j t)], \quad (4)$$

где здесь и далее $i^2 = -1$, а комплексные частоты λ_j находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta \omega_j^2 \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

При условии $\omega_j < 2/\eta$ частоты λ_j размещаются в комплексной плоскости на окружности, показанной на рис. 2, а, а соответствующие гармоники описывают затухающие периодические колебания; демпфирующий множитель j -той гармоники имеет вид $z_j(t) = \exp(-0.5\eta\omega_j^2 t)$. При значениях $\omega_j > 2/\eta$ частоты λ_j перемещаются на отрицательную полуось, а колебания становятся аperiodическими.

На рис. 2 левее штрихпунктирной прямой вязкое демпфирование оказывается настолько сильным, что на промежутке дискретизации $\Delta t = 0.01T_0$ (здесь T_0 – это период колебаний основной гармоники) амплитуда колебания уменьшается в 2 и более раз, и такие колебания далее можно не рассматривать. В результате для примера динамического деформирования пластины сумма (4) является конечной и содержит около 80 слагаемых.

График ядра $K_\eta(t)$ также показан на рис. 1; как и следовало ожидать, после учета трения затухание (или, выражаясь точнее, сглаживание формы) ядра усилилось.

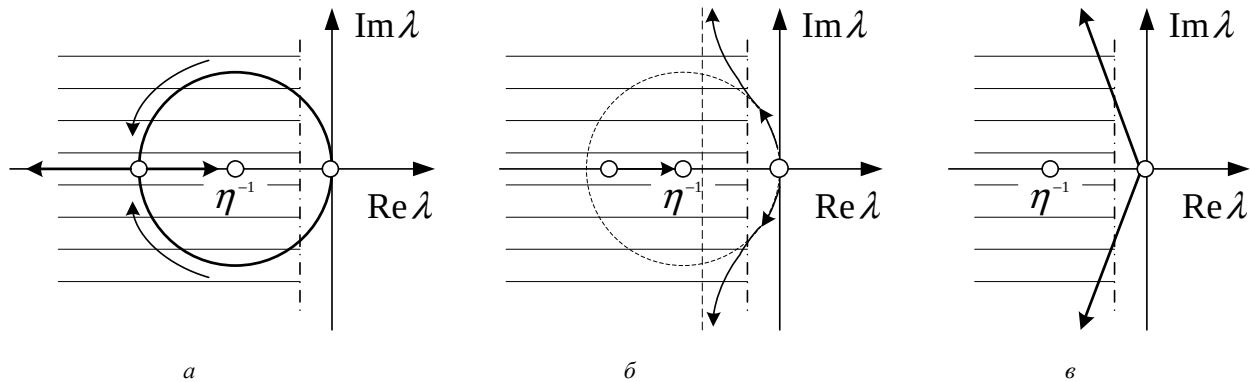


Рис. 2 – Расположение комплексных частот колебаний при различных моделях вязкоупругости: *а* – модель Кельвина – Фойхта; *б* – модель стандартного линейного тела; *в* – модель Боба – Шлиппе – Колара.

Для различных упругих материалов декремент d_0 затухания основной гармоники разный [5, 6], но, как правило, он не выходит за границы диапазона $0.01 \dots 0.1$; на рис. 1 использовано $d_0 = 0.07$. Следовательно,

$$\eta/T_0 = 0.5d_0/\pi^2 \in [0.0005; 0.005].$$

Далее мы воспользуемся этим соотношением при аппроксимациях корректирующего ядра.

Теоретические основы нового метода. Вынужденные перемещения материала при переходном процессе деформирования упругого тела являются решениями следующего векторного уравнения:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}] + \vec{P}(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

где ρ – плотность материала; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_x, u_y, u_z]$ – вектор перемещений в некоторой точке тела V с координатами $\mathbf{x}$ (стержня, балки, пластины или оболочки) в момент времени t ; $\mathcal{L}_x [\mathbf{u}]$ – дифференциальный оператор, составленный из частных производных по координатам и описывающий действие сил упругости; $\vec{P}(t)$ – векторная величина возмущающей нагрузки (внешней силы), сосредоточенной в известной точке $\mathbf{x}_0$,

$$\vec{P}(\mathbf{x}, t) = P_0(t) \cdot \vec{n} \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

$\vec{n}$ – орт направления действия силы; $y = \delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака; $P_0(t)$ – скалярная величина, используемая в интегралах (1) или (2).

Для учёта внутреннего трения в рамках известной модели Кельвина – Фойхта уравнение (5) должно быть модифицировано следующим образом:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathcal{L}_x [\mathbf{u} + \eta \partial \mathbf{u} / \partial t] + \vec{P}(t), \quad (6)$$

где η – коэффициент внутреннего трения, с.

Решения уравнения (5) или (6) разыскиваются при однородных граничных условиях вида

$$\mathcal{L}_{\partial V} [\mathbf{u}] = 0$$

и нулевом начальном условии

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \text{ при } t \leq 0,$$

где $\mathcal{L}_{\partial V} [\mathbf{u}]$ – это линейный оператор, использующий значения функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и ее производных по координатам на точках границы ∂V и не зависящий от времени.

После применения преобразования Лапласа к обеим частям выражения (4) получим в пространстве изображений следующее равенство:

$$\rho s^2 \mathbf{u}_S = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}_S + \eta s \mathbf{u}_S] + \vec{P}(s),$$

которое может быть преобразовано к эквивалентному виду:

$$\rho s^2 \mathbf{u}_S = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}_S] \cdot (1 + \eta s) + \vec{P}(s),$$

или

$$[\rho s^2 I[\cdot] - (1 + \eta s) \mathcal{L}_x[\cdot]] \mathbf{u}_S = \vec{P}(s), \quad (7)$$

где $I[.]$ – это единичный оператор.

Уравнение (7) имеет решение

$$\mathbf{u}_S = [\rho s^2 I[.] - (1 + \eta s) \cdot \mathcal{L}_x[.]]^{-1} \bar{P}(s),$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, s) = K_\eta(\mathbf{x}, s) P_0(s). \quad (8)$$

где

$$K_\eta(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot [(\rho s^2 / (1 + \eta s)^{-1}) \cdot I[.] - \mathcal{L}_x[.]]^{-1}. \quad (9)$$

Если в (7) принять значение $\eta = 0$ и, тем самым, временно отказаться от учета трения, то получим более простое соотношение:

$$\mathbf{u}_S = [\rho s^2 I[.] - \mathcal{L}_x[.]]^{-1} \bar{P}(s), \quad (10)$$

или

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, s) = K_0(\mathbf{x}, s) \bar{P}(s),$$

откуда, после перехода к оригиналам и локализации результата в точке $\mathbf{x}_S$, интересующей исследователя, будем иметь сверточный интеграл вида

$$u(t) = \int_0^t K_0(t - \tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Тогда, с учетом известной *теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения* [9, 10], соотношение (9) будет эквивалентно равенству

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t - \tau) P_0(\tau) d\tau,$$

где

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) K_0(\tau) d\tau,$$

а изображение по Лапласу функции $\Psi_\eta(t, \tau)$ имеет вид

$$\Psi_\eta(s, \tau) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + \eta s}}\right), \quad (12)$$

причем в этом изображении неотрицательное число τ играет роль параметра.

Как видим, учет трения сводится к корректировке разностного ядра Коши в интеграле (11), и

операция корректирования ядра одинакова для всех упругих систем и для всех точек системы.

Функцию $\Psi(t, \tau)$ будем называть *корректирующим ядром*. Если принять значение $\eta = 0$, то получим

$$\Psi_0(s, \tau) = \exp(-\tau s), \text{ что соответствует оригиналу } \Psi_0(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

Но если коэффициент трения $\eta > 0$, то оригинал для изображения (12), к сожалению, отсутствует в справочниках по операционному исчислению, и эта задача потребовала разработки специального метода нахождения корректирующего ядра.

Интегральное свойство корректирующего ядра. Для решения поставленной задачи оказалось возможным прямое использование формулы обращения (здесь i – это мнимая единица)

$$\Psi_\eta(t, \tau) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\Omega \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + \eta \cdot i\omega} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{i\omega}{\sqrt{1 + \eta \cdot i\omega}} + t \cdot i\omega\right) \right] d\omega,$$

где интегрирование выполнялось стандартной процедурой пакета MathCAD, а предел Ω круговых частот ω устанавливался с учетом стабилизации получаемых результатов и во всех случаях удовлетворял условию

$$\Omega \cdot \eta > 10^4.$$

Значения функции $\Psi_\eta(t, \tau)$ оказались положительными, а характерный вид графиков, отвечающих сечениям этой функции при постоянных значениях времени t , показан на рис. 3.

Выясним, чему равняются площади $w(t)$ под графиками сечений корректирующего ядра $\Psi_\eta(t, \tau)$:

$$w(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) d\tau.$$

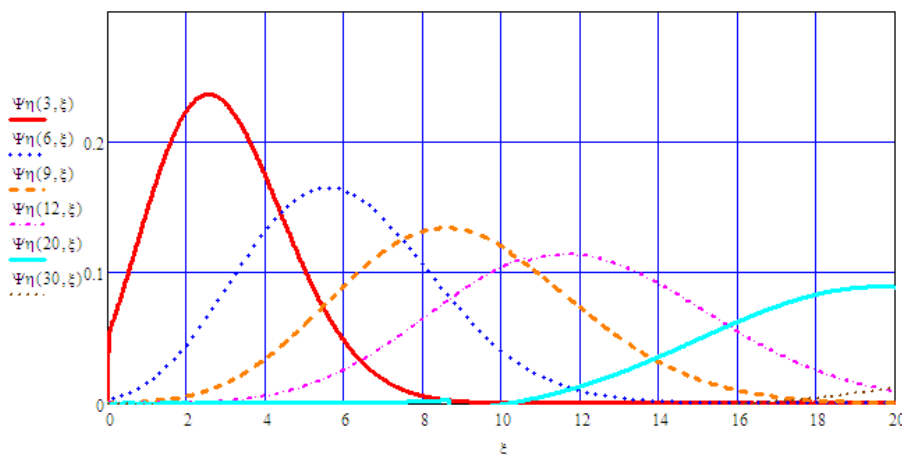
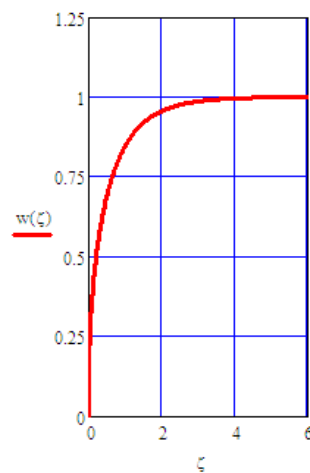
Рис. 3 – Графики корректирующего ядра $\Psi_{\eta}(\zeta, \xi) = \Psi_{\eta}(t/\eta, \tau/\eta)$.

Рис. 4 – Площадь под графиком корректирующего ядра.

Для этого применим к обеим частям определения (13) преобразование Лапласа:

$$w(s) = \int_0^{\infty} \Psi_{\eta}(s, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) d\tau = \frac{1}{s\sqrt{1+\eta s}}.$$

От изображения (14) несложно перейти к оригиналу, используя таблицу преобразования Лапласа из [7]:

$$w(t) = \operatorname{erf}(\sqrt{t/\eta}),$$

где $y = \operatorname{erf}(x)$ – это интеграл вероятностей [11].

Отношение $\zeta = t/\eta$ является безразмерной величиной и обозначает изменение времени для шкалы, где коэффициент вязкости η является единицей. График функции $w(\zeta)$ показан на рис. 4; при значениях $\zeta > 3$, то есть при условии $t > 3\eta$, площадь под графиком отличается от 1 на величину, которой допустимо пренебречь.

Гауссова аппроксимация корректирующего ядра. Анализ расчетных кривых $z(\tau) = \Psi_{\eta}(t, \tau)$ показал, что при условии $t > 3\eta$ форма сечения близка к форме графика плотности нормального распределения (то есть, к кривой Гаусса $y = \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t})$), причем максимум кривой близок к моменту t , но несколько отклоняется в меньшую сторону (рис. 3). В этом пункте мы приведем математическое обоснование этого утверждения.

В силу известного свойства преобразования Лапласа, значения $f(t)$ оригинала при больших аргументах $t \rightarrow +\infty$ определяются значениями изображения $F(s)$ при малых $s \rightarrow 0$. Воспользуемся этим свойством и при условии, что $s \rightarrow 0$, выполним следующее преобразование правой части равенства (10):

$$\frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) \approx \frac{1}{(1+0.5\eta s)^2} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{1+0.5\eta s}\right) = \left\| \frac{1+0.5\eta s = p}{s = p - 2/\eta} \right\| = \frac{4}{\eta^2 p^2} \cdot \exp(-2\tau/\eta) \cdot \exp\left(\frac{4\tau}{\eta^2 p}\right).$$

Далее используем таблицу преобразования Лапласа и переходим от изображения к оригиналу:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{4}{\eta^2} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{4\tau/\eta^2}} \cdot I_1\left(2\sqrt{\frac{4\tau \cdot t}{\eta^2}}\right) = \frac{2}{\eta} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot I_1\left(\frac{4}{\eta} \sqrt{\tau t}\right),$$

где $y = I_1(x)$ – это модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Для дальнейшего упрощения результата воспользуемся асимптотическими формулами для модифицированных функций Бесселя [11] вида

$$I_1(x) \approx \exp(x) / \sqrt{2\pi x}$$

и получим:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{2}{\eta} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{4}{\eta} \sqrt{\tau t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4\sqrt{\tau t}/\eta}} = \frac{\sqrt[4]{(t/\tau)^3}}{\sqrt{2\pi \eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\sqrt{\tau} - \sqrt{t})^2}{0.5\eta}\right),$$

или

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{\sqrt[4]{(t/\tau)^3}}{\sqrt{2\pi \eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau - t)^2}{0.5\eta(\sqrt{t} + \sqrt{\tau})^2}\right)$$

При выполнении условия $t/\eta \gg 1$ эта функция имеет следующую аппроксимацию:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right), \quad (13)$$

которая совпадает с функцией $y = \rho_0(\tau - a, \sigma)$ плотности нормального распределения, имеющего математическое ожидание $a = t$ и дисперсию $\sigma^2 = \eta t$, что и требовалось доказать.

Сглаживающий оператор Кельвина – Фойхта и его свойства. На классе оригиналов $y = K(t)$, заданных при значениях $t \geq 0$, кусочно-непрерывных и интегрируемых на любом конечном промежутке изменения аргумента t , определим линейный интегральный оператор формулой

$$\mathcal{G}_{\eta}[K(t)] = \int_0^{\infty} \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Как следует из предыдущего материала, именно этот оператор при условии $t/\eta \gg 1$ по формуле

$$K_{\eta}(t) = \mathcal{G}_{\eta}[K_0(t)]$$

выполняет сглаживающую корректировку ядра $y = K_0(t)$ при учете внутреннего трения Кельвина – Фойхта, поэтому мы назвали его *сглаживающим оператором Кельвина – Фойхта* (сокращенно – ОКФ).

Учитывая свойства кривой Гаусса, переменная интегрирования τ в (14) не выходит за пределы промежутка

$$[t - 3\sqrt{\eta t}; t + 3\sqrt{\eta t}],$$

так что пределы интегрирования можно заменить на более узкие, и мы получим:

$$\mathcal{G}_{\eta}[K(t)] = \int_{t-3\sqrt{\eta t}}^{t+3\sqrt{\eta t}} \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau.$$

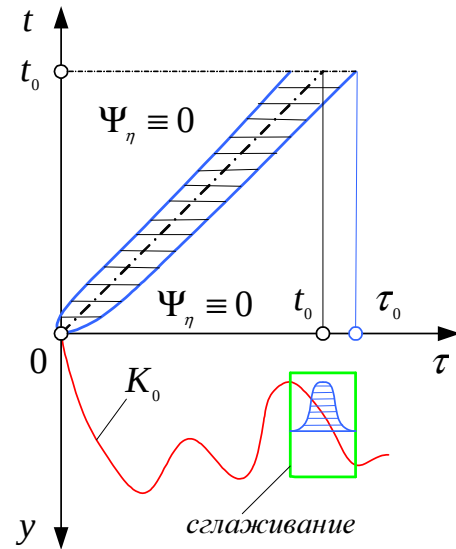


Рис. 5 – Графическая интерпретация процедуры сглаживания ядра.

ОКФ во многом напоминает известный *фильтр Гаусса* [11], используемый при обработке результатов эксперимента, но имеется существенное отличие: здесь дисперсия – это переменная величина, которая увеличивается пропорционально корню из времени t . В результате чего носитель корректирующего ядра приобретает клиновидную форму, выделенную на рис. 5 пунктиром.

Как и любой другой оператор, ОКФ можно применять повторно; кроме того, можно перемножать (то есть применять последовательно) ОКФ, отвечающие различным коэффициентам вязкости. Смысл доказанной ниже теоремы заключается в том, что при таком перемножении мы опять получим ОКФ, и эта операция является коммутативной.

Теорема. Пусть даны два коэффициента вязкого трения η_1, η_2 . Тогда при условии $t/(\eta_1 + \eta_2) \gg 1$ выполняется равенство

$$\mathcal{G}_{\eta_2}[\mathcal{G}_{\eta_1}[K(t)]] = \mathcal{G}_{\eta_1 + \eta_2}[K(t)].$$

Доказательство. Повторному сглаживанию отвечает корректирующее ядро следующего вида:

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - t)^2}{2\eta_2 t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 \xi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau - \xi)^2}{2\eta_1 \xi}\right) d\xi.$$

При условии $t/\eta \gg 1$ этот интеграл можно заменить более простым:

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau - \xi)^2}{2\eta_1 t}\right) d\xi,$$

и в аргументе экспоненты выделить полный квадрат по переменной ξ :

$$-\frac{(\xi - t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau - \xi)^2}{2\eta_1 t} = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2 - \frac{(\tau - t)^2}{2t \cdot (\eta_1 + \eta_2)}.$$

Следовательно

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2t \cdot (\eta_1 + \eta_2)}\right) \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2\right) d\xi.$$

Для интеграла воспользуемся равенствами

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2\right) d\xi \approx \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \xi^2\right) d\xi = \sqrt{2\pi t \cdot \eta_1 \eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)}$$

и, после сокращения одинаковых выражений, получим:

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta_1 + \eta_2)t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2(\eta_1 + \eta_2)t}\right),$$

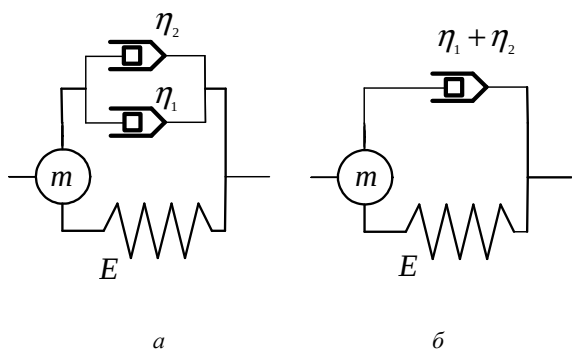


Рис. 6 – Заменяющие схемы для динамического анализа вязкоупругого поведения материала:

а – при последовательном сглаживании;

б – при суммарном сглаживании.

На схемах обозначено:

m – масса; E – упругость, $\eta_{1,2}$ – вязкость.

что и требовалось доказать.

Если использовать для анализа заменяющие схемы, показанные на рис. 6, то доказанный результат покажется тривиальным. Но не следует забывать, что при условии $t \rightarrow +0$ он нарушается, и это лишний раз свидетельствует о несовершенстве упрощенных схем.

Заметим, что при значении $\eta = 0$ оператор $\mathcal{G}_0[\cdot]$ удовлетворяет тривиальному равенству $\mathcal{G}_0[K(t)] = K(t)$ и является единичным. Если в уравнении (6) и формуле (9) использовать отрицательное значение η , то мы придем к обратному оператору Кельвина – Фойхта, то есть

$$\mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] = \mathcal{G}_{-\eta}[\cdot].$$

Обратный оператор не является сглаживающим, наоборот, после его действия размах колебаний возрастает.

Разумеется, авторы осведомлены о том, что отрицательных коэффициентов трения в природе не существует, но

готовы немедленно продемонстрировать пользу от применения нового понятия.

Предположим, что ядро $y = K_{\eta}(t)$, показанное на рис. 1, получено не путем суммирования ряда (4), а при выполнении лабораторных исследований, то есть формы и частоты собственных колебаний неизвестны. Но хорошо известно [5], что коэффициенты внутреннего трения сильно зависят от температуры (значительно сильнее, чем модули упругости и сдвига). Требуется оценить, как изменится ядро $y = K_{\eta}(t)$ (и все другие характеристики, которые зависят от этого ядра), если в результате снижения температуры декремент затухания d_0 уменьшится в 2 раза – до значения $d_0 = 0.035$. Для решения этой задачи должна быть выполнена обратная коррекция ядра, то есть, применен обратный ОКФ.

Ясно, что использовать формулу (13) здесь недопустимо, и формула обращения должна иметь другой вид. Но, кроме операционного исчисления, существуют и другие методы решения подобных задач. Например, обратный оператор можно искать как сумму следующего ряда:

$$\mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] = [I[\cdot] - (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])]^{-1} = I[\cdot] + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot]) + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])^2 + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])^3 + \dots \quad (15)$$

Если коэффициент трения η мал, то разность между функциями $y = K(t)$ и $y = \mathcal{G}_{\eta}[K(t)]$ также мала, поэтому в сумме (15) можно оставить только два или три первых слагаемых, и мы получим приближенные формулы для обратного оператора:

$$\mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] \approx 2I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot] \quad \text{или} \quad \mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] \approx 3I[\cdot] - 3\mathcal{G}_{\eta}[\cdot] + \mathcal{G}_{2\eta}[\cdot]. \quad (16)$$

Применения этих формул для поставленной выше задачи проиллюстрировано на рис. 7. Ядро $y = Kg(t)$ получено как результат действия прямого ОКФ, а ядра $y = K\eta 2(t)$ и $y = K\eta 3(t)$ – как результат последовательного действия прямого (с удвоенным декрементом) и обратного ОКФ:

$$Kg(t) = \mathcal{G}_{\eta}[K_0(t)]; \quad K\eta(t) = \mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\mathcal{G}_{2\eta}[K_0(t)]].$$

На рис. 7 расхождение между графиками мало, что подтверждает эффективность метода. Исследования по тематике обратного ОКФ пока что не завершены, поэтому его результаты будут опубликованы позже.

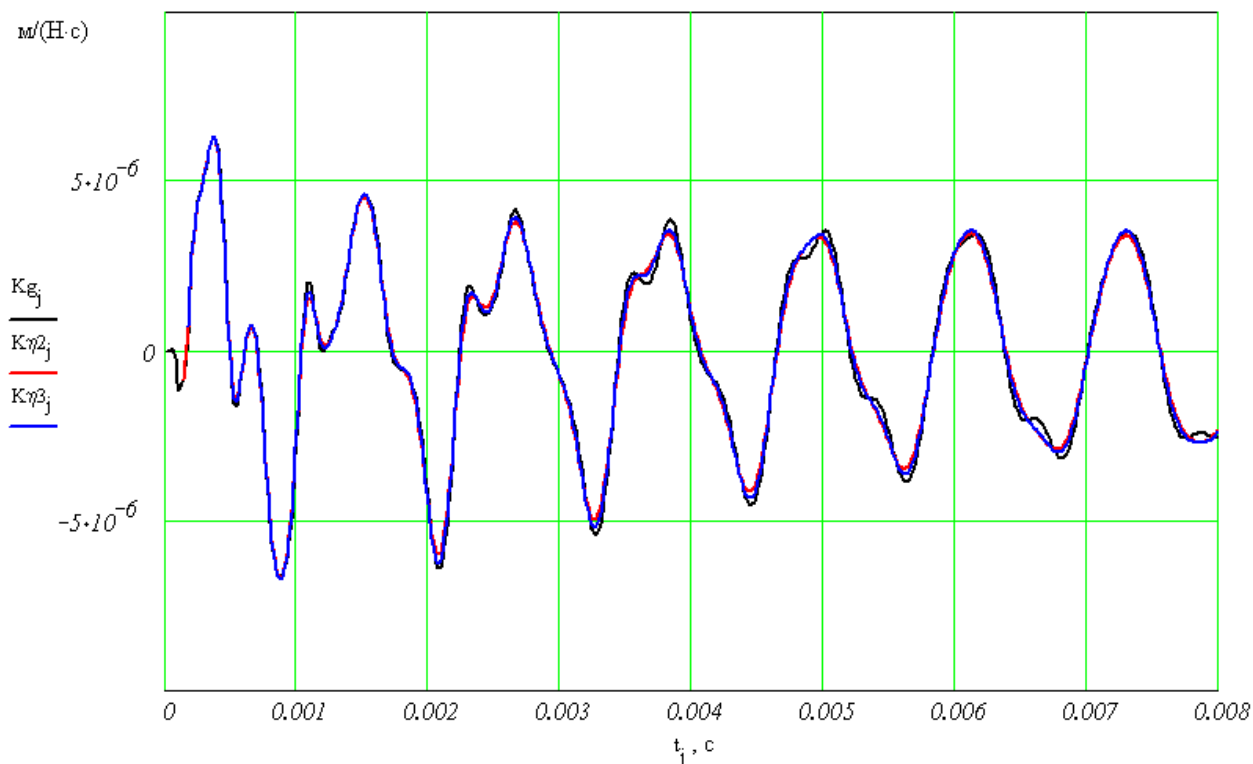


Рис. 7 – Пример применения обратного оператора в форме начального отрезка ряда (15):
 $Kg(t)$ – точное ядро; $K\eta_2(t)$ – первое приближение (2 слагаемых ряда); $K\eta_3(t)$ – второе приближение (3 слагаемых).

Характер изменения корректирующего ядра при малом времени. Аппроксимация (13) корректирующей функции для времени $t = 0$ принимает положительное значение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{2\eta}\right),$$

но при этом сама корректирующая функция равняется 0.

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим изображение (12) при $s \rightarrow \infty$ и упростим его следующим, допустимым для этого случая, образом:

$$\frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) \approx \frac{1}{\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right).$$

Полученное изображение имеет оригинал

$$y = \operatorname{erfc}(\tau/\sqrt{\eta t})/\eta,$$

который при $t = 0$ равен 0, что и требовалось проверить.

Заметим, что аппроксимацией

$$\Psi_\eta(t, \tau) \approx \operatorname{erfc}(\tau/\sqrt{\eta t})/\eta \quad (17)$$

можно пользоваться, если $t < \eta$, что, например, актуально при решении некоторых задач теории ползучести. Что касается моделирования колебаний с учетом вязкого трения, то здесь столь малые значения времени, как правило, не используются, а во всем рабочем диапазоне для сглаживания ядра можно применять функцию (13).

Метод устранения особенности для расчета корректирующего ядра. В практическом гармоническом анализе разработан и используется метод Крылова улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье. Аналогичный метод можно применить для вычисления несобственного интеграла в формуле обращения, которая для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$\Psi_\eta(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1+\eta \cdot i\omega} \cdot \exp\left(\frac{-\tau \cdot i\omega}{\sqrt{1+\eta \cdot i\omega}} + t \cdot i\omega\right) \right] d\omega. \quad (18)$$

Изображение $\Psi_\eta(s, \tau)$ представим в виде суммы

$$\Psi_{\eta}(s, \tau) = \frac{1}{1+\eta s} \cdot \left[\exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) - \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right) \right] + \frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right)$$

и заметим, что второе слагаемое является произведением двух известных изображений и может быть обращено при использовании свертки соответствующих оригиналов; в результате получаем:

$$\Psi_2(t, \tau) = \left(\frac{1}{\eta} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \right) * \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\pi t^3 \eta}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\eta t}\right) \right).$$

На практике используется шкала $\zeta = t/\eta$ безразмерного времени, и приближенная формула для определения значений этой функции имеет следующий вид:

$$\Psi_2(\zeta, \tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\sqrt{\zeta}}^{100/\sqrt{\zeta}} \exp\left[-\left(t - 1/\zeta^2 + (\tau/\eta)^2 \zeta^2 / 4\right)\right] d\zeta;$$

для вычисления этого интеграла используются стандартные процедуры пакета MathCAD.

Для первого слагаемого приходится, по-прежнему, применять формулу обращения,

$$\Psi_1(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\Omega_1} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1+\eta \cdot i\omega} \cdot \exp(t \cdot i\omega) \cdot \left(\exp\left(\frac{-\tau \cdot i\omega}{\sqrt{1+\eta \cdot i\omega}}\right) - \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{i\omega}{\eta}}\right) \right) \right] d\omega,$$

но поскольку подынтегральная функция с возрастанием частоты ω убывает значительно быстрее, чем в интеграле (18), то при практическом использовании этой формулы верхний предел уменьшается на два порядка:

$$\Omega_1 \cdot \eta > 10^2.$$

После этого используется равенство

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) = \Psi_1(t, \tau) + \Psi_2(t, \tau), \quad (19)$$

которое, пусть и является приближенным, но погрешность определения ядра по указанному методу крайне мала. Результат применения метода для начального промежутка времен $t < \eta$ показан на рис. 8.

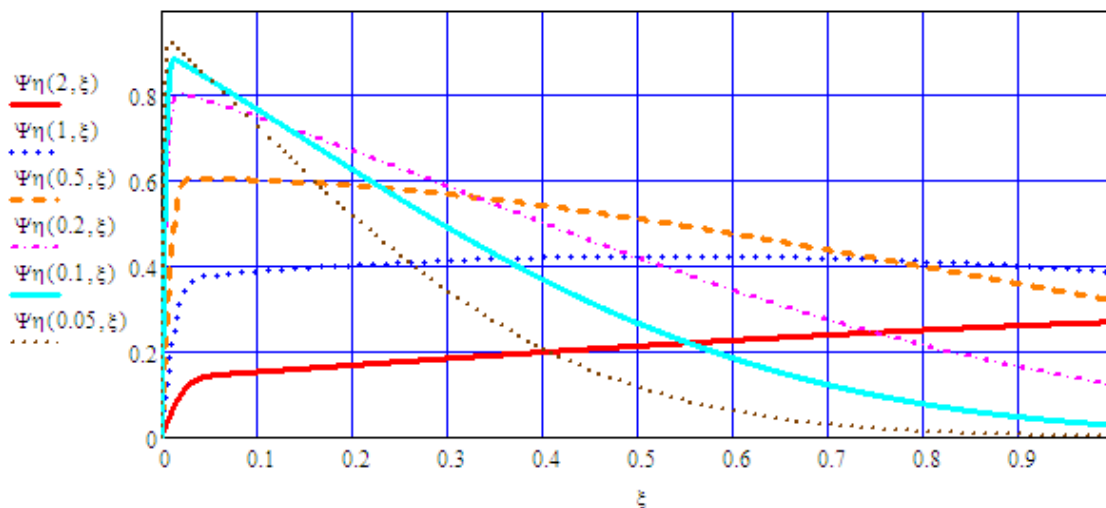


Рис. 8 – Графики корректирующего ядра $\Psi_{\eta}(\zeta, \xi) = \Psi_{\eta}(t/\eta, \tau/\eta)$ при малом безразмерном времени.

Получены по формуле (19); участки монотонного возрастания при значениях $\xi < 0.01$ отвечают аппроксимации (17).

Область применения нового метода и перспективы ее расширения. Описанный подход, после дополнительной специализации корректирующего ядра, естественным образом распространяется на задачи ползучести и текучести, а также на общую задачу вязкоупругого деформирования, в которой вместо модели Кельвина – Фойхта используется модель стандартного линейного тела (СТЛ). В частности, применительно к СТЛ равенство (13) принимает следующий вид:

$$\Psi_{\eta}(s, \tau) = \frac{1+\delta_E \eta s}{1+\eta(1+\delta_E)s} \cdot \exp\left(-\tau s \cdot \sqrt{\frac{1+\delta_E \eta s}{1+\eta(1+\delta_E)s}}\right), \quad (20)$$

где $\delta_E = E_1/E_2$; E_1, E_2 – это модули упругости из моделей Кельвина – Фойхта и Максвелла.

Изображение (20) и комплексные частоты колебаний (рис. 2, б), имеют другую асимптотику, что изменяет поведение оригинала при времени $t \rightarrow +0$. Но начальные отрезки скорректированных частот на рис. 2, а, б близки, поэтому при анализе механических колебаний для модели СТЛ при учете вязкости можно продолжать использовать оператор $G_\eta[\cdot]$.

При решении задачи ползучести на первый план выходит другая проблема: коэффициент трения η здесь очень большой (нередко он составляет сотни секунд), и при применении оператора Кельвина – Фойхта для малого момента времени t (составляющего доли секунды) приходится определять исходное ядро для большого промежутка времени, соизмеримого со среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{\eta t}$. Отношение

$$\sigma/t = \sqrt{\eta/t} \gg 1,$$

и чем больше эта величина, тем ниже эффективность такого подхода к решению задачи.

В этой связи возникает гносеологический аспект, который необходимо прояснить. При корректировке ядра $y = K_0(t)$, производимого для некоторого момента времени t_0 , ОКФ использует (рис. 5) значения этого же ядра с промежутка

$$t \in [t_0 - 3\sqrt{\eta t_0}; t_0 + 3\sqrt{\eta t_0}],$$

то есть, в том числе, для моментов времени $t > t_0$. Ядро $y = K_0(t)$ – это реакция упругого континуума на нормированное внешнее возмущение, и, казалось бы, возникает нарушение известного *физического принципа причинности*. В действительности никакого нарушения здесь нет – нормированное возмущение производится в начальный момент времени $t = 0$, а разностный характер интегрального ядра означает, что упругие характеристики процесса (коэффициенты соответствующих уравнений) не зависят от времени. Поэтому реакция $y = K_0(t)$ для всех моментов времени $t > 0$ предопределена изначально, и отклониться от заданной траектории она не может.

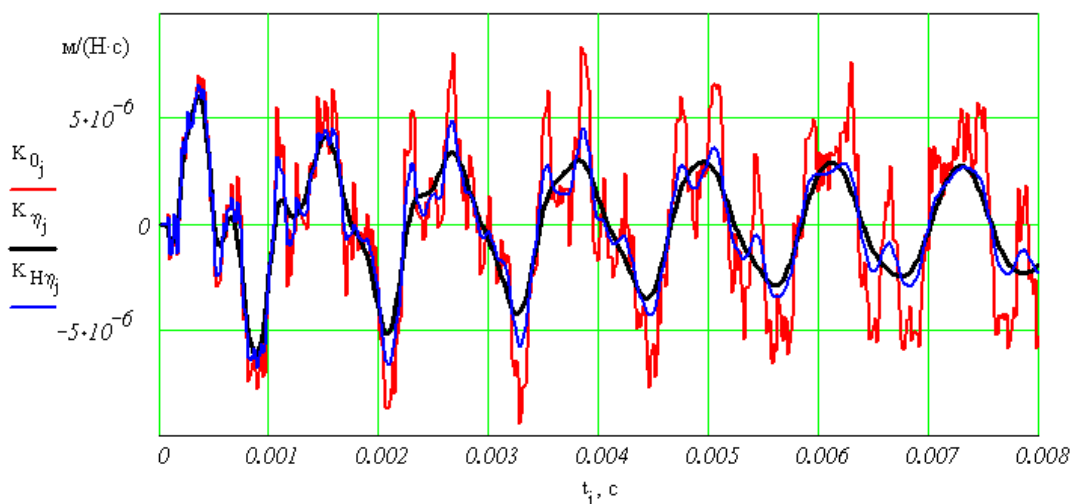


Рис. 9 – Результаты сглаживания ядра $y = K_0(t)$ интеграла Дюамеля под действием вязкого (график $y = K_\eta(t)$) и гистерезисного (график $y = K_{H\eta}(t)$) трения.

Расчет колебаний прямоугольной пластины; декремент затухания $d_0 = 0.07$.

Важнейшим направлением дальнейших исследований является продвижение нового подхода в задачи, где применяется модель гистерезисного трения (например, для упругих континуумов из стали, никеля и других ферромагнитных материалов). В модели Бока – Шлиппе – Колара [6] оператор гистерезисного трения вместо производной по времени, как в равенстве (6), использует производную по фазовому углу для каждой формы собственных колебаний $\mathbf{u}_j$, и уравнение переходного процесса принимает вид:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = L_x \left[\mathbf{u} + \eta \sum_{j=1,2,\dots} (\omega_0 / \omega_j) \partial \mathbf{u}_j / \partial t \right] + \bar{P}(t), \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1,2,\dots} \mathbf{u}_j.$$

Отметим, что такое трение сохраняет формы собственных колебаний $\mathbf{u}_j$, отвечающие задаче упругой деформации (без диссипации), поэтому в рамках стандартного подхода анализ колебаний не составляет труда и сводится к задаче суммирования ряда

$$K_\eta(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} \text{Re}[f(i \cdot \lambda_j) \cdot \sin(i \cdot \lambda_j t)],$$

где комплексные частоты λ_j (рис. 2, в) находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta \omega_0 \omega_j \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

Результат расчета ядра $y = K_\eta(t)$ для прямоугольной пластины при гистерезисном трении с декрементом затухания $d = 0.07$ (здесь он одинаковый для всех гармоник) показан на рис.9; туда же помещен график ядра, полученный для вязкого трения при декременте $d_0 = 0.07$.

Сопоставление результатов имеет непосредственный физический смысл: в первом случае пластина изготовлена из углеродистой (а, значит, магнитной) стали, а во втором – из нержавеющей (не магнитной) стали. Упругие и инерционные характеристики этих материалов одинаковы, размеры и граничные условия для пластины – тоже одинаковые, а природа трения – разная. О факторах диссипации и их связи со свойствами упругого материала достаточно подробно сказано в [5], и добавлять новые сведения не будем, ограничимся ссылкой.

Анализируя рис. 9, видим, что графики заметно различаются. Гистерезисное трение по сравнению с вязким трением уменьшает сглаживание ядра. Поэтому применять для этого случая ОКФ не допустимо, и, принимая во внимание широкую область применения ферромагнитных материалов, приобретает особую актуальность задача синтеза сглаживающего интегрального оператора Бока – Шлиппе – Колара (ОБШК), а также обратного ОБШК (если, разумеется, указанные математические объекты существуют).

Пример использования разработанной теории для прямоугольной пластины. Выражение для прогиба

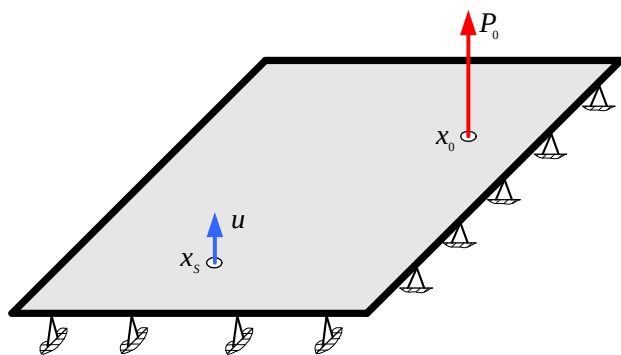


Рис. 10 – Схема нагружения пластины.

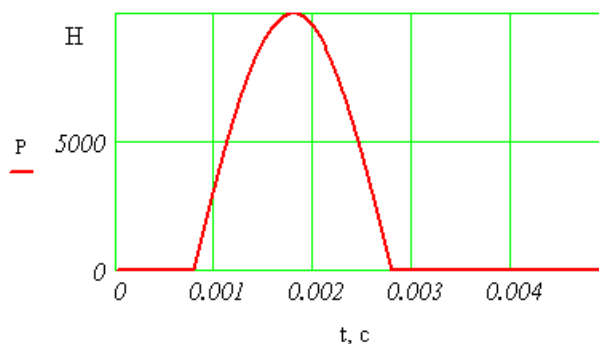


Рис. 11 – Сила, возбуждающая колебания в пластине.

пластины в случае (рис. 10), когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка $P_0(t)$ импульсного типа (рис. 11), приведено, например, в [8], и имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – упругое разностное ядро интеграла типа свертки в точке пластины с координатами $\mathbf{x}(x, y)$. Методы получения ядер и их вид описаны в [2, 8].

Если считать, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующее ядро Коши $K_0(t)$ для шарнирно-опертой пластины из нержавеющей стали средней толщины по модели типа С. П. Тимошенко будет иметь вид:

$$K(x_s, y_s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin(\omega_{1kn}t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin(\omega_{2kn}t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_s}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_s}{m}\right), \quad (22)$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины; l и m – длина и ширина пластины; (x_0, y_0) – координаты точки x_0 , в которой прикладывается нагрузка, а (x_s, y_s) – это координаты точки x_s , в которой определяется изменение прогиба во времени.

На рис. 12 представлен вид ядер для свёрточных интегралов (21): кривая 1 – это исходное ядро (17), а кривые 2, 3 и 4 соответствуют модифицированным (согласно описанной выше процедуре) ядрам с декрементами затухания основной формы колебаний $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$, $d_0 = 0.1$.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров:

- плотность материала $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; модуль упругости $E = 207 \text{ ГПа}$;
- толщина пластины $h = 0.04 \text{ м}$; длина $l = 0.6 \text{ м}$, ширина $m = 0.4 \text{ м}$;
- координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.3 \text{ м}$;
- координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_s = 0.25 \text{ м}$, $y_s = 0.1 \text{ м}$.

Число слагаемых в соответствующих двойных рядах Фурье, описывающих разложение решения по собст-

венным формам колебаний, во всех случаях составляло 50×50 ; но, как указывалось выше, после учета трения оно (без снижения точности расчета) могло быть сокращено до 80 ... 100 гармоник.

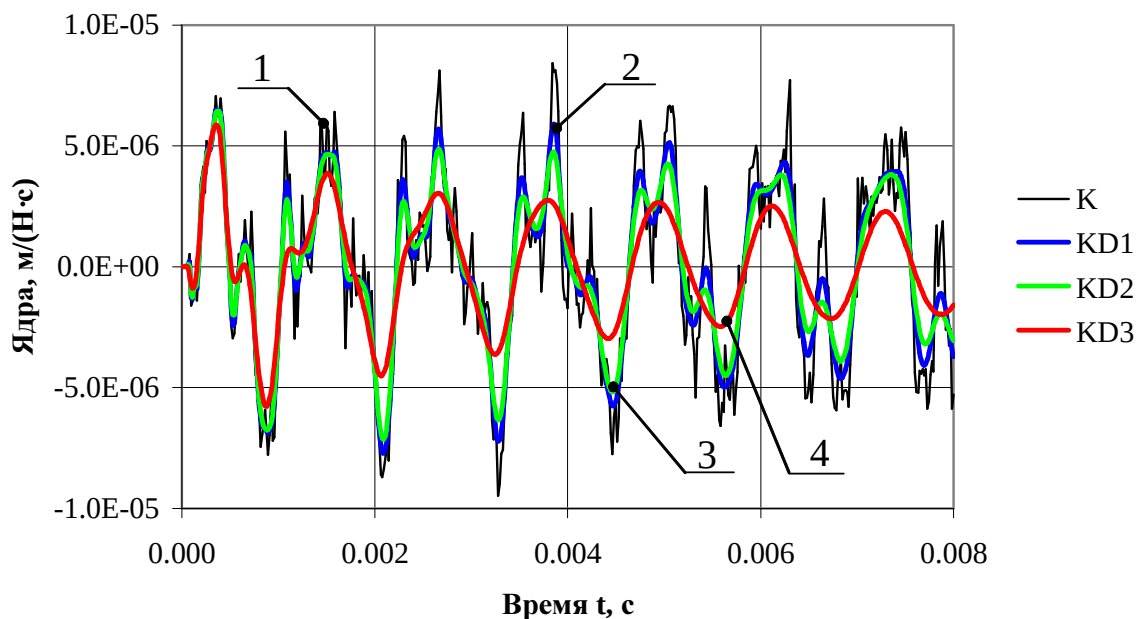


Рис. 12 – Вид исходных и модифицированных ядер Коши:
 $K(t) \equiv K_0(t)$; $KD1(t) \equiv K_{\eta 1}(t)$; $KD2(t) \equiv K_{\eta 2}(t)$; $KD3(t) \equiv K_{\eta 3}(t)$.

Результаты расчетов прогиба без учета трения и при заданных декрементах затухания колебаний приведены на рис. 13. Кривой 1 отвечает упругое изменение прогиба, а кривым 2, 3 и 4 – прогибы с учетом внутреннего вязкого трения при декрементах $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$ и $d_0 = 0.1$, соответственно. Возбуждающая сила (рис. 11) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой 10 кН и длительностью 1.6 мс; началу импульса на рис. 13 отвечает время 0.8 мс.

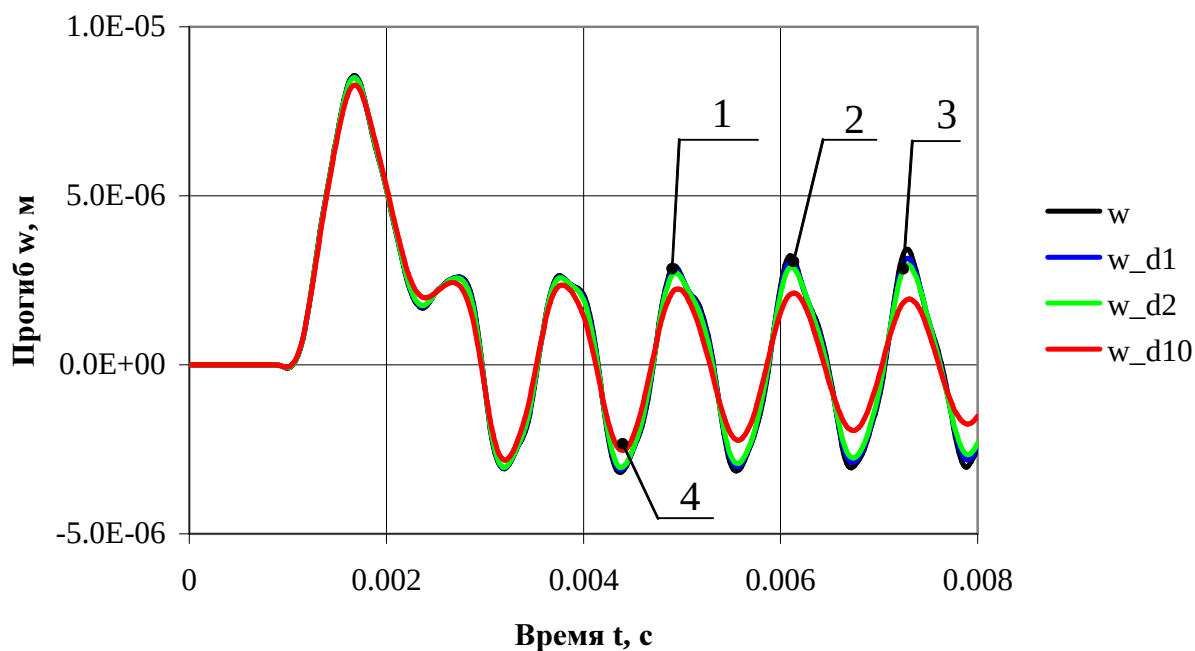


Рис. 13 – Изменения прогиба пластины при колебаниях (расчет с учетом и без учета вязкого трения)

Моделирование упругих и вязкоупругих колебаний балки. Балка, показанная на рис. 14, изготовлена из титаномagneвиевого сплава. Расчеты колебаний балки производились при следующих значениях параметров:

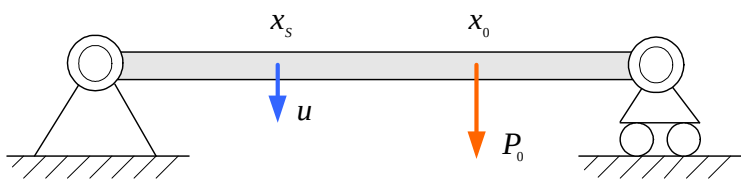


Рис. 14 – Схема нагружения балки.

– координаты точки x_s , в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_s = 0.2$ м.

Ядро для расчета упругих колебаний при использовании интеграла (1) представляется в форме суммы ряда:

$$K_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Omega_{1k} \cdot \sin \omega_{1k}(t) - \Omega_{2k} \cdot \sin \omega_{2k}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_s}{l}\right),$$

где при практической реализации используются первые 50 гармоник. После учета трения для расчета колебаний достаточно использовать 5 ... 7 гармоник, что на порядок меньше, чем для пластины, но в два раза больше, чем рекомендуется в известных руководствах по практическому гармоническому анализу. В точке x_s исследователей интересуют две характеристики – прогиб w и относительная деформация ε ; каждой характеристике соответствует свое ядро (рис. 15 и рис. 16):

$$w(t) = \int_0^t K w(t-\tau) P_0(\tau) d\tau; \quad \varepsilon(t) = \int_0^t K \varepsilon(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Как видим, уже при декременте 0.02 наблюдается существенное сглаживание формы исходного ядра, причем куда более эффективное, чем это было для расчета пластины. Отмеченная разница объясняется различием в распределении частот колебаний: у балки, например, вторая частота превышает первую почти в 4 раза (что обусловлено малой толщиной балки), а у пластины, которая имеет относительно большую толщину, – только лишь в 2 раза (табл. 1).

При исследовании процессов изменения прогиба и деформации балки была использована типовая нагрузка, форма которой показана на рис. 17. Значения силы $P(t)$ подставлялись в интегралы (23). Площадь под графиком – это импульс, передаваемый балке.

Длительность полуволны синусоиды составляла, примерно, половину периода основной формы колебаний, поэтому возбуждение имело резонансный характер и привело к увеличению амплитуды этой формы колебаний балки. К тому же, точка регистрации прогиба и деформации располагалась в точке максимума этих колебаний.

В результате действия трех перечисленных факторов, вынужденные колебания оказались близки к моногармоническим (рис. 18, 19), и увеличение коэффициента трения приводило к повышению затухания.

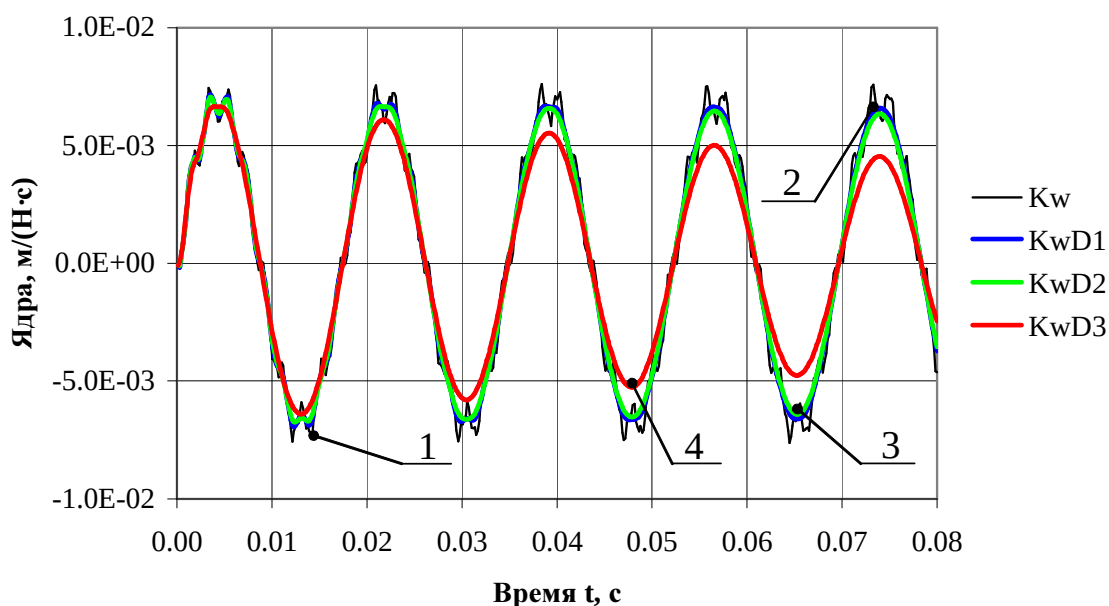


Рис. 15 – Ядра интегралов Дюамеля, используемых при расчете колебаний прогиба балки без учета и с учетом трения. Декременты затухания основной формы колебаний: ядро Kw – 0, ядро $KwD1$ – 0.01, ядро $KwD2$ – 0.02, ядро $KwD3$ – 0.1.

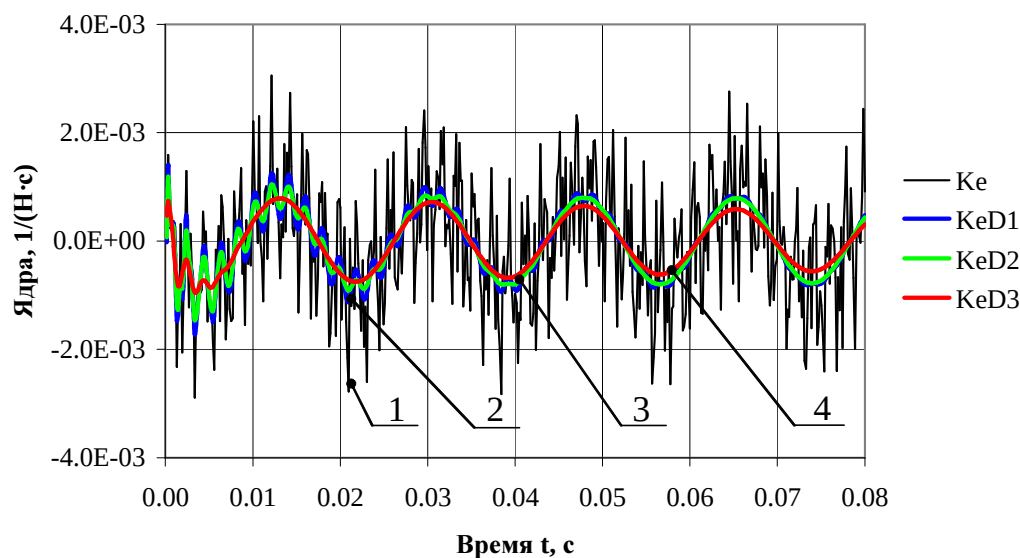


Рис. 16 – Ядра интегралов Дюамеля, используемых при расчете колебаний деформации балки.
Декременты: $K_e = 0$, $K_{eD1} = 0.01$, $K_{eD2} = 0.02$, $K_{eD3} = 0.1$.

Таблица 1 – Частоты свободных колебаний, Гц

Гармоника	Пластина	Балка
1	857.5	57.5
2	1613.6	229.9
3	2516.6	516.8
4	2808.3	917.6
5	3209.2	1431.6
6	4311.6	2057.6
7	4365.1	2794.5
8	4997.1	3640.9
9	5610.4	4595.0
10	5761.0	5655.2

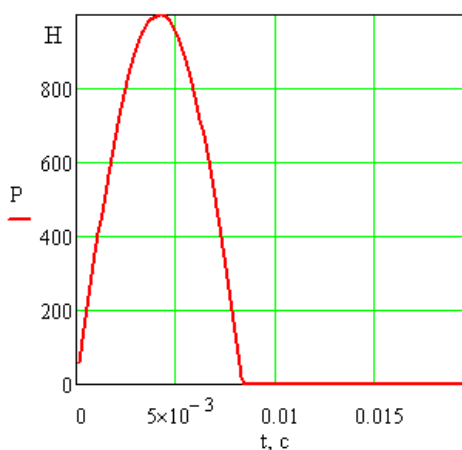


Рис. 17 – Сила, возбуждающая колебания балки.

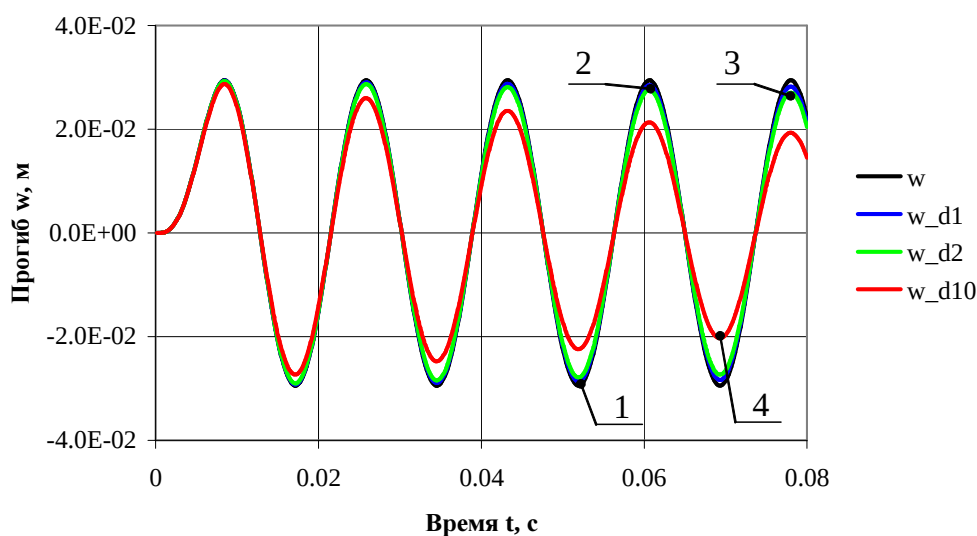


Рис. 18 – Расчетные кривые изменения прогиба балки без учета и с учетом трения.
Декременты затухания основной формы колебаний: ядро $K_w = 0$, ядро $K_{wD1} = 0.01$, ядро $K_{wD2} = 0.02$, ядро $K_{wD3} = 0.1$.

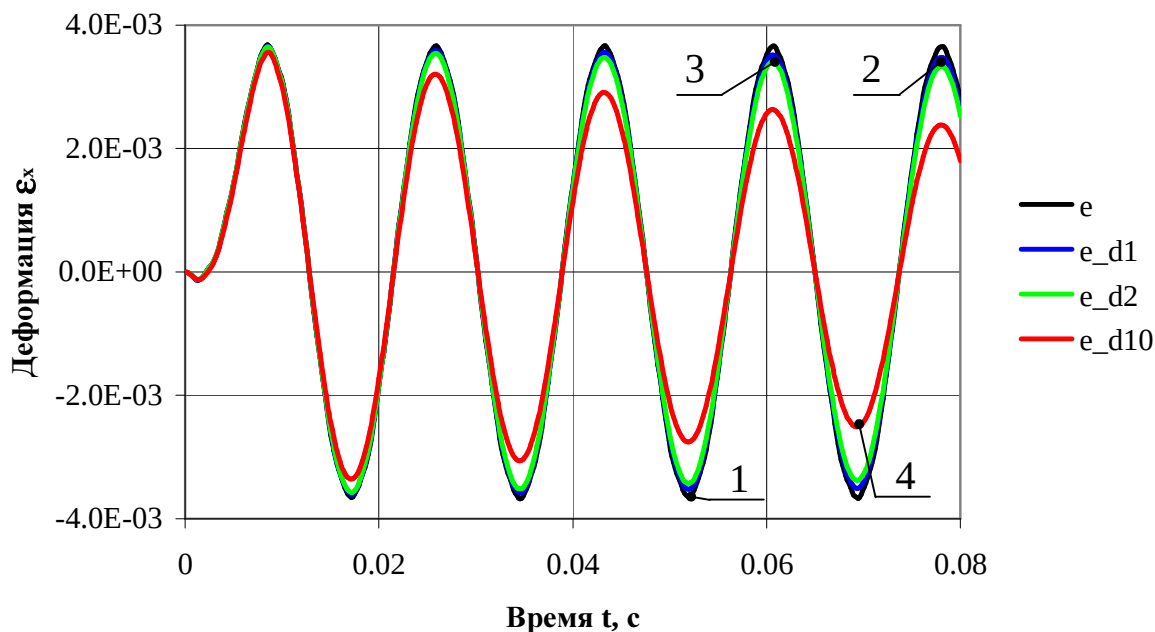


Рис. 19 – Расчетные кривые изменения относительной деформации балки.
Декременты: $\text{Ke} = 0$, $\text{KeD1} = 0.01$, $\text{KeD2} = 0.02$, $\text{KeD3} = 0.1$.

Выводы. Для упругого континуума, моделируемого с учетом внутреннего вязкого трения, которое описывается моделью Кельвина – Фойхта, разработан новый численно-аналитический метод расчета переходных процессов, происходящих под воздействием нестационарного силового нагружения. Метод использует формулу обращения сложного изображения, которая в операционном исчислении носит имя теоремы Эфроса, и сводится к применению нового сглаживающего оператора с гауссовым разностным ядром и переменной дисперсией, растущей пропорционально времени.

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность нового метода, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума, и, следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.). Благодаря чему его удастся использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента.

Метод позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую *упругую составляющую* и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициента трения, что, например, отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Намечены пути развития метода применительно к задачам ползучести, текучести, и колебаний в условиях гистерезисного трения. Возможности разработанного метода проиллюстрированы на примерах вынужденных механических колебаний двумерного и одномерного континуумов: прямоугольной пластины и балки.

Список литературы

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций : Монография. – Харьков, ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Григорьев А. Л., Молдавский Э. А., Тартаковский И. И. Операторный метод расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы / Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов». ХАИ им. Н. Е. Жуковского. – Харьков, Типография ХВВКИУРВ, 1991. – 78 с.
4. Грунауэр А. А., Тартаковский И. И., Григорьев А. Л. О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин : Респ. междувед. науч.-техн. сб. – Х. : Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те. – 1985. – Вып. 39. – С. 7 – 22.
5. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К. : Наукова думка, 1971. – 375 с.
6. Василенко Н. В. Теория колебаний. – К. : Вища школа, 1992. – 430 с.
7. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – К. : Вища школа, 2004. – 525 с.
8. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины // Прикладная механика. – 2003. – Вып. 39. – № 10. – С. 97 – 102.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Государственное издательство физико-математической литературы. М. – 1961, 524 с.

10. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 305 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832 с.

References (transliterated)

1. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1970. 734 p.
2. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktсий : Monografiya* [Problems of pulse deformation of structural elements : Monograph]. Kharkov, KHNADU Publ., 2004. 392 p.
3. Grigor'yev A. L., Moldavskiy E. A., Tartakovskiy I. I. Operatorny metod rascheta vyzvuzhdennykh kolebaniy vyzkouprugoy mekhanicheskoy sistemy [Operator method for computing induced oscillations of viscoelastic mechanical system]. *Tezisy dokladov IV Vsesoyuznoy konferentsii. "Sovremennyye problemy stroitel'noy mekhaniki i prochnosti letatel'nykh apparatov"*. Khar'kovskiy aviatsionnyy institut im. N. Ye. Zhukovskogo [Theses of the IV All-Union Conference "Contemporary problems of constructional mechanics and aircraft durability" N. E. Zhukovskiy Kharkov Aviation Institute]. Khar'kov, Tipografiya KHVVKIURV Publ., 1991. 78 p.
4. Grunauer A. A., Tartakovskiy I. I., Grigor'yev A. L. O svyazi sily pruzhiny s zakonom yeye deformirovaniya [On the relation between spring strength and its deformation law]. *Teoriya mekhanizmov i mashin : Resp. mezhdved. nauch.-tekhn. sb.* [Theory of mechanisms and machines : Republican Interdepartmental Scientific and Technical Digest]. Kharkiv, Vishcha shkola. Izd-vo pri Khar'k. un-te Publ., 1985, no. 39, pp. 7–22.
5. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. *Vibropogloshchayushchiye svoystva konstruksionnykh materialov* [Vibro-absorbing properties of structural materials]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 375 p.
6. Vasilenko N. V. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation theory]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 1992. 430 p.
7. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolivan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 2004. 525 p.
8. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V. Identifikatsiya impul'snogo nagruzheniya uprugoy pryamougol'noy plastiny [Identification of pulse loading of elastic rectangular plate]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 2003, vol. 39, no. 10, pp. 97–102.
9. Ditkin A. V., Prudnikov A. P. Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie [Integral transforms and operational calculus]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1961. 524 p.
10. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti : Uchebnoye posobie, 2-e izd., pererab. i dop* [Functions of complex variable. Operational calculus. Stability theory: Textbook, 2-nd ed., revised and expanded]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1981. 305 p.
11. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh sotrudnikov i inzhenerov)* [Handbook on mathematics (for researches and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 832 p.

Поступила (received) 06.05.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Використання теореми Ефроса для врахування дисипативних властивостей деформованих елементів конструкцій / О. В. Воропай, О. Л. Григор'єв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 29 – 44. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций / А. В. Воропай, А. Л. Григорьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 29 – 44. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Using Efros theorem for taking into account dissipative properties of deformable structural elements / A. V. Voropay, A. L. Grigoriev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 29 – 44. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

А. П. КОЖУШКО, О. О. ОСТРОВЕРХ, В. М. ШЕВЦОВ

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ БЕЗСТУПІНЧАСТОЇ ТРАНСМІСІЇ АВТОМОБІЛЯ КРАЗ-63221-02 ДЛЯ РЕМОНТУ НАФТОГАЗОВИХ СВЕРДЛОВИН

Описано процес визначення динамічного фактора автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин, який оснащено механічною та гідрооб'ємно-механічною трансмісією. Обґрунтовано вибір підходу для визначення передавального відношення в замкнутому контурі безступінчастої гідрооб'ємно-механічної трансмісії. Наведено результати порівняльного аналізу значень динамічного фактора при використанні на автомобілях для ремонту нафтогазових свердловин безступінчастої гідрооб'ємно-механічної та механічної трансмісій.

Ключові слова: автомобіль, розгін, гідрооб'ємно-механічна трансмісія, динамічний фактор, коефіцієнт корисної дії.

Описан процесс определения динамического фактора автомобиля для ремонта нефтегазовых скважин, который оснащён механической и гидрообъемно-механической трансмиссиями. Обосновано определение передаточного отношения в замкнутом контуре бесступенчатой гидрообъемно-механической трансмиссии, и приведены результаты сравнительного анализа значений динамического фактора при использовании на автомобилях для ремонта нефтегазовых скважин бесступенчатой гидрообъемно-механической и механической трансмиссий.

Ключевые слова: автомобиль, разгон, гидрообъемно-механическая трансмиссия, динамический фактор, коэффициент полезного действия.

In this paper we describe the process of determining the value of the dynamic factor for the vehicle KrAZ-63221-02 used to repair oil and gas wells, which is equipped with mechanical and hydrovolumetric-mechanical transmissions. Two approaches are proposed for determining the transmission number of the hydrovolumetric-mechanical transmission by constructing a system of equations describing the change in angular velocities of the hydrovolumetric-mechanical transmission elements and the formation of a transmission ratio in a closed circuit. The paper substantiates the choice of the approach to determine the transmission ratio in a closed circuit of a continuously variable hydrovolumetric-mechanical transmission. The values of the coefficient of efficiency for continuously variable hydrovolumetric-mechanical and mechanical transmissions are calculated. The results of the comparative analysis of the values of the dynamic factor for the vehicles used to repair oil and gas wells with continuously variable hydrovolumetric-mechanical and mechanical transmissions are given.

Key words: vehicle, acceleration, hydrovolumetric-mechanical transmission, dynamic factor, efficiency.

Вступ. В світовій галузі машинобудування розвиток конструкцій автомобілів та тракторів, як правило, направлено на підвищення технічного рівня, а також на покращення умов праці водія, як в транспортному, так і в робочому режимах праці.

Впровадження нових технічних рішень в машинобудуванні приводить до виникнення нових конструкцій, які, в першу чергу, спрямовані на альтернативу механічній передачі потужності від силової установки до рушіїв. На сьогоднішній день в автомобілебудуванні розповсюджені такі типи трансмісій, як електромеханічна, з варіатором, тощо. Аналізуючи трансмісії сучасних тракторів [1], необхідно відзначити такі рішення, як гідрооб'ємно-механічні трансмісії (ГОМТ), які набувають більшої популярності в порівнянні зі ступінчастими механічними трансмісіями. Що пов'язано з забезпеченням плавності руху, автоматизації управління, підвищенням ергономічних властивостей під час виконання технологічних операцій, тощо.

Застосування ГОМТ на автомобілях надає наступні переваги в порівнянні з механічною трансмісією: незалежне розташування агрегатів трансмісії, що дозволяє найдоцільніше розмістити їх на машині; високі захисні властивості трансмісії, тобто надійне оберігання від перевантажень двигуна і системи приводу робочих органів завдяки установці запобіжних і переливних клапанів; підвищує прохідність в результаті безперервного потоку потужності та плавної зміни моменту; знижує динамічні навантаження в трансмісії при змінних режимах роботи; підвищення середніх швидкостей руху по бездоріжжю за рахунок кращого використання потужності двигуна внутрішнього згоряння, тощо.

Аналіз останніх досліджень. Існує ряд публікацій [1 – 3], присвячених розгляду питань, пов'язаних з аналізом ГОМТ. Зокрема, в роботі [1] проведено аналіз західноєвропейського ринку, який показав, що трактори оснащуються трансмісіями з синхронізованими коробками перемикачів передач та коробками з шестернями постійного зчеплення, трансмісіями діапазонного типу з перемикачів передач під навантаженням в діапазоні, трансмісіями з перемикачів всіх передач під навантаженням, а також безступінчастими двопотоковими трансмісіями

Дослідженню використання на автомобілях для ремонту нафтогазових свердловин ГОМТ присвячені праці [4 – 6], в яких автори роблять акцент на аналіз роботи трансмісії під час спуско-підйомних операцій. Проте в повній мірі не з'ясовано вплив використання ГОМТ замість механічної трансмісії в процесі виконання транспортних робіт.

В роботі [6] наводяться аргументації щодо доцільності використання безступінчастих ГОМТ у автомобілях для ремонту нафтогазових свердловин в процесі підйому та спуску колон труб. Проте використання ГОМТ в автомобілях потребує їх обґрунтування з точки зору тягово-швидкісної характеристики, а саме зіставлення показників динамічного фактору, отриманого для автомобіля з механічною трансмісією та безступінчастою ГОМТ.

Постанова задачі. Використання на автомобілях ГОМТ, перш за все, пов'язано з вирішенням спеціальних задач, тобто для виконання робочих операцій. Зважаючи на це, цілком доречно дослідити впровадження ГОМТ

на спеціальні автомобілі, наприклад, автомобілі для ремонту нафтогазових свердловин, а також дослідити зміну показників трансмісії та в цілому автомобіля при виконання транспортних робіт. Таким чином, метою роботи є теоретично обґрунтувати використання ГОМТ на автомобілі КрАЗ-63221-02 для ремонту нафтогазових свердловин за рахунок порівняння значення динамічного фактору автомобіля з ГОМТ та механічною трансмісією.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- сформувати математичну модель, що дозволить визначити передавальне число ГОМТ;
- навести математичну модель, що дозволить визначити показник динамічного фактору;
- порівняти значення динамічного фактору на автомобілі КрАЗ-63221-02 з механічною трансмісією та ГОМТ.



Рис. 1 – Автомобіль для ремонту нафтогазових свердловин.

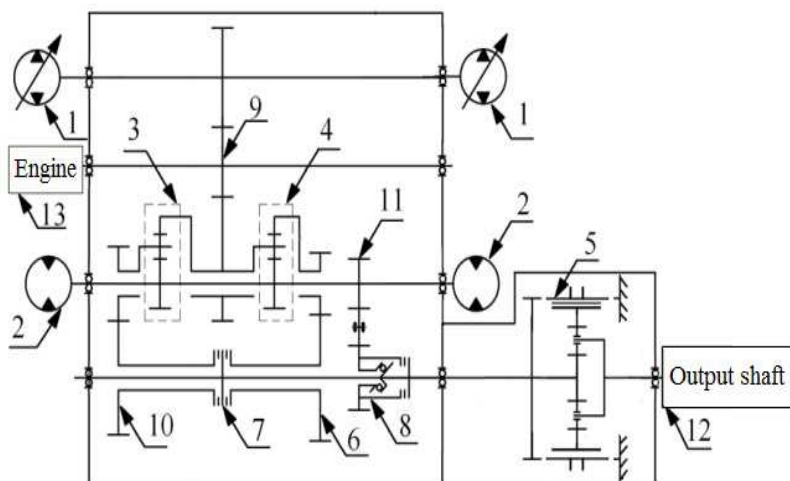


Рис. 2 – Кінематичні схеми трансмісій ГОМТ: 1 – регульований гідронасос; 2 – нерегульований гідромотор; 3, 4, 5 – планетарні механізми; 6, 9, 10, 11 – редуктори; 7 – гідропідтисні муфти; 8 – обгінна муфта; Engine – двигун внутрішнього згоряння; Output shaft – вихідний вал.

Математична модель. Описуючи автомобіль для ремонту нафтогазових свердловин (рис. 1) необхідно більш детально окреслити конструктивні особливості базової 8-ступінчастої механічної трансмісії та запропонованої ГОМТ (рис. 2).

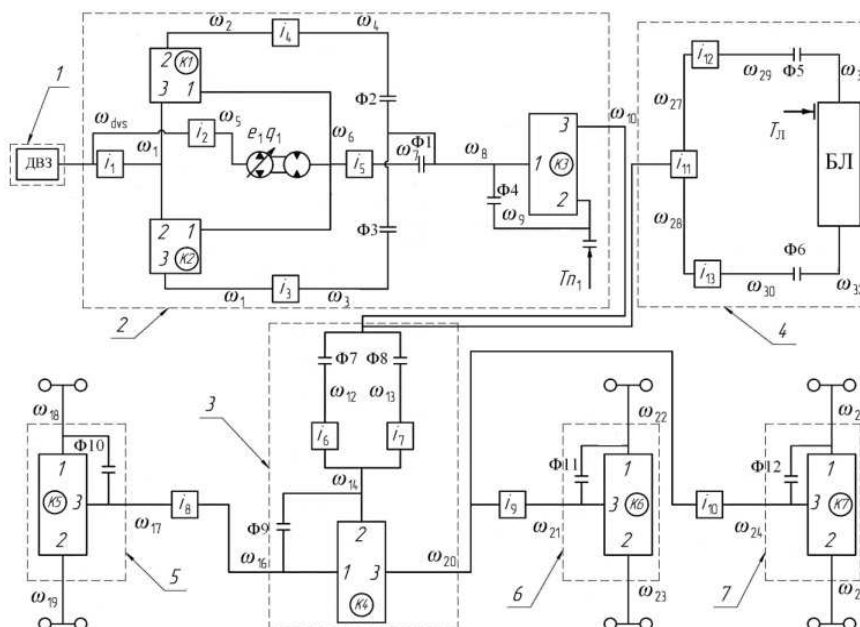


Рис. 3 – Схема запропонованої безступінчастої ГОМТ:

1 – двигун внутрішнього згоряння; 2 – ГОМТ; 3 – роздавальна коробка; 4 – лебідка; 5, 6, 7 – ведучі мости; ω_i – кутова швидкість ланки; i_j – передавальне число редуктора; k_f – планетарний механізм ($f = 1 \dots 7$);

Φ_n – параметр, що описує фрикційну пару ($n = 1 \dots 12$); T – параметр, що описує гальмо; БЛ – барабан лебідки.

Механічна трансмісія має вісім швидкісних діапазонів передач в транспортному режимі руху, і технологічному режимі роботи, які забезпечуються ступінчастою механічною трансмісією. Трансмісія установки передає

потужність від коробки відбору потужності на двоступеневу проміжну опору і далі до виконавчих механізмів. В якості привода установки використовується ходовий двигун шасі. До трансмісії належать: коробка відбору потужності на роздавальній коробці (приналежність шасі), проміжна опора, циліндричний редуктор, карданні вали, зубчасті муфти, а також роздавальний редуктор, ланцюгові передачі, фрикційні муфти, які конструктивно входять до складу лебідки і забезпечують обертання барабана лебідки [4].

Запропонована безступінчаста ГОМТ (рис. 2) складається з двигуна внутрішнього згоряння 13 гідрооб'ємної передачі, а саме: з двох регульованих гідронасосів 1 і двох нерегульованих гідромоторів 2, по 112 см³; планетарних механізмів 3, 4, 5; редукторів 6, 9, 10, 11; гідропідтискної 7 і обгінної муфти 8; вихідного вала 12. В запропонованій конструкції потужність двигуна йде окремими потоками в залежності від діапазону. Однопотоким – гідравлічним, коли потужність двигуна 13, через редуктор 9 передається до вала гідронасоса 1, через трубопроводи на вал гідромотора 2, далі на редуктор 11, обгінну муфту 8, планетарний механізм 5 до вихідного вала 12. Двупотоким – гідрооб'ємно-механічним, коли потужність двигуна через редуктор 9, коронну шестерню і водило двох планетарних механізмів 3, 4 (в залежності від діапазону), далі з водила і коронної шестерні, до двох редукторів 6, 10 та двох гідропідтискних муфт 7, планетарного механізму 5 до вихідного вала 12. ГОМТ з диференціалом на виході має три швидкісні безступінчасті діапазони передач при транспортному режимі руху: однопотоким, який забезпечується гідрооб'ємною передачею та планетарним механізмом 5, та двома двопотокими, які забезпечуються гідрооб'ємною передачею та планетарними рядами 3, 4. При виконанні спуско-підйомної операції у ГОМТ з диференціалом на виході застосовується лише два діапазони передач, однопотоким та один двопотоким (ввімкнено планетарний механізм 4) [5 – 6].

В процесі дослідження роботи автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин з безступінчастою ГОМТ на транспортному режимі роботи необхідно відзначити можливість руху заднім ходом, який досягається зміною параметру регулювання гідронасосу $e_1 \in [0; -1]$.

Основним критерієм, який окреслює тягово-швидкісні характеристики є динамічний фактор. При визначенні динамічного фактора автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин скористаємося класичними рівняннями

$$V = \omega_{dvs} \cdot r_k / (i_k \cdot i_o \cdot i_{rk}); \quad (1)$$

$$P_k = M \cdot \eta_{tr} \cdot \omega_{dvs} / V; \quad (2)$$

$$P_w = k \cdot F \cdot V^2; \quad (3)$$

$$D_{meh} = (P_k - P_w) / G, \quad (4)$$

де V – швидкість руху автомобіля; ω_{dvs} – кутова швидкість колінчастого вала; r_k – радіус кочення колеса; i_k – передавальне число відповідної передачі; i_o – передавальне число головної передачі; i_{rk} – передавальне число в роздавальній коробці передач; P_k – тягова сила на колесах; M – крутний момент двигуна; η_{tr} – ККД трансмісії; P_w – сила опору повітря; k – коефіцієнт опору повітря; F – площа поперечного перетину (лобового опору); G – вага автомобіля.

При визначенні швидкості руху автомобіля з механічною трансмісією цілком доцільно скористатись рівняннями (1), проте розглядаючи автомобіль з ГОМТ це недоречно, адже гідрооб'ємна передача має змінне передавальне число та більші втрати енергії в механічній і гідравлічній гілках. Тому необхідно навести систему рівнянь, що описує зміну кутових швидкостей елементів ГОМТ, на основі структурної схеми (рис. 3):

Перший діапазон	Другий діапазон	Третій діапазон
$w_{dvs} \cdot i_2 - w_5 = 0;$	$w_{dvs} \cdot i_1 - w_0 = 0;$	$w_{dvs} \cdot i_1 - w_0 = 0;$
$w_6 \cdot i_5 - w_7 = 0;$	$w_{dvs} \cdot i_2 - w_5 = 0;$	$w_{dvs} \cdot i_2 - w_5 = 0;$
$w_7 - w_8 = 0;$	$w_6 - k_1 \cdot w_0 + (k_1 - 1) \cdot w_1 = 0;$	$w_6 - k_2 \cdot w_2 + (k_2 - 1) \cdot w_0 = 0;$
	$w_1 \cdot i_3 - w_3 = 0;$	$w_2 \cdot i_4 - w_4 = 0;$
	$w_3 - w_8 = 0;$	$w_4 - w_8 = 0;$
$-e_1 \cdot q_1 \cdot w_4 + e_2 \cdot q_2 \cdot w_5 = \left(\frac{K_{1y}}{\mu} \cdot (1 + C_{1y} \cdot \omega_4) + \frac{K_{2y}}{\mu} \cdot (1 + C_{2y} \cdot \omega_5) + \frac{V_{0*}}{2 \cdot \pi \cdot E(g*)} \cdot (\omega_4 + \omega_5) \right) \cdot \Delta P; \quad (5)$		
$w_8 - k_3 \cdot w_9 + (k_3 - 1) \cdot w_{10} = 0; \quad w_{10} - w_{12} = 0;$		
$w_{12} \cdot i_6 - w_{14} = 0; \quad w_{16} - k_5 \cdot w_{14} + (k_5 - 1) \cdot w_{20} = 0;$		
$w_{16} \cdot i_8 - w_{17} = 0; \quad w_{18} - k_6 \cdot w_{19} + (k_6 - 1) \cdot w_{17} = 0;$		
$w_{20} \cdot i_9 - w_{21} = 0; \quad w_{22} - k_7 \cdot w_{23} + (k_7 - 1) \cdot w_{21} = 0;$		
$w_{20} \cdot i_{10} - w_{24} = 0; \quad w_{25} - k_8 \cdot w_{26} + (k_8 - 1) \cdot w_{24} = 0.$		

де ω_i – кутова швидкість ланки ($\omega_i = \pi \cdot n / 30$); n – частота обертання колінчастого вала двигуна; ω_{dvs} – кутова швидкість колінчастого вала двигуна; k – внутрішнє передавальне відношення планетарного ряду; e_1, e_2 – від-

носні параметри регулювання гідронасоса і гідромотора; q_1, q_2 – максимальна продуктивність гідромашин (гідронасоса і гідромотора, відповідно); ΔP – перепад робочого тиску в ГОП; K_{iy}, C_{iy} – коефіцієнти втрат для гідронасоса ($i=1$) і для гідромотора ($i=2$); μ – коефіцієнт динамічної в'язкості; V_{0*} – об'єм рідини, що стискається; $E(g^*)$ – модуль пружності робочої рідини, що залежить від відсотка g^* газовмісту.

При формуванні передавального числа ГОМТ (i_k) можна скористатись зворотною величиною, а саме передавальним відношенням, визначення якого, безпосередньо для ГОМТ наводиться в роботах [7 – 10]. На основі цих робіт відомо, що при розподілі потужності в двопотоковій ГОМТ можливо три режиму роботи, що відповідно змінює визначення передавального відношення в замкнутому контурі.

Автор в роботах [9] пропонує універсальні рівняння, які надають змогу визначення передавального відношення (i) при паралельному, з переважанням механічної гілки та з переважанням гідравлічної гілки

$$N_A / N_C = \eta_{HSD}^{+1} / (\eta_{HSD}^{+1} - i); \quad (6)$$

$$N_B / N_C = \eta_{HSD}^{+1} \cdot i / (i - \eta_{HSD}^{+1}), \quad (7)$$

де N_A – потужність, яка протікає по механічній гілці ГОМТ; N_C – потужність двигуна внутрішнього згоряння; η_{HSD} – ККД ГОП; N_B – потужність, яка протікає по гідравлічній гілці ГОМТ.

Узагальнюючи наведені рівняння (6) – (7) необхідно відмітити, що при паралельному розподілі потужності показник ступеню ККД ГОП повинен дорівнювати +1, що приведе до нерівності $i < 0$. В випадку переважання механічної гілки показник ступеню ККД ГОП повинен дорівнювати -1, що приведе до умови $i > 0$. При переважання гідравлічної гілки цей показник повинен дорівнювати +1, що, на відміну від випадку при паралельному розподілі потужності, приведе до нерівності $i > 0$.

З рівнянь (6) – (7) не відомим залишається значення η_{HSD} ККД ГОП. Для знаходження цього показника необхідно відокремити загальне значення ККД ГОП на дві складові: ККД об'ємний η_V та ККД механічний η_M , які формуються в прямому та зворотному потоці.

$$\eta_{HSD} = \eta_V \cdot \eta_M. \quad (8)$$

Згідно з роботи [9] ККД об'ємний η_V та ККД механічний η_M визначаються з наступних рівнянь

$$\eta_V = \begin{cases} \omega_m / (\omega_p \cdot e_1(t)), & \text{при } \omega_p > 0; \\ \omega_p \cdot e_1(t) / \omega_m, & \text{при } \omega_p \leq 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\eta_M = \begin{cases} -M_m / (M_p \cdot e_1(t)), & \text{при } M_p > 0; \\ |M_p \cdot e_1(t) / M_m|, & \text{при } M_p \leq 0, \end{cases} \quad (10)$$

де ω_p, ω_m – кутові швидкості на ланках гідронасоса та гідромотора; M_p, M_m – крутний момент на ланках гідронасоса та гідромотора.

Результати роботи програми. На рис. 4 наведена зміна показників ККД ГОМТ та ККД ГОП на різних діапазонах руху по асфальто-бетонній поверхні.

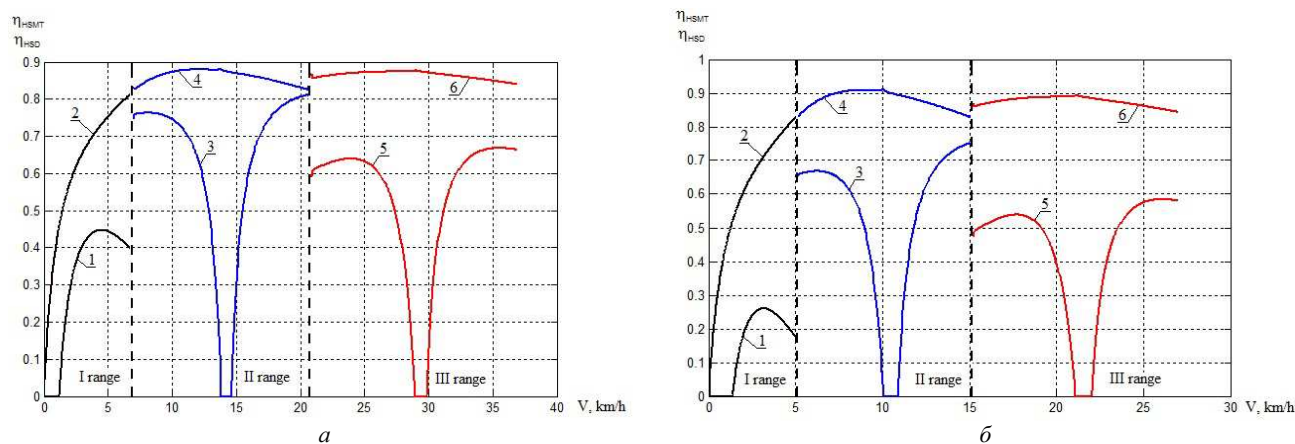


Рис. 4 – Зміна показників автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин: а – при $i_{rk} = 0,95$; б – при $i_{rk} = 1,31$;

1, 3, 5 – ККД ГОП відповідно на I, II, та III діапазонах; 2, 4, 6 – ККД ГОМТ відповідно на I, II, та III діапазонах.

Зіставляючи математичні залежності, обчислимо динамічний фактор автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин з механічною трансмісією та безступінчастою ГОМТ. На рис. 5 наведено зміну динамічного фактора.

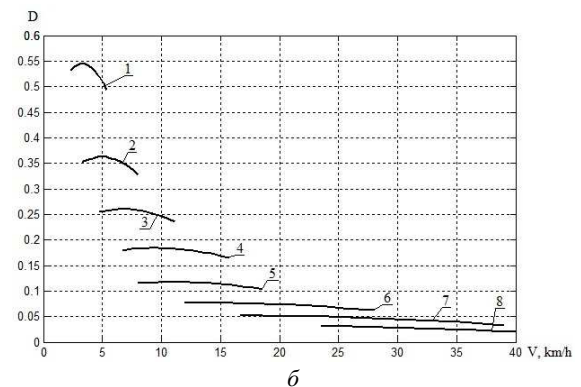
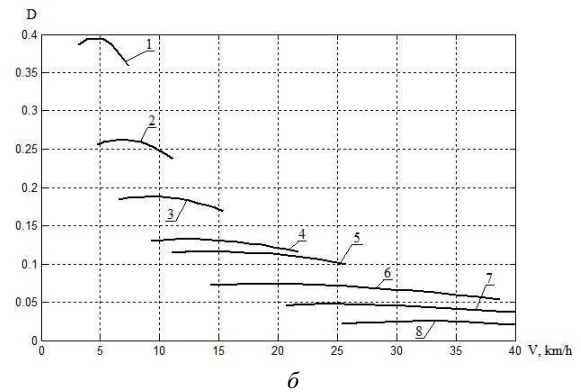
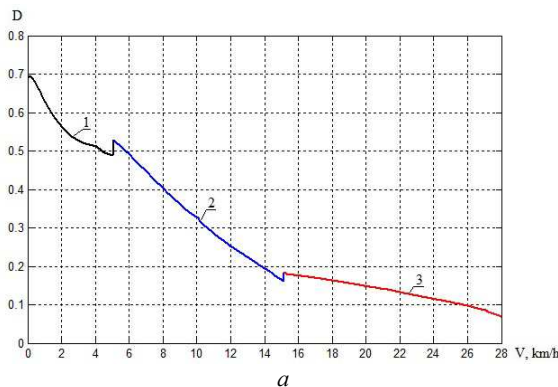
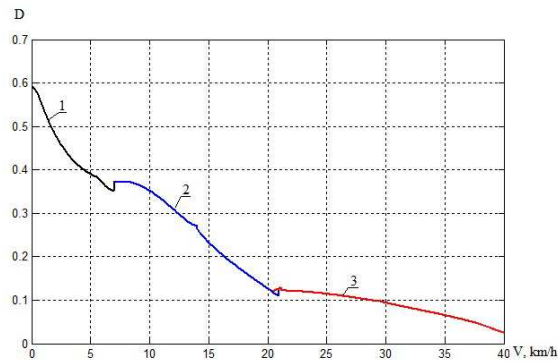


Рис. 5 – Зміна динамічного фактора автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин: *a* – з безступінчастою ГОМТ при $i_{rk} = 0,95$; *б* – з механічною трансмісією при $i_{rk} = 0,95$; *в* – з безступінчастою ГОМТ при $i_{rk} = 1,31$; *г* – з механічною трансмісією при $i_{rk} = 1,31$; 1 – перша передача (діапазон); 2 – друга передача (діапазон); 3 – третя передача (діапазон); 4 – четверта передача; 5 – п'ята передача; 6 – шоста передача; 7 – сьома передача; 8 – восьма передача.

Аналізуючи рис. 5 необхідно відмітити, що значення динамічного фактора автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин, оснащеного безступінчастою ГОМТ, вище, ніж у автомобіля з механічною.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним шляхом дослідження, пов'язаним з модернізацією безступінчастих трансмісій не лише на автомобілях для ремонту нафтогазових свердловин, а й на вантажних автомобілях спеціального призначення. Окрім того, перспективним є напрямок дослідження, який сприятиме збільшенню транспортної швидкості автомобіля.

Висновки. Обґрунтовано застосування на автомобілях для ремонту нафтогазових свердловин безступінчастих ГОМТ при дослідженні транспортного режиму руху. Використання безступінчастої ГОМТ дає можливість підвищити силові характеристики трансмісії автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин.

Визначено, що при порівнянні динамічного показника автомобіля для ремонту нафтогазових свердловин оснащеного безступінчастою ГОМТ, на початку руху машини, вище на 21,4 % при $i_{rk} = 1,31$ і 33,9 % при $i_{rk} = 0,95$, а на всьому діапазоні зміни швидкості значення динамічного фактора більше на 8,1 % при $i_{rk} = 1,31$ та на 11,5 % при $i_{rk} = 0,95$.

Список літератури

1. Самородов В. Б., Бондаренко А. І., Кожушко А. П., Пелипенко Є. С., Мітцель М. О. Перспективні трансмісії колісних тракторів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 10 (1053). – С. 3 – 10.
2. Samorodov V., Kozhushko A., Pelipenko E. Formation of a rational change in controlling continuously variable transmission at the stages of a tractor's acceleration and braking // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2016. – № 4/7 (82). – P. 37 – 44. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.75402.
3. Taran I. O., Kozhushko A. P. Substantiating of Rational Law of Hydrostatic Drive Control Parameters While Accelerating of Wheeled Tractors with Hydrostatic and Mechanical Transmission // Mechanics, Materials Science and Engineering, September 2016 – ISSN 2412 – 5954. – Vol. 6, Part II : Mechanical Engineering and Physics. – P. 70 – 76. DOI: 10.13140/RG.2.1.3590.9362.
4. Самородов В. Б., Островерх А. О., Кожушко А. П. Разработка и анализ бесступенчатой двухпоточной гидрообъемно-механической трансмиссии по критерию наибольшего КПД автомобиля для ремонта нефтегазовых скважин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : «Автомобіле- та тракторобудування». – 2012. – № 60 (966). – С. 105 – 111.
5. Самородов В. Б., Островерх А. О., Кожушко А. П. Анализ технологического режима работы бесступенчатой гидрообъемно-механической трансмиссии с использованием отечественных гидроагрегатов автомобиля для ремонта нефтегазовых скважин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : «Автомобіле- та тракторобудування». – 2013. – № 30 (1003). – С. 23 – 31.
6. Самородов В. Б., Островерх А. О. Повышение эффективности работы подъемных автомобильных установок с использованием бесступенчатых гидрообъемно-механических трансмиссий // Східноєвропейський журнал передових технологій. – 2014. – № 6 (72). – С. 37 – 44.
7. Таран И. А. Трансмиссии шахтных дизелевозов : Монография. – Д. : Национальный горный университет, 2012. – 256 с.

References (transliterated)

1. Samorodov V. B., Bondarenko A. I., Kozhushko A. P., Pelipenko E. S., Mittsel M. O. Perspektivni transmisii kolisnykh traktoriv [Perspective transmissions of the wheeled tractors]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [The bulletin of the National Technical University "KhPI"]. 2014, vol. 10, pp. 3–10.
2. Samorodov V., Kozhushko A., Pelipenko E. Formation of a rational change in controlling continuously variable transmission at the stages of a tractor's acceleration and braking. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 4/7, issue 82, pp. 37–44. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.75402.
3. Taran I. O., Kozhushko, A. P. Substantiating of Rational Law of Hydrostatic Drive Control Parameters While Accelerating of Wheeled Tractors with Hydrostatic and Mechanical Transmission. *Mechanics, Materials Science and Engineering. Part II : Mechanical Engineering and Physics*. September 2016, vol. 6, pp. 70–76. ISSN 2412 – 5954. DOI: 10.13140/RG.2.1.3590.9362.
4. Samorodov V. B., Ostroverch A. O., Kozhushko A. P. Razrabotka i analiz besstupenchatoy dvukhpotochnoy gidroob'emno-mekhanicheskoy transmisii po kriteriyu naibol'shego KPD avtomobilya dlya remonta neftegazovykh skvazhin [Development and analysis of stepless two-flow hydrostatic-mechanical transmission by criterion of greatest efficiency for cars used to repair oil and gas wells]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [The bulletin of the National Technical University "KhPI"]. 2012, vol. 60, pp. 105–111.
5. Samorodov V. B., Ostroverch A. O., Kozhushko A. P. Analiz tekhnologicheskogo rezhima raboty besstupenchatoy gidroob'emno-mekhanicheskoy transmisii s ispol'zovaniem otechestvennykh gidroagregatov avtomobilya dlya remonta neftegazovykh skvazhin [Analysis of the technological mode of operation of a continuous hydrovolume-mechanical transmission using native hydro-units of a car used to repair oil and gas wells]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [The bulletin of the National Technical University "KhPI"]. 2013, vol. 30, pp. 23–31.
6. Samorodov V. B., Ostroverch A. O. Povyshenie effektivnosti raboty pod'emnykh avtomobil'nykh ustanovok s ispol'zovaniem besstupenchatykh gidroob'emno-mekhanicheskikh transmisii [Increasing the efficiency of lifting automotive installations using stepless hydrostatic-mechanical transmissions]. *Skhidnoevropeys'kyy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2014, vol. 6, issue 72, pp. 37–44.
7. Taran I. O. *Transmisii shakhtnykh dizelevozov : Monografiya* [Transmission of mine diesel locomotives: Monograph]. Dnepropetrovsk, Natsional'nyy gomyy universitet Publ., 2012. 256 p.

Надійшла (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Теоретичне дослідження безступінчастої трансмісії автомобіля КрАЗ-63221-02 для ремонту нафтогазових свердловин / А. П. Кожушко, О. О. Островерх, В. М. Шевцов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 45 – 51. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Теоретическое исследование бесступенчатой трансмиссии автомобиля КрАЗ-63221-02 для ремонта нефтегазовых скважин / А. П. Кожушко, А. О. Островерх, В. М. Шевцов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 45 – 51. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Theoretical research of the continuously variable transmission of the vehicle KrAZ-63221-02 used to repair oil and gas wells / A. P. Kozhushko, A. O. Ostroverch, V. M. Shevtsov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 45 – 51. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Кожушко Анорей Павлович – кандидат технічних наук, старший преподаватель кафедри автомобіле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Kozhushko Andriy Pavlovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Lecturer at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Островерх Александр Олегович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: ostrov.sasha@gmail.com.

Островерх Александр Олегович – кандидат технических наук, доцент кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: ostrov.sasha@gmail.com.

Ostroverch Alexandr Olegovich – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: ostrov.sasha@gmail.com.

Шевцов Вадим Михайлович – асистент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: shevtsovvadim@ukr.net.

Шевцов Вадим Михайлович – асистент кафедри автомобіле- і тракторостроєння, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», г. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: shevtsovvdadim@ukr.net.

Shevtsov Vadim Michailovich – Assistant Professor at the Department of Car and Tractor Industry, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: shevtsovvdadim@ukr.net.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, М. В. АРТЮХ

УЗАГАЛЬНЕНО ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ, ЩО ЯВНО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД ОБ'ЄМНИХ ПОКАЗНИКІВ РЕСУРСІВ ТА КАПІТАЛООЗБРОЄНОСТІ

Робота присвячена розробці виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Проведено огляд виробничих функцій зі сталими коефіцієнтами еластичності. Виробничі функції зі сталими коефіцієнтами еластичності дають меншу якість наближення до фактичних даних, тому є необхідність у розробці виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами еластичності. Запропоновано математичну модель виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Отримано виробничу функцію на основі даного методу. Наведено порівняльний аналіз виробничої функції Кобба – Дугласа та виробничої функції, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності. Ця модель дозволяє прогнозувати випуск продукції для різних значень капіталоозброєності, а також знаходити максимальний можливий випуск продукції при збільшенні капіталоозброєності.

Ключові слова: виробнича функція Кобба – Дугласа, еластичність заміщення, виробнича функція зі змінними коефіцієнтами.

Работа посвящена разработке производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. Проведен обзор производственных функций с постоянными коэффициентами эластичности. Производственные функции с постоянными коэффициентами эластичности дают меньшее качество приближения к фактическим данным, поэтому есть необходимость в разработке производственных функций с переменными коэффициентами эластичности. Предложена математическая модель производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. На основе данного метода получена производственная функция. Проведен сравнительный анализ производственной функции Кобба – Дугласа и производственной функции, явно зависящей от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности. Эта модель позволяет прогнозировать выпуск продукции при различных значениях капиталовооруженности, а также находить максимально возможный выпуск продукции при увеличении капиталовооруженности.

Ключевые слова: производственная функция Кобба – Дугласа, эластичность замещения, производственная функция с переменными коэффициентами.

The work is devoted to developing a production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment. The review of production functions with constant coefficients of elasticity is given. Production functions with constant elasticity coefficients give a lower quality of approximation to the actual data, so there is a need to develop production functions with variable coefficients of elasticity. A mathematical model of a production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment, is developed. A production function is built based on this method. The comparative analysis of the Cobb – Douglas production function versus the one depending explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment is given. This model allows us to predict the output for different values of capital endowment and to find the maximum possible output while increasing capital endowment.

Key words: the Cobb – Douglas production function, elasticity of substitution, production function with variable coefficients.

Вступ. На даний час є декілька *виробничих функцій*, які застосовуються для дослідження та прогнозування різних економічних систем. Вони моделюють залежність випуску продукції від кількості використаних ресурсів для виробництва цієї продукції. В даній роботі розглянемо виробничу функцію, яка має змінні коефіцієнти еластичності і також залежить від капіталоозброєності виробництва. Така функція буде краще наближувати дані і дасть змогу точніше робити прогнози для розвитку виробництва.

Огляд теорії виробничих функцій. Поняття виробничої функції з'явилося в 30-х роках ХХ століття. Американські вчені *Джордж Кобб* та *Пітер Дуглас* в своїй статті [1] використали дані американської легкої промисловості за 24 роки, та на їх основі побудували виробничу функцію, яка потім отримала назву *виробнича функція Кобба – Дугласа*. Ця функція має вигляд:

$$Y = AL^\alpha K^\beta. \quad (1)$$

У цій виробничій функції основними факторами, що впливають на випуск продукції Y , вважаються K – основний капітал та L – робоча сила. Параметри A, α, β задовольняють таким умовам: $A > 0, \alpha \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Коефіцієнти α, β відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту [2]. За *методом найменших квадратів* було визначено всі вказані параметри і функція Кобба – Дугласа набула такого вигляду:

$$Y = 1,01L^{0,75}K^{0,25}. \quad (2)$$

Для функції Кобба – Дугласа коефіцієнти α, β постійні й не залежать від обсягу факторів K, L .

Важливою характеристикою для виробничих функцій є *ефект заміщення ресурсів*. Ця числова характеристика показує, на яку величину x_2 зменшиться обсяг витрат другого ресурсу, якщо збільшити обсяг витрат першого ресурсу на x_1 , щоб при цьому обсяг випуску Y залишився незмінним. Тобто *гранична норма* $S_{x_1x_2}$ заміни

одного ресурсу іншим – це величина, що показує який обсяг ресурсу вивільняється при збільшенні витрат ресурсу – замітника на одиницю:

$$S_{x_1 x_2} = -\frac{x_2}{x_1}. \quad (3)$$

Тоді *еластичність заміни ресурсів* показує, на скільки відсотків повинно змінитись співвідношення ресурсів (при $Y = \text{const}$), при змінненні граничної норми заміни на 1 %:

$$\sigma_{x_1 x_2} = \frac{\partial(x_2 / x_1)}{\partial S_{x_1 x_2}} \cdot \frac{S_{x_1 x_2}}{x_2 / x_1}. \quad (4)$$

Поняття еластичності заміни факторів є одним із основних понять теорії виробничих функцій.

Теорія виробничих функцій постійно розвивалась і пізніше з'явилося ще декілька видів виробничих функцій.

На практиці часто використовується виробнича функція, яка належить до класу CES – функцій, тобто виробнича функція зі сталою еластичністю заміщення

$$Y = A(bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}},$$

$$A > 0, b \in [0,1], \rho \in [-1,0) \cup (0,+\infty), \gamma > 0. \quad (5)$$

Еластичність заміщення цієї функції стала і дорівнює $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$. Поклавши в (5) $Y = \text{const}$, одержимо вираз для ізокванти CES – функції:

$$bK^{-\rho} + (1-b)L^{-\rho} = \left(\frac{Y}{A}\right)^{-\frac{\rho}{\gamma}}.$$

Можна показати, що *ізокванти* виробничої функції (5) є монотонно спадними опуклими функціями. Чим більше ρ (тобто чим менше σ), тим більша кривизна сполучної ділянки. Якщо $\sigma > 1$, то є можливість повного заміщення одного фактора виробництва іншим при збереженні випуску продукції незмінним, що суперечить припущенню про неможливість виробництва при відсутності принаймні одного ресурсу. Якщо $\sigma \leq 1$, то можливості повного заміщення одного фактора іншим не існує. Якщо в (5) величину ρ спрямувати до нуля, то (за *правилом Лопітала*) одержимо функцію Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{b\gamma}L^{(1-b)\gamma}. \quad (6)$$

Їй відповідає значення $\sigma = 1$. Неважко переконатися, що в цій формулі показники ступеня $b\gamma$ та $(1-b)\gamma$ дорівнюють частинним еластичностям випуску Y по відповідних факторах K, L . Таким чином, у цьому випадку E_K та E_L сталі (не залежать від k).

Якщо в (5) величину ρ спрямувати до нескінченності, то одержимо виробничу функцію з фіксованими пропорціями (функцію Леонтьєва):

$$Y = \min(K, L)^\gamma,$$

яку частіше записують у вигляді

$$Y = \min\left(\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right)^\gamma. \quad (7)$$

Виробнича функція Леонтьєва не є диференційовною у точці $K = K_0$ та $L = L_0$. Цій точці відповідає значення $\sigma = 0$. У цьому випадку фактори виробництва мають *властивість доповнюваності* (на відміну від властивості заміщення при $\sigma > 0$, відповідно до якої між ними є певні пропорції, при відхиленні від яких надлишок фактора не робить внеску у випуск продукції).

Якщо в (5) величину ρ вважати рівною -1 , одержимо виробничу функцію з лінійними ізоквантами

$$Y = A(bK + (1-b)L)^\gamma, \quad (8)$$

яку навіть при $\gamma \neq 1$ часто називають *лінійною*. Їй відповідає значення $\sigma = +\infty$, що свідчить про необмежені можливості заміщення (можливе навіть повне заміщення одного фактора іншим). Ізокванта виробничої функції (8) є прямою лінією.

Фактор часу у функції $F(K, L; t)$ вводиться, зокрема, для врахування впливу сукупності всіх інших, не фігуруючи безпосередньо у списку аргументів виробничої функції, факторів, які часто пов'язуються з технічним прогресом. Оскільки

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial K} K' + \frac{\partial F}{\partial L} L',$$

де штрих позначає диференціювання за часом, то

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{\partial \ln F}{\partial t} + \frac{\partial \ln F}{\partial \ln K} \frac{K'}{K} + \frac{\partial \ln F}{\partial \ln L} \frac{L'}{L}$$

або

$$\delta_Y = p + E_K \delta_K + E_L \delta_L,$$

де $\delta_Y = \frac{Y'}{Y}$, $\delta_K = \frac{K'}{K}$ і $\delta_L = \frac{L'}{L}$ – темпи випуску продукції, капіталу і праці відповідно; E_K та E_L – еластичності випуску продукції по фондах і праці відповідно; а $p = \frac{\partial \ln F}{\partial t}$ – складова, яка враховує внесок прогресу в темп випуску (вона часто називається *темпом автономного технічного прогресу*) [3].

В 1953 році американський економіст Р. Солоу запропонував виробничу функцію (ВФ)

$$Y = A \bar{\Phi}^\lambda(t) L^{1-\lambda}(t), \quad (9)$$

де

$$\bar{\Phi} = e^{\mu t} \int_{-\infty}^t e^{(\mu+\beta/\lambda)\tau} k(\tau) d\tau,$$

$\bar{\Phi}$ – розрахунковий об'єм основних фондів; μ – норма вибуття фондів; β – темп НТП, який проявляється в якості основних фондів, що знову вводяться; $k(\tau)$ – капіталовкладення в основні виробничі фонди в році τ .

В рамках цієї ВФ науково-технічний прогрес не тягне ніяких змінень на рівні виробництва, доки не буде упредметнений в основних фондах [4].

Таким чином, існує декілька видів виробничих функцій, які можливо застосовувати для дослідження і прогнозування економічних систем різноманітних масштабів. Найбільш вдалою для дослідження є функція Кобба – Дугласа, оскільки вона може застосовуватись для систем як великого масштабу – галузь, так і для маленьких фірм.

Актуальність. Основною особливістю наведених вище виробничих функцій є те, що вони мають сталі коефіцієнти еластичності α, β . Але при більш детальному дослідженні (див. [5], зокрема аналіз даних, що використовувалися) виявляється, що частинні коефіцієнти еластичності виробничої функції Кобба – Дугласа можуть бути функціями від обох факторів L та K . Також необхідно врахувати те, що коефіцієнт капіталоозброєності не може бути константою, оскільки існує технічна взаємозамінність факторів K та L [6]. При введенні коефіцієнту капіталоозброєності в модель виробничої функції отримаємо більш точне врахування впливу рівня капіталоозброєності на кінцевий продукт. Таким чином, актуальною є задача побудови і дослідження виробничих функцій, які б враховували вплив на Y всіх факторів.

Постановка задачі. В даній статті розглянемо математичну модель виробничої функції, що залежить від капіталоозброєності та має частинні коефіцієнти еластичності, які є функціями від обох факторів L та K .

Математична модель. Припустимо, що виробничу функцію зображується в наступному вигляді:

$$Y\left(L, K, \frac{K}{L}, C_1, a, b\right) = e^{C_1 \cdot \frac{K}{L}} \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (10)$$

де

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (11)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (12)$$

$\varphi_i(L) = L^i$; $\varphi_m(K) = K^m$; C_1, a_{im}, b_{im} – невідомі параметри (коефіцієнти); M, N – параметри.

Теорема. Для знаходження невідомих C_1, a_{im}, b_{im} з умов

$$Y_p\left(L_p, K_p, \frac{K_p}{L_p}, C_1, a, b\right) = e^{C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p}} \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)}, \quad p = \overline{1, Q}; \quad Q = 24 \quad (13)$$

методом найменших квадратів

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left(e^{C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p}} \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)} - Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_{im}, b_{im}}$$

матриця невідомих коефіцієнтів $C = [C_1 \ a_{00} \ a_{10} \ a_{01} \ \dots \ a_{MN} \ b_{00} \ b_{10} \ b_{01} \ \dots \ b_{MN}]$ знаходиться за формулою:

$$C = (B \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot Y1,$$

де B – матриця з Q рядками наступного вигляду:

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{K_p}{L_p} & \ln L_p & (\ln L_p)L_p & (\ln L_p)K_p & \dots \\ \dots & (\ln L_p)K_p^M L_p^N & \ln K_p & (\ln K_p)L_p & (\ln K_p)K_p & \dots & (\ln K_p)K_p^M L_p^N \end{bmatrix}^T,$$

а $Y1_p = \ln Y_p$, $p = \overline{1, Q}$, що отримується, якщо

$$f(L, K, a) = a_{00} + a_{10}L + a_{01}K + a_{11}LK + \dots + a_{MN}L^M K^N,$$

$$g(L, K, b) = b_{00} + b_{10}L + b_{01}K + b_{11}LK + \dots + b_{MN}L^M K^N.$$

Доведення. Прологарифмувавши вираз (10), підставимо в нього вирази (11) та (12). Отримаємо:

$$\ln Y = C_1 \cdot \frac{K}{L} + (\ln L) \cdot f(L, K, a) + (\ln K) \cdot g(L, K, b).$$

Підставляємо в цю рівність значення K_p , L_p , Y_p :

$$\ln Y_p = C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p} + (\ln L_p) \cdot f(L_p, K_p, a) + (\ln K_p) \cdot g(L_p, K_p, b), p = \overline{1, Q}. \quad (14)$$

Вираз (14) можна переписати у наступному вигляді:

$$jj(C) = \sum_{p=1}^Q \left(C_1 \cdot \frac{K_p}{L_p} + (\ln L_p) \cdot f(L_p, K_p, a) + (\ln K_p) \cdot g(L_p, K_p, b) - \ln Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{C_1, a_{im}, b_{im}}.$$

Звідси маємо: $B^T \cdot C = Y1$, що приводить до системи:

$$(B \cdot B^T) \cdot C = B \cdot Y1,$$

з якої отримаємо доведення теореми:

$$C = (B \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot Y1.$$

Теорему доведено.

Обчислювальний експеримент. Наведемо результати обчислювального експерименту, проведеного за даним методом з використанням сукупності даних Кобба – Дугласа [1]. В результаті при $M = 1$; $N = 1$ для невідомих коефіцієнтів отримані наступні значення:

$$C_1 = -21,614; a_{00} = -15,272; a_{10} = 0,097; a_{01} = -0,053; a_{11} = 4,65 \times 10^{-4}; b_{00} = 22,264; b_{10} = -0,133; b_{01} = 0,072; b_{11} = -4,272 \times 10^{-4}.$$

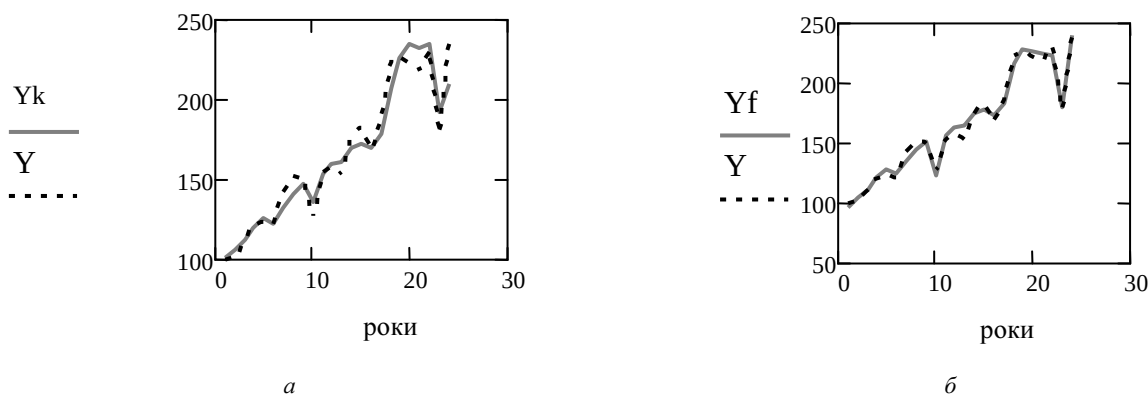


Рис. 1 – Графіки наближення розрахункових функцій до фактичних даних:
а – функція Кобба – Дугласа (Y_k); б – функція, що явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності (Y_f).

Таким чином, отримали виробничу функцію такого вигляду:

$$Y_F = e^{-21,614} \cdot L^{-15,272+0,097 \cdot L-0,053 \cdot K+4,65 \times 10^{-4} \cdot L \cdot K} \cdot K^{22,2625-0,133 \cdot L+0,072 \cdot K-4,272 \times 10^{-4} \cdot L \cdot K}. \quad (15)$$

Для функції Кобба – Дугласа (2) середньоквадратичне відхилення $\sigma_1 = 10,182$, для функції з частинними

коефіцієнтами еластичності отримали $\sigma_2 = 4,876$.

Наведемо графіки наближення до фактичних даних функції Кобба – Дугласа (2) (рис. 1, а) та функції (15), що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності (рис. 1, б), де Y – фактичні значення обсягів виробництва.

Бачимо, що функція, яка явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності (Y_f) (15) дає краще наближення до фактичних даних.

Далі наведемо графіки відхилень розрахункового випуску від фактичного (рис. 2). На зображеннях видно, що відхилення розрахункових значень від фактичних у виробничій функції, що явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності (15), менше, ніж у виробничій функції Кобба – Дугласа (2).

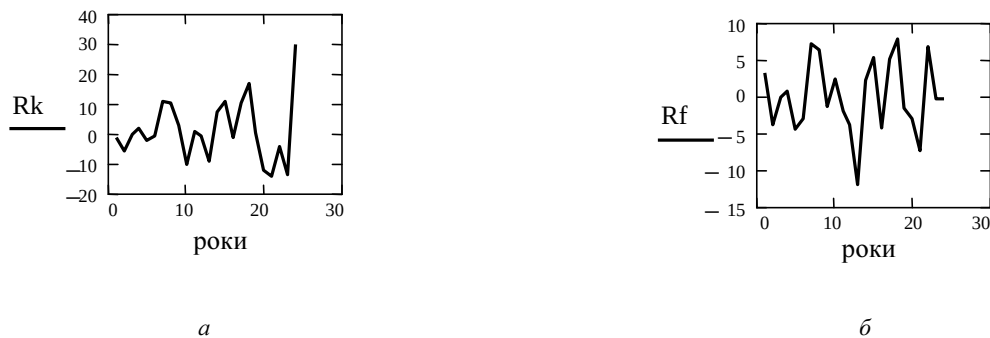


Рис. 2 – Графіки відхилення розрахункового випуску продукції до фактичного:
а – функція Кобба – Дугласа; б – функція, що явно залежить від об'ємних показників та капіталоозброєності.

Висновки. В роботі досліджена виробнича функція $Y = Y(K, L, K/L)$, де Y – обсяг продукції; K – основний капітал; L – робоча сила; K/L – капіталоозброєність. Пропонується в цій узагальненій формулі Кобба – Дугласа вважати, що показники степеня над L і K є білінійними функціями від змінних L і K , а Y – загальний випуск. Множник A замінюється на $e^{C_1 \frac{K}{L}}$.

Досліджений метод знаходження невідомих параметрів $C_1 \dots C_9$ за умови найкращого середньоквадратичного наближення до експериментальних даних, що використовувались в праці Кобба і Дугласа [1].

Запропонована формула для залежності $Y = Y(K, L, K/L)$ і для даних, що використовувались в статті Кобба – Дугласа, отримані параметри цієї формули. Вона підтверджує відомий в економіці факт, що при збільшенні капіталоозброєності Y (обсяг продукції) спочатку зростає, а потім прямує до деякого сталого значення. Ця модель дозволяє нам прогнозувати значення Y для тих значень капіталоозброєності, які виходять за межі таблиці даних, що використовувались в статті Кобба і Дугласа. А також знаходити максимальний можливий випуск продукції Y при збільшенні капіталоозброєності, відповідний даним таблиці експериментальних значень.

Список літератури

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – December. – pp. 139 – 165.
2. Гераскин М. И. Математическая экономика : теория производства и потребительского выбора. Учеб. Пособие // Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2004. – 102 с.
3. Зацеркляний М. М., Мельников О. Ф. Основы экономической кибернетики : Навч. посібник. – Чернівці : ТОВ «Видавництво «Наші книги»», 2008. – 392 с.
4. Шапиро Л. Д., Виноградов Т. В., Лотош Я. М. Экономико-математическое моделирование. – Томск : Изд-во Том. Ун-та, 1987. – 248 с.
5. Артюх М. В., Литвин О. М. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба – Дугласа // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2012. – № 27. – С. 124 – 129.
6. Калюжний В. В. Пояснення парадоксів неокласичної моделі економічного зростання Р. Солоу // Вісник Національного банку України. – Київ, 2005. – № 2. – С. 32 – 40.
7. Литвин О. М. Дивідірпальні та мультігральні числення : монографія. – К. : Наук. думка, 2006. – 144 с.

References (transliterated)

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production. American Economic Review. 1928, December, pp. 139–165.
2. Geras'kin M. I. Matematicheskaya ekonomika : teoriya proizvodstva i potrebitel'skogo vybora. Ucheb. posobie [Mathematical Economics: Theory of Production and Consumer Choice. Textbook]. Samara, Samarskiy gosudarstvennyy aerokosmicheskiy universitet Publ., 2004. 102 p.
3. Zatserklyanyy M. M., Mel'nykov O. F. Osnovy ekonomichnoyi kibernetiky : Navch. posibnyk [Fundamentals of Economic Cybernetics: Textbook]. Chernivtsi, TOV "Vydavnytstvo "Nashi knygy"" Publ., 2008. 392 p.
4. Shapiro L. D., Vinogradov T. V., Lotosh Ya. M. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [Economic-mathematical modeling]. Tomsk, Izd-vo Tom. Un-ta Publ., 1987. 248 p.
5. Artyukh M. V., Lytvyn O. M. Vyrobnycha funktsiya zi zminnyimi koefitsiyentamy elastychnosti, pobudovana na osnovi danykh Kobba – Duglasa [Production function with variable flexibility coefficients built on the basis of Cobb – Douglas data]. Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI» Tematychnyy vypusk: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI»

- Publ., 2012, no. 27, pp. 124–129.
6. Kalyuzhnyy V. V. Poyasnennyya paradoksyv neoklasychnoyi modeli ekonomichnogo zrostantnya R. Solou [The explanation of the paradoxes of the neoclassical model of economic growth R. Solow]. *Visnyk Natsional'nogo banku Ukrainy* [Bulletin of the National Bank of Ukraine]. Kyiv, 2005, no. 2, pp. 32–40.
7. Lytvyn O. M. *Dyvidirial'ni ta mul'tygral'ni chyslennyya : monografiya* [Dyvidirial and multygral calculus. Monograph]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2006. 144 p.

Надійшла (received) 06.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Узагальнена виробнича функція, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Обобщенная производственная функция, явно зависящая от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

The generalized production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment / O. M. Lytvyn, M. V. Artyukh // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 51 – 56. Bibliogr.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор фізико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Litvin Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Артюх Марина Володимирівна – асистент кафедри інформаційних, комп'ютерних і поліграфічних технологій, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Артюх Марина Владимировна – ассистент кафедры Информационных, компьютерных и полиграфических технологий, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Artyukh Maryna Volodymyrivna – Assistant at the Department of Information, Computer and Printing Technologies, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВИТЕР, К. В. КЕЙТА

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ВИПАДКУ РІЗНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Робота присвячена розробці математичних моделей цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі побудови кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних. Розглядається кубатурна формула обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями в точках. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінку похибки наближення кубатурних формул на класі диференційованих функцій. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.

Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

Работа посвящена усовершенствованию математических моделей цифровой обработки сигналов и изображений на примере построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций двух переменных. Рассматривается кубатурная формула вычисления интегралов от тригонометрических функций двух переменных с использованием интерликации в случае, когда информация о функции задана ее значениями в точках. Кубатурная формула строится с использованием оператора интерликации со вспомогательными функциями в виде кусочно-постоянных сплайнов. Получены оценки погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцируемых функций. Приведен численный эксперимент, подтверждающий теоретические результаты исследования.

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций двух переменных, кубатурные формулы, интерликация функций.

The paper deals with improving mathematical models of digital processing of signals and images by the example of constructing cubature formulas for computing integrals of high oscillating functions of two variables. The cubature formula for computing integrals of trigonometric functions of two variables using interlineation is considered for the case when the information about the function is given pointwise. The cubature formula is constructed.

© О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, К. В. Кейта, 2017

ted using interlineation operator with auxiliary functions in the form of piecewise-constant splines. The cubature formula approximation error is obtained for a class of differentiable functions. A numerical experiment confirming the theoretical results is given.

Key words: integrals of high oscillating functions of two variables, cubature formula, interlineation.

Вступ. Інтеграли від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних широко використовуються в багатьох задачах технічного спрямування. Сучасні математичні моделі, зокрема в цифровій обробці сигналів, комп'ютерній та сейсмічній томографії, використовують нові інформаційні оператори. Так в теорії наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних побудовані кубатурні формули наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації та інтерфлетації функцій на класі Літшиця, Гольдера, класі диференційованих функцій. В якості даних такі кубатурні формули використовують не лише значення функції у вузлових точках, а також сліди функції на лініях та сліди функцій на площинах. Однак менше уваги приділено наближеному обчисленню інтегралів загального виду від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних. Саме тому актуальним є питання дослідження інтегралів виду

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin(\omega g(x, y)) dx dy, \quad \omega \in R, \quad |\omega| \geq 2\pi \quad (1)$$

у випадку, коли інформація про $f(x, y)$ та $g(x, y)$ задана як значеннями функції у вузлових точках, так і слідами на лініях.

Аналіз останніх досліджень. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних лініях та значеннями функції в точках, викладена в роботах [1 – 6]. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємноперпендикулярних площин. Не дослідженим залишається питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів. Першим кроком в даному напрямку є роботи [17], [18], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Інформація про функцію задавалася відповідно її слідами на лініях та площинах; при побудові кубатурних формул використовувалися оператори кусково-сталої інтерлінації та кусково-сталої інтерфлетації. Питання наближеного обчислення тригонометричних інтегралів з використанням операторів інтерлінації та інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задається в точках, не досліджувалось.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$J(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin \omega g(x, y) dx dy, \quad \omega \in R, \quad |\omega| \geq 2\pi \quad (2)$$

побудувати та дослідити кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Інформація про функцію $g(x, y)$ задається її значеннями в точках. На класі диференційовних функцій отримати оцінки похибок наближення кубатурних формул.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від тригонометричної функції двох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації.

Означення. Під слідом функції $g(x, y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \Delta/2$, $y_j = j\Delta - \Delta/2$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = 1/\ell$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $g(x_k, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $g(x, y_j)$, $0 \leq x \leq 1$.

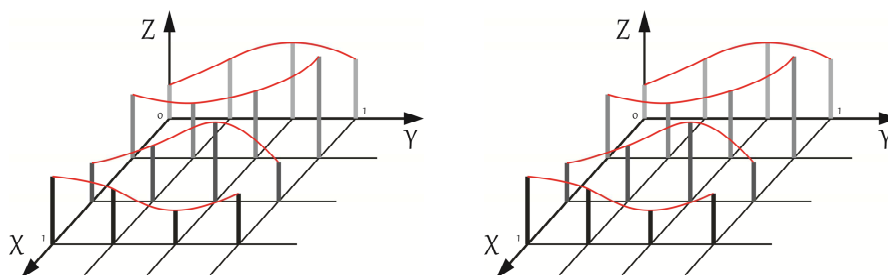


Рис. 1 – Сліди функції $g(x, y)$.

Нехай $m_1 = m_2 = \ell^2$ та $N = \ell^4$. Введемо позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad \tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}],$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}, \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, & x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2}, \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, & y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}, \quad \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Тоді оператор кусково-сталого сплайн-інтерлінації має вигляд

$$Eg(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} g(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} g(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} g(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y),$$

а оператор кусково-сталого сплайн-інтерполяції, побудований на основі сплайн-інтерлінації

$$\tilde{E}g(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} g(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} g(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} g(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Теорема 1. [17] Нехай $|g^{(1,0)}(x, y)| \leq M_1$, $|g^{(0,1)}(x, y)| \leq M_2$, $|g^{(1,1)}(x, y)| \leq M$, тоді для кубатурної формули

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega Eg(x, y)) dx dy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення $|J(\omega) - \Phi(\omega)| \leq \min\left(2; \frac{M\omega}{16} \Delta^2\right)$.

Теорема 2. Нехай $|g^{(1,0)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(0,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(1,1)}(x, y)| \leq M$, тоді для кубатурної формули

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega \tilde{E}g(x, y)) dx dy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення $|J(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)| \leq \min\left(2; \frac{M\omega}{16} \Delta^2\right) + \min\left(4; \frac{\tilde{M}\omega}{2} \Delta^2\right)$.

Доведення. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}(\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$|J(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)| = |J(\omega) - \Phi(\omega) + \Phi(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)| \leq |J(\omega) - \Phi(\omega)| + |\Phi(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)|.$$

За теоремою 1 маємо: $|J(\omega) - \Phi(\omega)| \leq \min\left(2; \frac{M\omega}{16} \Delta^2\right)$. Знайдемо оцінку для $|\Phi(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)|$:

$$\begin{aligned} |\Phi(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 \sin \omega g(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \sin \tilde{\omega} g(x, y) dx dy \right| \leq \int_0^1 \int_0^1 |\sin \omega g(x, y) - \sin \tilde{\omega} g(x, y)| dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left| 2 \cos \frac{\omega(Eg(x, y) + \tilde{E}g(x, y))}{2} \sin \frac{\omega(Eg(x, y) - \tilde{E}g(x, y))}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega(Eg(x, y) - \tilde{E}g(x, y))}{2} \right| dx dy \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega |Eg(x, y) - \tilde{E}g(x, y)|}{2}\right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \min \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} |g(x_k, y) - g(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})| dx dy \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \min \left(\sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} dx dy, \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} |g(x, y_j) - g(\tilde{x}_k, y_j)| dx dy \right) \leq \\
& \leq 2 \min \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_k - \frac{1}{2}}^{x_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} dx dy, \frac{\omega \tilde{M}}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_k - \frac{1}{2}}^{x_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} |y - \tilde{y}_j| dx dy \right) + \\
& +2 \min \left(\sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} dx dy, \frac{\omega M}{2} \sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} |x - \tilde{x}_k| dx dy \right) = \\
& = 4 \min \left(\ell \Delta \Delta_1^2 \ell^2, \frac{\tilde{M} \omega}{2} \ell \Delta \ell^2 \frac{\Delta_1^2}{4} \right) = 4 \min \left(1; \frac{\tilde{M} \omega}{8} \Delta^2 \right) = \min \left(4; \frac{\tilde{M} \omega}{2} \Delta^2 \right).
\end{aligned}$$

Отже,

$$|J(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega)| \leq \min \left(2; \frac{M \omega}{16} \Delta^2 \right) + \min \left(4; \frac{\tilde{M} \omega}{2} \Delta^2 \right).$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. [17] Нехай $|g^{(1,0)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(0,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(1,1)}(x, y)| \leq M$, тоді для кубатурної формули

$$\Phi_1(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 E(\sin \omega g(x, y)) dx dy,$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$|J(\omega) - \Phi_1(\omega)| \leq \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + M \omega}{16} \Delta^2.$$

Теорема 4. Нехай $|g^{(1,0)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(0,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $|g^{(1,1)}(x, y)| \leq M$, тоді для кубатурної формули

$$\tilde{\Phi}_1(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{E} \sin(\omega g(x, y)) dx dy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$|J(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)| \leq \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + M \omega}{16} \Delta^2 + 2 \omega \tilde{M} \Delta^2 = \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + 32 \omega \tilde{M} + M \omega}{16} \Delta^2.$$

Доведення. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}(\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$|J(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)| = |J(\omega) - \Phi_1(\omega) + \Phi_1(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)| \leq |J(\omega) - \Phi_1(\omega)| + |\Phi_1(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)|.$$

За теоремою 3 маємо: $|J(\omega) - \Phi_1(\omega)| \leq \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + M \omega}{16} \Delta^2$. Знайдемо оцінку для $|\Phi_1(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)|$:

$$\begin{aligned}
|\Phi_1(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 E \sin \omega g(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{E} \sin \omega g(x, y) dx dy \right| \leq \int_0^1 \int_0^1 |E \sin \omega g(x, y) - \tilde{E} \sin \omega g(x, y)| dx dy \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_k - \frac{1}{2}}^{x_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} |\sin \omega g(x_k, y) - \sin \omega g(x_k, \tilde{y}_j)| dy + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} |\sin \omega g(x, y_j) - \sin \omega g(\tilde{x}_k, y_j)| dx \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} dy \leq \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_k - \frac{1}{2}}^{x_k + \frac{1}{2}} \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} \left| \sin \frac{\omega(g(x_k, y) - g(x_k, \tilde{y}_j))}{2} \right| dy + 2 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_k - \frac{1}{2}}^{\tilde{x}_k + \frac{1}{2}} \left| \sin \frac{\omega(g(x, y_j) - g(\tilde{x}_k, y_j))}{2} \right| dx \int_{\tilde{y}_j - \frac{1}{2}}^{\tilde{y}_j + \frac{1}{2}} dy \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega |g(x_k, y) - g(x_k, \tilde{y}_j)|}{2} \right) dy + 2 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y_j) - g(\tilde{x}_k, y_j)|}{2} \right) dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \leq \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell^2} \Delta \omega \frac{\tilde{M}}{2} \min \left(\int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} dy, \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_j| dy \right) + 2 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell^2} \Delta \omega \frac{\tilde{M}}{2} \min \left(\int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} dx, \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_k| dx \right) \leq \\
&\leq 2 \Delta \omega \tilde{M} \ell \cdot \ell^2 \min(\Delta_1, \Delta_1^2) = 2 \omega \tilde{M} \cdot \min(\Delta_1 \cdot \ell^2, \Delta_1^2 \cdot \ell^2) = 2 \omega \tilde{M} \cdot \min(1, \Delta_1) = 2 \omega \tilde{M} \cdot \min\left(1, \frac{1}{\ell^2}\right) = 2 \omega \tilde{M} \frac{1}{\ell^2} = 2 \omega \tilde{M} \Delta^2
\end{aligned}$$

Отже,

$$|J(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega)| \leq \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + M \omega}{16} \Delta^2 + 2 \omega \tilde{M} \Delta^2 = \frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + 32 \omega \tilde{M} + M \omega}{16} \Delta^2.$$

Теорему 4 доведено.

На рис. 2 представлений загальний принцип побудови сітки вузлів, яка використовується в кубатурних формулах з операторами інтерлінації.

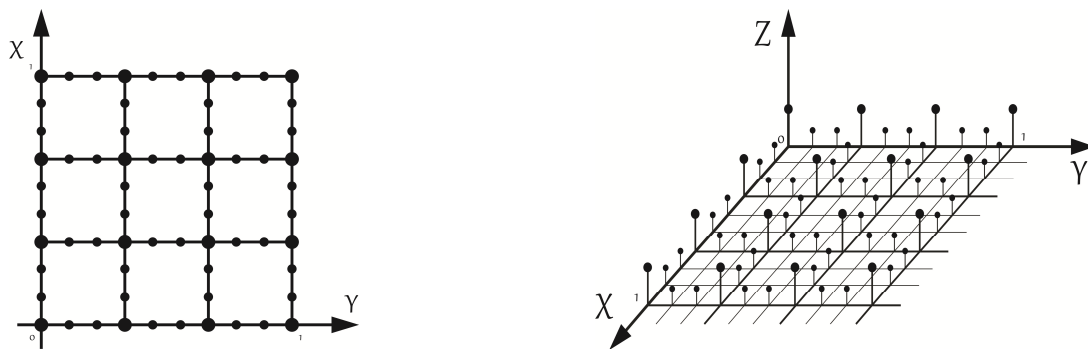


Рис. 2 – Загальний вигляд сітки вузлів для кубатурних формул з використанням операторів інтерлінації.

Зауваження. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}(\omega)$, $\tilde{\Phi}_1(\omega)$ використовує в своїй побудові $Q = \ell \cdot \ell^2 + \ell \cdot \ell^2 - \ell^2 = 2\ell^3 - \ell^2$ значень функції. Для досягнення такої ж точності за допомогою класичної формули необхідно використати $Q_{cl} = \ell^4$.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованих кубатурних формул в системі комп'ютерної математики MathCad для функції $g(x, y) = xy$.

Таблиця 1 – Обчислення $J(\omega)$ за формулою $\Phi(\omega)$ для $g(x, y) = xy$

ℓ	ℓ^2	ω	$J(\omega)$	$\tilde{\Phi}(\omega)$	$ J(\omega) - \tilde{\Phi}(\omega) $	$\min\left(2; \frac{M\omega}{16} \Delta^2\right) + \min\left(4; \frac{\tilde{M}\omega}{2} \Delta^2\right)$
2	4	2π	0.387964587049788	0.402597065906184	0.014632478856396	0.883572933822129
4	16	2π	0.387964587049788	0.388810132654747	0.000845545604958	0.220893233455532
3	9	5π	0.211830279982917	0.229756957173057	0.01792667719014	0.98174770424681
4	16	5π	0.211830279982917	0.215554526302297	0.00372424631938	0.552233083638831

Таблиця 2 – Обчислення $J(\omega)$ за формулою $\tilde{\Phi}_1(\omega)$ для $g(x, y) = xy$

ℓ	ℓ^2	ω	$J(\omega)$	$\tilde{\Phi}_1(\omega)$	$ J(\omega) - \tilde{\Phi}_1(\omega) $	$\frac{\omega^2 \tilde{M}^2 + 32 \omega \tilde{M} + M \omega}{16} \Delta^2$
4	16	2π	0.387964587049788	0.387962123046569	0.001021811068292	0.96415442477064
7	49	5π	0.211830279982917	0.211881856959768	0.000327562848456	0.975896553405038
8	64	5π	0.211830279982917	0.21185540526974	0.000187065958211	0.747170798700732
10	100	5π	0.211830279982917	0.211838526140776	0.000074646030413	0.478189311168469

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядаються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями в точках. Отримано оцінку похибки наближення кубатурної формули на класі диференційовних функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається значеннями функції в точках на різних класах функцій.

Висновки. На класі диференційовних функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних у випадку, коли інформація задавалась значеннями функції в точках. Кубатурні формули використовують оператор інтерполяції, побудований на основі оператора-інтерполанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Основною перевагою запропонованих кубатурних формул є використання меншої кількості значень функції порівняно з класичними формулами. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичний результат.

Список літератури

1. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Ин-т математики НАН Украины. – К., 1999. – С. 166 – 169.
3. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
8. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлєтації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
10. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлєтації на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.
11. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлєтации функций // Вестник МГОУ. Сер. Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
12. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БелГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
13. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
14. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления $3D$ – интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлєтации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
15. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлєтації // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.
16. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлєтации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.
17. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення $2D$ – інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип.13. – С. 124 – 131.
18. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлєтації // Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannnyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
2. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ z vykorystannnyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud. Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999, pp. 166–169.
3. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'na za poriadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal by the order of exactness cubature formula for computing double integrals from high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, no. 6, pp. 9–13.

4. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannam interlinatsiyi funktsiy [About one cubature formula to calculation of 2D Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematika. Pryrodovnavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
5. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. 2D – koefitsienty Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D – Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
6. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. *Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation*. Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). Novosibirsk. 2010, pp. 90 – 96.
7. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystannam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
8. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriys'kiy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
9. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D – Fourier coefficients on the class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematika. Pryrodovnavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
10. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryiozh zminnykh z vykorystannam splayn-interfletatsiyi na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using a spline-interflatation on the class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematika. Pryrodovnavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 8, pp. 36–41.
11. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie osttsilliruyuschikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser.: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.
12. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integriruvaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of fast oscillating functions of three variables]. *Nauchnyie vedomosti BELGU. Ser.: Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series: mathematics and physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.
13. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryiozh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
14. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3D – integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3D – integrals of fast oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.
15. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystannam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Gelder class of functions using piecewise spline-interflatation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.
16. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoyi polinomial'noyi interfletatsii [Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.
17. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya 2D – integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [The calculation of 2D integrals trigonometric functions using piecewise spline-interlineation] *Matematychni ta komp'yuterni modelyuvannya. Seriya: Fizyko-matematychni nauky: zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Science. works]. Kam'yanets–Podil'skiy, Kam'yanets–Podil's'kyi natsional'nyy universitet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016. vol. 13, pp. 124–131.
18. Nechuyviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannam kuskovo–staloyi interfletatsii [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivs'kyi politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Proceedings of the National Technical University "KPI". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.

Надійшла (received) 06.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних у випадку різних інформаційних операторів / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, К. В. Кейта // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 56 – 63. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Вычисление интегралов от тригонометрических функций двух переменных в случае различных информационных операторов / О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвтер, К. В. Кейта // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 56 – 63. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Computing integrals of trigonometric functions of two variables using various information operators / O. M. Lytvyn, O. P. Nechuiviter, K. V. Keita // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 56 – 63. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Lytvyn Oleg Mykolayovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Нечуйвітер Олеся Петровна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Кейта Катерина Володимирівна – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

Кейта Катерина Владимировна – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

Keita Kateryna Volodymyrivna – PhD student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

UDC 519.25

T. O. MARYNYCH, L. D. NAZARENKO, N. H. KHOMENKO

COMPARATIVE ANALYSIS OF UNIVARIATE TIME SERIES MODELING AND FORECASTING TECHNIQUES FOR SHORT-TERM UNSTABLE DATA

Проведено емпіричне оцінювання адекватності та прогнозної точності класичних лінійних моделей авторегресії та ковзного середнього, моделей експоненційного згладжування, структурних, нелінійних та непараметричних моделей для одновимірних часових рядів невеликої вибірки з чисельними відхиленнями. Запропоновано метод покращення якості ARMA моделі за рахунок включення фіктивних та пояснювальних змінних, які відтворюють інформацію щодо рідких і аномальних спостережень ряду, та відповідної корекції порядку інтегрування.

Ключові слова: часовий ряд, декомпозиція, прогноз, аномальні відхилення, модель авто регресії та ковзного середнього, експоненційне згладжування.

Проведено эмпирическое оценивание адекватности и прогнозной точности классических линейных моделей авторегрессии и скользящего среднего, моделей экспоненциального сглаживания, структурных, нелинейных и непараметрических моделей для одномерных временных рядов небольшой выборки с многочисленными отклонениями. Предложен метод улучшения качества ARMA модели за счет включения фиктивных и объясняющих переменных, отражающих информацию о редких и аномальных наблюдениях ряда, а также коррекции соответствующего порядка интегрирования модели.

Ключевые слова: временной ряд, декомпозиция, прогноз, аномальные отклонения, модель авторегрессии и скользящего среднего, экспоненциальное сглаживание.

The article summarizes the international experience in univariate time series modeling approaches and methodology. It aims to make empirical assessment of their relevance and forecasting power for short sample volatile data with numerous aberrant observations and structural breaks with the help of the time series R packages. The findings revealed the pitfalls of outliers' neglect including stationarity and model misspecification, biased parameter estimates, deterioration of residuals' properties and prediction accuracy of the models. Empirical research demonstrated the outperformance of the outlier detection methods versus robust approaches that use smaller weights for aberrant observations. We tested a method of improving the forecasting power of the ARMA models by proper identification of hidden patterns and incorporation of additional information about extraordinary events into the model. We also considered frequency domain and nonparametric methods including exponential smoothing, seasonal and trend-cycle decomposition, structural and neural networks models to make comparative forecasting diagnostics. The findings showed slightly worse accuracy of the exponential smoothing and structural state-space models for short prediction horizons and their outperformance for longer forecasting periods. Neural networks showed outstanding in-sample approximation but poor out-of-sample quality. We recommend further studying of the Bayesian regime switching models that have proven to be a comprehensive way to explore hidden patterns in data, as well as dynamic factor multivariate models that can improve explanatory and forecasting power of the time series models in various applications.

Key words: time series, decomposition, forecast, outlier, autoregressive and moving average model (ARMA), exponential smoothing.

Introduction. In the few last decades, a considerable progress was achieved in the time series analysis providing innovative theoretical and methodological tools for time series decomposition, causal inference and prediction. Advances in computer technologies, accumulation of big data sets, and increased availability of the real-time high-frequency data, induced a wide use of numerical and simulation methods, and big interest to nonlinear nonparametric techniques, developing solutions to handle various data, parameter and model uncertainties. Rapid evolution of economic environment and technologies challenged production of the machine learning methods that could be adapted to different applications and objectives. One of the fast-developing fields is financial and macroeconomic time series econometrics which methodology is intensely used in other disciplines. Its biggest issue is a choice of the optimal statistical tools and approaches to model short sample volatile data with numerous outliers and structural breaks. It has been a real challenge for time series analysis in transforming countries where accumulated data sets are small and sometimes misleading.

© T. O. Marynych, N. H. Khomenko, I. D. Nazarenko, 2017

Publication Review. Recent publications prove increased interest to the mixed modeling techniques, which combine time series domain approach [1, 2], frequency domain approach based on spectral analysis [2, 3] and explanatory approaches [4, p. 351 – 398]. Several econometric methods have been proposed in the field of univariate time series analysis improving detection and assessment of the unobserved components and generating more accurate prediction intervals for observed data. Classical exponential smoothing, structural, and ARIMA techniques have been reconsidered in an innovative State-Space framework of dynamic linear models [4, p. 382]. Introduced first by Kalman (1960) [5] for control of linear systems, state-space representation has been widely used in estimation of the unobserved components or states of time series (level, trend, seasonal, irregular), focusing on the evaluation of uncertainty, shifts, time-varying parameters, non-normal disturbances and nonlinear dynamics of the stochastic systems [2]. To enhance the quality of the forecasts in time series analysis researchers allowed for nonlinearities, outliers' removal and bootstrapping, time-varying parameters, added lagged dependent variables and relevant predictors [3, 6, 7]. Numerous failures of theory-based models with respect to out-of-sample forecasting performance and explanatory ability induced interest to nonlinear non-parametric methods including neural networks and support vector machines, and their hybrids with classical time series techniques [8]. Increased availability of diverse types and sources of data forced innovations in multivariate time series techniques taking advantage of the "data-rich environments". Dynamic factor model was one of such solutions that helped to handle the problem of degrees of freedom summarizing information contained in many economic variables in a small number of factors [9]. Despite a vast variety of sophisticated models and techniques, experimental studies demonstrate that models which rely solely on the past observations of dependent variable, including random walk, cannot be postponed and frequently outperform the multivariate models in predictive accuracy [3, 8].

In the last decade researchers produced a set of specialized statistic software and programming languages (EViews, STATA, SAS, SPSS, R, Julia etc.) that provide automated realization of many econometric techniques and approaches. R is the most rapidly developing open source language and environment for statistical computing. This study was conducted with the help of the following R packages for time series analysis:

- "Forecast" package – provides instruments for the Box-Cox data transformation, stationarity analysis, time series decomposition, Fourier analysis, exponential smoothing and bootstrapping, autoregressive integrated moving average (ARIMA) modeling with external regressors, neural networks prediction, cross-validation etc. [10].
- "Stsm" package for structural modeling with Kalman filter – estimates prior values for model parameters, evaluates log-likelihood function by means of the Kalman filter, obtains posterior parameter distribution based on the log-likelihood function maximization, and implements iteration convergence procedure [11];
- "Ttsoutliers" package – helps in detection, estimation and model adjustment for aberrant observations [12].

Problem Statement. This paper is organized as a comparative research of the existing time series forecasting techniques, seeking possible modeling solutions of the high prediction accuracy for unstable short size data with numerous outliers. Empirical research was conducted in R-Studio integrated development environment using 205 monthly data of the Ukrainian real effective exchange rate (*REER*) and other macroeconomic variables (2000:01 – 2017:01) [13].

Modeling results. Exchange rates are explicitly one of the most popular time series used for modeling and forecasting both from the perspective of an economist and a statistician. Any time series analysis requires prior assessment of the series' patterns and distribution. The common features of the exchange rates behavior, revealed by visual inspection of different series, are as follows [7]:

- random walk movement with little or no drift;
- regime switches (from stable to volatile dynamics);
- cyclical evolution that exhibits the periods of sustained growth followed by sudden dramatic falls;
- volatility clustering (periods of tremendous changes are followed by periods of slight changes).

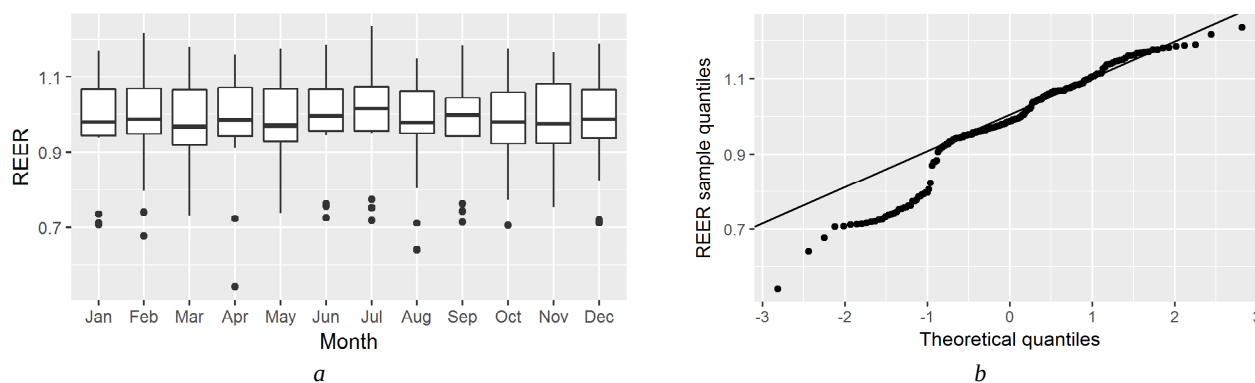


Fig. 1 – Analysis of time series distribution: *a* – boxplot; *b* – qqplot.

We consider *REER* to be more representative series than the exchange rate of hryvnia to US dollar for forecasting and modeling in Ukraine. It represents the weighted average of a country's currency relative to a basket of other major

currencies, adjusted to the effects of inflation [13] and resolves the problem of the currency regime switches. Analysis of the time series *REER* distribution using box and whiskers plot (*boxplot*) and quantile density function (*qqplot*) [14] (fig. 1) shows existence of numerous outliers and skewness that breaks the normal distribution assumption, assumed by parametric procedures like the *t* – test, *F* – test (ANOVA), and Pearson test. The summary-based distribution, displayed on the boxplot (fig. 1, *a*), considers observations that are 1.5 times interquartile range (*IQR*) below the first quartile to be suspected outliers, and more than $3 \cdot IQR$ below the first quartile – the true outliers [15]. The skewness of the observed data can be seen in the series' deviation from the normal line on the quantile-quantile plot (fig. 1, *b*).

Decomposing time series into trend-cyclical, seasonal and irregular components gives better understanding of data patterns and can be used to improve the forecast power. Classical additive and multiplicative methods of time series decomposition based on the moving-average procedure are not robust to outliers and changes in seasonal patterns and drop beginning and closing observations of the series [2]. A nonparametric method of "seasonal and trend-cyclical decomposition using locally weighted scatterplot smoothing" (STL), developed by Cleveland et al. [16, 10], gives more efficient estimation of time series' patterns. We used the STL robust decomposition for *REER* to reveal the structure of the series, identify the properties of residuals and aberrant observations (fig. 2). It was found that the functional form of the series' components is additive:

$$Reer_t = S_t + T_t + E_t,$$

where $Reer_t$ – *REER* data at period *t*; S_t – seasonal component at period *t*; T_t – trend-cyclical component at period *t*; E_t – remainder (or irregular or error) component at *t*. Applying robust decomposition we tried to diminish the influence of outlying observations in 2008, 2009 and 2014 years (fig. 2) to provide a smoothed trend-line. In fig. 2 the trend component exhibits downward movement with cyclical lifts, the remainder component displays clustering volatility and a set of aberrant observations. The relative proportion of the *REER* components is: 7 %, 88 %, 18.5 %.

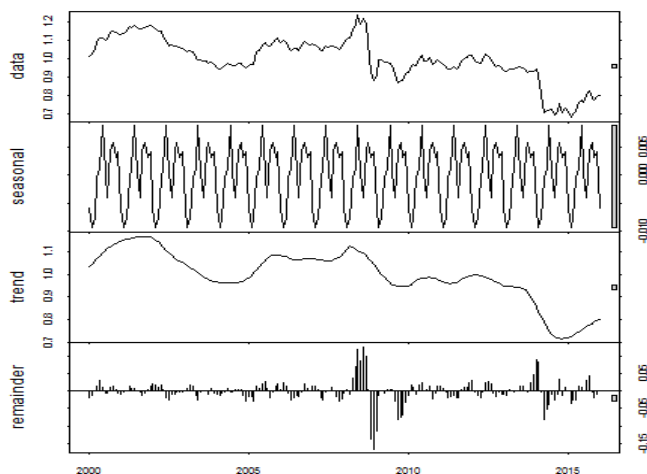


Fig. 2 – *REER* stl decomposition.

We proceeded our analysis with outliers' detection using "tsoutliers" R package [12]. Its authors distinguish between known effects and outliers interpreting sudden changes in the data dynamics. If the prior behavior of the series is known they suggest intervention variables to be added to the model. Otherwise, the procedure of detecting and correcting the effect of outliers should be incorporated to provide correct model selection and parameter estimation [6, 12]. Depending on the influence on the subsequent series' dynamics, researchers consider five types of outliers: innovational outlier (IO), additive outlier (AO), level shift (LS), temporary change (TC) and seasonal level shift (SLS). An outlier general representation is formulated as:

$$L(B)I(t_j),$$

where $L(B)$ – is a polynomial of lag operators $By_t = y_{t-1}$ and $I(t_j)$ – is an indicator variable that takes the value 1 at time $t = j$ when the outlier jumps and the value 0 otherwise. The polynomial $L(B)$ for each type of outlier is calculate as follows [12]:

$$IO : L(B) = \frac{\theta(B)}{\alpha(B)\phi(B)}; \quad LS : L(B) = \frac{1}{(1-B)}; \quad AO : L(B) = 1; \quad TC : L(B) = \frac{1}{(1-\delta B)}; \quad SLS : L(B) = \frac{1}{(1-B^s)}. \quad (1)$$

Herein $\theta(B)$ represents the moving average polynomial (MA); $\phi(B)$ – the autoregressive polynomial (AR); $\alpha(B)$ – the differencing parameter (*d*) for data stationarity; $\delta = 0.7$ in [11]; *s* – the periodicity of the data (*s* = 12 for monthly data).

The ARIMA model for the observed series y_t^* exposed to *m* outliers with weights ω can be written as [4, 12]:

$$y_t^* = \sum_{j=1}^m \omega_j L_j(B) I(t_j) + \frac{\theta(B)}{\phi(B)\alpha(B)} a_t, \quad (2)$$

where $a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2)$ – is a white-noise process with zero mean and finite variance.

Table 1 displays the results of outliers' detection and location with "tsoutliers" R package [12] by fitting ARIMA model (2) to *REER* training data (2000:01 – 2016:06) (fig. 3). Significance of all types of outliers at different points of time was verified by corresponding t-statistics (table 1).

Table 1 – Results of outliers' detection for *REER*

No	Outlier type	Observation number	Time period	Estimated coefficient	t – statistics
1	LS	64	2005:04	0.06621	4.107
2	TC	102	2008:06	0.06498	4.502
3	TC	104	2008:08	0.07452	4.554
4	AO	105	2008:09	0.04886	4.222
5	LS	107	2008:11	-0.11773	-6.429
6	LS	110	2009:02	0.06000	3.584
7	AO	176	2014:08	-0.04781	-4.754
8	AO	178	2014:10	0.05019	4.999
9	TC	182	2015:02	-0.27213	-19.184
10	LS	194	2016:02	-0.06305	-3.897

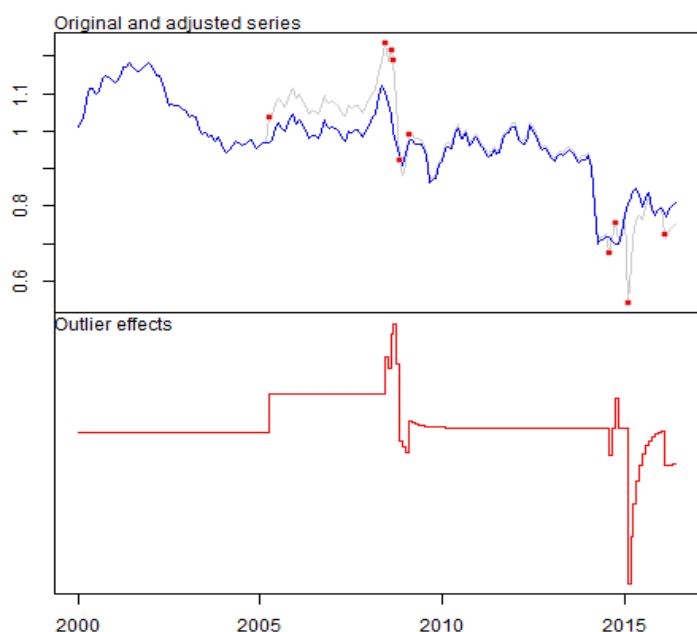


Fig. 3 – *REER* outliers (2000:01 – 2016:06).

$$\begin{aligned} Reer_t = & 95.926 + 96.88Reer_{t-1} + 49.31u_{t-1} + 6.62LS64 + 6.5TC102 + 7.45TC104 + 4.89AO105 - \\ & - 11.77LS107 + 6LS110 - 4.78AO176 + 5.02AO178 - 27.21TC182 - 6.31LS194 + a_t. \end{aligned} \quad (3)$$

The constant in (3) stands for the series' mean value; autoregressive and moving average components account for the autocorrelation properties; outlier dummies comprise the aberrant series' movements. To check the prediction accuracy of the model we split *REER* observations into the training and testing sets of different lengths (7 months and 12 months). Although the ARIMA model (3) was fitted to satisfy strong assumptions of the white noise residuals, its forecasting performance deteriorated with increase of the prediction horizon and corresponding shortening of the training set. Table 2 summarizes modeling results based on both raw data multiplied by 100 and its logarithmic transformation. Model (3), based on the training set 2000:01 – 2016:06, had the lowest maximum likelihood estimator (MLE) of the innovations variance:

$$\sigma^2 = \sum (y - \hat{y})^2 / \text{number of residuals},$$

the highest log likelihood value (logarithm of the probability of the observed data from the estimated model [2]) and the smallest Akaike information criterion, adjusted for the sample size (AICc). Training models 1 and 2 in Table 2 showed good approximation features in terms of the mean absolute error (MAE) and the mean absolute percentage error (MAPE) indicators. The out-of-sample median forecast accuracy by MAPE for the raw data model worsened from 1.43 % to 3.19 %, and 10.78 % with increase of the prediction horizon. Logarithm transformation led to the change in the model parameters – ARIMA (2, 0, 0) and detected outliers that improved the forecasting accuracy of the model to 1.86 % MAPE for the 7-month test period, but deteriorated the corresponding results for the 12-month forecast horizon to 12.52 %.

Table 2 – Summary and forecast accuracy of the ARMA model with removed outliers (3)

No	Training model (Testing set)	MLE of the variance σ^2	Log likelihood	Information criteria		Training model accuracy		Forecast accuracy (Testing set)	
				AICc	BIC	MAE	MAPE	MAE	MAPE
1.	2000:01 – 2016:06 (2016:07 – 2017:01)	0.0003532	510.74	-991.18	-947.43	1.3650	1.433	2.3637	3.188
	Log transformed	0.0005057	473.83	-926.48	-894.77	1.0157	1.4087	1.0271	1.8601
2.	2000:01 – 2016:01 (2016:02 – 2017:01)	0.0003552	496.89	-965.75	-925.37	1.3718	1.423	7.9412	10.783
	Log transformed	0.0005073	461.1	-903.22	-874.84	1.0158	1.4089	1.1150	12.5238

We tried to improve the forecast power of the model using intervention variables that account for the movements of REER in different periods of time instead of removing the outliers. The first LS outlier (Table 1) refers to the hryvnia appreciation in April 2005, ruled by the government. The following three outliers (102nd, 104th and 105th observations) exhibit the following short-term strengthening of the national currency in 2008 due to the favorable conjuncture of foreign markets. The 107th (LS), 176th (AO), 182nd (TC) and 194th (LS) outlier observations refer to the hryvnia devaluation in 2008 because of the world financial crisis, in 2014 and following years because of political and macroeconomic instability in Ukraine. We introduced a set of dummy binomial variables to accommodate the above-mentioned outlier effects. They include three structural break variables which incorporate upward level shift starting April 2005, and downward shifts beginning November 2008 and March 2014; dummy variable *dreer* that takes value 1 for additive downward outliers; and seasonal variable *dseas* that accounts for series' increase observed every June. To reduce variance volatility, we removed temporary change outliers No 102 – 105 and 182 (Table 1) using moving average procedure. Identification of the model parameters both by the Box-Jenkins approach [1] and the Hyndman-Khandakar algorithm [2, 10] proved the hypothesis of misspecification of the unit root and stationary tests in case of the outliers' existence, specifying the model ARMA (1, 0, 0) for $\ln(\text{REER})$ based on additional information on aberrant observations:

$$\ln(\text{Reer}_t) = \underset{(0.036)}{4.61} + \underset{(0.019)}{0.96} \ln(\text{Reer}_{t-1}) + \underset{(0.018)}{0.06} d_{2005} - \underset{(0.019)}{0.12} d_{2008} - \underset{(0.019)}{0.13} d_{2014} - \underset{(0.005)}{0.05} dreer + \underset{(0.003)}{0.01} dseas + \varepsilon_t \quad (4)$$

Errors of the estimated coefficients given in brackets in (4) justify significance of all variables by *t* – statistics (estimated coefficient divided by the coefficient error). Diagnostic testing for residual autocorrelation with the Ljung and Box test [4, p. 328 – 329] and the ACF plot showed improved statistics that demonstrated that the residuals were uncorrelated and the model was specified correctly after complete description of outliers with dummy variables (Table 3). Inclusion of additional explanatory variable (*Xreg*) – logarithm of the ratio of the monetary base to the value of international reserves, improved both in-sample and out-of-sample forecast accuracy, and characteristics of the model adequacy (MLE, LL, AIC, BIC, LB). We compared ARMA models of orders (1, 0, 0) and (1, 0, 1) described in (4) and (3) to ARIMA model (0, 1, 0) without any regressors, similar to the random walk model without drift. Our findings revealed better short-term approximation of the ARMA model, and more accurate long-term forecasting performance of the ARIMA model that considered the series as nonstationary in presence of level shifts and additive outliers (Table 4).

Table 3 – Summary and forecast accuracy of the ARMA model with dummy variables (4)

No	Training model (Testing set)	MLE of the variance σ^2	Log likelihood (LL)	Information criteria		Training model accuracy		Forecast accuracy (Testing set)	
				AICc	BIC	LB stat	MAPE	MAE	MAPE
1.	Full sample size 2000:01 – 2017:01	0.0003498	527.06	-1037.38	-1011.53	$Q = 17.691$ $p = 0.397$	1.3047		
2.	2000:01 – 2016:06 (2016:07 – 2017:01)	0.0003494	509.21	-1001.66	-976.12	$Q = 18.061$ $p = 0.385$	1.3330	1.2756	1.6769
	with <i>Xreg</i> : $\ln(mb/rez)$	0.0003298	515.99	-1010.81	-979.1	$Q = 15.102$ $p = 0.444$	1.3167	1.1927	1.5651
3.	2000:01 – 2016:01 (2016:02 – 2017:01)	0.0003379	500.47	-981.96	-953.58	$Q = 18.614$ $p = 0.351$	1.3103	4.8390	6.5137
	with <i>Xreg</i> : $\ln(mb/rez)$	0.0003227	504.69	-990.4	-962.02	$Q = 17.388$ $p = 0.361$	1.3048	4.6103	6.2101

Empirical estimations prove that to facilitate accurate forecasting with ARMA (4) we need to provide reliable scenarios for explanatory regressors. These predictions should be based on the estimation of the unexpected component of the news announcements rather than on their historic values [7]:

$$n_{k,t} = (A_{k,t} - E_{k,t}) / \sigma_k, \quad (5)$$

where $n_{k,t}$ – is a standardized news component for the indicator k up to time t ; $A_{k,t}$ – the actual value of the variable in the time period $(t; t+1)$; $E_{k,t}$ – the corresponding expected value of the variable; σ_k – variance of the numerator.

Having deduced the ways to facilitate the usage of the time domain ARMA models for unstable short-term data, we tried to compare their performance with other modeling techniques described in publication review. Table 4 summarizes in-sample and out-of-sample accuracy for the following types of models, realized in "forecast" R package [10]: random walk; ARIMA and ARMA with detected outliers (3), (4); seasonal and trend decomposition using Loess (stl); exponential smoothing; exponential smoothing state space model with Box-Cox transformation, ARMA errors, trend and seasonal components (tbats); exponential smoothing with drift (theta); structural state-space MLE models based on a decomposition of the series into a number of components; feed-forward neural networks with a single hidden layer and lagged inputs for forecasting univariate time series (neural). All models were estimated using logarithmically transformed series. Neural network model and ARMA model (4) with dummy variables and explanatory variable *mb/rez* showed the best in-sample accuracy for both training models, ending 2016:06 and 2016:01. The best out-of-sample performance was obtained by the ARMA model (4) and STL model for 7-month horizon period and by the structural and theta models for 12-month horizon period. Although, ARMA model with additional regressors displayed lower bounds of the forecast intervals assuming no correlation and normal distribution of residuals.

Table 4 – Comparative analysis of the forecasting power for different models

Model	log data 2000:01 – 2016:06				log data 2000:01 – 2016:01			
	Train		test (7 month)		Train		test (12 month)	
	MAE	MAPE	MAE	MAPE	MAE	MAPE	MAE	MAPE
randomwalk	1.0223	1.6402	1.0248	1.7628	1.022	1.628	1.069	4.7266
ARIMA(0,1,0)	1.0219	1.6262	1.0251	1.7719	1.0219	1.6248	1.069	4.7266
ARMA (3)	1.0157	1.4087	1.0271	1.8601	1.0158	1.4089	1.1150	12.5238
ARMA (4)	1.0147	1.3167	1.1927	1.5651	1.0149	1.3048	4.6103	6.2101
Stl	1.0221	1.6338	1.0236	1.7194	1.0221	1.6338	1.0744	5.3075
Expsmooth	1.2478	1.6431	1.0249	1.7656	1.0221	1.6306	1.0686	4.6834
Tbats	1.0219	1.6267	1.0247	1.7590	1.0216	1.6132	1.0645	4.2845
Theta	1.023	1.6652	1.0285	1.9096	1.0227	1.6508	1.0606	3.9287
Structural	1.6944	11.827	1.0299	1.9717	1.6849	11.678	1.0542	3.4184
Neural	1.0046	1.105	1.1157	12.655	1.0044	1.0988	1.1556	28.742

Prospects for further research. The authors consider promising research methods for time series with aberrant data related to nonlinear and Bayesian regime switching models that have proven to be a comprehensive alternative way to explore hidden patterns in data. For long-term forecasting improvement, the authors recommend further research of nonlinear techniques, including structural and innovative exponential smoothing methods. Another perspective direction concerns multivariate modeling focusing on the ways to describe and predict exogenous explanatory variables and incorporate more significant information without penalty in degrees of freedom. In this respect, we recommend dynamic factor and diffusion index modeling for further research.

Conclusion. A method of improving the forecasting power of the classic time domain autoregressive and moving average model by proper identification and incorporation of explanatory information about aberrant events was implemented in the paper. It was proven that outlier detection methods resulted in narrower forecast intervals and outperformed robust approaches that used low weights for aberrant observations in short-term point predictions. Based on the comparative modeling analysis that revealed improved long-term forecasting characteristics of nonparametric nonlinear approaches, the authors suggested further research perspectives in time series analysis of unstable short sample data.

References

1. Box G., Jenkins G. Time Series Analysis: Forecasting and Control. – San Francisco : Holden-Day, 1970. – 575 p.
2. Hyndman R., Athanasopoulos G. Forecasting : principle and practice. – Available at : <http://otexts.com/fpp/>. – Accessed : 25 February 2017.
3. Bergmeir C., Hyndman R. J., Benitez J. M. Bagging exponential smoothing methods using STL decomposition and Box-Cox transformation // International journal of forecasting. – 2016. – No. 32. – pp. 303 – 312.
4. Woodward W. A., Gray H. L., Elliott A. C. Applied time series analysis. – New York : Taylor & Francis Group, 2012. – 540 p.
5. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. – 1961. – No. 83. – pp. 95 – 108.
6. Chen Ch., Liu L. Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series // Journal of the American Statistical Association. – 1993. – No. 88 (421). – pp. 284 – 297.

7. Moosa I. A., Bhatti R. H. The theory and empirics of exchange rates. – Singapore : World Scientific Publishing Co., 2009. – 483 p.
8. Gupta P., Batra S., Jayadeva. Sparse Short-Term Time Series Forecasting Models via Minimum Model Complexity. – Neurocomputing, 2017, doi: 10.1016/j.neucom.2017.02.002.
9. Barhoumi K., Darne O., Ferrara L. Dynamic factor models: a review of the literature // OECD Journal: Journal of Business Cycle Measurement and Analysis. – 2014. – Vol. 2013/2. – pp. 73 – 107.
10. Hyndman R., O'Hara-Wild M., Bergmeir C., Razbash S., et. al. Forecasting Functions for Time Series and Linear Models. – R package "forecast" version 8.0, 2017. – Available at : <http://github.com/robjhyndman/forecast>. – Accessed : 27 February 2017.
11. L'opez-de-Lacalle J. Structural Time Series Models (stsm). – R package version 1.9, 2016. – Available at : <https://cran.r-project.org/web/packages/stsm/stsm.pdf>. – Accessed : 17 February 2017.
12. L'opez-de-Lacalle J. Detection of Outliers in Time Series (tsoutliers). – R package version 0.6-5, 2016. – Available at : <https://cran.r-project.org/web/packages/tsoutliers/tsoutliers.pdf>. – Accessed : 15 February 2017.
13. National Bank of Ukraine (2000 – 2017). Statistical data. – Available at : <http://bank.gov.ua/>. – Accessed : 15 February 2017.
14. Wickham H., Chang W. Elegant Data Visualisations Using the Grammar of Graphics. – R package 'ggplot 2' version 2.2.0, 2017. – Available at : <http://docs.ggplot2.org/current/>. – Accessed : 13 February 2017.
15. Chambers J. M., Cleveland W. S., Kleiner B., Tukey P. A. Graphical Methods for Data Analysis. – New York : Wadsworth & Brooks/Cole, 1983. – 105 p.
16. Cleveland R. B., Cleveland W. S., McRae J., Terpenning I. STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess // Journal of Official Statistics. – 1990. – No. 6 (1). – pp. 3 – 73.
17. Asteriou D., Hall S. G. Applied Econometrics (2nd Edition). – New York : Palgrave Macmillan, 2011. – 499 p.

Received 17.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Компаративний аналіз методів моделювання та прогнозування нестабільних часових рядів короткої вибірки / Т. О. Маринич, Л. Д. Назаренко, Н. Г. Хоменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 63 – 69. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Сравнительный анализ методов моделирования и прогнозирования нестабильных временных рядов короткой выборки / Т. А. Маринич, Л. Д. Назаренко, Н. Г. Хоменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 63 – 69. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Comparative analysis of univariate time series modeling and forecasting techniques for short-term unstable data / T. O. Marynych, L. D. Nazarenko, N. H. Khomenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 63 – 69. Bibliogr.: 17 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Маринич Тетяна Олександрівна – кандидат економічних наук, старший викладач кафедри прикладної математики та моделювання складних систем, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (066) 66-179-38; e-mail: t.marynych@ssu.edu.ua.

Маринич Татьяна Александровна – кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и моделирования сложных систем, Сумской государственной университет, г. Сумы; тел.: (066) 66-179-38; e-mail: t.marynych@ssu.edu.ua.

Marynych Tetyana Olexandrivna – Candidate of Economic Sciences (Ph. D.), Sumy State University, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Complex Systems Modeling, Sumy; tel.: (066) 66-179-38; e-mail: t.marynych@ssu.edu.ua.

Назаренко Людмила Дмитрівна – старший викладач кафедри комп'ютерних наук, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

Назаренко Людмила Дмитриевна – старший преподаватель кафедры компьютерных наук, Сумской государственной университет, г. Сумы; тел.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

Nazarenko Lyudmyla Dmytrivna – Senior Lecturer at the Department of Computer Science, Sumy State University, Sumy; tel.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

Хоменко Наталія Григорівна – аспірант, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (066) 950-35-07; e-mail: homenko_nata@ukr.net.

Хоменко Наталия Григорьевна – аспирант, Сумский государственный университет, г. Сумы; тел.: (066) 950-35-07; e-mail: homenko_nata@ukr.net.

Khomenko Nataliya Hryhorivna – graduate student, Sumy State University, Sumy; tel.: (066) 950-35-07; e-mail: homenko_nata@ukr.net.

А. М. МАЦУЙ, В. О. КОНДРАТЕЦЬ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВ'ЯЗКУ ОБ'ЄМУ І ВИСОТИ СИПКОГО МАТЕРІАЛУ У ПРОМИСЛОВИХ ЄМНОСТЯХ

Запропоновано моделі конічного бункера для сипких продуктів, які зв'язують відносні похибки висоти матеріалу і його неврахованого об'єму. При неврахованих об'ємах матеріалу до 12 ... 15 % вихідного значення абсолютні і відносні відхилення його висоти також змінюються. Отримані моделюванням відношення відносних похибок визначення висоти матеріалу і об'єму складає 1/3 і не залежать від висоти матеріалу і параметрів бункера.

Ключові слова: конічний бункер, сипкий матеріал, відносні похибки, висота, об'єм.

Предложено модели конического бункера для сыпучих продуктов, которые соединяют относительные погрешности высоты материала и его неучтенного объема. При неучтенных объемах материала до 12 ... 15 % исходного значения абсолютные и относительные отклонения его высоты также изменяются. Найденное моделированием отношение относительных погрешностей определения высоты материала и объема составляет 1/3 и не зависит от высоты материала и параметров бункера.

Ключевые слова: конический бункер, сыпучий материал, относительные погрешности, высота, объем.

Basic and alternative models of conical hopper for pouring or liquid products, which connect the relative height error of the material and its unaccounted volume in the form of algebraic equations of the third degree, are proposed. The numerical solutions of the equations show that the ratio of the relative deviations of the material height and volume is a constant value for comparatively small volumes of unaccounted material in the hopper, which do not exceed 15 % of the total value. A wider range of deviations of the unaccounted volume in the interval of 20 ... 50 % of the initial value do not violate the established trend of changing the ratio of the relative height deviations of the material to its volume. The ratio of the relative errors of determining the height of the material to relative error of measuring its volume obtained during modeling is 1/3 and does not depend on the height of the material and the hopper parameters.

Key words: conical hopper, pouring material, the relative errors, height, volume.

Вступ. Нині практично всі залізні руди підлягають збагаченню через понижений вміст корисного компонента, що передбачає їх дроблення, здрібнення та зберігання за різновидами у накопичувальних бункерах. Використовують пірамідальні, конічні, циліндричні, трапецієдні та параболічні бункери [1]. Крім цього використовують відстійні та змішувальні чани, зумпфи для збору пульпи, корпуси *флотаційних машин, спіральних класифікаторів* [2]. Більш складні за формою ємності створюються в процесі роботи деяких технологічних агрегатів. Наприклад, у односпіральному класифікаторі така ємність створюється циліндричною постіллю та витком спіралі [3]. Неврахування оптимальних запасів сировини та наповнень технологічних апаратів матеріалами призводить до збитків у виробництві. Зменшити їх можливо автоматизацією технологічних процесів, однак вона стримується відсутністю деяких засобів контролю. Оскільки дана робота спрямована на розв'язання частини цієї задачі, її тему слід вважати актуальною.

Аналіз останніх досліджень. Вимірювання запасу матеріалу в бункерах та інших збірниках здійснюються *рівнемірами* [4]. Використовують різні типи рівнемірів в залежності від вимірюваних середовищ та видів бункерів і технологічних апаратів [5, 6, 7]. Оскільки поверхня руди в бункері конусоподібна, велике значення має правильний вибір місця установки датчика рівня [8]. Задача ускладнюється ще й тим, що при випуску руди з бункера створюється зворотна конічна лійка [9]. Відповіді на ці питання поки що немає. Друга група промислових ємностей відрізняється тим, що в них поверхня середовища завжди горизонтальна – це *зумпфи, ставки механічних класифікаторів*, піскові продукти односпіральних класифікаторів при транспортуванні їх поза пульпою, однак тут також виникають проблеми у визначенні об'єму продуктів у складних за формою промислових ємностях. В цілому цю задачу можливо звести до визначення об'єму сипкого чи рідкого матеріалу у ємності, яка наближено рівномірно звужується у поперечному перерізі від верхньої до нижньої частини. Наприклад, це простір, створений циліндричною постіллю і подавальним витком односпіального класифікатора [3]. При прогнозуванні піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпіального класифікатора необхідно знати висоту матеріалу у такій технологічній ємності [10] у звичайних умовах і за умов спрацювання спіралі. Ці та інші питання практично ніхто не вивчав, хоч вони можуть відноситись до законів побудови і розвитку технічних систем.

Постановка задачі. Метою даної роботи є математичне моделювання зв'язку об'єму і висоти сипкого матеріалу у промислових ємностях на прикладі класичної геометричної фігури – кругового конуса з оцінкою точності вимірювання його висоти при порівняно незначних неврахуваннях кількісних показників.

Отримання математичної моделі досліджуваного об'єкта. Розглянемо задачу на прикладі конічного бункера, що являє собою не зрізаний конус (рис. 1). Розглядаючи повністю заповнений матеріалом бункер, виділимо у ньому незаповнений об'єм 1, який позначимо через ΔV , і заповнений об'єм 2 з похибкою ΔV , яка дорівнює повному об'єму бункера V_B , зменшеному на виміряне значення об'єму матеріалу V_V , тобто, $\Delta V = V_B - V_V$. Величину ΔV будемо рахувати абсолютною похибкою при вимірюванні об'єму матеріалу у повністю заповненому бункері. Неврахований об'єм матеріалу буде дорівнювати

$$\Delta V = \frac{\pi}{3} \left[R_B^2 H_B - (R_B - \Delta R)^2 (H_B - \Delta H) \right], \quad (1)$$

де R_B , H_B – відповідно радіус основи бункера і висота бункера; ΔR , ΔH – відповідно зменшення радіуса і висоти бункера при неврахуванні (помилці вимірювання) об'єму матеріалу ΔV .

З прямокутного трикутника CEF

$$\Delta R = \Delta H \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Враховуючи, що з прямокутного трикутника ADF $\operatorname{tg} \varphi = R_B / H_B$, вираз (2) подамо у вигляді

$$\Delta R = \Delta H \cdot R_B / H_B. \quad (3)$$

З іншого боку, неврахований об'єм ΔV можливо подати як частку повного об'єму конуса або об'єму матеріалу, який розглядається. Тоді частка неврахованого об'єму матеріалу в бункері при вимірюванні буде дорівнювати

$$\Delta V = K \pi R_B^2 H_B / 3, \quad (4)$$

де K – коефіцієнт, що враховує частку матеріалу, яка не ввійшла до об'єму V_V і становитиме 0,01; 0,02, 0,03 і тому подібно, якщо неврахована частка складає 1 %, 2 %, 3 % і т. п. від загального об'єму.

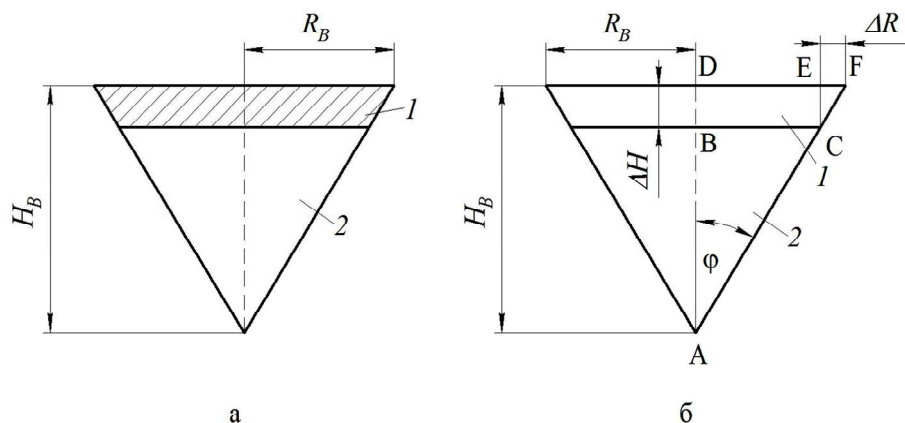


Рис. 1 – Конічний бункер: а – загальний вигляд; б – геометричне креслення;
1 – неврахований об'єм (похибка); 2 – врахований об'єм з похибкою.

Прирівняємо праві частини виразу (1) і (4), враховуючи, що така частина виразу (1) після перетворення дорівнює

$$\Delta V = \frac{\pi R_B^2}{3} \left[H_B - \frac{1}{H_B^2} (H_B^3 - 3H_B^2 \Delta H + 3H_B \Delta H^2 - \Delta H^3) \right]. \quad (5)$$

Тоді з врахуванням (5) після перетворень отримаємо

$$\Delta H^3 - 3H_B \Delta H^2 + 3H_B^2 \Delta H - K H_B^3 = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) є математичною моделлю кругового конічного бункера. Вона зв'язує для певного бункера висотою H_B абсолютну похибку зміни висоти бункера ΔH з часткою K неврахованого об'єму матеріалу (абсолютною похибкою вимірювання об'єму матеріалу). Оскільки залежність (6) не містить другого параметра бункера R_B , розглянемо задачу дещо по-іншому.

Отримання альтернативної математичної моделі досліджуваного об'єкта. Будемо вважати $\Delta V = K V_B$. Цю частку неврахованого об'єму матеріалу, виражену через параметри кругового конічного бункера, можна подати виразом

$$\Delta V = \frac{\pi}{12} \left[D_B^2 H_B - (D_B - \Delta D)^2 (H_B - \Delta H) \right], \quad (7)$$

де D_B – діаметр основи бункера.

Зменшення діаметра основи бункера (рис. 1) можливо подати залежністю

$$\Delta D = 2\Delta H / \operatorname{ctg} \varphi. \quad (8)$$

Підставивши значення ΔD з залежності (8) у (7), будемо мати рівняння

$$\Delta V = \frac{\pi}{12} \left[D_B^2 H_B - (D_B - 2\Delta H / \operatorname{ctg} \varphi)^2 (H_B - \Delta H) \right]. \quad (9)$$

Після перетворення отримаємо

$$\frac{4}{\operatorname{ctg}^2 \varphi} \Delta H^3 - \frac{4}{\operatorname{ctg} \varphi} \left(\frac{H_B}{\operatorname{ctg} \varphi} + D_B \right) \Delta H^2 + D_B \left(\frac{4H_B}{\operatorname{ctg} \varphi} + D_B \right) \Delta H - \frac{\pi}{12} \Delta V = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) також є математичною моделлю кругового конічного бункера, але воно містить усі його параметри – H_B , D_B , φ . Воно також, в залежності від неврахованого при вимірюванні об'єму ΔV , дозволяє визначити при цьому абсолютну похибку при вимірюванні висоти матеріалу ΔH , але з варіюванням параметрів D_B , H_B , φ і ΔV .

Моделювання зв'язку похибок при зміні неврахованого об'єму матеріалу. Проделуємо процес виникнення похибок відповідно рівнянню (6) при різних значеннях висоти бункера і коефіцієнта K . Для $H_B = 1$ м рівняння (6) прийме вид

$$\Delta H^3 - 3\Delta H^2 + 3\Delta H - K = 0. \quad (11)$$

При $H_B = 0,75$ м і $H_B = 0,5$ м рівняння відповідно будуть наступними

$$\Delta H^3 - 2,25\Delta H^2 + 1,6875\Delta H - 0,421875K = 0, \quad (12)$$

$$\Delta H^3 - 1,5\Delta H^2 + 0,75\Delta H - 0,125K = 0. \quad (13)$$

Розв'язок рівнянь (11), (12), (13), виконаний за допомогою персонального комп'ютера, дає два комплексних спряжених кореня і один дійсний. Комплексні спряжені корені тут не підходять за змістом задачі, тому будемо враховувати дійсні корені. Вони при різних значеннях K і висоти бункера приведені в табл. 1. З даних табл. 1 слідує, що при порівняно невеликих об'ємах неврахованого матеріалу у бункері як абсолютне, так і відносне відхилення його рівня зростають при збільшенні ΔV , однак відношення відхилень висоти матеріалу до об'єму (при відносному вимірі) при збільшенні ΔV мають лише тенденцію зростання, залишаючись практично незмінними. Такі закономірності не залежать від висоти бункера або матеріалу в ньому, при їх зміні в широких межах.

Таблиця 1 – Результати моделювання зв'язку неврахованого об'єму матеріалу і його висоти в круговому конічному бункері при різних його висоті

Частка неврахованого об'єму ΔV відносно повного об'єму матеріалу, %	Абсолютне відхилення висоти матеріалу ΔH при неврахуванні ΔV , м	Відносне відхилення висоти матеріалу ΔH від номінального значення $H_M = H_B$, %	Відношення відносних відхилень висоти матеріалу до відхилення його об'єму $\Delta H / \Delta V$	Наближене значення відношення $\Delta H / \Delta V$
Висота бункера $H_B = 1$ м				
1	0,003345	0,3345	0,3345	1/3
2	0,006712	0,6712	0,3356	1/3
4	0,013516	1,3516	0,3379	1/3
6	0,020414	2,0414	0,3402	1/3
8	0,027411	2,7411	0,3426	1/3
10	0,034511	3,4511	0,3451	1/3
12	0,041716	4,1716	0,3476	1/3
Висота бункера $H_B = 0,75$ м				
1	0,002508	0,3344	0,3344	1/3
2	0,005034	0,6712	0,3356	1/3
4	0,010136	1,3515	0,3379	1/3
6	0,015311	2,0415	0,3402	1/3
8	0,020559	2,7412	0,3426	1/3
10	0,025883	3,4511	0,3451	1/3
12	0,031287	4,1716	0,3476	1/3
Висота бункера $H_B = 0,5$ м				
1	0,001672	0,3344	0,3344	1/3
2	0,003356	0,6712	0,3356	1/3
4	0,006758	1,3516	0,3379	1/3
6	0,010207	2,0414	0,3402	1/3
8	0,013706	2,7412	0,3426	1/3
10	0,017255	3,4510	0,3451	1/3
12	0,020858	4,1716	0,3476	1/3

Дані моделювання при більш великих неврахованих об'ємах матеріалу приведені в табл. 2. З даних табл. 2 слідує, що при збільшенні ΔV абсолютні відхилення висоти матеріалу в бункері також зростають. При збільшенні ΔV до 50 % відносне відхилення висоти матеріалу складає 20,6299 %. Відношення відносних відхилень

висоти матеріалу до зміни його висоти $\Delta H / \Delta V$ також мають лише тенденцію зростання, однак вона більш сильно виявлена. Визначені закономірності також не залежать від висоти бункера або матеріалу в ньому. Рівняння (6), відповідно з яким отримано ці дані, містить лише висоту бункера H_B і параметр K , що характеризує частку неврахованого об'єму ΔV . Порівняно з ним рівняння (10) більш інформаційне, оскільки враховує поряд з висотою бункера H_B ще й його діаметр D_B і кут φ при вершині конуса (рис. 1). Про моделюємо ті ж самі зв'язки в круговому конічному бункері при різних поєднаннях його параметрів.

Нехай кругові конічні бункери будуть мати параметри, приведені в табл. 3. Всі три бункери мають однаковий об'єм матеріалу $0,08854605 \text{ м}^3$. При відмінній їх висоті вони будуть мати різні значення діаметрів основи і кутів при вершинах. Підставимо почергово параметри бункерів, наведені в табл. 3, у рівняння (10) і після перетворень відповідно отримаємо наступні рівняння моделей бункера

$$20,8214\Delta H^3 - 15,8229\Delta H^2 + 4,0081\Delta H - 3,8217\Delta V = 0, \quad (14)$$

$$3,687\Delta H^3 - 4,9894\Delta H^2 + 2,2506\Delta H - 3,8217\Delta V = 0, \quad (15)$$

$$0,3253\Delta H^3 - 0,9889\Delta H^2 + 1,0020\Delta H - 3,8217\Delta V = 0, \quad (16)$$

де ΔV – частка неврахованого об'єму матеріалу в бункері, м^3 .

Таблиця 2 – Результати моделювання зв'язку неврахованого об'єму матеріалу при великих його значеннях в круговому конічному бункері за умов різної висоти

Частка неврахованого об'єму ΔV відносно повного об'єму матеріалу, %	Абсолютне відхилення висоти матеріалу ΔH при неврахуванні ΔV , м	Відносне відхилення висоти матеріалу ΔH від номінального значення $H_M = H_B$, %	Відношення відносних відхилень висоти матеріалу до відхилення його об'єму $\Delta H / \Delta V$	Наближене значення відношення $\Delta H / \Delta V$
Висота бункера $H_B = 1 \text{ м}$				
20	0,071682	7,1682	0,3584	1/3
30	0,112096	11,2096	0,3736	1/3
40	0,156567	15,6567	0,3914	1/3
50	0,206299	20,6299	0,4126	1/3
Висота бункера $H_B = 0,75 \text{ м}$				
20	0,053762	7,1683	0,3584	1/3
30	0,084072	11,2096	0,3736	1/3
40	0,117425	15,6567	0,3914	1/3
50	0,154725	20,63	0,4126	1/3
Висота бункера $H_B = 0,5 \text{ м}$				
20	0,035841	7,1682	0,3584	1/3
30	0,056048	11,2096	0,3736	1/3
40	0,078284	15,6568	0,3914	1/3
50	0,103150	20,63	0,4126	1/3

Таблиця 3 – Дані бункерів, виконаних у вигляді кругових конусів

Номер бункера	Висота бункера H_B , м	Діаметр бункера D_B , м	Кут при вершині конуса φ
Бункер 1	0,2536	1,1552	66°20'
Бункер 2	0,4508	0,8664	43°50'
Бункер 3	1,0143	0,5776	15°55'

Відповідно рівнянням (14), (15), (16) за допомогою персонального комп'ютера промодельюємо зв'язок між ΔV і ΔH при різних значеннях неврахованого об'єму в бункері і занесемо дані до табл. 4. З даних табл. 4 видно, що при широкому діапазоні зміни співвідношення діаметр/висота бункера або матеріалу в ньому від 4,5552 до 0,5695 і використанні іншої математичної моделі (10) встановлені раніше співвідношення між відносними похибками неврахованого об'єму матеріалу в бункері і зміною його висоти не змінюються. Дані, наведені в табл. 1 і отримані в табл. 4, повністю співпадають.

Промодельюємо зв'язок ΔV і ΔH в круговому конічному бункері з висотою 0,2536 м і кутом φ при вершині 66°20', але при різних значеннях робочих рівнів матеріалу. Вихідні дані моделювання зведемо в табл. 5. Відповідно математичній моделі (10) і даних табл. 5 отримані робочі рівняння

$$20,8214\Delta H^3 - 13,845\Delta H^2 + 3,0687\Delta H - 3,8217\Delta V = 0, \quad (17)$$

$$20,8214\Delta H^3 - 11,8671\Delta H^2 + 2,2545\Delta H - 3,8217\Delta V = 0, \quad (18)$$

$$20,8214\Delta H^3 - 9,8893\Delta H^2 + 1,5657\Delta H - 3,8217\Delta V = 0. \quad (19)$$

Математичне моделювання з використанням залежностей (17), (18), (19) при зміні ΔV в межах від 1 % до 12 % об'єму матеріалу в бункері при прийнятих робочих висотах показало повний збіг з раніше отриманими результатами для інших значень цього параметра.

Таблиця 4 – Результати моделювання зв'язку неврахованого об'єму матеріалу і його висоти в круговому конічному бункері при різних значеннях параметрів

Частка неврахованого об'єму ΔV відносно повного об'єму матеріалу, %	Абсолютне значення неврахованого об'єму ΔV , м ³	Абсолютне відхилення висоти матеріалу ΔH при неврахуванні ΔV , м	Відносне відхилення висоти матеріалу ΔH від номінального значення $H_M = H_B$, %	Відношення відносних відхилень висоти матеріалу і неврахованого його об'єму $\Delta H / \Delta V$	Наближене значення відношення $\Delta H / \Delta V$
Бункер 1					
1	0,0008855	0,000847	0,3340	0,3340	1/3
2	0,001771	0,0017	0,6704	0,3352	1/3
4	0,003542	0,003423	1,3499	0,3375	1/3
6	0,005313	0,005171	2,0390	0,3398	1/3
8	0,007084	0,006943	2,7380	0,3422	1/3
10	0,008855	0,008744	3,4480	0,3448	1/3
12	0,010626	0,01057	4,1670	0,3472	1/3
Бункер 2					
1	0,0008855	0,001508	0,3345	0,3345	1/3
2	0,001771	0,003027	0,6717	0,3358	1/3
4	0,003542	0,006097	1,3524	0,3381	1/3
6	0,005313	0,009209	2,0430	0,3405	1/3
8	0,007084	0,012365	2,7428	0,3428	1/3
10	0,008855	0,015568	3,4533	0,3453	1/3
12	0,010626	0,018818	4,1742	0,3478	1/3
Бункер 3					
1	0,0008855	0,003389	0,3341	0,3341	1/3
2	0,001771	0,006801	0,6705	0,3352	1/3
4	0,003542	0,011369	1,3500	0,3375	1/3
6	0,005313	0,020684	2,0392	0,3399	1/3
8	0,007084	0,027773	2,7380	0,3422	1/3
10	0,008855	0,034966	3,4472	0,3447	1/3
12	0,010626	0,042267	4,1670	0,3472	1/3

Таблиця 5 – Вихідні дані моделювання зв'язку між ΔV і ΔH в бункері при різних значеннях робочої висоти матеріалу

Робоча висота матеріалу, м	Діаметр конуса при даній робочій висоті, м	Об'єм матеріалу в бункері при даній робочій висоті, м ³
0,2219	1,0108	0,059320
0,1902	0,8664	0,037359
0,1585	0,7220	0,021620

Аналіз отриманих результатів. В результаті проведеного математичного моделювання встановлено, що при неврахованих об'ємах матеріалу до 12 % вихідного значення абсолютні і відносні відхилення його висоти також змінюються. Зростання відхилення неврахованого об'єму приводять лише до тенденції збільшення відношення відносних відхилень висоти матеріалу до об'єму в круговому конічному бункері, яке залишається практично незмінним. Співвідношення діаметр/висота кругового конічного бункера не впливають на встановлені залежності. Співвідношення також не змінюються, якщо в певному круговому конічному бункері технологічний процес буде здійснюватись при різних прийнятих робочих висотах матеріалу. Більш широкі відхилення неврахованого об'єму в межах 20 ... 50 % вихідного значення не порушують встановлену тенденцію зміни відношення відносних відхилень висоти матеріалу до його об'єму, але ця тенденція суттєво посилюється, збільшую-

чи показник відносно $1/3$. Отже, в межах неврахування об'єму матеріалу в круговому конічному бункері до 15 % вихідного значення чітко діє наступна закономірність:

відношення відносної величини відхилення висоти матеріалу від очікуваного значення в круговому конічному бункері до відносної величини неврахованого його об'єму проти вихідного складає $1/3$.

Дана закономірність показує, що у випадку визначення кількості матеріалу в ємності, наприклад, з відсновою похибкою 6 %, відносна похибка знаходження висоти матеріалу складе всього 2 %. Це важливий результат, оскільки при теоретичному описанні процесів можливо буде допускати різні прийоми, де будуть виникати похибки у визначенні об'єму матеріалу і це не буде прямо позначатись на точності знаходження його рівня. Крім того, можливо буде започаткувати нові підходи визначення рівня сипких і рідких матеріалів в технічних ємностях, які забезпечують підвищену точність.

Перспективи подальших досліджень. Перспективою подальших досліджень є використання цієї закономірності на практиці при теоретичному описанні процесів у таких технологічних ємностях та при розробці засобів вимірювання рівня матеріалу за визначеним об'ємом.

Висновки. Отримані дві математичні моделі кругового конічного бункера, що відповідно враховують його висоту та висоту, діаметр основи і кут при вершині. Вони зв'язують неврахований об'єм матеріалу (похибку) при завантаженні (вимірюванні) та відхилення його висоти. В процесі математичного моделювання з використанням отриманих залежностей встановлено, що відношення відносної похибки визначення висоти матеріалу до відносної похибки оцінювання його об'єму становить $1/3$ в межах відхилень об'єму до 15 % від вихідного значення. На цю величину не впливають співвідношення діаметр/висота бункера та прийняті технологічні значення рівня матеріалу.

Список літератури

1. Кривцов И. П., Геллер Н. М., Мироненко В. А. Автоматизация и механизация погрузо-разгрузочных работ на промышленном железнодорожном транспорте. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
2. Верхотуров М. В. Гравитационные методы обогащения. – М. : МАКС Пресс, 2006. – 352 с.
3. Кондратец В. О., Матсуй А. М. Моделирование закономерностей розташування матеріалу вздовж нижньої частини піщового тіла механічного спірального класифікатора // Автоматизация технологических и бизнес процессов. – 2016. – Том 8. – Вып. 3. – С. 84 – 92.
4. Пивняк Г. Г., Вайсберг Л. А., Кириченко В. И. Измельчение. Энергетика и технологии. – М. : Изд. дом «Руда и Металлы», 2007. – 296 с.
5. Яковлев Л. Г. Уровнемеры. – М. : Машиностроение, 1964. – 190 с.
6. Можегов Н. А. Автоматические средства измерений объема, уровня и пористости материалов. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 120 с.
7. Хансуваров К. И., Цейтлин В. Г. Техника измерения давления, расхода, количества и уровня жидкости, газа и пара. – М. : Изд. стандартов, 1990. – 287 с.
8. Гончаров Ю. Г., Давидкович А. С., Гейзенблазен Б. Е. Автоматический контроль и регулирование технологических процессов на железорудных обогатительных фабриках. – М. : Недра, 1968. – 227 с.
9. Кондратец В. О. Математичне моделювання формування потоків рудного живлення кульових млинів при транспортуванні // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2014. – № 2 (49). – С. 42 – 50.
10. Матсуй А. М., Кондратец В. О. Моделирование формирования пикового потока у пиковому жолобі механічного односпіального класифікатора // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 16 (1188). – С. 53 – 59.

References (transliterated)

1. Krivtsov I. P., Geller N. M., Mironenko V. A. *Avtomatizatsiya i mekhanizatsiya pogrugo-razgruzochnykh rabot na promyshlennom zheleznodorozhnom transporte* [Automation and mechanization of loading and unloading on industrial railway transport]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1986. 264 p.
2. Verkhotur M. V. *Gravitatsionnye metody obogashcheniya* [Gravitational enrichment methods]. Moscow, MAKS Press Publ., 2006. 352 p.
3. Kondratets V. O., Matsuy A. M. Modelyuvannya zakonornostey rozstshuvannya materialu vzdovzh nyzhnoyi' chastyny piskovogo tila mekhanichnogo spiral'nogo klasyfikatora [Modeling the pattern of the distribution of the material along the bottom of the sand body of a mechanical spiral classifier]. *Avtomatyzatsiya tehnologicheskikh i biznes protsessov* [Automation of technological and business processes]. Odessa, 2016, no. 3, pp. 84–92.
4. Pivnyak G. G., Vaisberg L. A., Kirichenko V. I. *Izmel'chenie. Energetika i tekhnologiya* [Grinding. Energy and technology]. Moscow, Izdatel'skiy dom «Ruda i Metally» Publ., 2007. 296 p.
5. Yakovlev L. G. *Urovnemery* [Level gauges]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1964. 190 p.
6. Mozhegov N. A. *Avtomaticheskie sredstva izmereniy ob'ema, urovnya i poristosti materialov* [Automatic tool for measuring volume, level and porosity of materials]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1990. 120 p.
7. Khansuvarov K. I., Tseitlin V. G. *Tekhnika izmereniya davleniya, rashoda, kolichestva i urovnya zhidkosti, gaza i para* [Techniques of measuring pressure, consumption, amount and level of liquid, gas and steam]. Moscow, Izd. Standartov Publ., 1990. 287 p.
8. Goncharov Yu. G., Davidkovich A. S., Geizenblazen B. E. *Avtomaticheskii kontrol' i regulirovanie tekhnologicheskikh protsessov na zhelezorudnykh obogatitel'nykh fabrikakh* [Automatic control and regulation of technological processes at the iron ore beneficiation plants]. Moscow, Nedra Publ., 1968. 227 p.
9. Kondratets V. O. Matematychnye modelyuvannya formuvannya potokiv rudnogo zhyvlennya kul'ovykh mlyniv pry transportuvanni [Mathematical modeling of ball mill ore supply stream formation during transporting]. *Visnyk Kherson'skogo nacional'nogo tekhnichnogo universytetu* [Bulletin of Kherson National Technical University]. Kherson, 2014, no. 2 (49), pp. 42–50.
10. Matsuy A. M., Kondratets V. O. Modelyuvannya formuvannya piskovogo potoku u piskovomu zholobi mekhanichnogo odnospiral'nogo klasyfikatora [Modeling formation of sand flow in sand chute of mechanical single spiral classifier]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkov, 2016, no. 16 (1188), pp. 53–59.

Надійшло (received) 03.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Математичне моделювання зв'язку об'єму і висоти сипкого матеріалу у промислових ємкостях / А. М. Мацуй, В. О. Кондратець // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 70 – 76. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Математическое моделирование связи объема и высоты сыпучих материалов в промышленных емкостях / А. Н. Мацуй, В. А. Кондратец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 70 – 76. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Mathematical modeling of relation of volume and height of pouring materials in industrial capacities / A. N. Matsui, V. A. Kondratets // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 70 – 76. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мацуй Анатолій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кропивницький; тел.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Мацуй Анатолій Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Кировоградский национальный технический университет, г. Кропивницкий; тел.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Matsui Anatolii Nikolaevich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kirovohrad National Technical University, Kropyvnytskyi; tel.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Кондратець Василь Олександрович – доктор технічних наук, професор, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кропивницький; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Кондратец Василий Александрович – доктор технических наук, профессор, Кировоградский национальный технический университет, г. Кропивницкий; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Kondratets Vasily Aleksandrovich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kirovohrad National Technical University, Kropyvnytskyi; tel.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

УДК 72.621.382.3

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. ЄГОРЧЕНКОВ, А. О. КОСОВ**СВІТЛОДІОДНЕ ОСВІТЛЕННЯ ШТУЧНОГО НЕБОСХИЛУ**

Розглядається можливість створення експериментального світлового середовища (геліокліматрона) для дослідження варіантів природного, штучного та сумісного освітлення при формуванні композицій інтер'єру та екстер'єру будівель. Запропоновані схеми комп'ютерного керування світлодіодними комірками, які формують розподіл світла і кольору. Практично такий небосхил з автоматизованою системою управління світлодіодним освітленням забезпечує дослідні потреби всіх світлотехнічних лабораторій.

Ключові слова: світлодіодна комірка, геліокліматрон, контролер, схеми керування, штучне освітлення.

Рассматривается возможность создания экспериментальной световой среды (гелиоклиматрона) для исследования вариантов естественного, искусственного и совместного освещения при формировании композиций интерьера и экстерьера зданий. Предложены схемы компьютерного управления светодиодными ячейками, которые формируют распределение света и цвета. Практически такой небосвод с автоматизированной системой управления светодиодным освещением обеспечивает исследовательские потребности всех светотехнических лабораторий.

Ключевые слова: светодиодная ячейка, гелиоклиматрон, контроллер, схемы управления, искусственное освещение.

The possibility of creating an experimental light environment (helioclimateron) for studying natural, artificial and compatible lighting when designing the interior and exterior of buildings is considered. Circuits for computer control of LED cells which form the distribution of light and color are proposed. Such an artificial sky with an automated LED lighting control system provides practically the research needs of all lighting laboratories.

Key words: LED cell, helioclimateron, controller, control circuits, artificial lighting.

Вступ. Світлове середовище в приміщеннях може формуватися трьома шляхами. По-перше, через природне освітлення, при якому воно формується за рахунок природних джерел світла – сонця і небосхилу. По-друге, через штучне освітлення, при якому світлове середовище створюється за рахунок штучних (створених людиною) джерел світла. І по-третє, через *поєднане освітлення*, при якому недостатнє за нормами природне освітлення доповнюється штучним.

У процесі багатовікової еволюції очі людини формувалися під впливом саме природного світлового середовища. Тому параметри природного освітлення найбільш благотворно впливають як на органи зору, так і на інші системи організму. Штучне освітлення за кількісними і, особливо, за якісними параметрами набагато поступається природному освітленню і є вимушеним заходом при життєдіяльності людини в темний час доби. У денний час особливого значення набуває пошук варіантів освітлення, при яких максимально використовується природне освітлення і його позитивні якості.

Світлові прорізи роблять значний вплив на різні характеристики будівель. Досить зазначити, що при раціональному виборі розмірів світлопрозорих огорожень і збільшенні часу використання природного світла в промислових будівлях на одну годину протягом доби енергетика України могла би економити до 1 млн кВт/год електроенергії на рік.

З архітектурно-художньої точки зору вікна і ліхтарі, вітрини та вітражне скло грають істотну роль при формуванні композиції інтер'єру і екстер'єру будівлі, визначаючи ритм і масштабність, візуально можуть розсовувати або зсувати внутрішні стіни, подовжуючи або розширюючи, таким чином, простір в приміщеннях. З функціональної точки зору через світлопрозорі огороження висвітлюється внутрішній об'єм приміщення, створюючи певні умови для зорової роботи, побуту, відпочинку та орієнтації в просторі. Через вікна також здійснюється природна вентиляція приміщень, що дуже важливо для створення сприятливого температурно-вологого режиму внутрішнього середовища.

Слід особливо відзначити і психологічну роль світлових отворів. Саме вони є сполучною ланкою між навколишнім простором і замкнутим внутрішнім середовищем приміщення. При наявності цієї ланки людина в будівлі відчуває себе спокійно і впевнено, так як зберігається безліч позитивно діючих на людину природних факторів. Світлопрозорі огорожі суттєво впливають на вартість будівлі, особливо значними є експлуатаційні витрати. І, нарешті, велика їх роль в енергетичному балансі будівлі, тому що через глухі частини огорожі проходить тепла в два-чотири рази менше, ніж через засклені поверхні.

Стан лабораторної бази в галузі будівельної світлотехніки в Україні. Значення і вплив в цілому на будівлю світлопрозорих огорожень велике і багатогранне, а проектувальникам дуже важко і складно визначити раціональну площу і розміщення світлових отворів. Тому дана проблема вимагає наукового і експериментального підходу. З цього випливає, що дослідження в галузі будівельної світлотехніки актуальні як з економічної точки зору, так і з соціальної.

Значний обсяг в даному випадку займають експериментальні дослідження, для здійснення яких необхідна світлотехнічна лабораторія, яку інколи називають *геліокліматроном*. Вона призначена для організації і проведення експериментальних натурних і лабораторних досліджень в області формування оптимального *світло-інсоляційного середовища* в будівлях, спорудах в містобудівних структурах.

Актуальність створення лабораторії обґрунтовується тим, що теоретичними дослідженнями в багатьох випадках складно, трудомістко, а часом і взагалі неможливо врахувати всю гаму діючих факторів на процес розподілу світлових потоків, особливо відбитих від джерела світла в дану точку приміщення або території.

Головним інститутом в галузі будівельної фізики в колишньому СРСР був Науково дослідний інститут будівельної фізики Держбуду [1]. Інститут складався з будівель і споруд, в яких були розміщені відділення за різними науковими напрямками. Основна експериментальна установка світлотехніки та інсоляції розміщена в блоці «небо-сонце-земля». Цей унікальний комплекс у формі півсфери з внутрішнім діаметром 16 м (рис. 1) вирізняється своїми можливостями проведення світлотехнічних експериментів.



а



б

Рис. 1 – Установка «штучний небосхил» – геліокліматрон: а – вид зовні; б – внутрішній вигляд.

Шляхи розвитку експериментальної бази не обмежуються лабораторними установками. Все, що отримано в результаті лабораторних досліджень, має бути перевірено в натурних дослідженнях, особливо це відноситься до суб'єктивних досліджень зорового сприйняття.

У багатьох будівельних і архітектурних вузах України є лабораторії будівельної світлотехніки. Найбільш значна лабораторія з будівельної світлотехніки знаходиться на кафедрі архітектурних конструкцій Львівського національного університету «Львівська політехніка» [2]. Тут є навчальна установка – *штучний небосхил*, – купол якої діаметром 2,5 м підвішений під стелею. При необхідності проведення лабораторних досліджень купол установки опускається над робочим столом з моделями будівель. Після закінчення досліджень купол піднімається, і приміщення використовується як звичайна аудиторія.

Примітно те, що ця лабораторія має *фотометричну лаву* довжиною 3 м, яка дозволяє здійснювати тариров-

ки приладів, фотоеlementів, джерел світла, вивчати фотометричні характеристики різних матеріалів і вирішувати ряд інших світлотехнічних завдань [3, 4, 5].

Слід відзначити потужну лабораторію Українського світлотехнічного інституту в м. Тернополі, в якій є різноманітні прилади та установки (фотометрична лава, фотометрична куля, яскравоміри та інше). При певних умовах багато з цих приладів можна використовувати для досліджень з природного та штучного освітлення [4].

Результати модельних досліджень проекту геліокліматрона. На сьогоднішній день, із застосуванням напівпровідникових джерел світла (ДС) – світлодіодів (СД) зв'язується майбутнє цілої низки індустрій, особливо будівельної.

СД являють найбільш перспективний напрямок розвитку освітлювальної техніки в усіх її додатках – від освітлення об'єктів ЖКГ та промисловості, сигналізації, світлової індикації та реклами до виробництва мобільних пристроїв, телевізорів і дисплеїв.

Основною привабливою рисою СД є потенціально підвищений рівень світлопередачі, що веде до цілого ряду економічних і соціальних переваг, найважливіша з яких – радикальне скорочення витрат енергії на освітлення, що складають в Україні близько 20 % від загальних витрат виробленої електроенергії.

Розвиток світлодіодної індустрії відноситься до національного пріоритету цілого ряду країн, включаючи США, Канаду і держави Євросоюзу, відповідаючи потребам в економічній та енергетичній безпеці. Здатні замінити в перспективі більшість сучасних ДС, СД привертають до себе увагу найбільших виробників світлотехнічної продукції, таких як *General Electric*, *Philips* і *Osram*.

Критерієм оцінки змінного природного освітлення служить коефіцієнт природної освітленості (КПО), який представляє собою відношення природного освітлення E_M , що створюється в точці M (рис. 2) на заданій робочій поверхні всередині приміщення світлом неба (безпосередньо або після відбиття), до одночасного значення зовнішнього горизонтального освітлення під відкритим небосхилом E_H . КПО виражається у відсотках. Участь прямого сонячного світла в визначенні E_M і E_H виключається. Значення КПО, що позначається в формулах як e , знаходиться з виразу:

$$e_M = (E_M / E_H) 100 \%$$

Нарівні з КПО в розрахунках природного освітлення застосовується геометричний КПО, що позначається ε . Він відрізняється від e тим, що не враховує вплив скління і обробки в приміщенні, а також нерівномірної яскравості небосхилу. Геометричний КПО визначається за законом проєкції тілесного кута [1, 4].

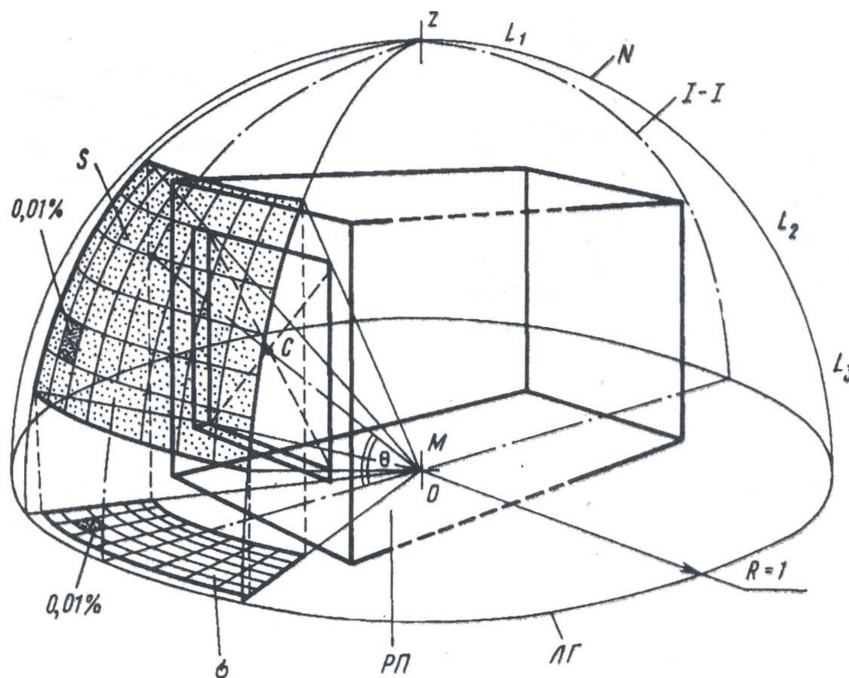


Рис. 2 – Графічна модель небосхилу.

Сумарне значення КПО в тій чи іншій точці приміщення визначається наступними складовими:

- часткою природного освітлення, що створюється прямим світлом неба і оцінюваного значенням геометричного КПО;
- часткою КПО, обумовленою при боковому освітленні віддзеркаленням світла, фасадами конфронтуючих будівель і землею, при цьому участь прямого сонячного світла в створенні яскравості поверхонь, що відбивають, виключається;
- часткою КПО, обумовленою віддзеркаленням світла від внутрішніх поверхонь приміщення.

Для оцінки розподілу природного освітлення в приміщенні застосовується показник нерівномірності освітлення на заданій поверхні, який є відношенням мінімального до середнього або мінімального до максимального значення КПО.

В основу розрахунку і моделювання природного освітлення приміщень покладені два закони.

Графічно закон проекції тілесного кута ілюструється наступною побудовою (рис. 2): проведемо з центром у точці M півсферу небосхилу радіусом, рівним одиниці, і позначимо яскравість неба через L . Умовне припущення: $L_1 = L_2 = L_3 = \text{const}$; L – яскравість небосхилу, кд/м^2 ; S – площа небосхилу, видима з точки M ; N – небосхил; σ – площа проекції ділянки неба, що висвітлює точку M , на робочу поверхню (РП); ЛГ – лінія горизонту; θ° – кутова висота середини світлопроводу C над горизонтом; O – центр небосхилу, суміщений з досліджуваною точкою M ; Z – зеніт небосхилу, суміщений з досліджуваною точкою M .

Визначимо освітленість в точці M , створювану в приміщенні через вікно ділянкою півсфери S , яку можна прийняти за точкове джерело світла, за формулою. Висловлюючи в ній силу світла 1 ділянки неба S через яскравість L , отримаємо:

$$E_M = LS \cos \alpha,$$

де L – яскравість освітлення; $S \cos \alpha = \sigma$ – площа проекції частини небосхилу S на освітлену поверхню σ .

Уявімо, що точка M знаходиться на горизонтальній поверхні (рис. 2) і засвітлюється усією рівномірно яскравою півсферою. В цьому випадку горизонтальне зовнішнє освітлення дорівнює: $E_H = L\pi R^2$, звідки при $R=1$ геометричний КПО становить відношення:

$$\varepsilon = \frac{L\sigma}{L\pi R^2} = \frac{\sigma}{\pi}$$

Таким чином, значення КПО у довільній точці M виражається значенням проекції видимого з цієї точки приміщення ділянки небосхилу до величини π .

Інший закон – закон світлотехнічної подібності (рис. 3). Освітлення в точці M приміщення створюється через вікна, яскравість яких L_1 і L_2 . Різна яскравість може створюватися, наприклад, застосуванням різних сортів скла (прозорого, молочного, контрастного, матового, і т.п.). Проте при різних розмірах вікон (I і II), але з однаковим склом, освітлення в точці M створюється одним і тим же тілесним кутом з вершиною в цій точці.

Практичне значення цього закону полягає в тому, що він дозволяє вирішувати завдання природного освітлення, користуючись методом масштабного моделювання, тобто оцінювати умови освітлення приміщень на моделях. Для цього виготовляються моделі будівель в масштабі не менш 1:20, ретельно витримуючи всі геометричні та світлотехнічні параметри (обробка, пропорції, деталі та ін.) інтер'єру.

Розтин 1-1 на рис. 2

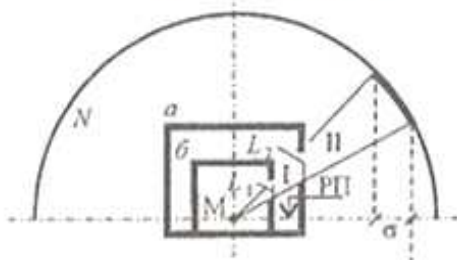


Рис. 3 – Схеми до закону світлотехнічної подібності.

різними координатами, поверхні «землі», що обертається і світиться переважно поверхнею.

Перш за все, в цьому небосхилі-геліокліматроні можливе широкомасштабне моделювання, яке значно підвищує достовірність результатів досліджень і, найголовніше, відкриває можливість введення в модель людини-експериментатора. Це забезпечується розмірами небосхилу і моделей будівель до $(4 \times 4 \times 3)$ м. На таких моделях можливо проводити комплексні дослідження з питань природного і суміщеного світлодіодного освітлення, інсоляції, сонцезахисту, світлопрозорих матеріалів і конструкцій, кольорового рішення інтер'єру, пластики фасадів, зорової працездатності в світлоколірному середовищі, характерному для різних кліматичних районів. Такі можливості забезпечуються чотирма основними чинниками світлодіодного обладнання небосхилу: моделювання хмарного і ясного неба, «сонця» з

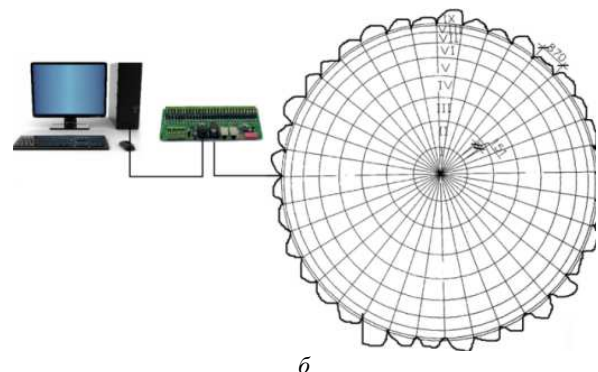
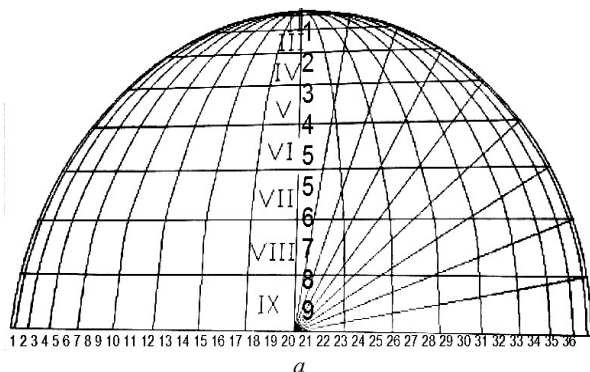


Рис. 4 – 36-секторальна модель геліокліматрона: а – його 324 світлодіодні комірки; б – схема керування його освітленням.

Практично такий небосхил з автоматизованою системою управління світлодіодним освітленням забезпечує

дослідні потреби всіх світлотехнічних лабораторій.

На рис. 4, а показана секторально-коміркова модель напівсферичного геліокліматрона діаметром 10 м, тобто висотою 5 м. Розміри кожної комірки складають (10×10) кутових градусів. На рис. 4, б наведена комутаційна схема керування 324 світлодіодними комірками з підключенням через контролери серії LED до центрального сервера, програмне середовище якого забезпечує регулювання яскравості і кольору світіння світлодіодів в самих комірках.

Рис. 5 ілюструє електричну схему керування тридцятьма світлодіодними комірками (панелями) від одного контролера серії LED.

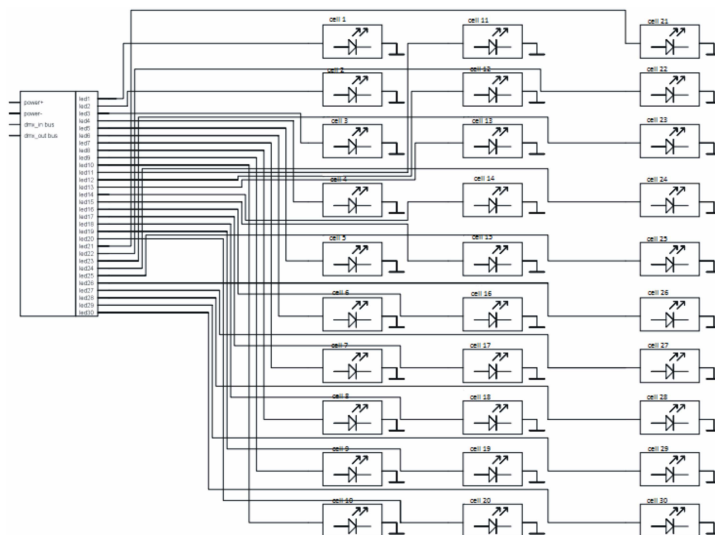


Рис. 5 – Електрична схема керування 30 панелями від одного контролера.

Висновки. Зважаючи на важливість розробки штучних світлових середовищ для моделювання впливу та сприйняття світла і кольору в просторі, запропонована модель керування світлодіодним освітленням в середовищі штучного небосхилу. Геліокліматрон може використовуватись як об'єкт натурних досліджень з сучасних проблем оптимізації світлоколірного середовища міст. Набори експериментальних моделей конструкцій і будівель дозволяють досліджувати вплив світлотехнічних ефектів та інсоляцій.

Список літератури

1. *Лицкевич В. К., Макриненко Л. И., Мигалина И. В.* Архитектурная физика : Учебник для вузов // Под ред. Оболенского Н. В. – М. : Архитектура-С, 2007. – 448 с.
2. *Єсорченков В. О., Яців М. Б., Югов А. М., Кінаш Р. І.* Розрахункові та експериментальні методи оцінки природного світлового середовища приміщень : Навчальний посібник для архітектурних і будівельних спеціальностей. – Львів : "ТзОВ Простір М", 2008. – 111 с.
3. ДСТУ Б В.2.2-6-97 (ГОСТ 24940-96). Будинки і споруди. Методи вимірювання освітленості. – К. : Укрархбудінформ, 1998 – 22 с
4. ДБН В.2.5-28-2006. Природне і штучне освітлення. Інженерне обладнання будівель і споруд. – К. : Мінбуд України, «Укрархбудінформ», 2006. – 76 с.
5. ДБН В.2.5-28-2006. Природне і штучне освітлення. Зміна № 2. – К. : Укрархбудінформ, 2012. – 36 с.

References (transliterated)

1. Litckevich V. K., Makrinenko L. I., Migalina I. V. *Arkhitekturnaya fizika : Uchebnik dlya vuzov* [Architectural physics : Textbook for Higher Educational Institutions]. Pod red. Obolenskogo N. V. Moscow, Arkhitektura-S Publ., 2007. 448 p.
2. Egorchenkov V. O., Yatsiv M. B., Yugov A. M., Kinash R. I. *Rozrakhunkovi ta yeksperymental'ni metody otsinky pryrodного svitlovogo sere-dovyscha prymischen'* : Navchal'nyy posibnyk dlya arkhitekturnykh ta budivel'nykh spetsial'nostey [Computational and experimental methods for evaluating natural lightning environment of a room : Textbook for architectural and building specialties]. Lviv, "TzOV Prostrir M" Publ., 2008. 111 p.
3. DSTU B V.2.2-6-97 (GOST 24940-96). *Budyanky i sporudy. Metody vymiryuvannya osvitenosti* [Buildings and structures. Illumination measuring methods]. Kyiv, Ukrarkhbudininform Publ., 1998. 22 p.
4. DBN V.2.5-28-2006. *Pryrodne i shuchne osviltennya. Ingenerne obladnannya budivel' i sporud* [Natural and artificial lightning. Engineering equipment of buildings and structures]. Kyiv, Minbud Ukrainy "Ukrarkhbudininform" Publ., 2006. 76 p.
5. DBN V.2.5-28-2006. *Pryrodne i shuchne osviltennya. Zmina no. 2* [Natural and artificial lightning. Change no. 2]. Kyiv, Ukrarkhbudininform Publ., 2012. 36 p.

Надійшла (received) 23.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Світлодіодне освітлення штучного небосхилу / О. С. Мельник, В. О. Єгорченков, А. О. Косов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 76 – 81. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Светодиодное освещение искусственного небосвода / А. С. Мельник, В. А. Егорченков, А. О. Косов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 76 – 81. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

LED Illumination of an Artificial Sky / O. S. Melnyk, V. O. Yegorchenkov, A. O. Kosov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 76 – 81. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Мельник Александр Степанович – кандидат технических наук, доцент, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Melnyk Oleksandr Stepanovich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

Егорченков Володимир Олексійович – кандидат технічних наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ; тел.: (050) 224-55-12; e-mail: egval@ukr.net.

Егорченков Владимир Алексеевич – кандидат технических наук, доцент, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев; тел.: (050) 224-55-12; e-mail: egval@ukr.net.

Yegorchenkov Volodymyr Olexiyovich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kiev National University of Construction and Architecture, Kyiv; tel.: (050) 224-55-12; e-mail: egval@ukr.net.

Косов Антон Олегович – студент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (097) 693-45-39; e-mail: KosovAnton@i.ua.

Косов Антон Олегович – студент, Кафедра электроники, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (097) 693-45-39; e-mail: KosovAnton@i.ua.

Kosov Anton Olegovich – student, National Aviation University, Kyiv; tel.: (097) 693-45-39; e-mail: KosovAnton@i.ua.

УДК 621.165

М. М. НЕЧУЙВИТЕР

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПИТАТЕЛЬНЫХ НАСОСОВ ПАРОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК ТЕПЛОВЫХ И АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

Проведено аналіз відмов живильних насосів, а також дослідження щодо підвищення надійності роботи живильного насоса енергоблоків теплових електростанцій при експлуатації живильно-деаераційної установки на ковзному тиску пари, що гріє. Визначено критерій стійкості роботи живильного насоса, а також умови забезпечення ефективності експлуатації живильних насосів шляхом контролю і управління зміною динамічного запасу на кавітацію живильного насоса в режимах змінних навантажень енергоблоку. Проведено оцінку показників надійності енергоблоку.

Ключові слова: енергоблок, живильний насос, живильно-деаераційна установка, динамічний запас на кавітацію, показники надійності, коефіцієнт оперативної готовності.

Проведены анализ отказов питательных насосов, а также исследования по повышению надежности работы питательного насоса энергоблоков тепловых электростанций при эксплуатации питательно-деаэрационной установки на скользящем давлении греющего пара. Определены критерий устойчивости работы питательного насоса, а также условия обеспечения эффективности эксплуатации питательных насосов путем контроля и управления изменением динамического запаса на кавитацию этих насосов в режимах переменных нагрузок энергоблока. Проведена оценка показателей надежности энергоблока.

Ключевые слова: энергоблок, питательный насос, питательно-деаэрационная установка, динамический запас на кавитацию, показатели надежности, коэффициент оперативной готовности.

In the paper the feed pump failure conditions are analyzed and the means of improving the reliability of the feed pump of a thermal power plant power unit using feed deaerator with sliding pressure of heating steam are studied. The criteria of the feed pump operation stability as well as the conditions of providing the feed pump effective operation by monitoring and managing the changes of the pump cavitation dynamical stock under the variable loads of the power unit are determined. The indexes of the power unit reliability are evaluated.

Key words: power unit, feed pump, feed deaerator, cavitation dynamical stock, indexes of reliability, operational availability function.

Введение. Повышение экономичности, маневренности, надежности энергоблоков электростанций при эксплуатации их в режимах переменных нагрузок – одна из проблем современной энергетики Украины. В этой связи оптимизация режимных параметров элементов тепловых схем паротурбинных установок, в том числе питательных деаэрационных установок типа деаэратор – всасывающий трубопровод – питательный насос, позволяет предложить энергосберегающие режимы их эксплуатации, а именно работу деаэратора на скользящем давлении.

© М. М. Нечуйвитель, 2017

Надежность работы питательных насосов тепловых и атомных электростанций зависит от множества их комплексных параметров: термодинамических, конструктивных, режимных. Последние определяют широкий спектр причин отказов питательных насосов и их влияние на показатели надежности ТЭС и АЭС.

Согласно [1] отказы питательных насосов обусловлены конструктивными, термодинамическими, режимными параметрами. Сюда относятся: увеличенные зазоры в уплотнениях рабочих колес; попадание посторонних предметов в рабочее колесо; задевание ротора за статор; задиры в проточной части; расцентровка агрегата; разрушение подшипника; заклинивание насоса, смещение рабочих колес относительно осей отводов; увеличенные дроссельные щели в гидропите или уплотнениях рабочих колес; «запаривание» насоса; повышенная вибрация насоса; кавитация в насосе; неплотности стыка крышки нагнетания или стыков секций; износ сальниковой набивки или рубашки вала.

Ниже приведен комплекс термодинамических и режимных параметров, которые обуславливают причины отказов питательных насосов с электроприводом и с турбоприводом.

Для насосов с электроприводом. Термодинамическими параметрами процесса являются: расход питательной воды (подача насоса); температура масла в системе смазки; давление воды на входе в насос; давление воды на выходе из насоса; потребляемая мощность электродвигателя; температура воды на входе в насос; температура воды на выходе из насоса; расход воды через линию осевой разгрузки (протечка воды через гидропит); давление воды после гидропита. Режимные параметры: напор; осевой сдвиг ротора; вибрация; нагрев воды в насосе; температура подшипников; потребляемая мощность электродвигателя; коэффициент полезного действия (КПД).

Для насосов с турбоприводом. Термодинамическими параметрами процесса являются: расход пара на турбопривод; давление пара перед стопорным клапаном турбопривода; температура пара перед стопорным клапаном турбопривода; давление отработавшего пара после турбопривода; температура отработавшего пара турбопривода; расход питательной воды (подача насоса); температура масла в системе смазки; давление воды на входе в насос; давление воды на выходе из насоса; температура воды на входе в насос; температура воды на выходе из насоса; расход воды через линию осевой разгрузки (протечка воды через гидропит); давление воды после гидропита. Режимные параметры: напор; осевой сдвиг ротора; вибрация насоса; вибрация турбопривода; нагрев воды в насосе; температура подшипников; КПД насоса; частота вращения.

Отклонение вышеупомянутых параметров от условий работоспособности на основе требований правил технической эксплуатации (ПТЭ) и инструкций на оборудование является причиной отказов питательных насосов.

Технические решения по совершенствованию тепловых схем паротурбинных установок с целью повышения их экономичности, в частности, эксплуатация питательно-деаэрационных установок на скользящем давлении греющей среды, требуют обеспечения надежности работы питательных насосов в режимах переменных нагрузок энергоблока на основе критерия устойчивой работы питательного насоса при работе деаэратора на скользящем давлении, а также, в этой связи оценки показателей надежности энергоблока.

Имеющиеся исследования [2 – 5] по эксплуатации питательных деаэрационных узлов в режимах переменных нагрузок энергетического блока отражают решения определенного круга вопросов, в частности: исследований режимов работы; оптимизации режимных, термодинамических, конструктивных параметров и расчетно-экспериментальных исследований квазистационарных (с медленным изменением основных параметров) режимов эксплуатации питательных деаэрационных установок (ПДУ) на переменных нагрузках энергоблока; работы ПДУ на скользящем давлении в деаэраторе; расчетных исследований по определению допустимой скорости изменения давления в деаэраторе, по выбору оптимального места включения деаэратора в тепловой схеме паротурбинной установки, по предупреждению вскипания рабочего тела – питательной воды – во всасывающем трубопроводе питательного насоса, по определению оптимального давления в деаэраторе.

Известны технические решения, обеспечивающие повышение экономичности и надежности эксплуатации существующих, а также вновь проектируемых ПДУ: способ регулирования режима работы деаэратора путем подачи пара в бак-аккумулятор в режимах набора нагрузки энергоблока [6], что повышает экономичность энергоблока; питательно-деаэрационная установка, которая позволяет предупредить срыв насоса при снижении давления в деаэраторе подачей охлажденного конденсата во всасывающий трубопровод питательного насоса [7], что повышает надежность работы энергоблока, и предоставляет возможность в новых проектных разработках снизить высоту установки деаэратора; устройство для защиты от срыва питательного насоса подачей охлажденного конденсата со стороны всасывания питательного насоса [8], что способствует повышению устойчивости работы питательного насоса в бездеаэрационных схемах паротурбинных установок. В монографии [9] обобщены теоретико-практические исследования и оптимизация переменных, переходных режимов работы элементов тепловых схем турбоустановок.

Вышеназванные технические решения не в полной мере отвечают современным требованиям, предъявляемым к надежности работы ПДУ на скользящем давлении греющего пара, в частности питательного насоса.

Продолжением одного из направлений этих исследований является обеспечение устойчивой работы в деаэрационных схемах регенерации на переменных и переходных режимах [10, 11].

Постановка задачи. Целью исследования является обеспечение надежной работы питательных насосов в режимах переменных нагрузок энергоблока на основе критерия устойчивой работы питательного насоса путем

управления запасом на кавитацию питательного насоса в режимах резко переменных нагрузок энергоблока при работе деаэратора на скользящем давлении, а также, в этой же связи, оценка показателей надежности энергоблока.

Действительное изменение динамического запаса на кавитацию питательного насоса определяется зависимостью

$$\Delta h_d = \Delta h_r - \Delta h = (p - p_s) - \Delta h, \quad (1)$$

где p – давление питательной воды (среды), движущейся во всасывающем трубопроводе, $p = p_d - \Delta p + p_{ст}$; p_s – давление насыщения питательной воды (среды) при температуре t ; Δh – минимальный запас на кавитацию питательного насоса; Δh_r – гидродинамический запас на кавитацию, $\Delta h_r = p - p_s$.

Минимальный запас на кавитацию питательного насоса Δh учитывает режимные особенности работы питательного насоса – его характеристику, которая представляется уравнением

$$\Delta h = 10A \left(\frac{n\sqrt{Q}}{c_{кр}} \right)^{4/3}, \quad (2)$$

где A – коэффициент запаса, изменяется в диапазоне значений 1,0 – 1,6; $c_{кр}$ – критический кавитационный запас быстроходности; n – число оборотов насоса; Q – расход питательной воды (среды).

Гидродинамический запас на кавитацию Δh_r при переменных нагрузках турбоустановки и работе деаэратора на скользящем давлении греющего пара описывается зависимостью

$$\Delta h_r = h + \frac{1}{\gamma} (p_d - \Delta p - p_s), \quad (3)$$

где h – высота столба воды всасывающего трубопровода питательного насоса; γ – удельный вес питательной воды (среды); p_d – соответственно давление в деаэраторе; Δp – гидравлические потери во всасывающем трубопроводе питательного насоса; p_s – давление насыщения питательной воды (среды) при температуре t .

Действительное изменение динамического запаса на кавитацию питательного насоса с учетом уравнений (2, 3) и преобразований имеет следующий вид:

$$\Delta h_d = p_d - \Delta p + p_{ст} - p_s - 10A \left(\frac{n\sqrt{Q}}{c_{кр}} \right)^{4/3}, \quad (4)$$

где $p_{ст}$ – это давление столба воды, находящегося во всасывающем трубопроводе питательного насоса.

В табл. 1 представлены варианты исследования изменения динамического кавитационного запаса питательного насоса ПДУ в режимах переменных нагрузок энергоблока для турбоустановки К-300-240,

Таблица 1 – Вариантные исследования изменения динамического кавитационного запаса питательного насоса ПДУ в режимах переменных нагрузок энергоблока для турбоустановки К-300-240

№ п/п	Нагрузка, $N_{ном}$	Турбопитательный насос ПТ-1150-340-15				Бустерный насос ПД: 650-160				t , °C	p_d , ата	p , ата	Δh_r , ата	Δh_d , ата
		n , об/мин	$c_{кр}$	$Q_{пн}$, м ³ /с	Δh , ата	n , об/мин	$c_{кр}$	$Q_{он}$, м ³ /с	$\Delta h_{он}$, ата					
1	1,00	5000	3500	16,00	9,30	2980	6500	8,00	1,280	162,5	6,73	8,20	1,50	0,22
2	0,75	3800	3500	12,00	5,33	2980	6500	6,00	1,041	153,0	5,21	6,86	1,65	0,65
3	0,55	2750	3500	8,76	2,83	2980	6500	4,38	0,830	141,2	3,82	5,55	1,73	0,86

Анализ расчетных исследований, проведенных для различных сочетаний параметров, позволяет констатировать существование следующих закономерностей.

Во-первых, при снижении номинальной нагрузки $N_{ном}$ энергетического блока действительное изменение динамического запаса на кавитацию питательного насоса, который определяется разницей запаса на кавитацию из всасывающей стороны питательного насоса и минимальным кавитационным запасом питательного насоса, то есть $\Delta h_r - \Delta h$, увеличивается. Здесь необходимо констатировать, что на динамических режимах стабильность работы ПДУ зависит от скоростей изменения давления греющей пары в деаэраторе и давления рабочей среды во всасывающем трубопроводе питательного насоса, а также от изменения разницы давления пара в деаэраторе и давления насыщения пара, $p_d - p_s$, что может привести к кавитационному срыву питательного насоса.

Во-вторых, при повышении номинальной нагрузки $N_{\text{ном}}$ энергетического блока действительное изменение динамического запаса на кавитацию питательного насоса уменьшается до определенного значения, который отвечает нагрузке $N_{\text{ном}}$.

Наиболее опасным для стабильной работы питательного насоса оказывается момент, когда достигается равенство изменений кавитационной характеристики питательного насоса со всасывающей стороны и кавитационной характеристики насоса. В этом случае изменение динамического кавитационного запаса питательного насоса равняется нулю, что при импульсных колебаниях давления приведет к кавитационному срыву. Надежность работы питательного насоса в вышеупомянутых условиях работы ПДУ обеспечивается превышением запаса на кавитацию со стороны всасывающей стороны над минимальным кавитационным запасом питательного насоса, то есть условием $\Delta h_t \geq \Delta h$.

Для контроля и управления динамическим кавитационным запасом питательного насоса при работе деаэратора на скользящем давлении применяется устройство для измерения динамического запаса на кавитацию питательного насоса [10]. Это устройство при работе деаэрационно-питательной установки на скользящем давлении в режимах переменных нагрузок энергоблока позволяет предупредить срыв питательного насоса энергоблока, повысить надежность работы этого насоса путем контроля и поддержанием необходимого минимально-допустимого запаса на кавитацию, питательного насоса, за счет учета динамического изменения запаса на кавитацию со стороны всасывания питательной воды (среды) питательным насосом и его кавитационной характеристики и работы энергоблока.

Оценка показателей надежности энергоблока. При работе питательно-деаэрационной установки на скользящем давлении греющего пара путем управления запасом на кавитацию питательного насоса в режимах резко переменных нагрузок энергоблока проводилась в [12] с помощью математического аппарата теории надежности.

В табл. 2 представлены расчетные показатели надежности питательного насоса при работе питательно-деаэрационной установки на скользящем давлении греющей среды для турбоустановки К-300-240

Таблица 2 – Расчетные показатели надежности питательного насоса при работе ПДУ на скользящем давлении греющей среды для турбоустановки К-300-240

№ пп	Показатели	Исходный вариант	Сравниваемый вариант
1	T_0 – время наработки на отказ	6500	8760
2	Интенсивность отказов ($\lambda = 1/T_0$) – вероятность отказа объекта в единицу времени	$1,538 \cdot 10^{-4}$	$1,141 \cdot 10^{-4}$
3	Интенсивность восстановления ($\mu = 1/T_v$) – вероятность восстановления в единицу времени, где T_v – время восстановления	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$
4	T_v – время восстановления	52,6	52,6
5	Среднее время безотказной работы системы из n – элементов: $T = (\sum \lambda_i)^{-1}$	6502	8764
6	Среднее время восстановления: $T_v = \sum (\lambda_i / \mu_i) / \sum \lambda_i$	52,6	52,6
7	Вероятность безотказной работы системы на промежутке времени $\tau = 500$ часов: $p(t) = e^{-\lambda \tau}$	0,9262	0,9441
8	Коэффициент готовности (по критерию устойчивости работы питательного насоса) $k = [1 + (\lambda / \mu)]^{-1}$	0,9919	0,9940
9	Коэффициент оперативной готовности (характеризует способность системы, находящейся в резерве, начать работу в течение времени τ): $k_{ог} = k_{г} \times p(t)$	0,9242	0,9385

Увеличение времени наработки на отказ, обусловленного управлением динамического запаса на кавитацию питательного насоса в режимах переменных нагрузок энергоблока, позволяет увеличить коэффициент оперативной готовности на 1,43 %.

Выводы. Определен критерий обеспечения устойчивой работы питательного насоса в диапазоне допустимых границ изменения динамического запаса на кавитацию питательного насоса. Эффективность эксплуатации питательных насосов деаэрационных установок обеспечивается управлением изменения динамического кавитационного запаса питательного насоса. Увеличение времени наработки на отказ, обусловленного управлением динамического запаса на кавитацию питательного насоса в режимах переменных нагрузок энергоблока, позволяет увеличить коэффициент оперативной готовности до 1,43 %.

Список литературы

1. Мурманский Б. Е. Разработка, апробация и реализация методов повышения надежности и совершенствования системы ремонтов паротурбинных установок в условиях эксплуатации : дис. ... д-ра техн. наук : 05.04.12 / Мурманский Борис Ефимович. – Екатеринбург, 2015. – 457 с.
2. Шелепов И. Г., Аркадьев Б. А., Иоффе В. Ю., Нечуйвитель М. М. К определению скорости изменения давления в деаэраторах при переменных режимах работы турбины // Энергетическое машиностроение : Сб. науч. трудов. – Харьков : Вища школа, 1980. – Вып. 29. – С. 85 – 90.
3. Шелепов И. Г., Нечуйвитель М. М., Аркадьев Б. А. К выбору места включения деаэраторов паротурбинных установок // Математические модели процессов и конструкций энергетических и транспортных турбинных установок в системах их автоматизированного проектирования : Сб. науч. трудов. – Харьков : ИПМАШ АН УССР, 1985. – Ч. I. – С. 182 – 183.
4. Аркадьев Б. А., Шелепов И. Г., Нечуйвитель М. М. Предотвращение вскипания в питательном насосе, при сбросе нагрузки турбины // Теплоэнергетика. – 1985. – № 2. – С. 40 – 43.
5. Нечуйвитель М. М. К вопросу методики выбора оптимального давления в деаэраторах паротурбинных установок // Математическое моделирование процессов и конструкции энергетических и транспортных турбинных установок в системах их автоматизированного проектирования : Сб. науч. трудов. – Харьков : ИПМАШ АН УССР, 1988. – Ч. II. – С. 111.
6. Нечуйвитель М. М., Шелепов И. Г., Аркадьев Б. А., Иоффе В. Ю. Пат. 4277113/24-06, СССР. Способ регулирования режима термического деаэратора. – 1990.
7. Аркадьев Б. А., Нечуйвитель М. М., Иоффе В. Ю. Пат. 4252188/24-06, СССР. Деаэрационно-питательная установка. – 1989.
8. Аркадьев Б. А., Нечуйвитель М. М. Пат. 4867870/29, СССР. Устройство для защиты от срыва питательного насоса тепловых электростанций. – 1993.
9. Нечуйвитель М. М., Аркадьев Б. А., Шелепов И. Г. Дослідження і оптимізація змінних і перехідних режимів роботи елементів теплових схем турбоустановок : моногр. – Харків : УПА, 2006. – 98 с.
10. Нечуйвитель М. М., Шелепов И. Г. Пат. 84356, Україна. Пристрій для вимірювання динамічного кавітаційного запасу живильного нагнітача. – 2013.
11. Нечуйвитель М. М., Шелепов И. Г. Підвищення надійності експлуатації живильних насосів деаераційних установок паротурбінних блоків електростанцій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Енергетичні та теплотехнічні процеси та устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 15. – С. 151 – 155.
12. Гладышев Г. П., Аминов Р. З., Гуревич В. З. Надёжность теплоэнергетического оборудования ТЭС и АЭС : учеб. Пособие для теплоэнергетических и энергомашиностроительных вузов / Под ред. Андриященко А. И. – Москва : Высшая школа, 1991. – 303 с.

References (transliterated)

1. Murmanskii Ye. E. *Razrabotka, aprobatsiya i realizatsiya metodov povysheniya nadyezhnosti i sovershenstvovaniya systemy remontov paroturbinnnykh ustanovok v usloviyakh ekspluatatsii : dis. ... d-ra tekhn. nauk 05.04.12* [Development, approbation and implementation of methods to improve reliability and improve the system of repairs of steam turbine units under operating conditions: dis. ... Dr. Techn. Sciences : 05.04.12]. Ekaterinburg, 2015. 457 p.
2. Shelepov I. G., Arkad'ev B. A., Ioffe V. Yu., Nechuiviter M. M. K opredeleniyu skorosti izmeneniya davleniya v deayeratorakh pri peremennykh rezhimakh raboty turbiny [On determining the rate of change of pressure in deaerators under variable operating conditions of a turbine]. *Yenergeticheskoe mashinostroenie : Sb. nauch. trudov.* [Energetic Engineering: Coll. Sci. Works]. Kharkov, Vysshaya shkola Publ., 1980, vol. 29, pp. 85–90.
3. Shelepov I. G., Nechuiviter M. M., Arkad'ev B. A. K vyboru mesta vklucheniya deayeratorov paroturbinnnykh ustanovok [On the choice of the installation site for steam turbine deaerators]. *Matematicheskie modeli protsessov i konstruktsiy yenergeticheskikh i transportnykh turbinnnykh ustanovok v sistemakh ikh avtomatizirovannogo proektirovaniya : Sb. nauch. trudov* [Mathematical modeling of processes and design of power and transport turbine installations in their computer-aided design systems: Coll. Sci. Works]. Kharkov, IPMASH AN USSR Publ., 1985, vol. I, pp. 182–183.
4. Arkad'ev B. A., Shelepov I. G., Nechuiviter M. M. Predotvrashhenie vskipaniya v pitatel'nom nasose, pri sbrose nagruzki turbiny [Preventing the effervescence in the nutrient pump when discharging the load of the turbine]. *Teploenergetika* [Thermal power engineering]. 1985, no. 2, pp. 40–43.
5. Nechuiviter M. M. K voprosu metodiki vybora optimal'nogo davleniya v deayeratorakh paroturbinnnykh ustanovok [On the question of the technique of choosing the optimal pressure in deaerators of steam turbine plants]. *Matematicheskie modeli protsessov i konstruktsiy yenergeticheskikh i transportnykh turbinnnykh ustanovok v sistemakh ikh avtomatizirovannogo proektirovaniya : Sb. nauch. trudov* [Mathematical modeling of processes and design of power and transport turbine installations in their computer-aided design systems: Coll. Sci. Works]. Kharkov, IPMASH AN USSR Publ., 1988, vol. II, pp. 111.
6. Nechuiviter M. M., Shelepov I. G., Arkad'ev B. A., Ioffe V. Yu. *Sposob regulirovaniya rezhima termicheskogo deayeratora* [Method for regulating the thermal deaerator mode]. Patent USSR, no. 4277113 / 24-06, 1990.
7. Arkad'ev B. A., Nechuiviter M. M., Ioffe V. Yu. *Deayeratsionno-pitel'naya ustanovka* [Deaeration-feed installation]. Patent USSR, no. 4252188 / 24-06, 1989.
8. Arkad'ev B. A., Nechuiviter M. M. *Ustroystvo dlya zashchity ot sryva pitatel'nogo nasosa teplovykh yelektrostantsiy* [Device for protection against failure of the feed pump of thermal power plants]. Patent USSR, no. 4867870/29, 1993.
9. Nechuiviter M. M., Arkad'ev B. A., Shelepov I. G. *Doslidzhennya i optymizatsiya zminnykh i perekhidnykh rezhymiv roboty yelementiv teplovykh skhem turboustanovok : monografiya* [Research and optimization of variable and transient modes of the units of thermal circuits of turboinstallations: monography]. Kharkiv, UIPA Publ., 2006. 98 p.
10. Nechuiviter M. M., Shelepov I. G. *Prystriy dlya vymiryuvannya dynamichnogo kavitatsiynogo zapasu zhyvylnogo nagnitacha* [A device for measuring dynamical cavitation stock of feeding supercharger]. Patent UA, no. 84356, 2013.
11. Nechuiviter M. M., Shelepov I. G. Pidvyshchennya nadiynosti yekspluatatsiyi zhyvylnykh nasosiv deayeratsiynykh ustanovok paroturbinnnykh blokv yelektrostantsiy [Improving reliability of feed pumps of deaeration installations of steam units of power plants]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Yenergetychni ta teplotekhnichni protsesy ta ustatkuvannya* [Bulletin of NTU «KhPI» Series: Power and thermal processes and equipment]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 15, pp. 151–155.
12. Gladyshev G. P., Aminov R. Z., Gurevich V. Z. *Nadyezhnost' teployenergeticheskogo oborudovaniya TYES i AYES : ucheb. posobie dlya teployenergeticheskikh i yenergomashinostroitel'nykh vuzov* [Reliability of heat and power equipment of TPPs and nuclear power plants: textbook for heat and power engineering and machine-building universities]. Ed. Andriushchenko A. I. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 303 p.

Поступила (received) 22.03.2017

Підвищення надійності експлуатації живильних насосів паротурбінних установок теплових та атомних електростанцій / М. М. Нечуйвітер // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Повышение надёжности эксплуатации питательных насосов паротурбинных установок тепловых и атомных электростанций / М. М. Нечуйвтер // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Improving exploitation reliability of feed pumps of steam turbine installations of thermal and nuclear power plants / M. M. Nechuiviter // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 81 – 86. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Нечуйвітер Марія Михайлівна – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

Нечуйвтер Мария Михайловна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

Nechuiviter Maria Michailivna – Candidate of Engineering Sciences, Senior Researcher, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

УДК 519.6

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**КОЛИВАННЯ КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ**

Розглянуто рух нелінійного осцилятора з кубічною характеристикою пружності, спричинений миттєво прикладеною сталою силою або прямокутним силовим імпульсом скінченної тривалості. Побудовано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку. У першому варіанті переміщення осцилятора у часі виражено через еліптичний косинус, а в другому для розрахунку переміщення задіяно Атеб-синус. З метою спрощення розрахунків, запропоновано компактні апроксимації, які з похибкою до одного відсотка виражають Атеб-синус через елементарні функції. Встановлено, що коефіцієнт динамічності системи при дії миттєво прикладеної сили дорівнює $\sqrt[3]{4} < 2$. У випадку навантаження осцилятора прямокутним імпульсом коефіцієнт динамічності залежить від тривалості дії імпульса і теж залишається меншим двох. Знайдено тривалість імпульса, коли буде максимальна амплітуда вільних коливань, спричинених імпульсом. Вона залежить не лише від власних параметрів осцилятора, а й від величини прикладеної сили, чого немає в лінійних системах. Наведено приклади розрахунків та відповідні графіки.

Ключові слова: осцилятор, кубічна характеристика пружності, дія силового імпульса, аналітичний розв'язок, еліптичний косинус, Атеб-синус.

Рассмотрено движение нелинейного осциллятора с кубической характеристикой упругости, вызванные мгновенно приложенной постоянной силой или прямоугольным силовым импульсом конечной протяженности. Построено два варианта аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. В первом варианте перемещения осциллятора во времени выражено через эллиптический косинус, а во втором для расчета перемещения задействовано Атеб-синус. С целью упрощения расчетов, предложено компактные аппроксимации, которые с погрешностью менее одного процента выражают Атеб-синус через элементарные функции. Установлено, что коэффициент динамичности системы при действии мгновенно приложенной силы равен $\sqrt[3]{4} < 2$. В случае нагружения осциллятора прямоугольным импульсом, коэффициент динамичности зависит от продолжительности действия нагрузки и также остается меньшим двух. Найдена продолжительность импульса, когда будет максимальной амплитуда свободных колебаний, вызванных импульсом. Она зависит не только от собственных параметров осциллятора, но и от величины приложенной силы, чего нет в линейных системах. Приведены примеры расчетов и соответствующие графики.

Ключевые слова: осциллятор, кубическая характеристика упругости, действие силового импульса, аналитическое решение, эллиптический косинус, Атеб-синус.

The motion of a nonlinear oscillator with a cubic elasticity characteristic caused by an instantaneously applied constant force or a rectangular force pulse of finite length is considered. Two variants of the analytical solution of a second-order nonlinear differential equation are constructed. In the first variant, the oscillator movement in time is expressed through an elliptical cosine, and in the second one, the Атеб-sine is used to calculate the displacement. In order to simplify the calculations, we introduce compact approximations which, with an error of less than one percent, express the Атеб-sine through elementary functions. It is established that the coefficient of dynamism of the system under the action of the instantaneously applied force is $\sqrt[3]{4} < 2$. In the case of an oscillator loaded with a rectangular pulse, the coefficient of dynamism depends on the duration of the load and also remains smaller than two. The pulse duration causing the maximum amplitude of free oscillations is found. It depends not only on the proper parameters of the oscillator, but also on the magnitude of the applied force, which is not the case with the linear systems. Examples of calculations and corresponding graphs are given.

Key words: oscillator, cubic characteristic of elasticity, action of force pulse, analytical solution, elliptic cosine, Атеб-sine.

Вступ. Дослідження особливостей нелінійних механічних коливань з великими амплітудами відноситься до актуальних науково-прикладних задач, бо такі коливання можуть призвести до руйнування конструкції або передчасної втрати її працездатності. Тому, незважаючи на тривалу історію та значні досягнення в цій галузі механіки [1], продовжують активно проводитись подальші дослідження нелінійних коливань. Так за останнє десятиріччя, крім багатьох наукових статей, вийшли монографічні видання [2–5]. Огляд робіт, які стосуються коливань нелінійних систем змінної маси зроблено в [6]. Коливання систем змінної маси за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. У більшості відомих публікацій досліджували нелінійні коливання, збуджені силовими періодичними навантаженнями. Значно менше вивчені нелінійні коливання, спричинені короточасними імпульсами типу ударних навантажень. Саме цим і зумовлена мета роботи.

Метою даної статті є виведення та апробація розрахункових формул для обчислення переміщень кубічно нелінійного осцилятора при дії силового імпульса.

Ставиться задача побудови аналітичних розв'язків задачі Коші в спеціальних функціях та використання їх для аналізу впливу різних чинників на особливості руху осцилятора.

При побудові розв'язків спочатку розглянемо рух, спричинений миттєво прикладеною силою сталої величини (ступінчасте навантаження), а потім розглянемо більш складну задачу руху при дії силового імпульса скінченної тривалості.

Коливання при ступінчастому навантаженні. Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = PH(t), \quad (1)$$

де m – маса осцилятора; $c > 0$ – характеристика його нелінійної пружності; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда; t – час.

Початковими умовами до (1) приймаємо:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Уведенням позначень $\dot{x} = v$; $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ рівняння (1) зводимо до такого:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{m} (P - cx^3).$$

Його інтегралом є:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{x \left(\frac{4P}{c} - x^3 \right)}. \quad (3)$$

При визначенні сталої інтегрування в (3) скористалися умовами (2).

Подальше інтегрування виразу (3), з урахуванням (2), дає:

$$\sqrt{\frac{c}{2m}} t = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^3 - y^3)}}. \quad (4)$$

Тут $a = \sqrt[3]{\frac{4P}{c}} = \sqrt[3]{4} x_{CT}$, де $x_{CT} = \sqrt[3]{\frac{P}{c}}$ – переміщення осцилятора при статичному навантаженні силою P .

Із (3) випливає, що $v = 0$ при $x = a$, тобто a – це максимальне динамічне відхилення осцилятора від положення $x = 0$. Тому коефіцієнт динамічності становить:

$$K_g = \frac{\max(x)}{x_{CT}} = \frac{a}{x_{CT}} = \sqrt[3]{4} < 2.$$

Переходом до нової змінної інтегрування $y = u^2$, $dy = 2u du$, замість (4), одержуємо вираз:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \omega t, \quad (5)$$

у якому $\omega = a\sqrt{c/(8m)}$.

Співвідношення (5) дає можливість знайти час, коли досягається максимальне відхилення від початкового положення. Поклавши в (5) $x = a$, $t = t_*$, маємо:

$$\omega t_* = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I.$$

Цей інтеграл виражається через *гамма-функцію* [9, с. 53]: $I = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(2/3)} \approx 1,21433$.

Отже,

$$\omega t_* \approx 1,21433.$$

Підкреслимо, що час t_* залежить від значення a , яке в свою чергу залежить від P . Збільшення сили P приводить до зменшення t_* .

Із довідника [10, с. 133] відомо, що коли:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \zeta, \quad (6)$$

$$\text{то } \zeta = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ).$$

$$\text{Тут } F(\varphi, \sin 15^\circ) - \text{неповний еліптичний інтеграл першого роду, а } \varphi = \arccos \frac{(\sqrt{3}+1)z^2-1}{(\sqrt{3}-1)z^2+1}.$$

Розв'язавши цю залежність відносно z^2 , одержуємо:

$$z^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) \cos \varphi}, \quad (7)$$

причому $\cos \varphi = \text{cn}(2\sqrt[4]{3}\zeta, \sin 15^\circ)$ – еліптичний косинус Якобі [9].

Щоб далі використати (7), проведемо наступне перетворення в (6):

$$\omega t = \int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}}.$$

Звідки випливає, що:

$$\int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I - \omega t. \quad (8)$$

Вирази (6) і (8) співпадають, коли $\sqrt{x/a} = z$; $I - \omega t = \zeta$.

Тому, враховуючи парність еліптичного косинуса, одержуємо формулу переміщень осцилятора на проміжку $t \in [0; 2t_*]$:

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + \text{cn}(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ)}{\sqrt{3}+1 - (\sqrt{3}-1) \text{cn}(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ)}. \quad (9)$$

Зазначимо, що в [9, с. 101] таблиця неповного еліптичного інтеграла першого роду охоплює лише проміжок $\varphi \in [0; 90^\circ]$. Тому, щоб використати її для обчислення значень еліптичного косинуса в формулі (9), слід урахувати, що:

$$\text{cn}(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = \begin{cases} -\text{cn}(2\sqrt[4]{3}\omega t, \sin 15^\circ), & 0 \leq \omega t < 0,5I; \\ \text{cn}(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ), & 0,5I \leq \omega t \leq 1,5I; \\ -\text{cn}[2\sqrt[4]{3}(2I - \omega t), \sin 15^\circ], & 1,5I \leq \omega t \leq 2I. \end{cases} \quad (10)$$

Крім формул (9) і (10), для розрахунку руху осцилятора можна використовувати і більш сучасну форму розв'язку розглянутої задачі Коші, в якій $x(t)$ виражається через Атеб-синус $Sa(5,1,3\omega t)$.

У відповідності з публікаціями [5, 11, 12] та виразом (5), маємо:

$$\frac{x}{a} = Sa^2(5,1,3\omega t). \quad (11)$$

Якщо прийнято до уваги, що:

$$Sa[5,1,3(2I - \omega t)] = Sa(5,1,3\omega t),$$

то формулу (11) можна задіяти і на проміжку $t \in [0, 2t_*]$, що охоплює перший цикл коливань.

Для спрощення використання формули (11), наводимо апроксимацію Атеб-синуса, яка з похибкою меншою 1 % виражає його значення через елементарні функції:

$$Sa(5,1,3\eta) = \begin{cases} \eta, & 0 \leq \eta < 0,5; \\ 0,5 + 1,0225(\eta - 0,5) - 0,2625(\eta - 0,5)^2, & 0,5 \leq \eta \leq 0,9; \\ 1 - 0,4 \sin^2[1,9365(I - \eta)], & 0,9 < \eta \leq I. \end{cases} \quad (12)$$

Якщо $I \leq \eta \leq 2I$, то треба врахувати, що

$$Sa(5,1,3\eta) = Sa[5,1,3(2I - \eta)].$$

З метою перевірки адекватності виведених розрахункових формул, розглянемо приклади розрахунків.

Приклад 1. Обчислимо x/a , коли $\omega t = 0,7 > 0,5I$. Для нього $2\sqrt[4]{3}|I - \omega t| \approx 1,3538$ і в таблиці [9, с. 101] йому відповідає $\varphi \approx 76,47^\circ$. Тому $cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = \cos \varphi \approx 0,234$. Підстановка цього значення еліптичного косинуса в (9) дає $x/a \approx 0,482$. Якщо проводити розрахунок з використанням (11) і (12), то теж одержимо $x/a \approx 0,482$.

Приклад 2. Знайдемо двома способами x/a , коли $\omega t = 2,1 > 1,5I$. Для нього $2\sqrt[4]{3}|2I - \omega t| \approx 0,8651$. В таблиці еліптичного інтеграла йому відповідає $\varphi \approx 49,208^\circ$. Отже,

$$cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = -\cos \varphi \approx -0,653$$

і по формулі (9) одержуємо $x/a \approx 0,108$. Розрахунок з використанням (11) і (12) дає: $\eta = 2I - \omega t \approx 0,3287$; $Sa(5,1,3\eta) \approx 0,329$; $x/a \approx 0,108$. Другим способом одержали попередній результат без використання таблиць.

Формули (9), (11) приводять до графіка, який зображено на рис. 1.

Із графіка видно, що час перебування осцилятора при $x > x_{CT}$ значно менший, ніж час перебування при $x < x_{CT}$. Ця особливість нелінійних коливань не властива лінійним системам, де графік переміщень $x(t)$ перетинає пряму $x = x_{CT}$ через рівні проміжки часу.

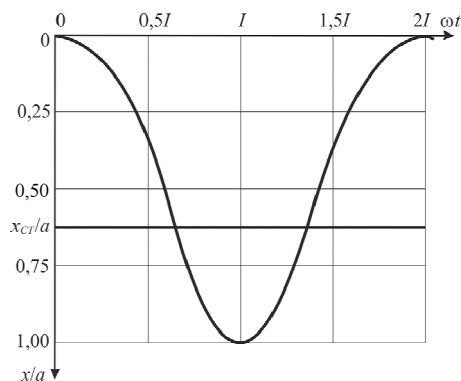


Рис. 1 – Переміщення осцилятора, спричинені миттєво прикладеною сталою силою.

Коливання осцилятора при дії силового імпульса скінченної тривалості. Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = P[H(t) - H(t - t_1)]. \quad (13)$$

Тут t_1 – час дії сили P .

Зберігаємо початкові умови (2).

Розглядаємо рух, коли $t_1 \in (0, 2t_*)$, що дозволяє з'ясувати всі особливості коливань.

Прийнявши в (9) і (11) $t = t_1$, знаходимо переміщення осцилятора $x_1 = x(t_1)$ в момент припинення дії прикладеної сили:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{1 + cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1|, \sin 15^\circ)}{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1|, \sin 15^\circ)} \quad (14)$$

або

$$\frac{x_1}{a} = Sa^2(5,1,3\omega t_1). \quad (15)$$

Швидкість руху осцилятора в цей момент часу становить:

$$v_1 = v(t_1) = \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{x_1(a^3 - x_1^3)}.$$

При $t \geq t_1$, рівняння руху (13) буде однорідним і треба розв'язати наступну задачу Коші:

$$m\ddot{x} + cx^3 = 0, \quad (16)$$

$$x(t_1) = x_1, \quad v(t_1) = \dot{x}(t_1) = v_1. \quad (17)$$

Переходом від похідної по t до похідної по x , рівнянню (16) надаємо форму:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^3. \quad (18)$$

Проінтегрувавши (18), з урахуванням (17), отримуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{a_*^4 - x^4}. \quad (19)$$

Тут $a_* = \lambda a$; $\lambda = \sqrt[4]{x_1/a}$.

Далі розрізняємо два випадки значень t_1 . У першому приймаємо $t_1 \in (0, t_*)$. Враховуючи, що для вказаних

t_1 , $v > 0$, проводимо подальше інтегрування виразу (19). Це дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^4 - y^4}} = \sqrt{\frac{c}{2m}} (t - t_1),$$

що після заміни $y = a_* u$, $dy = a_* du$ приймає вигляд:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_* (t - t_1). \quad (20)$$

Тут $\omega_* = a_* \sqrt{c/(2m)} = 2\lambda\omega$.

Використовуючи (20), можна знайти час $t = t_2$, коли зупиниться осцилятор, відхилившись на a_* від положення $x = 0$. Так, задавши в (20), $x = a_*$, $t = t_2$, отримуємо:

$$\omega_* (t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_*.$$

Звідки випливає, що:

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \text{ або } \frac{t_2}{t_1} = \frac{I_*}{2\lambda\omega t_1} + 1. \quad (21)$$

Значення I_* можна знаходити за допомогою таблиці *неповного еліптичного інтеграла першого роду*, бо в [9, с. 102]:

$$I_* = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\psi_*, \sin 45^\circ).$$

причому $\psi_* = \arccos(x_1/a_*)$.

Щоб вивести залежність $x(t)$, при $t \in [t_1; t_2]$, виразу (20) надаємо форму:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_* (t - t_1).$$

Тому,

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* - \omega_* (t - t_1) = \tau \quad (22)$$

і, згідно з [10, с. 126], при $t \in [t_1; t_2]$:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot \operatorname{cn}(\sqrt{2}\tau, \sin 45^\circ). \quad (23)$$

Отже, переміщення осцилятора, на вказаному проміжку часу, теж виражається через еліптичний косинус, який зручно обчислювати за допомогою інтерполяції табличних даних в [9].

Для розрахунку переміщень можна також використовувати періодичні Атеб-функції [5, 11, 12]. Із (22) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot \operatorname{Sa}[3, 1, 2(J - \tau)], \quad (24)$$

$$\text{де } J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt[4]{4} \frac{\Gamma^2(5/4)}{\Gamma(3/2)} \approx 1,311029$$

Значення Атеб-синуса в (24), з похибкою меншою 1 % надає апроксимація:

$$\operatorname{Sa}(3, 1, 2\eta) = \begin{cases} \eta, & 0 \leq \eta < 0,4; \\ 0,399 + 1,005(\eta - 0,4) - 0,2(\eta - 0,4)^2, & 0,4 \leq \eta \leq 0,8; \\ 1 - 0,6667 \sin^2[1,2247(J - \eta)], & 0,8 < \eta \leq J. \end{cases} \quad (25)$$

Якщо $J \leq \eta \leq 2J$, то $\operatorname{Sa}(3, 1, 2\eta) = \operatorname{Sa}[3, 1, 2(2J - \eta)]$ і залишається в силі апроксимація (25).

Для перевірки вірогідності виведених формул проведемо числові розрахунки.

Приклад 3. Обчислимо максимальне відхилення a_* осцилятора і час його досягнення t_2 при дії імпульса, у якого $\omega t_1 = 0,8$; $2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1| \approx 1,0906$. У табл.іці [9, с. 101] цим числовим даним відповідає $\varphi \approx 61,833^\circ$. Тоді,

$$\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{3}|I-\omega t|, \sin 15^\circ\right)=\cos \varphi \approx 0,472$$

і по формулі (14) одержуємо $x_1/a \approx 0,617$. Якщо проводити розрахунок по формулах (12), (15), то $\eta = 0,8$; $Sa(5,1,3\eta) \approx 0,783$; $x_1/a \approx 0,613$, що не суттєво відрізняється від попереднього результату, для якого:

$$\lambda = \sqrt[4]{0,617} \approx 0,886; x_1/a_* = x_1/(\lambda a) \approx 0,696; \psi_* \approx 45,862^\circ.$$

Методом лінійної інтерполяції табличних даних [9, с. 102], знаходимо, що: $F(\psi_*, \sin 45^\circ) \approx 0,843$; $I_* \approx 0,596$. Тоді, згідно з (21), $\omega t_2 = I_*/(2\lambda) + \omega t_1 \approx 1,136$, тобто $t_2/t_1 \approx 1,420$. Знайдемо далі двома способами x/a , коли $\omega t = 0,9$. В цей момент часу $\tau = I - 2\lambda\omega(t - t_1) \approx 0,419$; $\sqrt{2}\tau \approx 0,592$. Для цього значення в таблиці [9, с. 102]: $\varphi \approx 33,0^\circ$. Тому $\operatorname{cn}(\sqrt{2}\tau, \sin 45^\circ) = \cos \varphi \approx 0,839$ і по формулі (23) одержуємо $x/a \approx 0,743$. Якщо проводити обчислення по формулах (24), (25), то $\eta = J - \tau \approx 0,892$; $Sa(3,1,2\eta) \approx 0,839$; $x/a \approx 0,743$. Як бачимо, результати розрахунків переміщення осцилятора двома способами співпадають до трьох цифр після коми.

Подальший рух осцилятора при $t > t_1$ зводиться до вільних коливань його з амплітудою $amx = a_*$ відносно положення $x = 0$. Важливо, що при цьому амплітуда a_* залежить від тривалості прикладеного імпульсу. Вона найбільша, коли $t_1 = t_*$ і становить $a_* = a = \sqrt[3]{4P/c}$. Тому, при тривалості $t_1 = t_*$, відбувається найбільше розгойдування коливань.

Перейдемо до другого випадку дії імпульсу, коли $t_1 \in [t_*, 2t_*]$ і $v \leq 0$. Взявши знак мінус перед радикалом в (19), після інтегрування цього виразу, отримуємо:

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^4 - y^4}} = \sqrt{\frac{c}{2m}}(t - t_1).$$

Заміною $y = a_*u$, $dy = a_*du$ йому надаємо наступний вигляд:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_*(t - t_1). \quad (26)$$

Тут $0 \leq x \leq x_1$.

Поклавши в (26) $t = t_2$, $x = 0$, знаходимо час t_2 , коли осцилятор повертається у вихідне положення, яке він мав при $t = 0$. При цьому маємо рівняння:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = J - I_*.$$

Із нього випливає, що:

$$\omega_* t_2 = J - I_* + \omega_* t_1 \text{ або } \omega t_2 = \frac{1}{2\lambda}(J - I_*) + \omega t_1. \quad (27)$$

Щоб вивести залежність $x(t)$ на проміжку $t \in [t_1; t_2]$ проведемо наступне перетворення в (26):

$$\omega_*(t - t_1) = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - I_*.$$

Звідси отримуємо:

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* + 2\omega\lambda(t - t_1) = \xi. \quad (28)$$

Тому, згідно з [10, с. 126]:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot \operatorname{cn}(\sqrt{2}\xi, \sin 45^\circ). \quad (29)$$

Якщо виражати розв'язок через періодичні Ateb-функції, то у відповідності з (28):

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa[3, 1, 2(J - \xi)]. \quad (30)$$

Тоді, для обчислень переміщень осцилятора, замість таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, зручно використовувати апроксимацію (25).

Формули (29) і (30) дають можливість обчислювати переміщення, які попадають в проміжок $x \in [0; x_1]$.

Приклад 4. Обчислимо час повернення осцилятора у вихідне положення $x = 0$, коли $\omega t_1 = 2 > 1,5I$. Для нього знаходимо, що: $2\sqrt[4]{3}|2I - \omega t_1| \approx 1,1283$ і в таблиці [9, с. 101] йому відповідає $\varphi \approx 63,933^\circ$, $\cos \varphi \approx 0,439$. Отже, $\text{cn}(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = -\cos \varphi \approx -0,439$. Подальший розрахунок по формулі (14) дає $x_1/a \approx 0,184$. Другий варіант розрахунку по формулах (12), (15) приводить до наступних результатів:

$$\eta = 2I - \omega t_1 \approx 0,4287; \text{Sa}(5,1,3\eta) \approx 0,4287; x_1/a \approx 0,184.$$

Як бачимо, обидва способи розрахунку дають однакові наближені значення x_1/a . Використовуючи обчислене відношення x_1/a , маємо:

$$\lambda = \sqrt[4]{x_1/a} \approx 0,655; a_* = \lambda a \approx 0,655a; x_1/a_* = (x_1/a)/\lambda \approx 0,281; \psi_* \approx 73,680^\circ.$$

По таблиці [9, с. 102] знаходимо, що $F(\psi_*, \sin 45^\circ) \approx 1,456$; $I_* \approx 1,030$ і, згідно з (27), $\omega t_2 \approx 2,214$. В цей момент часу $x = 0$, тобто осцилятор повернеться у вихідне положення. З'ясуємо далі яким було x/a , коли $\omega t = 2,1$. Йому відповідає: $\xi = 1,161$; $\sqrt{2}\xi \approx 1,642$. По таблиці [9, с. 102] знаходимо, що $\varphi \approx 81,375^\circ$. Тоді $\text{cn}(\sqrt{2}\xi, \sin 45^\circ) = \cos \varphi \approx 0,150$ і за формулою (29) одержуємо $x/a \approx 0,098$. Додатковий розрахунок за формулами (25) і (30) дає:

$$\eta = J - \xi \approx 0,150; \text{Sa}(3,1,2\eta) \approx 0,150; x/a \approx 0,089,$$

що співпадає з попереднім наближенням результатом.

Після повернення осцилятора у вихідне положення, подальший його рух – це вільні коливання відносно положення $x = 0$, спричинені початковою швидкістю:

$$v_0 = -\sqrt{\frac{c}{2m}}a_*^2 = -\sqrt{\frac{c}{2m}}\lambda^2 a^2 = -\sqrt{\frac{c}{2m}}a^2 \sqrt{\frac{x_1}{a}}.$$

Якщо $\omega t_1 = 2I$, то згідно з (14) або (15), відношення $x_1/a = 0$. Тому, при такій тривалості імпульсу швидкість $v_0 = 0$ і повернувшись у вихідне положення, осцилятор повністю припинить свій рух, тобто вільних коливань не буде.

Як бачимо, тривалість імпульсу суттєво впливає на коефіцієнт динамічності $K_g = x_{\max}/x_{CT}$ і на амплітуди вільних коливань, після припинення дії імпульсу.

На рис. 2 показана залежність K_g від тривалості імпульсу.

Коефіцієнт K_g зростає на проміжку $\omega t_1 \in [0; I]$, а при $\omega t_1 > I$ приймає сталі значення $K_g = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$.

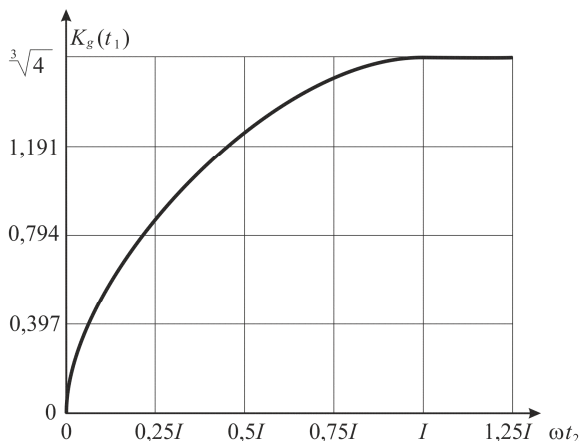


Рис. 2 – Залежність коефіцієнта динамічності від тривалості імпульсу.

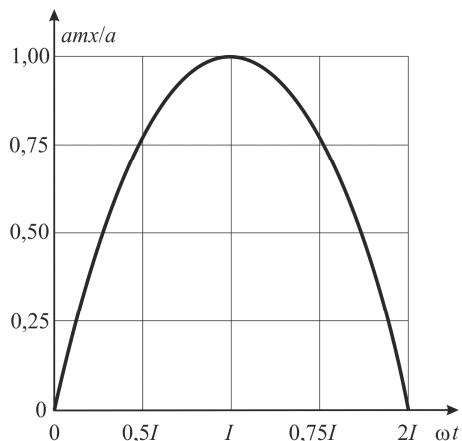


Рис. 3 – Залежність амплітуд вільних коливань від тривалості імпульсу.

Амплітуди вільних коливань осцилятора, після припинення дії імпульсу, теж залежать від ωt_1 . Ця залежність amx від ωt_1 показана на рис. 3.

На проміжку $\omega t_1 \in (0; I)$ маємо зростання амплітуд вільних коливань, спричинених імпульсом, а на проміжку $\omega t_1 \in (I; 2I)$ вони спадають і дорівнюють нулю, коли $\omega t_1 \in 2I$.

Висновки. Коефіцієнт динамічності кубічно-нелінійного осцилятора при дії миттєво прикладеної сили (ступінчастого імпульсу) дорівнює $\sqrt[3]{4}$. Він менший, ніж у лінійного осцилятора.

Переміщення осцилятора суттєво залежать від тривалості дії силового імпульсу і виражаються через еліп-

тичний косинус Якобі або через Ateb-синус. Це дає можливість обчислювати їх за допомогою відомих таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду, або використовувати запропоновані апроксимації періодичних Ateb-функцій.

Встановлено такі тривалості дії імпульсу, при яких відбувається розгойдування коливань з екстремальними амплітудами. У випадку мінімальної нульової амплітуди, з припиненням дії імпульсу, осцилятор буде в стані спокою.

Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем // Том 1 : Модели, методы, явления. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Кузнецов А. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. – Москва : Физматлит, 2002. – 292 с.
4. Митропольський Ю. А. Избранные труды в 2-х томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
5. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – Pp. 56 – 74.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осциллятора. – Харьков : Мисъдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харьков : Мисъдрук, 2016. – 264 с.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды // Элементарные функции. – Москва : Наука, 1981. – 800 с.
11. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
12. Сокол Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 7. – С. 55 – 58.

References (transliterated)

1. Larin A. A. Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebaniy [Essays on the history of development of mechanical oscillation theory]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Ju. V. Nelineynaya dinamika uprugikh system. Tom 1: Modeli, metody, yavleniya [Nonlinear dynamics of elastic systems. Volume 1: Models, methods, phenomena]. Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
3. Kuznetsov A. P., Ryskin N. M. Nelineynye kolebaniya [Nonlinear oscillations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 292 p.
4. Mitropol'skiy Yu. A. Izbrannye trudy v 2-kh tomakh [Selected works in 2 volumes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
5. Pukach P. Ya. Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh system [Qualitative methods for studying nonlinear oscillations of systems]. Lviv, L'viv'ska politekhnika Publ., 2014. 288 p.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2012, vol. 6, no. 1. pp. 56–74.
7. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Metod VBK v raschetakh nestatsionarnykh kolebaniy ostsillyatora [WKB-method for computing non-stationary oscillations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2014. 264 p.
8. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V., Tyshenko L. M. Dynamika dysypatyvnykh ostsillyatoriv [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
9. Yanke E., Yemde F., Lyosh F. Spetsial'nye funktsii [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Yelementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
11. Gritsik V. V., Nazarkevich M. A. Matematychni modeli alorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-function]. Dopovidi Natsional'noi akademii nauk Ukrainy [Reports of the National academy of science of Ukraine]. Kyiv, 2007, no. 12, pp. 37–42.
12. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut nelineyni kolyvannya odnovimirnih sredovyshh [On application of Ateb-functions for constructing solutions for some equations describing nonlinear oscillations of two-dimensional media]. Dopovidi Natsional'noi akademii nauk Ukrainy [Reports of the National academy of science of Ukraine]. Kyiv, 1997, no. 7, pp. 55–58.

Надійшла (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Колебания кубически нелинейного осциллятора, вызванные импульсной нагрузкой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Oscillations of a cubic nonlinear oscillator caused by an impulse load / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 86 – 94. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Phd in physics and mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 519.6

Ю. І. ПЕРШИНА, В. О. ПАСІЧНИК

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ДАНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРЯМОКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Робота присвячена обґрунтуванню методу відновлення розривної функції двох змінних за інтерполяційними даними та алгоритму знаходження ліній розриву, за допомогою розривних інтерполяційних чи апроксимаційних білінійних сплайнів, використовуючи ректангуляцію області. Інформацією про функцію є її односторонні значення у вузлах прямокутної сітки, причому лінії розриву наперед невідомі та не співпадають з лініями ректангуляції. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття ε – неперервності функції двох змінних. На його основі розроблено алгоритм виявлення ліній розриву першого роду білінійної функції двох змінних, використовуючи розривний апроксимаційний білінійний сплайн. Викладений метод дозволяє визначити лінії розриву експериментально заданої розривної функції та обрати оптимальні вузли сітки наближучого розривного білінійного сплайну. Розглянуто приклади, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Вподальшому планується розробити узагальнюючий алгоритм відновлення розривної функції, розриви якої будуть лежати на більш складних лініях.

Ключові слова: розривна білінійна інтерполяція, лінії ε – розриву, розривна апроксимація.

Работа посвящена обоснованию метода восстановления разрывной функции двух переменных по интерполяционным данным и алгоритма нахождения линий разрыва, с помощью разрывных интерполяционных или аппроксимационных билинейных сплайнов, используя ректангуляцию области. Информацией о функции является ее односторонние значения в узлах прямоугольной сетки, причем линии разрыва заранее неизвестны и не совпадают с линиями ректангуляции. Доказаны теоремы о необходимом количестве итераций предложенного метода для достижения нужной точности. Введено понятие ε – непрерывности функции двух переменных. На его основе разработан алгоритм выявления линий разрыва первого рода билинейной функции двух переменных, используя разрывной аппроксимационный билинейный сплайн. Изложенный метод позволяет определить линии разрыва экспериментально заданной разрывной функции и выбрать оптимальные узлы сетки приближающего разрывного билинейные сплайна. Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода. Далее планируется разработать обобщающий алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой будут лежать на более сложных линиях.

Ключевые слова: разрывная билинейная интерполяция, линии ε – разрыва, разрывная аппроксимация.

The paper deals with justification of the method for reconstructing a discontinuous function of two variables by interpolation data and an algorithm for finding the lines of discontinuity, using discontinuous interpolation or approximation bilinear splines and the region's rectangulation. Information about the function is its one-way values at the nodes of the rectangular grid, and the discontinuous lines are not known in advance and do not coincide with the lines of rectangulation. Theorems on the necessary number of iterations of the proposed method for achieving the required accuracy are proved. The concept of ε – continuity of a function of two variables is introduced. On the basis of this algorithm, an algorithm for detecting the lines of discontinuity of the first kind of a bilinear two variables function using a discontinuous approximate bilinear spline was developed. The proposed method makes it possible to determine the lines of discontinuity of an experimentally given discontinuous function and to select the optimal grid nodes for the approximating discontinuous bilinear spline. The examples that confirm the effectiveness of the proposed method are considered. Further, it is planned to develop a general algorithm for restoring a discontinuous function, the discontinuities of which lie on more complex lines.

Key words: discontinuous bilinear interpolation, ε – discontinuous lines, discontinuous approximation.

Вступ. Впродовж багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, наводнення, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

© Ю. І. Першина, В. О. Пасічник, 2017

Для багатьох промислових підприємств наявність засобів неруйнівного контролю якості продукції на різних етапах її виробництва є актуальним завданням. Рентгенівські засоби неруйнівного контролю не мають альтернативи в тих випадках, де параметрами контролю якості виробів можуть бути внутрішні геометричні розміри складових частин виробів, просторове розташування внутрішніх деталей, структура матеріалів і наповнювачів, наявність домішок, раковин або тріщин. Необхідно відзначити, що при неруйнівному контролі великогабаритних виробів (з радіаційної товщиною більшою 1000 мм) не можуть бути застосовані традиційні методи плівкової рентгенографії через високу вартість витратних матеріалів і тривалого часу контролю. Найбільш перспективними, в даному випадку, є методи цифрової радіографії, особливо обчислювальна томографія. Обчислювальні томографічні системи неруйнівного контролю на сьогодні є єдиними технічними засобами, які дозволяють визначити місце розташування і геометричні розміри прихованих дефектів в контрольованому виробі, а також контроль виробу в реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції, оскільки вказані явища відіграють величезну роль в житті людства. Тому кожний крок, направлений на створення теоретичного підґрунтя опису вказаних явищ та процесів, без сумніву, може значно змінити подальший розвиток людства і всієї планети в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах, наприклад, в роботах [1] – [3]. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Для того, щоб розв'язувати широке коло наукових та технічних задач, корисні рівномірні наближення негладкими та розривними функціями. Робота *Попова Б. А.* [4] присвячена рівномірному наближенню раціональними чебишевськими розривними, неперервними та інтерполяційними сплайнами неперервних функцій. Але ця робота не відповідає на питання, що робити з розривною функцією. В своїх роботах *Петухов А. П.* [5] досліджує наближення розривних функцій в метриці Хаусдорфа. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як *Сергієнко І. В., Дейнека В. С., Скопечкий В. В., Литвин О. М.* та інші [6] – [11]. В роботах *А. Л. Агеева, Т. В. Антонової* [12] – [15] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного. Згадані методи наближення розривних функцій в якості вхідної інформації використовують інтерполяційні дані функції. Але є багато технічних і наукових галузей, в яких вирішуються задачі відновлення за відомими даними у вигляді проекції функції вздовж системи ліній або площин (дистанційні методи). Саме таким методам були присвячені розробки авторів статті. Були розроблені нові інформаційні оператори – *інтерлінація, інтерфлетація, інтерлокація, інтерстрінація*. Але практично не було ще достатньо приділено уваги використанню методів дослідження неоднорідних відновлюваних тіл.

Якщо наближувати розривну функцію неперервними тригонометричними функціями, виникає явище Гіббса. Для боротьби із згаданим явищем були розроблені різні фільтри [16] – [18]. В останні кілька десятиліть були розроблені методи, які пом'якшують явище Гіббса в розкладанні Фур'є від розривних функцій. Але повного видалення явища Гіббса ні фільтри, ні згадані методи не дають. В роботах [19, 20] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонійні вейвлети, які мають нескінченний носій. Такого типу конструкції в загальні кажучи можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагають додаткового аналізу отриманих результатів. Існує цикл робіт, в яких розв'язується задача відновлення розривів саме в комп'ютерній томографії, істотно використовуючи стандартні методи, а саме пряме та обернене перетворення Радона. Першою такою роботою є стаття *Vainberg E. I.* [21]. Розвиток цієї методології, а саме розвиток алгоритмічних засобів відновлення множини розривів здійснювали, у рамках локальної томографії, такі дослідники, як *Faridani A., Finch D. V., Ritman E. L., Smith K. T., Louis A. K., Maass P.* Деякі підходи, що дозволяють відновити те тільки множину розривів, але й величини скачків за перетворення Радона, запропоновані в роботах *Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. N., Ramm A. G.* [22]. Як продовження такого підходу за останні 5 років з'явився цикл робіт новосибірських вчених [23], [24]. Ці роботи базуються на використанні прямого та оберненого перетворення Радона. Як відомо, пряме перетворення Радона є інтегральним перетворенням, і за результатом цього перетворення отримуються функції, які мають більш високу гладкість, ніж перетворювана функція. Тобто в результаті задача при такому підході формулюється наступним чином: знайти оригінальну функцію з розривами першого роду на деякій системі ліній за допомогою інформації, яка може і не містити цих розривів. В статтях [25, 26] авторами розроблені методи, що пом'якшують явище Гіббса, але повністю його не видаляють.

В роботах [27] – [29] авторами запропонований, обґрунтований та досліджений метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε – розриву. В роботі [29] представлений алгоритм виявлення ліній ε – розриву функцій двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів. В даній статті пропонується обґрунтування цього методу у вигляді теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення ліній ε – розриву.

Постановка задачі. Нехай задана білінійна функція двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0, 1]^2$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники)

$$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1.$$

Причому розташування ліній розриву функції $f(x, y)$ невідоме. В якості експериментальних даних будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x, y)$ у кутах заданої прямокутної сітки

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{++} &= f(x_i + 0, y_j + 0), & C_{i,j}^{-+} &= f(x_i - 0, y_j + 0), \\ C_{i,j}^{+-} &= f(x_i + 0, y_j - 0), & C_{i,j}^{--} &= f(x_i - 0, y_j - 0). \end{aligned}$$

Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної білінійної функції $f(x, y)$ та виявити лінії ε – розриву.

Метод виявлення ліній ε – розриву. Нехай в області $D = [0, 1]^2$ задано розривну функцію $f(x, y)$ та деяке розбиття на елементи (прямокутники)

$$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1.$$

Причому розташування ліній розриву функції $f(x, y)$ невідоме. Як експериментальні дані будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x, y)$ у кутах заданої прямокутної сітки:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{++} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y), & C_{i,j}^{-+} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y), \\ C_{i,j}^{+-} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} f(x, y), & C_{i,j}^{--} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i - 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} f(x, y). \end{aligned}$$

Перенумеруємо задані значення матриці C як показано на рис. 1. Тобто, як вхідні дані використовується матриця значень $C_{p,\ell}$, $p = \overline{1, n \cdot m}$, $\ell = \overline{1, 4}$, розривної функції $f(x, y)$, де p – номер прямокутного елемента, що розглядається.

Для подальшого викладення введемо поняття ε – неперервності функції.

Означення 1. Якщо

$C_{i,2}$	$C_{i,4}$
$C_{i,1}$	$C_{i,3}$

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_q + 0} f(x, y) - \lim_{x \rightarrow x_q - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \forall y,$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати ε – неперервною на лінії $x = x_q$, аналогічно, якщо

$$\left| \lim_{y \rightarrow y_s + 0} f(x, y) - \lim_{y \rightarrow y_s - 0} f(x, y) \right| < \varepsilon, \quad \forall x,$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати ε – неперервною на лінії $y = y_s$.

Рис. 1– Формування матриці невідомих значень розривної функції в i – му прямокутному елементі.

Означення 2. Якщо виконуються всі чотири нерівності з означення 1 у точці (x_q, y_s) :

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, & \quad \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \\ \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q + 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, & \quad \left| \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s + 0}} f(x, y) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_q - 0 \\ y \rightarrow y_s - 0}} f(x, y) \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

то функцію $f(x, y)$ будемо називати ε – неперервною в точці (x_q, y_s) .

Означення 3. Якщо $f(x, y) \in \varepsilon$ – неперервною $\forall (x, y) \in \Pi_{i,j}$, то будемо її називати ε – неперервною в усьому прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$.

Розглянемо випадок виявлення ліній розриву білінійної розривної функції.

Теорема 1. Якщо $f(x, y) \in C^{-1}[0; 1]^2$ має одну точку розриву першого роду

$$x^* = \frac{m}{2^k}, y^* = \frac{p}{2^\ell} m, k, p \in N, m < 2^k, p < 2^\ell,$$

то її можна виявити за не більше ніж k ітерацій.

Доведення будемо виконувати методом математичної індукції.

Нехай $k = 1, \ell = 1$. Для визначеності будемо вважати $m = 1, p = 1$, тобто $x^* = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2}$.

Ітерація 1. За вузли розривного лінійного сплайну $S(x)$ вибираємо рівномірно розташовані вузли

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1,$$

тобто розбиваємо область визначення функції на прямокутні елементи $\Pi_{ij}, j, i = 0, 1, 2$.

Будуємо розривний лінійний сплайн за формулою

$$S(x, y) = p_{ij}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{+-} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + \\ + C_{i,j+1}^{+-} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, (x, y) \in \Pi_{ij}.$$

Для початкового наближення як параметри $C_k^\pm$ візьмемо односторонні значення функції $f(x)$ у потрібних вузлах.

Для знаходження параметрів використовуємо метод найменших квадратів в інтегральній формі. Запишемо функціонал, який треба мінімізувати:

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset D} \iint_{\Pi_{i,j}} [f(x, y) - S(x, y)]^2 dx dy \rightarrow \min_C, \\ J(C) = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \iint_{\Pi_{12}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \\ + \iint_{\Pi_{21}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \iint_{\Pi_{22}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy. \quad (1)$$

$J(C) = 0$, оскільки $f(x, y)$ є кусково-лінійною розривною функцією і тому $f(x, y) - S(x, y) \equiv 0$.

Отже, для випадку, коли розривна лінійна функція має одну точку розриву $x^* = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1}{2}, k = 1, \ell = 1$, і для відновлення такої функції достатньо однієї ітерації.

Нехай $k = 2, \ell = 2$. Для визначеності будемо вважати $m = 1, p = 1$, тобто $x^* = \frac{1}{2^2}, y^* = \frac{1}{2^2}$.

Ітерація 2. При побудові сплайну $S(x, y)$ функціонал буде мати вигляд

$$J(C) = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy,$$

оскільки інші інтеграли дорівнюють нулю, бо $f(x, y)$ є лінійною неперервною функцією на інтервалі $(0, 5; 1)$.

Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи нові вузли $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$. Тобто маємо новий набір вузлів $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2^2}, x_2 = \frac{1}{2^1}; y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2^2}, y_2 = \frac{1}{2^1}$. І, повторюючи крок 1, отримуємо

$$J(C) = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \\ + \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy = 0.$$

Аналогічний результат буде у випадку $m = 3, k = 2, p = 3, \ell = 2$.

Отже, для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k}, k = 2, y^* = \frac{p}{2^\ell}, \ell = 2$ потрібні 2 ітерації.

Нехай для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k}$, $y^* = \frac{p}{2^\ell}$, $m=1$, $k=n$, $p=1$, $\ell=n$ потрібно n ітерацій, тобто на n -й ітерації розривний сплайн $S(x, y)$ будуємо на сітці

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2^n}, x_2 = \frac{1}{2^{n-1}}; y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2^n}, y_2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

і мінімізуючий функціонал має вигляд

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^n}} \int_0^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \int_0^{\frac{1}{2^{n-1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \\ + \int_0^{\frac{1}{2^n}} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy = 0.$$

Доведемо, що для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k}$, $y^* = \frac{p}{2^\ell}$, $m=1$, $k=n+1$, $p=1$, $\ell=n+1$ потрібно $(n+1)$ -а ітерація. Для цього випадку

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \int_0^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \\ + \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx dy \neq 0,$$

оскільки $f(x)$ є лінійною неперервною функцією на всіх прямокутних елементах, крім того елемента, куди потрапила точка розриву.

Прямокутний елемент, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи новий вузол $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (тобто робимо $(n+1)$ -у ітерацію). І будуючи на новій трійці вузлів $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$, $x_2 = \frac{1}{2^n}$ розривний сплайн, отримуємо

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x) - S(x))^2 dx = 0,$$

тому що точка $x = \frac{1}{2^{n+1}}$ є точкою розриву.

Тобто розрив виявлено за $(n+1)$ -у ітерацію.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо $f(x, y) \in C^{-1}[0;1]^2$ є кусково-лінійною функція і має одну точку розриву першого роду (x^*, y^*) , то виявити її можна за $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε .

Доведення. Опишемо алгоритм виявлення точки ε -розриву.

Крок 1. Обираємо рівномірну сітку області $[0;1]^2$: $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$ і $y_0 = 0$, $y_1 = 0,5$, $y_2 = 1$. І будуюмо на цій сітці розривний білінійний сплайн $S(x, y)$. Функціонал, який треба мінімізувати, має вигляд (1). Три інтеграли в цьому виразі будуть дорівнювати нулю, оскільки на прямокутних елементах, за якими ведеться інтегрування, функція є неперервною і лінійною.

Крок 2. Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи нові вузли в сітку. Нехай для визначеності це інтервал $\left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right]$ і обираємо вузли $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2^2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2^2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Знову ж будемо сплайн на нових вузлах і один з інтегралів в мінімізуючому функціоналі не буде дорівнювати нулю.

Знайдемо критерій зупинки ітераційного процесу.

Треба знайти такий найближчий до точки ε – розриву прямокутний елемент

$$\left(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right) \times \left(\frac{p}{2^\ell}, \frac{p+1}{2^\ell}\right), \quad m, k, p, \ell \in N, \quad m < 2^k, \quad p < 2^\ell,$$

що виконується умова

$$\left|\frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow k > \log_2 \frac{1}{2\varepsilon} = -\log_2(2\varepsilon).$$

$$\text{Аналогічно, } \left|\frac{p+1}{2^\ell} - \frac{p}{2^\ell}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \ell > -\log_2(2\varepsilon).$$

Оскільки $k, \ell \in N$, то $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$, $\ell = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$, а $n = k = \ell$ – номер ітерації (кроку), на якій потрібно зупинити ітераційний процес, m та p задовольняють нерівності

$$\frac{m}{2^k} < x^* < \frac{m+1}{2^k} \Rightarrow m < x^* \cdot 2^k, \quad m > x^* \cdot 2^k - 1; \quad \frac{p}{2^\ell} < y^* < \frac{p+1}{2^\ell} \Rightarrow p < y^* \cdot 2^\ell, \quad p > y^* \cdot 2^\ell - 1.$$

$$\text{Оскільки } m, p \in N, \text{ то } m = \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor, \quad p = \lfloor y^* \cdot 2^\ell \rfloor.$$

Тобто на n – ітерації знайдемо точку ε – розриву (x^*, y^*) , яка потрапить в ε – квадрат

$$\left(\frac{\lfloor x^{**} \cdot 2^k \rfloor}{2^k}, \frac{\lfloor x^{**} \cdot 2^k \rfloor + 1}{2^k}\right) \times \left(\frac{\lfloor y^{**} \cdot 2^\ell \rfloor}{2^\ell}, \frac{\lfloor y^{**} \cdot 2^\ell \rfloor + 1}{2^\ell}\right),$$

де (x^{**}, y^{**}) – точка розриву, що знайдена викладеним вище методом виявлення ліній розриву.

$$\text{Тобто } (x^*, y^*) \in \left(\frac{\lfloor x^{**} \cdot 2^k \rfloor}{2^k}, \frac{\lfloor x^{**} \cdot 2^k \rfloor + 1}{2^k}\right) \times \left(\frac{\lfloor y^{**} \cdot 2^\ell \rfloor}{2^\ell}, \frac{\lfloor y^{**} \cdot 2^\ell \rfloor + 1}{2^\ell}\right).$$

Теорему 2 доведено.

Приклад 1. Нехай розривна білінійна функція $f(x, y)$ має розрив першого роду в точці

$$(x^*, y^*) = (\pi, \pi - 3) \approx (3.14159265; 0.14159265).$$

Складемо таблицю результатів виявлення точки ε – розриву (табл. 1), тобто ε – інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε .

Таблиця 1– Кількість ітерацій для досягнення похибки ε .

Похибка ε	Номер ітерації, n	ε – квадрат
0,01	5	(3,125; 3,15625) × (0,125; 0.15625)
0,001	8	(3,140625; 3,1445313) × (0.140625; 0.142531)
0,0001	12	(3,141357; 3,1416016) × (0.1413574; 0.141602)

Означення 4. Базисним розривним білінійним сплайном на елементі $[0; 1]^2$ будемо називати сплайн

$$B(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & (x, y) \in [0; 1]^2; \\ 0, & (x, y) \notin [0; 1]^2, \end{cases}$$

де $h(x, y)$ – білінійний неперервний поліном.

Теорема 3. Довільну розривну білінійну функцію $f(x, y)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно, завжди, знайдуться такі $M, L \in N$ і параметри $C_{i,j}^{\pm\pm}$, що білінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^L B(Mx - i; Ly - j; C_{i,j}^{\pm\pm}), \quad C_{i,j}^{\pm\pm} = f\left(\frac{i}{M} \pm 0, \frac{j}{L} \pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм знаходження ліній ε – розриву покроково.

Крок 1. Будемо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ з па-

параметрами $C_{k,\ell}$, $k = \overline{1, (m-1) \cdot (n-1)}$, $\ell = \overline{1, 4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайну з умови (1), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} (f(u, v) - S(u, v))^2 dt \neq 0, \quad k, \ell = \overline{1, n-1}.$$

Обчислюємо довжину інтервалів $d_k = x_{k+1} - x_k$, $g_\ell = y_{\ell+1} - y_\ell$. Якщо $d_k < 2\varepsilon$, $g_\ell < 2\varepsilon$, то інтервали $(x_k, x_{k+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \in \varepsilon$ – прямокутником точок розриву (ε – розрив), і ітераційний процес закінчено. Якщо ці умови не виконуються, то знайдені прямокутні елементи ділимо на чотири частини, якщо не виконується одна з цих нерівностей, то прямокутний елемент ділимо на 2 частини. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримуємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. Як вузли розривного сплайну обираємо кутові точки області визначення розривної функції та точки ε – розриву (x_m, y_z) , $m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$, враховуючи $C_{m,z}^{\pm, \pm} = f(x_m \pm \varepsilon, y_z \pm \varepsilon)$, $m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$. Сукупність знайдених точок ε – розриву створює лінії ε – розриву.

Зауваження 1. Прямокутні елементи, на які розбивається область визначення розривної функції, можуть мати довільно малі висоти і довжини, тобто можуть вироджуватися в лінії (одновимірний випадок).

Наведемо модифікований алгоритм виявлення ліній розриву для випадку нелінійної функції двох змінних. Оскільки наближувати її будемо білінійним розривним сплайном, то окрім значення ε знадобиться точність наближення δ .

Викладемо модифікований алгоритм покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i, y_j) , $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$, який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $p_{ij}(x, y, C)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,\ell}$, $k = \overline{1, (m-1) \cdot (n-1)}$, $\ell = \overline{1, 4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайну з умови (1). Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $p_{ij}(x, y)$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. На кожному прямокутному елементі розбиття $\Pi_{i,j}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення

$$J_{ij}^* = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{ij}(x, y), \quad J_{ij}(x, y) = |f(x, y) - p_{ij}(x, y)|.$$

Крок 3. Вилучаємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн $\in \varepsilon$ – неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися $\Pi_{r,q}$, $r = \overline{1, n_1}$, $q = \overline{1, n_2}$, ділимо на чотири рівні прямокутника, вводючи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента (рис. 2). Наприклад, якщо ділимо $\Pi_{u,v}$, $u < m$, $v < n$, то вводимо до розгляду лінії всередині

$$\Pi_{u,v}: x = x^*, \quad y_v < y < y_{v+1}; \quad y = y^*, \quad x_u < x < x_{u+1}, \quad x^* = x_u + \frac{x_{u+1} - x_u}{2}, \quad y^* = y_v + \frac{y_{v+1} - y_v}{2}. \quad (2)$$

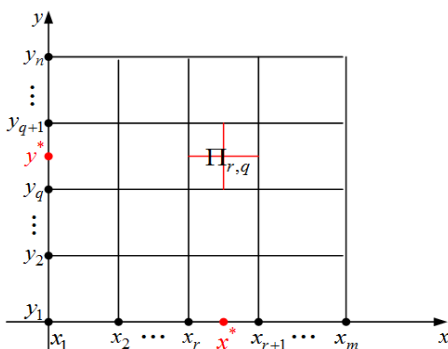


Рис. 2 – Формування нового набору прямокутних елементів шляхом ділення на чотири частини елементів, де функція не $\in \varepsilon$ – неперервною.

Крок 4. Для отриманого набору прямокутних елементів знову будемо апроксимаційні сплайни за формулами (3.1) та (3.3) Далі перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in [0,1]}} |f(x, y) - S(x, y)| < \delta,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо ця умова виконується, то отримали набір відрізків прямих вигляду (2), які і складають лінії розриву заданої розривної функції $f(x, y)$. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Приклад 1. Нехай в області $G = [0,1] \times [0,1]$ задано функцію (рис. 3, а)

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 0,4; \\ 0, & 0,4 < x \leq 1. \end{cases}$$

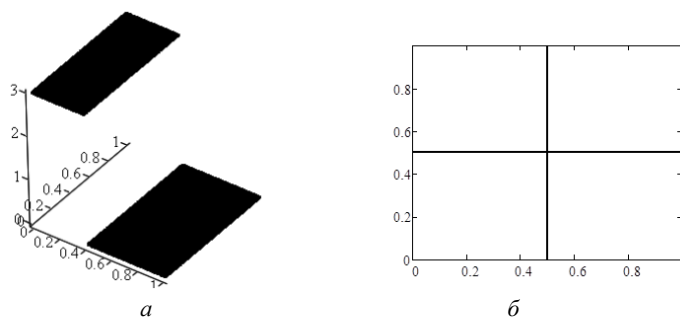


Рис. 3 – Графічний вигляд: *a* – функції $f(x, y)$,
б – прямокутної сітки для наближувального сплайну.

Тобто функція має один розрив першого роду на лінії $x = 0,4$.

Обираємо сітку так, щоб вона не збігалася з лінією розриву заданої функції $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0,5$, $y_3 = 1$ (рис. 3, б).

Вважаємо заданими значення розривної функції у кутах заданої сітки, тобто

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3, & f(0,0,5) &= 3, & f(0,5,0) &= 0, \\ f(0,5,0,5) &= 0, & f(0,1) &= 3, & f(0,5,1) &= 0, \\ f(1,0) &= 0, & f(1,0,5) &= 0, & f(1,1) &= 0. \end{aligned}$$

Але для методу потрібно знати односторонні значення функції $f(x, y)$ у кутах заданої сітки. Тому, як експериментальні дані, візьмемо елементи наступної матриці (початкові дані):

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто на першій ітерації лівосторонні та правосторонні значення функції вважаємо рівними.

Далі будемо розривний апроксимаційний сплайн та знаходимо матрицю коефіцієнтів C за методом найменших квадратів в інтегральній формі (рис. 4). Задамо точність наближення $\varepsilon = 0,01$.

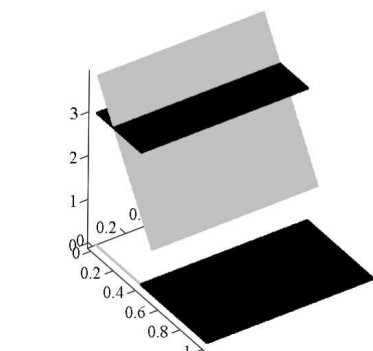


Рис. 4 – Графічний вигляд наближуваної функції (сірий колір) та побудованого сплайну (чорний колір).

Результати розробленого методу, а також деякі проміжні ітерації, наведено на рис. 5

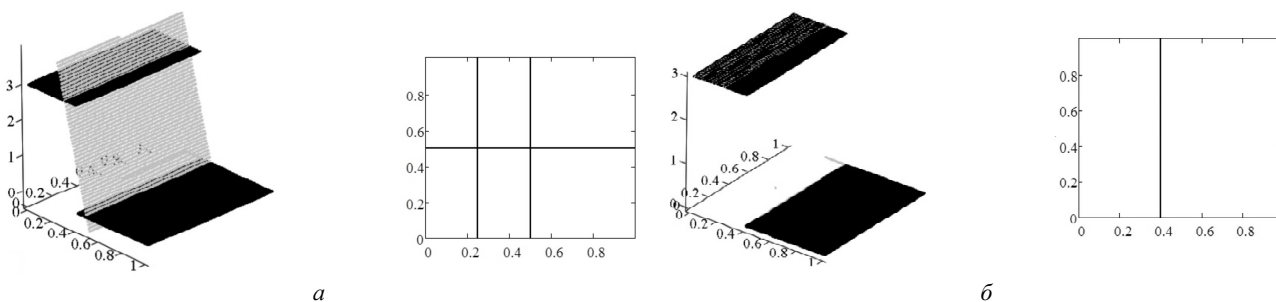


Рис. 5 – Результати відновлення розривної функції в прикладі 1:
a – проміжна ітерація; *б* – кінцевий результат.

Тобто розривний сплайн $P(x, y)$ наблизив розривну функцію $f(x, y)$ з точністю ε .

Приклад 2. Нехай в області $G = [0,1] \times [0,1]$ задано функцію (рис. 6):

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 0,4; 0 \leq y \leq 0,4; \\ 0, & 0,4 < x \leq 1; 0,4 < y \leq 1. \end{cases}$$

Оберемо таку саму сітку, як і в попередньому прикладі.

Задана функція має розриви на лініях $x = 0,4$, $y = 0,4$. За початкове наближення оберемо наступну матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

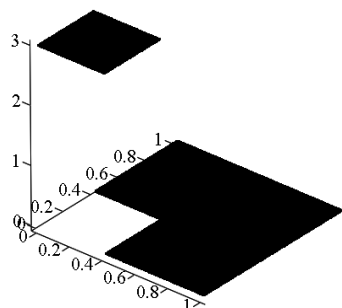


Рис. 6 – Графічний вигляд наближуваної функції.

Побудуємо апроксимаційний сплайн на заданій сітці вузлів та задамо таку саму точність наближення. На рис. 7 наведено деякі проміжні результати наближення розривної функції та зображення сітки наближувального сплайну для отриманого результату. Тобто отримали розривний сплайн (рис. 7, в), який наближує задану розривну функцію з точністю 0,01. Також визначили відрізки, на яких дана функція має розрив.

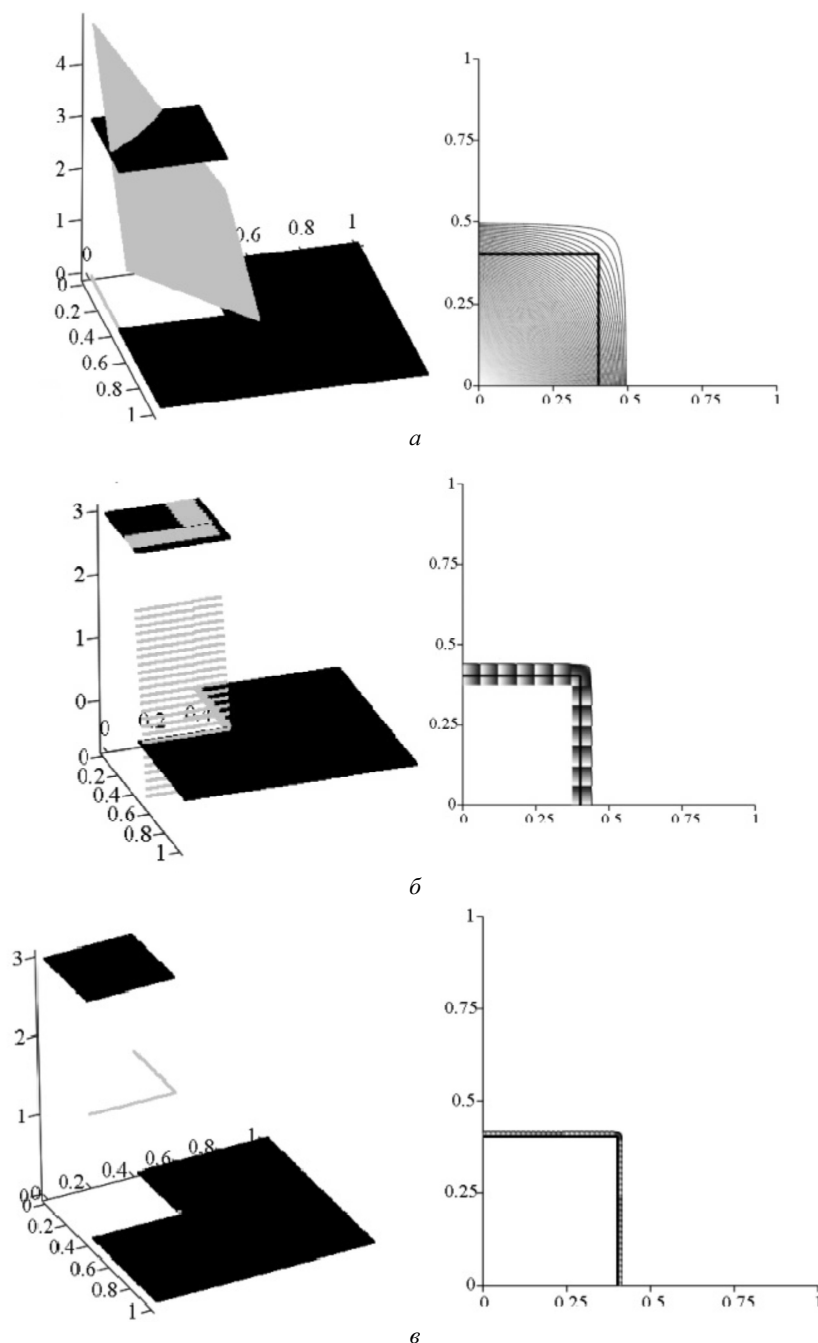


Рис. 7 – Результати відновлення розривної функції в прикладі 2: *а, б* – проміжні ітерації; *в* – кінцевий результат.

Тобто ми отримали розривний сплайн, який наближує задану розривну функцію з точністю 0,01. Також отримали відрізки, на яких дана функція потерпає розрив.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають досить часто.

Наступним кроком автори планують розробити узагальнюючий алгоритм відновлення розривної функції, розриви якої будуть лежати на більш складних лініях.

Висновки. В статті проведено обґрунтування методу виявлення ліній ε -розриву функцій двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів у вигляді доведених теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення ліній ε -розриву. Викладений метод дозволяє визначити лінії розриву експериментально заданої розривної функції та обрати оптимальні вузли сітки наближучого розривного білінійного сплайну. Наведені приклади, що підтверджують викладену теорію.

Список літератури

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М. : Наука, 1980. – 352с.
3. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. – К. : Вища школа, 1995. – 367 с.
4. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – К. : Наукова думка, 1989. – 272 с.
5. Петухов А. П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С. 25 – 40.
6. Дейнека В. С. Численное решение краевой задачи, допускающей разрыв решения // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 28 – 31.
7. Дейнека В. С., Сергиенко І. В., Скопечкий В. В. Задачі на власні значення з розривними власними функціями та їх чисельні розв'язки // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1317 – 1323.
8. Дейнека В. С., Сергиенко І. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
9. Дейнека В. С., Сергиенко І. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – К. : Наукова думка, 2001. – 606 с.
10. Дейнека В. С., Сергиенко І. В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – К. : Наукова думка, 2003. – 506с.
11. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 544 с.
12. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некоторых задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 8. – С. 1362 – 1370.
13. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
14. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О задаче разделения особенностей // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11. – С. 1 – 7.
15. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – № 1. – С. 56 – 68.
16. Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandeve H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1992. – N. 43. – P. 81 – 98.
17. Yin J., De Pierro A. R., Wei M. Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1999. – Vol. 47. – N. 12. – P. 3356 – 3364.
18. Madja A., McDonough J., Osher S. The Fourier Method for Nonsmooth Initial Data // Math. Comp. – 1978. – N. 32. – P. 1041 – 1081.
19. Lopez de Silanes M. C., Parrab M. C., Pasadasc M., Torrens J. J. Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2001. – N. 131. – P. 281 – 298.
20. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1. – N. 1. – P. 1 – 13.
21. Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L. X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features // Soviet J. Nondest. Test. – 1985. – N. 21. – P. 106 – 113.
22. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V. Three-dimensional reconstruction from radiograph and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms // Proc. Nat. Acad. Sci. US. – 1971. – P. 2236 – 2240.
23. Светов І. Е., Полякова А. П. Сравнение двух алгоритмов численного решения задач двумерной векторной томографии // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 90 – 108.
24. Louis A. K. Feature Reconstruction in inverse problems // Inverse problems. – 2011. – V. 27 – 065010 doi: 10.1088/0266-5611/27/6/065010.
25. Tamos A. L., Lope J. E. C., Hesthaven Jan S. Accurate reconstruction of discontinuous functions using the singular pade-chebyshev method // IAENG International Journal of Applied Mathematics. – 2013. – vol. 42. – num. 4. – P. 242 – 249.
26. Abdul J., Jerri Ed. Advances in the Gibbs Phenomenon // Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. – 2011. – 424 p.
27. Литвин О. М., Перишина Ю. І. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайну не збігаються з розривами функції // Праці ІПММ НАН України. – 2012. – Т. 24. – С. 157 – 165.
28. Литвин О. М., Перишина Ю. І., Пасічник В. О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2015. – № 6(1115) – С. 67 – 76.
29. Литвин О. Н., Перишина Ю. И., Сергиенко І. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.

References (transliterated)

1. Korneychuk N. P. *Splayny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
2. Zav"yalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline function]. Moscow, Nauka publ., 1980. 352 p.
3. Gavriluk I. P., Makarov V. L. *Metody obchyslen'* [Methods of computation]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1995. 367 p.
4. Popov B. A. *Ravnomernoe priblizhenie splaynami* [Uniform approximation by splines]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989. 272 p.
5. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metrike Khaudorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Math notices]. 1985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
6. Deyneka B. S. *Chislennoe reshenie kraevoy zadachi, dopuskayushey razryv resheniya* [Numerical solution of a boundary-value problem admitting a solution discontinuity]. *Dop. AN URSR. Ser. A*. [Reports of the National Academy of Sciences of the USSR]. 1982, no. 11, pp. 28–31.
7. Deyneka V. S., Sergiyenko I. V., Skopets'ky V. V. *Zadachi na vlasni znachennya z rozryvnymy vlasnymy funktsiyamy ta yikh chysel'ni rozv'yazky* [Eigenvalue problems with discontinuous eigenfunctions and their numerical solutions]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [Ukrainian mathematical journal]. 1999, vol. 51, no. 10, pp. 1317–1323.
8. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 703 p.
9. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Modeli i metody resheniya zadach v neodnorodnykh sredakh* [Models and methods for solving problems in inhomogeneous media]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2001. 606 p.
10. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Optimal'noe upravlenie neodnorodnymi raspredelennymi sistemami* [Optimum control of heterogeneous distributed systems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2003. 506p.
11. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osnova Publ., 2002, 544 p.
12. Ageev A. L., Antonova T. V. *Regulyariziruyushchie algoritmy vydeleniya razryvov v nekotorykh zadachakh* [Regularizing algorithms for isolating discontinuities in some problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1362–1370.
13. Ageev A. L., Antonova T. V. *Approksimatsiya liniy razryva zashumlennoy funktsii dvukh peremennykh* [Approximation of the lines of discontinuity of a noisy function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.

14. Ageev A. L., Antonova T. V. O zadache razdeleniya osobennostey [On the problem of separation of singularities]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Proceedings of universities. Mathematics]. 2007, no. 11, pp. 1–7.
15. Ageev A. L., Antonova T. V. O lokalizatsii razryvov pervogo roda dlya funktsiy ograniichennoy variatsii [On the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences]. 2012, vol. 18, no. 1, pp. 56–68.
16. Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandeve H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1992, no. 43, pp. 81–98.
17. Yin J., De Pierro A. R., Wei M. Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1999, vol. 47, no. 12, pp. 3356–3364.
18. Madja A., McDonough J., Osher S. The Fourier Method for Nonsmooth Initial Data. *Math. Comp.* 1978, no. 32, pp. 1041–1081.
19. Lopez de Silanes M. C., Parrab M. C., Pasadasc M., Torrens J. J. Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001, no. 131, pp. 281–298.
20. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2007, vol. 1, no. 1, pp. 1–13.
21. Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L. X-ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features. *Soviet J. Nondest. Test*. 1985, no. 21, pp. 106–113.
22. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V. Three-dimensional reconstruction from radiograph and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. 1971, pp. 2236–2240.
23. Svetov I. E., Polyakova A. P. Svravnenie dvukh algoritmov chislennogo resheniya zadach dvumernoy vektornoy tomografii [Comparison of two algorithms for numerical solution of two-dimensional vector tomography problems]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian electronic mathematical news]. 2013, vol. 10, pp. 90–108.
24. Louis A. K. *Feature Reconstruction in inverse problems*. Inverse problems. 2011. vol. 27, 065010 doi: 10.1088/0266-5611/6/065010.
25. Tamos A. L., Lope J. E. C., Hesthaven Jan S. Accurate reconstruction of discontinuous functions using the singular Pade-Chebyshev method. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 42, no. 4, pp. 242–249.
26. Abdul J., Jerri Ed. *Advances in the Gibbs Phenomenon*. Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. 2011. 424 p.
27. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. Nablyzhennya rozryvnoyi funktsiyi rozryvnym splaynom, koly vuzly splaynu ne zbigayut'sya z rozryvamy funktsiyi [Approximation of discontinuous functions by discontinuous spline when the spline nodes do not coincide with function breaks]. *Pratsi instytutu matematyky ta mekhaniky NAN Ukrainy* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS Ukraine]. 2012, vol. 24, pp. 157–165.
28. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I., Pasichnyk V. O. Doslidzhennya metodu znakhodzhennya tochok rozryvu pershoho rodu funktsiyi odniyeyi zminnoyi [The research method of discontinuous points of the first kind functions of one variable]. *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of NTU "KPI". Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 67–76.
29. Lytvyn O. N., Pershyna Yu. Y., Serhyenko Y. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovering discontinuous functions of two variables, when the lines of discontinuity are unknown (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemnyi analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.

Надійшла (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Відновлення розривної функції за інтерполяційними даними з використанням прямокутних елементів / Ю. І. Першина, В. О. Пасічник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 94 – 104. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

Восстановление разрывной функции по интерполяционным данным с использованием прямоугольных элементов / Ю. И. Першина, В. А. Пасечник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 94 – 104. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

Reconstruction of a discontinuous function by interpolation data using rectangular element / Yu. I. Pershina, V. A. Pasichnik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 94 – 104. Bibliog.: 29 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Пасічник Валентина Олексіївна – кандидат технічних наук, доцент, Харківська державна академія дизайну і мистецтв, м. Харків; тел.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.

Пасечник Валентина Алексеевна – кандидат технических наук, доцент, Харьковская государственная академия дизайна и искусств, г. Харьков; тел.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.

Pasichnik Valentina Alekseevna – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, Kharkiv State Academy of Design and Arts, Kharkov; tel.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.

Ю. І. ПЕРШИНА, О. В. ШИЛІН

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ 3D ТІЛА ЗА ВІДОМИМИ ЇЇ ТОМОГРАМАМИ НА СИСТЕМІ ДОВІЛЬНИХ ПЛОЩИН З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Наведено теорему про інтерфлетаційні властивості оператора відновлення. На її основі побудовано алгоритм для відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. Було проведено аналіз останніх досліджень по методам відновлення внутрішньої структури тіла. Також наведено теорему про абсолютну неусувну похибку. Наведені основні випадки виникнення похибки. Виконано чисельну реалізацію методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. Було проведено обчислювальний експеримент для наперед заданого тіла у системі MathCad. У якості томограми використовувалася функція. Наведені графіки функції. Експеримент показав високу точність відновлення. Наведено приклад використання томограми замість функції для відновлення. Далі планується розробити програму для більшої кількості площин та більшої кількості томограм.

Ключові слова: інтерфлетация, томограмма, відновлення, чисельна реалізація.

Приведена теорема об интерфлетиционных свойствах оператора восстановления. На ее основе построен алгоритм для восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным ее томограммам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетиции функций. Был проведен анализ последних исследований методов восстановления внутренней структуры тела. Также приведена теорема об абсолютной неустраняемой погрешности. Приведены основные случаи возникновения погрешности. Выполнена численная реализация метода восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным ее томограммам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетиции функций. Был проведен вычислительный эксперимент для заранее заданного тела в системе MathCad. В качестве томограммы использовалась функция. Приведены графики функции. Эксперимент показал высокую точность восстановления. Приведен пример использования томограммы вместо функции для восстановления. Далее планируется разработка программы для большего количества плоскостей и большего количества томограмм.

Ключевые слова: интерфлетиция, томограмма, восстановление, численная реализация.

A theorem about interflatation properties of the restoration operator is given in this article. An algorithm of internal structure restoration for a three-dimensional body based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation is formulated. Analysis of recent research methods for restoration of the body internal structure is conducted. Also a theorem about the absolute permanent error is given. The main cases of error occurrence are outlined. The numerical implementation of the method of restoration of the internal structure of a three-dimensional body based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation is carried out. A computational experiment for a predesigned body is conducted in the MathCad system. A function is used as a tomogram. Graphs of the function are given. The experiment shows a high level of restoration accuracy. An example of a tomogram used instead of a function for the restoration is proposed. The development of a program for more planes and tomograms is planned.

Key words: interflatation, tomogram, restoration, numerical implementation.

Вступ. У кінці 20-го – на початку 21-го ст. на розвиток медичної науки та охорони здоров'я значно вплинуло використання математичних методів вивчення і аналізу стану (поведінки) об'єктів і систем.

У біології, медицині та охороні здоров'я до кола явищ, досліджуваних за допомогою математичних методів, входять процеси, що відбуваються на рівні цілісного організму, його систем, органів і тканин (в нормі та при патології); захворювання та способи їх лікування; прилади та системи медичної техніки; біологічні процеси, що відбуваються на молекулярному рівні. Ступінь математизації наукових дисциплін служить об'єктивною характеристикою глибини знань про досліджуваний предмет.

Починаючи з 40-х рр. 20 ст. математичні методи проникають в медицину та біологію через кібернетику та інформатику. Найбільш розвинені вони в біофізиці, біохімії, генетиці, фізіології, медичному приладобудуванні, створенні біотехнічних систем, у медичній техніці.

Кінець 20-го століття відмічений інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень медичної техніки – *комп'ютерної томографії*. В основі радонівської комп'ютерної томографії лежать теоретичні результати досліджень німецького вченого *Й. Радона* [1], який на початку 20-го ст. розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення зараз відоме як *перетворення Радона*).

Згідно з перетворенням Радона функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченною сукупністю ліній або площин (якщо кількість змінних більше двох). На практиці інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних інтегралів, отриманих за деякою скінченною множиною ліній або поверхонь. Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп'ютерних томографів, що використовують опромінення об'єкта рентгенівськими променями, з'явилася лише в кінці 20-го ст.

На сучасному етапі використання математичних методів у медицині, зокрема у медичній діагностиці, нерозривно пов'язане з візуалізацією внутрішніх структур біомедичних об'єктів. Різні методи візуалізації ґрунтуються на різноманітних фізичних взаємодіях електромагнітного випромінювання з матеріалами, середовищами, біотканинами і, як наслідок, забезпечують вимірювання різних фізичних властивостей об'єктів. До сучасних методів діагностики відносяться рентгенівське дослідження, рентгенівська комп'ютерна томографія, ультразвукове дослідження, магнітно-резонансна томографія, та ін.

Сьогодні лікарі мають змогу візуалізувати стан будь-якого внутрішнього органа людини на плівці або екрані монітора з роздільною здатністю до 1 мм не тільки у двовимірному, але й у тривимірному вигляді (*спіральна комп'ютерна томографія*); віртуально повернути і роздивитися орган у різних ракурсах навіть під час функціонування (наприклад, скорочення серця) в реальному вимірі часу (магнітно-резонансна томографія). Удосконалені можливості тривимірних зображень дали змогу більш ефективно супроводжувати хірургічні та інтервенційні процедури і революціонізували шляхи дослідження патологічних процесів.

За останні десятиліття у сфері комп'ютерної томографії відбулося значне удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації: зросла швидкість, точність та якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на моніторах комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що витікають безпосередньо з праць Й. Радона – магнітно-резонансна томографія, ультразвукова томографія, оптична томографія та інші види томографічного відновлення, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями.

Проте, практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності через ряд причин: наприклад, недостатньо обґрунтованою є кількість проєкцій (даних Радона), яку використовують сучасні рентгенівські комп'ютерні томографи для відновлення об'єкта у заданому перетині (тобто не обґрунтована доза опромінення об'єкта); інша причина полягає у тому, що сучасні комп'ютерні томографи при відновленні об'єкта у заданому перетині демонструють *артефакти* – не властиві реальному об'єкту структури – тіні, нечіткість зображення, вкраплення тощо.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів.

Особливо важливою є задача побудови тривимірних моделей на основі томографічних даних в різні моменти часу. Ця задача є дуже складною у зв'язку з великими масивами інформації, яка використовується на кожному етапі часу, а також у зв'язку з обмеженнями на візуалізацію результатів відновлення в моменти часу, що не співпадають з моментами, для яких представлені експериментальні дані.

Таким чином, актуальною є розробка та дослідження методу відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа.

Аналіз останніх досліджень. У 1917 р. німецький математик Й. Радон [1] вивів формулу обернення для відображення. У галузі медицини застосування перетворення Радона привело до зародження томографії.

Останнім часом у практиці проведення медичних досліджень широко застосовуються комп'ютерні томографи [2 – 4], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру тіла без виконання його розтину. При цьому виник новий клас задач – відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на декількох площинах.

У роботі [5] наведені функції MATLAB, які використовуються при обчисленні і візуалізації прямого і зворотного двовимірного перетворення Радона – математичного методу, що лежить в основі томографії.

У роботі Л. А. Халфіна [6] пропонується оригінальний підхід до розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії, що не використовує пряме та обернене перетворення Радона.

Одна з головних проблем при відновленні внутрішньої структури 3D тіла – це *шуми*. У статті [7] наведені результати досліджень фільтрації артефактів і шумів на томографічних зображеннях, які показали високу ефективність застосування комбінованих фільтрів, заснованих на нелінійних методах фільтрації.

У [8] проведено математичне моделювання у надвеликих задачах поширення ультразвукових хвиль. У [9] розробляються масштабовані програми у зворотній задачі ультразвукової томографії.

Дана робота присвячена розв'язанню задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі довільно розташованих площин. Розроблений в статті метод є узагальненням методів, розроблених авторами в роботах [10 – 11] та є більш точним, ніж відомі методи авторів [12 – 14].

У статтях [15, 16] авторами наведено розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин

Означення 1. Інтерфлотацією функції [17, с. 37] $f(x_1, \dots, x_n)$, яка залежить від n змінних за допомогою її слідів (або слідів її похідних до заданого порядку $\leq N$) на M поверхнях розмірності m є відновлення (можливо, наближене) функції f у довільних точках заданої області. Якщо $m = 0$, то таке наближення є загальновідомою інтерполяцією функції за допомогою її значень в M точках (для $n \geq 1$). Якщо $m = 1$ (для $n \geq 2$), то таке наближення називається *інтерлінацією* (інколи *blending function interpolation* – *мішаною інтерполяцією функцій*) на M лініях.

Означення 2. Слідом функції $f(x, y, z)$ на площині $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ будемо називати функцію двох змінних $((x, y)$ або (x, z) , або (y, z) , або параметра t) $\varphi_k(x, y)$, або $\varphi_k(x, z)$, або $\varphi_k(y, z)$, або $\varphi_k(t) = (x_k(t), y_k(t), z_k(t))$, яка на кожній точці цієї площини Π_k набуває таких самих значень, що і функція $f(x, y, z)$:

$$f|_{\Pi_k} = \varphi_k|_{\Pi_k}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Означення 3. [10, с. 62]. Інтерфлотацією функції $f(x, y, z)$ (від англ. *inter* – між, *flat* – площа) називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y, z)$ у точках між площинами $\Pi_k: \omega_k(x, y, z) = 0$ за допомогою її слідів (1) на цих площинах.

Означення 4. [10, с. 65]. Томограмою $T_k(\bar{x})$ (рис. 1) (слідом функції $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ на площині $\omega_k(x) = 0$ за умови, що всі три коефіцієнти не дорівнюють нулю) будемо називати одну з трьох функцій (2):

$$T_k(\bar{x}) = \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3)/a_{k1}, x_2, x_3), a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3)/a_{k2}, x_3), a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2)/a_{k3}), a_{k3} \neq 0 \end{cases} \bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2), x_3 = 0 \\ (x_1, x_3), x_2 = 0; \\ (x_2, x_3), x_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

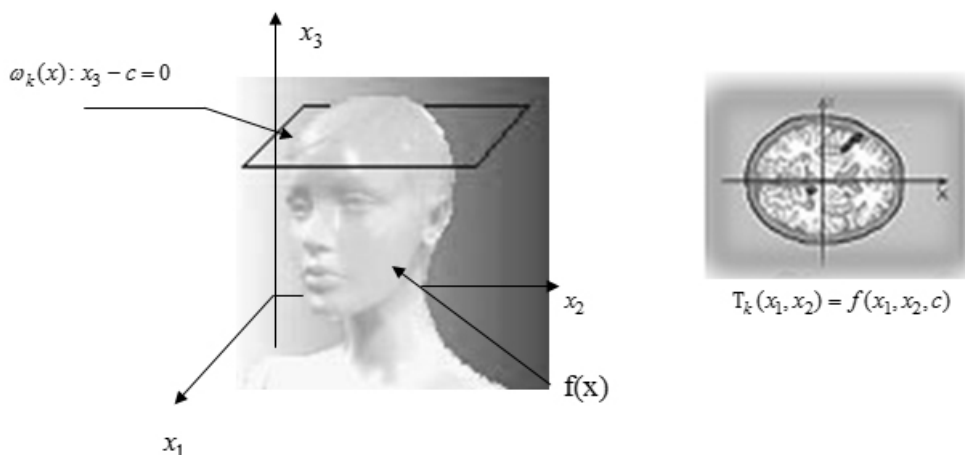


Рис. 1 – Графічна ілюстрація поняття томограми.

Теорема 1. [15, с. 235] Оператор $L_{ikl}(x) \in C(R^3)$ вигляду

$$L_{ikl}(x) = [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^l L_{ik}^k + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](x),$$

де

$$L_{ik}^l(x) = T_l(u_{ik}^l(x)), L_{kl}^i(x) = T_l(w_k(x)), L_{li}^k L_{kl}^i L_{li}^k(x) = T_k(\bar{x})|_{\omega_l(x)=0, \omega_i(x)=0}.$$

є оператором інтерфлотації функції трьох змінних, побудованим на трьох площинах, тобто задовольняє умовам $T_k(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 0$ та умовам С. М. Нікольського [18, с. 183], які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей:

$$T_k(u_{li}^k(x))|_{\omega_l(x)=0} = T_l(u_{il}^l(x))|_{\omega_k(x)=0},$$

тобто значення томограм на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik} , Γ_{li} .

В точці V_{ikl} умови Нікольського [18] зводяться до перевірки рівностей

$$T_l(u_{ik}^l(x))|_{\omega_l(x)=0, \omega_k(x)=0} = T_k(u_{li}^k(x))|_{\omega_l(x)=0, \omega_i(x)=0} = T_i(u_{kl}^i(x))|_{\omega_k(x)=0, \omega_l(x)=0},$$

Теорема 2. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x) \in C^r(\Omega)$ ($r \geq 3$), яка має томограми $T_k(\bar{x})$, $k = \overline{1, N}$, задані на площинах Π_k відповідно, та задовольняє умови $f(x)|_{\Pi_s} = T_s(\bar{x})$. Тоді для похибки $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_{li}} \int_0^{\omega_{kl}} \int_0^{\omega_{li}} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \quad (3)$$

Похибка відновлення.

Теорема 3. Абсолютна неусувна похибка E побудованого інтерфланта в припущенні, що $f(x, y, z)$ на площинах Π_k , тобто відповідні томограми задані наближено δ_k , тобто

$$|T_k(\bar{x}) - \tilde{T}_k(\bar{x})| \leq \delta_k, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\text{а також } \left| T_k(\bar{x}) \Big|_{\Pi_i} - \tilde{T}_k(\bar{x}) \Big|_{\Pi_i} \right| \leq \delta_{ki}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad \left| T_k(\bar{x}) \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_l(x)=0} - \tilde{T}_k(\bar{x}) \Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_l(x)=0} \right| \leq \delta_{kil},$$

дорівнює

$$E \leq \sum_{(i,k,l) \in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i \delta_k + \delta_i \delta_l + \delta_k \delta_l + \delta_i \delta_k \delta_l.$$

Чисельний експеримент. За теоремою 1 було проведено обчислювальний експеримент для наперед заданого тіла. Для його проведення було розроблено комплекс програм у системі комп'ютерної математики MathCad. Результати експерименту демонструють високу точність відновлення.

Продемонструємо результати роботи програми (*circle*), яка зображує чисельну реалізацію методу відновлення. Програма побудована на основі оператора сплайн-інтерфлетатції.

Пропонуються результати візуалізації точного розв'язку та розв'язку, отриманого експериментально, для випадку, коли відома точна функція. У випадку, який розглядається у прикладі, функція $f1(x, y, z)$ є томограмою.

Нехай є функція, наприклад, такого вигляду (4):

$$f1(x, y, z) := \begin{cases} 0 & \text{if } (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \leq 0.2^2 \\ 2 & \text{if } (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \cap (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \leq 0.2^2 \\ 3 & \text{if } (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 > 0.5^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (4)$$

Функцію (4) задано на області відновлення від 0 до 1 з кроком 0,1.

Нижче представлено графіки функції $f1(x, y, z)$ (рис. 2), яка лежить на площинах.

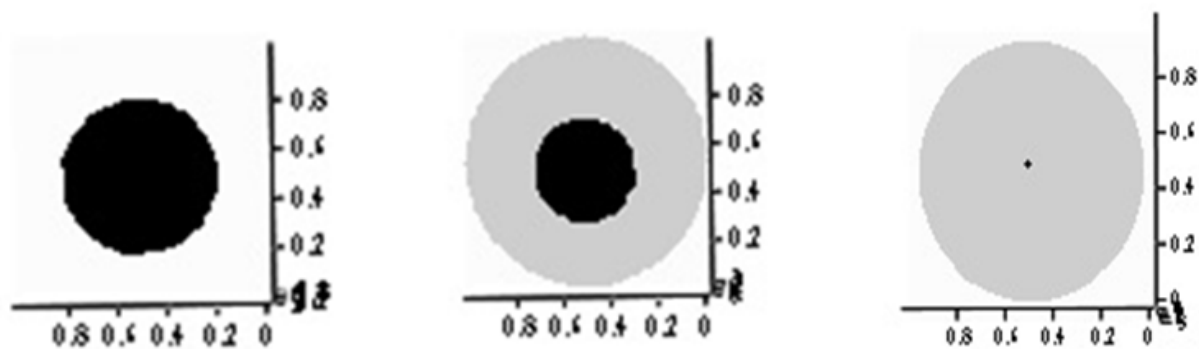


Рис. 2 – Графіки функції $f1(x, y, z)$.

Будуємо оператор сплайн-інтерфлетатції на взаємно перпендикулярних лініях $LLL(x, y, z)$, $H(k, t)$ – (допоміжний поліном Лагранжа (рис. 3)).

$$H(k, t) := \begin{cases} s \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s \cdot \frac{t - X_j}{X_k - X_j} \quad \text{if } j \neq k \\ s \leftarrow s \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ s \end{cases}$$

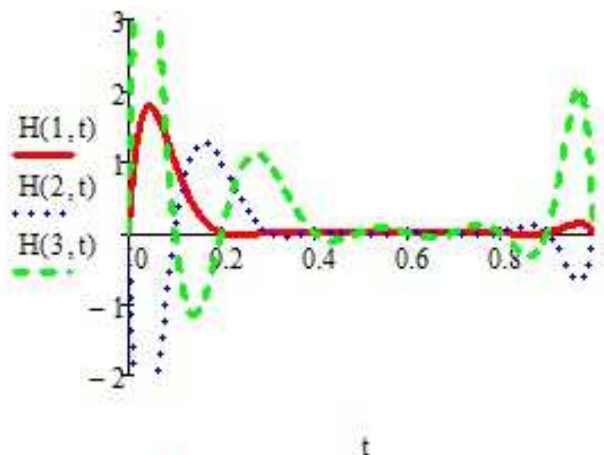
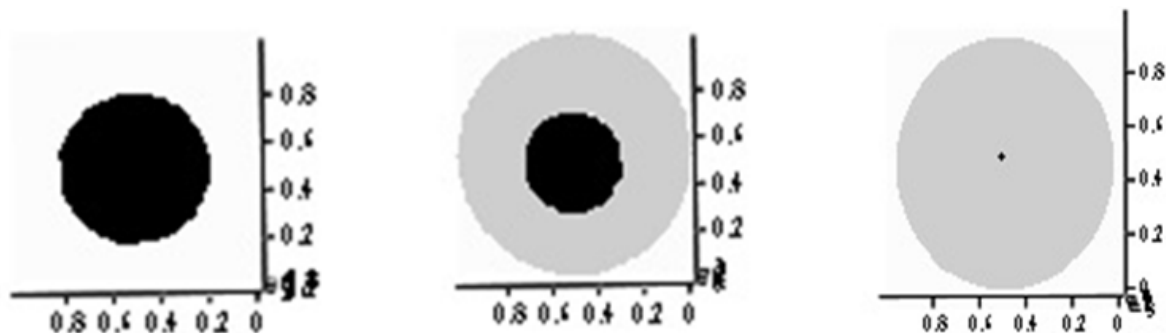


Рис. 3 – Допоміжний поліном Лагранжа та його графік на трьох площинах.

Результати роботи оператора LLL представлені нижче (рис. 4).

Рис. 4 – Результати роботи оператора LLL .

Виконаємо перевірку точності відновлення функції.

Для цього порівнюємо матриці значень базової функції і побудованого оператора сплайн-інтерфлетації (рис. 5).

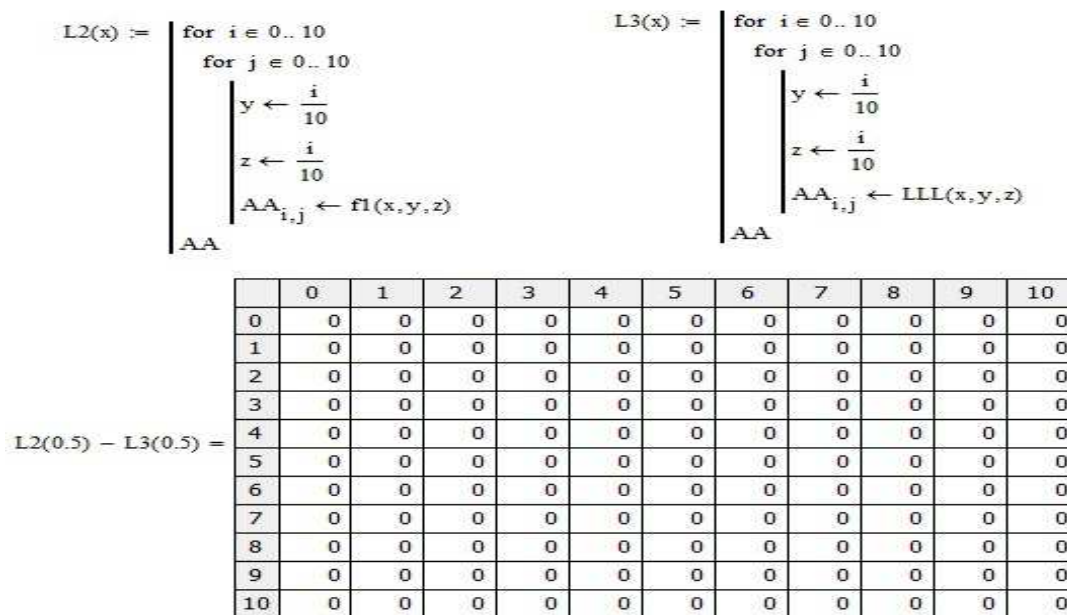


Рис. 5 – Перевірка точності відновлення функції.

Також перевіримо максимуми і мінімуми базової функції і побудованого оператора сплайн-інтерфлетації:

$$\max(L2(0.45)) = 3, \max(L3(0.45)) = 3, \min(L2(0.45)) = 0, \min(L3(0.45)) = 0.$$

Отже, побудований оператор сплайн-інтерфлетації точно наближує задану функцію.

Також можливе використання томограм замість функції. Результати можна побачити на рис. 6 – 7.

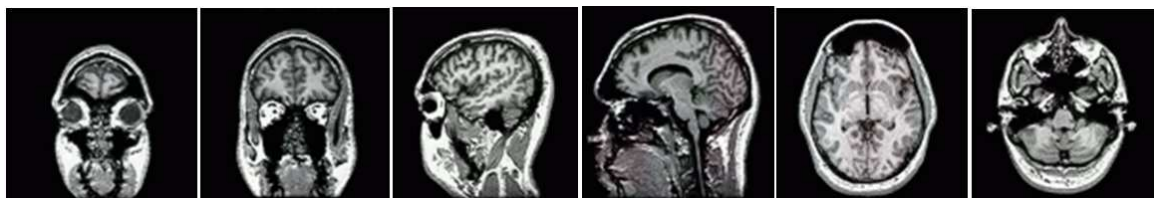
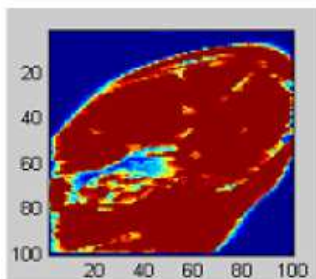


Рис. 6 – Приклади томограм, що використовуються для відновлення.

Рис. 7 – Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом в площині $x + y + 10z = 0$.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлотації функцій, оскільки, як вже було зазначено, задачі з відновлення внутрішньої структури 3D тіла є дуже актуальними.

Наступним кроком автори планують розробити програму для більшої кількості площин.

Висновки. З чисельного експерименту робимо висновок, що побудований оператор сплайн-інтерфлотації за відомими томограмами (слідами) на системі довільно розташованих площин точно відновив функцію, чого неможливо досягнути за допомогою операторів інтерполяції, які використовуються в сучасних методах комп'ютерної томографії. Але для запобігання похибки (шумів) треба більш точно фіксувати об'єкт та задавати більш короткий інтервал між проєкціями.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлотації у випадку відомих томограм, що лежать на системі довільних площин, є узагальненням розробленого авторами методу відновлення за відомими томограмами на системі трьох груп перерізованих площин і має таку ж високу точність.

Список літератури

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften. – Leipzig, Mathem. – Phys. – K1, 69, 1917. – P. 262 – 267.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии (пер. с англ.). – М. : Мир, 1990. – 279 с.
3. Хермен Г. Восстановление изображений по проециям: основы реконструктивной томографии (пер. с англ.). – М. : Мир, 1983. – 350 с.
4. Хелгасон С. Преобразование Радона (пер. с англ.). – М. : Мир, 1983. – 152 с.
5. Доля П. Г. Математические методы компьютерной томографии // Харьковский национальный университет, мех.-мат. факультет. – Харьков : ХНУ, 2012. – 65 с.
6. Халфин Л. А. Об одной альтернативе традиционной вычислительной томографии // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – Ленинград : Наука, 1990. – С. 271 – 278.
7. Ласьков В. В., Симонов Е. Н. Методы фильтрации изображений в рентгеновской компьютерной томографии // Вестник ЮУрГУ. Серия : «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – Челябинск : Южно-Уральский государственный университет, 2014. – Т.14. – № 3 – С. 29 – 33.
8. Агаян Г. М., Воеводин В. В., Романов С. Ю. О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. – М. : МГУ, 2013. – Т. 14. – С. 533 – 542.
9. Воеводин В. В., Овчинников С. Л., Романов С. Ю. Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. – М. : МГУ, 2012. – Т. 13. – С. 307 – 315.
10. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлотації функцій // Монографія. – Харків, 2008. – 160 с.
11. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлотації функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. – С. 20 – 24.
12. Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42. – № 3. – P. 341 – 352.
13. Трофимов О. Е., Тюреникова Л. В. Об одном способе восстановления изображения по многоакурсной томограмме. – Новосибирск : ИА Э СО АН СССР, 1989. – 28 с.
14. Пикалов В. В., Лихачев А. В. Сравнение алгоритмов спиральной томографии // Вычислительные методы программирования. – 2004. – № 5. – С. 170 – 183.
15. Першина Ю. І., Шилін О. В. Відновлення внутрішньої структури 3D об'єкта за відомими томограмами на системі довільних площин // Інформатика та системні науки (ІСН – 2016) : матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, (м. Полтава, 10 – 12 березня 2016 р.). – Полтава : ПУЕТ, 2016. – С. 233 – 236.
16. Першина Ю. І., Шилін О. В., Пасічник В. О. Розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин // Штучний інтелект. – К. : 2015, № 3 – 4. – С. 60 – 69.
17. Литвин О. М., Матвеева С. Ю., Межуєв В. І. Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // Управляющие системы и машины. – Бердянськ : Бердянський державний педагогічний університет, 2010. – № 3. – С. 33–46.
18. Никольский С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками // Математический сборник. – 1958. – Т. 45 (87). № 2. – С. 181 – 194.

References (transliterated)

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften [On the determination of functions by their integral values in certain spheres. Reports for the Academy of Sciences]. Leipzig. Mathem. Publ., 1917, pp. 262–267.
2. Natterer F. Matematicheskie aspekty kompyuternoy tomografii [Mathematical aspects of computer tomography]. Moscow, Mir, 1990. 279 p.
3. Hermen G. Vosstanovlenie izobrazheniy po proektsiyam: osnovy rekonstruktivnoy tomografii [Image restoration by projections: fundamentals of restoration tomography]. Moscow, Mir Publ., 1983. 350 p.
4. Helgason S. Preobrazovanie Radona [Radon transformation]. Moscow, Mir Publ., 1983. 152 p.
5. Dolya P. G. Matematicheskie metodyi kompyuternoy tomografii [Mathematical methods of computer tomography]. Kharkiv, KHNU Publ., 2012. 65 p.
6. Halfin L. A. Ob odnoy al'ternative traditsionnoy vychislitel'noy tomografii [On an alternative for traditional computational tomography]. Zap. nauchn. semin. LOMI [Mathematical notes of Leningrad Department of Mathematics University]. Leningrad, Nauka Publ., 1990, pp. 271–278.
7. Lyas'kov V. V., Simonov E. N. Metody fil'tratsii izobrazheniy v rentgenovskoy kompyuternoy tomografii [Methods of image filtration in X-ray computer tomography]. Vestnik YuUrGU. Seriya «Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika» [Bulletin of SUSU. Series: «Computer technologies, control, radioelectronics»]. Chelyabinsk, Yuzhno-Ural'skiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2014, vol. 14, no. 3, pp. 29–33.
8. Agayan G. M., Voevodin V. V., Romanov S. Yu. O primenimosti posloynnykh modeley v reshenii trekhmernykh zadach ul'trazvukovoy tomografii

- [On using layered models for solving 3D problems of ultrasonic tomography]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming]. Moscow, MGU Publ., 2013, vol. 14, pp. 533–542.
9. Voevodin V. V., Ovchinnikov S. L., Romanov S. Yu. Razrabotka vysokoeffektivnykh masshtabiruemyykh programm v zadache ul'trazvukovoy tomografii [Development of efficient scalable programs for ultrasonic tomography problems]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming]. Moscow, MGU Publ., 2012, vol. 13, pp. 307–315.
 10. Sergiyenko I. V., Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. *Matematychnye modelyuvannya v komp'yuterniy tomografiyi z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy : monografiya* [Mathematical modeling in computer tomography with the use of function interflatation : monograph]. Kharkiv, 2008. 160 p.
 11. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. Matematychna model' vidnovlennya vnutrishn'oyi struktury tryvymirnogo ob'yekta za vidomymy yogo tomogramamy z vykorystanniam interfletatsiyi funktsiy [Mathematical model of internal structure restoration for a 3D object internal structure restoration using function interflatation]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 1, pp. 20–24.
 12. Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2002, vol. 42, no. 3, pp. 341–352.
 13. Trofimov O. E., Tyurenkova L. V. *Ob odnom sposobe vosstanovleniya izobrazheniya po mnogorakursnoy tomogramme* [On a method for image restoration based on multiangle tomogram]. Novosibirsk, IA E SO AN SSSR Publ., 1989. 28 p.
 14. Pikalov V. V., Likhachev A. V. Sravnenie algoritmov spiral'noy tomografii [Comparison of spiral tomography algorithms]. *Vychislitel'nye metody programmirovaniya* [Computational programming methods]. 2004, no. 5, pp. 170–183.
 15. Pershyna Yu. I., Shylin O. V. Vidnovlennya vnutrishn'oyi struktury 3D ob'yekta za vidomymy tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn [A 3D object internal structure restoration by known tomograms on a system of arbitrary planes]. *Informatyka ta systemni nauky (ICH – 2016) : materialy VII Vseukrayins'koyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi za mizhnarodnoyu uchastyu (Poltava, 10 – 12 bereznya 2016)* [Інформатика та системні науки (ICH – 2016) : матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10 – 12 березня 2016 р.)]. Poltava, PUET Publ., 2016, pp. 233–236.
 16. Pershyna Yu. I., Shylin O. V., Pasichnyk V. O. Rozv'yazannya 3D zadachi komp'yuternoyi tomografiyi za vidomymy tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn [Solution for the 3D problem of computer tomography by known tomograms on the system of arbitrary planes]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial intelligence]. Kyiv, 2015, no. 3–4, pp. 60–69.
 17. Lytvyn O. M., Matveyeva S. Yu., Mezhyuev V. I. Metamodel' dlya matematychnogo modelyuvannya poverkhni tila na osnovi danykh radiolokatsiyi [A metamodel for mathematical modeling of the object surface based on radiolocation data]. *Upravlyauschie sistemy i mashyny* [Managed systems and machines]. Berdyansk, Berdyansk'ky derzhavnyy pedagogichnyy universytet Publ., 2010, no. 3, pp. 33–46.
 18. Nikol'skiy S. M. Granichnye svoystva funktsiy, opredelennykh na oblasti s uglovymi tochkami [Boundary properties of functions determined on a corner point domain]. *Matematicheskyy sbornik* [Mathematical digest]. 1958, vol. 45 (87), no. 2, pp. 181–194.

Надійшла (received) 16.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функції / Ю. І. Першина, О. В. Шилін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 105 – 111. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Численная реализация метода восстановления внутренней структуры 3D тела по известным её томограммам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетации функции / Ю. И. Першина, А. В. Шилин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 105 – 111. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Numerical implementation of the method of a 3D body internal structure restoration based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation / Yu. I. Pershyna, O. V. Shylin // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 105 – 111. Bibliog.: 18 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Шилін Олександр Вікторович – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.

Шилин Александр Викторович – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.

Shylin Oleksandr Viktorovich – Postgraduate Student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; тел.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.

О. М. ПЕТРЕНКО, Б. Г. ЛЮБАРСЬКИЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У ТЯГОВОМУ АСИНХРОННОМУ ДВИГУНІ ВАНТАЖНОГО ЕЛЕКТРОВОЗУ ПРИ РУСІ НА ДІЛЯНЦІ КОЛІЇ С ЗАДАНИМ ПРОФІЛЕМ ТА ГРАФІКОМ РУХУ

Розроблено методику моделювання теплових процесів у тяговому асинхронному двигуні на прикладі його застосування у вантажному електровозі при русі на ділянці колії з заданим профілем та графіком руху. Особливістю цієї методики є розрахунок теплових режимів двигуна, здійснюється на основі еквівалентної теплової схеми заміщення з використанням методу вузлових потенціалів для електричних кіл. На їх підставі для запропонованої універсальної еквівалентної теплової схеми заміщення складена система диференціальних рівнянь теплового балансу.

Ключові слова: тяговий асинхронний двигун, вантажний електровоз, еквівалентна тепла схема заміщення, рух на ділянці колії, перегрівання над температурою охолоджувального середовища.

В работе разработана методика моделирования тепловых процессов в тяговом асинхронном двигателе на примере его применения в грузовом электровозе при движении на участке пути с заданным профилем и графиком движения. Особенностью этой методики является расчет тепловых режимов двигателя, осуществляемый на основе эквивалентной тепловой схема замещения с использованием метода узловых потенциалов для электрических цепей. На их основании для предложенной универсальной эквивалентной тепловой схемы замещения составлена система дифференциальных уравнений теплового баланса.

Ключевые слова: тяговый асинхронный двигатель, грузовой электровоз, эквивалентная тепловая схема замещения, движение на участке пути, превышение температурой над температурой охлаждающей среды.

In the work a technique of modeling thermal processes in the traction asynchronous engine by an example of its application in a cargo electric locomotive moving on a section of a track with the set profile and schedule of movement is developed. A feature of this technique is calculation of the thermal conditions of the engine carried out on the basis of an equivalent thermal replacement circuit using the method of nodal potentials for electrical circuits. On their basis a system of differential equations of the heat balance is compiled for the proposed universal equivalent thermal substitution scheme. Based on the results of the simulation, the following is established: the frontal part of the stator winding has the maximum temperature rise, and the movement of the freight train in question along the given section of the track and according to the given schedule can be carried out no more than twice, then it is necessary to stop for cooling the engines or apply another schedule.

Key words: traction induction motor, cargo electric locomotive, equivalent thermal replacement scheme, movement on the section of the track, excess of temperature above the temperature of the cooling medium.

Вступ. При роботі тягового приводу електрорухомого складу (ЕРС) поширені режими вибігу та механічного (пневматичного) гальмування, для яких характерна відсутність перетворення енергії у тяговому двигуні та перебування його в процесі охолодження. Максимальна температура тягового двигуна може бути значно нижче за температуру, що встановилася, та вимагати значно менш потужнішої системи охолодження.

Для визначення температури елементів конструкції тягових двигунів необхідно проведення моделювання їх теплового стану при русі електрорухомого складу. В роботі розглядається вирішення цієї задачі для найбільш поширених в наступний час у виробництві асинхронних тягових двигунів (АТД), що встановлені на вантажному електровозі.

Аналіз останніх досліджень. Електромагнітні процеси перетворення енергії у ЕРС, механічні процеси, які зв'язані з рухом потягу на ділянці колії, та теплові процеси у тягових двигунах мають різні швидкості протікання. Так, теплові процеси у тягових двигунах характеризуються значеннями постійної часу, що може становити 10 ... 30 хв. [1 – 6], а нагрів двигуна до постійної температури може тривати 35 ... 100 хв. [1 – 6]. Електромеханічні процеси при русі електрорухомого складу більш динамічні; вони тривають близько 0,1 ... 100с. Режим роботи тягового приводу може змінюватися кілька разів за одну хвилину. Для визначення теплового стану тягового двигуна необхідно врахування теплового навантаження за весь час роботи [1, 2].

Мета роботи: розробити методику моделювання теплових процесів у тяговому асинхронному двигуні на прикладі його застосування у вантажному електровозі при русі на ділянці колії с заданим профілем та графіком руху.

Постановка задачі. За результатами вирішення задачі руху електрорухомого складу на ділянці колії проведено вирішення тягової задачі руху вантажного потягу з 60 вагонами загальною масою 3600 т та електровозом з осявою характеристикою $2\chi(3_0 - 3_0)$, розробленого на базі тепловозу 2ТЕ 25А із заданим графіком руху. На електровозі встановлені тягові двигуни АД917. Методика визначення кривих руху (рис. 1) наведена у роботах [7 – 9]. За результатами вирішення тягової задачі знайдено втрати в елементах конструкції тягового двигуна, що наведені на рис. 2.

Математична модель. В роботі [10] пропонується універсальна еквівалентна тепла схема, що дозволяє виконувати теплові розрахунки нестационарних режимів роботи АТД за різних систем охолодження. Розглянуто використання універсальної теплової схеми для теплових розрахунків асинхронних двигунів регульованих електродвигунів для двигунів зі ступенем захисту IP22, IP23, до яких належить АД 917; вона зображена на рис. 3.

Для розрахунку ЕТС пропонується використати *метод вузлових потенціалів* для електричних кіл.

© О. М. Петренко, Б. Г. Любарський, 2017

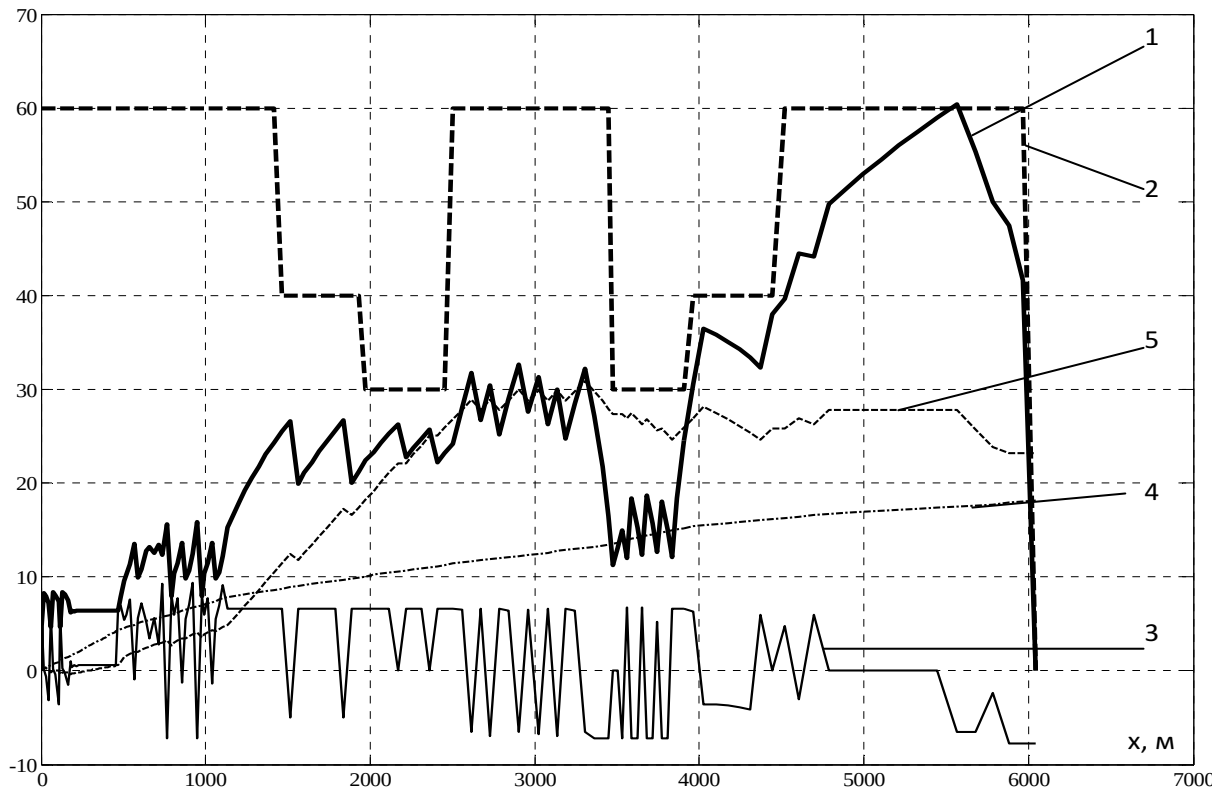


Рис. 1 – Результати вирішення тягової задачі при русі вантажного потягу: 1 – швидкість руху (v), км/год; 2 – обмеження швидкості, км/год; 3 – сила тяги/100, ($F_{tr}/100$) кН; 4 – час руху (t), хв.; 5 – витрати енергії/10 ($E/10$), кВт·год.

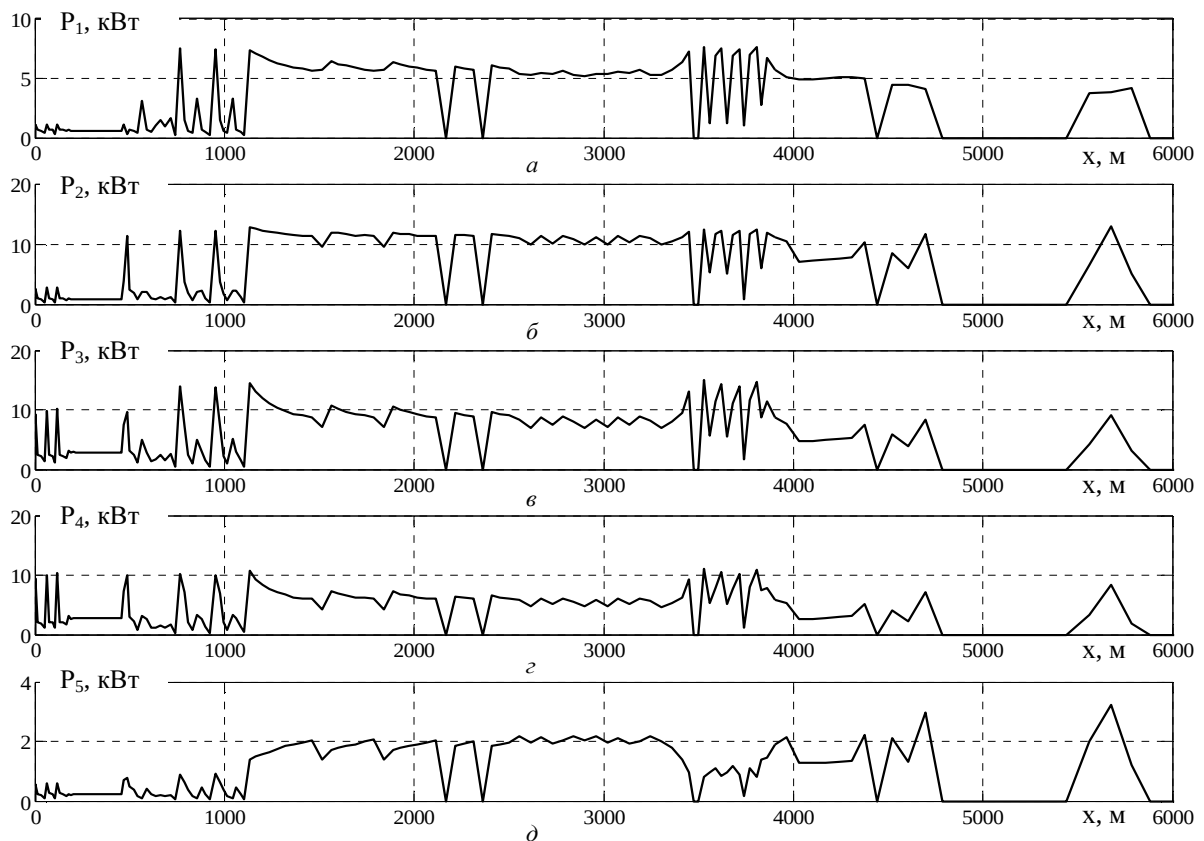


Рис. 2 – Втрати у тяговому двигуні: a – втрати у сталі статора; b – втрати у роторі; e – втрати пазової частини обмотки статора; z – лобовій частині обмотки статора; d – механічні втрати.

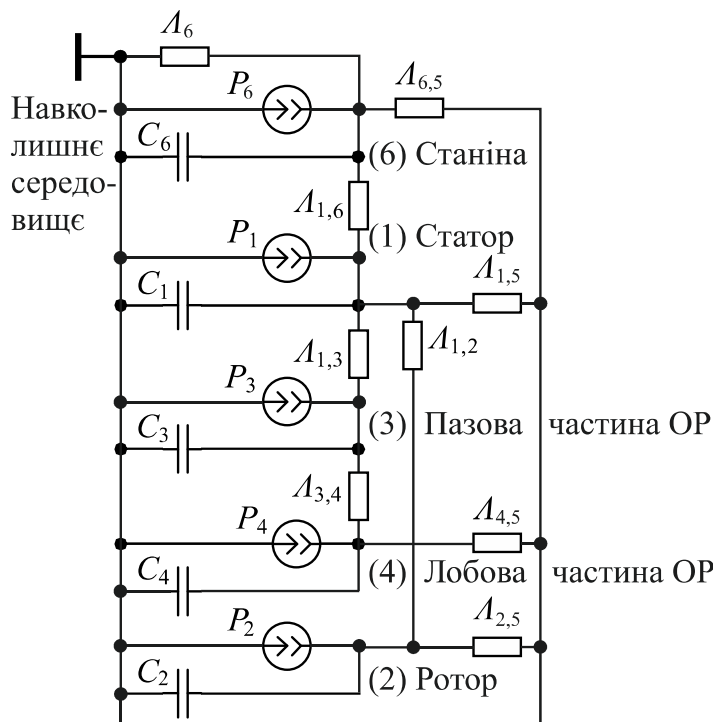


Рис. 3 – ЕТС для АТД з ступенем захисту IP22, IP23.

На його підставі для запропонованої універсальної ЕТС може бути складена система диференціальних рівнянь теплового балансу. У матричному вигляді система представляється виразом:

$$\frac{d}{dt}u = [C]^{-1} \cdot [DP + L \times u], \quad (1)$$

де u – матриці-стовпці середніх перегрівань над температурою охолоджувального середовища у відповідних конструктивних елементах електричної машини,

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \quad (2)$$

C – матриця теплоємностей відповідних конструктивних елементів, на які умовно розбивається АТД,

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

DP – матриця-стовпець потужностей тепловиділення у відповідних конструктивних елементах АТД,

$$DP = [DP_1, DP_2, \dots, DP_n]^T. \quad (4)$$

Величини потужностей тепловиділення розраховуються при аналізі режимів роботи, що встановилися, або нестационарних, за даними втрат в елементах машини.

L – це матриця теплових провідностей,

$$L = \begin{bmatrix} -L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,n} \\ L_{2,1} & -L_{2,2} & \dots & L_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \dots & -L_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матриці потужностей тепловиділення DP та провідностей L складаються на основі метода вузлових потенціалів для електричних кіл:

$$L_{n,n} = \sum_k \Lambda_{k,n}, \quad (6)$$

$$L_{n,m} = L_{m,n} = \Lambda_{n,m}. \quad (7)$$

де $\Lambda_{k,n}$ – теплова провідність між елементами двигуна.

Результати моделювання. Моделювання теплового стану тягового двигуна АД917 вантажного тепловозу на ділянках колії раціонально проводити при 4 циклах руху за зазначеною ділянкою (рис. 4), в зв'язку з тим, що за один цикл руху температура елементів двигуна не досягає максимального значення.

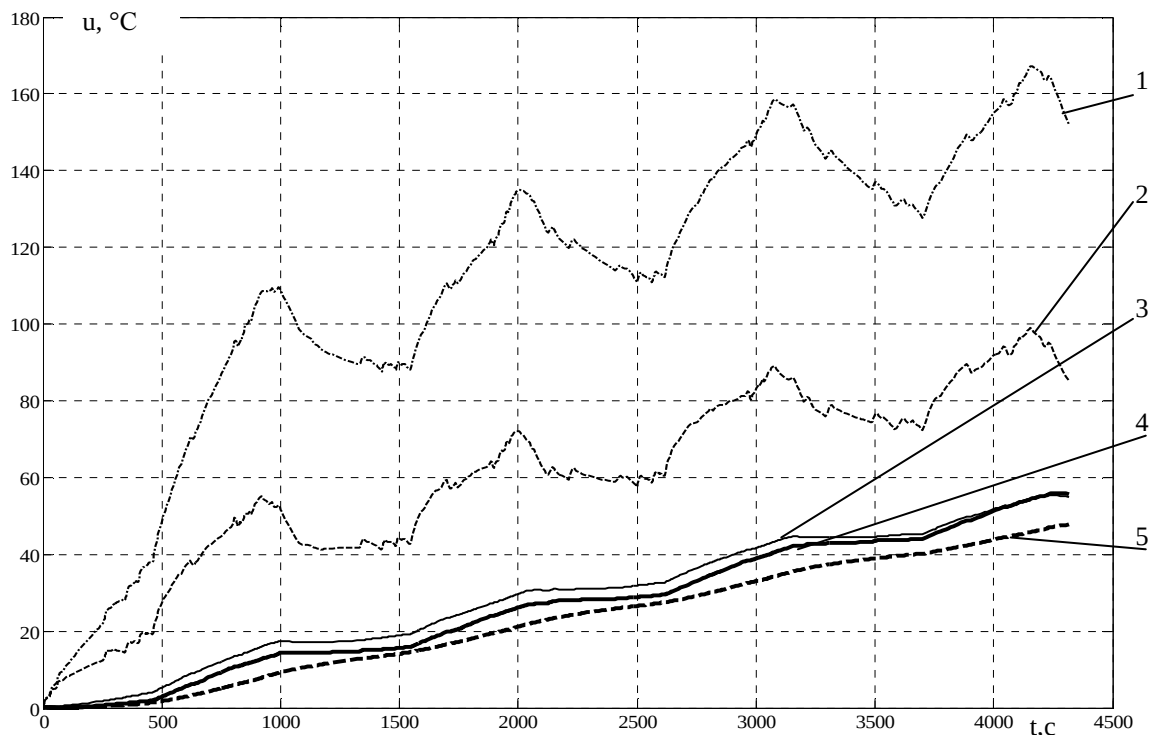


Рис. 4 – Результати моделювання теплового стану тягового двигуна АД917 вантажного електровозу на ділянках колії.

Залежності перегрівань над температурою охолоджувального середовища $^{\circ}\text{C}$ від часу:

- 1 – лобової частини обмотки статора; 2 – пазової частини обмотки статора; 3 – сердечника статора;
4 – ротору; 5 – станини.

Результати моделювання показують, що максимальне перегрівання над температурою охолоджувального середовища має лобова частина обмотки статора. Так за перший цикл навантаження 991 с вона становить $109,6^{\circ}\text{C}$, за другий – 135°C на 2001 с з початку руху, за третій – $158,5^{\circ}\text{C}$ на 3075 с та за четвертий – $167,2^{\circ}\text{C}$ на 4175 с, відповідно. За перші два цикли руху перегрівання над температурою охолоджувального середовища не досягло допустимого значення для ізоляції, що застосована у АТД – 145°C (клас ізоляції Н). Однак за третій цикл руху перегрівання над температурою охолоджувального середовища стало недопустимим. Таким чином встановлено, що рух розглянутого вантажного потягу за заданою ділянкою колії та графіком можливо проводити не більш ніж два рази, потім потрібно проводити зупинку для охолодження двигунів, або застосовувати інший графік руху.

Висновки. Таким чином, авторами статті розроблена методика моделювання теплових процесів у тяговому асинхронному двигуні на прикладі його застосування у вантажному електровозі при русі на ділянці колії з заданим профілем та графіком руху. Особливістю цієї методики є те, що розрахунок теплових режимів двигуна здійснюється на основі еквівалентної теплової схеми заміщення з використанням методу вузлових потенціалів для електричних кіл. На їх підставі для запропонованої універсальної еквівалентної теплової схеми заміщення складена система диференціальних рівнянь теплового балансу. За результатами моделювання встановлено наступне:

– максимальне перегрівання над температурою охолоджувального середовища має лобова частина обмотки статора;

– рух розглянутого вантажного потягу за встановленою ділянкою колії та графіком можливо проводити не більш ніж два рази, потім потрібно проводити зупинку для охолодження двигунів, або застосовувати інший графік руху.

Список літератури

1. Любарський Б. Г. Теоретичні основи для вибору та оцінки перспективних систем електромеханічного перетворення енергії електрорухомого складу. – Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.22.09. – «Електротранспорт». Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». – Харків, 2014. – 368 с.
2. Гетьман Г. К. Научные основы определения рационального мощностного ряда тяговых средств железнодорожного транспорта : монография. – Д. : Изд. Днепр. нац. ун-та ж/д трансп. им. акад. В. Лазаряна, 2008. – 444 с.
3. Мокін О. Б., Мокін Б. І. Моделювання та оптимізація руху багатомасових електричних транспортних засобів поверхнями зі складним рельєфом : монографія. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 192 с.
4. Дмитриченко В. Д., Заковоротний А. Ю. Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов. – Х. : Изд. центр «НТМТ», 2013. – 248 с.
5. Петренко О. М., Любарський Б. Г. Визначення ефективності електрорухомого складу. Основні положення та підходи // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2015. – № 6. – С. 8 – 13.

6. Todorov Emanuel Optimal control theory // Bayesian brain: probabilistic approaches to neural coding. – 2006. – pp. 269 – 298.
7. Kappe, Hilbert J. Optimal control theory and the linear bellman equation // Inference and Learning in Dynamic Models. – 2011. – pp. 363 – 387.
8. Петренко О. М., Любарський Б. Г., Глебова М. Л. Алгоритм синтезу експертної системи управління рухом електрорухомого складу на основі рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ» : зб. наук. пр. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 6 (1178). – С. 89 – 95.
9. Петренко О. М., Доманський І. В., Любарський Б. Г. Методика оптимізації режимів роботи асинхронного тягового приводу рухомого складу // Механіка та машинобудування. – 2016. – №1. – С. 59 – 67.
10. Петрушин В. С., Рябинин С. В., Якимец А. М. Расчет температур конструктивных элементов асинхронных двигателей в динамических режимах // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2000. – № 403. – С. 145 – 149.

References (transliterated)

1. Lyubarskiy B. G. Teoretichni osnovy dlya vyboru ta otsinky perspektivnykh system elektromekhanichnogo peretvorenniya energiyi elektrorukhomogo skladu : dis. d-ra tekhn. nauk 05.22.09. [Theoretical basis for choosing and estimating perspective systems for electromechanical transformation of the energy of an electric rolling stock. Abstract of the thesis dis. Dr. of Engineering Sciences 05.22.09]. Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkiv's'kyu politekhnichnyy instytut», Kharkiv, 2014. 368p.
2. Get'man G. K. Nauchnye osnovy opredeleniya ratsional'nogo moshchnostnogo ryada tyagovykh sredstv zheleznodorozhnogo transporta : monografiya [Scientific basis for determining rational power range for traction railway units: monograph]. Dnepropetrovsk, Izd. Dnepr. nats. un-ta zh/d transp. im. akad. V. Lazaryana Publ., 2008. 444 p.
3. Mokin O. B., Mokin B. I. Modelyuvannya ta optymizatsiya rukhu bagatomasovykh elektrychnykh transportnykh zasobiv poverkhnymy zi skladnym rel'yefom : monografiya [Modeling and optimization of the motion of multimass electric vehicles on the surfaces with complex lay: monograph]. Vinnitsa, VNTU Publ., 2013. 192 p.
4. Dmitrienko V. D., Zakovorotnyy A. Yu. Modelirovanie i optymizatsiya protsessov upravleniya dvizheniem dizel-poezdov [Modeling and optimization of diesel train motion management]. Kharkov, Izd. tsentr "NTMT" Publ., 2013. 248 p.
5. Petrenko O. M., Lyubarskiy B. G. Vyznachennya efektyvnosti elektrorukhomogo skladu. Osnovni polozhennya ta pidkhody [Determining the efficiency of an electric rolling stock. Main positions and approaches]. Informatsiyno-keruyuchi systemy na zaliznychnomu transporti [Information management systems for railway]. 2015, no. 6, pp. 8–13.
6. Todorov Emanuel Optimal control theory. Bayesian brain : probabilistic approaches to neural coding. 2006, 269–298.
7. Kappen Hilbert J. Optimal control theory and the linear bellman equation. Inference and Learning in Dynamic Models. 2011, 363–387.
8. Petrenko O. M., Lyubars'kiy B. G., Glebova M. L. Algoritmyntezu ekspertnoyi systemy upravlinnya rukhom elektrorukhomogo skladu na osnovi rishennya rivnyannya Gamil'tona-Yakobi-Bellmana [An algorithm for synthesizing an expert system for managing electric rolling stock motion based on solving the Hamilton-Jacobi-Bellman equation]. Visnik Nats. tekhn. un-tu «KhPI» : zb. nauk. pr. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 6 (1178), pp. 89–95.
9. Petrenko O. M., Domanskiy I. V., Lyubarskiy B. G. Metodyka optymizatsiyi rezhymiv roboty asinkhronnogo tyagovogo pryvodu rukhomogo skladu [A method for optimizing the operation of the asynchronous traction drive of a rolling stock]. Mehanika ta mashynobuduvannya [Mechanics and mechanical engineering]. 2016, no. 1, pp. 59–67.
10. Petrushin V.S., Ryabinin S.V., Yakimets A.M. Raschet temperatur konstruktivnykh elementov asinkhronnykh dvigateley v dinamicheskikh rezhimakh [Computing the temperature of the constructive items of asynchronous engines in the dynamic]. Visnyk Natsional'nogo universytetu «Lviv's'ka politekhnika» [Bulletin of the National University «Lviv Polytechnic»]. 2000, no. 403, pp. 145–149.

Надійшло (received) 06.02.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання теплових процесів у тяговому асинхронному двигуні вантажного електровозу при русі на ділянці колії з заданим профілем та графіком руху / О. М. Петренко, Б. Г. Любарський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 112 – 116. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование тепловых процессов в тяговом асинхронном двигателе грузового электровоза при движении на участке пути с заданным профилем и графиком движения / А. Н. Петренко, Б. Г. Любарский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 112 – 116. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Modeling thermal processes in the traction asynchronous engine of a cargo electric locomotive moving on a section of a track with the given profile and traffic schedule / O. M. Petrenko, B. G. Lyubarsky // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 112 – 116. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Петренко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: (095) 688-27-16; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

Петренко Олександр Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А. Н. Бекетова, г. Харьков; тел.: (095) 688-27-16; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

Petrenko Oleksandr Mykolayovych – Candidate of Technical Sciences, A. N. Beketov Kharkiv National University of Municipal Economy, Kharkov; tel.: (095) 688-27-16; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

Любарський Борис Григорович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 993-75-69; e-mail: lboris19111972@mail.ru.

Любарский Борис Григорьевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 993-75-69; e-mail: lboris19111972@mail.ru.

Lyubarsky Boris Grygorovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (067) 993-75-69; e-mail: lboris19111972@mail.ru.

Ю. А. ПЛАКСІЙ

НОВІ АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА: ДВОЧАСТОТНІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КВАТЕРНІОННІ МОДЕЛІ

Запропоновано нові аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла і отримано неперервні еталонні моделі обертання, основані на дво-частотному мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одночасно змінюються у часі. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають таким оберта-льним рухам. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделей. Представлені моделі можуть бути використані для то-чносного аналізу алгоритмів визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, рівняння обертання твердого тіла, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному про-сторі, алгоритм визначення орієнтації.

Предложены новые аналитические решения уравнений вращения твердого тела и получены непрерывные эталонные модели вращения, ос-нованные на двухчастотном мультипликативном представлении кватерниона ориентации в функциях углов, одновременно изменяющихся во времени. Построены аналитические зависимости для квазикоординат на такте вычисления параметров ориентации и компонент кватер-ниона, соответствующих таким вращательным движениям. Для нескольких наборов параметров получены численные реализации моделей. Представленные модели могут быть использованы для точностного анализа алгоритмов определения ориентации.

Ключевые слова: кватернион, уравнения вращения твердого тела, эталонная модель, квазикоординаты, траектории в configura-ционном пространстве, алгоритм определения ориентации.

New analytical solutions of the rigid body rotation equations are proposed, and continuous reference rotation models based on two-frequency multipli- cative representation of an orientation quaternion in functions of the angles simultaneously changing in time are offered. Analytical dependences for quasicordinates on a step of calculations of orientation parameters and quaternion components corresponding to such rotations are constructed. For several sets of parameters numerical realization of models is received. The results are presented in the form of dependences of quasicordinates on time and trajectories in orientation parameters configuration space. The presented models can be used for error analysis of orientation definition algo- rithms.

Key words: quaternion, rigid body rotation equations, reference model, quasicordinates, trajectories in configuration space, algorithm of defi- nition of orientation.

Вступ. Точносний аналіз алгоритмів визначення орієнтації, які математично відтворюють образ інерціаль- ного базису в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС), є важливим етапом проектування таких систем [1]. Для отримання оцінок похибок алгоритмів застосовують *еталонні моделі* обертання твердого тіла, які встановлюють зв'язок між кватерніоном орієнтації і первинною інформацією про обертання твердого тіла на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$, що надходить в автономний обчислювач з виходів вимірювачів кутової швид-кості у вигляді *квазікоординат* [2]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної системи коорди-нат.

Неперервні еталонні моделі обертання, на відміну від дискретних еталонних моделей, основані на точних розв'язках в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла. Найбільш застосовними еталонними моделями є відомі моделі *конічного руху* [3] та *регулярної прецесії* [4]. На відміну від моделі регулярної прецесії модель конічного руху охоплює не тільки випадок вільного обертання твердого тіла, але й деякі обертальні рухи під впливом відповідних моментів управління. Оскільки реальний рух об'єкта, як правило, є більш складним, то розширення класу неперервних еталонних моделей є актуальною за-дачею точносного аналізу алгоритмів при проектуванні систем безплатформеної орієнтації.

Отримати нові аналітичні розв'язки системи рівнянь обертання твердого тіла можна, якщо належним чи- ном задати аналітичне представлення кватерніона орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$, яке автоматично забезпечує виконання умови нормування кватерніона $\|\Lambda(t)\| = 1$. Проекції вектора кутової швидкості оберталь- ного руху, які є розв'язками *системи динамічних рівнянь Ейлера*, можна також отримати в аналітичному вигляді з оберненого кінематичного рівняння за формулами [2]:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= 2(\dot{\lambda}_1(t)\lambda_0(t) - \dot{\lambda}_0(t)\lambda_1(t) + \lambda_3(t)\dot{\lambda}_2(t) - \lambda_2(t)\dot{\lambda}_3(t)); \\ \omega_2(t) &= 2(\dot{\lambda}_2(t)\lambda_0(t) - \dot{\lambda}_0(t)\lambda_2(t) + \lambda_1(t)\dot{\lambda}_3(t) - \lambda_3(t)\dot{\lambda}_1(t)); \\ \omega_3(t) &= 2(\dot{\lambda}_3(t)\lambda_0(t) - \dot{\lambda}_0(t)\lambda_3(t) + \lambda_2(t)\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_1(t)\dot{\lambda}_2(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\dot{\lambda}_j(t) = d\lambda_j(t)/dt$, $j = \overline{0,3}$.

Аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, відмінні від класичних, представлені в роботах [5, 6]. В даній роботі розглядаються нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, основані на мульти-

плікативних аналітичних представленнях компонент кватерніона орієнтації, і побудовані неперервні еталонні моделі обертання.

Постановка задачі. Обертальний рух твердого тіла навколо його центру мас описується системою динамічних рівнянь Ейлера

$$I_1 \dot{\omega}_1(t) - (I_2 - I_1) \omega_2(t) \omega_3(t) = M_1(t), \quad (1, 2, 3) \quad (3)$$

і кінематичного кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0,5 \Lambda(t) \circ \omega(t), \quad (4)$$

де I_i , $i = 1, 2, 3$ – головні центральні моменти інерції твердого тіла; M_i , $i = 1, 2, 3$ – проекції вектору головного моменту; $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$, $(1, 2, 3)$ – символ кругової перестановки індексів.

Необхідно отримати двочастотні аналітичні розв'язки рівнянь (3), (4) у вигляді $\omega_i = \omega_i(k_1, k_2, t)$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_j = \lambda_j(k_1, k_2, t)$, $j = 0, 3$ і на основі цих розв'язків побудувати параметричні аналітичні *еталонні моделі обертання твердого тіла* у вигляді сукупності квазікоординат (1) на такті $[t_{n-1}, t_n]$ і модельного кватерніона орієнтації, що відповідає цим квазікоординатами. Значення для квазікоординат (1) можна отримати в аналітичному вигляді або чисельно з формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt$, $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти *вектора позірнього повороту* $\bar{\theta}(t) = \int_0^t \bar{\omega}(t) dt$,

обчислені в моменти часу t_n і t_{n-1} .

Дwochастотні параметричні аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла.

Перший двочастотний розв'язок. Представимо аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (4) у наступному вигляді:

$$\lambda_0(t) = \eta \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t; \quad \lambda_1(t) = \sin k_1 t; \quad \lambda_2(t) = \cos k_1 t \cdot \sin k_2 t; \quad \lambda_3(t) = \xi \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t. \quad (6)$$

де k_1 , k_2 – невідомі частоти; η і ξ – параметри, для яких виконується умова $\eta^2 + \xi^2 = 1$.

Для цього представлення кватерніона орієнтації згідно формул (2) проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= 2\eta k_1 \cos k_2 t + 0,5\eta k_2 \cos(2k_1 - k_2)t - 0,5\eta k_2 \cos(2k_1 + k_2)t + \xi k_2 + \xi k_2 \cos 2k_1 t; \\ \omega_2(t) &= -2\xi k_1 \cos k_2 t + \eta k_2 + \eta k_2 \cos 2k_1 t - 0,5\xi k_2 \cos(2k_1 - k_2)t + 0,5\xi k_2 \cos(2k_1 + k_2)t; \\ \omega_3(t) &= 2k_1 \sin k_2 t - 0,5k_2 \sin(2k_1 + k_2)t - 0,5k_2 \sin(2k_1 - k_2)t. \end{aligned} \quad (7)$$

Отриманий аналітичний розв'язок рівнянь обертання (3), (4) відповідає початковим умовам $\Lambda(0) = (\eta, 0, 0, \xi)$, $\bar{\omega}(0) = (2\eta k_1 + 2\xi k_2, -2\xi k_1 + 2\eta k_2, 0)$. При цьому перша та друга компоненти вектора кутової швидкості містять постійні складові, а третя компонента не залежить від η і ξ .

Другий двочастотний розв'язок. Аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (4) запишемо у вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos k_1 t; \quad \lambda_1(t) = \sin k_1 t \cdot \sin k_2 t; \quad \lambda_2(t) = \xi \sin k_1 t \cdot \cos k_2 t; \quad \lambda_3(t) = \eta \sin k_1 t \cdot \cos k_2 t, \quad (8)$$

де k_1 , k_2 – невідомі частоти, $\eta^2 + \xi^2 = 1$.

Відповідний розв'язок динамічних рівнянь (3) згідно формул (2) матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= 2k_1 \sin k_2 t + 0,5k_2 \sin(2k_1 + k_2)t + 0,5k_2 \sin(2k_1 - k_2)t; \\ \omega_2(t) &= 2\xi k_1 \cos k_2 t - \eta k_2 + \eta k_2 \cos 2k_1 t - 0,5\xi k_2 \cos(2k_1 - k_2)t + 0,5\xi k_2 \cos(2k_1 + k_2)t; \\ \omega_3(t) &= 2\eta k_1 \cos k_2 t - 0,5\eta k_2 \cos(2k_1 - k_2)t + 0,5\eta k_2 \cos(2k_1 + k_2)t + \xi k_2 - \xi k_2 \cos 2k_1 t. \end{aligned} \quad (9)$$

Для цього розв'язку друга та третя компоненти вектора кутової швидкості містять постійні складові, а перша компонента не залежить від параметрів η і ξ , $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{\omega}(0) = (0, 2\xi k_1, 2\eta k_1)$.

Третій двочастотний розв'язок. Будемо шукати розв'язок кінематичного рівняння (4) у вигляді

$$\lambda_0(t) = \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t; \quad \lambda_1(t) = \sin k_1 t; \quad \lambda_2(t) = \eta \cos k_1 t \cdot \sin k_2 t; \quad \lambda_3(t) = \xi \cos k_1 t \cdot \sin k_2 t. \quad (10)$$

де k_1 , k_2 – невідомі частоти, а для η і ξ виконується умова: $\eta^2 + \xi^2 = 1$.

В результаті підстановки компонент кватерніона орієнтації (10) і похідних від компонент в формули (2) отримаємо розв'язок динамічних рівнянь в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= 2k_1 \cos k_2 t + 0,5k_2 \cos(2k_1 - k_2)t - 0,5k_2 \cos(2k_1 + k_2)t; \\ \omega_2(t) &= -2\xi k_1 \sin k_2 t + \eta k_2 + \eta k_2 \cos 2k_1 t + 0,5\xi k_2 \sin(2k_1 + k_2)t + 0,5\xi k_2 \sin(2k_1 - k_2)t; \end{aligned}$$

$$\omega_3(t) = 2\eta k_1 \sin k_2 t - 0,5\eta k_2 \sin(2k_1 + k_2)t - 0,5\eta k_2 \sin(2k_1 - k_2)t + \xi k_2 + \xi k_2 \cos 2k_1 t. \quad (11)$$

Отриманий розв'язок задовольняє початковим умовам: $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{\omega}(0) = (2k_1, -2\xi k_1 + 2\eta k_1, 2\xi k_2)$, друга та третя компоненти вектора кутової швидкості містять постійні складові.

Четвертий двочастотний розв'язок. Розв'язок кінематичного рівняння (4) представляється в аналітичному вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t; \lambda_1(t) = \sin k_1 t \cdot \cos k_2 t; \lambda_2(t) = \xi \sin k_2 t; \lambda_3(t) = \eta \sin k_2 t, \quad (12)$$

де k_1, k_2 – невідомі частоти, $\eta^2 + \xi^2 = 1$.

Для цього представлення кватерніона орієнтації нескладно отримати відповідний розв'язок динамічних рівнянь (3) у вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_1 + k_1 \cos 2k_2 t; \\ \omega_2(t) &= 0,5\eta k_1 \cos(2k_2 - k_1)t - 0,5\eta k_1 \cos(2k_2 + k_1)t - 0,5\xi k_1 \sin(2k_2 + k_1)t - \\ &\quad - 0,5\xi k_1 \sin(2k_2 - k_1)t + 2\eta k_2 \cos k_1 t + 2\xi k_2 \sin k_1 t; \\ \omega_3(t) &= 0,5\xi k_1 \cos(2k_2 - k_1)t - 0,5\xi k_1 \cos(2k_2 + k_1)t + 0,5\eta k_1 \sin(2k_2 + k_1)t + \\ &\quad + 0,5\eta k_1 \sin(2k_2 - k_1)t + 2\eta k_2 \cos k_1 t - 2\eta k_2 \sin k_1 t. \end{aligned} \quad (13)$$

Для цього розв'язку перша компонента вектора кутової швидкості має постійну складову, $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{\omega}(0) = (2\eta k_1 + 2\xi k_2, -2\xi k_1 + 2\eta k_2, 0)$.

Отримані аналітичні розв'язки можуть бути покладені в основу побудовання еталонних моделей обертання твердого тіла. Для цього вони мають бути доповнені аналітичними виразами для квазікоординат (1) із застосуванням формули (5).

Значення частот k_1, k_2 в представлених розв'язках і основаних на них еталонних моделях обертання можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимацій реального руху об'єкта. Коли частоти k_1, k_2 і параметри η, ξ не задані, будемо мати *опорну модель* обертання. Надання частотам k_1, k_2 і параметрам η, ξ конкретних значень перетворює опорну модель обертання на *еталонну*.

Чисельне моделювання мультиплікативних двочастотних еталонних моделей обертання. Побудуємо запропоновані двочастотні моделі для конкретних значень частот і параметрів, такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с на інтервалі часу 2000 с.

Для значень частот $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$ і параметрів $\eta = 0,8$, $\xi = 0,6$ результати реалізації еталонної моделі для першого двочастотного розв'язку у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлено на рис. 1 та рис. 2 відповідно. Як видно з рис. 2, всі траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ мають осі симетрії.

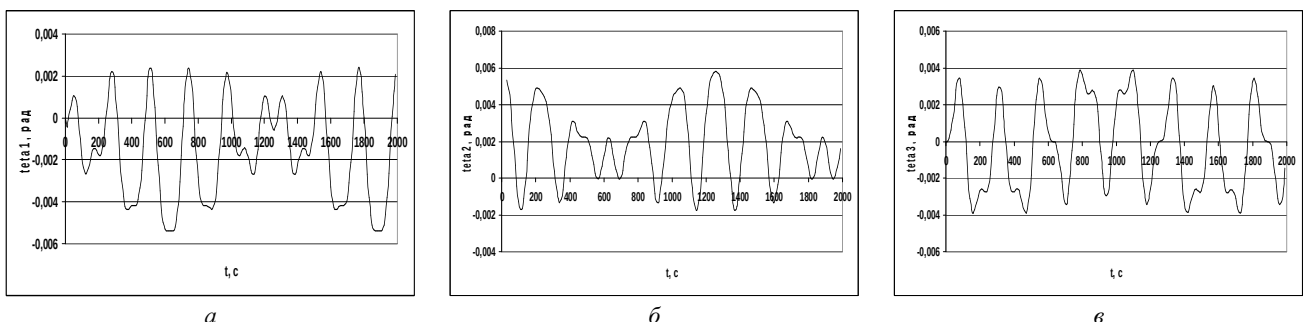


Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

Залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при значеннях частот $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$ і параметрів $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$ представлено на рис. 3. Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку приведено на рис. 4. Як видно з рис. 4, всі траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ мають осі симетрії.

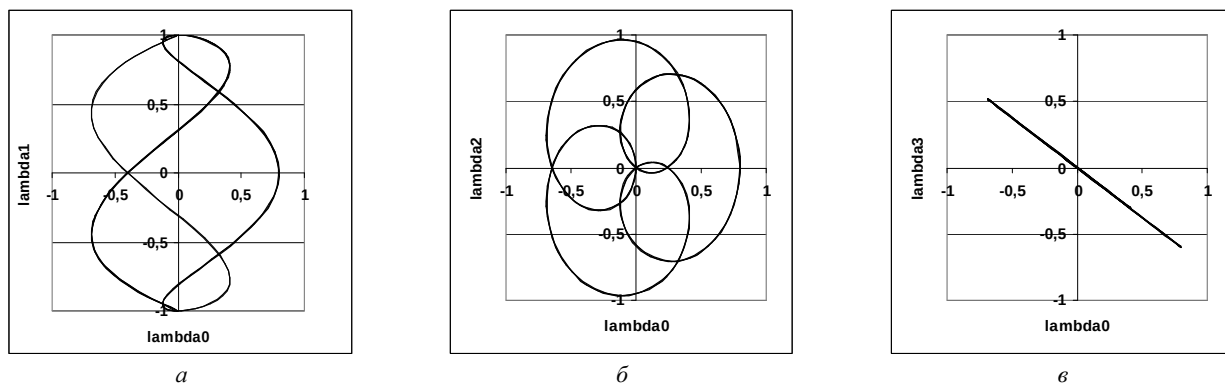


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$.

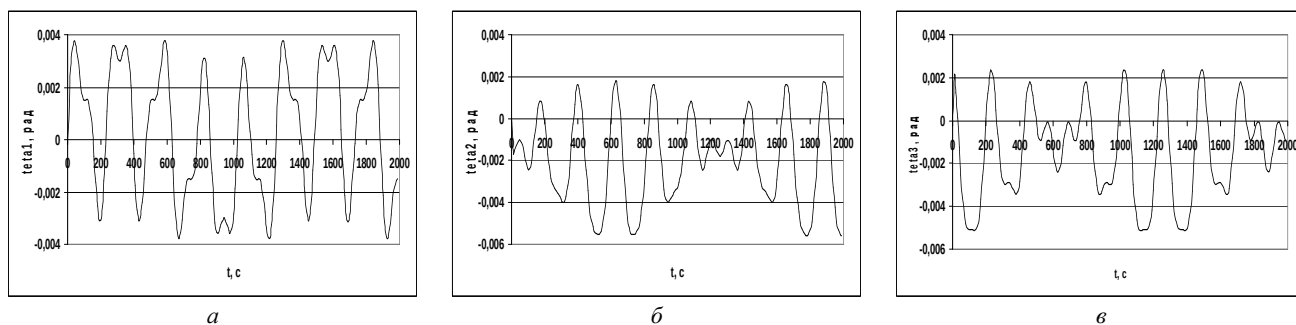


Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

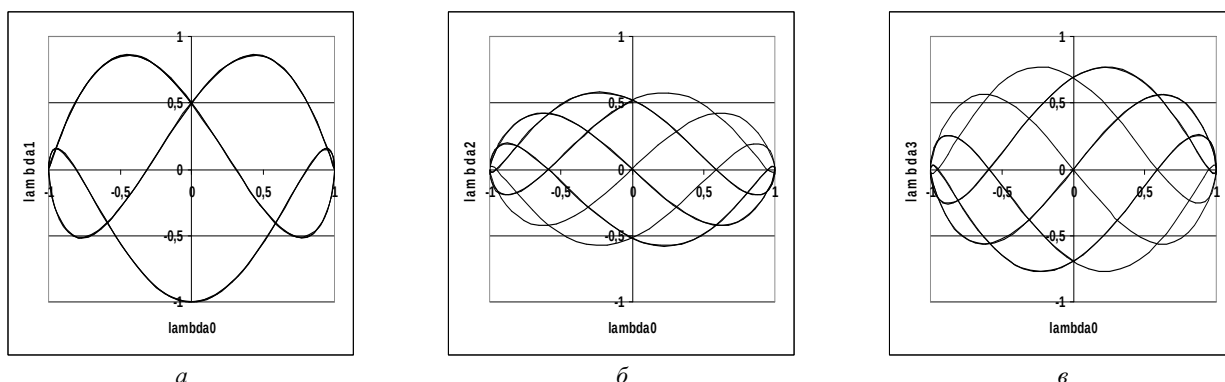


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$.

На рис. 5 представлено залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі третього двочастотного розв'язку при значеннях частот $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$ і параметрів $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$. На рис. 6 представлено отримані при цьому траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Всі траєкторії мають властивість симетрії. Траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$ схожа на траєкторію $\lambda_3(\lambda_0)$, але масштаб по вертикальній осі на рис. 6, а і рис. 6, б різний.

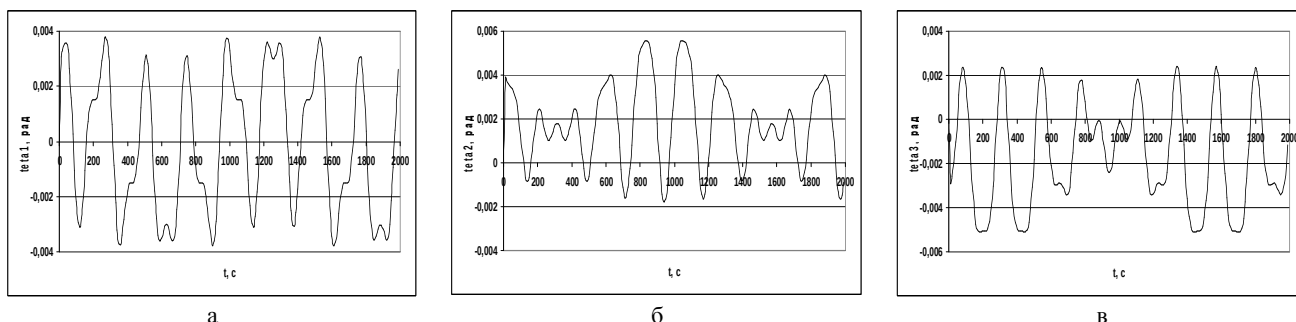


Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі третього двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

На рис. 7 представлено залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі четвертого двочастотного розв'язку при значеннях частот $k_1 = 0,005$, $k_2 = 0,025$ і параметрів $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$ на інтервалі часу 2000 с. Траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведено на рис. 8. Всі траєкторії мають осі симетрії. Як і у випадку еталонної моделі третього двочастотного розв'язку, траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$ подібна до траєкторії $\lambda_3(\lambda_0)$, але на рис. 8, а і рис. 8, б масштаб по вертикальній осі різний.

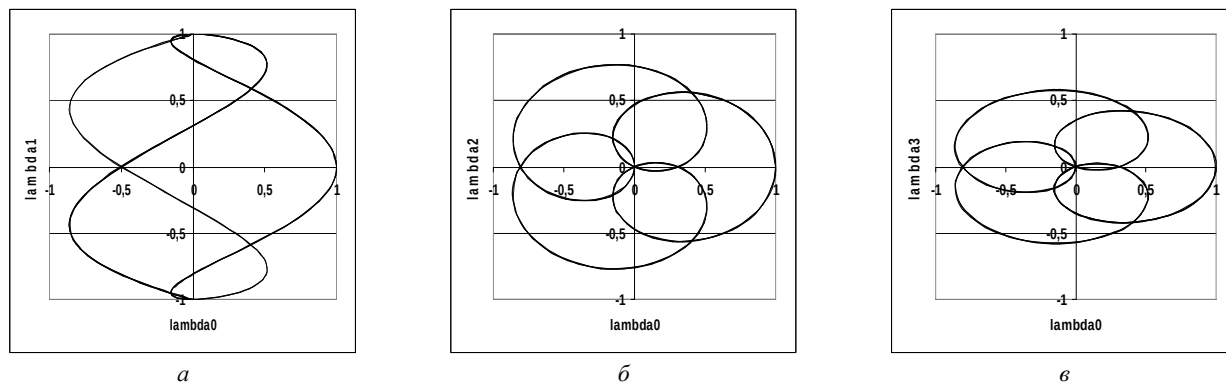


Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі часу для еталонної моделі третього двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$.

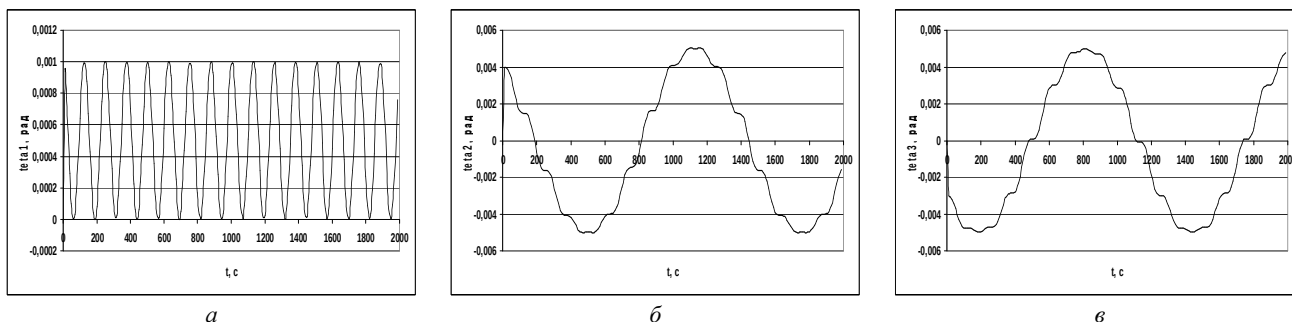


Рис. 7 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі четвертого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

В роботі [5] приведено результати реалізації еталонної моделі регулярної прецесії і наведено побудовані траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$. Порівняння результатів, отриманих для еталонних моделей двочастотних розв'язків з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропоновані моделі охоплюють інші, більш складні обертальні рухи твердого тіла.

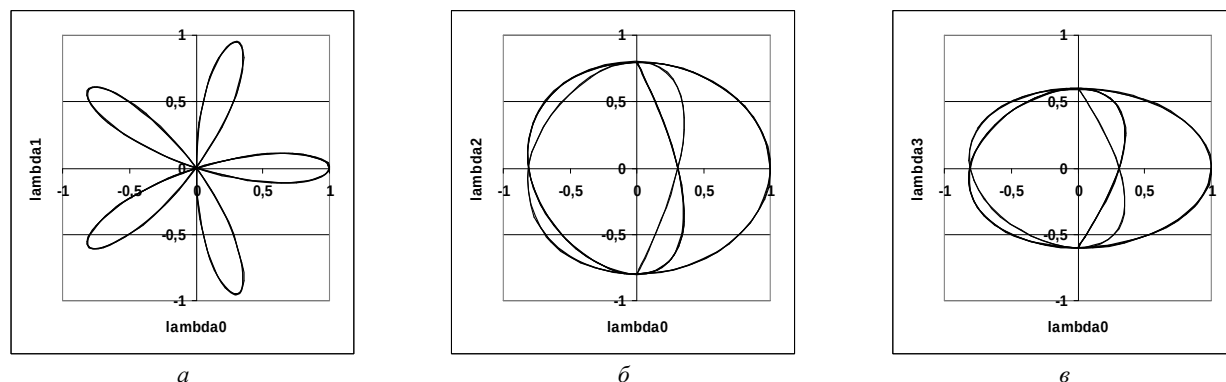


Рис. 8 – Траєкторії в конфігураційному просторі часу для еталонної моделі четвертого двочастотного розв'язку при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $\eta = 0,8$, $\xi = -0,6$: а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; в – $\lambda_3(\lambda_0)$.

Висновки. Запропоновано чотири нові двочастотні розв'язки системи динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла і отримано на їх основі еталонні моделі обертання. Проведений чисельний експеримент показав, що при належному виборі параметрів моделей можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, що різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Отримані еталонні моделі можна використовувати для точного аналізу алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації в БІНС.

Список литературы

1. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электронприбор». – 2003. – С. 250 – 260.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
3. Ткаченко А. И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев, 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22.
4. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – Киев, 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
5. Плаксий Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37 (1010). – С. 141 – 147.
6. Плаксий Ю. А. Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (11049). – С. 175 – 185.

References (transliterated)

1. Litmanovich Yu. Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialakh Sankt-Peterburgskikh konferentsiy za desyatiletie [The progress in developing free inertial navigation systems in the West and East in the proceedings of the conferences held in St. Petersburg over the past decade]. *X Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. konf.* [X St. Petersburg International Conference]. Sankt-Peterburg, CNII "Yelektropryor" Publ., 2003, pp. 250–260.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inercial'nykh navigatsionnykh system* [An introduction to the theory of free inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
3. Tkachenko A. I. O primeneniі parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientatsii ob'ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in algorithms of determination of the object orientation]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Engineering]. Kyiv, 1970, no. 5, pp. 20–22.
4. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Engineering]. Kyiv, 1987, no. 73, pp. 3–9.
5. Plaksiy Yu. A. Etalonna trigonometrychna kvaternionna model' pretseziynogo typu obertannya tverdogo tila [Precession type reference trigonometrical quaternion model of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «HPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series:Mathematical modelling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147.
6. Plaksiy Yu. A. Tr'okhchastotni analitychni etalonni modeli obertannya tverdogo tila [Three-frequency analytical reference models of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «HPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series:Mathematical modelling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 6 (11049), pp.175–185.

Надійшла (received) 22.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Нові аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла: двочастотні мультиплікативні параметричні кватерніонні моделі / Ю. А. Плаксий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 117 – 122. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Новые аналитические решения уравнений вращения твердого тела: двухчастотные мультипликативные параметрические кватернионные модели / Ю. А. Плаксий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 117 – 122. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

New analytical solutions of the rigid body rotation equations: two-frequency multiplicative parametrical quaternion models / Yu. A. Plaksiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 117 – 122. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Плаксий Юрій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Плаксий Юрий Андреевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Plaksiy Yuriy Andriyovych – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ЗАДАННОЕ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ

Розглянуто інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, до якого наводить ряд задач дифракції хвиль. Це рівняння зведено до системи інтегральних рівнянь на відрізьку. Проведена дискретизація цієї системи на основі методу дискретних особливостей. Введені пари гільбертових просторів і оператори у них, відповідні заданим і дискретній задачам. З їх допомогою доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дано строге обґрунтування оцінки швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення інтегрального рівняння.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне ядро, метод дискретних особливостей.

Рассмотрено интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, к которому приводит ряд задач дифракции волн. Это уравнение сведено к системе интегральных уравнений на отрезке. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

We consider an integral equation of the first kind with a logarithmic kernel, which arises in a number of problems of wave diffraction. This equation is reduced to a system of integral equations on a segment. Discretization of this system is carried out on the basis of the method of discrete singularities. A pair of Hilbert spaces and operators in them corresponding to predetermined and discrete problems is introduced. With their help, we prove the unique solvability of the discrete problem and give a rigorous justification of the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the integral equation.

Key words: integral equations, logarithmic kernel, the method of discrete singularities.

Введение и постановка задачи. Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких интегральных уравнений на системе интервалов.

Рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_S F(x) \ln|x-x_0| dx + \frac{1}{\pi} \int_S K(x_0, x) F(x) dx = f(x_0), \quad x_0 \in S \quad (1)$$

относительно неизвестной функции $F(x)$. Здесь $S = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$, $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < +\infty$, ядро $K(x_0, x)$ – достаточно гладкое.

Обозначим:

$F_j(x) = F(x)$ при $x \in (a_j, b_j)$, $j = \overline{1, m}$, $f_i(x_0) = f(x_0)$ при $x_0 \in (a_i, b_i)$, $i = \overline{1, m}$, $K_{ij}(x_0, x) = K(x_0, x)$ при $x_0 \in (a_i, b_i)$, $x \in (a_j, b_j)$, $i, j = \overline{1, m}$.

Тогда уравнение (1) эквивалентно системе интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} F_j(x) \ln|x-x_0| dx + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} K_{ij}(x_0, x) F_j(x) dx = f_j(x_0), \quad x_0 \in (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Выражение $|x-x_0|$ обращается в нуль тогда и только тогда, если x и x_0 принадлежат одному и тому же интервалу, то есть при $j = i$.

Поэтому систему (2) можно переписать следующим образом

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} F_i(x) \ln|x-x_0| dx + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} [K_{ij}(x_0, x) + (1-\delta_{ij}) \ln|x-x_0|] F_j(x) dx = f_i(x_0), \quad x_0 \in (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Функции $F_i(x)$ ищем (из физических соображений) в таком виде:

$$F_i(x) = \frac{u_i(x)}{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда система (3) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} \frac{u_i(x)}{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}} \ln|x-x_0| dx + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} [K_{ij}(x_0, x) + (1-\delta_{ij}) \ln|x-x_0|] \frac{u_j(x)}{\sqrt{(x-a_j)(b_j-x)}} dx = f_i(x_0), \quad x_0 \in (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi_k(t) = \frac{1}{2}[(b_k - a_k)t + a_k + b_k]$ и произведём в системе (2) замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_i(t) \text{ при } x \in (a_i, b_i), -1 < t < 1, i = \overline{1, m}, \\ x_0 &= \varphi_i(t_0) \text{ при } x_0 \in (a_i, b_i), -1 < t_0 < 1, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Тогда при $x \in (a_i, b_i), x_0 \in (a_i, b_i)$ имеем равенство $\ln|x - x_0| = \ln|t - t_0| + \ln\left|\frac{1}{2}(b_i - a_i)\right|$ $|t| < 1, |t_0| < 1$.

Далее, при $x \in (a_i, b_i)$ получаем $\frac{dx}{\sqrt{(x - a_i)(b_i - x)}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

Система (4) после такой замены принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_i(\varphi_i(t))}{\sqrt{1 - t^2}} \left(\ln|t - t_0| + \ln\left|\frac{1}{2}(b_i - a_i)\right| \right) dt + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[K_{ij}(\varphi_i(t_0), \varphi_j(t)) + (1 - \delta_{ij}) \ln|\varphi_j(t) - \varphi_i(t_0)| \right] \frac{u_j(\varphi_j(t))}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \\ = f_i(\varphi_i(t_0)), |t_0| < 1, i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Введём обозначения: $v_i(t) = u_i(\varphi_i(t))$, $i = \overline{1, m}$, $f_i(\varphi_i(t_0)) = g_i(t_0)$, $i = \overline{1, m}$, $Q_{ij}(t_0, t) = K_{ij}(\varphi_i(t_0), \varphi_j(t)) + (1 - \delta_{ij}) \ln|\varphi_j(t) - \varphi_i(t_0)| + \delta_{ij} \ln\left|\frac{1}{2}(b_i - a_i)\right|$, $i, j = \overline{1, m}$.

В результате получим систему

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_i(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \ln|t_0 - t| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 Q_{ij}(t_0, t) \frac{v_j(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt = g_i(t_0), |t_0| < 1, i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Здесь предполагается, что $g_i(t_0) \in C_{[-1,1]}^{\mu, \gamma}$, $Q_{ij}(t_0, t) \in C_{[-1,1]}^{\mu, \gamma}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной ($i, j = \overline{1, m}$). Через $C_{[-1,1]}^{\mu, \gamma}$ обозначен класс μ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций, μ – производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ ($0 < \gamma \leq 1$).

Введём вектор-функции $\vec{v}(t) = \{v_i(t)\}_{i=1}^m$ и $\vec{g}(t_0) = \{g_i(t_0)\}_{i=1}^m$ и операторы

$$\begin{aligned} (\hat{B}\vec{v})(t_0) &= \{(Bv_i)(t_0)\}_{i=1}^m \equiv \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_i(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \ln|t - t_0| dt \right\}_{i=1}^m, \\ (\hat{Q}\vec{v})(t_0) &= \left\{ \sum_{j=1}^m (Q_{ij}v_j)(t_0) \right\}_{i=1}^m \equiv \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 Q_{ij}(t_0, t) v_j(t) \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \right\}_{i=1}^m. \end{aligned}$$

Тогда систему (5) можно записать в операторном виде $(\hat{B} + \hat{Q})\vec{v} = \vec{g}$.

Оператор $\hat{B} + \hat{Q}$ в рассматриваемых задачах является непрерывно обратимым в паре пространств $(\vec{L}_{[-1,1]}^2, \vec{L}_{[-1,1]}^2)$, где $\vec{L}_{[-1,1]}^2$ – гильбертово пространство вектор-функций $\{v_i(t)\}_{i=1}^m$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_I = \sum_{i=1}^m \int_{-1}^1 u_i(t) \bar{v}_i(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}};$$

$\|\vec{u}\|_I$ – норма, порождённая этим скалярным произведением.

Дискретизация системы. Приближённое решение системы (5) ищем в виде вектор-функции

$$\vec{v}_{\bar{n}}(t) = \{v_{ni-1}(t)\}_{i=1}^m \quad (\bar{n} = (n1, n2, \dots, nm)),$$

где $v_{ni-1}(t) \equiv (P_{ni-1}v_i)(t)$ – интерполяционный полином Лагранжа с узлами интерполирования $\{t_{ki}\}_{ki=1}^{ni}$ =

$= \left\{ \cos \frac{2ki-1}{2ni} \pi \right\}_{ki=1}^{ni}$, из системы интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{ni-1}(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \ln|t - t_0| dt + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 (P_{ni-1} P_{nj-1} Q_{ij})(t_0, t) \frac{v_{nj-1}(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt = g_{ni-1}(t_0), i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Здесь $g_{ni-1}(t_0) = (P_{ni-1}g_i)(t_0)$.

Рассматривая i -е уравнение ($i = \overline{1, m}$) системы (6) в узлах интерполирования многочлена $(P_{ni-1}g_i)(t_0)$ – точек $\{t_{ki}\}_{ki=1}^{ni}$, получаем систему

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{ni-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-t_{ki}| + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-1}^1 (P_{ni-1t_0} P_{nj-1t} Q_{ij})(t_{ki}, t) \frac{v_{nj-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = g_{ni-1}(t_{ki}), \quad ki = \overline{1, ni}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Вычислим в этой системе интегралы с помощью следующих квадратурных формул [4]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_{n-1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{n-1}(t_k), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x-x_0| v_{n-1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{n-1}(t_k) \left[\ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} T_p(x_0) \frac{T_p(t_k)}{p} \right], \quad (7)$$

где $v_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$, причём

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_{2n-1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{2n-1}(t_k)$$

то есть формула (7) остаётся верной для полиномов степени не выше $2n-1$. Учитывая, что

$$(P_{ni-1t_0} P_{nj-1t} Q_{ij})(t_{ki}, t_{rj}) = Q_{ij}(t_{ki}, t_{rj}), \quad g_{ni-1}(t_{ki}) = (P_{ni-1}g_i)(t_{ki}) = g_i(t_{ki}),$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$-\frac{1}{ni} \sum_{ri=1}^{ni} v_{ni-1}(t_{ri}) \left[\ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{ni-1} T_p(t_{ki}) \frac{T_p(t_{ri})}{p} \right] + \sum_{j=1}^m \frac{1}{nj} \sum_{rj=1}^{nj} Q_{ij}(t_{ki}, t_{rj}) v_{nj-1}(t_{rj}) = g_i(t_{ki}), \quad ki = \overline{1, ni}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Перегруппировав слагаемые, окончательно получаем:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{nj} \sum_{rj=1}^{nj} v_{nj-1}(t_{rj}) \left[Q_{ij}(t_{ki}, t_{rj}) - \delta_{ij} \left(\ln 2 + 2 \sum_{p=1}^{ni-1} T_p(t_{ki}) \frac{T_p(t_{ri})}{p} \right) \right] = g_i(t_{ki}), \quad ki = \overline{1, ni}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Приближённое решение $\bar{v}_n(t) = \{v_{ni-1}(t)\}_{i=1}^m$ строится по найденным значениям функций $v_{ni-1}(t)$ в узлах интерполирования.

Однозначная разрешимость СЛАУ (8) эквивалентна однозначной разрешимости системы приближённых интегральных уравнений (6).

Однозначная разрешимость СЛАУ. Обозначим

$$(Q_{ni-1nj-1}v_{nj})(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (P_{ni-1t_0} P_{nj-1t} Q_{ij})(t_0, t) \frac{v_{nj}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

и введём оператор

$$(\hat{Q}_n \bar{v}_n)(t_0) = \left\{ \sum_{j=1}^m (Q_{ni-1nj-1}v_{nj})(t_0) \right\}_{i=1}^m.$$

Тогда систему (6) можно записать в виде операторного уравнения

$$(\hat{B} + \hat{Q}_n) \bar{v}_n = \bar{g}_n,$$

где $\bar{g}_n(t_0) = \{g_{ni-1}(t_0)\}_{i=1}^m$.

Оператор $\hat{B} + \hat{Q}_n$ действует из пространства Π_n в пространство Π_n . Здесь $\Pi_n \subset \bar{L}_{[-1,1]}^2$ – конечномерное подпространство, состоящее из всех вектор-функций вида

$$\bar{u}_n(t) = \{u_{ni-1}(t)\}_{i=1}^m,$$

где $u_{ni-1}(t) \in \Pi_{ni-1}$; $\Pi_{n-1} \subset L_{[-1,1]}^2$ – подпространство всех алгебраических полиномов степени не выше $n-1$.

Действительно, пусть

$$(Bu)(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ln|x-x_0| dx,$$

тогда, в силу соотношений [4],

$$B: T_0(t) \rightarrow (-\ln 2) T_0(t_0) \quad \text{и} \quad B: T_n(t) \rightarrow -\frac{T_n(t_0)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

оператор $\hat{B}$ действует из Π_n в Π_n^I .

Пусть, далее, $\bar{u}_n(t) \in \Pi_n$, тогда, в силу определения,

$$\sum_{j=1}^m (Q_{ni-1nj-1}u_{nj})(t_0) \in \Pi_{ni-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{и, следовательно,} \quad (\hat{Q}_n \bar{u}_n)(t_0) \in \Pi_n.$$

Пользуясь результатом, приведенным в [5, стр. 19], докажем, что оператор $\hat{B} + \hat{Q}_{\bar{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств

$$(\Pi_{\bar{n}}, \Pi_{\bar{n}}), \quad (9)$$

и оценим разность между точным решением $\vec{v}(t)$ системы интегральных уравнений (5) и приближенным решением $\vec{v}_{\bar{n}}(t)$, найденным из системы (6).

Для этого нужно оценить $\|\vec{g} - \vec{g}_{\bar{n}}\|_I$ и $\|(\hat{B} + \hat{Q}) - (\hat{B} + \hat{Q}_{\bar{n}})\|$. Здесь норма оператора вычисляется в паре пространств (9).

Пусть $n = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. Тогда, пользуясь теоремами Джексона [6], получаем:

$$\text{при } n-1 > \mu \quad \|\vec{g} - \vec{g}_{\bar{n}}\|_I = \left\{ \sum_{i=1}^m \|g_i - g_{n_i-1}\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq D(g)(n-1)^{-\mu-\gamma} \sqrt{m},$$

где $D(g)$ – константа, не зависящая от $\bar{n}$.

Далее, в [3] доказано, что для всех i при $n-1 > \mu$ выполняются неравенства

$$\left\| \sum_{j=1}^m (Q_{ij} - Q_{n_i-1n_j-1}) v_{nj} \right\| \leq \sum_{j=1}^m \left\| (Q_{ij} - Q_{n_i-1n_j-1}) v_{nj} \right\| \leq D(\hat{Q}) m (n-1)^{-\mu-\gamma} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I,$$

где $D(\hat{Q})$ – константа, не зависящая от $\bar{n}$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \left\| (\hat{B} + \hat{Q}) \vec{v}_{\bar{n}} - (\hat{B} + \hat{Q}_{\bar{n}}) \vec{v}_{\bar{n}} \right\|_I &= \left\| (\hat{Q} - \hat{Q}_{\bar{n}}) \vec{v}_{\bar{n}} \right\|_I = \left\{ \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m (Q_{ij} - Q_{n_i-1n_j-1}) v_{nj} \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^m \left(D(\hat{Q}) m (n-1)^{-\mu-\gamma} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = D(\hat{Q}) m^{\frac{3}{2}} (n-1)^{-\mu-\gamma} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left\| (\hat{B} + \hat{Q}) - (\hat{B} + \hat{Q}_{\bar{n}}) \right\| = \left\| \hat{Q} - \hat{Q}_{\bar{n}} \right\| \leq D(\hat{Q}) m^{\frac{3}{2}} (n-1)^{-\mu-\gamma}.$$

Отсюда вытекает, что существует такое число N , что, при любом $\bar{n}$, у которого $n \geq N$, выполнено неравенство

$$p_{\bar{n}} = \left\| (\hat{B} + \hat{Q})^{-1} \right\|_{\bar{L}_2 \rightarrow \bar{L}_2} \cdot \left\| \hat{Q} - \hat{Q}_{\bar{n}} \right\| < 1.$$

Поэтому из результата, приведенного в [5, стр. 19], следует, что при любом $\bar{n}$ таком, что $n \geq N$, оператор $\hat{B} + \hat{Q}_{\bar{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств (9), то есть система (6) имеет единственное решение $\vec{v}_{\bar{n}}(t)$. Кроме того, если $\vec{v}(t)$ – точное решение системы (5), то имеет место оценка

$$\|\vec{v} - \vec{v}_{\bar{n}}\|_I \leq \sigma_n,$$

где $\sigma_n = O\left(\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

Выводы. На основе численного метода дискретных особенностей построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение с логарифмическим ядром, заданное на системе интервалов. Доказано, что при некоторых предположениях гладкости ядра регулярной части и правой части этого интегрального уравнения построенная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному в среднем.

Список литературы

1. Tsalamengas J. L. Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case // IEEE Trans. Antennas Propagat. – vol. 58. – 2010.
2. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент – М.: ТОО «Янус», 1995 – 520с.
3. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
4. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92с.
5. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231с.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: ГТТИ, 1949. – 688с.

References (transliterated)

1. Tsalamengas J. L. Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 2010, vol. 58.
2. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyi eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Open Company "Janus" Publ., 1995. 520p.
3. Gandel Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. Part II]. Kharkov, 1992. 145 p.
4. Gandel Y. V. *Leksii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part I]. Kharkov-Kherson, 2001. 92 p.
5. Gabdulkaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions of linear problems]. Kazan, Izd. Kazan. University Publ., 1980. 231 p.
6. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow-Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688 p.

Поступила (received) 16.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, задане на системі інтервалів / Т. С. Полянська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 123 – 127. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, заданное на системе интервалов / Т. С. Полянская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 123 – 127. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Integral equations of the first kind with logarithmic kernel given on a system of intervals / T. S. Polyanskaya // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 123 – 127. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Полянская Татьяна Семеновна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Polyanskaya Tatiana Semenovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

УДК 631.376

О. Ю. РЕБРОВ

ІНТЕГРАЛЬНА ЙМОВІРНІСНА ОЦІНКА ВІДПОВІДНОСТІ ТРАКТОРНОЇ ШИНИ АГРОЕКОЛОГІЧНИМ ВИМОГАМ В ҐРУНТО-КЛІМАТИЧНИХ УМОВАХ УКРАЇНИ

Запропоновано методика розрахунку середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини агрологічним вимогам з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України. Наведено розподіл допустимого тиску на ґрунт територію України при весняному передпосівному і осінньому основному обробітку ґрунту. Проведено аналіз середньоінтегральних ймовірнісних оцінок відповідності ряду типорозмірів сільськогосподарських тракторних шин світових виробників агрологічним вимогам.

Ключові слова: тракторна шина, максимальний тиск шини на ґрунт, агрологічні вимоги.

Предложена методика расчета среднеинтегральной вероятностной оценки соответствия максимального давления на почву тракторной шины агроэкологическим требованиям с учетом почвенно-климатических условий Украины. Приведено распределение допустимого давления на почву по территории Украины при весенней предпосевной и осенней основной обработке почвы. Проведен анализ среднеинтегральных вероятностных оценок соответствия ряда типоразмеров сельскохозяйственных тракторных шин мировых производителей агроэкологическим требованиям.

Ключевые слова: тракторная шина, максимальное давление шини на почву, агроэкологические требования.

The article presents a method of calculating the mean integral probability estimate of the maximum tractor tire pressure on the soil meeting the agro-ecological requirements with taking into account soil and climatic conditions of Ukraine. The distribution of the permitted soil pressure on the territory of Ukraine during the spring presowing and autumn primary tillage is given. The conformity of agricultural tractor tires to the agro-ecological requirements is analyzed using the mean integral probability estimate. It is proved that only some of VF tires among all the studied ones meet the standards of soil pressure with the mean integral probability estimate up to 0.9 – 0.95 for any tire inflation pressure and radial load.

Key words: agricultural tire, maximum tractor tires pressure on the soil, agro-ecological requirements.

© О. Ю. Ребров, 2017

Вступ. В сучасних умовах населення земної кулі займається землеробством на розораних землях, де інтенсивно розвивається ерозія ґрунту, причому, значна частина таких земель знаходиться в Україні. При традиційних системах обробки ґрунтовий покрив швидко втрачається. Він руйнується, деградує з помітною швидкістю, зростає знесення його родючого шару з водою.

Одним із факторів, що шкідливо впливають на ґрунт і сприяють його деградації, є його надмірне ущільнення ходовими системами мобільної сільськогосподарської техніки, зокрема колісними тракторами. Науково-обґрунтовані заходи щодо поліпшення агроєкологічної ситуації на розораних землях України повинні базуватися на оцінках відповідності агроєкологічним нормам показників взаємодії тракторних шин з ґрунтом.

Розробка методики інтегральної оцінки відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини екологічним вимогам з урахуванням розподілу сільськогосподарських угідь України, а саме ріллі, за показниками, що лімітують рівень впливу колісних рушіїв на ґрунт, є актуальною задачею, яка дозволить визначити найбільш перспективні до застосування і безпечні з агроєкологічних позицій конструкції і типорозміри тракторних шин.

Аналіз останніх досягнень і публікацій. Оптимальним для механічної обробки ґрунт стає в стані *фізичної стиглості* (ФС). Фізична стиглість ґрунту різного гранулометричного складу досягається при різній вологості в доволі вузькому інтервалі значень [1]. Стан фізичної стиглості ґрунту, визначається, насамперед, гранулометричним складом [2], рівноважною щільністю у верхньому оброблюваному шарі та наявністю вологи [3].

Найбільш інтенсивне антропогенне навантаження виникає в ході сільськогосподарських операцій механічної обробки ґрунту, які на території України проводяться навесні, під час його підготовки під ранні ярові культури, і восени – під озиму пшеницю [1].

Найбільш вразливим до ущільнення ґрунт стає при підвищеній вологості, що суттєво може знизити ефективність його обробки, або навіть звести її нанівець.

Здатність ґрунту опиратися деформуванню визначається його потенціалом міцності, складовими якого є супротив розриву (8 – 15% від потенціалу міцності, якщо під ним мати на увазі суму зусиль, необхідних для подолання супротиву розриву, здвигу та стискання), супротив здвигу (25 – 30%) і супротив стискання (50 – 60%), в ході якого ґрунт руйнується. Стискання є найбільш небажаним способом впливу на ґрунт не тільки в силу найбільшої енергоємності, але й тому, що після такого впливу порушується фундаментальна характеристика ґрунту – здатність відновлювати вихідні характеристики, що є визначальним для збереження усереднених в часі параметрів при антропогенному навантаженні [3].

Виявлені факти принципової різниці в післядії на ґрунт різних способів деформування послужили основою для обґрунтування допустимого рівня впливу на ґрунт ходових систем машино-тракторних агрегатів [3 – 6].

Мета та постановка задачі. Метою даної роботи є розробка методики середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини екологічним вимогам в ґрунто-кліматичних умовах України з урахуванням обмежень, що існують в полі значень тиску повітря і радіальних навантажень. Методика може бути використана при вирішенні задачі обґрунтування параметрів ходових систем тракторів і машино-тракторних агрегатів.

Методика розрахунку інтегральної ймовірнісної оцінки відповідності тракторної шини агроєкологічним вимогам. Максимальний тиск тракторної шини на ґрунт визначається радіальним навантаженням і контурною площею плями контакту з жорсткою опорною поверхнею F_k . Перерахунок максимального тиску $q_{\max}$ по середньому $q_{\text{ср}}$ відбувається згідно [7] з використанням коефіцієнту поздовжньої нерівномірності розподілу тиску за площею плями контакту $K_2 = 1,5$. Таке значення K_2 справедливе для ґрунтів нормальної вологості [8, с. 97] при розподілі тиску за законом напівеліпсоїда [4, с.75]. Площа контакту шини з ґрунтом $F_{\text{кт}}$ розраховується за контурною площею плями контакту з жорсткою опорною поверхнею F_k , яка, в свою чергу, може визначатись аналітично або бути наведеною в технічних даних виробника на шину.

В технічних даних сучасних шин закордонних виробників, таких як Michelin, Trelleborg, Good Year, Firestone, Mitas, міститься інформація про контурну площу плями контакту з жорсткою опорною поверхнею F_k^* . Слід відзначити, що каталожне значення F_k^* – це контрольний показник, який отримано при максимально допустимих радіальному навантаженні $Q_{\max}$ і тиску повітря в шині $p_{\text{ш.макс}}$. Враховуючи залежність максимально допустимого радіального навантаження на шину не тільки від тиску повітря, а й від швидкісного режиму експлуатації, виробники шин вказують значення F_k^* для індексу швидкості А6 (максимальна швидкість в експлуатації 30 км/год). Тобто, каталожне значення контурної площі плями контакту з жорсткою опорною поверхнею F_k^* відповідає індексу навантаження і індексу швидкості [9, 10]. При виконанні сільськогосподарських тягових операцій обробка ґрунту, зазвичай, виконується на швидкостях 5,5 – 12 км/год, а при швидкісній ґрунтообробній операції – до 18 км/год. Шини під час тягових операцій експлуатуються при передачі великих крутних моментів, тому вони схильні не тільки до радіальних, а й до тангенціальних деформацій. Такий напружено-деформований стан не дозволяє отримати більшу допустиму вантажопідйомність шини при відповідному зниженні швидкості. Тому всі виробники шин рекомендують на тягових операціях визначати допустимі навантаження у відповідності

до індексу швидкості А6 (30 км/год).

Контурна площа плями контакту з жорсткою опорною поверхнею F_k^* залишається незмінною на лінії навантажувальної характеристики шини, яка з'єднує точки з координатами $(p_{ш.мин}; Q_{мин})$ і $(p_{ш.маx}; Q_{маx})$, де $p_{ш.мин}$ – мінімально допустимий тиск в шині; $Q_{мин}$ – максимально допустиме радіальне навантаження, що відповідає мінімально допустимому тиску; $p_{ш.маx}$ – максимально допустимий тиск в шині; $Q_{маx}$ – максимально допустиме радіальне навантаження, що відповідає максимально допустимому тиску [9].

При розрахунках максимального тиску на ґрунт у всьому полі значень тиску повітря і радіальних навантажень може бути використана математична модель шини, запропонована В. Л. Бідерманом [11] та розвинута в роботі [12]. При відсутності повної технічної інформації для конкретної шини, дані щодо F_k^* , або норми шаруватості, яка вказується тільки для діагональних шин і деяких радіальних, можна отримати при ідентифікації шин, у тому числі і сучасних інноваційних категорій IF та VF, з використанням запропонованих методик [13, 14].

Відповідність тракторної шини агроєкологічним нормам впливу на ґрунт регламентується за допустимим тиском [6], який розраховується окремо для весняного і літньо-осіннього періоду залежно від вологості ґрунту в долях найменшої вологості (НВ), яка, в свою чергу, визначається гранулометричним складом ґрунту (рис. 1, а). Обробка у весняний і літньо-осінній період повинна проводитися, коли ґрунт знаходиться в стані фізичної стиглості (ФС). Фізична стиглість ґрунту досягається в обмежених областях всередині зон 3 і 4 діаграми стану ґрунтів (рис. 1, б). Великий обсяг досліджень і систематизацію даних щодо стану ґрунтів України проведено в роботах В. В. Медведєва [1 – 3], де наведений розподіл ґрунтів України за гранулометричним складом (рис. 2), найменшою вологостістю (рис. 3) і вологістю фізичної стиглості (рис. 4). За результатами моніторингу і узагальнення стану земельних ресурсів сільськогосподарського призначення, а також синтезу картографічного і статистичного матеріалів за окремими показниками ґрунтів, в [1, 3] наведені дані відносно фактичних середньобаторічних параметрів вмісту води в ріллі України в середньобаторічні терміни проведення робіт під час підготовки ґрунту під ранні ярові культури навесні та під озиму пшеницю в літньо-осінній період (табл. 1).

Розрахунок допустимого тиску на ґрунт, згідно [6], проводиться залежно від вологості ґрунту у долях найменшої вологості (НВ). Фізична стиглість ґрунтів різного гранулометричного складу знаходиться в межах 0,6 – 0,9 НВ. Вологість фізичної стиглості й найменша вологостістю – це пов'язані характеристики ґрунтів. Для оціночних розрахунків з практичною точністю можна прийняти, що стан фізичної стиглості ґрунтів на території України досягається при вмісті води в середньому на рівні 0,7 НВ [3].

Наведених даних достатньо для розрахунку інтегральної ймовірнісної оцінки відповідності тракторної шини агроєкологічним вимогам в ґрунто-кліматичних умовах України. Зробимо припущення, що такі характеристики ґрунтів, як вологість фізичної стиглості, найменша вологостістю і вологість ґрунту під час проведення передпосівної і основної обробки є випадковими величинами, які мають нормальний розподіл на території України. Це припущення дозволяє отримати математичне очікування і середньоквадратичне відхилення розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт [6, табл. 1] під час проведення передпосівної (навесні) і основної (восени) обробки.

Допустимий тиск шини на ґрунт визначається відповідно нормативній величині допустимого тиску і поправок, які враховують режим роботи шини, висоту протектору і число проходів по одному сліду. Для розрахунку допустимого тиску на ґрунт вважатимемо, що шина працює у ведучому режимі, висота протектору перевищує 25 мм, а число проходів по одному сліду дорівнює двом.

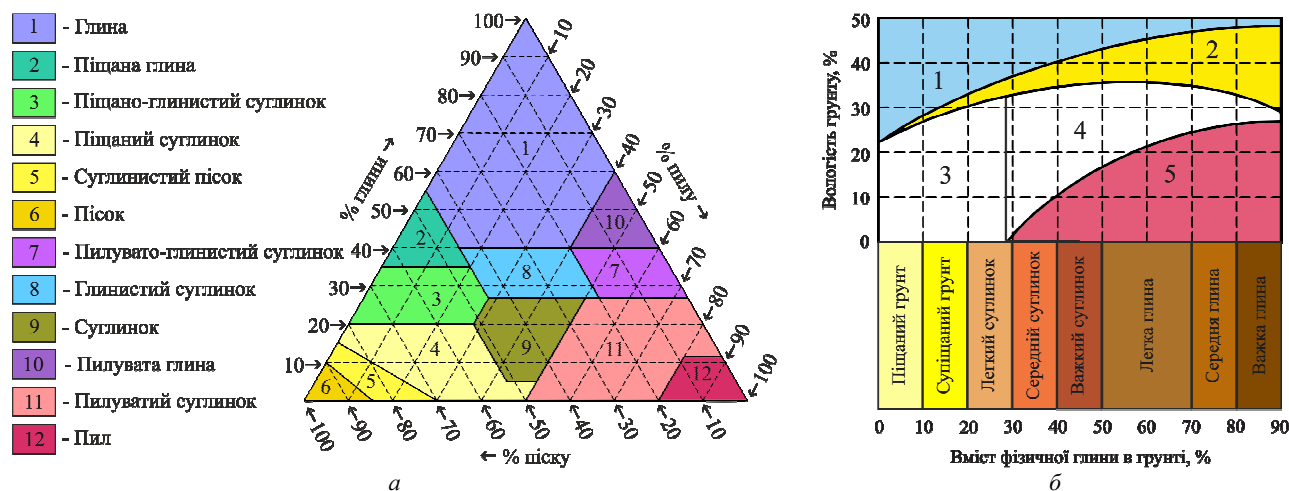


Рис. 1 – Гранулометричний склад і діаграма стану ґрунтів:

а – гранулометричний склад ґрунтів; б – діаграма (по Г. Д. Петрову) стану ґрунтів:

1 – текучий; 2 – пластичний; 3 – пухкий; 4 – з грудками, що легко руйнуються; 5 – твердий з брилами.

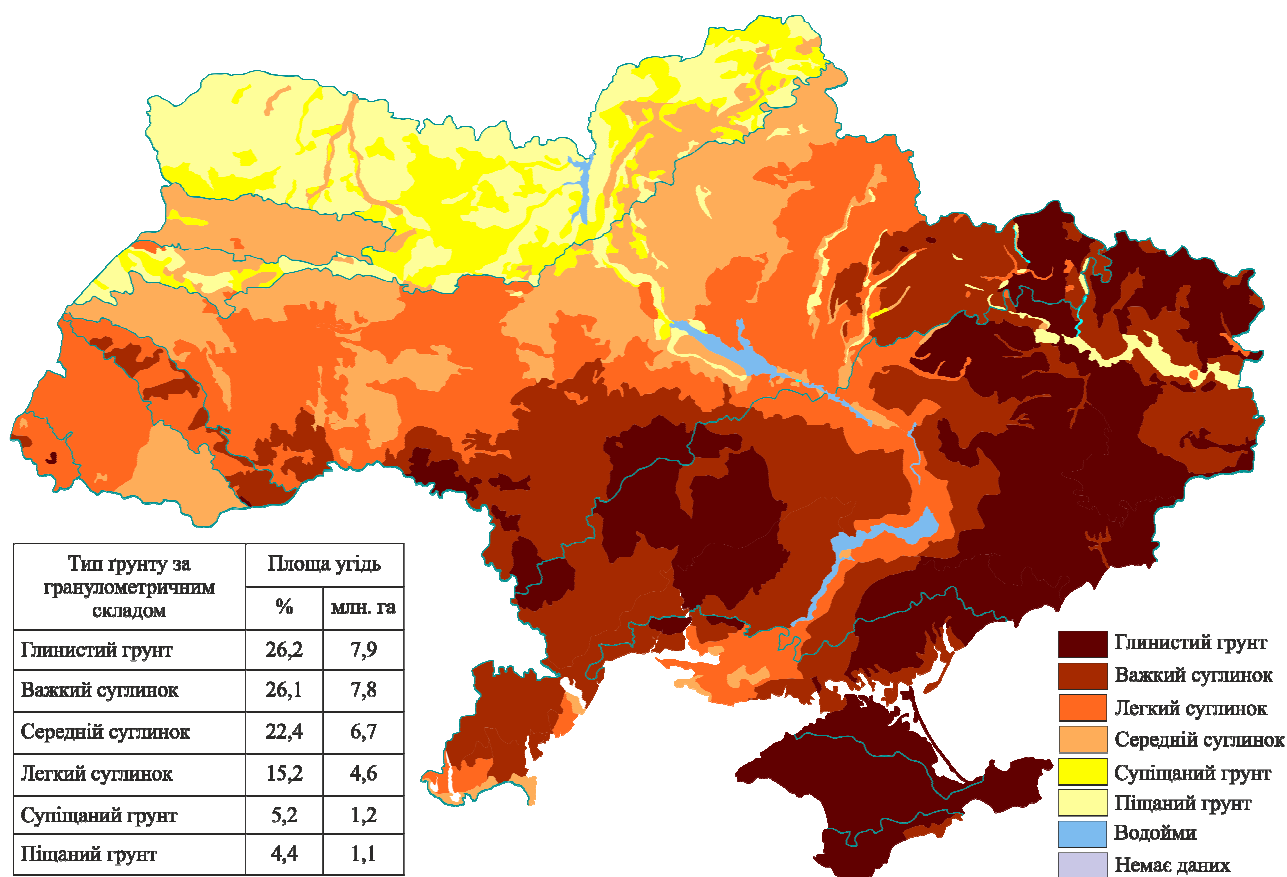


Рис. 2 – Розподіл гранулометричного складу ґрунтів на території України [3].

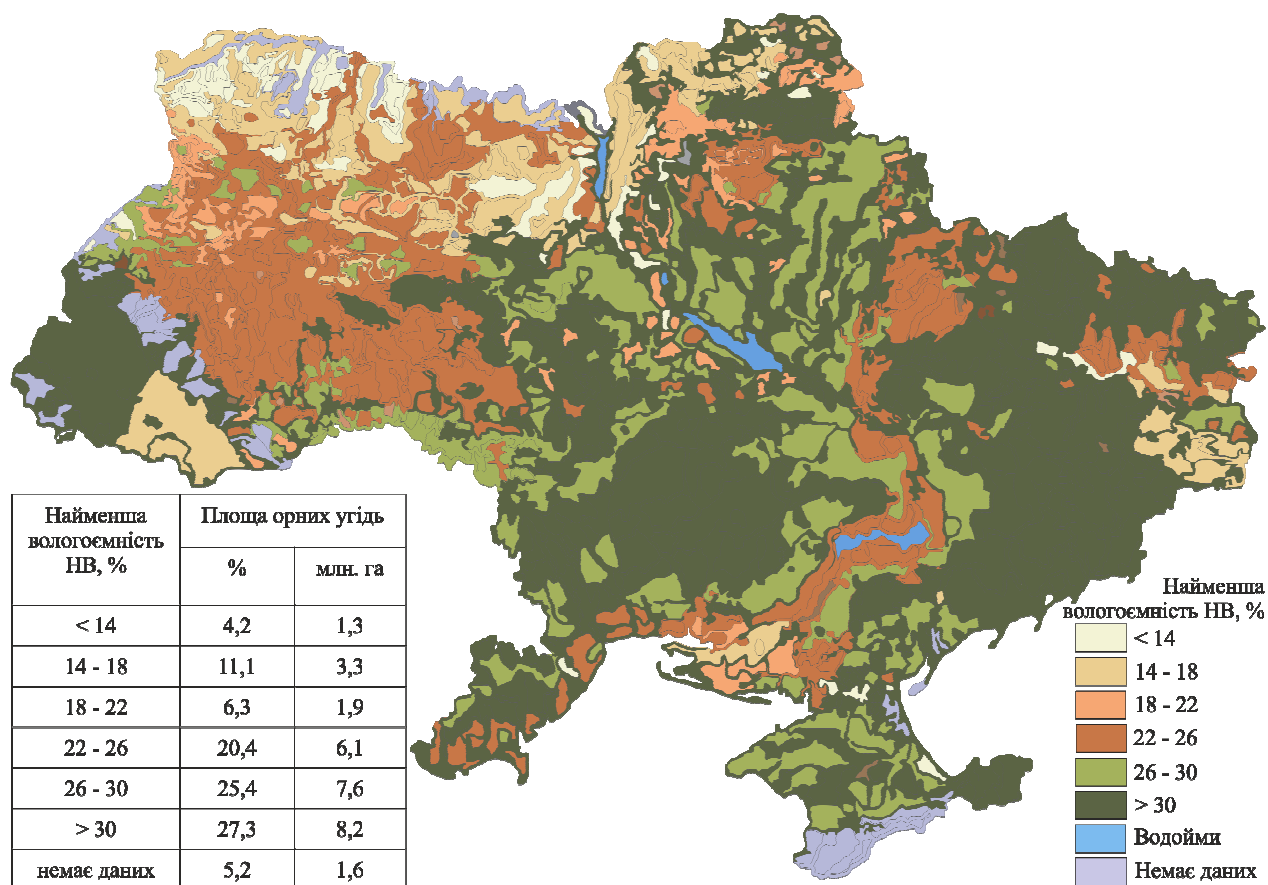


Рис. 3 – Розподіл найменшої вологосмності (НВ) ґрунтів на території України [3].

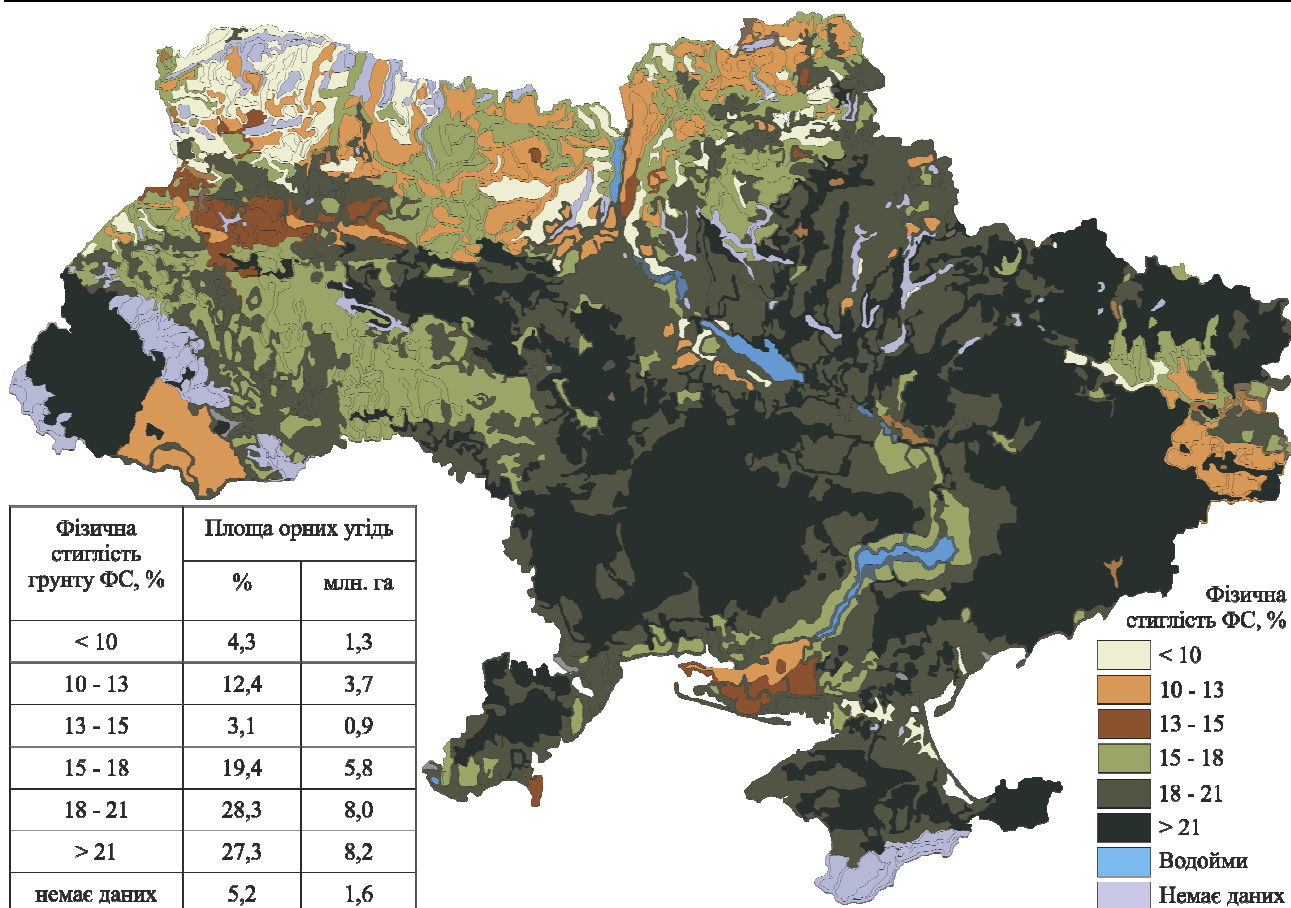


Рис. 4 – Розподіл вологості фізичної стиглості (ФС) ґрунтів на території України [3].

Таблиця 1 – Вологість ґрунту під час проведення передпосівного і основного обробітку [1, 3]

Передпосівна обробка ґрунту			Основна обробка ґрунту		
Вологість ґрунту в долях фізичної стиглості (ФС)	Площа ріллі		Вологість ґрунту в долях фізичної стиглості (ФС)	Площа ріллі	
	%	млн. га		%	млн. га
–	–	–	< 0,7	4,9	1,5
< 0,8	9,4	2,8	0,7 – 0,8	8,1	2,4
0,8 – 0,9	5,0	1,5	0,8 – 0,9	59,1	17,7
0,9 – 1,0	75,8	22,7	0,9 – 1,0	14,1	4,2
> 1,0	9,9	3,0	> 1,0	13,8	4,2

Враховуючи все перелічене, отримані нормальні розподіли нормативної величини допустимого тиску на ґрунт для весняної передпосівної і осінньої основної обробки (рис. 5) з параметрами: $M_1 = 135$ кПа, $\sigma_1 = 13$ кПа (весна); $M_2 = 142$ кПа, $\sigma_2 = 24$ кПа (осінь). Згідно [6] допустимий тиск на ґрунт:

$$[q] = [q_n] \cdot k_\Sigma, \quad (1)$$

де k_Σ – коефіцієнт, що враховує умови роботи рушії; $[q_n]$ – нормативна величина допустимого тиску [6, табл. 1], розподіл якої під час проведення передпосівної (навесні) і основної (восени) обробки ґрунту на території України наведено на рис. 5.

При русі шини по ґрунту необхідне виконання умови:

$$q_{\max} \leq [q], \quad (2)$$

де $q_{\max}$ – максимальний тиск шини на ґрунт, що визначається згідно [7].

З урахуванням (1) нерівність (2) приймає вигляд:

$$q_{\max} / k_\Sigma \leq [q_n], \quad (3)$$

Аналіз розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт (рис. 5) показує, що частка ґрунтів з допустимим тиском $[q_n] < 126$ кПа переважає при основному осінньому обробітку, і навпаки, частка ґрунтів з допустимим тиском $[q_n] > 126$ кПа переважає при весняній передпосівній обробці. Це свідчить про те, що, незважаючи на поширену думку про вирішальну роль тиску на ґрунт при весняно-польових роботах, при основній обробці існує приблизно до однієї чверті ґрунтів України, в яких допустимий тиск на ґрунт, принаймні, не менше ніж при передпосівній обробці. Опосередковано на це звернув увагу В. В. Медведєв у роботах [1, 3], де пока-

зано, що частка площі ріллі, на якій можлива високоякісна основна обробка, значно зменшується у порівнянні з умовами зволоження навесні (з 75,8 % до 14,1 %). Тобто, ґрунто-технологічні умови для традиційної оранки на 85 % території України незадовільні.

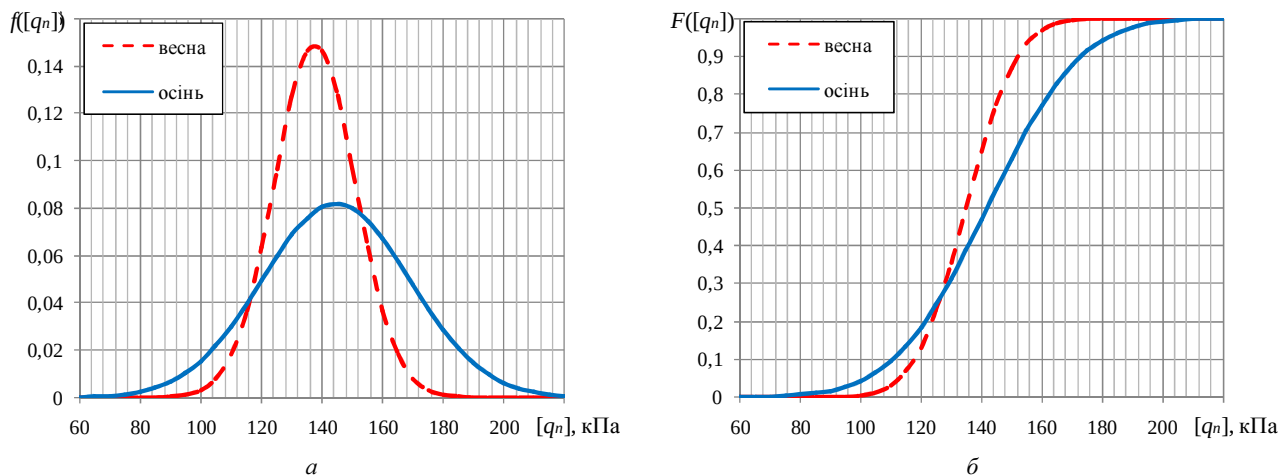


Рис. 5 – Розподіл нормативної величини допустимого тиску на ґрунт $[q_n]$ під час передпосівної (весна) і основної (осінь) обробки: а – функція щільності ймовірності; б – функція розподілу ймовірності.

Після визначення максимального тиску тракторної шини на ґрунт [7] ймовірність виконання умови (3), тобто відповідності шини екологічним вимогам з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України, можна розраховувати наступним чином:

$$p\left(\frac{q_{\max}}{k_{\Sigma}} \leq [q_n]\right) = \frac{1}{\sigma_i \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{q_{\max}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(M_i - [q_n])^2}{2 \cdot \sigma_i^2}\right) d[q_n], \quad (4)$$

де M_i , σ_i – параметри розподілу нормативної величини допустимого тиску на ґрунт $[q_n]$ (рис. 5) під час передпосівної (весна) і основної (осінь) обробки.

Результатом розрахунку будуть значення ймовірності p виконання агроекологічних умов щодо максимального тиску $q_{\max}$ конкретного типорозміру шини на ґрунт у всьому полі значень внутрішнього тиску повітря і радіального навантаження. Оскільки тракторні шини можуть експлуатуватися в широкому інтервалі внутрішнього тиску повітря і радіального навантаження, а, по суті, у всьому полі значень зазначених параметрів, виникає питання формування інтегральної оцінки ймовірності виконання агроекологічних умов.

Для подальших розрахунків введемо кілька коефіцієнтів. Коефіцієнт навантаження шини (%):

$$k_{\Pi} = (G_k / Q_d) \cdot 100\%, \quad (5)$$

де G_k – радіальне навантаження на шину; Q_d – допустиме радіальне навантаження на шину при даному тиску повітря p_{Π} .

Коефіцієнт площі плями контакту:

$$\lambda_f = F_k / F_k^*, \quad (6)$$

де F_k – розрахункова контурна площа плями контакту при відповідному тиску і навантаженні; F_k^* – контурна площа плями контакту на лінії допустимих навантажень між точками з координатами $(p_{\Pi, \min}; Q_{\min})$ і $(p_{\Pi, \max}; Q_{\max})$, це фіксована величина, що може бути наведеною у технічних даних виробника на шину.

При варіюванні тиском повітря в шині p_{Π} і радіальним навантаженням G_k розрахунок ймовірності виконання шиною агроекологічних вимог за формулою (4) треба проводити, враховуючи, що $q_{\max} = q_{\max}(G_k, p_{\Pi})$, тобто ймовірність p буде також функцією двох змінних: $p = p(G_k, p_{\Pi})$.

Середньоінтегральну ймовірнісну оцінку відповідності шини агроекологічним вимогам щодо максимального тиску на ґрунт будемо визначати з урахуванням обмежень по рівню радіальних навантажень на шину і, при необхідності, порогового значення ймовірності. Для цього введемо коефіцієнти:

$$k_{k\Pi} = 1, \text{ якщо } k_{\Pi \min} \leq k_{\Pi} \leq k_{\Pi \max}; k_{k\Pi} = 0, \text{ якщо } k_{\Pi} < k_{\Pi \min} \text{ або } k_{\Pi} > k_{\Pi \max}, \quad (7)$$

де $k_{\Pi \min}$, $k_{\Pi \max}$ – мінімальний і максимальний коефіцієнт навантаження шини;

$$k_p = 1, \text{ якщо } p(q_{\max} / k_{\Sigma} \leq [q_n]) \geq p_{\lim}; k_p = 0, \text{ якщо } p(q_{\max} / k_{\Sigma} \leq [q_n]) < p_{\lim}, \quad (8)$$

$p_{\lim}$ – мінімальне значення ймовірності, починаючи з якого визначається середньоінтегральна оцінка.

Сумарний коефіцієнт, що враховує обмеження (7) – (8):

$$k_{\Sigma\text{об}} = k_{\text{кп}} \cdot k_p. \quad (9)$$

Об'єм під поверхнею $p = p(G_k, p_{\text{ш}})$ з урахуванням обмежень (7) – (8) визначається інтегралом:

$$V_p = \int_{G_k} \int_{p_{\text{ш}}} k_{\Sigma\text{об}} \cdot p(G_k, p_{\text{ш}}) dp_{\text{ш}} dG_k. \quad (10)$$

Площа фігури, що є проекцією поверхні $p = p(G_k, p_{\text{ш}})$ на площину $p_{\text{ш}}OG_k$ з об'ємом V_p і, з урахуванням обмежень (7) – (8), визначається інтегралом:

$$S_p = \int_{p_{\text{ш}}} k_{\Sigma\text{об}} \cdot Q_d(p_{\text{ш}}) dp_{\text{ш}}. \quad (11)$$

Тоді середньоінтегральна ймовірнісна оцінка відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам має вигляд:

$$p_i = V_p / S_p. \quad (12)$$

Аналіз результатів дослідження. Запропонована методика апробувалась на ряді моделей тракторних сільськогосподарських шин світових виробників таких, як Michelin, Trelleborg, Good Year, Firestone, Mitas. Були розраховані параметри взаємодії з ґрунтом і значення коефіцієнтів $k_{\text{п}}$, λ_f , середній і максимальний тиск шини на ґрунт, ймовірність відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам p у всьому полі значень внутрішнього тиску повітря і радіального навантаження (рис. 6, а).

Аналіз показує, що ймовірність p може змінюватись практично від 0 до 1 в залежності від внутрішнього тиску і радіального навантаження. Причому внутрішній тиск в шині має більший вплив на p , ніж радіальне навантаження, оскільки такий же взаємозв'язок простежується між тиском повітря в шині $p_{\text{ш}}$ і максимальним тиском на ґрунт q_{max} .

На універсальній характеристиці шини (рис. 6, а) нанесена лінія 1, що з'єднує точки $(p_{\text{ш. min}}; Q_{\text{min}})$ і $(p_{\text{ш. max}}; Q_{\text{max}})$. Значення коефіцієнтів $k_{\text{п}}$, λ_f на лінії 1 дорівнює 100 % і 1 відповідно. Область поля параметрів шини, що вище лінії 1, не розглядається, оскільки на таких режимах експлуатації шина перевантажена (радіальне навантаження перевищує допустиме), тому у розрахунках (7) прийнято $k_{\text{пmax}} = 100$ %. В області поля параметрів шини нижче лінії 1 радіальне навантаження менше допустимого $k_{\text{п}} < 100$ %, площа плями контакту з опорною поверхнею зменшується, $\lambda_f < 1$ – це зона експлуатаційних режимів роботи тракторної шини.

Слід відзначити, що при $k_{\text{п}} < 50$ % більший вплив на q_{max} і p має радіальне навантаження G_k , а при $50 \% < k_{\text{п}} < 100$ % – тиск повітря в шині $p_{\text{ш}}$. Це пояснюється жорсткістю характеристикою шини. Оскільки тракторні сільськогосподарські шини практично не експлуатуються при $k_{\text{п}} < 50$ %, то встановимо в якості нижньої межі області визначення середньоінтегральної ймовірності відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам (7) значення $k_{\text{пmin}} = 50$ %.

В силу того, що крім максимального тиску на ґрунт інші обмеження в показниках взаємодії тракторної шини з ґрунтом (буксування, дотична або питома сила тяги, опір коченню) в даній роботі не розглядаються, доцільним буде встановити мінімальне порогове значення ймовірності (8) для визначення середньоінтегральної оцінки $p_{\text{lim}} = 0$.

Якщо, дійсно, врахувати інші обмеження в показниках взаємодії тракторної шини з ґрунтом, то p_{lim} не буде константою, а функціонально залежатиме від обмежуючих факторів, наприклад, $p_{\text{lim}} = p_{\text{lim}}(\delta, P_{\text{к}}, \psi_{\text{к}}, f)$.

Розрахунок середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності тракторних шин агроекологічним вимогам p_i показав, що з понад 180 розглянутих типорозмірів, достатньо велика кількість шин взагалі не задовольняють агроекологічним вимогам. На рис. 6, б наведені дані p_i за 25 кращими зразками шин під час передпосівної (весна) і основної (осінь) обробки ґрунту. Серед розглянутих шин окремою групою з найкращими показниками виділяються шини категорії VF (Very high Flexion – шини дуже високої еластичності), які розроблені для експлуатації з навантаженнями на 40 % більшими, ніж звичайні радіальні шини при такому ж тиску повітря.

Такі шини мають показник p_i для весняної і осінньої обробки в межах 0,66 – 0,95, тобто на 66 – 95 % території України вони можуть експлуатуватися у всьому полі значень тиску повітря і радіальних навантажень без порушень агроекологічних вимог щодо максимального тиску на ґрунт. Таким чином, середньоінтегральна ймовірнісна оцінка p_i характеризує відсоток території України, де шина може експлуатуватись навесні чи восени у всьому полі значень тиску повітря і радіальних навантажень без порушень вимог щодо максимального тиску на ґрунт. Слід зазначити, що чим вище p_i , тим кращі показники тиску на ґрунт має шина. Сучасні шини категорії VF можуть скласти гідну конкуренцію гусеничним ходовим системам під час весняної обробки ґрунту.

Для інших шин p_i має менші значення, а у деяких $p_i = 0$. Такі шини взагалі не можна використовувати на території України, оскільки вони шкідливо впливають на ґрунт і сприяють його деградації. Виходячи з вищезазначеного, розрахунок величини p_i може бути використаним при проектуванні нових колісних тракторів, або

обладнанні існуючих новими комплектами шин. Такі розрахунки доцільно проводити для окремих ґрунто-кліматичних зон України. Разом з цим, при детальному розгляді показників конкретних типорозмірів шин, слід звернути увагу на те, що достатньо велика їх кількість має високі значення ймовірності відповідності агроєкологічним вимогам p при тисках повітря в шині близьких до $p_{ш, \min}$. Так, наприклад, шина 900/50 R42 Michelin (рис. 6, а) має p_i під час передпосівної (весна) і основної (осінь) обробки ґрунту 0,364 і 0,445 відповідно. Але при тиску повітря в шині $p_{ш} < 0,065$ МПа вона може експлуатуватись на понад 90 % території України без порушення агроєкологічних умов.

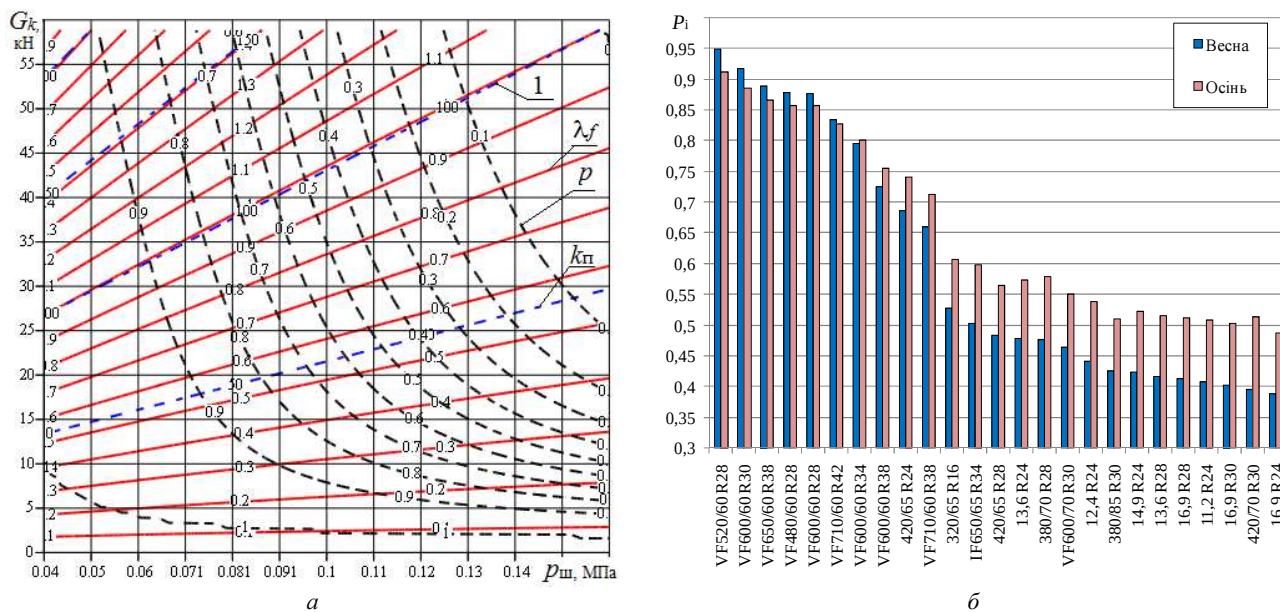


Рис. 6 – Характеристики взаємодії тракторних шин з ґрунтом:
а – універсальна характеристика шини 900/50 R42 Michelin; б – середньоінтегральна ймовірність виконання агроєкологічних умов для ряду шин під час передпосівної (весна) і основної (осінь) обробки ґрунту.

Тому рівень тиску повітря в шині та радіальне навантаження повинні бути обґрунтованими і спиратися на особливості ґрунто-кліматичних зон експлуатації. Враховуючи різноманітність ґрунто-кліматичних умов України, питання доцільності та ефективності використання окремих типорозмірів шин потребує подальшої розробки і уточнення з урахуванням також обмежень буксування, питомої сили тяги та ін.

Загалом, наведена методика розрахунку середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності тракторних шин агроєкологічним вимогам p_i з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України може використовуватись виробниками тракторної техніки при комплектуванні тракторів шинами для різних ґрунто-кліматичних зон.

Висновки. В інтервалі експлуатаційних навантажень на шину 50 – 100 % від допустимих середньоінтегральні ймовірнісні оцінки відповідності тракторних шин агроєкологічним вимогам p_i з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України знаходяться в широких межах від 0 до 0,95. При таких експлуатаційних навантаженнях більший вплив на максимальний тиск на ґрунт $q_{\max}$ і, відповідно, p_i має тиск повітря в шині $p_{ш}$ у порівнянні з радіальним навантаженням G_k . Найкращі показники p_i для весняної і осінньої обробки в межах 0,66 – 0,95 мають інноваційні шини категорії VF. Середньоінтегральні ймовірнісні оцінки відповідності тракторної шини агроєкологічним вимогам p_i є еквівалентом частки території України, де шина може експлуатуватись у всьому полі значень тиску повітря і радіальних навантажень без порушень агроєкологічних вимог щодо максимального тиску на ґрунт. Тракторні сільськогосподарські шини, що мають середньоінтегральну ймовірнісну оцінку $p_i = 0$ взагалі не можна використовувати на території України, оскільки вони шкідливо впливають на ґрунт і сприяють його деградації. Нормативна величина допустимого тиску на ґрунт [6, табл. 1] для передпосівного (навесні) і основного (восени) обробітку може бути прийнятою нормально розподіленою з параметрами: $M_1 = 135$ кПа, $\sigma_1 = 13$ кПа, $M_2 = 142$ кПа, $\sigma_2 = 24$ кПа відповідно. Розроблена методика розрахунку середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності тракторних шин агроєкологічним вимогам p_i з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України може використовуватись виробниками тракторів при обґрунтуванні шин для різних ґрунто-кліматичних зон держави.

Список літератури

1. Медведев В. В., Лактионова Т. Н. Почвенно-технологическое районирование пахотных земель Украины. – Х. : Изд. "13 типография", 2007. – 395 с.
2. Медведев В. В., Лактионова Т. Н. Гранулометрический состав почв Украины (генетический, экологический и агрономический аспекты). – Х. : Апостроф, 2011. – 292 с.

3. Медведєв В. В. Физические свойства и обработка почв в Украине. – Х. : Изд-во. "Городская типография", 2013. – 224 с.
4. Русанов В. А. Проблема переуплотнения почв движителями и эффективные пути ее решения. – М. : ВИМ, 1998. – 368 с.
5. Водяник И. И. Воздействие ходовых систем на почву (научные основы). – М. : Агропромиздат, 1990. – 172 с. : ISBN 5-10-000783-4.
6. ГОСТ 26955-86 Техника сельскохозяйственная мобильная. Нормы воздействия движителей на почву.
7. ГОСТ 26953-86 Техника сельскохозяйственная мобильная. Методы определения воздействия на почву.
8. Wong, J. Y. (Jo Yung) Theory of ground vehicles. – 2001. – 528 p. ISBN 0-471-35461-9.
9. ДСТУ ISO 4251-2:2003 Шини (серії маркування норми шарування) та ободи для сільськогосподарських тракторів і машин. Частина 2. Номінальні навантаження на шини. – К. : Держспоживстандарт України, 2005. – 12 с.
10. ДСТУ 4883:2007 Шини пневматичні для тракторів та сільськогосподарських машин. Загальні вимоги до експлуатування. – К. : Держспоживстандарт України, 2009. – 30 с.
11. Бидерман В. Л., Гуслицер Р. Л., Захаров С. П. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытания, эксплуатация). – М. : Госхимиздат, 1963. – 384 с.
12. Ксєнєвич И. П., Скотников В. А., Ляско М. И. Ходовая система – почва – урожай. – М. : Агропромиздат, 1985. – 304 с.
13. Ребров А. Ю. Идентификация сельскохозяйственных тракторных шин численным методом // Вісник НТУ «ХПІ» : зб. наук. пр. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2015. – № 6 (1115). – С. 114 – 121.
14. Ребров А. Ю., Мигушєнко Р. П. Использование информационных технологий при идентификации показателей инновационных тракторных сельскохозяйственных шин категорий IF и VF // Механіка та машинобудування. – 2015. – № 1. – С. 98 – 105.

References (transliterated)

1. Medvedev V. V., Laktionova T. N. *Pochvenno-tekhnologicheskoe rayonirovaniye pakhotnykh zemel' Ukrainy* [Soil regionalization zoning of arable land in Ukraine]. Kharkov, Izd. "13 tipografiya" Publ., 2007. 395 p.
2. Medvedev V. V., Laktionova T. N. *Granulometricheskii sostav pochv Ukrainy (geneticheskiy, ekologicheskii i agronomicheskii aspekty)*. [Grain size distribution of soils of Ukraine (genetic, environmental and agronomic aspects)]. Kharkov, Apostrof Publ., 2011. 292 p.
3. Medvedev V. V. *Fizicheskie svoystva i obrabotka pochv v Ukraine* [Physical properties and treatment of soils in Ukraine]. Kharkov, Izd-vo. "Gorodskaya tipografiya" Publ., 2013. 224 p.
4. Rusanov V. A. *Problema pereuplotneniya pochv dvizhitel'nykh i effektivnye puti ee resheniya* [The problem of soil paddling by propulsors and effective ways to solve it]. Moscow, VIM Publ., 1998. 368 p.
5. Vodyanik I. I. *Vozdeystvie khodovykh sistem na pochvu (nauchnye osnovy)* [Impact of running systems on soil (scientific basis)]. Moscow, Agropromizdat Publ., 1990. 172 p. ISBN 5-10-000783-4.
6. *GOST 26955-86 Tekhnika sel'skokhozyaystvennaya mobil'naya. Normy vozdeystviya dvizhiteley na pochvu* [State Standard 26955-86. Agricultural mobile machinery. Rates of impact of propelling agents on soil].
7. *GOST 26953-86 Tekhnika sel'skokhozyaystvennaya mobil'naya. Metody opredeleniya vozdeystviya na pochvu* [Agricultural mobile machinery. Methods for determining impact of propelling agents on soil].
8. Wong J. Y. (Jo Yung) *Theory of ground vehicles*. 2001. 528 p. ISBN 0-471-35461-9.
9. *DSTU ISO 4251-2:2003 Shyny (seriyi markuvannya normy sharuvannya) ta obody dlya sil'skogospodars'kykh traktoriv i mashyn. Chastyna 2. Nominal'ni navantazheniya na shyny* [State Standard ISO 4251-2:2003 Tires (ply rating marked series) and rims for agricultural tractors and machines. Part 2. Tire load ratings]. Kiev, Derzhspozhyvstandart Ukrayiny Publ., 2005. 12 p.
10. *DSTU 4883:2007 Shyny pnevmatychni dlya traktoriv ta sil'skogospodars'kykh mashyn. Zagal'ni vymogy do ekspluatuvannya* [State Standard Pneumatic tires for tractors and agricultural machinery. General maintenance requirements]. Kiev, Derzhspozhyvstandart Ukrayini Publ., 2009. 30 p.
11. Biderman V. L., Guslitsker R. L., Zakharov S. P. *Avtomobil'nye shyny (konstruktsiya, raschet, ispytaniya, ekspluatatsiya)* [Tires (design, calculations, tests, maintenance)]. Moscow, Goskhimizdat Publ., 1963. 384 p.
12. Ksenovich I. P., Skotnikov V. A., Lyasko M. I. *Khodovaya sistema – pochva – urozhay* [Suspension system - soil - crop]. Moscow, Agropromizdat Publ., 1985. 304 p.
13. Rebrov A. Yu. *Identifikatsiya sel'skokhozyaystvennykh traktornykh shyn chislennym metodom* [Farm tractor tires identification by numeric method]. *Visnyk NTU «KhPI» : zb. nauk. pr. Ser.: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 114–121.
14. Rebrov A. Yu., Migushenko R. P. *Ispol'zovanie informatsionnykh tekhnologiy pri identifikatsii pokazateley innovatsionnykh traktornykh sel'skokhozyaystvennykh shyn kategoriy IF i VF* [Using information technologies for identification of indicators of innovative agricultural tractor tires of categories IF and VF]. *Mekhanika ta mashynobuduvannya* [Mechanics and Mechanical Engineering]. 2015, no. 1, pp. 98–105.

Надійшло (received) 10.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Інтегральна ймовірнісна оцінка відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам в ґрунто-кліматичних умовах України / О. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 127 – 136. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Интегральная вероятностная оценка соответствия тракторной шины агроэкологическим требованиям в почвенно-климатических условиях Украины / А. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 127 – 136. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Integral probability estimate of the conformity of a tractor tire to the agro-ecological requirements in the soil and climatic conditions of Ukraine / O. Yu. Rebrov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 127 – 136. Bibliogr.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ребров Олексій Юрійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: alexrebrov0108@gmail.com.

Ребров Алексей Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: alexrebrov0108@gmail.com.

Rebrov Oleksii Yuriyovich – Candidate of Engineering Sciences, Associated Professor at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: alexrebrov0108@gmail.com.

УДК 519.6

Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЙСНОЗНАЧНИХ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ КОМПЛЕКСНОГО СПЕКТРУ

Отримано зображення для дійснозначних кореляційних функцій нестационарних випадкових послідовностей, процесів та полів з використанням трикутних моделей операторів для різних випадків спектра. Отримані зображення дійснозначних кореляційних функцій випадкових послідовностей та процесів можуть використовуватися для аналізу статистично нестационарних даних.

Ключові слова: кореляційна функція, трикутні моделі операторів, нестационарні випадкові послідовності і процеси.

Получены представления для вещественнозначных корреляционных функций нестационарных случайных последовательностей, процессов и полей с использованием треугольных моделей операторов для различных случаев спектра. Полученные представления вещественнозначных корреляционных функций случайных последовательностей и процессов могут быть использованы для анализа статистически нестационарных данных.

Ключевые слова: корреляционная функция, треугольные модели операторов, нестационарные случайные последовательности и процессы.

There is a large class of applications for which statistical transience is characteristic. The examples are: proliferation of waves in a turbulent atmosphere, the study of electromagnetic waves propagating near the globe or in the ionosphere, the analysis of the problem of growth or attenuation of surface waves by strong turbulence generated by a moving object, and others. In solving such problems the use of models of stationary random processes or homogeneous random fields leads to some errors. Thus one needs to develop the correlation theory for a broad class of non-stationary vector-valued random functions that would be promising for solving applied problems for which statistical heterogeneity or transience of relevant statistical data is essential. In this article, we obtain representations for the real-valued correlation functions of nonstationary random sequences, processes, and fields using triangular models of operators for various cases of the spectrum. The obtained representations of the real-valued correlation functions of random sequences and processes can be used to analyze statistically unsteady data.

Key words: correlation function, triangular models of operators, nonstationary random sequences and processes.

Вступ. Існує великий клас прикладних задач, для яких є характерною *статистична нестационарність*. Наприклад, розповсюдження хвиль у турбулентній атмосфері, при дослідженні електромагнітних хвиль, які поширюються поблизу земної кулі або в іоносфері, аналізі задачі загасання або зростання поверхневих хвиль сильною турбулентністю, що створюється об'єктом, який рухається, та інші. При розв'язанні таких задач використання моделей *стаціонарних випадкових процесів* або *однорідних випадкових полів* призводить до певних помилок. Тому виникає необхідність у розробці кореляційної теорії широкого класу нестационарних векторнозначних випадкових функцій, що була б перспективною для розв'язання прикладних задач, для яких статистична нестационарність або неоднорідність відповідних статистичних даних є істотною [1, 2, 3, 4].

Аналіз останніх досліджень. На цей час склалася досить повна теорія стаціонарних у широкому сенсі випадкових функцій, тобто кореляційна теорія стаціонарних випадкових послідовностей, стаціонарних випадкових процесів, однорідних випадкових полів [5, 6, 7, 8], а також випадкових процесів зі стаціонарними приростами [9, 10, 11, 5, 6,]. Проте, при розв'язанні ряду задач фільтрації та прогнозу випадкових процесів, а також поширення хвиль у турбулентній атмосфері, виявилось, що кореляційну теорію стаціонарних випадкових функцій застосувати не можна [5, 6, 12]. В роботах [12, 15] продовжено вивчення нестационарних функцій у гільбертових просторах, що почалось в роботах [5, 6].

Постановка задачі. При побудові кореляційної теорії випадкових процесів та послідовностей широко використовується комплексне зображення, тобто розглядаються випадкові функції вигляду

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t),$$

де i – уявна одиниця; t – час, неперервний або дискретний [13, 14, 15, 16].

Такий підхід дозволяє побудувати кореляційну теорію нестационарних випадкових функцій за допомогою спектральної теорії несамопрямих або унітарних операторів та ввести поняття *комплексного спектру*. Відповідні спектральні розклади нестационарних випадкових функцій є, як і в стаціонарному випадку, суперпозицією внутрішніх станів осциляторів (неперервних або дискретних), але вже з комплексними частотами. З'являються нові типи спектральних розкладів за внутрішніми станами *струн (континуальні осцилятори)*. Для застосувань кореляційної теорії нестационарних випадкових функцій та їх моделювання зручно мати справу з дійснозначними кореляційними функціями. Тому природно виникає задача про побудову дійснозначних кореляційних функцій, структура яких урахувала б комплексний спектр.

Математичні моделі кореляційних функцій для процесів та послідовностей. Побудову дійснозначних кореляційних функцій можна здійснити, використовуючи відомий факт, що

дійсна частина комплекснозначних кореляційних функцій є також кореляційною функцією.

Для уявної частини це твердження не є справедливим, через те що уявна частина є взаємною кореляційною функцією дійсної та уявної частин відповідного випадкового процесу або послідовності [17].

У випадку стаціонарних випадкових процесів (послідовностей) при аналізі експериментальних даних дуже часто використовуються наступні кореляційні функції [13]:

$$K(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \quad (C > 0, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t - s, \quad K(\tau) = M\xi(t)\overline{\xi(s)}, \quad \beta \in \mathbb{R});$$

$$K(\tau) = \frac{A}{4\alpha\omega^2} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) \quad \text{при } \omega^2 - \alpha^2 = \beta^2 > 0;$$

$$K(\tau) = \frac{A}{4\alpha^3} e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|) \quad \text{при } \omega^2 = \alpha^2;$$

$$K(\tau) = \frac{A}{8\alpha\beta\omega^2} \left((\alpha + \beta_1) e^{-(\alpha - \beta_1)|\tau|} + (\alpha - \beta_1) e^{-(\alpha + \beta_1)|\tau|} \right) \quad \text{при } \omega^2 - \alpha^2 = -\beta_1^2 < 0, \quad \beta = i\beta_1.$$

Для стаціонарних випадкових послідовностей відповідно [13]

$$K(0) = 1, \quad K(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau = n - m \neq 0, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$K(\tau) = Ce^{a|\tau|}, \quad C > 0, \quad |a| < 1;$$

$$K(\tau) = \begin{cases} \left[c(a-b)(1-ab)/a(1-a^2) \right] \cdot a^{|\tau|-1}, & \tau \neq 0; \\ c(1-2ab+b^2)/(1-a^2), & \tau = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1; \end{cases}$$

$$K(\tau) = \frac{C}{(a_1 - a_2)(1 - a_1 a_2)} \left(\frac{a_1}{1 - a_1^2} a_1^{|\tau|} - \frac{a_2}{1 - a_2^2} a_2^{|\tau|} \right), \quad a_1 \neq a_2 \in \mathbb{R}, \quad |a_1| < 1, \quad |a_2| < 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

З цих виразів видно, що для модельних стаціонарних випадкових процесів та послідовностей кореляційні функції дійснозначні через їх парність, тому що значна більшість кореляційних функцій у стаціонарному випадку залежить від модуля різниці відповідних аргументів.

Розглядаючи дисипативні випадкові процеси та послідовності, з зображень для кореляційних функцій (за допомогою *граничних та інфінітезимальних кореляційних функцій або кореляційних різниць*) маємо:

1) для випадкових дисипативних процесів першого рангу нестационарності

$$K(t, s) = K_0(t - s) + \int_0^\infty \varphi(t + \tau) \overline{\varphi(s + \tau)} d\tau, \quad \text{для } \operatorname{Re} K(t, s) = K_R(t, s)$$

отримуємо

$$K_R(t, s) = \operatorname{Re} K_0(t - s) + \int_0^\infty [u(t + \tau)u(s + \tau) + v(t + \tau)v(s + \tau)] d\tau, \quad \text{де } \varphi(t) = u(t) + iv(t);$$

2) для нестационарних дисипативних послідовностей першого рангу нестационарності

$$K_R(n, m) = \operatorname{Re} K_0(n - m) + \sum_{\tau=0}^\infty [u(n + \tau)u(m + \tau) + v(n + \tau)v(m + \tau)], \quad \text{де } \varphi(n) = u(n) + iv(n);$$

3) для *ганкелевих послідовностей* (коли $\exists \lim_{\tau \rightarrow \infty} K(n + \tau, m + \tau)$) першого квазірангу

$$K_R(n, m) = \operatorname{Re} K_0(n + m) + \sum_{\tau=1}^\infty [u(n - \tau)u(m + \tau - 1) + v(n - \tau)v(m + \tau - 1)], \quad \text{де } \varphi(n) = u(n) + iv(n).$$

Далі буде отримано дійснозначні зображення кореляційних функцій для найпростіших нестационарних випадкових процесів та послідовностей.

Розглянемо випадкову послідовність, яка породжується послідовністю у гільбертовому просторі $L^2_{[0;1]}$ вигляду $\eta_n = T^n \eta_0$, де T – несамоспряжений обмежений оператор вигляду

$$Tf(x) = \lambda_0 f(x) + i \int_0^1 \varphi(x) \overline{\theta(y)} f(y) dy, \quad \lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0 \neq \overline{\lambda_0}, \quad \left(\dim \operatorname{Im} T L^2_{[0;1]} = \infty \right).$$

Ця послідовність у комплексному гільбертовому просторі породжує дійснозначну кореляційну функцію вигляду [18]:

$$K_R(n, m) = r_0^{n+m} \cos(n - m) \varphi_0 \left\| \widehat{f_0}(x) \right\|^2 + r_1^{n+m} \cos(n - m) \varphi_1 \left\| \widehat{f_1}(x) \right\|^2 + \\ + r_0^n r_1^m (a \cos(n\varphi_0 - m\varphi_0) + b \sin(m\varphi_1 - n\varphi_0)) + r_1^n r_0^m (a \cos(n\varphi_1 - m\varphi_0) + b \sin(n\varphi_1 - m\varphi_0));$$

$$\hat{f}_0(x) = f_0(x) - \frac{\varphi(x)\alpha_0}{\gamma}, \quad \hat{f}_1(x) = \frac{\varphi(x)\alpha_0}{\gamma}, \quad \gamma = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\theta(x)}dx; \quad a = \operatorname{Re}\langle \hat{f}_0(x), \hat{f}_1(x) \rangle, \quad b = \operatorname{Im}\langle \hat{f}_0(x), \hat{f}_1(x) \rangle;$$

$$r_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad r_1 = \sqrt{\alpha_0^2 + (\beta_0 + \gamma)^2}, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\beta_0 + \gamma}{\alpha_0}.$$

Розглянемо нестационарний випадковий процес, який в $L_{[0;1]}^2$ набуває вигляду $u(x, t) = e^{itA} f_0(x)$, де

$$Af(x) = a(x)f(x) + i \int_0^1 \varphi(x)\overline{\theta(x)}f(y)dy, \quad a(x) = \overline{a(x)}.$$

Тоді $u(x, t) = e^{ita(x)} f_0(x) - \varphi(x) \int_0^t e^{i(t-s)a(x)} \gamma(s) ds$, де $\gamma(s)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтера

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) - \int_0^t G(t-s)\gamma(s)ds, \quad \gamma_0(t) = \int_0^1 e^{ia(x)t} \varphi(x)\overline{\theta(x)}dx, \quad G(t-s) = \int_0^1 e^{ia(x)(t-s)} \varphi(x)\overline{\theta(x)}dx.$$

Зокрема,

а) якщо $a(x) = -x$, $\varphi(x) = x$, $\theta(x) = \overline{\theta(x)} = 1$, то $G(t-s) = \int_0^1 x e^{-(t-s)x} dx = -\frac{1}{t-s} e^{-(t-s)} + \frac{1}{(t-s)^2} e^{-(t-s)} - \frac{1}{(t-s)^2};$

б) якщо $a(x) = x$, $\varphi(x) = x$, $\theta(x) = \overline{\theta(x)} = 1-x$, то

$$G(t-s) = \int_0^1 x(1-x) e^{(t-s)x} dx = \frac{1}{(t-s)^2} e^{(t-s)} - \frac{2}{(t-s)^3} e^{(t-s)} + \frac{t-s+2}{(t-s)^3};$$

в) якщо $a(x) = x$, $\varphi(x) = x$, $\theta(x) = \overline{\theta(x)} = 1-x^2$, то

$$G(t-s) = \int_0^1 x(1-x^2) e^{(t-s)x} dx = \frac{2}{(t-s)^2} e^{(t-s)} - \frac{6}{(t-s)^3} e^{(t-s)} + \frac{6}{(t-s)^4} e^{(t-s)} + \frac{t-s-6}{(t-s)^3}.$$

Наведені зображення для кореляційної функції використовуються для отримання дійснозначних кореляційних функцій, які найбільш придатні для аналізу стохастичних нестационарних даних.

Використання трикутних моделей операторів. Перейдемо до модельних зображень дійснозначних кореляційних функцій нестационарних випадкових послідовностей з використанням трикутних моделей операторів

Розглянемо $u(x, t) = e^{itA} f_0(x)$, де A обмежений дисипативний оператор у l_2 [19, 20]. Тоді кореляційна функція набуває вигляду $K(t, s) = \int_0^\infty \varphi(t+\tau)\overline{\varphi(s+\tau)}d\tau$, де $\varphi(t)$ та $\Lambda_k(t)$ розглядалися у [19, 20].

При $N = 3$ маємо: $\Lambda_1(t) = \beta_1 e^{i\lambda_1 t}$; $\Lambda_2(t) = \beta_2 e^{i\lambda_2 t} \frac{\overline{\lambda_1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + e^{i\lambda_1 t} \frac{i\beta_2 \beta_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

$$\Lambda_3(t) = e^{i\lambda_3 t} \beta_3 \frac{\overline{\lambda_1} - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{i\lambda_1 t} \frac{i\beta_3 \beta_1^2}{\lambda_1 - \lambda_3} \cdot \frac{\overline{\lambda_2} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + e^{i\lambda_2 t} \frac{i\beta_3 \beta_2^2}{\lambda_2 - \lambda_3} \frac{\overline{\lambda_1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3;$$

$$\Lambda_3(t) = t e^{i\lambda_1 t} \frac{\beta_1^2 (\overline{\lambda_2} - \lambda_1)}{\lambda_3 - \lambda_1} + e^{i\lambda_1 t} \frac{(-\overline{\lambda_1} - \overline{\lambda_2} + 2\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_3) - i\beta_1^2 (\overline{\lambda_2} - \lambda_1)}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2} + e^{i\lambda_3 t} \beta_3 \frac{\overline{\lambda_1} - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} \cdot \frac{\overline{\lambda_2} - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}; \text{ де } \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Якщо $\dim H = r < \infty$ та $\lambda_k \neq \lambda_l$, $k \neq l$, то для $\varphi(t)$ можна отримати модель вигляду: $\varphi(t) = \sum_{k=1}^p b_k e^{i\lambda_k t}$. Для

$$K(t, s) \text{ маємо: } K(t, s) = \sum_{l, m=1}^p b_l \overline{b_m} \left(e^{i\lambda_l t - i\overline{\lambda_m} s} / \left[i(\lambda_l - \overline{\lambda_m}) \right] \right).$$

Якщо $p = 1$, то $K_R(t, s) = b_1 \overline{b_1} \frac{e^{\frac{\beta_1^2(t+s)}{2}}}{\beta_1^2} \cos \alpha_1(t-s) = |b_1|^2 \frac{e^{\frac{\beta_1^2(t+s)}{2}}}{\beta_1^2} \cos \alpha_1(t-s)$; при $p = 2$

$$K(t, s) = b_1 \overline{b_1} \frac{e^{\frac{\beta_1^2(t+s)}{2}}}{\beta_1^2} \cos \alpha_1(t-s) + b_1 \overline{b_2} \frac{e^{i\lambda_1 t - i\overline{\lambda_2} s}}{i(\lambda_1 - \overline{\lambda_2})} \cos(\alpha_1 t - \alpha_2 s) +$$

$$\begin{aligned}
& + b_2 \bar{b}_1 \frac{e^{i\lambda_2 t - i\bar{\lambda}_1 s}}{i(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)} \cos(\alpha_2 t - \alpha_1 s) + b_2 \bar{b}_2 \frac{e^{\frac{\beta_2^2(t+s)}{2}}}{\beta_2^2} \cos \alpha_2(t-s) = \\
& = |b_1|^2 \frac{e^{\frac{\beta_1^2(t+s)}{2}}}{\beta_1^2} \cos \alpha_1(t-s) + |b_2|^2 \frac{e^{\frac{\beta_2^2(t+s)}{2}}}{\beta_2^2} \cos \alpha_2(t-s) + b_1 \bar{b}_2 \frac{e^{i\lambda_1 t - i\bar{\lambda}_2 s}}{i(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)} \cos(\alpha_1 t - \alpha_2 s) + b_2 \bar{b}_1 \frac{e^{i\lambda_2 t - i\bar{\lambda}_1 s}}{i(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)} \cos(\alpha_2 t - \alpha_1 s). \\
& K_R(t, s) = |b_1|^2 \frac{e^{\frac{\beta_1^2(t+s)}{2}}}{\beta_1^2} \cos \alpha_1(t-s) + |b_2|^2 \frac{e^{\frac{\beta_2^2(t+s)}{2}}}{\beta_2^2} \cos \alpha_2(t-s) + \\
& + e^{\frac{\beta_1^2 t - \beta_2^2 s}{2}} (Z_1(u_1 u_2 + v_1 v_2) + Z_2(u_1 v_2 + u_2 v_1)) \cos(\alpha_1 t - \alpha_2 s) + \\
& + e^{\frac{\beta_2^2 t - \beta_1^2 s}{2}} (Z_1(u_1 u_2 + v_1 v_2) - Z_2(u_1 v_2 + u_2 v_1)) \cos(\alpha_2 t - \alpha_1 s), \text{ де } b_j = u_j + iv_j, \quad j = 1, 2, \\
& Z_1 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 / 4 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \quad Z_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 / 4 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2}.
\end{aligned}$$

Для асимптотично згасаючих стискаючих нестационарних випадкових послідовностей першого рангу нестационарності

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{N \leq \infty} C_k \Lambda_k(n), \quad |C_k|^2 < \infty, \quad \Lambda_k(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_k|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1-\lambda \bar{\lambda}_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \frac{|\lambda_j|}{\bar{\lambda}_j} d\lambda, \quad |\lambda_j| < 1.$$

При $N = 3$ маємо: $\Lambda_1(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_1} d\lambda = \sqrt{1-|\lambda_1|^2} \lambda_1^n$;

$$\Lambda_2(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_2|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_2} \frac{1-\lambda \bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \frac{|\lambda_1|}{\bar{\lambda}_1} d\lambda = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} \sqrt{1-|\lambda_2|^2} \left(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} (1-|\lambda_1|^2) + \lambda_2^n \frac{1-\lambda_2 \bar{\lambda}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_3(n) &= -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{1-|\lambda_3|^2} \oint_{\gamma} \frac{\lambda^n}{\lambda - \lambda_3} \frac{1-\lambda \bar{\lambda}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2} \frac{|\lambda_2|}{\bar{\lambda}_2} \frac{1-\lambda \bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \frac{|\lambda_1|}{\bar{\lambda}_1} d\lambda = \\
&= \frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} \frac{|\lambda_2|}{\lambda_2} \sqrt{1-|\lambda_3|^2} \left\{ \lambda_3^n \frac{1-\lambda_3 \bar{\lambda}_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{1-\lambda_3 \bar{\lambda}_1}{\lambda_3 - \bar{\lambda}_1} + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_3} \frac{1-\lambda_2 \bar{\lambda}_1}{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1} (1-|\lambda_2|^2) + \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_3} \frac{1-\lambda_1 \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2} (1-|\lambda_1|^2) \right\}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3.
\end{aligned}$$

Кореляційну функцію обчислюємо за формулою $K(n, m) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi(n+\tau) \overline{\varphi(m+\tau)}$.

У випадку, коли послідовність має одну точку недійсного спектру λ_1 , яка лежить на полі круга одиничного радіусу $\lambda_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, для $K(n, m)$ остаточно отримуємо:

$$K(n, m) = (1-|\lambda_1|^2) |C_1|^2 \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda_1^{n+\tau} \bar{\lambda}_1^{m+\tau} = |C_1|^2 \lambda_1^n \bar{\lambda}_1^m = |C_1|^2 r_1^{n+m} (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1) \times (\cos m\theta_1 - i \sin m\theta_1).$$

Звідси

$$K_R(n, m) = C_1^2 r_1^{n+m} \cos(n-m)\theta_1. \quad (1)$$

Відзначимо, якщо $|\lambda_1| = r_1 = 1$, то з (1) отримуємо $K_R(n, m) = K_R(n-m)$, тобто вона є кореляційною функцією стаціонарної випадкової послідовності. Вираз (1) можна проінтерпретувати інакше: якщо розглянути випадкову послідовність $\xi(n) = \xi_1(n) \cdot \xi_2(n)$, де $\xi_1(n)$ та $\xi_2(n)$ – некорельовані послідовності вигляду

$\xi_1(n) = |C_1| \xi_1 r_1^n$, $M \xi_1 = 0$, $M |\xi_1|^2 = 1$, $\xi_2(n) = \xi_2 \sin nx + \xi_3 \cos nx$, $M \xi_2 = M \xi_3 = 0$, $M |\xi_2|^2 = M |\xi_3|^2 = 1$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некорельовані випадкові величини, тоді $\xi_1(n)$ – це ганкелева випадкова послідовність, $\xi_2(n)$ – стаціонарна випадкова послідовність, а кореляційна функція $\xi(n)$ має вигляд (1).

У випадку, коли послідовність має дві точки недійсного спектру $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, 2$,

$$K(n, m) = |Z_1|^2 \lambda_1^n \bar{\lambda}_1^m \frac{1}{1-|\lambda_1|^2} + |Z_2|^2 \lambda_2^n \bar{\lambda}_2^m \frac{1}{1-|\lambda_2|^2} + Z_1 \bar{Z}_2 \lambda_1^n \bar{\lambda}_2^m \frac{1}{1-\lambda_1 \bar{\lambda}_2} + \bar{Z}_1 Z_2 \lambda_2^n \bar{\lambda}_1^m \frac{1}{1-\bar{\lambda}_1 \lambda_2},$$

де

$$\begin{aligned}
Z_1 &= C_1 \sqrt{1-|\lambda_1|^2} + C_2 |\lambda_1| \sqrt{1-|\lambda_2|^2} (1-|\lambda_1|^2) \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 + (\beta_1^2 - \beta_2^2) \beta_1^2 / 4}{\left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 / 4 \left(\alpha_1^2 + \frac{\beta_1^4}{4} \right) \right]} + \\
&\quad + i C_2 |\lambda_1| \sqrt{1-|\lambda_2|^2} (1-|\lambda_1|^2) \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \beta_1^2 / 2 - \alpha_1 ((\beta_1^2 - \beta_2^2) / 2)}{\left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 / 4 \left(\alpha_1^2 + \frac{\beta_1^4}{4} \right) \right]}; \\
Z_2 &= C_2 |\lambda_1| \sqrt{1-|\lambda_2|^2} \times \frac{(1 - \alpha_1 \alpha_2 - (\beta_1^2 \beta_2^2) / 4) (\alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) / 4) - \left(\alpha_2 \frac{\beta_1^2}{2} - \frac{\beta_2^2}{2} \alpha_1 \right) \frac{\beta_1^2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^4 / 4) \left((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)^2 / 4 \right)} + \\
&\quad + i C_2 |\lambda_1| \sqrt{1-|\lambda_2|^2} \times \frac{(\alpha_2 (\beta_1^2 / 2) - (\beta_2^2 / 2) \alpha_1) (\alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2) / 4) + (1 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1^2 \beta_2^2 / 4) (\beta_1^2 / 2) (\alpha_2 - \alpha_1)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^4 / 4) \left((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)^2 / 4 \right)}.
\end{aligned}$$

Остаточно,

$$\begin{aligned}
K_R(n, m) &= |Z_1|^2 \frac{1}{1-|\lambda_1|^2} r_1^{n+m} \cos(n-m) \theta_1 + |Z_2|^2 \frac{1}{1-|\lambda_2|^2} r_2^{n+m} \cos(n-m) \theta_2 + \\
&\quad + Z_3 (u_1 \cos(n \theta_1 - m \theta_2) - u_2 \sin(n \theta_1 - m \theta_2)) + Z_3 (u_3 \cos(n \theta_2 - m \theta_1) - u_4 \sin(m \theta_1 - n \theta_2)),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Z_3 &= \operatorname{Re} Z_1 \operatorname{Re} Z_2 + \operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} Z_2; \quad u_1 = \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1^2 \beta_2^2 / 4}{\left(1 - \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1^2 \beta_2^2 / 4 \right)^2 + \left(\alpha_2 (\beta_1^2 / 2) - (\beta_2^2 / 2) \alpha_1 \right)^2}; \\
u_2 &= u_4 = \frac{(\beta_2^2 / 2) \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1^2 / 2)}{\left(1 - \alpha_1 \alpha_2 - (\beta_1^2 \beta_2^2 / 4) \right)^2 + \left((\beta_2^2 / 2) \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1^2 / 2) \right)^2}.
\end{aligned}$$

Таким чином, для моделювання дійснозначних кореляційних функцій нестационарних випадкових процесів (послідовностей) отримуємо простий алгоритм: розглядаємо комплексний гільбертів простір, який є підпростором гільбертіва простору $L_2(\Omega)$, далі будуємо криву (послідовність) у цьому просторі вигляду $\hat{\xi}_t = e^{itA} \xi_0$ ($\hat{\xi}_n = T^n \xi_0$), та, нарешті, для різних класів несамоспряжених (неунітарних) операторів A , (T) обчислюємо скалярний добуток, який і є кореляційною функцією початкових ξ_t , (ξ_n) за умовою, що $M \xi_t = 0$ ($M \xi_n = 0$). При обчисленні скалярного добутку можна переходити до унітарно еквівалентних елементів, що дозволяє використати модельні (трикутні, функціональні, універсальні) зображення оператору A , (T) .

Підрахунок $\operatorname{Re} \langle \hat{\xi}_t, \hat{\xi}_s \rangle_{H_\xi}$, $\left(\operatorname{Re} \langle \hat{\xi}_n, \hat{\xi}_m \rangle_{H_\xi} \right)$ і приводить до шуканого результату.

Узагальнення теорії для випадкового поля. Аналогічні зображення дійснозначних кореляційних функцій можна отримати для неоднорідних неперервних та дискретних випадкових полів. Відповідні вирази наведемо для асимптотично згасаючих неоднорідних полів першого рангу неоднорідності у випадках дискретного спектру та спектру у нулі.

Нехай лінійно зображене випадкове поле $\xi(x_1, x_2) = e^{ix_1 A_1 + ix_2 A_2} \xi_0$, де $\xi_0 \in H_0 = \overline{2 \operatorname{Im} A_1 H_\xi} \cap \overline{2 \operatorname{Im} A_2 H_\xi}$, $\dim H_0 = 1$, A_1 , A_2 – двічі переставні оператори. Інфінітезимальна кореляційна функція (ІКФ) поля $\xi(x_1, x_2)$ має вигляд

$$W(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_0 |\nu|^2 \Phi(x_1, x_2) \overline{\Phi(y_1, y_2)},$$

де λ_0 – дійсне число, а ν – комплексне число.

Кореляційна функція має вигляд

$$K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty W(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2, y_1 + \tau_1, y_2 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{для асимптотично згасаючих полів}).$$

Позначимо $U = \operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2)$, $V = \operatorname{Im} \Phi(x_1, x_2)$. Легко отримати вираз для $K_R(x_1, x_2, y_1, y_2)$:

$$K_R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_0 |\nu|^2 \int_0^\infty \int_0^\infty [U(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2)U(y_1 + \tau_1, y_2 + \tau_2) + V(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2)V(y_1 + \tau_1, y_2 + \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (2)$$

Розглянемо випадок, коли спектр кожного оператора A_k ($k=1, 2$) міститься у нулі, тоді

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} J_0(2\sqrt{x_1}\theta_1) J_0(2\sqrt{x_2}\theta_2) d\theta_1 d\theta_2,$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя.

У цьому випадку $V \equiv 0$. Таким чином, дійснозначна кореляційна функція набуває вигляду:

$$K_R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_0 |\nu|^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} J_0(2\sqrt{(x_1 + \tau_1)}\theta_1) J_0(2\sqrt{(x_2 + \tau_2)}\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right\} \times \\ \times \left\{ \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} J_0(2\sqrt{(y_1 + \tau_1)}\theta_1) J_0(2\sqrt{(y_2 + \tau_2)}\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right\} d\tau_1 d\tau_2.$$

Нехай кожен оператор A_k ($k=1, 2$) має дискретний спектр, тоді:

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2), \quad \Phi_1(x_1) = \sum_{p=1}^{N_1} \beta_p^{(1)} \Lambda_p^{(1)}(x_1), \quad \Phi_2(x_2) = \sum_{q=1}^{N_2} \beta_q^{(2)} \Lambda_q^{(2)}(x_2)$$

$$\Lambda_p^{(1)}(x_1) = -\frac{1}{2\pi i} \beta_p^{(1)} \oint_{\gamma_1} e^{ix_1 \lambda_1} \frac{1}{\lambda_p^{(1)} - \lambda_1} \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_{p-j}^{(1)}}}{\lambda_1 - \lambda_{p-j}^{(1)}} d\lambda_1, \quad \Lambda_q^{(2)}(x_2) = -\frac{1}{2\pi i} \beta_q^{(2)} \oint_{\gamma_2} e^{ix_2 \lambda_2} \frac{1}{\lambda_q^{(2)} - \lambda_2} \prod_{l=1}^{q-1} \frac{\lambda_2 - \overline{\lambda_{q-l}^{(2)}}}{\lambda_2 - \lambda_{q-l}^{(2)}} d\lambda_2.$$

Розглянемо два випадки $N_j = 1, 2$; $j = 1, 2$.

1. Нехай кожен оператор A_k ($k=1, 2$) має єдину точку спектру $\lambda_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} + i\left(\beta_1^{(j)}\right)^2/2$, $j=1, 2$. Тоді

$$K_R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \\ = \lambda_0 |\nu|^2 \left(\beta_1^{(1)} \beta_1^{(2)}\right)^4 e^{\left(\beta_1^{(1)}\right)^2 + \left(\beta_1^{(2)}\right)^2} \cos\left((x_1 - y_1)\alpha_1^{(1)} + (x_2 - y_2)\alpha_1^{(2)}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x_1 + \tau_1 + x_2 + \tau_2) - (y_1 + \tau_1 + y_2 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

2. Нехай кожен оператор A_k ($k=1, 2$) має дві точки спектру $\lambda_k^{(j)} = \alpha_k^{(j)} + i\left(\beta_k^{(j)}\right)^2/2$; $j=1, 2$; $k=1, 2$.

Тоді $K_R(x_1, x_2, y_1, y_2)$ можна обчислити, користуючись формулою (2), але у цьому випадку виникають дуже громіздкі вирази. Тому зручніше скористуватися іншим зображенням для $K_R(x_1, x_2, y_1, y_2)$:

$$K_R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \lambda_0 |\nu|^2 \int_0^\infty \int_0^\infty [u(x_1 + \tau_1)u(x_2 + \tau_2)u(y_1 + \tau_1)u(y_2 + \tau_2) + \\ + v(x_1 + \tau_1)v(x_2 + \tau_2)v(y_1 + \tau_1)v(y_2 + \tau_2) - u(x_1 + \tau_1)u(x_2 + \tau_2)v(y_1 + \tau_1)v(y_2 + \tau_2) - \\ - u(y_1 + \tau_1)u(y_2 + \tau_2)v(x_1 + \tau_1)v(x_2 + \tau_2) + u(x_1 + \tau_1)v(x_1 + \tau_1)u(y_1 + \tau_1)v(y_2 + \tau_2) + \\ + u(x_1 + \tau_1)v(x_2 + \tau_2)u(y_2 + \tau_2)v(y_1 + \tau_1) + u(x_2 + \tau_2)v(x_1 + \tau_1)u(y_1 + \tau_1)v(y_2 + \tau_2) + \\ + u(x_2 + \tau_2)v(x_1 + \tau_1)u(y_2 + \tau_2)v(y_1 + \tau_1)] d\tau_1 d\tau_2,$$

де $u(x_1) = \operatorname{Re} \Phi(x_1)$, $v(x_1) = \operatorname{Im} \Phi(x_1)$, а $u(x_i)$, $u(y_i)$ та $v(x_i)$, $v(y_i)$ ($i=1, 2$) відрізняються одне від одного лише індексами,

$$u(x_1) = \left(\beta_1^{(1)}\right)^2 e^{-x_1 \left(\beta_1^{(1)}\right)^2/2} (Z_1 \cos x_1 \alpha_1 - Z_2 \sin x_1 \alpha_1) + e^{-x_1 \left(\beta_2^{(1)}\right)^2/2} (Z_3 \cos x_1 \alpha_2 - Z_4 \sin x_1 \alpha_2), \\ v(x_1) = \left(\beta_1^{(1)}\right)^2 e^{-x_1 \left(\beta_1^{(1)}\right)^2/2} (Z_2 \cos x_1 \alpha_1 - Z_1 \sin x_1 \alpha_1) + e^{-x_1 \left(\beta_2^{(1)}\right)^2/2} (Z_4 \cos x_1 \alpha_2 + Z_3 \sin x_1 \alpha_2),$$

де

$$Z_1 = \frac{\left[\left(\beta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\beta_1^{(1)}\right)^2\right]/2}{\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right)^2 - \left[\left(\beta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\beta_1^{(1)}\right)^2\right]^4/4}; \quad Z_2 = \frac{\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}}{\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right)^2 - \left[\left(\beta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\beta_1^{(1)}\right)^2\right]^4/4};$$

$$Z_3 = \frac{(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)})^2 + [(\beta_2^{(1)})^4 - (\beta_1^{(1)})^4] / 4}{(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)})^2 - ((\beta_2^{(1)})^2 - (\beta_1^{(1)})^2)^2 / 4}; Z_4 = \frac{(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)})[(\beta_2^{(1)})^4 - (\beta_1^{(1)})^4] / 4}{(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)})^2 - ((\beta_2^{(1)})^2 - (\beta_1^{(1)})^2)^2 / 4}.$$

Отримаємо зображення для кореляційної функції випадкового процесу з нескінченно кратним спектром у нулі. Через те, що $\varphi(t)$ набуває вигляду

$$\varphi(t) = \int_0^l f_0(z) J_0(\sqrt{2zt}) dz,$$

то обираючи $f_0(z) = C_0$ як початкову умову, маємо [10]: $\varphi(z) = C_0 \sqrt{2l/t} J_1(\sqrt{2lt})$. Тоді для $K(t, s)$ отримуємо зображення

$$K(t, s) = |C_0|^2 2l \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(t+\tau)(s+\tau)}} J_1(\sqrt{2l(t+\tau)}) J_1(\sqrt{2l(s+\tau)}) d\tau.$$

Знайдемо асимптотичне зображення для $K(t, t)$ (це середня енергія) для випадку великих t . Через те, що

$$K(t, t) = |C_0|^2 4l \int_{\sqrt{2lt}}^\infty \frac{1}{u} J_1^2(u) du \quad \text{та} \quad J_1(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{при} \quad u \rightarrow \infty,$$

то для $K(t, t)$ маємо:

$$K(t, t) = |C_0|^2 4l \int_{\sqrt{2lt}}^\infty \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos^2\left(u - \frac{3\pi}{4}\right) du = |C_0|^2 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} l \left(\frac{2}{\sqrt[4]{2lt}} - \frac{1}{(\sqrt{2lt})^3} \cos\sqrt{\frac{lt}{2}} \right). \quad (3)$$

Як видно з (3) процес асимптотично згасає як $1/\sqrt[4]{t}$, на відміну від випадку, коли дискретний спектр міститься в верхній півплощині та асимптотично згасає експоненціально. Таким чином, процес з нескінченно кратним спектром у нулі може бути застосовано для моделювання повільно згасаючих флуктуаційних процесів.

Перспективи подальших досліджень. Отримані зображення дійснозначних кореляційних функцій випадкових процесів можуть використовуватися для аналізу статистично нестационарних даних, що є перспективним при розв'язанні багатьох прикладних задач, для яких нестационарність даних є істотною.

Висновки. Таким чином, найпростіші моделі випадкових процесів та послідовностей, які мають задану кореляційну функцію, можна використати для моделювання випадкових коефіцієнтів в лінійних стохастичних диференціальних та різницевих рівняннях. Це може істотно спростити аналіз імовірнісних властивостей розв'язків цих рівнянь.

Список літератури

1. Алексеев Г. Л., Белоброва М. В. Восстановление профиля характеристики коэффициента преломления тропосферы по корреляционным функциям поля // Радиофизика и электроника. Сб. научн. тр. НАН Украины, ин-т им. А. Я. Усикова. – Харьков, 2005. – Т. 10. – № 1. – С. 70 – 75.
2. Боев А. Г. О гашении поверхностных волн сильной турбулентностью // Физика атмосферы и океана. – 1971. – Т. VII. – № 1. – С. 50 – 59.
3. Бурмака В. П., Костров Л. С., Черногор Л. Ф. Статистические характеристики сигналов доплеровского ВЧ радара при зондировании средней атмосферы возмущенной стартами ракет и солнечным терминатором // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т. 8. – № 2. – С. 143 – 162.
4. Лысенко В. Н. Измерение параметров ионосферы средством корреляционной обработки некогерентного рассеянного сигнала // Радиофизика и электроника. Сб. научн. тр. НАН Украины, ин-т им. А. Я. Усикова. – Харьков, 2002. – Т. 7. – № 1. – С. 82 – 88.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. I ч. Случайные процессы. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. II ч. Случайные поля. – М. : Наука, 1978. – 464 с.
7. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М. : Наука, 1968. – 463 с.
8. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М. : Советское радио, 1961. – 559 с.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика I ч. – М. : Наука, 1965. – 640 с.
10. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика II ч. – М. : Наука, 1967. – 720 с.
11. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М. : Советское радио, 1975. – 704 с.
12. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М. : Наука, 1967. – 548 с.
13. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // Успехи математических наук. – 1952. – Том 1. – Вып. 5 (51). – С. 3 – 168.
14. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1977. – 654 с.
15. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процес. сов. – М. : Наука, – 1975. – 320 с.
16. Лившиц М. С., Яциевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
17. Лозэ М. Теория вероятностей. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 719 с.
18. Черемская Н. В., Петрова А. Ю., Проценко М. А. О моделировании вещественнозначных корреляционных функций нестационарных случайных процессов и последовательностей // Технология приборостроения. – 2003. – № 2. – С. 25 – 29.
19. Черемская Н. В. О моделировании некоторых классов нестационарных случайных последовательностей при помощи треугольных моделей операторов // Радиотехника. – 2003. – Вып. 132. – С. 70 – 77.
20. Черемская Н. В. Об одном классе нестационарных случайных последовательностей // Вестник НТУ «ХПИ». : Сб. научн. тр. Сер. «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков, 2003. – № 18. – С. 122 – 130.

References (transliterated)

1. Alekseev G. L., Belobrova M. V. Vosstanovlenie profilya kharakteristiki koeffitsienta prelomleniya troposfery po korrelyatsionnym funktsiyam polya [Restoration of the profile of the characteristic of the refractive index of the troposphere by correlation functions of the field]. *Radiofizika i elektronika. Sb. nauchn. tr. NAN Ukrainy, in-t im. A. Ya. Usikova* [Radiophysics and Electronics: Collection of Scientific Work, NAS of Ukraine, A. Ya. Usikov Institute of Radio Physics and Electronics]. Kharkov, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 70–75.
2. Boyev A. G. O gashenii poverkhnostnykh voln sil'noy turbulentnost'yu [On the quenching of surface waves by strong turbulence]. *Fizika atmosfery i okeana* [Physics of the Atmosphere and the Ocean]. 1971, vol. VII, no. 1, pp. 50–59.
3. Burmaka V. P., Kostrov L. S., Chernogor L. F. Statisticheskiye kharakteristiki signalov doplerovskogo VCH radara pri zondirovanii sredney atmosfery vozmushchenno startami raket i solnechnym terminatorom [Statistical characteristics of signals of Doppler HF radar during probing of the middle atmosphere perturbed by rocket launches and a solar terminator]. *Radiofizika i radioastronomiya* [Radiophysics and radio astronomy]. 2003, vol. 8, no. 2, pp. 143–162.
4. Lysenko V. N. Izmereniye parametrov ionosfery sredstvom korrelyatsionnoy obrabotki nekogerentnogo rasseyannogo signala [Measurement of the ionosphere parameters by means of the correlation processing of incoherent scattered signal] *Radiofizika i elektronika. Sb. nauchn. tr. NAN Ukrainy, in-t im. A. Ya. Usika* [Radiophysics and Electronics: Collection of Scientific Work, NAS of Ukraine, A. Ya. Usikov Institute of Radio Physics and Electronics]. Kharkov, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 82–88.
5. Rytov S. M. Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku. I ch. Sluchaynyye protsessy [Introduction to statistical radiophysics. Part I. Random Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 496 p.
6. Rytov S. M., Kravtsov Yu. A., Tatarskiy V. I. Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku. II ch. Sluchaynyye polya [Introduction to statistical radiophysics. Part II. Random fields]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 464 p.
7. Sveshnikov A. A. Prikladnyye metody teorii sluchaynykh funktsiy [Applied methods of the theory of random functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 463 p.
8. Stratonovich R. L. Izbrannyye voprosy teorii fluktuatsiy v radiotekhnike [Selected Topics in the Theory of Fluctuations in Radio Engineering]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1961. 559 p.
9. Monin A. S., Yaglom A. M. Statisticheskaya gidrodinamika I ch. [Statistical hydrodynamics. Part I]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 640 p.
10. Monin A. S., Yaglom A. M. Statisticheskaya gidrodinamika II ch [Statistical hydrodynamics. Part II]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 720 p.
11. Tikhonov V. I., Kul'man N. K. Nelineynaya fil'tratsiya i kvazikogerentnyy priyem signalov [Nonlinear filtering and quasi-coherent signal reception]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1975. 704 p.
12. Tatarskiy V. I. Rasprostraneniye voln v turbulentnoy atmosfere [Propagation of waves in a turbulent atmosphere]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 548 p.
13. Yaglom A. M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of stationary random functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in Mathematical Sciences]. 1952, vol. 1, no. 5 (51), pp. 3–168.
14. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov [Introduction to the theory of random processes]. Moscow Nauka Publ., 1977. 654 p.
15. Venttsel' A. D. Kurs teorii sluchaynykh protsessov [Course of the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 320 p.
16. Livshits M. S., Yantsevich A. A. Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh [Theory of operator nodes in Hilbert spaces]. Kharkov, KSU Publ., 1971. 160 p.
17. Loev M. Teoriya veroyatnostey [Probability Theory]. Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry Publ., 1962. 719 p.
18. Cheremskaya N. V., Petrova A. Yu., Protsenko M. A. O modelirovanii veshchestvennoznachnykh korrelyatsionnykh funktsiy nestatsionarnykh sluchaynykh protsessov i posledovatel'nostey [On the simulation of real-valued correlation functions of nonstationary random processes and sequences]. *Tekhnologiya priborostroeniya* [Technology of Instrumentation]. 2003, no. 2, pp. 25–29.
19. Cheremskaya N. V. O modelirovanii nekotorykh klassov nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey pri pomoshchi treugol'nykh modeley operatorov [On the modeling of some classes of nonstationary random sequences using triangular models of operators]. *Radiotekhnika* [Radion Engineering]. 2003, no. 132, pp. 70–77.
20. Cheremskaya N. V. Ob odnom klasse nestatsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [On a class of nonstationary random sequences]. *Vestnik NTU "KhPI". Sb. nauchn. tr. Seriya : Sistemnyy analiz, upravleniye i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of NTU "KhPI". Series : "System analysis, management and information technology"]. Kharkov, 2003, no. 18, pp. 122–130.

Надійшло (received) 22.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання дійснозначних кореляційних функцій з урахуванням комплексного спектру / Н. В. Черемська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 136 – 143. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование вещественнозначных корреляционных функций с учетом комплексного спектра / Н. В. Черемская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 136 – 143. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.

Modeling of real-valued correlation functions with allowance for the complex spectrum / N. V. Cheremskaya // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 136 – 143. Bibliogr.: 20 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Черемська Надія Валентинівна – кандидат технічних наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Черемская Надежда Валентиновна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Cheremskaya Nadezhda Valentinovna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

ЗМІСТ

<i>Духопельников С. В.</i> В память о профессоре Ганделе Ю. В.	5
<i>Белянська О. Р., Волошин М. Д., Качанов Д. М., Качанова Ю. А.</i> Виробництво біогазу та комплексного до- быва з твердих промислово – побутових відходів із додаванням активних домішок.....	10
<i>Бережная Е. В., Грибков Э. П., Кузнецов В. Д.</i> Численное математическое моделирование процесса консо- лидации порошковой среды электроконтактным методом	15
<i>Велиев Э. И.</i> Численно-аналитические методы решения интегральных уравнений в двухмерных задачах тео- рии дифракции	21
<i>Воропай А. В., Григорьев А. Л.</i> Использование теоремы Эфроса для учёта диссипативных свойств деформи- руемых элементов конструкций	29
<i>Кожушко А. П., Островерх О. О., Шевцов В. М.</i> Теоретичне дослідження безступінчастої трансмісії авто- мобіля КраЗ-63221-02 для ремонту нафтогазових свердловин	45
<i>Литвин О. М., Артюх М. В.</i> Узагальнена виробнича функція, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності	51
<i>Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., Кейта К. В.</i> Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних у випадку різних інформаційних операторів	56
<i>Marynych T. O., Nazarenko L. D., Khomenko N. H.</i> Comparative analysis of univariate time series modeling and forecasting techniques for short-term unstable data	63
<i>Мацуй А. М., Кондратець В. О.</i> Математичне моделювання зв'язку об'єму і висоти сипкого матеріалу у промислових ємностях	70
<i>Мельник О. С., Єгорченков В. О., Косов А. О.</i> Світлодіодне освітлення штучного небосхилу.....	76
<i>Нечуйвітер М. М.</i> Повышение надежности эксплуатации питательных насосов паротурбинных установок тепловых и атомных электростанций.....	81
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульс- ним навантаженням	86
<i>Першина Ю. І., Пасічник В. О.</i> Відновлення розривної функції за інтерполяційними даними з викорис- танням прямокутних елементів	94
<i>Першина Ю. І., Шилін О. В.</i> Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3d тіла за ві- домими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлєтації функцій	105
<i>Петренко О. М., Любарський Б. Г.</i> Моделювання теплових процесів у тяговому асинхронному двигуні ван- тажного електровозу при русі на ділянці колії з заданим профілем та графіком руху	112
<i>Плаксий Ю. А.</i> Нові аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла: двочастотні мультиплікативні па- раметричні кватерніонні моделі	117
<i>Полянская Т. С.</i> Интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, заданное на системе ин- тервалов	123
<i>Ребров О. Ю.</i> Інтегральна ймовірнісна оцінка відповідності тракторної шини агроекологічним вимогам в грунто-кліматичних умовах України.....	127
<i>Черемська Н. В.</i> Моделювання дійснозначних кореляційних функцій з урахуванням комплексного спектру....	136

CONTENTS

Dukhopelnykov S. V. In memory of Gandel Yu. V.	5
Belianska O. R., Voloshin M. D., Kachanov D. M., Kachanova Ju. A. Producing biogas and complex fertilizer from solid industrial waste with active admixtures	10
Berezshnaya O. V., Gribkov E. P., Kuznetsov V. D. Numerical mathematical modeling of power medium consolidation by electric contact method	15
Veliyev E. I. Numerical-analytical methods for solving integral equations in two-dimensional problems of the theory of diffraction	21
Voropay A. V., Grigoriev A. L. Using Efros theorem for taking into account dissipative properties of deformable structural elements	29
Kozhushko A. P., Ostroverch A. O., Shevtsov V. M. Theoretical research of the continuously variable transmission of the vehicle KrAZ-63221-02 used to repair oil and gas wells	45
Lytvyn O. M., Artyukh M. V. The generalized production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment	51
Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P., Keita K. V. Computing integrals of trigonometric functions of two variables using various information operators	56
Marynych T. O., Nazarenko L. D., Khomenko N. H. Comparative analysis of univariate time series modeling and forecasting techniques for short-term unstable data	63
Matsui A. N., Kondratets V. A. Mathematical modeling of relation of volume and height of pouring materials in industrial capacities	70
Melnyk O. S., Yegorchenkov V. O., Kosov A. O. LED Illumination of an Artificial Sky	76
Nechuiviter M. M. Improving exploitation reliability of feed pumps of steam turbine installations of thermal and nuclear power plants	81
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Oscillations of a cubic nonlinear oscillator caused by an impulse load	86
Pershina Yu. I., Pasichnik V. A. Reconstruction of a discontinuous function by interpolation data using rectangular element	94
Pershyna Iu. I., Shylin O. V. Numerical implementation of the method of a 3D body internal structure restoration based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation	105
Petrenko O. M., Lyubarsky B. G. Modeling thermal processes in the traction asynchronous engine of a cargo electric locomotive moving on a section of a track with the given profile and traffic schedule	112
Plaksiy Yu. A. New analytical solutions of the rigid body rotation equations: two-frequency multiplicative parametrical quaternion models	117
Polyanskaya T. S. Integral equations of the first kind with logarithmic kernel given on a system of intervals	123
Rebrov O. Yu. Integral probability estimate of the conformity of a tractor tire to the agro-ecological requirements in the soil and climatic conditions of Ukraine	127
Cheremskaya N. V. Modeling of real-valued correlation functions with allowance for the complex spectrum	136

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХП»**

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 6 (1228) 2017

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХП».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;
e-mail: kpi_mmtt@mail.ru; kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид № 19 – 17.

Підп. до друку 23.05.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк. 8,75.
Тираж 300 пр. (1-й завод 1 – 100) Зам. № 151593. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»

Ідент. код юридичної особи: 38093808
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42