ISSN 2078-9130 39'2017

# ВІСНИК

TEXHIGHU

TEXH

TILIITT

t tt<u>ii</u>tt t

1885

«XIII»

Національного технічного університету «Харківський політехно вий інститут»

Xap UB МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

# ВІСНИК

# НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 39 (1261) 2017

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків НТУ «ХПІ», 2017

# Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2017. – № 39 (1261). – 106 c.

Державне видання Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України шодо діяльності спеціалізованих вчених рад. від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

# Координаційна рада:

Голова: Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН України;

Секретар: К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц.;

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є.І.Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України:

€. €. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.; А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;

В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;

П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепіков, д-р техн. наук, проф.;

С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. М. Кошельник, д-р техн. наук, проф.;

В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.; Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.;

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.; В. І. Ніколаєнко, канд. іст. наук, проф.;

П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.; В. А. Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;

М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.;

Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.; Ю. І. Тимофеєв, д-р техн. наук, проф.;

М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

# Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар: А. Г. Андрєєв, канд. техн. наук, доц.

К. В. Аврамов, д-р техн. наук, проф.; С. С. Александров, д-р техн. наук, проф.;

Д. В. Бреславський, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Воробйов, д-р техн. наук, проф.;

А. П. Зиньковський, д-р техн. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.;

Г. І. Львов, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

К. Науменко, д-р техн. наук, проф., Магдебург, Німеччина;

М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

У 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

У 2014 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у індекс **Копернікус**; індекс ICV (Index Copernicus Value): 63.25, режим доступу: http://journals.indexcopernicus.com/++++++++++,p24783013,3.html

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ». Протокол № 8 від 27 жовтня 2017 р.

ISSN 2078-9130

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCES OF UKRAINE National technical university "Kharkiv polytechnic institute"

# **BULLETIN**

# OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY " KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE"

Series: Dynamics and Strength of Machines

№ 39 (1261) 2017

Collected Works

The publication was founded in 1961

Kharkiv NTU "KhPI", 2017 **Bulletin of the National technical university "Kharkiv polytechnic institute".** Collected Works. Series: Dynamics and Strength of Machines. – Kharkiv: NTU "KhPI". – 2017. – № 39 (1261). – 106 p.

State edition Certificate of State Committee of Ukraine for Information Policy KB № 5256 from July, 2, 2001

The collection is published on Ukrainian, Russian and English.

The Bulletin of the National Technical University "Kharkiv polytechnic institute" is put on "The List of Scientific Professional Editions of Ukraine that publish the data of theses for the degree of candidate of sciences and the degree of doctor" approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 2015. Order No 1328 (Supplement No 8) of 21.12.2015.

# **Coordinating Board:**

L. L. Tovazhnyanskyy, Dr. Tech. Sci., Prof. (chief), member NAS of Ukraine; K.A. Gorbunov, PhD. Tech.Sci., Assistant Prof. (secretary); A. P.Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, Dr. Tech. Sci., Prof., member NAS of Ukraine; Ye.Ye. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A.V. Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.; F.F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M.D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; A.I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.D. Dmittrienko, Dr. Tech. Sci.; Prof.; I.F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.V. Yepifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu.I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.; P.O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.V. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.; S.I. Kondrashov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.M. Koshel'nik, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; G.V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.; O.K. Morachkovskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.I. Nikolaenko, PhD. Hist. Sci., Prof.; P.G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.; V.A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M.I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.; G.M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.; Yu.V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M.A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

# **Editorial Board:**

- O.K. Morachkovs'kij, Dr. Tech. Sci., Prof. (editor);
- A.G. Andreev, PhD. Tech.Sci., Assistant Prof. (secretary);
- K.V. Avramov, Dr. Tech. Sci., Prof.; E.E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
- D.V. Breslavskij, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ju.S. Vorobjev, Dr. Tech. Sci., Prof.;
- A.P. Zin'kovskij, Dr. Tech. Sci., Prof.; L.V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.;
- G.I. L'vov, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ju.V. Mihlin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
- K. Naumenko, Prof. Dr.-Ing. habil., Magdeburg, Germany; N.A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

In 2013 Bulletin of the National Technical University "Kharkiv polytechnic institute" series "Dynamics and Strength of Machines" included in the directory database of periodicals "Uirich's Periodicals Directory" (New Jersey, USA).

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI" Protocol number 8, October, 27, 2017

ISSN 2078-9130

© National Technical University "KhPI", 2017

#### УДК 539.3

#### DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115759

# Д.Г. ВИНОГРАДСКИЙ, А.Г. АНДРЕЕВ

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА НДС СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ

У статті розглядається вплив геометричних параметрів на НДС з'єднань з натягом стосовно двох випадків: геометрично подібним з'єднанням з натягом (стан В), з'єднанням з натягом при різній товщині стінок втулок і незмінних параметрах контактної зони валу і втулки (стан С).

Отримані кількісні оцінки залежностей еквівалентної напруги, контактного тиску і сумарних переміщень елементів з'єднань з натягом від значень коефіцієнтів подібності  $K_1$  і радіального  $K_2$ . Показано, що в стані В сумарні переміщення ростуть, а еквівалентна напруга і контактний тиск падають зі збільшенням коефіцієнта  $K_1$ . В стані С еквівалентна напруга і сумарні переміщення валу ростуть, а у втулці знижуються при зростанні контактного тиску із збільшенням коефіцієнта  $K_2$ .

Ключові слова: з'єднання з натягом, метод кінцевих елементів, напруги, деформації.

В статье рассматривается влияние геометрических параметров на НДС соединений с натягом применительно к двум случаям: геометрически подобным соединениям с натягом (состояние В), соединениям с натягом при различных толщинах стенок втулок и неизменных параметрах контактной зоны вала и втулки (состояние С).

Получены количественные оценки зависимостей эквивалентных напряжений, контактных давлений и суммарных перемещений элементов соединений с натягом от значений коэффициентов подобия  $K_1$  и радиального  $K_2$ . Показано, что в состоянии В суммарные перемещения растут, а эквивалентные напряжения и контактные давления падают с увеличением коэффициента  $K_1$ . В состоянии С эквивалентные напряжения и суммарные перемещения вала растут, а во втулке убывают при росте контактных давлений с увеличением коэффициента  $K_2$ .

Ключевые слова: соединения с натягом, метод конечных элементов, напряжения, деформации.

The influence of geometric parameters on the VAT of joints with interference is considered in the article as applied to two cases: geometrically similar connections with interference (state B), joints with interference at different wall thicknesses of bushings and unchanged parameters of the contact zone of the shaft and bushing (state C).

Quantitative estimates of the dependencies of equivalent stresses, contact pressures and total displacements of elements of joints with interference on the values of similarity coefficients  $K_1$  and radial  $K_2$  are obtained. It is shown that in the state B the total displacements grow, and equivalent voltages and contact pressures decrease with increasing coefficient  $K_1$ . In state C, the equivalent stresses and total displacements of the shaft increase, and in the sleeve decrease with increasing contact pressures with an increase in the coefficient  $K_2$ .

Keywords: connections with a tightness, finite element method, stress, strain.

Введение и постановка задачи. Соединения с натягом широко применяются в технике. Сопротивление взаимному смешению деталей таких соединений создается силами упругой деформации, определяемыми в основном величиной натяга. В данной работе оценивается влияние геометрический характеристик соединений с натягом на НДС в связи с чем рассматриваются две схемы.

Схема 1. Детали соединения с натягом последовательно геометрически преобразуются с сохранением их подобия. При этом соединение с натягом из состояния А переходит в состояние В при неизменности коэффициента толстостенноости

$$\varphi = \frac{r_0}{r_1} = \frac{r_2}{r_3} \tag{1}$$

и соответствующем значении коэффициента подобия

$$K_1 = \frac{r_2}{r_0} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{l_2}{l_1},\tag{2}$$

где  $l_1 = 2r_1$ - осевой размер вала и втулки состояния A,  $l_2 = 2 r_3$  – осевой размер вала и втулки состояния B. Величина натяга  $\Delta$  зависит от диаметра контактной поверхности ( $2r_0$  или  $2r_2$ ). Характеристики материала деталей соединения с натягом приведены в табл. 1, геометрические характеристики в табл. 2, 3.



Рисунок 1 - Состояния А и В соединений с натягом

| Таблица 1 | - Характеристики | материала | сталь 40х |
|-----------|------------------|-----------|-----------|
|-----------|------------------|-----------|-----------|

| Физический параметр                     | Значение         |
|---|------------------|
| Модуль упругости Е, МПа                 | $2,1 \cdot 10^5$ |
| Коэффициент Пуассона v                  | 0,3              |
| Плотность р, кг/м3                      | 7800             |
| Предел текучести от, МПа                | 785              |
| Предел прочности $\sigma_{\rm B}$ , МПа | 980              |
| Коэффициент трения μ                    | 0,15             |

Таблица 2 – Геометрические характеристики соединения с натягом (состояние А)

| $r_{0}$ MM | $r_{0,\text{MM}}$ $r_{1,\text{MM}}$ $l$ |       | Δ, мм | φ      |
|------------|---|-------|-------|--------|
| 50         | 88.59                                   | 177.2 | 0.072 | 0.5644 |

| тиолици 5 теометри некие хириктеристики соединения с натягом (состояние В) |       |      |       |       |       |       |       |       |       |  |  |
|--|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| Вариант  | 1     | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |  |  |
| r <sub>2</sub> , мм  | 33,86 | 39,5 | 45,2  | 50,8  | 56,4  | 70,6  | 84,7  | 98,8  | 112,9 |  |  |
| r <sub>3</sub> , мм  | 60    | 70   | 80    | 90    | 100   | 125   | 150   | 175   | 200   |  |  |
| <i>l</i> <sub>2</sub> , мм   | 120   | 140  | 160   | 180   | 200   | 250   | 300   | 350   | 400   |  |  |
| Δ, мм  | 0,057 | 0,06 | 0,067 | 0,073 | 0,076 | 0,094 | 0,106 | 0,119 | 0,129 |  |  |
| $K_1$  | 0,677 | 0,79 | 0,903 | 1,016 | 1,129 | 1,411 | 1,693 | 1,975 | 2,258 |  |  |

Таблица 3 – Геометрические характеристики соединения с натягом (состояние В)

Схема 2. Геометрическое преобразование предполагает последовательное увеличение радиуса r<sub>3</sub> внешнего контура втулки при неизменности контактной зоны соединения с натягом. При этом соединение с натягом состояния А при известных величинах радиусов  $r_0$  и  $r_1$  с коэффициентом толстостенности

$$\varphi = \frac{r_0}{r_1} \tag{3}$$

переходит в состояние С при том же радиусе r<sub>0</sub> и натяге  $\Delta$ , но переменном значении  $r_3$  и соответствующем значении коэффициента толстостенности



Рисунок 2 - Состояния А и С соединений с натягом

Осевые размеры соединений с натягом принимаются равными соответствующему значению внешнего диаметра втулки соединения, т.е. для состояния А принимается



$$l_1 = 2r_1,$$
 (5)  
для состояния С принимается

 $l_2 = 2r_3$ . Радиальное изменение внешнего радиуса втулки определяется радиальным коэффициентом

$$K_2 = \frac{r_3}{r_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{l_2}{l_1} \,. \tag{7}$$

Характеристики материала приведены в табл. 1, геометрические характеристики состояния А в табл. 2, состояние С в табл. 4, величина натяга  $\Delta = 0,072$  мм.

Численная реализация и анализ результатов. Поставленная задача моделировалась с помощью МКЭ в ПК ANSYS. Для решения использовался стандартный конечный элемент программного пакета трехмерный восьмиузловой объемный элемент PLANE82, который имеет три степени свободы в каждом узле. Для создания контактной пары в ПК ANSYS использовались конечные элементы CONTA 172 и ТАRGEТ 169. Решение задачи МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]{U} = {F}, (8)$$

где [К] – матрица жесткости тела, состоящая из матриц жесткости конечных элементов; {U} - векторстолбец узловых перемещений; {F} - вектор приведенной внешней нагрузки

Результаты расчетов для состояния В представлены на графиках рис. 3-7, где приведены максимальные значения эквивалентных напряжений, контактных давлений, суммарных перемещений в среднем (между торцами) сечении соединения с натягом в зависимости от величины коэффициента подобия К<sub>1</sub>.



Рисунок 4 – Эквивалентные напряжения в среднем сечении втулки (состояние В)

| Таблица 4 – Геометрические характеристики соединения с натягом (состояние С) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |  |  |  |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|
| вариант  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |  |  |  |
| r <sub>3</sub> , мм  | 60    | 70    | 80    | 90    | 100   | 125   | 150   | 175   | 200   |  |  |  |
| <i>l</i> <sub>2</sub> , мм   | 120   | 140   | 160   | 180   | 200   | 250   | 300   | 350   | 400   |  |  |  |
| φ <sub>1</sub> , мм  | 0,883 | 0,714 | 0,625 | 0,536 | 0,5   | 0,4   | 0,333 | 0,286 | 0,25  |  |  |  |
| $K_2$  | 0,677 | 0,79  | 0,903 | 1,016 | 1,129 | 1,411 | 1,693 | 1,975 | 2,258 |  |  |  |







Рисунок 7 – Суммарные перемещения в среднем сечении втулки (состояние В)





Рисунок 6 – Суммарные перемещения в среднем сечении вала (состояние В)



Рисунок 8 – Эквивалентные напряжения в среднем сечении вала (состояние С)



Вісник НТУ «ХПІ». 2017. № 39 (1261)





Рисунок 11 – Суммарные перемещения в среднем сечении вала (состояние С)

Результаты расчетов для соединения С представлена на графиках рисунков 8-12, где приведены максимальные значения эквивалентных напряжений, контактных давлений, суммарных перемещений в среднем (между торцами) сечении соединения с натягом в зависимости от величины радиального коэффициента подобия К<sub>2</sub>.

Анализ влияния геометрии соединения с натягом на его НДС показал:

1) Преобразование элементов соединения с натягом в условиях геометрического подобия при росте коэффициента подобия от  $K_1 = 0,677$  до  $K_1 = 2,258$ приводит к снижению эквивалентных напряжений вала на 33 %, втулки на 32 %, контактных давлений на 34 % и к повышению суммарных перемещений вала на 57 %, втулки на 56 % (состояние В).

2) Увеличение внешнего радиуса втулки и рост радиального коэффициента от  $K_2 = 0,677$ до  $K_2 = 2,258$  при неизменности условий в контактной зоне между валом и втулкой приводит к повышению эквивалентных напряжений вала на 70 %, контактных давлений на 67 %, суммарных перемещений вала на 60 % и к снижению эквивалентных напряжений втулки на 14 %, а суммарных перемещений втулки на 23 % (состояние C).

**Выводы.** НДС соединения с натяга в виде сплошного цилиндрического вала и цилиндрической втулки исследовалось в случаях:

1) геометрического подобия при изменении размеров конструктивных элементов соединения, т.е. коэффициента подобия  $K_1$ ;

2) изменения внешнего радиуса втулки, т.е. радиального коэффициента *K*<sub>2</sub> при неизменности условий в контактной зоне между валом и втулкой.

Показано, что при увеличении коэффициента подобия  $K_1$  эквивалентные напряжения  $\sigma$ э и контактные



среднем сечении втулки (состояние С)

давления P падают, а суммарные перемещения U растут (состояние В). При увеличении радиального коэффициента  $K_2$  эквивалентные напряжения  $\sigma_3$  и суммарные перемещения U в вале растут, во втулку падают, контактные давления P растут. Получены количественные оценки указанных характеристик НДС соединений с натягом.

#### Список литературы:

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. учеб.пособие. – 2-е изд. / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

**2.** Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении / Е.И. Берникер. – М.-Л.: Машиностроение, 1966. – 166 с.

3. *Тарабасов Н.Д.* Расчет напряженных посадок в машиностроении / *Н.Д. Тарабасов.* – М.: Машгиз, 1961. – 264 с.

4. Шевченко Р.А. Компьютерное моделирование некоторых типов профильных соединений с натягом при осевых нагрузках / Р.А. Шевченко, А.Г.Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57. – С. 106-114.

5. Данилов Д.В. НДС профільних з'єднань з натягом під дією контактних навантажень / Д.В. Данилов, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – № 52. – С. 63-76.

6. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

7. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах / К.А. Басов. Под общ. ред. Д.Г. Красковского. – М.: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с.

8. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса ANSYS / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс 2006. – 248 с.

#### **Bibliography (transliterated):**

1. Samul V.I. Osnovi teorii uprugosti i plastichnosti. Uchebnoe posobie. 2-e izd. Moscow: Visshaya shkola, 1982. 264 p.

**2.** Bemiker E.I. Posadka s natyagom v mashinostroenii. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 168 p.

**3.** Tarabasov N.D. Raschet napryazhennyh posadok v mashinostroenii. Moscow: Mashgiz, 1961. 264 p.

**4.** Shevchenko R.A., Andreev A.G. Komp'yuternoe mode-Lirovanie nekotoryh tipov profiL'nyh soedinenij s natyagom pri osevyh nagruzkah. Visnyk NTU "KhPI". 2014. No 57. PP. 106-114

**5.** Danilov D.V., Andreev A.G. NDS profiL'nyh soedinenij s natyagom pod dejstviem kontaktnyh nagruzok. Visnyk NTU "KhPI". 2011. No 52. PP. 63-76. **6.** Basov K.A. ANSYS: spravochnik pol'zovatelya. Moscow: DMK Press, 2005. 640 p.

7. Basov K.A. ANSYS v primerah i zadachah. Pod red. D.G. Kraskovskogo. Moscow: Komp'yuter Press, 2002. 224 p.

**8.** Basov K.A. Graficheskii interfeice kompleksa ANSYS. Moscow: DMK Press, 2006. 248 p.

Поступила (received) 06.09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Вплив геометричних параметрів на НДС з'єднань з натягом / Д.Г. Віноградський, А.Г. Андрєєв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 5-9. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Влияние геометрических параметров на НДС соединений с натягом / Д.Г. Виноградский, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 5-9. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Influence of geometric parameters on the stressly wrapped state of compounds with a tension / D.G. Vinogradsky, A.G. Andreev // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. –  $N \ge 39$  (1261). – P. 5-9. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Андрєєв Арнольд Георгійович* – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-68-79, e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

Андреев Арнольд Георгиевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-68-79, e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

Andreev Arnol'd Georgievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, NTU «KhPI», tel.: (057)707-68-79, e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

*Виноградский Дмитро Георгійович* – студент, кафедра «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ», тел.: (063) 426-13-64, e-mail: cikmon@mail.ru.

Виноградский Дмитрий Георгиевич – студент, кафедра Динамика и прочность машин, НТУ «ХПИ», тел.: (063) 426-13-64, e-mail: cikmon@mail.ru.

*Vinogradsky DmitryGeorgievich* – Student, Department of Dynamics and strength of machines, NTU «KhPI», tel.: (063) 426-13-64, e-mail: cikmon@mail.ru.

УДК 621.77

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115760

# Е.Д. ГРОЗЕНОК

# ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ПРИ ДВУХПРОХОДНОЙ ФОРМОВКЕ ЗАГОТОВКИ ПОДШИПНИКОВОГО КОЛЬЦА

В роботі проведено чисельне моделювання операцій технологічного процесу гарячого штампування підшипникового кільця: осадки та формування. Вирішена пов'язана крайова нестаціонарна контактна термовязкопластіческа задача, чисельна реалізація якої проводилася методом кінцевих елементів з використанням спеціалізованого програмного комплексу. Розрахунок напружено-деформованого стану дозволив визначити залежність зусиль при штампуванні від часу для осадки, однопрохідного і двухпрохідного формування. Аналіз отриманих даних показав, що при операції формовки в один прохід витрачається на 12 % більше потужності, ніж при операції формовки в два проходи.

Ключові слова: зусилля преса, штампування, формування, осадка, моделювання, термовязкопластічность, кільце підшипника, метод кінцевих елементів.

В работе проведено численное моделирование операций технологического процесса горячей штамповки подшипникового кольца: осадки и формовки. Решена связанная краевая нестационарная контактная термовязкопластическа задача, численная реализация которой проводилась методом конечных элементов с использованием специализированного программного комплекса. Расчет напряженно-деформированного состояния позволил определить зависимость усилий при штамповке от времени для осадки, однопроходной и двухпроходной формовки. Анализ полученных данных показал, что при операции формовки в один проход расходуется на 12 % больше мощности, чем при операции формовки в два прохода.

Ключевые слова: усилие пресса, штамповка, формовка, осадка, моделирование, термовязкопластичность, кольцо подшипника, метод конечных элементов.

Numerical simulation of bearing ring hot forging manufacturing operations: upsetting and forming was done in the research. Coupled boundary non-stationary contact thermoviscoplastic problem was solved. Its numerical implementation was done by finite element method with application of customized software package. Stress-strain analysis defined dependence of forces at forging from time for upsetting, single- or two-pass forming. Data analysis showed that single-pass forming expends 12 % of power more than during two-pass forming.

Keywords: press force, stamping, forming, unpressing, modeling, thermal visco-plasticity, bearing ring, finite element method.

Введение. При эксплуатации железнодорожного транспорта необходимо обеспечивать его надежность и долговечность. Эти требования в первую очередь обусловлены условиями безопасности пассажиров. Увеличение межремонтного ресурса даст экономический эффект. Одним из ответственных и высоконагруженных узлов, обеспечивающих безотказное передвижение состава поезда, является подшипниковый узел. Основной причиной выхода из строя подшипникового узла является выкрашивание дорожки качения подшипникового кольца из-за постоянного циклического нагружения. Поэтому уже при производстве кольца необходимо заложить такие параметры технологического процесса его изготовления, которые бы обеспечивали высокую надежность и долговечность подшипника, а также энергоэффективность при производстве.

Анализ последних исследований и литературы. Основными операциями технологического процесса производства подшипникового кольца являются: индукционный нагрев заготовки, горячая штамповка и раскатка кольца.

Вопросам изучения технологического процесса производства подшипниковых колец посвящено много литературных источников [1-4]. Моделирование процесса индукционного нагрева, обеспечивающее рациональный нагрев, удовлетворяющий требованиям технологического процесса рассмотрен в работе [5]. Последующей технологической операцией, после нагрева, является горячая штамповка, при которой в поковке происходит укладка волокон определенным образом [6]. Исследования показали, что это является одним из основных влияющих на долговечность кольца подшипника факторов. Волокнистая структура считается оптимальной, когда волокна повторяют контур детали и не выходят на контактирующую поверхность дорожки качения [7]. В работе [8] было рассмотрено влияние начального распределения температуры в цилиндрической заготовке при штамповке. Результаты показали, что при осадке для не равномерно нагретой заготовки усилия требуется на 7% больше. Автором в работе [9] было исследовано влияние фактора трения на контактирующих поверхностях на распределение волокнистой структуры в поковке подшипникового кольца после горячей штамповки. Следующая технологическая операция после горячей штамповки раскатка, при которой происходит уплотнение волокон при формообразовании дорожки качения [2]. Различное влияние параметров раскатки рассмотрено в работах [3-4].

Целью данной статьи является определение усилия при технологических операциях осадки и формовки заготовки кольца подшипника, при однопроходной и двухпроходной формовке.

Постановка задачи. Для штамповки необходимо обеспечить равномерно нагретую заготовку с перепадом температур между максимальной и минимальной не более 50°С и максимальной температурой 1150°С.

© Е.Д. Грозенок, 2017

Это поле температур получается путем решения осесимметричной нестационарной краевой задачи теплопроводности для цилиндрических заготовок индукционным нагревом [5]. Полученное поле температур будет использоваться в качестве исходного для задачи штамповки.

Математическое моделирование технологической операции горячей штамповки подшипникового кольца осуществляется путем решения связанная нелинейная термовязкопластическая контактная задача с учетом больших деформаций и скоростей деформаций. Полная математическая модель описана в работе [9] включает в себя систему уравнений закона сохранения массы, энергии и момента количества движения, условия неразрывности, нелинейные физические уравнения, зависящие от деформаций, скоростей деформаций и температуры, условия контакта.

Процесс штамповки моделируется в 3 (4 для случая двухпроходной) этапа, а именно: осадка, формовка и прошивка. В данной работе операция прошивки не рассматривается, т.к. на нее затрачивается не значительное количество энергии по сравнению с формовкой. Для решения связанной задачи теплопроводности и термовязкопластичности задаются граничные условия: на свободных поверхностях заготовки задается конвективный теплообмен с окружающей средой, а на всех контактирующих поверхностях задается тепловой контакт и трение по закону Зибеля. Для первого этапа (осадка) движение задается для верхней траверсы, а нижняя остается неподвижной. На следующем шаге технологической операции проводится формовка. При моделировании нагрузка прикладывается к пуансону в качестве кинематического нагружения, а матрица считается жестко закрепленной. Заготовка задается как пластическое тело с учетом больших деформаций, скоростей деформаций и температур. Пуансон, матрица и траверса считаются абсолютно жесткими. Из-за больших температур (свыше 1000°С) необходимо учитывать изменение всех механических свойств материала от температуры и фазовые переходы. Нелинейная краевая задача термовязкопластичности решается итерационным методом Ньютона-Рафсона.

Численная реализация и обсуждение результатов. В работе проводилось численное моделирование методом конечных элементов контактной термовязкопластической задачи двух операций горячей штамповки. Рассматривается две операции: осадка и формовка. Начальное неравномерное распределение температурного поля в цилиндрической заготовке после индукционного нагрева, было получено при решении связанных краевых задач электромагнитного поля и теплопроводности. По всему объему температура изменяется от 1120°С до 1150°С, поле температур представлено на рис. 1. Задача решается с учетом трения между траверсой и заготовкой для случая осадки, между пуансоном и заготовкой для случая формовки. Коэффициент трения  $\mu = 0.3$ . Скорость движения траверсы и пуансона V = 100 мм/с. Размеры исходной цилиндрической заготовки R = 50 мм, h = 190 мм.



Рисунок 1 – Распределение температуры перед штамповкой

На первом этапе находится напряженнодеформированное состояние заготовки после технологической операции осадка. На рис. 2 представлен график зависимости усилия от времени.



Рисунок 2 – График усилия пресса от времени при операции осадка

Вторым этапом штамповки является формовка в один проход. Пуансоном необходимого диаметра формуется предварительно деформированная горячая заготовка, полученная после операции осадка, температурное после полученное на первом этапе, является исходным для второй. Данная операция является наиболее энергозатратной. График зависимости усилия от времени для операции формовки в один проход представлен на рис. 3.

В работе [10] автором был предложен вариант двухпроходной формовки: сначала заготовка формуется пуансоном меньшего диаметра, а потом после поворота на 180° снова формуется пуансоном большего диаметра, соответствующим технологическому процессу. Напряженно-деформированного состояния в поковке при двухпроходной формовке численно определялось для двух диаметров пуансона: d1 = 76 мм, d2 = 86 мм. На рисунке 4 представлен график зависимости усилия от времени для формовки в два прохода.







Рисунок 4 – График усилия пресса от времени при операции формовка в два прохода

На рис. 5 представлены графики: график зависимости усилия от времени для осадки и формовки в один проход и график осадки и формовки в два прохода.

При сравнении двух графиков видно, что максимальное усилие достигается при формовке в один проход, что свидетельствует об уменьшении мощности на 12 % при формовке в два прохода.

**Выводы.** В работе проведено численное моделирование двух операций технологического процесса горячая штамповка подшипникового кольца. Была решена численно связанная нестационарная контактная термовязкопластическая задача методом конечных элементов с использованием специализированного программного комплекса. Определение напряженнодеформированного состояния дало возможность найти зависимость усилий при штамповке от времени для каждой технологический операции (осадке, формовка в один проход и формовке в два прохода). Анализ распределений полученных усилий показал, что при операции формовки в один проход требует большей мощности, на 12% чем операция формовки в два прохода.



Рисунок 5 – График усилия пресса от времени при операции осадка и формовка в один проход и формовка в два прохода

#### Список литературы:

**1.** Данилушкин А. И. Математическая модель индукционного нагрева цилиндрических заготовок перед раскаткой / А. И. Данилушкин, С. В. Князев, С. И. Семенов // Вестник ВГТУ. – 2012. – № 10-1. – С. 101-103.

**2.** Avtonomova L. Formation of fibrous macrostructure in a bearing ring at stamping and rolling / L. Avtonomova, *Ie. Grozenok, V. Konkin, E. Simson //* Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. -2017. - Vol. 3,  $N \ge 1$  (87). - P. 63-68.

**3.** Wanga Z. W. Complete modeling and parameter optimization for virtual ring rolling / Z. W. Wang, J. P. Fan, D. P. Hu, C. Y. Tang, C. P. Tsui // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52, iss. 10. – P. 1325–1333.

**4.** *Liao S.* Modeling and finite element analysis of rod and wire steel rolling process / S. *Liao, L. Zhang, S. Yuan, Y. Zhen, S. Guo //* Journal of University of Science and Technology Beijing, Mineral, Metallurgy, Material. – 2008. – Vol. 15, iss. 4. –

P. 412–419.

5. Грозенок Е. Д. Численное моделирование температурного поля заготовок при индукционном нагреве для изготовления подшипниковых колец / Е. Д. Грозенок, Э. А. Симсон, А. В. Степук, С. Ю. Шергин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», – 2016. – № 26 (1198). – С. 50-53.

6. Симсон Э. А. Формирование волокнистой структуры поковок колец, обеспечивающее долговечность подшипни-ковых узлов сельскохозяйственной техники / Э. А. Симсон, Л. В. Автономова, Е. Д. Грозенок // Інженерія природокористування. – 2016. – № 2 (6). – С. 89-93.

7. Раузин Я. Р. Влияние макроструктуры металла на контактную выносливость и долговечность подшипников качения / Я. Р. Раузин // Контактная прочность машиностроительных материалов: Сб. научных трудов. – М.: Наука, 1964. – С. 51-55.

8. Автономова Л. В. Моделирование процесса объемной штамповки подшипникового кольца / Л. В. Автономова, Е. Д. Грозенок, Э. А. Симсон, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 14 (1336). – С. 135-139.

9. Грозенок. Е. Д. Влияние трения на распределение волокнистой структуры поковки подшипникового кольца при горячей штамповке / Е. Д. Грозенок, Э. А. Симсон, А. В. Степук, С. Ю. Шергин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 30 (1202). – С. 32–36.

10. Автономова Л. В. Исследование распределения волокнистой структуры поковки подшипникового кольца при горячей штамповке / Л. В. Автономова, Е. Д. Грозенок, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 33 (1205). – С. 69-73.

#### **Bibliography (transliterated):**

1. Danilushkin A. I., Knyazev S. V., Semenov S. I. Matematicheskaya model induktsionnogo nagreva tsilindricheskih zagotovok pered raskatkoy [Mathematical model of induction heating of cylindrical billets before rolling]. Vestnik VGTU, 2012. No 10-1. PP. 101-103.

**2.** Avtonomova L., Grozenok I., Konkin V., Simson E. Formation of fibrous macrostructure in a bearing ring at stamping and rolling. Eastern-European Journal Of Enterprise Technologies, 2017. V. 3. No 1 (87). PP. 63-68.

3. Wanga Z. W., Fan J. P., Hu D. P., Tang C. Y., Tsui C. P.

Complete modeling and parameter optimization for virtual ring rolling. International Journal of Mechanical Sciences, 2010. Vol. 52, iss. 10. PP. 1325–1333.

**4.** Liao S., Zhang L., Yuan S., Zhen Y., Guo S. Modeling and finite element analysis of rod and wire steel rolling process. Journal of University of Science and Technology Beijing, Mineral, Metallurgy, Material, 2008. Vol. 15, iss. 4. PP. 412–419.

**5.** Grozenok E. D., Simson E. A., Stepuk A. V., Shergin S. Yu. Chislennoe modelirovanie temperaturnogo polya zagotovok pri induktsionnom nagreve dlya izgotovleniya podshipnikovyih kolets [Numerical modeling of the temperature field in billets during induction heating for bearing rings manufacturing]. VIsnik NTU «KhPI». Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Kharkiv, NTU «KhPI», 2016. No 26 (1198). PP. 50-53.

**6.** Simson E. A., Avtonomova L. V., Grozenok Ie. D. Formirovanie voloknistoy strukturyi pokovok kolets, obespechivayuschee dolgovechnost podshipnikovyih uzlov selskohozyaystvennoy tehniki [Forming the fibrous structure of ring forgings to provide durability of bearing units for agricultural machinery]. InzhenerIya prirodokoristuvannya, 2016. No. 2 (6). PP. 89-93.

7. Rauzin Ya. R. Vliyanie makrostrukturyi na kontaktnuyu vyinoslivost i dolgovechnost podshipnikov kacheniya. Kontaktnaya prochnost mashino-stroitelnyih materialov: Sb. nauchnyih trudov. Moscow: Nauka, 1964.

**8.** Avtonomova L.V., Grozenok Ie. D., Simson E. A., Stepuk A. V. Modelirovanie protsessa ob'emnoy shtampovki podshipnikovogo koltsa [Modeling the process of the bearing ring bulk stamping]. Visnik NTU «KhPI». Seriya: Transportne mashinobuduvannya, Kharkiv.: NTU «KhPI», 2017. No. 14 (1336). PP. 135-139.

**9.** Grozenok Ie. D., Simson E. A., Stepuk A. V., Shergin S. Yu. Vliyanie treniya na raspredelenie voloknistoy strukturyi pokovki podshipnikovogo koltsa pri goryachey shtampovke [Distribution of the fibrous structure in bearing rings during hot stamping]. Visnik NTU «KhPI». Seriya: Innovatsiyni tehnologiyi ta obladnannya obrobki materialiv u mashinobuduvanni ta metalurgiyi. Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. No. 30 (1202). PP. 32–36.

**10.** Avtonomova L.V., Grozenok Ie. D., Stepuk A. V. Issledovanie raspredeleniya voloknistoy strukturyi pokovki podshipnikovogo koltsa pri goryachey shtampovke [Distribution of the fibrous structure in bearing rings during hot stamping]. Visnik NTU «KhPI». Seriya: Tehnologiyi v mashinobuduvanni. Kharkiv, NTU «KhPI», 2016. No. 33 (1205). PP. 69-73.

Поступила (received) 26.09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельне визначення зусиль при двухпрохідному формуванні заготовки підшипникового кільця / Є. Д. Грозенок // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 10-13. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.

Численное определение усилий при двухпроходной формовке заготовки подшипникового кольца / Е. Д. Грозенок // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 10-13. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.

Numerical determination of forces at two-pass forming of bearing ring blank/ Ie. D. Grozenok // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. –  $N_{2}$  39 (1261). – C. 10-13. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Грозенок Евгеній Денисович – аспірант, Кафедра опору матеріалів, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: ev.grozenok@gmail.com.

*Грозенок Евгений Денисович* – аспирант, Кафедра сопротивления материалов, НТУ «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: ev.grozenok@gmail.com.

Grozenok Ievgen – Postgraduate student, Strength of materials chair, NTU "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: ev.grozenok@gmail.com.

#### УДК 629.062

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115761

# €.Ю. ДОН

## ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЗМІНИ ТИСКУ В ЕЛЕКТРОПНЕВМАТИЧНОМУ ГА-ЛЬМІВНОМУ ПРИВОДІ НА ДИНАМІКУ РУХУ КОЛІС КТЗ

В роботі проаналізовано та узагальнено результати дослідження впливу темпу зміни тиску в електропневматичному гальмівному приводі на процес гальмування автомобільного колеса. Описано вплив принципів керування на динаміку руху колісного транспортного засобу та визначено спосіб зміни темпу наповнення гальмівної камери під час моделювання робочих процесів електропневматичного гальмівного приводу транспортного засобу.

Ключові слова: привід, електропневматичне гальмівне керування, електропневматичний гальмівний привід (ЕПГП), гальмівна система.

В работе проанализированы и обобщены результаты исследования влияния темпа изменения давления в электропневматическом тормозном приводе на процесс торможения автомобильного колеса. Описано влияние принципов управления на динамику движения колесного транспортного средства и определен способ изменения темпа наполнения тормозной камеры во время моделирования рабочих процессов электропневматического тормозного привода транспортного средства.

Ключевые слова: привод, электропневматическое тормозное управление, ЭПТП, тормозная система.

The paper analyzed and summarized the results of studies of the effect of the rate of change of pressure in electropneumatic brake actuator for a braking process of a vehicle wheel. Describes the impact of management principles on the dynamics of the wheeled vehicle and the determined way to change the rate of filling of the brake chamber during simulation of work processes of an electropneumatic brake of the vehicle. The aim of this work is the theoretical analysis of the influence of the nature of pressure changes in the brake actuator on the choice of control principle electropneumatically modulators pressure. To ensure rolling wheels with rational slippage rate of filling of the brake chamber, after reaching 10% slip, you should reduce to not less than 60%.

Increasing the wheels' braking cycle during the braking process leads to an increase in the braking distance the time of the pulled state of the wheel increases, despite the fact that the electro-pneumatic brake system (EBS) can reduce the time of filling the brake chambers of the vehicle's drive. A rational pressure in the brake chamber in which it is necessary to begin reducing the rate of filling of the brake chamber, working pressure of air, when using EBS, should be about 25% of the maximum pressure in the actuator. **Key words:** actuator, electro-pneumatic brake control, electro-pneumatic brake system (EBS), brake system.

Вступ. Відомо, що використання електропневматичних апаратів гальмівного приводу (ЕПГП) суттєво скорочує час спрацювання гальмівної системи. Так в роботі [2] відмічається що, при використанні ЕПГП темп зростання тиску в гальмівних камерах скорочує час наповнення пневматичних контурів приводу на відміну від типового пневматичного гальмівного приводу (ПГП) до 45 %. Отже, при використанні електропневматичних апаратів гальмівного приводу гальмування транспортного засобу може початися раніше ніж при використанні типових елементів ПГП (мінімум на 0,15 с.) [2, 5, 8, 9], що дозволяє скоротити гальмівний шлях КТЗ мінімум на 15 % [2, 10, 11], а теоретично до 25 %.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження, які проведені в роботах [3, 4] показують що підвищення темпу зростання тиску призводить до передчасного блокування коліс транспортного засобу, а отже до втрати його керованості та стійкості, а в режимі сталого уповільнення, до збільшення гальмівного шляху мінімум на 30 %. Також слід відзначити, що в роботі [2] автор приходить до висновку щодо ускладнення процесу регулювання при підвищенні швидкодії приводу із-за збільшення співвідношення часу запізнення початку зростання тиску в приводі до часу наростання тиску в гальмівній камері, які наглядно зображено на рис. 1 [3, 4, 6].

На рис. 1 зображено:  $t'_0$  – час запізнювання спрацювання елементів гальмівного приводу під час

гальмування, с;  $t'_u$  – час зростання тиску в гальмівній камері приводу, с;  $t''_0$  – час запізнювання спрацювання елементів гальмівного приводу під час розгальмовування, с;  $t''_u$  – час зниження тиску в гальмівній камері приводу, с;  $P_{\rm max}$  – максимальний тиск в гальмівній камері, МПа;  $F_{\rm cnp}$  – зусилля на гальмівній педалі, при якому всі перепускні клапани гальмівного крану мають максимально можливий перепускний перетин, Н.

Очевидно, що наведені обставини безпосередньо впливають на принципи керування модуляторами тиску гальмівного приводу та визначають варіанти компонувальних схем, які можуть бути використані під час проектування електроннопневматичного гальмівного приводу колісного транспортного засобу (КТЗ).

Мета дослідження, постановка задачі. Метою роботи є теоретичний аналіз впливу характеру зміни тиску в гальмівному приводі на вибір принципу керування електропневматичними модуляторами тиску.

Для вирішення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

 визначити раціональний характер зміни тиску в гальмівних камерах для забезпечення ефективного гальмування коліс транспортного засобу з раціональним проковзування;

 визначити граничне значення тиску наповнення гальмівної камери робочим тілом при організації раціонального принципу керування модуляторами тиску ЕПГП.

© Є.Ю. Дон, 2017



Рисунок 1 – Перехідні процеси в гальмівній камері під час зміни зусилля на гальмівній педалі

Теоретичні дослідження впливу зміни тиску в ЕПГП на динаміку руху коліс КТЗ. Відомо, що на принципи керування модуляторами тиску також впливають їх конструктивні особливості. Так наприклад при використанні релейних електропневматичних модуляторів тиску необхідно для одного і того ж самого приводу при різних модуляторах визначати допустимі значення добутку тиску під час наповнення та спорожнення приводу. При цьому, як показують дослідження наведені в роботі [2], використовувати допустимі значення добутку тиску статичної характеристики ЕПГП не припустимо, оскільки це може призвести до неточності регулювання в 2...2,5 рази, яке оцінюється кількістю разів спрацювання модулятора в діапазоні від мінімального до максимального значення тиску в гальмівній камері.

В роботах [2, 8, 10, 12] пропонуються способи визначення допустимих значень добутку тиску на основі масових та геометричних характеристик транспортного засобу з урахуванням його уповільнення під час гальмування, але однозначного рішення, щодо вирішення цього питання, як відзначає автор роботи [2] досі не існує.

Як показують дослідження [3] пропорційні модулятори тиску [13–16] на відміну від релейних електропневматичних модуляторів [17–19] не мають потреби у визначенні допустимих значень добутку тиску і дозволяють спростити алгоритмічну логіку, яка застосовується при використанні тих чи інших принципів керування.

Аналіз науково технічної літератури [2, 3, 21 -23] показав, що використання одноканальних осьових модуляторів релейних чи пропорційних не дозволяють реалізувати принципи керування типу IR, MIR, DIR, InSR та InIR, а отже не дають можливості реалізувати в ЕПГП функції курсової стійкості та стійкості проти перекидання транспортного засобу. Реалізація наведених функцій та різних принципів керування може бути реалізована тільки при використанні двоканальних осьових модуляторів, або індивідуальних модуляторів. Останні збільшують вартість системи, але на їх базі можуть бути виконані всі принципи керування навіть ті, що допускають неузгодженість роботи модуляторів на одній вісі ТЗ до 25% [1, 2] при гальмуванні транспортного засобу в різних дорожніх умовах.

Згідно досліджень Михалевича М.Г. [2] в ЕПГП

складно забезпечити комфортабельність руху КТЗ під час гальмування передньою віссю оскільки не завжди вдається забезпечити раціональний приріст допустимих значень добутку тиску, тому в гальмівних системах сучасних фірм WABCO [20] та KNORR-BREMSE [24] на передній вісі використовується комбінація з квазіпропорційного модулятора ЕПГП та двох релейних модуляторів тиску, а на задній вісі - один релейний електропневматичний модулятор.

На основі наведеного теоретичного аналізу слід зазначити, що розглядаючи питання теоретичного вибору характеру зміни тиску в гальмівній камері під час екстреного гальмування КТЗ, необхідно у відповідності до досліджень, які виконанні в роботах [2, 3, 4], підвищуючи темп зростання в гальмівних камерах ЕПГП виконувати раціональне керування модуляторами тиску при досягненні тиску в гальмівному приводі 0,25  $P_{\text{max}}$ , для того щоб забезпечити зростання уповільнення автомобільного колеса, яке б не призводило до його блокування. Таке можливо забезпечити тільки при раціональному зниженні темпу зростання тиску в гальмівних камерах аналогічно тому, як це проілюстровано на рис. 2 та підтверджується стендовими дослідженнями виконаними в роботі [4].

Аналіз теоретичного процесу гальмування, який зображено на рис. 2 показує, що під час наповнення гальмівної камери робочим тілом за час меншій ніж 0,2 с. для забезпечення процесу кочення колеса з проковзуванням в межах від 10 % до 30 %, необхідно якомога швидше зменшити темп зростання проковзування колеса (dS/dt), інакше динамічні процеси в плямі контакту шини з поверхнею дорожнього одягу, призведуть до неминучого блокування колеса, а у випадку використання електор-пневматичного гальмівної сили в режимі АБС – до невиправданого збільшення кількості циклів спрацьовування модуляторів тиску і як слідство до збільшення витрат робочого тіла (повітря).

Слід відзначити що збільшення циклів розгальмовування колеса під час процесу гальмування призводить до збільшення гальмівного шляху оскільки час розгальмованого стану колеса – збільшується не зважаючи на те, що ЕПГП дозволяє зменшити час наповнення гальмівних камер приводу транспортного засобу.



Рисунок 2 – Теоретична зміна тиску в гальмівних камерах ЕПГП під час раціонального керування модуляторами тиску

Зображений на рис. 2 характер зміни тиску в гальмівних камерах можна промоделювати шляхом введення в залежність (1) [7] миттєвої масової витрати повітря в ДЕ-ланці, змінного параметру площі поперечного перетину каналу дроселя (f).

$$G_{i} = \mu \cdot f \cdot P_{0} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{R \cdot T}} \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1} \cdot \left[\left(\frac{P_{1}}{P_{0}}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_{1}}{P_{0}}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}.$$
 (1)

Змінний параметр площі поперечного перетину каналу дроселя можна визначити, як функцію від тиску в гальмівній камері ( $P_{kij}$ ) у вигляді системи рівнянь (2):

$$f = \begin{cases} f_{\max} & npu & P_{kij} < 0, 2 \cdot P_{\max} \\ f_{\max} \cdot \sin(A \cdot \arctan(B \cdot P_{kij})) & npu & P_{kij} \ge 0, 2 \cdot P_{\max} \end{cases}$$
(2)

де A – коефіцієнт, який враховує мінімальні та максимальні параметри площі поперечного перетину каналу дроселя (f) і визначається з залежності:

$$A = \frac{2 \cdot f_{\max}^2 - f_{\min}^2}{f_{\max}^2};$$

*B* – коефіцієнт, який залежить від раціонального тиску в гальмівній камері при якому необхідно корегування роботи модуляторів ЕПГП:

$$B = 83 \cdot e^{-1.4 \cdot P \max}.$$

При виконанні імітаційного математичного моделювання слід також врахувати, що при зміні площі поперечного перетину каналу дроселя (f) змінюється коефіцієнт витрати робочого тіла ( $\mu$ ), який можна визначити з залежностей описаних в роботі [25]:

Висновки. Для забезпечення кочення колеса з раціональним проковзуванням темп наповнення гальмівної камери після досягнення 10 % проковзування, необхідно знижувати на неменше ніж 60 %.

Раціональний тиск в гальмівній камері при якому необхідно починати зниження темпу наповнення гальмівної камери робочім тілом при використанні ЕПГП, повинен становити близько 25 % від максимального тиску в приводі.

#### Список літератури:

1. Єдині технічні приписи щодо офіційного затвердження дорожніх транспортних засобів категорії М, N, і О стосовно гальмування: ДСТУ UN/ЕСЕ R 13-07, 08-2002 (Правила ЕЄК ООН № 13-07, 08:1996, ІDТ). – [Чинний від 2003-01-01].-К.: Держстандарт України, 2002. – 258. – (Національний стандарт України).

**2.** Михалевич Н.Г. Совершенствование электропневматических аппаратов тормозного привода автотранспортных средств: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.02 / Николай Григорович Михалевич. – Х.: 2009. – 219 с.

**3.** Красюк А.Н. Совершенствование электропневматических систем автотранспортных средств: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.02 / Александр Николаевич Красюк. – Х.: 2011. – 188 с.

4. Леонтьев Д.Н. Системный подход к созданию автоматизированного тормозного управления транспортных средств категорий МЗ и N3: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.02 / Дмитрий Николаевич Леонтьев. – Харьков., 2011. – 241c.

**5.** Попов А.И. Оценка характеристик электропневматического тормозного привода / А.И. Попов, В.В. Нужный // Пути совершенствования автомобиля и его аппаратов / Моск. автомоб.-дор. ин-т. – М.: 1988. – С. 35-40.

6. Чебан А.А. Повышение эффективности антиблокировочной системы для транспортных средств категорий М<sub>3</sub> и N<sub>3</sub>: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03 / Андрей Анатольевич Чебан. – Х.: 2011. – 173 с.

7. Реализация интеллектуальных функций в электронно-пневматическом тормозном управлении транспортных средств: монография / А.Н. Туренко, В.И. Клименко, Л.А. Рыжих и др. – Х.: ХНАДУ, 2015. – 450 с.

8. Нужный В.В. Разработка электропневматического тормозного привода автотранспортного средства: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03 / Владимир Владимирович Нужный. – Донецк: 1996. – 220 с.

9. Саркисян Э.В. Экспериментальные исследования по выбору параметров электропневматической тормозной системы тракторного поезда / Э.В. Саркисян, Н.В. Богдан, Л. Хайро Хиральдо // Механизация и электрификация сельского хозяйства: (сб. науч. тр.). – Минск: Урожай, 1981. – № 24. – С. 168-171.

**10.** Абрамович Б.А. Безопасность человека при ускорениях / Б.А Абрамович. – М.: Книга, 2007. – 208 с.

**11.** Practice for Design of Amusement Rides and Devices: ASTM F229-06A [inc. with 01.01.06]. – USA. – 105 p.

**12.** Савельев Б.В. Обоснование статической характеристики тормозной системы автомобиля: автореф. дис. на соискание научной степени канд. техн. наук: спец. 05.05.03 «Автомобили и тракторы» / Б.В. Савельев. – М.: 1988. – 21 с.

13. Пат. 36321 Україна, МПК В60Т 8/36. Пропорціональний модулятор електронно-пневматичної гальмівної системи / заявники А.Н. Туренко, С.Й. Туренко, В.І. Клименко, Л.О. Рижих, С.В. Тишковець, А.А. Чебан, О.М Красюк; патентовласник ХНАДУ. – № 200805078; заявл. 21.04.2008; опубл. 27.10.2008. – 7 с.

14. Пат. 2385242 Российская Федерация, МПК В60Т 8/36. Пропорциональный модулятор электроннопневматической тормозной системы / заявители А.Н. Туренко, С.Й. Ломака, В.И. Клименко, В.А. Богомолов, Л.А. Рыжих, С.В. Тишковец, Д.Н Леонтьев, А.А. Чебан, А.Н. Красюк; патентообладатель ХНАДУ. – № 2008116957/11; заявл. 28.04.2008; опубл. 27.03.2010; бюл. № 9. – 7 с.

15. Пат. 2314217 Российская федерация, МПК В60Т 8/36. Модулятор электронной тормозной системы / А.Н. Туренко, С.Й. Ломака, В.И. Клименко, В.А. Богомолов, Л.А. Рыжих, А.А. Чебан, С.П. Мельник, Ю.В. Кирчатый, И.Н. Назаренко, А.Н. Красюк. – № 200511679/11; заявл. 19.04.2005; опубл. 27.10.2006. – 7 с.

16. Пат. 84437 Україна, МПК В60Т 8/36. Модулятор електронно-пневматичної гальмівної системи / А.М. Туренко, С.Й. Ломака, В.І. Клименко, Л.О. Рижих, Д.М. Леонтьєв, А.А. Чебан, О.М. Красюк, С.В. Тишковець. – № 200602536 заявл. 09.03.2006; опубл. 27.10.2008. – 7 с.

17. Пат. 6325468 США, МПК В60Т 8/64 НКИ 303/18. EBS modulator with direct exhaust capability / заявитель и патентообладатель Thanh ho, *Robert J. Herbst* (США). – № 09/165,470; заявл. 02.10.1998; опубл. 4.12.2001.

18. Пат. 2007/0236080 США, МПК В60Т 8/32 НКИ 303/119.2. Brake-pressure modulator pilot unit / заявитель и патентообладатель Dieter Frank, Juan Rovira-Rifaterra, Armin Sieker, Andreas Taichmann (Германия). – № 11/658,066; опубл. 11.10.2007.

**19.** Пат. 6588856 США, МПК В60Т 8/34 НКИ 303/119.2. Modulator relay valve assembly and method / *Robert J. Herbst, Gregory R. Ashley, George S. Wagner* (США); заявитель и патентообладатель Benbix Commercial Vehicle Systems LLC (США). – № 09/924,187; опубл. 08.07.2003.

**20.** Electronic braking system for Trailers with roll over protection. KNORR-BREMSE System for commercial Vehicles (Электронный ресурс) Product information. Режим доступа к сайту: http://en.knorr-bremsesfn.com/systems/

**21.** Salaani M. Hardware-in-the-Loop Pneumatic Braking System for Heavy Truck Testing of Advanced Electronic Safety Interventions / M. Salaani, S. Rao, J. Every, D. Mikesell et ai. // SAE Int. J. Passeng. Cars-Mech. Syst. – 2016. – Vol. 9(2). – PP. 912-923.

**22.** Selvaraj M. Modeling and Simulation of Dynamic Behavior of Pneumatic Brake System at Vehicle Level / M. Selvaraj, S. Gaikwad, A. Suresh // SAE Technical Paper. – 2014. – Vol. 2014-01-2494.

**23.** *Palanivelu S.* Modeling and Optimization of Pneumatic Brake System for Commercial Vehicles by Model Based Design Approach / *S. Palanivelu, J. Patil, A. Jindal //* SAE Technical Paper. – 2017. – Vol. 2017-01-2493.

**24.** Компании WABCO Vehicle Control Systems (NYSE: WBC). // Официальный сайт. – 2010 г.; Режим доступа к сайту.: http://www.wabco-auto.com/nc/ru/domashnjaja\_stranica \_wabco.

**25.** *Крамской А.В.* Совершенствование методов расчета динамики пневмоаппаратов и пневматического тормозного привода автотранспортных средств: дис. ...канд. техн. наук: 05.22.02 / Александр Владимирович Крамской. – Х.: 2006. – 253 с.

#### **References (transliterated):**

**1.** Jedyni tehnichni prypysy shhodo oficijnogo zatverdzhennja dorozhnih transportnyh zasobiv kategorii' M, N, i O stosovno gal'muvannja [Uniform technical prescriptions concerning the approval of road vehicles category M, N, and O with regard to braking ]: DSTU UN/ECE R 13-07, 08-2002 (Pravyla EJeK OON № 13-07, 08:1996, YDT). [Chynnyj vid 2003-01-01]. Kyyiv: Derzhstandart Ukrai'ny, 2002. 258 p.

2. Mihalevich N.G. Sovershenstvovanie elektropnevmaticheskih apparatov tormoznogo privoda avtotransportnyih sredstv [Improved brake electro-pneumatic actuator of vehicles]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.22.02. Kharkiv. 2009. 219 p.

**3.** Krasyuk A.N. Sovershenstvovanie elektropnevmaticheskih sistem avtotransportnyih sredstv [Improved electro-pneumatic systems of vehicles]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.22.02. Kharkiv. 2011. 188 p.

**4.** Leontiev D.N. Sistemnyj podhod k sozdaniju avtomatizirovannogo tormoznogo upravlenija transportnyh sredstv kategorij M3 i N3 [A systematic approach to the creation of the automated brake control vehicles M3 and N3]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.22.02. Kharkiv. 2011. 241 p.

**5.** Popov A.I., Nuzhnyj V.V. Ocenka harakteristik jelektropnevmaticheskogo tormoznogo privoda [Evaluation of the characteristics of the electro-pneumatic brake actuator]. Puti sovershenstvovanija avtomobilja i ego apparatov. Mosk. avtomob.-dor. in-t. Moscow: 1988. PP. 35-40.

**6.** Cheban A.A. Povyshenie jeffektivnosti antiblokirovochnoj sistemy dlja transportnyh sredstv kategorij M3 i N3 [Improving the efficiency of anti-lock braking systems for vehicles of categories M3 and N3]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.05.03. Kharkiv: 2011. 173 p.

7. Realizacija intellektual'nyh funkcij v jelektronnopnevmaticheskom tormoznom upravlenii transportnyh sredstv: monografija [The implementation of intelligent functions in the electronic-pneumatic brake control vehicles] A.N. Turenko, V.I. Klimenko, L.A. Ryzhih i dr. Kharkiv: HNADU, 2015. 450 p.

**8.** Nuzhnyj V.V. Razrabotka jelektropnevmaticheskogo tormoznogo privoda avtotransportnogo sredstva [The development of the electro-pneumatic brake drive vehicle]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.05.03. Doneck: 1996. 220 p.

**9.** Sarkisjan Je.V., Bogdan N.V., Hiral'do L. Hajro Jeksperimental'nye issledovanija po vyboru parametrov jelektropnevmaticheskoj tormoznoj sistemy traktornogo poezda [Experimental study on the choice of parameters of electropneumatic brake system tractor train]. Mehanizacija i jelektrifikacija sel'skogo hozjajstva: (sb. nauch. tr.) Minsk: Urozhaj, 1981. No 24. PP. 168-171.

**10.** Abramovich B.A. Bezopasnost' cheloveka pri uskorenijah [Human security during acceleration]. Moscow: Kniga, 2007. 208 p.

**11.** Practice for Design of Amusement Rides and Devices: ASTM F229-06A [inc. with 01.01.06]. USA. 105 p.

**12.** Savel'ev B.V. Obosnovanie staticheskoj harakteristiki tormoznoj sistemy avtomobilja [Justification of the static characteristics of a brake system of the car]: avtoref. dis. na soiskanie nauchnoj stepeni kand. tehn. nauk: spec. 05.05.03 Avtomobili i traktory. Moscow: 1988. 21 p.

**13.** Pat. 36321 Ukrai'na, MPK V60T 8/36. Proporcional'nyj moduljator elektronno-pnevmatychnoi' gal'mivnoi' systemy. Zajavnyky Turenko A.N., Lomaka S.J., Klymenko V.I., Ryzhyh L.O., Tyshkovec' S.V., Cheban A.A., Krasjuk O.M; patentovlasnyk HNADU. No 200805078; zajavl. 21.04.2008; opubl. 27.10.2008. 7 p.

14. Pat. 2385242 Rossijskaja Federacija, MPK V60T 8/36. Proporcional'nyj moduljator jelektronno-pnevmaticheskoj tormoznoj sistemy. Zajaviteli Turenko A.N., Lomaka S.J., Klimenko V.I., Bogomolov V.A., Ryzhih L.A., Tishkovec S.V., Leont'ev D.N, Cheban A.A., Krasjuk A.N. (Ukraine); patentoobladatel' HNADU. No 2008116957/11; zajavl. 28.04.2008; opubl. 27.03.2010; bjul. No 9. 7 p.

**15.** Pat. 2314217 Rossijskaja federacija, MPK V60T 8/36. Moduljator jelektronnoj tormoznoj sistemy. Turenko A.N., Lomaka S.J., Klimenko V.I., Bogomolov V.A., Ryzhih L.A., Cheban A.A., Mel'nik S.P., Kirchatyj Ju.V., Nazarenko I.N., Krasjuk A.N. (Ukraine). No 200511679/11; zajavl. 19.04.2005; opubl. 27.10.2006. 7 p.

**16.** Pat. 84437 Ukraine, MPK V60T 8/36. Moduljator elektronno-pnevmatichnoï gal'mivnoï sistemi. Turenko A.M., Lomaka S.J., Klimenko V.I., Rizhih L.O., Leont'ev D.M., Cheban A.A., Krasjuk O.M., Tishkovec' S.V. (Ukraine). No 200602536. zajavl. 09.03.2006; opubl. 27.10.2008. 7 p.

**17.** Pat. 6325468 SShA, MPK B60T 8/64 NKI 303/18. EBS modulator with direct exhaust capability / zajavitel' i patentoobladatel' Thanh ho, Robert J. Herbst (SShA). No 09/165,470; zajavl. 02.10.1998; opubl. 4.12.2001.

**18.** Pat. 2007/0236080 USA, MPK B60T 8/32 NKI 303/119.2. Brake-pressure modulator pilot unit / zajavitel' i patentoobladatel' Dieter Frank, Juan Rovira-Rifaterra, Armin Sieker, Andreas Taichmann (Germany). No 11/658,066; opubl. 11.10.2007.

**19.** Pat. 6588856 USA, MPK B60T 8/34 NKI 303/119.2. Modulator relay valve assembly and method. Robert J. Herbst, Gregory R. Ashley, George S. Wagner (USA); zajavitel' i patentoobladatel' Benbix Commercial Vehicle Systems LLC (USA). No 09/924,187; opubl. 08.07.2003.

**20.** Electronic braking system for Trailers with roll over protection. KNORR-BREMSE System for commercial Vehicles (Jelektronnyj resurs) Product information. Rezhim dostupa k sajtu: http://en.knorr-bremsesfn.com/systems/.

**21.** Salaani M., Rao S., Every J., Mikesell D. et ai., Hardware-in-the-Loop Pneumatic Braking System for Heavy Truck Testing of Advanced Electronic Safety Interventions, SAE Int. J. Passeng. Cars-Mech. Syst. 9(2):912-923, 2016.

**22.** Selvaraj M., Gaikwad S., Suresh A. Modeling and Simulation of Dynamic Behavior of Pneumatic Brake System at Vehicle Level. SAE Technical Paper 2014-01-2494, 2014.

**23.** Palanivelu S., Patil J., Jindal A. Modeling and Optimization of Pneumatic Brake System for Commercial Vehicles by Model Based Design Approach. SAE Technical Paper 2017-01-2493, 2017.

**24.** Kompanii WABCO Vehicle Control Systems (NYSE: WBC). Oficial'nyj sajt. 2010. Rezhim dostupa k sajtu.: http://www.wabco-auto.com/nc/ru/domashnjaja stranica wabco.

**25.** Kramskoj A.V. Sovershenstvovanie metodov rascheta dinamiki pnevmoapparatov i pnevmaticheskogo tormoznogo privoda avtotransportnyh sredstv [Perfection of methods of calculation of the dynamics Pneumodevices and pneumatic brake drive vehicles]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.22.02. Kharkiv: 2006. 253 p.

Надійшла (received) 11.09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Теоретичні дослідження впливу зміни тиску в електропневматичному гальмівному приводі на динаміку руху коліс КТЗ / Є.Ю. Дон // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 14-18. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.

Теоретические исследования влияния изменения давления в электропневматическом тормозном приводе на динамику качения колес КТС / Е.Ю. Дон // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 14-18. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.

Theoretical studies of the effect of the rate of change of pressure in the brake actuator elektropneumatische on the dynamics of the wheels of the wheeled vehicle / E. Don // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – N 39 (1261). – C. 14-18. – Bibliogr.: 25. – ISSN 2078-9130.

# Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Дон Евген Юрійович – пошукувач, кафедра автомобілів ім. А.Б. Гредескула, Харківський національний автомобільнодорожнього університету, тел.: +38 (067) 72–99–820, e-mail: Evgenypj82@gmail.com.

Дон Евгений Юрьевич – соискатель, кафедра автомобилей им. А.Б. Гредескула, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, тел.: +38 (067) 72–99–820, e-mail: Evgenypj82@gmail.com.

*Evgeny Don* – graduate, Kharkiv National automobile and highway University, tel.: +38(067) 72–99–820; e-mail: Ev-genypj82@gmail.com.

УДК 539.1

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115762

# С. Н. ИСАКОВ, С. И. МАРУСЕНКО

# ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ОБРАБОТКИ НЕОДНОРОДНЫХ И БИОЛОГИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Виконано доопрацювання методу побудови амплітудно-частотної характеристики ультразвукового інструменту з використанням апроксимації нелінійної динамічної характеристики в зоні контакту при обробці неоднорідних матеріалів та біоматеріалів в режимі UAD. Проведено оцінку впливу основних параметрів технологічного процесу (зусилля подачі, робоча частота коливань, швидкість обертання і ін.) на стійкість та ефективність робочих режимів. Наведено графіки та діаграми робочих процесів у режимі UAD.

Ключові слова: нелінійна динамічна характеристика, амплітудно-частотна характеристика, неоднорідні матеріали, біоматеріали.

Выполнена доработка метода построения амплитудно-частотной характеристики ультразвукового инструмента с использованием аппроксимации нелинейной динамической характеристики в зоне контакта при обработке неоднородных материалов и биоматериалов в режиме UAD. Проведена оценка влияния основных параметров технологического процесса (усилие подачи, рабочая частота колебаний, скорость вращения и пр.) на устойчивость и эффективность рабочих режимов. Приведены графики и диаграммы рабочих процессов в режиме UAD.

Ключевые слова: нелинейная динамическая характеристика, амплитудно-частотная характеристика, неоднородные материалы, биоматериалы.

The method for constructing of the amplitude-frequency characteristic of the ultrasound instrument is improved by using an approximation of the nonlinear dynamic characteristic in the contact zone when processing inhomogeneous materials and biomaterials in the ultrasonically- assisted drilling mode. The influence of the main parameters of the technological process (feed force, operating frequency of oscillations, rotation speed, etc.) on the stability and efficiency of operating conditions was estimated. Graphs and diagrams of workflows in the ultrasonically- assisted drilling mode, when the feed force and the speed of the main rotation of the working tool were changing, are given. These will allow us to estimate the stability and efficiency of the selected operating modes even at the design stage.

Keywords: nonlinear dynamic characteristic, amplitude-frequency characteristic, inhomogeneous materials, biomaterials.

Введение. Появление новых технологических материалов, обладающих объемной неоднородностью, а также использование новых методов при обработке биоматериалов и костных структур обуславливают необходимость постоянного усовершенствования технологических инструментов, систем управления рабочими процессами и постоянного контроля состояния обрабатываемого материала.

Основными проблемами при обработке неоднородных и биоматериалов является существенное влияние механического и термического воздействия на конструкционные параметры самого материала, а для биоматериалов вообще на их жизнеспособность. Одним из способов снижения такого негативного влияния является наложение ультразвуковых колебаний на технологический инструмент в процессе выполнения технологических и хирургических операций, что отражается в самих названиях таких методов ultrasonically - assisted cutting (UAC) и ultrasonically assisted drilling (UAD).

В этой связи учет соответствующих факторов, влияющих на эффективное поведение инструмента в процессе операции, в динамически нелинейных математических моделях на стадии проектирования и разработки позволит создать новые технологические системы, отвечающие жестким требованиям по эффективности и безопасности их применения.

Основная цель настоящей работы - исследование влияния основных параметров (усилие подачи, рабочая частота колебаний, скорость вращения и пр.) технологического процесса обработки неоднородных материалов и биоматериалов в режиме UAD на базе анализа нелинейной динамической характеристики в зоне контакта с учетом энергетических потерь.

Подходы и методы. В [1-2] были описаны подходы и методы, позволившие с учетом соответствующего представления нелинейной динамической характеристики в зоне контакта рабочего инструмента с обрабатываемым материалом получить уравнение резонансной кривой ассистирующего ультразвукового инструмента в виде:

$$a = \frac{P}{\sqrt{\left[\left(c - m\omega^2\right) + k(v, a\omega)\right]^2 + \left[\frac{\Delta W(a)}{\pi a^2} + \omega b(v, a\omega)\right]^2}}, (1)$$
the

ΓĮ

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{y}_i(\vec{x}) \eta_i(t);$$
(2)

 $\vec{y}_{i}(\vec{x})$  - собственные формы колебаний;

$$P^{*} = \int_{V} (\vec{f}, \vec{y}) dV; \qquad (3)$$

$$c = \int_{V} (C\vec{y}, \vec{y}) dV \; ; \; m = \int_{V} (M\vec{y}, \vec{y}) dV \; ; \; \omega_0^2 = \frac{c}{m} \; ; \qquad (4)$$

 $\Delta W = \int_{V} \Psi \sigma_i^2 dV$  - энергия, рассеиваемая в системе за

© С. Н. Исаков, С. И. Марусенко, 2017

цикл колебаний в соответствии с представлением Давиденкова; где  $\Psi$  - коэффициент, определяемый экспериментально;  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений.

При обработке большинства неоднородных материалов [3] и биоматериалов [4-5] наиболее приемлемым является силовая подача технологического инструмента, когда на него воздействует постоянная сила *P*, а эффективность процесса зависит от параметров колебаний и нелинейных динамических характеристик [1].

Функции k(v,a) и b(v,a), характеризующие эквивалентные упругую и диссипативную составляющие нелинейной нагрузки, в случае силовой подачи для большинства практических случаев могут быть преобразованы с использованием зависимости скорости резания в виде:

$$\frac{v}{\omega a} = d_1 \frac{P}{D} + d_2 \left(\frac{P}{D}\right)^2, \qquad (5)$$

где коэффициенты  $d_1$  и  $d_2$  определяются исходя из свойств обрабатываемого материала на базе эмпирических данных, а D - сила резания в отсутствии вибрации.

Тогда, учитывая зависимости:

$$m = a^{2}\overline{m};$$

$$c = a^{2}\overline{c};$$

$$\Delta W = a^{2}\Delta \overline{W};$$

$$P^{*} = a^{2}\overline{P},$$
(6)

где  $\overline{m}$ ,  $\overline{c}$ ,  $\Delta \overline{W}$  и  $\overline{P}$  - значения, рассчитанные при a = 1, уравнение резонансной кривой (1) для случая силовой подачи может быть представлено в виде:

$$a = \frac{a P}{\sqrt{\left[a^2 \overline{m} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + G_k\right]^2 + \left[\frac{\Delta \overline{W}}{\pi} + G_b\right]^2}};$$

$$G_k = \frac{D}{a \pi \left(d_1 \frac{P}{D} + d_2 \left(\frac{P}{D}\right)^2\right)} \sum_{i=1}^M k_i \left(d_1 \frac{P}{D} + d_2 \left(\frac{P}{D}\right)^2\right)^i; \quad (7)$$

$$G_b = \frac{D}{a \pi \left(d_1 \frac{P}{D} + d_2 \left(\frac{P}{D}\right)^2\right)} \sum_{i=1}^M b_i \left(d_1 \frac{P}{D} + d_2 \left(\frac{P}{D}\right)^2\right)^i.$$

При обработке неоднородных материалов и, особенно, биоматериалов в режиме UAD необходимо учитывать потери энергии в зоне контакта, вызванные вращением режущей кромки инструмента, которые могут оказывать существенное влияние на изменение температуры обрабатываемого материала. Эти потери могут быть представлены с учетом идей и подходов, изложенных в [6], в виде:

$$\gamma = n\,\omega a \frac{P}{D}\gamma_1 \,, \tag{8}$$

где n – скорость вращения инструмента, а коэффициент  $\gamma_1$  зависит от степени деформации срезаемого материала, физико-технологических свойств инструментального материала, сечения и формы режущей кромки рабочего наконечника инструмента.

Уравнения (7) с учетом дополнительных потерь энергии в зоне контакта (8) позволят построить амплитудно-частотные характеристики режима UAD для случая силовой подачи и оценить влияние всех технологических параметров на эффективность процесса обработки.

Исследование режимов UAD. Рабочая частота ультразвукового инструмента аналогичного исследованному в [1] – 20 кГц, пассивная часть инструмента изготовлена из титанового сплава, а активная – из пьезокерамических элементов. При этом режущая кромка рабочего наконечника имеет алмазное напыление.

При отсутствии нагрузки амплитудно-частотная характеристика (7) представлена на рис. 1.



Изменение АЧХ в зависимости от величины отношения P/D представлено на рис. 2.



исунок 2 – Изменение АЧХ в зависимости от величинь отношения *P/D* 

Увеличение усилия подачи до критического значения  $P_{\rm kp}$  приводит к смещению резонансной кривой в сторону больших частот и снижению амплитуды колебаний рабочего наконечника, а при превышении критического значения  $P_{\rm kp}$  может привести к «срыву» на неустойчивую ветку, когда поддержание резонансного режима всей системы оказывается невозможным, а для его восстановления необходимо проводить «разгрузку» системы, что сказывается на показателях эффективности самой операции. Для медицинского применения ультразвуковых инструментов необходимо

обратить особое внимание на величину критического усилия, которое может оказать травматическое влияние на биологические ткани или кости.

Влияние скорости вращения инструмента в режиме  $(P/D \rightarrow 0)$  на поведение АЧХ при обработке большой берцовой кости продемонстрировано на рис. 3.



Здесь важно отметить, что даже при незначительных скоростях вращения режущей кромки рабочего инструмента, возникают существенные потери энергии в зоне контакта, приводящие к падению амплитуды ультразвуковых колебаний, а термические воздействия на ткани в этой зоне могут привести к их отмиранию.



Комплексное воздействие всех технологических параметров в режиме UAD на поведение АЧХ можно проанализировать, исследуя диаграммы рис. 4-6, построенные для нескольких значений соотношения *P*/*D*.



Рисунок 6 – АЧХ для P/D = 50 %

**Выводы.** В ходе настоящего исследования была разработана математическая модель технологического процесса обработки неоднородных материалов и биоматериалов в режиме UAD.

Анализ амплитудно-частотной характеристики позволяет оценить влияние основных параметров технологического процесса (усилие подачи, рабочая частота колебаний, скорость вращения и пр.) на устойчивость и эффективность рабочих режимов и выбрать оптимальные параметры процесса в каждом конкретном случае обработки.

Используя разработанные математические модели, методы расчетов и алгоритмы еще на стадии проектирования возможно оценить устойчивость и надежность выбранных рабочих режимов ультразвукового инструмента для обеспечения эффективного проведения технологических операций и предотвратить травматическое воздействие на живые ткани при медицинском вмешательстве. При этом могут быть выработаны оптимальные требования к разработке системы управления режимами UAD.

#### Список литературы:

**1.** Исаков С. Н. Исследование динамических нелинейных процессов УЗ технологических инструментов / С. Н. Исаков // Вісник НТУ «ХПІ»: Серія «Динаміка та міцність машин». – 2012. – № 55. – С. 73-80.

2. Асташев В. К. О нелинейной динамике ультразвуковых технологических процессов и систем / В. К. Асташев // Научно-технический журнал «ВНТР», Национальная Технологическая Группа. – М.: 2007. – № 2. – С. 123-127.

3. Ярославцев В. М. Механика процесса резания пластически деформированных металлов с неоднородными свойствами по толщине срезаемого слоя / В. М. Ярославцев // Вестник МГТУ. Сер. «Машиностроение». – 1993. – № 4. – С. 93-103.

**4.** Alam K. Measurements of surface roughness in conventional and ultrasonically-assisted bone drilling / K. Alam, A. V. Mitrofanov, M. Bäker, V. V. Silberschmid // American Journal of Biomedical Sciences.  $-2009. - N \ge 1$  (4). - PP. 312-320.

Вісник НТУ «ХПІ». 2017. № 39 (1261)

**5.** Alam K. Finite element analysis of forces of plane cutting of cortical bone / K. Alam, A. V. Mitrofanov, M. Bäker, V. V. Silberschmid // Journal of Computational Materials Science.  $-2009. - N_{\odot} 46$  (3). -PP. 38-743.

**6.** *Кумабэ Д.* Вибрационное резание / Д. *Кумабэ //* – М.: Машиностроение, 1985. – 424 с.

#### **References (transliterated):**

**1.** Isakov S. N. Issledovanie dinamicheskih nelinejnyh processov UZ tehnologicheskih instrumentov. Visnik NTU «KhPI»: Serija «Dinamika ta micnist' mashin». 2012. No 55. PP. 73-80.

**2.** Astashev V. K. O nelinejnoj dinamike ul'trazvukovyh tehnologicheskih processov i sistem. Nauchno-tehnicheskij zhurnal «VNTR», Nacional'naja Tehnologicheskaja Gruppa. Moscow: 2007. No 2. PP 123-127.

**3.** Jaroslavcev V. M. Mehanika processa rezanija plasticheski deformirovannyh metallov s neodnorodnymi svojstvami po tolshhine srezaemogo sloja. Vestnik MGTU. Ser. "Mashinostroenie". 1993. No 4. PP. 93-103.

**4.** Alam K., Mitrofanov A.V., Bäker M., Silberschmid V. V. Measurements of surface roughness in conventional and ultrasonically-assisted bone drilling. American Journal of Biomedical Sciences. 2009. No 1 (4). PP. 312–320.

**5.** Alam K., Mitrofanov A.V., Bäker M., Silberschmid V. V. Finite element analysis of forces of plane cutting of cortical bone. Journal of Computational Materials Science. 2009. No 46 (3). PP. 738–743.

**6.** Kumabje D. Vibracionnoe rezanie. Moscow: Mashinostroenie, 1985. 424 p.

Поступила (received) 02.10.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Динамічна нелінійність ультразвукової обробки неоднорідних і біологічних матеріалів / С. М. Ісаков, С. І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 19-22. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Динамическая нелинейность ультразвуковой обработки неоднородных и биологических материалов / С.Н. Исаков, С. И. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 19-22. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Dynamic nonlinearity of ultrasonic treatment of inhomogeneous and biological materials / S. M. Isakov, S. I. Marusenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 19-22. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Ісаков Сергій Миколайович* – кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: smisakov959@gmail.com.

*Исаков Сергей Николаевич* – кандидат технических наук, младший научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: smisakov959@gmail.com.

Isakov Sergiy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Junior researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: smisakov959@gmail.com.

*Марусенко Світлана Іванівна* – науковий співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-761-78. *Марусенко Светлана Ивановна* – научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78. *Marusenko Svitlana* – Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057)-70-761-78. УДК 519:539:534

#### DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115763

# С.В. КРАСНИКОВ

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВИБРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРПУСА ПАРОВОЙ ТУРБИНЫ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

Проведено аналіз динамічної пружності опорних елементів корпусу парової турбіни великої потужності. Об'єктом дослідження є гнучка частина парової турбіни - циліндр низького тиску. Для дослідження використана парова турбіна великої потужності, що містить кілька типових корпусів. Для моделювання та проведення чисельних розрахункових досліджень використаний метод кінцевих елементів. Побудовано геометричні й кінцево-елементні моделі корпуса парової турбіни з урахуванням міцності опорної конструкції. Проведено розрахунки змушених коливань на декількох моделях. Отримано залежності амплітуд коливань від розподілу по опорних поверхнях з урахуванням двох варіантів міцності опорної системи. Отримані результати дають якісну оцінку динамічної міцності опорних поверхонь корпуса парової турбіни при двох розглянутих моделях пружності опори турбоагрегату.

Ключові слова: вібрація, парова турбіна, циліндр низького тиску, метод скінчених елементів, амплітуди вимушених коливань, фундамент.

Проведен анализ динамической жесткости опорных элементов корпуса паровой турбины большой мощности. Объектом исследования является гибкая часть паровой турбины – цилиндр низкого давления. Для исследования использована паровая турбина, которая содержит несколько типовых корпусов. Для моделирования и проведения численных расчетных исследований использован метод конечных элементов. Построены геометрические и конечно-элементные модели корпуса паровой турбины с учетом жесткости опорной конструкции. Проведены расчеты вынужденных колебаний на нескольких моделях. Получены зависимости амплитуд колебаний от распределения по опорным поверхностям с учетом двух вариантов жесткости опорной системы. Полученные результаты дают качественную оценку динамической жесткости опорных поверхностей корпуса паровой турбины при двух рассмотренных моделях упругости опоры турбоагрегата.

Ключевые слова: вибрация, паровая турбина, цилиндр низкого давления, метод конечных элементов, амплитуды вынужденных колебаний, фундамент.

The analysis of the dynamic elasticity of the supporting elements of the body of a high power steam turbine is carried out. The object of the study is a flexible part of the steam turbine - a low pressure cylinder. For research, a steam turbine of high power, containing several typical buildings, was investigated. For modeling and conducting numerical calculations, the method of finite elements was used. The geometric and finite element models of the steam turbine body are constructed taking into account the strength of the supporting structure. Calculated forced oscillations on several models. The dependences of oscillation amplitudes on distribution on supporting surfaces were obtained taking into account two variants of the strength of the reference system. The obtained results give a qualitative estimate of the dynamic strength of the supporting surfaces of the body of the steam turbine under the two models of the elasticity of the turbine support.

Keywords: vibration, steam turbine, low pressure case, finite element method, amplitude of forced oscillations, foundation.

Введение. Страны с растущей экономикой характеризуются высоким промышленным уровнем, который требует развитой энергетической системы. Рост энергопотребления привел в развитых стран к необходимости импорта электроэнергии из бывших высокоразвитыми промышленных районов или стран с более высоким уровнем развития энергетики, одной из которых является Украина. В большинстве развитых стран энергетика базируется в первую очередь на тепловых и атомных электростанциях, которые состоят из энергоблоков и другого оборудования. Как правило, страны с высокоразвитой энергетикой массово используют энергоблоки средней и большой мощности. Бурный рост промышленности в конце прошлого века привел к созданию на нашей родине и за границей паровых турбин мощностью 1000 МВт и выше. Этот, достигнутый в нашем отечестве, результат в создании энергетического оборудования большой мощности до сих пор остается непревзойденным, несмотря на опережающие темпы развития промышленности в Китае и других странах. Уровень передовой техники ПАО «Турбоатом» и концерна ПАО «Силовые машины» остается востребованным в странах, которые выбирают качество и надежность вместо политических амбиций. Эти два фактора являются определяющими для грамотного заказчика. Надежность работы энергоблоков в значительной степени зависит от уровня вибраций оборудования [1, 2]. Основным источником вибраций является небаланс ротора, который является неустранимым фактором. Вибрация от ротора передается на все остальные части системы турбоагрегатфундамент-основание. При этом наибольшую чувствительность имеют части указанной системы с наименьшей жесткостью – корпуса цилиндров низкого давления. В турбинах мощностью 1000 МВт и выше этих корпусов несколько. Это приводит к необходимости детального анализа вибрационных характеристик корпусов цилиндров низкого давления [3].

Цель работы. Необходимо исследовать амплитудно-частотную зависимость вибрационных характеристик корпуса паровой турбины для анализа его взаимосвязи с фундаментом турбоагрегата. Объектом проведенных исследований является корпус цилиндра низкого давления паровой турбины мощностью 1100 МВт. Предметом исследования является динамическая жесткость опорных элементов корпуса паровой турбины большой мощности. Математическая модель. Для моделирования и анализа вибрационных характеристик используется метод конечных элементов. Основной функционал в общем виде:

$$L(t,O,q) = R(t), \tag{1}$$

где *О* – различные состояния связи корпуса турбины с фундаментом; *L* –уравнение Лагранжа 2-го рода; *q* – обобщенные перемещения; *R* – внешние силы.

В методе конечных элементов [4] выражение (1) обычно записывается в следующем матричном виде:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \qquad (2)$$

где M – матрица масс, C – матрица демпфирования, K – матрица жесткости.

Амплитуды вынужденных колебаний из уравнения (2) находятся на основе следующего выражения:

$$\{A\} = V \left[ \text{diag} \frac{e^{i\phi_j}}{\sqrt{(p_j^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 p_j^2 n_j^2}} \right] V^T \{R_0\};$$
  
$$\text{tg} \varphi_j = \frac{2\omega p_j n_j}{p_j^2 - \omega^2}, \qquad (3)$$

де  $\{A\}$  – вектор амплитуд вынужденных колебаний; V – матрица собственных форм системы;  $p_j - j$ -я собственная частота системы;  $n_j$  – коэффициент затухания j-й собственной формы системы;  $\omega$  – частота внешних сил.

Собственная частота системы *p<sub>j</sub>* определяется из формулы (4):

$$\det[K - p_i^2 M] = 0.$$
 (4)

Описание расчетной модели. На основе ранее созданных геометрических моделей корпуса цилиндра низкого давления построен ряд конечно-элементных моделей. Для анализа вибрационных характеристик, который проведен в данной работе, использованы две модели. Внешний вид моделей показан на рис. 1. Вертикальная жесткость связи корпуса с фундаментом моделировалась в обеих моделях системой жесткостей. Отличие между расчетными моделями заключается в различной связи с корпуса турбины с фундаментом. У модели Т1 горизонтальные перемещения в опорах корпуса турбины на фундамент отсутствуют, а в модели Т2 эти перемещения моделируются с помощью системы жесткостей [5 - 9]. Характеристики расчетных моделей приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Параметры конечно-элементных моделей

| Назва              | Bantu                                  | Количество |                |                          |                            |  |  |  |  |  |  |
|--------------------|--|------------|----------------|--------------------------|----------------------------|--|--|--|--|--|--|
| ние<br>мо-<br>дели | Верти-<br>кальная<br>жесткость,<br>Н/м | Узлов      | Элемен-<br>тов | Степе-<br>ней<br>свободы | Резо-<br>нансов<br>0-55 Гц |  |  |  |  |  |  |
| T1                 | $10^{12}$                              | 13183      | 15135          | 78873                    | 325                        |  |  |  |  |  |  |
| T2                 | 10 <sup>8</sup>                        | 13270      | 15222          | 78876                    | 334                        |  |  |  |  |  |  |

Для модели T1 были проведены статический расчет при гравитационной нагрузке и расчет амплитуд вынужденных колебаний при нагружении единичной силой вблизи центра масс. Результаты динамического расчета были пересчитаны к эквиваленту статической гравитационной нагрузки, а результаты статического наоборот. Полученные данные этих вычислений приведены в табл. 2 и на рис. 2.



Рисунок 1 - Расчетная модель

Таблица 2 – Анализ перемещений для модели T1 при жесткости 10<sup>12</sup> H/м

| кости то тим |              |        |            |            |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------|--------------|--------|------------|------------|--|--|--|--|--|--|--|
|              | Перемеще-    | По-    |            |            |  |  |  |  |  |  |  |
| Тип рас-     | ния и ампли- | греш-  | Пересчет с |            |  |  |  |  |  |  |  |
| чета         | туда при 0   | ность, | весом, м   | Огличие, м |  |  |  |  |  |  |  |
|              | Гц, м        | %      |            |            |  |  |  |  |  |  |  |
| Статика      | 4,202e-004   | 0,9    | 1,0987e-10 | 5,4235e-11 |  |  |  |  |  |  |  |
| Динами-      | 1,6418e-010  | 2,4    | 6,131e-4   | 1,929e-4   |  |  |  |  |  |  |  |
| ка           |              |        |            |            |  |  |  |  |  |  |  |



гружении единичной силой вблизи центра масс

Из табл. 2 видно, что различие между результатами вычислений не более 2,4 %. Это доказывает сходимость и точность вычислений вибрационных характеристик. Кроме этого, точность определения амплитуд колебаний подтверждается проведенными ранее исследованиями, а также выбранной на основе них степени дискретизации расчетных моделей [10, 11].

Из табл. 2 видим, что для амплитуд вынужденных колебаний диапазон амплитуд имеет разброс около  $5,4235 \cdot 10^{11}$  м, что на порядок отличается от максимальной амплитуды вынужденных колебаний в рассматриваемом диапазоне.

Результаты численных исследований. Для моделей T1, T2 проведены расчеты амплитуд вынужденных колебаний в контрольных точках при различном нагружении. На рис. 3 показано расположение контрольных точек корпуса ЦНД. Две из них располагаются в так называемых «фикспунктах» и обозначены буквой «ф». Остальные располагаются в нижней части опор на ребрах жесткости. Нагружение проводилось отдельно по каждой опоре в каждом из трех направлений X, Y, Z. Нагрузка была распределена по контрольным точкам опоры и в сумме равна 1 Н. При одном варианте нагружения (например в точках опоры 1 по оси Y) амплитуды вынужденных колебаний вычислялись во всех контрольных точках во всех трех направлениях. Поскольку конструкция имеет плоскость симметрии, то нагружение проводилось только по опорам 1–4. Трение рассматривалось конструкционное и учитывалось с помощью модального коэффициента демпфирования величиной 0,1.

В результате расчетов были получены зависимости амплитуд вынужденных колебаний контрольных точек от нагружения в одном направлении в каждой из опор.



Типичные зависимости амплитуд колебаний в контрольных точках от частоты показаны на рис. 4–7. На этих рисунках вертикальная координата является амплитудой колебаний (м), а горизонтальная – частота вынуждающей нагрузки (0 – 60 Гц). Модель корпуса ЦНД - Т2.

Общий анализ полученных зависимостей показал, что они качественно близки для двух групп опор: 1, 4, 5, 8 (первая) и 2, 3, 6, 7 (вторая). На рис. 4 и 5 показаны графики амплитуд колебаний точек опоры 2 второй группы в направлении Y и X при нагружении в этих же точках и направлениях. Соответствующие зависимости для точек опор первой группы имеют следующие отличия от графиков приведенных на рис. 4 и 5:

 меньший разброс амплитуд колебаний точек одной опоры;

– качественное совпадение в диапазоне 0 – 25 Гц;

меньшее количество выраженных резонансов в диапазоне 25 – 50 Гц.

На рис. 6 и 7 показаны графики амплитуд колебаний точек опор 1 и 2 в направлении Z. Из этих рисунков видно, что в диапазоне 0 – 25 Гц они существенно отличаются по количеству выраженных резонансов и величинам амплитуд колебаний. В диапазоне 25 – 50 Гц графики имеют схожий качественный вид с отсутствием ярко выраженных резонансов.

Таким образом опоры 2 являются более гибкими, чем опоры 1.





Выводы. На основе построенных геометрических моделей созданы расчетные модели корпуса ЦНД паровой турбины большой мощности. Проведены расчеты вынужденных колебаний на двух моделях. Получены зависимости амплитуд вынужденных колебаний контрольных точек при разных вариантах нагружения корпуса ЦНД. Получены распределения амплитуд колебаний на каждой опорной поверхности корпуса ЦНД. В результате анализа выделено две группы опор, с качественно сходными зависимостями колебаний внутри каждой группы.

#### Список литературы:

**1.** *Рунов Б.Т.* Исследование и устранение вибрации паровых турбоагрегатов / *Б.Т. Рунов.* – М.: Энергоиздат, 1982. – 352 с.

**2.** Шульженко Н.Г. Численный анализ колебаний систем турбоагрегат-фундамент / Н.Г. Шульженко, Ю.С. Воробьев. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.

**3.** HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. – Tokyo: Japan, 2009. – 104 p.

**4.** Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел / С.Ю. Еременко. – Х.: Основа, 1991. – 271 с.

**5.** *Zhiqiang Hu*, A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction / Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He, Lei Xiao // ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. – Vol. 1B. – Düsseldorf: International Gas Turbine Institute, 2014. – PP. V01BT27A041. – 8 p.

**6.** *Alan Turnbull* Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth / *Alan Turnbull* // Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. – London: The Royal Society, 2014. – PP. 20140254, 19 p.

7. Adhhikari Sukanta Turbo-Generator Foundation / Adhhikari Sukanta // Structural Engineering Forum of India. – New Delhi: SEFI, 2010. – P.1-19.

**8.** Chowdhury Indrajit Dynamics of Structure and foundation a unified approach / Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu. – Leiden: CRC Press, 2009. – 616 p.

**9.** *Gu Ping* New dynamic participation factor for turbine generator foundation / *Gu Ping //* Practice Periodical on Structural Design and Construction. – VA.:American Society of Civil Engineers,  $2009. - N \ge 15(1). - P. 54-62.$ 

**10.** Жовдак В.О. Решение задачи статистической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров / В.О. Жовдак, С.В. Красников, О.С. Степченко // Проблемы машиностроения. – Х.: Контраст, 2004. – Т. 7, № 3. – С. 39-47.

11. Красніков С.В. Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегату та аналіз його вібраційних характеристик / С.В. Красніков, О.С. Степченко, А.В. Торянік // Машинознавство. – Львів: Кінпатрі, 2009. – № 2. – С. 27-33.

#### **Bibliography (transliterated):**

**1.** Runov B.T. Issledovanie i ustranenie vibracii parovyh turboagregatov. Moscow: Energoizdat, 1982. 352 p.

**2.** Shul'zhenko N.G., Vorob'ev Yu.S. Chislennyj analiz kolebanij sistem turboagregat-fundament. Kyyiv: Naukova dumka, 1991. 232 p.

**3.** HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan, 2009. 104 p.

**4.** Eremenko S.Yu. Metody konechnyh elementov v mehanike deformiruemyh tel. Kharkiv: Osnova, 1991. 271 p.

**5.** Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He and Lei Xiao. A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction. ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. Vol. 1B. Düsseldorf: International Gas Turbine Institute, 2014. PP. V01BT27A041, 8 p.

**6.** Alan Turnbull. Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. London: The Royal Society, 2014. PP. 20140254, 19 p.

7. Adhhikari Sukanta. Turbo-Generator Foundation. Structural Engineering Forum of India. New Delhi: SEFI, 2010. P. 1-19.

**8.** Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press, 2009. 616 p.

**9.** Gu Ping New dynamic participation factor for turbine generator foundation Practice Periodical on Structural Design and Construction. VA.: American Society of Civil Engineers, 2009. No 15(1). P. 54–62.

**10.** Zhovdak V.O., Krasnikov S.V., Stepchenko O.S. Reshenie zadachi statisticheskoj dinamiki mashinostroitel'nyh konstrukcij s uchetom sluchajnogo izmeneniya parametrov. Problemy mashinostroeniya. Kharkiv: Kontrast, 2004. Vol. 7, No 3. P. 39-47.

**11.** Krasnikov S.V., Stepchenko O.S., Toryanik A.V. Komp'yuterne modelyuvannya bahatokorpusnoho turboahrehatu ta analiz joho vibracijnykh kharakterystyk./ Mashynoznavstvo. L'viv: Kinpatri, 2009. No 2. P. 27-33.

Поступила (received) 20.09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання та аналіз вібраційних характеристик корпуса парової турбіни великої потужності / С.В. Красніков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 23-26. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

Моделирование и анализ вибрационных характеристик корпуса паровой турбины большой мощности / С.В. Красников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 23-26. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

Modeling and analysis of vibration characteristics of high power steam turbine case / S.V. Krasnikov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 23-26. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Красніков Сергій Васильович*, кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, тел. (+038057) 707-37-30, e-mail: vsevakr@yandex.ru.

*Красников Сергей Васильевич*, кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильнодорожный университет, тел. (+038057) 707-37-30, e-mail: vsevakr@yandex.ru.

*Krasnikov Sergij Vasyl'ovych*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, tel.: (+038057) 707-37-30, e-mail: vsevakr@yandex.ru.

УДК 622.233.6

#### DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115764

# Д. И. КУЗЬМЕНКО

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В БУРОВОМ ДОЛОТЕ-РАСШИРИТЕЛЕ ДЛЯ БУРЕНИЯ КОМПЕНСАЦИОННЫХ СКВАЖИН

Розглядається динамічні процеси в буровому інструменті. Приведена методика проектування бурових долітрозширювачів для буріння компенсаційних свердловин. У методиці розглянуто вплив осьового навантаження на індентор бурового інструменту. Приведені результати промислових випробувань доліт-розширювачів для буріння компенсаційних свердловин по породах V - XII категорії буримості. Приведена методика розрахунку очікуваного економічного річного ефекту від використання розроблених доліт-розширювачів.

Ключові слова: долото-розширювачі, категорія буримості, коефіцієнт використання шпуру, ударна хвиля.

Рассматривается динамические процессы в буровом инструменте. Приведена методика проектирования буровых долот-расширителей для бурения компенсационных скважин. В методике рассмотрено влияние осевой нагрузки на индентор бурового инструмента. Приведены результаты промышленных испытаний долот-расширителей для бурения компенсационных скважин по породам V – XII категории буримости. Приведена методика расчета ожидаемого экономического годового эффекта от использования разработанных долот-расширителей.

Ключевые слова: долото-расширители, категория буримости, коэффициент использования шпура, ударная волна.

Examined dynamic processes in a boring instrument. The brought design technique over of borings chisels-dilators for the boring drilling of compensative mining holes. In methods расмотрено influence of axleloading is on the indenter of boring instrument. The brought results over of industrial tests of chisels-dilators for the boring drilling of compensative mining holes on the breeds of V - XII of category of drillability. The brought methods over of calculation of expected экономічного of annual effect from the use of the worked out chisels-dilators.

The industrial testing results in determining the following:

- the mechanical drilling rate of the developed rimming bit KRSH-4-65 is 1.9 times higher than that of the rimming bit KRR-65; the wear is 1.75 times lower, the energy losses of the shock pulse are 2.3 times lower as compared with the commercial rimming bit KRR-65;

- the mechanical drilling rate of the developed rimming bit KRSH-12-90 is 1.3 times higher than that of the rimming bit MP-45; the wear is 1.2 times lower, the energy losses of the shock pulse are 1.9 times lower as compared with the commercial rimming bit MP-45;

- in 11 m<sup>2</sup> cross-section drifting with a drilling rig along the rocks of the X – XII drillability index it is advisable to apply one compensation Ø90 mm borehole drilled in one stage that ensures the increase of the borehole application coefficient from 0.92 to 1.0–1.025;

- in 11 m<sup>2</sup> cross-section drifting with hammer hand drills along the rocks of the X – XII drillability index it is advisable to apply two compensation Ø65mm boreholes drilled in two stages ensuring the increase of the borehole application coefficient from 0.91 to 0.92–0.94;

- in 5.7m<sup>2</sup> cross-section drifting with hammer hand drills along the rocks of the X – XII drillability index it is advisable to apply one compensation Ø65mm borehole drilled in two stages ensuring the increase of the borehole application coefficient from 0.9 to 0.93;

- in 5.7 m<sup>2</sup> cross-section drifting with hammer hand drills along the rocks of the V –IX drillability index it is advisable to apply one compensation Ø65mm borehole drilled in one stage ensuring the increase of the borehole application coefficient from 0.9 to 1.0;

- in 16 m<sup>2</sup> cross-section drifting with a self-propelled drifting drilling machine Boomer S1 D-DH along the rocks of the X –XII drillability index it is advisable to apply one compensative Ø90mm borehole drilled in two stages ensuring the increase of the borehole application coefficient from 0.92 to 0.95.

Keywords: rimming bit, category of drillability, coefficient of the use of шпуру, shock wave.

**Введение.** Наиболее распространенным и эффективным способом разрушения горных пород средней и высокой крепости являются буровзрывные работы [1-3].

Применение высокоэффективного бурового инструмента на горнорудных предприятиях является важным условием снижения себестоимости и повышения продуктивности добычи полезных ископаемых [1].

Одним из перспективных путей увеличения производительности буровзрывных работ является повышение технико-экономических показателей бурового инструмента.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является исследование динамических процессов в буровом инструменте и разработка высокоэффективных долот-расширителей для бурения компенсационных скважин диаметром 65 – 90 мм.

**Изложение материала и результаты**. Совершенствование бурового инструмента для бурения компенсационных скважин требует решения следующих задач:

 обеспечение наилучшей передачи энергии бойка от поршня-ударника к породоразрушающим элементам бурового долота-расширителя с минимальными потерями энергии;

2) обеспечение наилучшего преобразования энергии волны деформации, проходящей через буровую штангу, для разрушения горной породы за счет рациональной формы корпуса долота-расширитлея;

3) обеспечение высокой работоспособности породоразрушающих элементов долота-расширителя.

Известна коронка-расширитель (рис.1) предназначена для расширения ранее пробуренных шпуров с целью превращения их в компенсационные скважины.



Рисунок 1 – Общий вид коронки КРР-65

Однако к недостаткам данного инструмента для бурения компенсационных скважин следует отнести низкую эффективность передачи ударных импульсов от буровой штанги, по которой наносит удары поршень – ударник перфоратора. Ударные импульсы трансформируются в волну напряжения, которая пройдя буровую штангу через конусное сопряжение штанга-коронка, передается на корпус КРР-65 и далее на ее расширяющую часть. На этом участке происходят основные потери энергии ударных импульсов изза формы корпуса долота-расширителя на ее расширяющую часть (рис. 2), так что на породоразрушающих лезвиях напряжение меньше 50 МПа, а также лезвийной формы ее продоразрушающих элементов и нерациональной треугольной формой пазов для выноса шлама. Такая форма пазов не только не обеспечивает необходимую очистку забоя от шлама, увеличивая износ всех элементов долота-расширителя, но и снижает передачу энергии ударов поршня перфоратора на лезвия коронки. Кроме того направляющий стержень вследствие того, что он не прижат к забою, а находится в уже пробуренном шпуре под действием ударных волн, проходящих через долото-расширитель, часто отсоединяется от него и остается в расширенной скважине. Это происходит потому, что волна напряжения, проходящая через корпус расширяющей части коронки, на несколько микрон увеличивает его в размере и, соответственно, увеличивает диаметр внутреннего конуса в нем. Поэтому натяг конусного сопряжения постепенно ослабляется и направляющий стержень отсоединяется от корпуса в среднем 1 раз после расширения 2-х шпуров. Для его извлечения непроизводительно тратится время, снижая эффективность процесса расширения шпуров.





Для разработки рациональной конструкции бурового инструмента для формирования компенсационных скважин необходимо учитывать нагрузку на породоразрушающих элементах инструмента, которая может зависит от геометрии бурового инструмента.

В первую очередь определяем необходимую, для разрушения породы, нагрузку на индентор долотарасширителя.

расширителя.  $P_R = k_R + k_{1R} \times R + k_{2R} \times R^2 + k_{3R} \times R^3 + k_{4R} \times R^4 + k_{5R} \times R^5 + k_{6R} \times R^6$ , (1) где:  $k_R = -244,09$ ;  $k_{1R} = -7,2$ ;  $k_{2R} = 0,0076$ ;  $k_{3R} = 0,00019$ ;  $k_{4R} = 2,37\cdot10^{-7}$ ;  $k_{5R} = 2,38\cdot10^{-9}$ ;  $k_{6R} = -2,047\cdot10^{-11}$  – безразмерные расчетные эмпирические коэффициенты; R – радиус корпуса долота-расширителя, мм.



Рисунок 3 – Зависимость осевой нагрузки *P<sub>R</sub>* на инденторах долота-расширителя от радиуса *R* боковой поверхности

Из рис. 3 видно, что оптимальная нагрузка на мм долота находится в пределах от 53 до 55 H/мм<sup>2</sup> при радиусе корпуса долота-расширителя от 215 до 220 мм.

Вторым параметром, влияющим на нагрузку на инденторе, является длина *L*, мм, боковой поверхности расширяющей части долота-расширителя, которая определяется

$$P_{L} = k_{L} + k_{1L} \times L + k_{2L} \times L^{2} + k_{3L} \times L^{3} + k_{3L} \times L^{4} + k_{3L} \times L^{5} + k_{3L} \times L^{6}$$

 $+k_{4L} \times L^4 + k_{5L} \times L^5 + k_{6L} \times L^6$ , (2) где:  $k_D = 657,57$ ;  $k_1 = -9,87$ ;  $k_2 = -0,07$ ;  $k_3 = 0,0008$ ;  $k_4 = 9,35 \cdot 10^{-6}$ ;  $k_5 = 1,47 \cdot 10^{-8}$ ;  $k_6 = -7,82 \cdot 10^{-10}$  – безразмерные расчетные эмпирические коэффициенты; L – длина боковой поверхности расширяющей части долота-расширителя, мм.

Из рис. 4.2 видно, что оптимальная нагрузка на мм долота находится в пределах от 53 до 55 H/мм<sup>2</sup> при длине корпуса долота-расширителя от 92 до 97 мм.

Следующим этапом является определение оптимальной длины направляющего устройства (центратора) *l*, мм, которая определяется эмпирической формулой

 $P_{ll} = k_{ll} + k_{1ll} \times l + k_{2ll} \times l^2 + k_{3ll} \times l^3 - k_{4ll} \times l^4$ . (3) где:  $k_{ll} = 11.9$ ;  $k_{1ll} = 2,53$ ;  $k_{2ll} = 0,01$ ;  $k_{3ll} = 0,01$ ;  $k_{4ll} = -0,001$  – безразмерные расчетные эмпирические коэффициенты; l – длина направляющего устройства, мм.

На рис. 5 показана зависимость рациональной длины направляющего устройства l при которой осевая нагрузка на инденторе составляет  $P_{II} \approx 55 \text{ H/мм}^2$ .

Диаметр направляющего устройства определяется диаметром опережающего шпура.



Рисунок 4 – Зависимость осевой нагрузки Р<sub>1</sub> на инденторах долота-расширителя от длины L боковой поверхности



Рисунок 5 – Зависимость осевой нагрузки  $P_L$  на инденторах долота-расширителя от длины центратора *l* 

В результате исследований были разработаны опытные образцы долот-расширителей (рис. 6).



Рисунок 6 - Долота-расширители представлены на испытаниях для бурения компенсационных скважин: а – разработанное долото-расширитель КРШ-4 Ø 65; б – разработанное долото-расширитель КРШ-12 Ø 90

Опытные образцы разработанных лолотрасширителей были изготовлены и испытаны в промышленных условиях шахты имени Ленина ПАТ «Криворожский железорудный комбинат» г. Кривой Рог. Результаты опытно-промышленных исследований долот-расширителей подтверждены актами испытаний. Результаты исследований приведены на рис. 7.



исследований

В результате исследований установлено, что:

1. Механическая скорость бурения разработанного долота-расширителя КРШ-4-65 в 1,9 раз выше, чем у серийно выпускаемого долота-расширителя КРР-65;

2. Износ разработанного долота-расширителя КРШ-4-65 снижен в 1,75 раз по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем КРР-65;

3. Потери энергии ударного импульса разработанного долота-расширителя КРШ-4-65 уменьшены в 2,3 раза по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем КРР-65;

4. Механическая скорость бурения разработанного долота-расширителя КРШ-12-90 в 1,3 раз выше, чем у серийно выпускаемого долота-расширителя МР-45:

5. Износ разработанного долота-расширителя КРШ-12-90 снижен в 1,2 раза по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем MP-45;

6. Потери энергии ударного импульса разработанного долота-расширителя КРШ-12-90 уменьшены в 1,9 раза по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем КРР-65.

Для определения технико-экономических показателей разработанных долот-расширителей были проведены исследования на 6-ти участках. Исследования были направлены на оценку эффективности применения компенсационных скважин, а также разработку рационального паспорта буровзрывных работ.

Результаты испытаний представлены в табл. 1.

Из данных табл. 1 видно, что использование компенсационных скважин и разработанных экспериментальных долот-расширителей позволило получить улучшенные технико-экономические показатели проходки по сравнению со стандартным вариантом. Коэффициент использования шпура (КИШ) увеличен с 0,9 до 1,0, а уходка забоя после взрыва с 1,85 м до 2,0 - 2,05 м. При этом количество шпуров в забое, подлежащих заряжанию, по экспериментальному паспорту уменьшено по сравнению со стандартным вариантом.

Расчет ожидаемого годового экономического эффекта от внедрения разработанных буровых долотрасширителей выполнены согласно [5].

Экономический эффект определяется как разница затрат на материалы и заработную плату на 1 цикл проходки забоя до и после внедрения по формуле:

где  $C_1$ ,  $C_2$  – текущие затраты на проходку одного метра штрека базовым методом и методом предлагаемым внедряемым мероприятием;  $E_n$  – коэффициент экономической эффективности;  $K_1$ ,  $K_2$  – удельные дополнительные капитальные затраты, грн; определяемый как  $K_1, K_2 = C_{\kappa o p} \times K_{\kappa o p}$ ;  $C_{\kappa o p}$  – стоимость долота, грн;  $K_{\kappa o p}$  – количество долот расходуемых при бурении одного забоя.

|               | Коефія                            | цієнт в                          | икорис                           | гання і                          | шпуру (                          | Уходка забою, м                 |                                   |                                  |                                  |                                  |                                  |                                 |
|---------------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| №<br>Варіанту | Уч. №1 (1 комп<br>сверд. Ø 90 мм) | Уч. №2 (2 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №3 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №4 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №5 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №1 (1 комп<br>скважØ 90 мм) | Уч. №1 (1 комп<br>сверд. Ø 90 мм) | Уч. №2 (2 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №3 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №4 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №5 (1 комп<br>смерд Ø 65 мм) | Уч. №1 (1 комп<br>скваж⊘ 90 мм) |
| Стандарт.     | 0,92                              | 0,91                             | 0,9                              | 0,9                              | 0,9                              | 0,92                            | 1,85                              | 1,46                             | 1,2                              | 1,2                              | 1,2                              | 2,78                            |
| Bap. 1        | 0,89                              | 0,89                             | 0,92                             | 0,92                             | 0,91                             | 0,91                            | 1,96                              | 1,44                             | 1,48                             | 1,48                             | 1,47                             | 2,74                            |
| Bap. 2        | 1,0                               | 0,94                             | 1                                | 0,93                             | 0,92                             | 0,95                            | 2,0                               | 1,5                              | 1,6                              | 1,5                              | 1,45                             | 2,84                            |
| Bap. 3        | 0,86                              | 0,92                             | 0,93                             | 0,91                             | 0,93                             | 0,93                            | 1,9                               | 1,47                             | 1,5                              | 1,45                             | 1,5                              | 2,8                             |
| Bap. 4        | 0,9                               | 0,96                             | -                                | -                                | -                                | 0,93                            | 1,97                              | 1,55                             | -                                | -                                | -                                | 2,8                             |
| Bap. 5        | 1,025                             | -                                | -                                | -                                | -                                | -                               | 2,05                              | -                                | -                                | -                                | -                                | -                               |

Таблица 1 – Результаты эффективности применения компенсационных скважин

| Таблица 2 – | Эжидаемый годовой экономический эффект от внедрения |
|-------------|---|
|             | азработанных буровых долот-расширителей             |

|          | pasp  | OTOFW                             | a puer                           | шири                             | lesten                           | Виелг                            | лемаа т                          | ехноло                           | סגווס                            |                                  |                                  |                                  |                                  |
|----------|---|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| №<br>п/п | Показатель  | Уч. №1 (1 комп скваж. Ø 90<br>мм) | Уч. №2 (2 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №3 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №4 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №5 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №1 (1 комп скваж Ø 90<br>мм) | Уч. №1 (1 комп скваж Ø 90<br>мм) | Уч. №2 (2 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №3 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №4 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №5 (1 комп скваж Ø 65<br>мм) | Уч. №1 (1 комп скваж Ø 90<br>мм) |
| 1        | Текущие затраты на<br>проходку одного метра<br>штрека, грн./м | 2085,13                           | 2812,56                          | 2539,79                          | 1081,79                          | 1220,35                          | 192,46                           | 1550,79                          | 2541,78                          | 2485,8                           | 900,25                           | 1016,39                          | 140,98                           |
| 2        | Общие затраты на проходку<br>одного метра штрека              | 3568,18                           | 3736,78                          | 3740,2                           | 1265,7                           | 1427,82                          | 417,15                           | 3258,6                           | 3583,92                          | 3460,34                          | 1440,4                           | 1512,4                           | 364,5                            |
| 3        | Среднее количество метров проходки, м                         | 208                               | 377                              | 377                              | 735                              | 628                              | 585,6                            | 208                              | 377                              | 377                              | 735                              | 628                              | 585,6                            |
| 4        | Ожидаемый<br>годовой экономический<br>эффект, грн./год        | 120434, 4                         | 80465,34                         | 160723, 45                       | 126354,76                        | 123685, 34                       | 72176,87                         | 137488, 7                        | 104628,8                         | 172190,98                        | 138393,15                        | 131880                           | 87919                            |

В затраты на проходку 1 м горизонтальной подэтажной выработки предлагаемым методом статьи затрат (основных фондов) амортизация и содержание, эксплуатация и текущий ремонт не включаем, так как они в обоих случаях одинаковые.

Так как расчет затрат производим на 1 м проходки горизонтальной подэтажной выработки, рассчитаем текущие затраты на 1 м проходки с учетом КИШ.

Экономический эффект на 1 цикл проходки забоя до и после внедрения:

$$C_1 = \frac{3_1}{L_1 \times \eta_1}$$
 грн/м – базовый метод;  
 $C_2 = \frac{3_2}{L_2 \times \eta_2}$  грн/м – внедряемый метод,

где 3<sub>1</sub>, 3<sub>2</sub> – соответственно общие затраты на проходку одного метра штрека базовым методом и методом

предлагаемым внедряемым мероприятием;  $L_1$ ,  $L_2$  – глубина шпуров;  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  – соответственно коэффициент использования шпура (КИШ) по базовом и внедряемом методах.

Расчет ожидаемого годового экономического эффект от внедрения новой техники определяется по формуле:

$$\mathcal{P}_{\Gamma.\kappa p.nop.} = \left[ (C_1 + E_{\scriptscriptstyle H} K_1) - (C_2 + E_{\scriptscriptstyle H} K_2) \right] \times \mathcal{Q},$$

где *Q* – среднее количество метров проходки.

Результаты расчета ожидаемого годового экономического эффекта от внедрения разработанных буровых долот-расширителей выполнены согласно [5] и представлены в табл. 2.

#### Выводы

1. Разработаны высокоэффективные буровые долота-расширители для формирования компенсационных скважин;

2. В результате опытно-промышленных исследований установлено:

– механическая скорость бурения разработанного долота-расширителя КРШ-4-65 в 1,9 раз выше по сравнению с долотом-расширителем КРР-65; износ снижен в 1,75 раз, а потери энергии ударного импульса уменьшены в 2,3 раза по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем КРР-65;

– механическая скорость бурения разработанного долота-расширителя КРШ-12-90 в 1,3 раз выше, по сравнению с долотом-расширителем МР-45; износ снижен в 1,2 раза, а потери энергии ударного импульса уменьшены в 1,9 раза по сравнению с серийно выпускаемым долотом-расширителем МР-45;

– при проходке горизонтальных выработок сечением 11 м<sup>2</sup> буровой кареткой по породам X – XII категории буримости целесообразно применять одну компенсационную скважину Ø90 мм бурением в одну стадию, при этом обеспечивается увеличение коэффициента использования шпура с 0,92 до 1,0–1,025;

– при проходке горизонтальных выработок сечением 11 м<sup>2</sup> ручными перфораторами по породам X – XII категории буримости целесообразно применять две компенсационные скважины Ø65 мм бурением в две стадии, при этом обеспечивается увеличение коэффициента использования шпура с 0,91 до 0,92–0,94;

– при проходке горизонтальных выработок сечением 5,7 м<sup>2</sup> ручными перфораторами по породам X – XII категории буримости целесообразно применять одну компенсационную скважину Ø65 мм бурением в две стадии, при этом обеспечивается увеличение коэффициента использования шпура с 0,9 до 0,93;

– при проходке горизонтальных выработок сечением 5,7 м<sup>2</sup> ручными перфораторами по породам V – IX категории буримости целесообразно применять одну компенсационную скважину Ø65 мм бурением в одну стадию, при этом обеспечивается увеличение коэффициента использования шпура с 0,9 до 1,0;

– при проходке горизонтальных выработок сечением 16 м<sup>2</sup> самоходной проходческой буровой установкой Воотег S1 D-DH по породам X – XII категории буримости целесообразно применять 1-ну компенсационную скважину Ø90 мм бурением в две ста-

дии, при этом обеспечивается увеличение коэффициента использования шпура с 0,92 до 0,95;

 в результате исследований оптимального расстояния между компенсационными скважинами и врубовыми шпурами установлено, что оптимальным вариантом является расстояние 250 мм;

 суммарный экономический эффект от внедрения результатов исследований по диссертационной работе составляет 772500,6 грн./год.

## Список литературы:

**1.** Каварма И.И. Новый штыревой породоразрушающий инструмент для бурения скважин на шахтах Кривбасса / И.И.Каварма, А.А.Хруцкий // Разработка рудных месторождений. – Кривой Рог: КТУ. – 2002. – Вып. 78.

**2.** *Чувилин А.М.* Применение коронок – расширителей для бурения компенсационных скважин на проходческих работах / А.М. Чувилин, Г.Т. Ермаов, Н.П. Соколов и др. // Минцветмет СССР, ЦНИИ экономики и информации цветной металлургии. Обзорная информация. – М.: 1988. – Выпуск 6. – 39 с.

**3.** Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – М.: Регулярная и хаотическая механика. – 2000. – 560 с.

4. Методика (основные положения) определения экономической эффективности использования в народном хозяйстве новой техники, рацпредложений, изобретений. – М.: Наука, 1977. – 285 с.

#### **References (transliterated):**

1. Kavarma Y.Y., Khrutskyy A.A. Noviy shtirevoy porodorazrushayushchyy ynstrument dlya burenyya skvazhyn na shakhtakh Kryvbassa. Razrabotka rudnukh mestorozhdenyy. Kryvoy Roh. KTU. 2002. Vol. 78.

**2.** Chuvylyn A.M., Ermaov H.T., Sokolov N.P. i dr. Prymenenye koronok – rasshyryteley dlya burenyya kompensatsyonnыkh skvazhyn na prokhodcheskykh rabotakh, Myntsvetmet SSSR. TsNYY ekonomyky y ynformatsyy tsvetnoy metallurhyy. Obzornaya ynformatsyya. Moscow: 1988. Vol. 6. 39 p.

**3.** Rabynovych M.Y., Trubetskov D.Y. Vvedenye v teoryyu kolebanyy y voln. Moscow: Rehulyarnaya y khao-tycheskaya mekhanyka, 2000. 560 p.

**4.** Metodyka (osnovnye polozhenyya) opredelenyya ekonomycheskoy effektyvnosty yspol'zovanyya v narodnom khozyaystve novoy tekhnyky, ratspredlozhenyy, yzobretenyy. Moscow: Nauka. 1977. 285 p.

Поступила (received) 14.09.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Динамічні процеси в буровому долоті-розширювачі для буріння компенсаційних свердловин / Д. І. Кузьменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 27-31. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

Динамические процессы в буровом долоте-расширителе для бурения компенсационных скважин / Д. И. Кузьменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 27-31. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

Dynamic processes in rimming bit for drilling of compensative mining holes / D. I. Kuzmenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 27-31. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Кузьменко Дмитро Іванович* – асистент, Кафедра гірничих машин і обладнання, ДВНЗ «Криворізький національний університет», тел.: (068) 644-97-23, e-mail: 99people98@Gmail.com.

*Кузьменко Дмитрий Иванович* – ассистент, Кафедра горных машин и оборудования, ГВУЗ «Криворожский национальный университет», тел.: (068) 644-97-23, e-mail: 99people98@Gmail.com.

*Kuzmenko Dmytro Ivanovych* – Assistant, Mining machines and equipment department, SIHE «Kryvyi Rih National University», tel.: (068) 644-97-23, e-mail: 99people98@Gmail.com.

УДК 539.376

# В. Г. МАРТИНЕНКО, Г. І. ЛЬВОВ

# ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ В'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ОБОЛОНОК

Представлено аналіз існуючих методів розв'язання контактних задач анізотропних в'язкопружних композиційних оболонок. Описана історія застосування та розвитку композиційних матеріалів. Встановлено, що на даний момент розроблені моделі в'язкопружної поведінки полімерних матеріалів та їхніх композитів, а також методи моделювання температурних залежностей їхніх механічних властивостей. Розглянуті методики дозволяють розв'язувати задачі механіки пружних тонких та товстих ізотропних та анізотропних оболонок, контактні задачі теорії пружних ортотропних оболонок, плоскі контактні задачі теорії в'язкопружності.

Ключові слова: в'язкопружність, ортотропія, ядро релаксації, ряди Проні, зсувна функція, контактна задача.

Представлен анализ существующих методов решения контактных задач анизотропных вязкоупругих композиционных оболочек. Описана история применения и развития композиционных материалов. Установлено, что на данный момент разработаны модели вязкоупругого поведения полимерных материалов и их композитов, а также методы моделирования температурных зависимостей их механических свойств. Рассмотренные методики позволяют решать задачи механики упругих тонких и толстых изотропных и анизотропных оболочек, контактные задачи теории упругих ортотропных оболочек, плоские контактные задачи теории вязкоупруготи.

Ключевые слова: вязкоупругость, ортотропия, ядро релаксации, ряды Прони, сдвиговая функция, контактная задача.

The paper presents an analysis of the existing methods for solving the contact problems of viscoelastic composite shells. The described history of using and development of composite materials shows that they have been finding a wide application. It is found, that the developed models of viscoelastic behavior of polymeric materials and their composites as well as methods of modelling of its temperature dependencies reflect the real properties with a sufficient accuracy. The considered techniques allow solving the structural problems of elastic thin and thick isotropic and anisotropic shells, the contact problems of elastic orthotropic shells, as well as the plane contact problems of the viscoelasticity theory. At the same time it is investigated that there are no any complex approaches for solving the contact problems of viscoelastic orthotropic shells at present.

Keywords: viscoelasticity, orthotropy, relaxation kernel, Prony series, shift function, contact problem.

Вступ. Композиційні матеріали (КМ) – це матеріали, що складаються з двох або більше компонентів та мають специфічні властивості, які є відмінними від властивостей компонентів, з яких вони складаються [1]. Композиційні матеріали не існують в природі та набули великого поширення завдяки їх перевагам порівняно з природними матеріалами, а саме низьким масовим характеристикам при збереженні міцносних [2].

Композиційні матеріали в сучасному розумінні з'явились у першій половині 20-го сторіччя [3]. На початку сторіччя розробили вініл, полістирол, фенол та поліестр, які прийшли на заміну природним смолам та за механічними властивостям перевершували матеріали, що використовувались раніше. Однак й пластмаси не давали необхідної міцності.

Дослідник Геймс Слейтер, що працював в Owens-Illinois, розробив метод для отримання тонких скляних ниток та запатентував його у 1933 році [4, 5]. Ці скляні нитки були використані у 1935 році фірмою Owens/Corning [6], яка для покращення механічних властивостей пластмас розробила скловолокно, що й дало поштовх для заснування та розвитку армованої полімерної промисловості [7].

З цього моменту починається ера композиційних матеріалів у їхньому сучасному розумінні [4]. Цю еру можна умовно поділити на чотири етапи [8]:

1. Етап композитів зі скляними волокнами (1940ві роки).

2. Етап високопродуктивних композитів в пост-

супутниковій ері (1960-ті роки).

3. Етап пошуку нових ринків та синергія властивостей (1970-ті та 1980-ті роки).

4. Етап гібридних матеріалів, нанокомпозитів та біонаслідуваних стратегій (1990-ті роки).

У 1940-ві роки розробка та поширення композиту зі скляними волокнами та епоксидною матрицею (склопластику) призвела до початку їхнього використання у воєнному корабле- та авіабудуванні. Наприкінці десятиріччя армований скляними волокнами пластик (Glass Fiber Reinforced Plastic – GFRP) став першим комерційним композиційним матеріалом, що до сьогодні займає 90 % на світовому ринку композитів [8] через відносну дешевизну виготовлення та сукупність властивостей.

Під час Другої світової війни склопластик був застосований для побудови радіопроникних обтікачів радіомодулів (рис. 1). Також німецькі інженери активно намагались застосувати його для побудови надлегких воєнних літаків.

У 1950-ті роки склопластик став використовуватись у автомобілебудуванні. Також у Франції з'явилися лопаті гелікоптера Allouette II, що були виконані з цього матеріалу.

Розпочата наприкінці 1950-х років космічна гонка дала новий поштовх до розвитку композиційних матеріалів. Ідея використання композитів для космічної промисловості змусила науковців шукати нові матеріали для волокон. У 1960-ті роки у Японії була розроблена технологія отримання вуглецевих волокон.

© В. Г. Мартиненко, Г. І. Львов, 2017

Наприкінці десятиріччя світ побачили композити на основі борових волокон, що знайшло своє використання у воєнній промисловості.



Рисунок 1 – Радіопроникний обтікач радіомодулю зі склопластику

Потреба в отриманні надміцних та ідеально гладких обтікачів для міжконтинентальних балістичних ракет та ракет-носіїв стимулювала створення шаруватих металевих композитів [9].

На початку 1970-х років американська хімічна компанія DuPont [10] представила новий композиційний матеріал кевлар на основі арамідних волокон. Кевлар й досі широко використовується завдяки своїм міцнісним властивостям, що є у 5 разів вищими за сталеві.

Вуглепластик став поширений при виробленні спортивного устаткування, зокрема ракеток для великого тенісу та ключок для гольфу. Недивлячись на високу вартість таких речей, видатні спортсмени та багаті аматори залюбки їх купляли.

Наступний поштовх для винайдення нових композиційних матеріалів знову дала космічна промисловість. Розробка корпусів одно- та багаторазових космічних апаратів, а також космічних станцій потребувало матеріалу, що мав би усі властивості металу, окрім коефіцієнту лінійного теплового поширення, який в умовах великого перепаду температур повинен був бути значно нижчим. Це було досягнуто завдяки армуванню металевої матриці керамічними волокнами SiC. Також використовувались волокна оксиду алюмінію Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Окрім того матеріал Duralcan (алюмінієва матриця із 10 % оксиду алюмінію) застосовувався при створенні дуже дорогих гірничих велосипедів та мотоциклів [8].

На початку 1980-х років вчені та інженери почали активно користуватися ефектом синергії у композиційних матеріалах – їхні корисні властивості перевершили суму корисних властивостей складників.

У 1990-х роках з'явилися ідеї поєднання двох або більше матеріалів на мікро- та нанорівнях. Вчені помітили, що природні матеріали, такі як деревина або кістки, також є композиційними матеріалами при мікроскопічному розгляді. Основною тенденцією стало поєднання складних біомолекул із неорганічними молекулами. Ця технологія придбала назву біонаслідування. Почався активний розвиток нанокомпозитів, але при їхньому розрахунку вже неможливо використовувати механічні аналогії з макрокомпозитами, тому що у цьому масштабі великий вплив мають вже квантові ефекти.



Рисунок 2 – Турбореактивний двигун GEnx, що включає в свою конструкцію вуглепластикові елементи

На теперішній момент армовані композиційні матеріали, зокрема склопластик та вуглепластик, залишаються найбільш застосовуваними серед всіх типів КМ. Наприклад, сучасні авіалайнери, такі як Воеіпд 787 та Airbus A380, несуть в своїй конструкцій багато вуглепластикових деталей [4]. Компанія General Electric продовжує розробку та виробництво турбореактивних двигунів GE90 та GEnx [11]. Зокрема,

двигун GEnx (рис. 2) – General Electric Next Generation – складається з наступних композитних деталей: лопатки вентиляторної ступені, корпус вентиляторної ступені, кріплення лопаток вентиляторної ступені, бандажовані лопатки спрямляючого апарату, акустичні панелі, повітропроводи. Використання карбонового композиту дає значне зниження ваги, затрат енергії, шуму, коштів на ремонт та підвищення надійності.

Склопластикові лопаті вітрогенераторів виробляють 20 ГВт корисної енергії по всьому світу [4, 12]. Зростання довжини лопаток таких вітрогенераторів і, як результат, їхньої продуктивності було б неможливим, якщо вони би, як і раніше, виготовлялись з металів, а не зі склопластику.

КМ використовуються і в кораблебудуванні. Перш за все, сучасні яхти частково або повністю складаються зі склопластику. Наприклад, щогли надшвидкої яхти Maltese Falcon є повністю композитними та несуть окремо більше навантаження, ніж крило літака Boeing 747 або Airbus A380.

Отже, полімерні армовані композиційні матеріали (ПАКМ) є дуже поширеними у сучасних конструкціях машин, що витримують великі робочі навантаження. В процесі їхньої роботи композиційні елементи, що найчастіше представляють з себе тонкі оболонки, вступають у контакт із іншими елементами – як композиційними, так і металевими [2]. Механічна поведінка ПАКМ є складною: через полімерну природу матриці вони проявляють пружні та в'язкопружні властивості із складною температурною залежністю, а через встановлені напрямки армування волокнами ці властивості є ортотропними або анізотропними [1].

Отже, розробка методів розв'язання контактних задач температурно залежної в'язкопружності тонких ортотропних оболонок є актуальною на даний момент задачею.

**1. Характерні механічні властивості КМ.** Як вже було відмічено раніше, ПАКМ проявляють ортотропні та температурно залежні пружні та в'язкопружні властивості [13].

Полімерна структура матриці ПАКМ складається з довгих та складних молекул (рис. 3, *a*).

Ці молекули мають тенденцію змінювати свою просторову форму під дією постійного навантаження. Механізм в'язкопружної поведінки полімерів обумовлений саме такою зміною у їхній молекулярній структурі. Оскільки полімерні молекули мають тенденцію повністю або частково відновлювати свою початкову структуру, в'язкопружність є повністю або частково зворотнім процесом - при знятті навантаження форма тіла відновляється. У цьому є принципова відмінність явища в'язкопружності від явища повзучості, при якому відбувається перенос порожнин, зерен та включень в матеріалі з плином часу, що обумовлює відсутність зворотних деформацій при знятті навантаження на тіло. Окрім того, в'язкопружна деформація також суттєво відмінна від пружної деформації, яка обумовлена зміною відстаней між молекулами через прикладення сил до них [14]. Таким чином, в'язкопружність є унікальним явищем, яке потребує створення адекватних математичних моделей для його опису.



Рисунок 3 – Структура композиційного матеріалу: *a* – будова полімерної молекули (*1* – полімерна макромолекула з лінійною структурою; *2* – полімерна макромолекула з розгалуженою структурою); *б* – схеми армування ПАКМ (*1* – прямокутна структура, *2* – гексагональна структура, *3* – косокутна структура, *4* – з викривленою структурою, *5* – система з п'яти ниток)

Існує багато схем та технологій армування полімерної матриці скляними або вуглецевими волокнами (див. рис. 3,  $\delta$ ). Скляні волокна проявляють ізотропні пружні властивості, а вуглецеві волокна – трансверсально ізотропні властивості через плетену структуру волокна. В залежності від схеми армування КМ проявляє трансверсально ізотропні, ортотропні або анізотропні властивості. Отже, властивості композитів потребують поглибленого дослідження.

Механічні властивості полімерів та їхніх композитів та особливості їхнього застосування детально описані та досліджені в роботах [2], [13-19].

**2. Методи дослідження механічних властивостей КМ.** Оскільки КМ має складну неоднорідну структуру, існує два підходи до визначення його механічних властивостей: структурний та феноменологічний (рис. 4, *a*-*б*).

Феноменологічний підхід заснований на проведенні натурного експерименту над зразками, що виконані з досліджуваного КМ (див. рис. 4, *a*). При цьому матеріал розглядається як гомогенний, а його складною мікроструктурою нехтують у порівнянні з макроскопічними розмірами зразків.

Наприклад, ортотропні пружні властивості та миттєва міцність ПАКМ різних типів детально досліджувалися в роботах [20-26]. Ізотропні та ортотропні в'язкопружні квазістатичні властивості КМ за допомогою експериментальних методів досліджень були знайдені в роботах [27-36], а аналогічні динамічні властивості КМ різних типів розглядались в статтях [37-49].

Структурний підхід до дослідження механічних властивостей КМ передбачає розгляд його мікроструктури у вигляді представницького об'єму (рис. 4,  $\delta$ ) та їхнє знаходження за відомими властивостями матриці та волокон. Структурний підхід може базуватись на аналітичній моделі або використовувати чисельні методи. Наприклад, в роботах [50-54] для визначення пружності, в'язкопружності та повзучості КМ використовувались аналітичні чи чисельно-аналітичні моделі. У разі неможливості побудови аналітичного методу гомогенізації властивостей КМ можуть бути використані чисельні процедури, найбільш популярна з яких – це метод скінченних елементів (МСЕ). Так, в статтях [55-60] за його допомогою були визначені ізотропні та ортотропні температурно залежні механічні властивості КМ, зокрема пружні та в'язкопружні.





Наприклад, в [55] автори застосували нелінійнійну модель Шапері для отримання температурно залежних в'язкопружних властивостей шаруватого КМ та перевірили методику за допомогою скінченноелементного аналізу.

В роботі [57] автори отримали анізотропні частотно залежні в'язкопружні властивості односпрямованих КМ із випадковим розташуванням волокон за допомогою аналізу Монте Карло.

В статті [59] автори дослідили вплив підходів до конструювання представницького об'єму (ПО) односпрямованих КМ на точність отриманого за допомогою МСЕ ортотропного в'язкопружного відгуку. Була проаналізована залежність властивостей від кількості волокон у ПО та їхньої форми.

В роботі [60] на основі методу скінченних елементів був представлений підхід до гомогенізації температурно залежних ортотропних в'язкопружних властивостей двоспрямованого КМ за наявними трансверсально ізотропними пружними властивостями волокон та ізотропними в'язкопружними властивостями матриці, а також розроблена методика апроксимації отриманих властивостей за допомогою методу найменших квадратів рядами Проні для часових залежностей та температурною зсувною функцією Вільямса-Ландела-Феррі для температурних залежностей.

В [61] автори розробили локально точний метод

гомогенізації ортотропних в'язкопружних властивостей односпрямованих КМ тетрагональної та гексагональної структури для різних об'ємних концентрацій волокон та порівняли результати аналізу із аналогічними результатами, отриманими за скінченнооб'ємним методом, що показало адекватність запропонованої моделі. В той же час, розроблений підхід не може бути поширений на об'ємні схеми плетіння композитів, а температурна залежність механічних властивостей не враховується.

В [62] був реалізований підхід до отримання часово та частотно залежних ізотропних в'язкопружних властивостей трифазного КМ за допомогою модифікованої схеми Морі-Танака. Його результати порівняні із експериментальними даними та зроблено висновок про достатню точність моделі.

В статті [63] описаний скінченно-об'ємний метод гомогенізації ортотропних в'язкопружних властивостей композиційного матеріалу із епоксидною матрицею та сферичними включеннями за допомогою пружно-в'язкопружного принципу відповідності. При цьому, температурна залежність в'язкопружних властивостей не враховується.

В роботі [64] розглядається новий метод гомогенізації в'язкопластичних властивостей однонаправленого композиційного матеріалу в плоскій варіаційній постановці. Результати аналізу у порівняні з методом скінченних елементів демонструють велику точність методу. У той же час, запропонована методика не розповсюджена на об'ємні КМ із температурними залежностями в'язких властивостей.

**3.** Методи моделювання в'язкопружних властивостей матеріалу у одновимірному випадку. Явище в'язкопружності КМ та полімерів детально описано в роботах [17, 19, 65-76]. За минулі 50 років були розроблені та описані моделі, що на теперішньому етапі можуть адекватно відображати в'язкопружну поведінку матеріалу як на маленьких, так и на дуже великих проміжках часу.

Температурно залежна в'язкопружна поведінка матеріалу у одновимірному випадку виражається спадковим інтегралом Больцмана:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \xi, T) \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} d\xi , \qquad (1)$$

де t – змінна часу;  $\xi$  – час, що сплинув; T – змінна температури;  $\varepsilon(t)$  – деформація;  $\sigma(t)$  – напруження; E(t, T) – модуль релаксації.

Існує декілька реологічних моделей в'язкопружного матеріалу:

 модель Максвелла, що передбачає послідовне з'єднання пружного та демпфуючого елементів;

 модель Кельвіна-Фойгта для паралельного з'єднання пружного та демпфуючого елементів;

 модель стандартного лінійного тіла (СЛТ), що передбачає паралельне з'єднання моделі Максвелла із пружним елементом;

– узагальнена модель Максвелла, що є розширенням моделі СЛТ до випадку багатьох пружних та демпфуючих елементів (рис. 5).


Рисунок 5 - Узагальнена реологічна модель Максвелла

Відповідно до узагальненої моделі Максвелла модуль релаксації може бути вираженій через пружності  $k_e$ ,  $k_i$  та в'язкості  $\mu_i$  (i = 1..N, де N – число демпфуючих елементів) у вигляді експоненціальних рядів Проні [77]:

$$E(t,T) = E_0 + \sum_{i=1}^{N} E_i \exp(-t/\tau_i), \qquad (2)$$

де  $\tau_i = \mu_i / k_i$  – так звані часи релаксації матеріалу;  $E_0 = k_e$  – миттєвий модуль пружності матеріалу;  $E_i = k_i$ – множники рядів Проні.

Окрім перелічених вище параметрів в'язкопружний матеріал має ще й показник, що називається модулем на нескінченності:

$$E_{\infty} = \lim_{t \to \infty} E(t, T) = E_0 + \sum_{i=1}^{N} E_i$$
 (3)

Усі ці параметри характеризують поведінку модуля релаксації, що для 15 членів рядів Проні та різних рівнів температур має характерний вигляд, показаний на рис. 6.



для різних температур, [60]

Для моделювання температурних залежностей в'язкопружних властивостей полімерів та їхніх КМ у роботі [78] було запропоновано поняття про термореологічно простий матеріал (ТПМ), тобто той, що має аналогію між зміною модуля релаксації за часом та температурою. Ця модель відображає поведінку полімерних молекул під дією температури. Це поняття застосовне до полімерних матеріалів, що працюють при температурах вище за температуру склування (тобто коли форма полімерних молекул стає рухомою) і нижче за температуру плавління.

Температурно-часова аналогія полягає у тому, що у відповідність в'язкопружній поведінці матеріалу при температурі *T* ставиться його в'язкопружна поведінка при відносній температурі  $T_{ref}$  із врахуванням часового зсуву за допомогою зсувної функції  $\alpha_T$ . Для модуля релаксації *E*, що розглядається у даному пункті, це виражається у наступному співвідношенні:  $E(t, T_{ref}) = E(\alpha_T t, T)$ .

Характер зсувної функції залежить від мікроструктури полімерного матеріалу [79]. Найбільш поширеними є наступні функції:

1. Зсувна функція Вільямса-Ландела-Феррі (ВЛФ, Williams-Landel-Ferry shift function) [80]:

$$\lg \alpha_{T} = -\frac{K_{1}(T - T_{ref})}{K_{2} + (T - T_{ref})},$$
(4)

де *K*<sub>1</sub> та *K*<sub>2</sub> – параметри зсувної функції ВЛФ.

2. Зсувна функція Тула-Нараянасвамі (ТН, Tool-Narayanaswamy shift function) [81, 82], побудована у відповідності із законом Арреніуса [83]:

$$\ln \alpha_T = \frac{H}{R} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right), \tag{5}$$

де *H* / *R* – масштабована енергія активації.

Наприклад, рис. 6 ілюструє модуль релаксації ТПМ, температурна залежність якого описується функцією ВЛФ.

На відміну від ТПМ термореологічно складні матеріали (ТСМ), що були детально описані в роботах [84-86], зазвичай є дво- або багатофазними полімерними системами, тобто такими, що отримані для досягнення нових властивостей з декількох простих полімерів [87]. У такому випадку реакція властивостей кожної з полімерних фаз на зміну температури може носити власний характер, що в комплексі не дозволяє побудувати просту температурно-часову аналогію. Одним з рішень даної проблеми є комбінація зсувних функцій (4) та (5):

lg 
$$\alpha_T = \frac{K_1(T_{ref1} - T)h(T)}{K_2 + (T - T_{ref1})} + \frac{H}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref2}}\right) h(T - T_{ref2}),$$
 (6)  
де  $h(T) = \begin{cases} 0, T < 0\\ 1, T \ge 0 \end{cases}$  - функція Хевісайда;  $T_{ref1}$  та  $T_{ref2}$  -

обрані відносні температури.

Таким чином, характер температурної залежності ПАКМ у великій долі визначається характером температурної залежності його полімерної матриці. Для його визначення можуть використовуватись як феноменологічні, так і структурні методи.

4. Ізотропія, ортотропія та анізотропія пружних та в'язкопружних властивостей КМ. Оскільки ПАКМ мають певну спрямовану схему армування (див. рис. 3,  $\delta$ ), їхні механічні властивості залежать від напрямку навантаження, що прикладається. Результатом цього є анізотропія пружних та в'язкопружних

властивостей, що виражені тензорними співвідношеннями (7) у покомпонентному вигляді шляхом узагальненням спадкового інтегралу (1) до тривимірного випадку [19, 65, 67]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t - \xi, T) \frac{d\varepsilon_{kl}(\xi)}{d\xi} d\xi , \qquad (7)$$

де  $C_{iikl}(t, T)$  – залежні від часу та температури компо-

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{33}(t) \\ \sigma_{23}(t) \\ \sigma_{13}(t) \\ \sigma_{13}(t) \\ \sigma_{12}(t) \end{bmatrix} = \int_{0}^{t} \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для полімерного матеріалу, який можна найчастіше вважати ізотропним, співвідношення (8) спрощується таким чином, що у тензорі релаксації залишається тільки 2 невідомих компоненти. Тоді можливо виділити шарову та девіаторну частини тензора релаксації, що є дуже корисним, оскільки для полімерних матеріалів характерна в'язкість саме формозмінної (девіаторної) частини при збереженні об'ємної (шарової) частини відносно постійною за часом [65]. Тоді тензорний вигляд таких співвідношень записується наступним чином:

$$\hat{\sigma}(t) = \int_0^t 2\hat{G}(t-\xi) \frac{d\hat{e}(\xi)}{d\xi} d\xi + \hat{I} \int_0^t \hat{K}(t-\xi) \frac{d\Delta(\xi)}{d\xi} d\xi , \quad (9)$$

де  $\hat{\sigma}(t)$  – тензор напружень другого рангу;  $\hat{G}(t)$ ,  $\hat{K}(t)$  – зсувна та об'ємна частини тензора релаксації, залежні зазвичай і від температури;  $\hat{e}(t)$ ,  $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  та  $\hat{I}$  – девіаторна та шарова деформації та одиничний тензор відповідно, що записуються в формі:

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \Delta & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \Delta & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \Delta \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Часто співвідношення (9) приймаються за базові й для випадків анізотропних матеріалів, оскільки наразі не існує універсального алгоритму розв'язання задачі анізотропної в'язкопружності із визначальними співвідношеннями (8). Така ситуація дійсна й для програмних комплексів скінченно-елементного аналізу, зокрема ANSYS Mechanical [88].

На даний момент існує декілька напрямків моделювання анізотропних в'язкопружних властивостей матеріалу. Переважно усі вони базуються на МСЕ як на найбільш ефективному інструменті інженерних розрахунків.

Перша з методик заснована на створенні власного скінченно-елементного коду, що є адаптованим до застосування в ньому фізичних співвідношень анізотропної в'язкопружності. Таким дослідженням присвячені роботи [89-96].

Основним недоліком описаної методики є вузьконаправленість отриманих у результаті її реалізації ненти тензору релаксації в'язкопружного матеріалу; i, j, k, l = 1..3, при цьому у тензорних співвідношеннях приймається правило сумування Ейнштейна.

Для ПАКМ з ортогональною структурою армування в'язкопружні властивості є ортотропними. Тоді фізичні співвідношення (7) в нотації Фойгта набудуть наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} C_{112} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{22} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{233} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathcal{E}_{11}(\xi)/d\xi \\ d\mathcal{E}_{22}(\xi)/d\xi \\ d\mathcal{E}_{33}(\xi)/d\xi \\ d\mathcal{E}_{13}(\xi)/d\xi \\ d\mathcal{E}_{13}(\xi)/d\xi \end{bmatrix} d\xi .$$
(8)

скінченно-елементних програм, наприклад, застосовність лише до двовимірних задач або задач теорій пластин та оболонок, відсутність врахування контактної взаємодії, пластичності, повзучості, динамічних явищ, тощо. Такі скінченно-елементні продукти створюються для розв'язання певних класів задач, що не виходять за свої рамки.

Іншим напрямком є імплементація своїх фізичних співвідношень анізотропної в'язкопружності до вже існуючих комерційних програмних комплексів скінченно-елементного аналізу, таких як ANSYS, ABAQUS, NX Nastran, тощо. В такому випадку користувач отримує доступ до усього широкого набору можливостей моделювання механіки твердого деформованого тіла (МТДТ), але недолік полягає у складності процесу імплементації, що потребує від інженера чи науковця редакції коду усього модуля і, відповідно, поглиблених теоретичних та практичних знань. Окрім того, виробники програмних комплексів знімають з себе відповідальність за коректність результатів, отриманих за допомогою їхніх продуктів, що були відредактовані користувачем. Описаним методам реалізації анізотропної в'язкопружності присвячені роботи [97-103].

Існують також й альтернативні методики моделювання анізотропних в'язкопружних властивостей. Наприклад, в статті [104] автором був запропонований метод врахування анізотропії в'язкопружності у комерційних комплексах скінченно-елементного аналізу без редакції їхніх кодів за допомогою методу накладених сіток. В роботах [105, 106] були розроблені аналітичні та чисельно-аналітичні методи розв'язання плоскої вісесиметричної задачі контакту трубопроводу із композиційним ортотропним в'язкопружним бандажем.

Отже, існуючі методи моделювання та розрахунків анізотропної в'язкопружності не повністю охоплюють цей розділ МТДТ і не задовольняють інженерні потреби.

5. Методи розв'язання контактних задач анізотропних композиційних оболонок. Історія розвитку методів розв'язання механіки тонких та товстих оболонок у лінійній та нелінійній постановках походить з кінця XIX сторіччя, коли були поставлені та вирішені перші задачі цього класу.

Окрім того, на момент другої половини XX сторіччя вже з'явилась велика кількість літератури, що давала аналітичні розв'язки певних класів задач теорії тонких та товстих оболонок.

Наприклад, в роботах [107-110] представлені методи розрахунку тонких циліндричних оболонок та оболонок обертання. В книзі [111] наведені методи розрахунку термопружних напружень у оболонках, а також механіки оболонок із ребрами жорсткості. В роботі [112] разом із аналітичними методами знаходження напружено-деформованого стану оболонок для окремих випадків описані наближені методи розрахунків тонких оболонок загального вигляду. В книзі [113] наведені наближені методи розрахунку механіки тонких оболонок - простих та армованих. Серед сучасних світових робіт, що наводять, класифікують та пропонують нові методи розрахунків механіки тонких та товстих оболонок із навісними елементами та без них можна виділити книги [114-117]. В роботі [118] дана критична оцінка поточного стану розв'язання проблеми моделювання механіки оболонок та запропоновані нові методи для певних класів задач.

В роботах [119-123] описане застосування методу скінченних елементів до розв'язання лінійних задач механіки тонких та товстих оболонок. В [124] розроблено новий алгоритм методу скінченних елементів, що є застосовним для нелінійної постановки цього класу задач.

Наведені методи були розроблені для ізотропних пружних матеріалів, а потім з розвитком армованих композиційних матеріалів адаптовані до випадків ортотропії пружних властивостей. Так, роботи [125, 126] пропонують методи розрахунків механіки циліндричних композиційних оболонок, [127] описує адаптацію теорії пластин та оболонок до анізотропних елементів зі склопластиків. В [14] розроблені методи розв'язання деяких класів задач теорії анізотропних композиційних оболонок, які адаптовані до їхньої реалізації на персональному комп'ютері. В [18] розглянута механіка шаруватих композиційних матеріалів із пружними, пластичними та в'язкопружними шарами. В роботі [128] представлені сучасні методи моделювання механіки тонких та товстих ламінованих пластин та оболонок конічної, циліндричної та сферичної форм. В [129] існуючі чисельні методи розрахунків були адаптовані до розв'язання лінійних та нелінійних задач механіки шаруватих композиційних пластин та оболонок.

Контактні задачі теорії оболонок в аналітичному вигляді були розв'язані лише для певних простих класів. Наприклад, в [130] запропоновані розв'язки інтегральних задач теорії оболонок та розглянуті деякі контактні задачі для циліндричних оболонок. В [131] наведені методи моделювання контактної взаємодії оболонок обертання із штамом та між собою.

Також увага науковців була привернута й до контактних задач теорії в'язкопружності. Так, в [71] були запропоновані методи розв'язання плоских контактних задач теорії в'язкопружності з врахуванням шорсткості поверхонь та зносу. В [132] розв'язані плоскі задачі обертального контакту в'язкопружного тіла з пружною основою.

В роботі [133] автори запропонували методи розв'язання вісесиметричних та двовимірних задач повзучості тонких оболонок. В роботі [134] запропоноване використання варіаційних нерівностей для розв'язання контактних задач пружності, пластичності та повзучості тонких оболонок.

Окрім фундаментальної літератури на даний момент існує багато сучасних робіт, що розглядають механіку анізотропних оболонок. Переважна більшість з них базується на методі скінченних елементів як на найбільш потужному на даний момент інструменті розв'язання інженерних задач.

В огляді [135] детально описані сучасні скінченно-елементні підходи до розрахунків механіки композиційних оболонкових елементів конструкцій. Зокрема, продемонстровані підходи до моделювання композиційних матеріалів як однорідних або багатошарових оболонок з різним ступенем анізотропії пружних властивостей. Наведено критерії збіжності чисельних рішень і методи контролю їх точності. Проаналізовані переваги та недоліки застосування теорій розрахунку механіки шаруватих композиційних оболонок і дано порівняння отриманих результатів з тривимірною теорією. У той же час, в роботі розглянуті лише пружні шаруваті оболонки і не дана характеристика підходів і методів розв'язання задач повзучості та в'язкопружності, хоча ці властивості композиційних оболонок досить яскраво виражені та вимагають адекватного відображення в математичних моделях.

Стаття [136] демонструє розв'язання задачі нелінійного скінченно-елементного аналізу ортотропної пружної однорідної циліндричної оболонки з коротким викладом методики рішення і критеріїв його збіжності, хоча в ній не вказано, скінченними елементами якої форми автори користуються при побудові свого методу.

Робота [137] дає більш докладний опис методу розв'язання подібної задачі. Тут авторами побудована методика вирішення геометрично нелінійних задач теорії однорідних ізотропних оболонок з використанням розробленого плоского трикутного оболонкового скінченного елемента. Побудована теорія проходить верифікацію шляхом розв'язання задач простих класів з наявними аналітичними розв'язками, а саме: вигин шарнірно обпертих пластини, сферичної і циліндричної оболонок і втрати стійкості L-образної конструкції. Отримані результати і побудовані по ним графіки наочно демонструють дуже низьку розбіжність між аналітичними і чисельними розв'язками, що підтверадекватність побудованого методу джує лля розв'язання зазначеного класу задач. У той же час, даний метод не враховує можливі анізотропію пружних властивостей і в'язкопружність оболонок.

У статті [138] представлений скінченно-елементний метод розв'язання геометрично і фізично нелінійної задачі вигину шаруватих оболонок. Переважною відмінністю даної публікації від наведених вище робіт є можливість моделювання фізичних нелінійностей, а саме пружнопластичних властивостей матеріалів оболонки. При цьому в самій роботі не зроблена постановка задачі теорії пластичності, а також не наведено опис чисельних процедур, що дозволяють враховувати пластичну зону деформування, тобто саму фізичну нелінійність.

Робота [139] демонструє врахування орторопії, в'язкопружності і п'єзоелектричних властивостей шаруватих композиційних елементів конструкцій, але для класу задач теорії згину пластин. Тут ступінь анізотропії в'язкопружних властивостей визначається ступенем анізотропії пружних властивостей. У той же час, за допомогою побудованого скінченно-елементного підходу проводиться розв'язання динамічних задач теорії згину пластин з урахуванням демпфування коливань в їх в'язкопружних шарах. Таким чином, можливість застосування побудованого методу обмежується плоскою формою і ступенем анізотропії в'язкопружних властивостей композиційних елементів конструкцій.

В роботі [140] дається детальна характеристика розробленого авторського шаруватого оболонкового скінченного елемента з пружними і в'язкопружними шарами. Наведена методика може бути застосована як до тонких, так і до товстих оболонок. Розроблено схему інтегрування за часом, а також наведені умови збіжності розв'язку. При цьому варто відзначити, що, як і в попередніх роботах, в'язкопружні властивості шарів оболонки вважаються ізотропним.

Аналогічний метод, але для товстих неслоїстих оболонок представлений в роботі [141]. Тут наведено розв'язок задачі згину оболонкового кільця.

В сучасній літературі присутні багато методів розв'язання контактних задач в'язкопружності.

У серії статей [142-144] автори пропонують власну методику розв'язання контактної задачі в'язкопружності для випадку обертового контакту, а саме кочення в'язкопружного циліндра по абсолютно жорсткій основі. Така задача має велике поширення з огляду на її застосовність до моделювання взаємодії автомобільних і літакових шин з дорожнім покриттям. У роботах розробляється авторський підхід до вирішення наступних питань:

 – розробка рухомого в'язкопружного скінченного елемента, що враховує великі деформації;

 створення спеціальної розрахункової схеми, що базується на методі Ньютона-Рафсона;

– розробка неявного розв'язувача задач перехідних процесів;

 розробка тривимірних поступально-обертальних кубічних скінченних елементів ізопараметричного типу;

– розробка поступально-обертальних оболонкових скінченних елементів;

 створення тривимірної постановки задачі рухомого контакту;

 комплексне дослідження шини, що постійно обертається, з кореляцією отриманих результатів з експериментальними даними;

 створення схеми моделювання перехідних процесів для обертового контакту, здатної враховувати западини і перешкоди;  інтегрування поступально-обертального скінченного елемента з методологією контактної взаємодії при перехідних процесах;

 комплексне дослідження з моделюванням перехідних процесів шини, що котиться по покриттю з западинами і перешкодами.

Таким чином, в публікації розроблений скінченно-елементний підхід до розв'язання контактної динамічної задачі в'язкопружності для оболонкових елементів конструкцій. При цьому варто відзначити, що при всій складності постановки і розв'язання описаної задачі, автори практично не приділяють увагу анізотропії пружних і в'язкопружних властивостей, що навіть для шини є критичними, оскільки вона має підсилючий корд, який робить такі властивості істотно ортотропними. Крім того, неочевидна застосовність розробленої методики до оболонок, відмінних від оболонок обертання еліптичного типу.

Публікація [145] враховує при розробці тривимірного скінченно-елементного підходу до моделювання напружено-деформованого стану шини анізотропію її пружних властивостей, що при належній побудові скінченно-елементної сітки значно підвищує адекватність отриманих результатів. Однак в'язкоупружні властивості матеріалу шини авторами не були враховані.

У роботах [146] та [147] автори пропонують скінченно-елементну методологію розв'язання задачі знаходження плоского деформованого стану в'язкопружної основи під впливом жорсткого тіла кочення. При цьому в'язкопружні властивості вважаються ізотропним.

Публікація [148] пропонує чисельний розв'язок контактної задачі в'язкопружності для дослідження динамічної поведінки тривимірного тіла з тріщиною, яка характеризується криволінійною поверхнею, із застосуванням авторського методу збіжності. Чисельна процедура випробувана на прикладі знаходження динамічного стану товстої пластини з тріщиною нескінченної довжини. Порівняння результатів обчислень для випадків відсутності і різних рівнів демпфування з точним розв'язком показує його задовільну збіжність практично для всього періоду контактування тріщини.

В роботі [149] представлений скінченноелементний підхід до розв'язання двовимірної контактної задачі анізотропної термов'язкопружності для двох шаруватих тіл з пружним внутрішнім і в'язкопружним зовнішнім шарами. Тут авторами представлений критерій ініціалізації контактної взаємодії, а також розроблена чисельна процедура розв'язання задачі в'язкопружності в часі. Адекватність описаної методики продемонстрована на прикладах контактної взаємодії в'язкопружного в першому випадку і шаруватого пружно-в'язкопружного циліндра в другому випадку з шарнірно обпертою пружною основою. Результати представлені у вигляді графіків зміни контактного тиску по довжині пружної основи, а також релаксації центрального контактного тиску в часі для моделей в'язкопружності Максвелла і Віхерта і різних варіацій теплового навантаження. При цьому варто відзначити, що розроблена методика може бути застосована тільки для випадку плоского деформованого стану, що значно звужує клас охоплених нею задач.

Отже, на даний момент в літературі існує багато методів розв'язання складових елементів задачі, що розглядається, та для певних класів задач. При цьому відсутній комплексний підхід до розв'язання контактних задач в'язкопружності ортотропних композиційних елементів конструкцій і машин.

Висновки. Отже, в сучасній літературі на даний момент існують методи розв'язання складових частин задачі, що розглядається.

Наприклад, розроблені експериментальні методи знаходження ортоторопних пружних та ізотропних статичних і динамічних в'язкопружних властивостей композиційного матеріалу. Чисельні методи гомогенізації механічних властивостей армованих КМ також є потужним засобом отримання його ізотропних та ортотропних в'язкопружних властивостей.

Розроблені методи апроксимації часових залежностей за допомогою експоненціальних рядів Проні та температурних залежностей за допомогою температурних зсувних функцій. Така технологія застосовна до однофазних полімерних КМ, що працюють при температурах вище за температуру склування та розглядаються як термореологічно прості матеріали, тоді як температурна залежність багатофазних полімерних систем відображається більш складними залежностями.

На даний момент в літературі існують аналітичні розв'язки контактних задач та задач в'язкопружності теорії тонких циліндричних оболонок та оболонок обертання. З метою отримання розв'язків задач для оболонок довільної форми звертаються до чисельних методів, в особливості до методу скінченних елементів як до найбільш потужного інструменту розв'язання інженерних задач на даний момент. Було створено багато власних скінченно-елементних кодів та користувацьких модулів комерційних програм для відображення ефекту анізотропної в'язкопружності. Усі вони мають свої переваги та недоліки. Основним недоліком можна виділити той факт, що запропоновані методики не є простими для реалізації при наявності в інженера програмного комплексу скінченно-елементного аналізу та відсутності поглиблених знань у програмуванні та теорії неоднорідних анізотропних матеріалів.

Таким чином, створення універсального методу розв'язання контактних задач в'язкопружності ортотропних оболонок є важливою та актуальною на даний момент задачею, що потребує поглибленого розгляду та розв'язання.

### Список літератури:

1. Справочник по композиционным материалам / Ред. Дж. Любин. – М.: Машиностроение, 1988. – Т.1. – 448 с.

**2.** Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник / Д. М. Карпинос. – К.: Наукова думка, 1985. – 588 с.

**3.** *Upadhyaya M.* Studies on transition metal doped polyaniline and polyaniline-clay nanocomposites: an abstract ... doctor of philosophy in chemistry / *Madhab Upadhyaya.* – Gauhati University: 2013. – 170 p. **4.** *Roeseler W. G.* Composite structures: the first 100 years / W. G. Roeseler, B. Sarh, M. U. Kismarton // Proceedings of the 16th International Conference on Composite Materials. – Kyoto: 2007. – P. 1-10.

**5.** Method & Apparatus for Making Glass Wool: U.S. Patent US2133235 A / *Slayter G.*; published 11.11.1933.

**6.** Owens Corning Company. – Режим доступу: https:// www.owenscorning.com. – Дата звертання : 11 жовтня 2017.

7. *Keller M. E.* The Graham Legacy: Graham-Paige to 1932 / *M. E. Keller.* – Turner Publishing Company, 1998. – 232 p.

8. Palucka T. Composites Overview / T. Palucka, B. Bensaude-Vincent // History of Recent Science and Technology. – 19 жовтня 2002. – Режим доступу: https://authors.library. caltech.edu/5456/1/hrst.mit.edu/hrs/materials/public/composites/ Composites Overview.htm. – Дата звертання: 11 жовтня 2017.

**9.** *Pete Scala E.* A Brief History of Composites in the U.S. The Dream and the Success / *E. Pete Scala //* JOM. – Springer. – 1996. – Vol. 48, No. 2. – P. 45-48.

**10.** Dupont Company. – Режим доступу http://www.dupont.com. – Дата звертання : 11 жовтня 2017.

**11.** *Ward D.* GE Aviation / *D. Ward* // TUM 5th Anniversary Symposium, Institute for Carbon Composites, 11-12 вересня 2014. – Режим доступу: http://www.lcc.mw.tum.de/fileadmin/w00bkg/www/PDF/Symposium/LCC\_Symposium\_Ward.pdf. – Дата звертання : 11 жовтня 2017.

**12.** Chortis D. I. Structural Analysis of Composite Wind Turbine Blades / Dimitrios I. Chortis. – Springer: 2013. – 239 p.

**13.** *Нарисаева И. И.* Прочность полимерных материалов / И. И. Нарисаева. – М.: Химия, 1987. – 400 с.

**14.** Кравчук А. С. Механика полимерных и композиционных материалов / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. – М.: Наука, 1985. – 304 с.

15. Капитонов А. М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства / А. М. Капитонов, В. Е. Редькин. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. – 532 с.

**16.** *Уорд И.* Механические свойства твердых полимеров / И. Уорд. – М.: Химия, 1975. – 357 с.

**17.** Шен М. Вязкоупругая релаксация в полимерах / М. Шен. – М.: Мир, 1974. – 270 с.

18. Побердря Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е. Побердря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

**19.** *Ferry J. D.* Viscoelastic Properties of Polymers / *J. D. Ferry.* – John Wiley & Sons, 1980. – 641 p.

**20.** Zak G. Mechanical properties of short-fibre layered composites: prediction and experiment / G. Zak., M. Haberer, C. B. Park [et al.] // Rapid. Prototyp. J. – 2000. – Vol. 6. – P. 107-118. – doi:10.1108/13552540010323583.

**21.** Sun Z. Modeling the elastic properties of concrete composites: Experiment, differential effective medium theory, and numerical simulation / Z. Sun, E. J. Garboczi, S. P. Shah // Cem. Concr. Compos. – 2007. – Vol. 29. – P. 22-38.

**22.** *Gang P.* Analysis and discussion on impact shear experiment technique of composite laminate / P. *Gang, F. Jiacheng, L. Yuandong* [et al.] // Proc. 2011 Int. Conf. Electron. Optoelectron. – 2011. – P. 350-353. – doi:10.1109/ICEOE.2011.6013378.

**23.** Durai Prabhakaran R. T. Investigation of mechanical properties of unidirectional steel fiber/polyester composites: Experiments and micromechanical predictions / R. T. Durai Prabhakaran, T. L. Andersen, J. I. Bech [et al.] // H. Polym Compos. – 2016. – Vol. 37. – P. 627-644. – doi:10.1002/pc.23220.

**24.** Saleh M. N. Micro-mechanics based damage mechanics for 3D orthogonal woven composites: Experiment and numerical modelling / M. N. Saleh, G. Lubineau, P. Potluri [et al.] // Compos. Struct. – 2016. – Vol. 156. – P. 115-124. – doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.021.

25. Lv L. Bending properties of three-dimensional honey-

comb sandwich structure composites: experiment and finite element method simulation / *L. Lv, Y. Huang, J. Cui* [et al.] // Text. Res. J. – 2017. – P. 1-8. – doi:10.1177/0040517517703602.

**26.** *Movaghghar A.* An Energy Model for Fatigue Life Prediction of Composite Materials Using Continuum Damage Mechanics / *A. Movaghghar, G. I. Lvov //* Appl. Mech. Mater. – 2011. – Vol. 110–116. – P. 1353-1360. – doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.110-116.1353.

**27.** Seifert O. E. Viscoelastic properties of a glass fabric composite at elevated temperatures: experimental and numerical results / O. E. Seifert, S. C. Schumacher, A. C. Hansen // Compos. Part B. Eng. – 2003. – Vol. 34. – P. 571-586. – doi:10.1016/S1359-8368(03)00078-7.

**28.** *Abot J.* In-plane mechanical, thermal and viscoelastic properties of a satin fabric carbon/epoxy composite / *J. Abot, A. Yasmin, A. Jacobsen* [et al.] // Compos. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 64. – P. 263-268. – doi:10.1016/S0266-3538(03)00279-3.

**29.** Chan A. Viscoelastic interlaminar shear modulus of fibre reinforced composites / A. Chan, X. L. Liu, W. K. Chiu // Compos. Struct. – 2006. – Vol. 75. – P. 185-191. – doi:10.1016/j.compstruct.2006.04.058.

**30.** *Guojun H.* A theoretical and numerical study of crack propagation along a bimaterial interface with applications to IC packaging: a thesis ... doctor of philosophy in engineering / *Hu Guojun.* – National University of Singapore: 2006. – 183 p.

**31.** *Silva P.* Viscoelastic response of an epoxy adhesive for construction since its early ages: Experiments and modelling / *P. Silva, T. Valente, M. Azenha* [et al.] // Compos. Part B Eng. – 2017. – Vol. 116. – P. 266-277. – doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.047.

**32.** *Ciambella J.* A comparison of nonlinear integral-based viscoelastic models through compression tests on filled rubber / J. *Ciambella, A. Paolone, S. Vidoli* // Mech. Mater. – 2010. – Vol. 42. – P. 932-944. – doi:10.1016/j.mechmat.2010.07.007.

Vol. 42. – P. 932-944. – doi:10.1016/j.mechmat.2010.07.007.
33. Stanier D. C. The reinforcement effect of exfoliated graphene oxide nanoplatelets on the mechanical and viscoelastic properties of natural rubber / D. C. Stanier, A. J. Patil, C. Sriwong [et al.] // Compos. Sci. Technol. – 2014. – Vol. 95. – P. 59-66. – doi:10.1016/j.compscitech.2014.02.007.

**34.** Shrotriya P. Viscoelastic response of woven composite substrates / P. Shrotriya, N. Sottos // Compos. Sci. Technol. –2005. – Vol. 65. – P. 621-634. – doi:10.1016/j.compscitech.2004.09.002.

**35.** *Park S. J.* Simplified Bulk Experiments and Hygrothermal Nonlinear Viscoelasticity / S. J. Park, K. M. Liechti, S. Roy // Mech. Time-Dependent Mater. – 2004. – Vol. 8. – P. 303-344. – doi:10.1007/s11043-004-0942-3.

**36.** *Tzeng J. T.* Viscoelasticity Analysis and Experimental Validation of Anisotropic Composite Overwrap Cylinders / *J. T. Tzeng, R. P. Emerson, D. J. O'Brien //* Mech. Solids, Struct. Fluids, ASME. – 2012. – Vol. 8. – P. 429. – doi:10.1115/IMECE2012-87818.

**37.** *Kohl J. G.* Determining the viscoelastic behavior of polyester fiberglass composite by continuous micro-indentation and friction properties / *J. G. Kohl, N. Bierwisch, T. T. Ngo* [et al.] // J. of Wear. – 2016. – Vol. 350–351. – P. 63-67. – doi:10.1016/j.wear.2016.01.005.

**38.** *Ropers S.* A thermo-viscoelastic approach for the characterization and modeling of the bending behavior of thermoplastic composites / *S. Ropers, M. Kardos, T. A. Osswald //* Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. – 2016. – Vol. 90. – P. 22-32. – doi:10.1016/j.compositesa.2016.06.016.

**39.** *Kwon S.* Thermo-viscoelastic properties of silica particulate-reinforced epoxy composites: Considered in terms of the particle packing model / *S. Kwon, T. Adachi, W. Araki* [et al.] // Acta Mater. – 2006. – Vol. 54. – P. 3369-3374. – doi:10.1016/j.actamat.2006.03.026.

**40.** *Das R.* Stress Relaxation Behavior of Carbon Fiber-Epoxy Prepreg Composites During and After Cure: a thesis ... master of science in mechanical engineering / *Rony Das.* – Bangladesh University of Engineering and Technology: 2012. - 82 p.

**41.** *Amadori S.* Robust identification of the mechanical properties of viscoelastic non-standard materials by means of frequency domain experimental measurements / *S. Amadori, G. Catania //* Compos. Struct. – 2016. – doi:10.1016/j.compstruct.2016.11.029.

**42.** *Feng J.* Temperature-frequency-dependent mechanical properties model of epoxy resin and its composites / *J. Feng, Z. Guo //* Compos. Part B Eng. – 2016. – Vol. 85. – P. 161-169. – doi:10.1016/j.compositesb.2015.09.040.

**43.** *Montazeri A.* Viscoelastic and mechanical properties of multi walled carbon nanotube/epoxy composites with different nanotube content / *A. Montazeri, N. Montazeri //* Mater. Des. – 2011. – Vol. 32. – P. 2301-2307. – doi:10.1016/j.matdes.2010.11.003.

**44.** *Nairn J. A.* Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment / *J. A. Nairn //* Polym. Eng. Sci. – 1989. – Vol. 29. – P. 654-661. – doi:10.1002/pen.760291007.

**45.** *Kostopoulos V.* A new method for the determination of viscoelastic properties of composite laminates: a mixed analytical–experimental approach / V. *Kostopoulos, D. T. Korontzis //* Compos. Sci. Technol. – 2003. – Vol. 63. – P. 1441-1452. – doi:10.1016/S0266-3538(03)00086-1.

**46.** Shivakumar E. Viscoelastic properties of in situ composite based on ethylene acrylic elastomer (AEM) and liquid crystalline polymer (LCP) blend / E. Shivakumar, C. Das, K. Banik [et al.] // Compos. Sci. Technol. – 2007. – Vol. 67. – P. 1202-1209. – doi:10.1016/j.compscitech.2006.05.004.

**47.** *Abouhamzeh M.* Kinetic and thermo-viscoelastic characterisation of the epoxy adhesive in GLARE / *M. Abouhamzeh, J. Sinke, K. M. B. Jansen* [et al.] // Compos. Struct. – 2015. – Vol. 124. – P. 19-28. – doi:10.1016/j.compstruct.2014.12.069.

**48.** *Kumar N.* Experimental study on vibration and damping of curved panel treated with constrained viscoelastic layer / *N. Kumar, S. P. Singh //* Compos. Struct. – 2010. – Vol. 92. – P. 233-243. – doi:10.1016/j.compstruct.2009.07.011.

**49.** *Hujare P. P.* Experimental Investigation of Damping Performance of Viscoelastic Material Using Constrained Layer Damping Treatment / *P. P. Hujare, A. D. Sahasrabudhe //* Procedia. Mater. Sci. – 2014. – Vol. 5. – P. 726-733. – doi:10.1016/j.mspro.2014.07.321.

**50.** Altenbach H. Structural elastic and creep models of a UD composite in longitudinal shear / H. Altenbach, V. A. Fedorov // Mech. Compos. Mater. – 2007. – Vol. 43. – P. 289-298. – doi:10.1007/s11029-007-0028-9.

**51.** *Upadhyaya P.* A three-dimensional micromechanical model to predict the viscoelastic behavior of woven composites / *P. Upadhyaya, C. S. Upadhyay //* Compos. Struct. – 2011. – Vol. 93. – P. 2733-2739. – doi:10.1016/j.compstruct.2011.05.031.

**52.** Levin V. Effective properties of viscoelastic media with crack-like inclusions / V. Levin, S. Kanaun, J. G. Ronquillo // Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. – 2012. – Vol. 53. – P. 1-9. – doi:10.1016/j.ijrmms.2012.03.007.

**53.** *Hoang-Duc H.* Effective properties of viscoelastic heterogeneous periodic media: An approximate solution accounting for the distribution of heterogeneities / *H. Hoang-Duc, G. Bonnet //* Mech. Mater. – 2013. – Vol. 56. – P. 71-83. – doi:10.1016/j.mechmat.2012.09.006.

**54.** Andrianov I. V. Effective properties and micromechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear / I. V. Andrianov, V. V. Danishevs'kyy, A. Guillet [et al.] // Eur. J. Mech. - A/Solids. – 2005. – Vol. 24. – P. 195-206. – doi:10.1016/j.euromechsol.2005.01.006.

**55.** *Muddasani M.* Thermo-viscoelastic responses of multilayered polymer composites: Experimental and numerical studies / *M. Muddasani, S. Sawant, A. Muliana //* Compos. Struct. – 2010. – Vol. 92. – P. 2641-2652. – doi:10.1016/j.compstruct.2010.03.003.

**56.** *Yang L.* Micromechanical modelling and simulation of unidirectional fibre-reinforced composite under shear loading / *L. Yang, Z. Wu, Y. Cao* [et al.] // J. Reinf. Plast. Compos. – 2015.

- Vol. 34. - P. 72-83. - doi:10.1177/0731684414562873.

**57.** *Pathan M. V.* Numerical predictions of the anisotropic viscoelastic response of uni-directional fibre composites / *M. V. Pathan, V. L. Tagarielli, S. Patsias //* Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. – 2017. – Vol. 93. – P. 18-32. – doi:10.1016/j.compositesa.2016.10.029.

**58.** Jain D. Topological disorder of microstructure in fiberreinforced polymer composites: Diffusion response / D. Jain, A. Mukherjee, N. Kwatra // J. Reinf. Plast. Compos. – 2015. – Vol. 34. – P. 49-59. – doi:10.1177/0731684414562224.

**59.** *Li H*. Effects of constructing different unit cells on predicting composite viscoelastic properties / *H. Li, B. Zhang, G. Bai* // Compos. Struct. – 2015. – Vol. 125. – P. 459-466. – doi:10.1016/j.compstruct.2015.02.028.

**60.** *Martynenko V. G.* Numerical prediction of temperature dependent anisotropic viscoelastic properties of fiber reinforced composite / V. G. *Martynenko, G. I. Lvov //* J. Reinf. Plast. Compos. – 2017. – P. 1-12. – doi:10.1177/0731684417727064.

**61.** *Wang G.* Locally-exact homogenization of viscoelastic unidirectional composites / G. Wang, M. J. Pindera // Mech. Mat. – 2016. – Vol. 103. – P. 95-109. – doi:10.1016/j.mechmat.2016.09.009.

**62.** Shoneich M. A coated inclusion-based homogenization scheme for viscoelastic composites with interphases / M. Shoneich, F. Dinzart, H. Sabar [et al.] // Mech. Mat. – 2016. – P. 1-36. – doi:10.1016/j.mechmat.2016.11.009.

**63.** Chen Q. Finite-Volume Homogenization of Elastic/Viscoelastic Periodic Materials / Q. Chen, G. Wang, X. Cheng [et al.] // Comp. Struct. – 2017. – P. 1-38. – doi:10.1016/j.compstruct. 2017.09.044.

**64.** *Covezzi F.* Homogenization of elastic-viscoplastic composites by the Mixed TFA / *F. Covezzi, S. de Miranda, S. Marfia* [et al.] // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2017. – P. 1-36. – doi:10.1016/j.cma.2017.02.009.

**65.** Адамов А. А. Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов, В. П. Матвеенко, Н. А. Труфанов и др. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.

**66.** Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 328 с.

**67.** *Кристенсен Р. М.* Введение в теорию вязкоупругости / *Р. М. Кристенсен.* – М.: Мир, 1974. – 338 с.

**68.** *Кузнецов Г. Б.* Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел / Г. Б. *Кузнецов.* – М.: Наука, 1979. – 112 с.

**69.** Макарова М. А. Нелинейная теория вязкоупругости линейных полимеров / М. А. Макарова, А. С. Гусев, Г. В. Пышнограй и др. // Электронный физико-технический журнал. – 2007. – Т. 2 – С. 1-54. – Режим доступу: http://eftj. secna.ru/vol2/070201.pdf. – Дата звертання : 11 жовтня 2017.

**70.** Юдин В. Е. Вязкоупругость полимерной матрицы и разрушение теплостойких волокнистых композитов / В. Е. Юдин, А. М. Лексовский // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, № 5. – С. 944-950.

**71.** Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.

**72.** *Fabrizio M.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity / *M. Fabrizio, A. Morro //* Society for Industrial Mathematics. – 1992. – 203 p.

**73.** *Gutierrez-Lemini D.* Engineering Viscoelasticity / *D. Gutierrez-Lemini.* – New York: Springer Science+Business Media, 2014. – 353 p.

**74.** *Cho K. S.* Viscoelasticity of Polymer. Theory and Numerical Algorithms / K. S. *Cho.* – Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2016. – 612 p.

**75.** Shaw M. T. Introduction to Polymer Viscoelasticity. 3rd edition / M. T. Shaw, W. J. MacKnight. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2005. – 316 p. **76.** *Riande E.* Polymer Viscoelasticity: Stress and Strain in Practice / E. Riande, R. Diaz-Calleja, M. Prolongo [et al.]. – CRC Press, 1999. – 904 p.

77. Roylance D. Engineering Viscoelasticity / D. Roylance. – Cambridge : Massachusetts Institute of Technology, 2001. – 37 р. – Режим доступу: http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/ modules/visco.pdf. – Дата звертання : 11 жовтня 2017.

**78.** Shinozuka M. Thermorheologically simple viscoelastic materials / M. Shinozuka // AIAA J. – 1965. – Vol. 3. – P. 375-377. – doi:10.2514/3.2870

**79.** Van Gurp M. Time-temperature superposition for polymeric blends / M. van Gurp, J. Palmen // J. Rheol. Bull. – 1998. – Vol. 65. – P. 5-8.

**80.** Williams M. L. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glassforming Liquids / M. L. Williams, R. F. Landel, J. D. Ferry // Journal of the American Chemical Society. – 1955. – Vol. 77. – P. 3701-3706. – doi:10.1021/ja01619a008

**81.** *Tool A. Q.* Relation between Inelastic Deformability and Thermal Expansion of Glass in its Annealing Range / *A. Q. Tool //* Journal of the American Ceramic Society. – 1946. – Vol. 29, No. 9. – P. 240-253. – doi:10.1111/j.1151-2916.1946.tb11592.x

**82.** Narayanaswamy O. S. A Model of Structural Relaxation in Glass / O. S. Narayanaswamy // Journal of the American Ceramic Society. – 1971. – Vol. 54, No. 10. – P. 491-498. – doi:10.1111/j.1151-2916.1946.tb11592.x

**83.** Arrhenius S. A. Über die Dissociationswärme und den Einfluß der Temperatur auf den Dissociationsgrad der Elektrolyte / S. A. Arrhenius // Z. Phys. Chem. – 1889. – Vol. 4. – P. 96-116. – doi:10.1515/zpch-1889-0108

**84.** *Fesko D. G.* Time-temperature superposition in thermorheologically complex materials / D. G. Fesko, N. W. *Tschoegl //* J. Polym. Sci. Part C Polym. Symp. – 1971. – Vol. 35. – P. 51-69. – doi:10.1002/polc.5070350106

**85.** *Bagley R. L.* The thermorheologically complex material / *R. L. Bagley //* Int. J. Eng. Sci. – 1991. – Vol. 29. – P. 797-806.

**86.** *Klompen E. T. J.* Nonlinear Viscoelastic Behaviour of Thermorheologically Complex Materials / *E. T. J. Klompen, L. E. Govaert //* Mech. Time-Dependent Mater. – 1999. – Vol. 3. – P. 49-69. – doi:10.1023/A:1009853024441

**87.** Rosen S. L. Two-phase polymer systems / S. L. Rosen // Polym. Eng. Sci. – 1967. – Vol. 7. – P. 115-123. – doi:10.1002/pen.760070210

**88.** Imaoka S. Analyzing Viscoelastic Materials / S. Imaoka // ANSYS Advantage. – 2008. – Vol. 2, No. 4. – P. 46-47.

**89.** *Shu L. S.* On anisotropic linear viscoelastic solids / *L. S. Shu, E. T. Onat* // Proc. Fourth Symp. Nav. Struct. Mech. – 1967. – P. 203-215.

**90.** *Taylor Z. A.* On modelling of anisotropic viscoelasticity for soft tissue simulation: Numerical solution and GPU execution / *Z. A. Taylor, O. Comas, M. Cheng* [et al.] // Med. Image Anal. – 2009. – Vol. 13. – P. 234-244. – doi:10.1016/j.media.2008.10.001.

**91.** *Nedjar B.* An anisotropic viscoelastic fibre-matrix model at finite strains: Continuum formulation and computational aspects / *B. Nedjar //* Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2007. – Vol. 196. – P. 1745-1756. doi:10.1016/j.cma.2006.09.009.

**92.** Lubarda V. Viscoelastic response of anisotropic biological membranes. Part II: Constitutive models / V. Lubarda, R. Asaro // Theor. Appl. Mech. – 2014. – Vol. 41. P. 213-231. – doi:10.2298/TAM1403213L.

**93.** Santos J. E. Viscoelastic-stiffness tensor of anisotropic media from oscillatory numerical experiments / J. E. Santos, J. E. M. Carcione, S. Picotti // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2011. – Vol. 200. – P. 896-904. – doi:10.1016/j.cma.2010.11.008.

**94.** Bretin E. Some anisotropic viscoelastic Green functions / E. Bretin, A. Wahab // Contemp. Math. – 2011. – Vol. 548. – P. 129-148.

95. Hwu C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a

**97.** *Poon H.* A finite element constitutive update scheme for anisotropic, viscoelastic solids exhibiting non-linearity of the Schapery type / *H. Poon, M. F. Ahmad //* Int. J. Numer. Methods. Eng. – 1999. – Vol. 46. – P. 2027–2041. – doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19991230)46:12<2027::AID-NME575>3.0.CO;2-5.

**98.** *Gerngross T.* Modelling of Anisotropic Viscoelastic Behaviour in Super-Pressure Balloons / *T. Gerngross, S. Pellegrino* // 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. – 2007. – P. 1-15. – doi:10.2514/6.2007-1808.

**99.** *Rand J. L.* The nonlinear biaxial characterization of balloon film / *J. L. Rand, D. Grant, T. Strganac //* 34th Aerosp. Sci. Meet. Exhib. – Reston: 1996. – doi:10.2514/6.1996-574.

**100.** *Rand J. L.* A constitutive equation for stratospheric balloon materials / *J. L. Rand, W. J. Sterling* // Adv. Sp. Res. – 2006. – Vol. 37. – P. 2087-2091. – doi:10.1016/j.asr.2005.03.046.

**101.** *Staub S.* Multi-scale simulation of viscoelastic fiberreinforced composites / S. *Staub, H. Andrä, M. Kabel* [et al.] // Tech. Mech. – 2012. – Vol. 32. – P. 70-83.

**102.** *Cavallini F.* Symbolic computations in viscoelasticity and anisotropic elasticity / *F. Cavallini, G. Seriani //* 8th Int. Math. Symp. – 2006.

**103.** *Liefeith D.* An anisotropic material model for finite rubber viscoelasticity / D. *Liefeith, S. Kolling //* LS-DYNA Adwenderforum. – Frankenthal: 2007. – P. 25-54.

**104.** *Martynenko V. G.* An Original Technique for Modeling of Anisotropic Viscoelasticity of Orthotropic Materials in Finite Element Codes Applied to the Mechanics of Plates and Shells / *V. G. Martynenko //* Mechanics and Mechanical Engineering. – 2017. – Vol. 21. – P. 389–413.

**105.** *Lvov G. I.* Contact problem of anisotropic viscoelasticity of two cylindrical shells / *G. I. Lvov, V. G. Martynenko //* Innov. Solut. Repair Gas Oil Pipelines. – 2016. – P. 159-171.

**106.** *Lvov G.I.* Development of an analytical model of a repair bandage of a pipeline / G. I. Lvov, V. G. Martynenko // Безразрушителен контрол в съвременната индустрия. – Sofia: 2015. – Vol. 164. – Р. 128-133.

**107.** Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

**108.** *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек / *В. В. Новожилов.* – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. – 380 с.

**109.** Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек / Н. В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.

110. Григоренко Я. М. Основи теорії пластин і оболонок / Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко. – К.: Либідь, 1993. – 232 с.

**111.** Новожилов В. В. Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

**112.** Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

**113.** Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций / А. С. Авдонин. – М.: Машиностроение, 1969. – 402 с.

**114.** Wempner G. Mechanics of Solids and Shells: Theories and Approximations / G. Wempner, D. Talaslidis. – CRC Press, 2003. – 521 p.

**115.** *Axelrad E. L.* Theory of Flexible Shells / *E. L. Axelrad.* – Amsterdam: Elsevier Science Pub, 1987. – 399 p.

**116.** Voyiadjis G. Z. Advances in the Theory of Plates and Shells / G. Z. Voyiadjis, D. Karamanlidis. – Amsterdam: Elsevier Science Pub, 1990. – 313 p.

117. Durban D. Advances in the Mechanics of Plates and

Shells / D. Durban, D. Givoli, J. G. Simmonds. – New York: Kluwer Academic Pub., 2002. – 356 p.

**118.** *Kienzler R.* Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Application / *R. Kienzler, H. Altenbach, I. Ott.* – Bremem: Universitat Bremen, 2002. – 238 p.

**119.** Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

**120.** Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.

**121.** Голованов А. И. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А. И. Голованов, М. С. Корнишин. – Казань: Казанский физ.-тех. ин-т, 1989. – 269 с.

**122.** Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.

**123.** *Chapelle D.* The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals / D. Chapelle, K. J. Bathe. – Berlin: Springer, 2011. – 410 p.

**124.** *Krätzig W. B.* Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells / *W. B. Krätzig, E. Oñate.* – Berlin: Springer, 1990. – 405 p.

**125.** Соломонов Ю. С. Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов / Ю. С. Соломонов, В. П. Георгиевский, А. Я. Недбай и др. – М.: Физматлит, 2009. – 264 с.

**126.** Елпатьевский А. Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов / А. Н. Елпатьевский, В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.

**127.** Бажанов В. Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. В. Копнов и др. – М.: Высшая школа, 1970. – 408 с.

**128.** Vinson J. R. The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials / J. R. Vinson. – Amsterdam: Springer Science+Business Media, 1993. – 545 p.

**129.** *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis / *J. N. Reddy.* – CRC Press, 2004. – 831 p.

**130.** Григолюк Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.

**131.** Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Б. Я. Кантор. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с.

**132.** *Zehil G. P.* Modeling of Nonlinear Viscoelastic Solids with Damage Induced Anisotropy, Dissipative Rolling Contact Mechanics, and Synergic Structural Composites: an abstract ... doctor of philosophy in engineering / *G. P. Zehil.* – Graduate School of Duke University: 2013. – 349 p.

**133.** Бурлаков А. В. Ползучесть тонких оболочек / А. В. Бурлаков, Г. И. Львов, О. К. Морачковский. – Х.: Вища школа, 1977. – 124 с.

**134.** Сироткин О. С. Нелинейные контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций в машиностроении / О С. Сироткин, Г И. Львов, В. С. Боголюбов. – М.: Доби энд Ко, 2008. – 312 с.

**135.** *Carrera E.* Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells / *E. Carrera //* Comp. Meth. Eng. – 2002. – Vol. 9, No. 2. – P. 87-140. – doi:10.1007/BF02736649.

**136.** Cho Ch. Nonlinear Finite Element Analysis of Composite Shell under Impact / Ch. Cho, G. Zhao. Ch. B. Kim // KSME International Journal. – 2000. – Vol. 14, No. 6. – P. 666-674.

**137.** *Gal E.* Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures Using a Flat Triangular Shell Finite Element / *E. Gal., R. Levy //* Computational Methods in Engineering. – 2006. – Vol. 13, No. 3. – P. 331-388. – doi:10.1007/BF02736397.

**138.** *Moreira R. A. S.* A Solid-Shell Finite Element for Non-Linear Geometric and Material Analysis / *R. A. S. Moreira, R. J. A. Sousa, R. A. F. Valente //* Composite Structures. – 2010. – Vol. 92. – P. 1517-1523. – doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.032.

**139.** Araujo A. L. A Viscoelastic Sandwich Finite Element Model for the Analysis of Passive, Active and Hybrid Structures / A. L. Araujo, S. M. M. Soares, C. A. M. Soares // Applied Composite Materials. – 2010. – Vol. 17. – P. 529-542. – doi:10.1007/s10443-010-9141-3.

**140.** *Pinsky P. M.* A Multi-Director Formulation for Nonlinear Elastic-Viscoelastic Layered Shells / *P. M. Pinsky, K. O. Kim* // Computers and Structures. – 1986. – Vol. 24, No. 6. P. 901-913. – doi:10.1016/0045-7949(86)90298-1.

**141.** Johnson A. R. A Viscoelastic Hybrid Shell Finite Element / A. R. Johnson // The Mathematics of Finite Elements and Applications. – 2000. – Vol. 10. – P. 87-96.

**142.** *Padovan J.* Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - I. Theory / *J. Padovan //* Computers and Structures. – 1987. – Vol. 27, No. 2. – P. 249-257. – doi:10.1016/0045-7949(87)90093-9.

**143.** *Kennedy R.* Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - II. Shell and Three-Dimensional Simulations / *R. Kennedy, J. Padovan //* Computers and Structures. – 1987. – Vol. 27, No. 2. – P. 259-273. – doi:10.1016/0045-7949(87)90094-0.

**144.** *Nakajima Y.* Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - III. Impact/Contact Simulations / *Y. Nakajima, J. Padovan //* Computers and Structures. – 1987. – Vol. 27, No. 2. – P. 275-286. – doi:10.1016/0045-7949(87)90095-2.

**145.** *Huh H.* Finite Element Stress Analysis of the Reinforced Tire Contact Problem / *H. Huh, Y. K. Kwak //* Computers and Structures. – 1990. – Vol. 36, No. 5. – P. 871-881. – doi:10.1016/0045-7949(90)90158-X.

**146.** *Gotoh J.* Experimental/Numerical Analyses of a Viscoelastic Body under Rolling Contact / J. Gotoh, Q. Yu, M. Shiratori [et al.] // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1999. – Vol. 3. – P. 245-261. – doi:10.1023/A:1009838504011.

**147.** *Gotoh J.* Viscoelastic Stress Analysis of a Strip Plate under Moving Contact with Dry Friction / J. Gotoh, M. Shiratori, S. Yoneyama [et al.] // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2000. – Vol. 4. – P. 43-56. – doi:10.1023/A:1009879628439

**148.** *Liu J.* Analysis of Dynamic Contact of Cracks in Viscoelastic Media / J. Liu, Sh. K. Sharan // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1995. – Vol. 121. – P. 187-200. – doi:10.1016/0045-7825(94)00702-O.

**149.** Mahmoud F. F. Analysis of Thermoviscoelastic Frictionless Contact of Layered Bodies / F. F. Mahmoud, A. G. El-Shafei, M. A. Attia // Finite Elements in Analysis and Design. – 2011. – Vol. 47. – P. 307-318. – doi:10.1016/j.finel.2010.10.004.

### **References (transliterated):**

**1.** G. Lubin ed. Spravochnik po kompozitsionnym materialam [Handbook of composite materials]. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 1988. 448 p.

**2.** Karpinos D. M. Composite materials. Directory [Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik]. Kyyiv, Naukova dumka, 1985. 588 p.

**3.** Upadhyaya M. Studies on transition metal doped polyaniline and polyaniline-clay nanocomposites: an abstract ... doctor of philosophy in chemistry. Gauhati University, 2013. 170 p.

**4.** Roeseler W. G., B. Sarh W. G. and Kismarton M. U. Composite structures: the first 100 years. Proceedings of the 16th International Conference on Composite Materials. Kyoto, 2007, pp. 1-10.

**5.** Method & Apparatus for Making Glass Wool: U.S. Patent US2133235 A / Slayter G, published 11.11.1933. **6.** Owens Corning Company. Available at: https://www.owenscorning.com. (accessed 11.10.2017).

7. Keller M. E. The Graham Legacy: Graham-Paige to 1932. Turner Publishing Company, 1998. 232 p.

8. Palucka T. and Bensaude-Vincent B. Composites Overview. History of Recent Science and Technology. Available at: https://authors.library.caltech.edu/5456/1/hrst.mit.edu/hrs/materi als/public/composites/Composites\_Overview.htm. (accessed 11.10.2017).

**9.** Pete Scala E. A Brief History of Composites in the U.S. The Dream and the Success. JOM. Springer, 1996, vol. 48, no. 2, pp. 45-48.

**10.** Dupont Company. Available at: http://www.dupont.com. (accessed 11.10.2017).

**11.** Ward D. GE Aviation. TUM 5th Anniversary Symposium, Institute for Carbon Composites. Available at: http://www.lcc.mw.tum.de/fileadmin/w00bkg/www/PDF/Sympo sium/LCC Symposium Ward.pdf. (accessed 11.10.2017).

**12.** Chortis D. I. Structural Analysis of Composite Wind Turbine Blades. Springer, 2013. 239 p.

**13.** Narisaeva I. I. Prochnost' polimernyh materialov [Strength of polymer materials]. Moskow, Himija Publ., 1987. 400 p.

**14.** Kravchuk A. S., Mayboroda V. P. and Urzhumtsev Yu. S. Mekhanika polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 304 p.

**15.** Kapitonov A. M and Redkin V. Ye. Fizikomekhanicheskiye svoystva kompozitsionnykh materialov. Uprugiye svoystva [Physico-mechanical properties of composite materials. Elastic properties]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University Publ., 2013. 532 p.

**16.** Ward I. Mekhanicheskiye svoystva tvordykh polimerov [Mechanical properties of solid polymers]. Moscow, Himija Publ., 1975. 357 p.

**17.** Shen M. Vyazkouprugaya relaksatsiya v polimerakh [Viscoelastic relaxation in polymers]. Moscow, Mir Publ., 1974. 270 p.

**18.** Poberdrya B. Ye. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Moscow University Publ., 1984. 336 p.

**19.** Ferry J. D. Viscoelastic Properties of Polymers. John Wiley & Sons Publ., 1980. 641 p.

**20.** Zak G. and Haberer M. Mechanical properties of shortfibre layered composites: prediction and experiment. Rapid. Prototyp. J. 2000, vol. 6, pp. 107-118. doi:10.1108/13552540010323583.

**21.** Sun Z, Garboczi E. J. and Shah S. P. Modeling the elastic properties of concrete composites: Experiment, differential effective medium theory, and numerical simulation. Cem. Concr. Compos. 2007, vol. 29, pp. 22-38.

**22.** Gang P., Jiacheng F., Yuandong L., et al. Analysis and discussion on impact shear experiment technique of composite laminate. Proc. 2011 Int. Conf. Electron. Optoelectron. 2011, pp. 350-353. doi:10.1109/ICEOE.2011.6013378.

**23.** Durai Prabhakaran R. T., Andersen T. L., Bech J. I., et al. Investigation of mechanical properties of unidirectional steel fiber/polyester composites: Experiments and micromechanical predictions. H. Polym Compos. 2016, vol. 37, pp. 627-644. doi:10.1002/pc.23220.

**24.** Saleh M. N., Lubineau G., Potluri P., et al. Micromechanics based damage mechanics for 3D orthogonal woven composites: Experiment and numerical modelling. Compos. Struct. 2016, vol. 156, pp. 115-124. doi:10.1016/j.compstruct.2016.01.021.

**25.** Lv L., Huang Y., Cui J., et al. Bending properties of three-dimensional honeycomb sandwich structure composites: experiment and finite element method simulation. Text. Res. J. 2017, pp. 1-8. doi:10.1177/0040517517703602.

**26.** Movaghghar A and Lvov G. I. An Energy Model for Fatigue Life Prediction of Composite Materials Using Continuum Damage Mechanics. Appl. Mech. Mater. 2011, vol. 110–116. pp. 1353-1360. doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.110-116.1353.

**27.** Seifert O. E., Schumacher S. C. and Hansen A. C. Viscoelastic properties of a glass fabric composite at elevated temperatures: experimental and numerical results. Compos. Part B. Eng. 2003, vol. 34, pp. 571-586. doi:10.1016/S1359-8368(03)00078-7.

**28.** Abot J., Yasmin A., Jacobsen A., et al. In-plane mechanical, thermal and viscoelastic properties of a satin fabric carbon/epoxy composite. Compos. Sci. Technol. 2004, vol. 64, pp. 263-268. doi:10.1016/S0266-3538(03)00279-3.

**29.** Chan A., Liu X. L. and Chiu W. K. Viscoelastic interlaminar shear modulus of fibre reinforced composites. Compos. Struct. 2006, vol. 75, pp. 185-191. doi:10.1016/j.compstruct.2006.04.058.

**30.** Guojun H. A theoretical and numerical study of crack propagation along a bimaterial interface with applications to IC packaging: a thesis ... doctor of philosophy in engineering. National University of Singapore, 2006. 183 p.

**31.** Silva P., Valente T., Azenha M., et al. Viscoelastic response of an epoxy adhesive for construction since its early ages: Experiments and modelling. Compos. Part B Eng. 2017, vol. 116, pp. 266-277. doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.047.

**32.** Ciambella J., Paolone A. and Vidoli S. A comparison of nonlinear integral-based viscoelastic models through compression tests on filled rubber. Mech. Mater. 2010, vol. 42, pp. 932-944. doi:10.1016/j.mechmat.2010.07.007.

**33.** Stanier D. C., Patil A. J., Sriwong C., et al. The reinforcement effect of exfoliated graphene oxide nanoplatelets on the mechanical and viscoelastic properties of natural rubber. Compos. Sci. Technol. 2014, vol. 95, pp. 59-66. doi:10.1016/j.compscitech.2014.02.007.

**34.** Shrotriya P. and Sottos N. Viscoelastic response of woven composite substrates. Compos. Sci. Technol. 2005, vol. 65, pp. 621-634. doi:10.1016/j.compscitech.2004.09.002.

**35.** Park S. J., Liechti K. M. and Roy S. Simplified Bulk Experiments and Hygrothermal Nonlinear Viscoelasticity. Mech. Time-Dependent Mater. 2004, vol. 8, pp. 303-344. doi:10.1007/s11043-004-0942-3.

**36.** Tzeng J. T., Emerson R. P. and O'Brien D. J. Viscoelasticity Analysis and Experimental Validation of Anisotropic Composite Overwrap Cylinders. Mech. Solids, Struct. Fluids, ASME. 2012, vol. 8, pp. 429. doi:10.1115/IMECE2012-87818.

**37.** Kohl J. G., Bierwisch N., Ngo T. T., et al. Determining the viscoelastic behavior of polyester fiberglass composite by continuous micro-indentation and friction properties. J. of Wear. 2016, vol. 350–351, pp. 63-67. doi:10.1016/j.wear.2016.01.005.

**38.** Ropers S., Kardos M. and Osswald T. A. A thermoviscoelastic approach for the characterization and modeling of the bending behavior of thermoplastic composites. Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. 2016, vol. 90, pp. 22-32. doi:10.1016/j.compositesa.2016.06.016.

**39.** Kwon S., Adachi T., Araki W., et al. Thermo-viscoelastic properties of silica particulate-reinforced epoxy composites: Considered in terms of the particle packing model. Acta Mater. 2006, vol. 54, pp. 3369-3374. doi:10.1016/j.actamat.2006.03.026.

**40.** Das R. Stress Relaxation Behavior of Carbon Fiber-Epoxy Prepreg Composites During and After Cure: a thesis ... master of science in mechanical engineering. Bangladesh University of Engineering and Technology, 2012. 82 p.

**41.** Amadori S and Catania G. Robust identification of the mechanical properties of viscoelastic non-standard materials by means of frequency domain experimental measurements. Compos. Struct. 2016. doi:10.1016/j.compstruct.2016.11.029.

**42.** Feng J. and Guo Z. Temperature-frequency-dependent mechanical properties model of epoxy resin and its composites. Compos. Part B Eng. 2016, vol. 85, pp. 161-169. doi:10.1016/j.compositesb.2015.09.040.

**43.** Montazeri A. and Montazeri N. Viscoelastic and mechanical properties of multi walled carbon nanotube/epoxy composites with different nanotube content. Mater. Des. 2011, vol. 32, pp. 2301-2307. doi:10.1016/j.matdes.2010.11.003.

**44.** Nairn J. A. Measurement of polymer viscoelastic response during an impact experiment. Polym. Eng. Sci. 1989, vol. 29, pp. 654-661. doi:10.1002/pen.760291007.

**45.** Kostopoulos V. and Korontzis D. T. A new method for the determination of viscoelastic properties of composite laminates: a mixed analytical–experimental approach. Compos. Sci. Technol. 2003, vol. 63, pp. 1441-1452. doi:10.1016/S0266-3538(03)00086-1.

**46.** Shivakumar E., Das C., Banik K., et al. Viscoelastic properties of in situ composite based on ethylene acrylic elastomer (AEM) and liquid crystalline polymer (LCP) blend. Compos. Sci. Technol. 2007, vol. 67, pp. 1202-1209. doi:10.1016/j.compscitech.2006.05.004.

**47.** Abouhamzeh M., Sinke J., Jansen K. M. B. et al. Kinetic and thermo-viscoelastic characterisation of the epoxy adhesive in GLARE. Compos. Struct. 2015, vol. 124, pp. 19-28. doi:10.1016/j.compstruct.2014.12.069.

**48.** Kumar N. and Singh S. P. Experimental study on vibration and damping of curved panel treated with constrained viscoelastic layer. Compos. Struct. 2010, vol. 92, pp. 233-243. doi:10.1016/j.compstruct.2009.07.011.

**49.** Hujare P. P. and Sahasrabudhe A. D. Experimental Investigation of Damping Performance of Viscoelastic Material Using Constrained Layer Damping Treatment. Procedia. Mater. Sci. 2014, vol. 5, pp. 726-733. doi:10.1016/j.mspro.2014.07.321.

**50.** Altenbach H. and Fedorov V. A. Structural elastic and creep models of a UD composite in longitudinal shear. Mech. Compos. Mater. 2007, vol. 43. pp. 289-298. doi:10.1007/s11029-007-0028-9.

**51.** Upadhyaya P. and Upadhyay C. S. A threedimensional micromechanical model to predict the viscoelastic behavior of woven composites. Compos. Struct. 2011, vol. 93, pp. 2733-2739. doi:10.1016/j.compstruct.2011.05.031.

**52.** Levin V., Kanaun S. and Ronquillo J. G. Effective properties of viscoelastic media with crack-like inclusions. Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. 2012, vol. 53, pp. 1-9. doi:10.1016/j.ijrmms.2012.03.007.

**53.** Hoang-Duc H. and Bonnet G. Effective properties of viscoelastic heterogeneous periodic media: An approximate solution accounting for the distribution of heterogeneities Mech. Mater. 2013, vol. 56, pp. 71-83. doi:10.1016/j.mechmat.2012.09.006.

**54.** Andrianov I. V., Danishevs'kyy V. V., Guillet A., et al. Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear. Eur. J. Mech. - A/Solids. 2005, vol. 24, pp. 195-206. doi:10.1016/j.euromechsol.2005.01.006.

**55.** Muddasani M., Sawant S. and Muliana A. Thermoviscoelastic responses of multilayered polymer composites: Experimental and numerical studies. Compos. Struct. 2010, vol. 92, pp. 2641-2652. doi:10.1016/j.compstruct.2010.03.003.

**56.** Yang L., Wu Z., Cao Y., et al. Micromechanical modelling and simulation of unidirectional fibre-reinforced composite under shear loading. J. Reinf. Plast. Compos. 2015, vol. 34, pp. 72-83. doi:10.1177/0731684414562873.

**57.** Pathan M. V., Tagarielli V. L. and Patsias S. Numerical predictions of the anisotropic viscoelastic response of unidirectional fibre composites. Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. 2017, vol. 93, pp. 18-32. doi:10.1016/j.compositesa.2016.10.029.

**58.** Jain D., Mukherjee A. and Kwatra N. Topological disorder of microstructure in fiber-reinforced polymer composites: Diffusion response. J. Reinf. Plast. Compos. 2015, vol. 34, pp. 49-59. doi:10.1177/0731684414562224.

**59.** Li H., Zhang B. and Bai G. Effects of constructing different unit cells on predicting composite viscoelastic properties. Compos. Struct. 2015, vol. 125, pp. 459-466. doi:10.1016/j.compstruct.2015.02.028.

**60.** Martynenko V. G. and Lvov G. I. Numerical prediction of temperature dependent anisotropic viscoelastic properties of fiber reinforced composite. J. Reinf. Plast. Compos. 2017, pp. 1-12. doi:10.1177/0731684417727064.

**61.** Wang G. and Pindera M. J. Locally-exact homogenization of viscoelastic unidirectional composites. Mech. Mat. 2016. vol. 103, pp. 95-109. doi:10.1016/j.mechmat.2016.09.009.

**62.** Shoneich M., Dinzart F., Sabar H., et al. A coated inclusion-based homogenization scheme for viscoelastic composites with interphases. Mech. Mat. 2016, pp. 1-36. doi:10.1016/j.mechmat.2016.11.009.

**63.** Chen Q., Wang G., Cheng X., et al. Finite-Volume Homogenization of Elastic/Viscoelastic Periodic Materials. Comp. Struct. 2017, pp. 1-38. doi: 10.1016/j.compstruct. 2017.09.044.

**64.** Covezzi F., de Miranda S., Marfia S., et al. Homogenization of elastic-viscoplastic composites by the Mixed TFA. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2017, pp. 1-36. doi:10.1016/j.cma.2017.02.009.

**65.** Adamov A. A. and Matveenko V. P. Metody prikladnoy vyazkouprugosti [Methods of applied viscoelasticity]. Ekaterinburg, UB RAS, 2003. 411 p.

**66.** Moskvitin V. V. Soprotivleniye vyazkouprugikh materialov primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tvordom toplive [Resistance of viscoelastic materials with respect to charges of rocket engines on solid fuels], Moskow, Nauka Publ., 1972. 328 p.

**67.** Christensen R. M. Vvedeniye v teoriyu vyazkouprugosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]. Moskow, Mir Publ., 1974. 338 p.

**68.** Kuznetsov G. B. Uprugost', vyazkouprugost' i dlitel'naya prochnost' tsilindricheskikh i sfericheskikh tel [Elasticity, viscoelasticity and long-term strength of cylindrical and spherical bodies]. Moskow, Nauka Publ., 1979. 112 p.

**69.** Makarova M. A., Gusev A. S., Pyshnogray G. V., et al. Nelineynaya teoriya vyazkouprugosti lineynykh polimerov [Nonlinear theory of viscoelasticity of linear polymers]. Elektronnyy fiziko-tekhnicheskiy zhurnal [Electronic Physical-Technical Journal]. 2007, vol. 2, pp. 1-54. Available at: http://eftj.secna.ru/vol2/070201.pdf. (accessed 11.10.2017).

**70.** Yudin V. Ye. and Leksovskiy A.M. Vyazkouprugosť polimernoy matritsy i razrusheniye teplostoykikh voloknistykh kompozitov [Viscoelasticity of a polymer matrix and destruction of heat-resistant fibrous composites]. Fizika tvordogo tela [Solid State Physics]. 2005, vol. 47, no. 5, pp. 944-950.

**71.** Galin L. A. Kontaktnyye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moskow, Nauka Publ., 1980. 304 p.

**72.** Fabrizio M. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity. Society for Industrial Mathematics, 1992. 203 p.

**73.** Gutierrez-Lemini D. Engineering Viscoelasticity. New York, Springer Science+Business Media, 2014. 353 p.

**74.** Cho K. S. Viscoelasticity of Polymer. Theory and Numerical Algorithms. Dordrecht, Springer Science+Business Media, 2016. 612 p.

**75.** Shaw M. T. and MacKnight W. J. Introduction to Polymer Viscoelasticity. 3rd edition. Hoboken, John Wiley & Sons, 2005. 316 p.

**76.** Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M., et al. Polymer Viscoelasticity: Stress and Strain in Practice. CRC Press, 1999. 904 p.

77. Roylance D. Engineering Viscoelasticity. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2001. 37 p. Available at: http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/visco.pdf. (accessed 11.10.2017)

**78.** Shinozuka M. Thermorheologically simple viscoelastic materials. AIAA J. 1965, vol. 3, pp. 375-377. doi:10.2514/3.2870.

**79.** Van Gurp M. and Palmen J. Time-temperature superposition for polymeric blends. J. Rheol. Bull. 1998, vol. 65, pp. 5-8.

**80.** Williams M. L., Landel R. F. and Ferry J. D. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids. Journal of the American Chemical Society. 1955, vol. 77, pp. 3701-3706. doi:10.1021/ja01619a008.

**81.** Tool A. Q. Relation between Inelastic Deformability and Thermal Expansion of Glass in its Annealing Range. Journal of the American Ceramic Society. 1946, vol. 29, no. 9, pp. 240-253. doi:10.1111/j.1151-2916.1946.tb11592.x.

**82.** Narayanaswamy O. S. A Model of Structural Relaxation in Glass. Journal of the American Ceramic Society. 1971, vol. 54, no. 10, pp. 491-498. doi:10.1111/j.1151-2916.1946.tb11592.x.

**83.** Arrhenius S. A. Über die Dissociationswärme und den Einfluß der Temperatur auf den Dissociationsgrad der Elektrolyte. Z. Phys. Chem. 1889, vol. 4, pp. 96-116. doi:10.1515/zpch-1889-0108.

**84.** Fesko D. G. and Tschoegl N. W. Time-temperature superposition in thermorheologically complex materials. J. Polym. Sci. Part C Polym. Symp. 1971, vol. 35, pp. 51-69. doi:10.1002/polc.5070350106.

**85.** Bagley R. L. The thermorheologically complex material. Int. J. Eng. Sci. 1991, vol. 29, pp. 797-806.

**86.** Klompen E. T. J. and Govaert L. E. Nonlinear Viscoelastic Behaviour of Thermorheologically Complex Materials. Mech. Time-Dependent Mater. 1999, vol. 3, pp. 49-69. doi:10.1023/A:1009853024441.

**87.** Rosen S. L. Two-phase polymer systems. Polym. Eng. Sci. 1967, vol. 7, pp. 115-123. doi:10.1002/pen.760070210.

**88.** Imaoka S. Analyzing Viscoelastic Materials. ANSYS Advantage. 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46-47.

**89.** Shu L. S. and Onat E. T. On anisotropic linear viscoelastic solids. Proc. Fourth Symp. Nav. Struct. Mech. 1967, pp. 203-215.

**90.** Taylor Z. A., Comas O., Cheng M., et al. On modelling of anisotropic viscoelasticity for soft tissue simulation: Numerical solution and GPU execution. Med. Image Anal. 2009, vol. 13, pp. 234-244. doi:10.1016/j.media.2008.10.001.

**91.** Nedjar B. An anisotropic viscoelastic fibre-matrix model at finite strains: Continuum formulation and computational aspects. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2007, vol. 196, pp. 1745-1756. doi:10.1016/j.cma.2006.09.009.

**92.** Lubarda V. and Asaro R. Viscoelastic response of anisotropic biological membranes. Part II: Constitutive models. Theor. Appl. Mech. 2014, vol. 41, pp. 213-231. doi:10.2298/TAM1403213L.

**93.** Santos J. E., Carcione J. E. M. and Picotti S. Viscoelastic-stiffness tensor of anisotropic media from oscillatory numerical experiments. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2011. vol. 200, pp. 896-904. doi:10.1016/j.cma.2010.11.008.

**94.** Bretin E. and Wahab A. Some anisotropic viscoelastic Green functions. Contemp. Math. 2011, vol. 548, pp. 129-148.

**95.** Hwu C. and Chen Y. C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a transformed boundary element method. Procedia. Eng. 2011, vol. 10, pp. 3038-3043. doi:10.1016/j.proeng.2011.04.503.

**96.** Bai T. and Tsvankin I. Time-domain finite-difference modeling for attenuative anisotropic media. Geophysics. 2016. vol. 81, pp. 163-176. doi:10.1190/geo2015-0424.1.

**97.** Poon H. and Ahmad M. F. A finite element constitutive update scheme for anisotropic, viscoelastic solids exhibiting non-linearity of the Schapery type. Int. J. Numer. Methods. Eng. 1999. vol. 46, pp. 2027–2041. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19991230)46:12<2027::AID-NME575>3.0.CO;2-5.

**98.** Gerngross T. and Pellegrino S. Modelling of Anisotropic Viscoelastic Behaviour in Super-Pressure Balloons. 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. 2007, pp. 1-15. doi:10.2514/6.2007-1808.

99. Rand J. L., Grant D. and Strganac T. The nonlinear bi-

axial characterization of balloon film. 34th Aerosp. Sci. Meet. Exhib., Reston, 1996. doi:10.2514/6.1996-574.

**100.** Rand J. L. and Sterling W. J. A constitutive equation for stratospheric balloon materials. Adv. Sp. Res. 2006, vol. 37, pp. 2087-2091. doi:10.1016/j.asr.2005.03.046.

**101.** Staub S., Andrä H., Kabel M., et al. Multi-scale simulation of viscoelastic fiber-reinforced composites. Tech. Mech. 2012, vol. 32, pp. 70-83.

**102.** Cavallini F. and Seriani G. Symbolic computations in viscoelasticity and anisotropic elasticity. 8th Int. Math. Symp., 2006.

**103.** Liefeith D. and Kolling S. An anisotropic material model for finite rubber viscoelasticity. LS-DYNA Adwenderforum, Frankenthal, 2007, pp. 25-54.

**104.** Martynenko V. G. An Original Technique for Modeling of Anisotropic Viscoelasticity of Orthotropic Materials in Finite Element Codes Applied to the Mechanics of Plates and Shells. Mechanics and Mechanical Engineering. 2017, vol. 21, pp. 389–413.

**105.** Lvov G. I. and Martynenko V. G. Contact problem of anisotropic viscoelasticity of two cylindrical shells. Innov. Solut. Repair Gas Oil Pipelines. 2016, pp. 159-171.

**106.** Lvov G.I. and Martynenko V. G. Development of an analytical model of a repair bandage of a pipeline. Безразрушителен контрол в съвременната индустрия, Sofia, 2015, vol. 164, pp. 128-133.

**107.** Tymoshenko S. P. and Voinovsky-Krieger S. Plastiny i obolochki [Plates and Shells]. Moskow, Nauka Publ., 1966. 636 p.

**108.** Novozhilov V. V. Teoriya tonkikh obolochek [The theory of thin shells]. St. Petersburg, St. Petersburg University publ., 2010. 380 p.

**109.** Kolkunov N. V. Osnovy raschota uprugikh obolochek [Osnovy raschota uprugikh obolochek]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1972. 296 p.

**110.** Grigorenko Ya. M. and Molchenko L. V. Osnovy teoriyi plastyn i obolonok [Fundamentals of the theory of plates and shells]. Kyiv, Lybid Publ., 1993. 232 p.

**111.** Novozhilov V. V., Chernykh K. F. and Mikhaylovskiy Ye. I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Polytechnic Publ., 1991. 656 p.

**112.** Goldenweiser A. L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [The theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 512 p.

**113.** Avdonin A. S. Prikladnyye metody raschota obolochek i tonkostennykh konstruktsiy [Applied methods for the calculation of shells and thin-walled structures]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1969. 402 p.

**114.** Wempner G. and Talaslidis D. Mechanics of Solids and Shells: Theories and Approximations. CRC Press, 2003. 521 p.

**115.** Axelrad E. L. Theory of Flexible Shells. Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1987. 399 p.

**116.** Voyiadjis G. Z. and Karamanlidis D. Advances in the Theory of Plates and Shells. Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1990. 313 p.

**117.** Durban D., Givoli D. and Simmonds J. G. Advances in the Mechanics of Plates and Shells. New York, Kluwer Academic Publ., 2002. 356 p.

**118.** Kienzler R., Altenbach H. and Ott I. Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Application. Bremem, Universitat Bremen, 2002. 238 p.

**119.** Zienkiewicz O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [The finite element method in engineering science]. Moscow, Mir Publ., 1975. 541 p.

**120.** Obraztsov I. F., Saveliev L. M. and Khazanov H. S. Metod konechnykh elementov v zadachakh stroiteľnov mekhaniki letateľnykh apparatov [The finite element method in the problems of structural mechanics of aircrafts. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1985. 392 p.

**121.** Golovanov A. I. and Kornishin M. S. Vvedeniye v metod konechnykh elementov statiki tonkikh obolochek [Intro-

duction to the finite element method of static thin shells]. Kazan, Kazan Physico-Technical University Publ., 1989. 269 p.

**122.** Rickards R. B. Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin [The finite element method in the theory of shells and plates]. Riga, Zinatne Publ., 1988. 284 p.

**123.** Chapelle D. and Bathe K. J. The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals. Berlin, Springer, 2011. 410 p.

**124.** Krätzig W. B. and Oñate E. Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells. Berlin, Springer, 1990. 405 p.

**125.** Solomonov Yu. S., Georgiyevskiy V. P., Nedbay A. Ya., et al. Metody raschota tsilindricheskikh obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Methods for calculating cylindrical shells of composite materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 264 p.

**126.** Elpatievsky A. N. and Vasiliev V. V. Prochnost' tsilindricheskikh obolochek iz armirovannykh materialov [Strength of cylindrical shells of reinforced materials]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1972. 168 p.

**127.** Bazhanov V. L., Goldenblat I. I., Kopnov V. V., et al. Plastinki i obolochki iz stekloplastikov [Plates and shells of fiberglass]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1970. 408 p.

**128.** Vinson J. R. The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials. Amsterdam, Springer Science+Business Media, 1993. 545 p.

**129.** Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press, 2004. 831 p.

**130.** Grigolyuk E. I. and Tolkachev V. M. Kontaktnyye zadachi teorii plastin i obolochek [Contact problems of the theory of plates and shells]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1980. 411 p.

**131.** Kantor B. Ya. Kontaktnyye zadachi nelineynoy teorii obolochek vrashcheniya [Contact problems of the nonlinear theory of shells of revolution]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1990. 136 p.

**132.** Zehil G. P. Modeling of Nonlinear Viscoelastic Solids with Damage Induced Anisotropy, Dissipative Rolling Contact Mechanics, and Synergic Structural Composites: an abstract ... doctor of philosophy in engineering. Graduate School of Duke University, 2013. 349 p.

**133.** Burlakov A. V., Lvov G. I. and Morachkovskiy O. K. Polzuchest' tonkikh obolochek [Creep of thin shells]. Kharkiv, Vyshcha shkola, 1977. 124 p.

**134.** Sirotkin O. S., Lvov G. I. and Boholyubov B. S. Nelineynyye kontaktnyye zadachi dlya tonkostennykh elementov konstruktsiy v mashinostroyenii [Nonlinear contact problems for thin-walled structural elements in mechanical engineering]. Moscow, Doby and Co Publ., 2008. 312 p.

**135.** Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. Comp. Meth. Eng. 2002. vol. 9, no. 2, pp. 87-140. doi:10.1007/BF02736649

**136.** Cho Ch., Zhao G. and Kim Ch. B. Nonlinear Finite Element Analysis of Composite Shell under Impact. KSME International Journal. 2000, vol. 14, no. 6, pp. 666-674.

**137.** Gal E. and Levy R. Geometrically Nonlinear Analysis of Shell Structures Using a Flat Triangular Shell Finite Element. Computational Methods in Engineering. 2006, vol. 13, no. 3, pp. 331-388. doi:10.1007/BF02736397.

**138.** Moreira R. A. S., Sousa R. J. A. and Valente R. A. F. A Solid-Shell Finite Element for Non-Linear Geometric and Material Analysis. Composite Structures. 2010, vol. 92, pp. 1517-1523. doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.032.

**139.** Araujo A. L., Soares S. M. M. and Soares C. A. M. A Viscoelastic Sandwich Finite Element Model for the Analysis of Passive, Active and Hybrid Structures. Applied Composite Materials. 2010, vol. 17, pp. 529-542. doi:10.1007/s10443-010-9141-3.

**140.** Pinsky P. M. and Kim K. O. A Multi-Director Formulation for Nonlinear Elastic-Viscoelastic Layered Shells. Computers and Structures. 1986, vol. 24, no. 6, pp. 901-913. doi:10.1016/0045-7949(86)90298-1.

**141.** Johnson A. R. A Viscoelastic Hybrid Shell Finite Element. The Mathematics of Finite Elements and Applications. 2000, vol. 10, pp. 87-96.

**142.** Padovan J. Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - I. Theory. Computers and Structures. 1987. vol. 27, no. 2, pp. 249-257. doi:10.1016/0045-7949(87)90093-9.

**143.** Kennedy R. and Padovan J. Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - II. Shell and Three-Dimensional Simulations. Computers and Structures. 1987, vol. 27, no. 2, pp. 259-273. doi:10.1016/0045-7949(87)90094-0.

**144.** Nakajima Y. and Padovan J. Finite Element Analysis of Steady and Transiently Moving/Rolling Nonlinear Viscoelastic Structure - III. Impact/Contact Simulations. Computers and Structures. 1987, vol. 27, no. 2, pp. 275-286. doi:10.1016/0045-7949(87)90095-2.

145. Huh H. and Kwak Y. K. Finite Element Stress Analysis of the Reinforced Tire Contact Problem. Computers and Structures. 1990, vol. 36, no. 5, pp. 871-881. doi:10.1016/0045-7949(90)90158-X.

**146.** Gotoh J., Yu Q., Shiratori M., et al. Experimental/Numerical Analyses of a Viscoelastic Body under Rolling Contact. Mechanics of Time-Dependent Materials. 1999, vol. 3, pp. 245-261. doi:10.1023/A:1009838504011.

**147.** Gotoh J., Shiratori M., Yoneyama S., et al. Viscoelastic Stress Analysis of a Strip Plate under Moving Contact with Dry Friction. Mechanics of Time-Dependent Materials. 2000, vol. 4, pp. 43-56. doi:10.1023/A:1009879628439.

**148.** Liu J. and Sharan Sh. K. Analysis of Dynamic Contact of Cracks in Viscoelastic Media. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1995, vol. 121, pp. 187-200. doi:10.1016/0045-7825(94)00702-O.

**149.** Mahmoud F. F., El-Shafei A. G. and Attia M. A. Analysis of Thermoviscoelastic Frictionless Contact of Layered Bodies. Finite Elements in Analysis and Design. 2011, vol. 47, pp. 307-318. doi:10.1016/j.finel.2010.10.004.

Надійшла (received) 19.10.2017

### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Огляд методів розв'язання контактних задач в'язкопружних композиційних оболонок / В. Г. Мартиненко, Г. І. Львов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 32-48. – Бібліогр.: 149 назв. – ISSN 2078-9130.

Обзор методов решения контактных задач вязкоупругих композиционных оболочек / В. Г. Мартыненко, Г. И. Львов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 32-48. – Бібліогр.: 149 назв. – ISSN 2078-9130.

Review of methods for solving the contact problems of viscoelastic composite shells / V. G. Martynenko, G. I. Lvov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 32-48. – Bibliogr.: 149. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Мартиненко Володимир Геннадійович* – магістр комп'ютерної механіки, аспірант кафедри Динаміки та міцності машин, НТУ «ХПІ», тел.: (099) 624-72-45, e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com.

*Мартыненко Владимир Геннадьевич* – магистр компьютерной механики, аспирант кафедры Динамики и прочности машин, НТУ «ХПИ», тел.: (099) 624-72-45, e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com.

*Martynenko Volodymyr Gennadiyovych* – Master of Computational Mechanics, Postgraduate of the Dynamic and Strength of Machines Department, NTU "KhPI", tel.: (099) 624-72-45, e-mail: martynenko.volodymyr@gmail.com.

*Львов Геннадій Іванович* – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Динаміки та міцності машин, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-63-43, e-mail: lvovdpm@ukr.net.

*Львов Геннадий Иванович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры Динамики и прочности машин, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-63-43, e-mail: lvovdpm@ukr.net.

*Lvov Gennadii Ivanovych* – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Head of the Dynamic and Strength of Machines Department, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-63-43, e-mail: lvovdpm@ukr.net.

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115766

# С. А. НАЗАРЕНКО; Н. А. ТКАЧУК

## ОБЗОР НЕКОТОРЫХ КЛЮЧЕВЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЙ УЧЕНЫХ НТУ «ХПИ» В ОБЛАСТИ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

У статті виконано огляд етапів розвитку основних напрямків досліджень вчених і випускників НТУ «ХПІ» в галузі динаміки конструкцій: від будівельних стрижневих систем до унікальних космічних установок. Простежено еволюцію основних досягнень в XIX – XXI ст. в галузі теоретичного, експериментального і комп'ютерного дослідження науково-технічних проблем динаміки. Досліджено, як математизація дослідницької діяльності привела до появи нових моделей і методик аналізу динаміки конструкцій з багаторівневою структурою в умовах інтенсивного навантаження. Відтворена зміна організаційних форм роботи вчених від індивідуальної до колективної: створення лабораторій, галузевих НДІ і КБ, інститутів Академії наук, науково – навчальних кластерів і комплексів.

Ключові слова: динаміка, конструкція, теорія коливань, модель, методика, аналіз, вібрація, науково - навчальний кластер, машина.

В статье сделан обзор этапов развития основных направлений исследований ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций: от строительных стержневых систем до уникальных космических установок. Рассмотрена эволюция основных достижений в XIX – XXI ст. в области теоретического, экспериментального и компьютерного исследования научно-технических проблем динамики. Показано, как математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых моделей и методик анализа динамики конструкций с многоуровневой структурой в условиях интенсивных нагружений. Представлено изменение организационных форм работы ученых от индивидуальной к коллективной: созданию лабораторий, отраслевых НИИ, институтов Академии наук, научно – учебных кластеров и комплексов.

Ключевые слова: динамика, конструкции, теория колебаний, модели, методика, анализ, вибрация, научно-учебный кластер, машина.

This paper reviewed and analyzed the stages of establishment and development of the main directions of research and pedagogic activity of scientists and graduates of National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute" in the field of dynamics of constructions. The article considers the evolution of the main achievements of scientists and graduates of NTU "KhPI" in the 19 – 21 centuries in the field of theoretical, experimental and computer research of scientific and technical problems of dynamics of constructions: from building rod systems to unique space installations. The beginning of the Ukrainian technical science in the field of dynamics is associated with the NTU "KhPI". It is shown how the mathematiation of research activity led to the emergence of new models and techniques for analyzing the dynamics of constructions with a multilevel structure under conditions of intense loading. The fundamental scientific trends of dynamics of constructions in extreme loading were discovered and explored here. Changes in organizational forms of work of scientists from individual to collective are presented: the creation of laboratories, branch research institutes and design bureaus, institutes of the Academy of Sciences, scientific and educational clusters and complexes. The most important phases of formation and development of the research school of dynamics of constructions are shown. The world–famous scientists who worked at the NTU "KhPI" or graduated it are mentioned (V. Kirpichev, A. Lyapunov, V. Steklov, D. Zernov, Ya. Stolyarov, G. Proskura, G. Botezat, I. Babakov, V. Mayzel, A. Filippov, G. Lozino–Lozinsky, L. Landau, E. Lifshits, A. Volmir, B. Kogan, A. Bogolyubov, S. Bogomolov, E. Goloskokov, A. Podgorny).

Keywords: vibration, technique, analysis, dynamic, model, multilevel structure, intensive loading, scientific and educational clusters.

Введение. Необходимость проведения больших объемов расчетных и экспериментальных работ по отработке функционирования многообразных модификаций конструкций во всевозможных эксплуатационных режимах, внутренняя логика развития различных научных дисциплин обусловливают создание эффективных методов моделирования [1–5]. В статье сделан обзор эволюции основных направлений исследований ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций: от строительных стержневых систем до уникальных космических установок.

В 1885 году открылся Харьковский практический технологический институт (ХПТИ), который с 1898 назывался Харьковский технологический институт (ХТИ), а с конца 1929 – Харьковский политехнический институт (ХПИ). В 1930 году на базе ХПИ в Харькове были организованы специализированные институты для подготовки инженерно-технических кадров, в т. ч. механико-машиностроительный (ХММИ), электротехнический (ХЭТИ), авиамоторный (авиационный, ХАИ), инженеров железнодорожного транспорта (ХИИТ). В 1949 году произошло восстановление ХПИ (в настоящее время Национальный технический университет «ХПИ», НТУ «ХПИ») [1].

Основная часть. Первый директор ХПТИ В. Л. Кирпичев стремился к развитию математики, связанной с приложениями и включающей методы вычислений, т. е. получения решений практических задач в численном виде [1]. Он открыл значимость теоремы Рэлея (принцип взаимности реакций) для строительной механики. Почетный член многих Академий наук (АН) С. П. Тимошенко подчеркивал: «Благодаря Кирпичеву методы Рэлея нашли широкое применение в России, а позже и в других странах» [2].

Профессор Кирпичев заведовал механической лабораторией ХПТИ с 1886 по 1898 год, быстро ставшей лучшей в Российской империи. В ней проводились исследования влияния примесей; обработки и эксплуатации на механические свойства металлов [1].

Математизация проектной деятельности привела к появлению эффективных подходов и методик анализа механических систем: теории колебаний, гидродинамики; упругости, аэродинамики [3]. Рост запросов к мощности машин с синхронным снижением их веса, появление турбин и двигателей существенно увеличили значимость проблем механических колебаний.

В знаменитой книге В. Л. Кирпичева «Беседы о механике» (шестое издание – 2008 год) рассмотрены общие законы динамики; теорема о подобии в динамике, устойчивость гироскопа, динамические модели; вертикальное падение тяжелого тела, снабженного парашютом; гармоническое движение в машинах; колебания, когда действует сопротивление, пропорциональное скорости; колебания регуляторов паровых машин, принужденные (насильственные) колебания, накопление колебаний (резонанс); случай, когда действует несколько периодических сил и др.

В. Л. Кирпичев привлек к чтению в ХПТИ с 1887 по 1894 год курса аналитической механики начинающего приват-доцента *А. М. Ляпунова*. В тот период ученый написал докторскую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения», ставшую всемирно известной. В этой основополагающей работе А. М. Ляпунов создал теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров [3–5].

Курс лекций по геодезии (1886–1893) в ХПТИ читал *Г. В. Левицкий* (в дальнейшем Председатель Русского астрономического общества), изучавший микроколебания земной поверхности, стараясь найти критерии для предвидения землетрясений [6].

С 1893 по 1905 год курсы лекций по аналитической механике в ХТИ вел В. А. Стеклов. В 1901 г. он получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации «Общие методы решения основных задач математической физики» [6]. Разработанная им методика заключалась в разложении решений краевых задач в ряды по собственным (фундаментальным) функциям. Работы Стеклова по уравнениям в частных производных касались и колебаний упругих (или квазиупругих) тел. Первый вице - президент АН СССР дал теоретическое обоснование решений задачи о колебаниях неоднородной струны или стержня при установленных граничных и начальных условиях. В области гидродинамики создателю и первому директору Физико-математического института АН принадлежит открытие нового класса интегрирующихся случаев движения твердого тела в жидкости, теории вихревых движений жидкости; работы по движению твердого тела с полостью, заполненной жидкостью.

Последним научным трудом В. Л. Кирпичева стала работа «К вопросу об усталости металлов», опубликованная после его смерти благодаря его ученикам А. М. Драгомирову и Н. Н. Давиденкову [1]. В ней ученый излагал результаты исследований, основанных на новом направлении по изучению структурных изменений, появляющихся под действием упругих и пластических деформаций. Среди монографий Академика АН УССР Н. Н. Давиденкова, работавшего в Харькове, выделим «Проблема удара в металловедении» и «Динамические испытания металлов».

Среди учеников В. Л. Кирпичева отметим С. П. Тимошенко, Д. С. Зернова, Б. Г. Галеркина, А. Н. Динника, А. А. Радцига, И. И. Бобарыкова, В. Э. Тира [1]. Один из создателей Украинской Академии Наук, «отец американской инженерии» Тимошенко опубликовал книги: «Теория колебаний в инженерном деле», «Проблемы вибраций в технике», «Advanced dynamics», «Прочность и колебания элементов конструкций», «Dynamique superieure» и многие другие.

Выпускник и заведующий кафедрой общего машиностроения ХТИ **В. Э. Тир** был автором труда «Возможность получить выражение общего закона сопротивляемости материалов переменным силам и обоснование на нем выбора допускаемых напряжений» (1910) [6]. Академик АН УССР и СССР А. Н. Динник, учившийся и работавший у В. Л. Кирпичева, внес вклад в теорию колебаний анизотропной среды. Методы Академика Галеркина давно и широко известны во всем мире, используются в задачах математической физики как для решения дифференциальных уравнений с частными производными, так и для формирования уравнений метода конечных элементов.

С 1898 до 1903 года директором ХТИ был *Д. С. Зернов*. В его книге «Прикладная механика» вторая часть посвящается общей теории машин и их динамике (регулирование хода движения, основы учения о вредных сопротивлениях – трении скольжения, качения и гибких тел). В курсах лекций по паровым машинам профессор рассматривал также проблемы регулирования, заложив начало симбиоза механики машин, термодинамики и теории управления [7].

Ученик Кирпичева и Зернова, выпускник ХТИ *М. А. Воропаев* был ассистентом и соавтором основателя прикладной механики сплошных сред Тимошенко. Воропаев впервые в мире исследовал механические свойства разных сортов чугуна при повторных нагружениях, продолжив работы Кирпичева по усталости конструкционных материалов [1]. У Воропаева учились будущие академики АН УССР: директор Института строительной механики Ф. П. Белянкин, Г. И. Сухомел и А. О. Василенко. Преподаватель ХММИ, директор Института машиноведения и сельскохозяйственной механики *А. О. Василенко* исследовал динамику аграрных устройств.

В 1901 году Д. С. Зернов пригласил в ХТИ своего ученика в Московском техническом училище *Г. Ф. Проскуру*, в дальнейшем основоположника гидроаэродинамики и гидромашиностроения в Украине.

Выпускник XTИ 1908 года *Г. А. Ботезат* в 1911 году с большим успехом в Сорбонне защитил первую в области авиации докторскую диссертацию по исследованию устойчивости аэроплана. Одним из первых он провел исследования роли демпфирования в обеспечении устойчивости полета. Ученый с мировой известностью разработал метод малых возмущений для решения задач об устойчивости самолета и по праву может считаться одним из основоположников науки о динамике полета летательных аппаратов [8]. Исследования в области аэродинамики проводили выпускники и преподаватели ХТИ: Д. Н. Ксандров, впоследствии первый декан факультета самолетостроения ХАИ; А. И. Борисенко и Я. Л. Геронимус, Заслуженные деятели науки и техники УССР и др. [6].

Зав. механической лабораторией ХТИ (базовой в Украине) А. С. Иловайский, известный специалист в области строительной механики, стержневых систем и сыпучих тел, динамики и гидротехники; стал Заслуженным деятелем науки и техники УССР [6].

Выпускник XTИ 1902 года *Я. В. Столяров* не только провел классические исследования в области динамики механизмов и машин; но и стал автором первой в Российской империи книги, содержащей подробные сведения о способах расчета и испытаний на прочность железобетонных изделий [6].

В пору сооружения Госпрома, символа Харькова, это был самый большой в СССР (по другим данным, в Европе) «небоскреб» из монолитного железобетона. Использованию железобетона содействовали значительные достижения в создании теории расчета сложных пространственных железобетонных конструкций научной школы профессора Столярова.

Украинский НИИ промышленных и гражданских сооружений, основу которого составляли выпускники и преподаватели ХТИ, был головной научной организацией по строительству в республике. Зам. директора по научной части был Столяров. Директором Киевского филиала НИИ был вице–президент АН УССР, директор Института строительной механики К. К. Симинский, ученик Кирпичева и преемник Воропаева на посту главы кафедры сопротивления материалов Киевского политехнического института. Научную деятельность начал в НИИ сооружений Н. В. Корноухов, позднее директор Института строительной механики АН УССР (ныне Институт механики НАН Украины).

Выпускник 1920 года и преподаватель ХПИ А. П. Филиппов с 1930 года возглавил группу по теории колебаний Украинского НИИ сооружений. В 1935 году его статья «Вынужденные поперечные колебания стержней при учете затухания» была представлена академиком А. Н. Крыловым в «Известия АН СССР» [9]. Филиппов возглавил с 1937 года отдел динамики и прочности Центрального НИИ строительных материалов. Среди его трудов довоенного периода отметим «Вибрации рамных конструкций» и «Колебание перекрытий и рамных каркасов».

Председатель гидротехнической секции НТО ВСНХ Украины Г. Ф. Проскура выступил с докладом «Вихревая теория ветряка» на Украинском энергетическом съезде (1928). Под его руководством в НИИ промышленной энергетики Украины (УНИИПЭ) группа выпускника 1925 года и преподавателя ХТИ *Д. Я. Алексапольского*, в дальнейшем Заслуженного деятеля науки и техники Украины, спроектировала ветросиловую станцию мощностью 4500 КВт [6].

Руководителем ветросекции Б УНИИПЭ работал один из основоположников космонавтики Ю. В. Кондратюк [8]. Он предпочел создание в Харькове проекта крупнейшей в мире ветроэлектростанции Крым-ВЭС на 12 МВт работе в группе изучения реактивного движения (ГИРД). Члены команды Кондратюка– Н В. Никитин и Б. А. Злобин стали лауреатами Ленинской премии за создание Останкинской телебашни, при строительстве которой были использованы разработки по вращающейся 165-метровой мачте ВЭС и опыт Харьковской школы создания высотных конструкций.

В наше время исследования динамики силовых элементов ветроэнергетических установок проводятся в НТУ «ХПИ» на кафедре «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин» (заведующий – профессор *H. A. Ткачук*) [10].

Заместитель директора по научной и учебной работе (проректор) ХТИ, ХПИ, ХММИ *И. М. Бабаков* читал курсы лекций по прикладной математике, теоретической механике, устойчивости равновесия и движений. Его научные исследования относятся к теории колебаний и устойчивости механических систем. Им был разработан так называемый обратный метод расчета собственных частот крутильных колебаний коленчатого вала, дано обобщение его на случай поперечных колебаний (в частности, и многопролетных валов); выполнены работы по вынужденным колебаниям. Фундаментальный труд «Теория колебаний» (4 издания) Заслуженного деятеля науки УССР (1962) был утвержден как учебное пособие для машиностроительных вузов страны [11].

Выпускник XTИ, профессор *В. М. Майзель* заведовал в XMMИ специальностью «Динамика машин» (в дальнейшем кафедра «Динамика и прочность машин» (ДПМ) [12]. Практически одновременно специальность «Динамические явления в машинах и механизмах» была организована в Ленинградском политехническом институте под руководством Заслуженного деятеля науки Е. Л. Николаи, ученика В. Л. Кирпичева. В 1961 г. специальность ДПМ появилась в Московском высшем техническом училище. Затем она была введена в двенадцати вузах СССР [13].

Продолжая преподавать, член-корреспондент АН УССР Майзель стал в 1939 заведующим отделом динамики энергетических машин Института энергетики АН УССР. Под его руководством был разработан и изготовлен специальный тензометр для записи статических и динамических напряжений в деталях сложных конфигураций самолета во время полета [12].

Ученик Майзеля, выпускник и преподаватель ХММИ *А. Н. Боголюбов*, стал членом – корреспондентом АН Украины, лауреатом премии им. Н. М. Крылова за цикл работ «Розвиток та дослідження конструктивних методів розв'язання задач нелінійної механіки та математичної фізики» и Международной премии им. А. Койре [12].

С 1934 по 1941 год механической лабораторией заведовал выпускник и преподаватель ХММИ *А. С. Вольмир*. В дальнейшем его научная деятельность была связана с исследованием влияния динамических нагрузок на прочность и устойчивость конструкций. Им были найдены новые принципы расчета тонкостенных конструкций на динамические нагрузки, оказавшие существенное влияние на методы их проектирования. Заслуженный деятель науки и техники опубликовал монографии, посвященные колебаниям, флаттеру и автоколебаниям сложных структур на базе прикладных многоуровневых методов исследований. Книги Вольмира были переведены на английский, китайский, немецкий, румынский языки [13].

Я. В. Столяров в 1934 году основал в ХИИТ кафедру «Строительная механика». Среди приглашенных им на кафедру выпускников и преподавателей ХТИ (ХПИ) выделим В. К. Глаговского, Н. С. Ракивненко, В. И. Ангелейко, в дальнейшем Заслуженного деятеля науки и техники Украины. Зав. кафедрой ХИИТ «Строительная механика» Ракивненко написал ряд научных трудов в области экспериментальных исследований и динамических расчетов конструкций в мостостроении [6]. Среди обучавшихся в тот период на кафедре отметим В. О. Кононенко, в дальнейшем академика и директора Института Механики АН УССР. Премию им. Н. М. Крылова АН УССР ученому присудили за цикл работ «Исследование динамического взаимодействия систем с источником энергии». Среди аспирантов В. О. Кононенко выделим будущих академиков АН СССР и директоров Института машиноведения К. В. Фролова и Р. Ф. Ганиева.

Зав. кафедрой теоретической физики (1932–1937) ХММИ Л. Д. Ландау в соавторстве с выпускником физико-механического факультета (1933) и преподавателем (1933–1939) Е. М. Лифшицем издали в 1935 руководство и задачник по теоретической физике, первой частью которых была «Механика». Проект большей частью соответствовал программе изложения будущего «Курса теоретической физики», некоторые задачи в дальнейшем вошли во все его издания [3, 14].

В 1937 году Ландау и Лифшиц завершили первый том «Курса», который в 1938 г. был издан в СССР и Англии. В 1944 г. вышла их книга «Механика сплошных сред», впоследствии разделенная на 6-й том «Гидродинамика» и 7-й том «Теория упругости». В самом популярном их труде «Theory of Elasticity» (более 35000 цитирований в мировой научной литературе согласно аналитико-информационной системе Google Scholar) теория упругости излагается как часть теоретической физики, рассматриваются ряд вопросов теории упругих колебаний и волн. В 1962 г. академики АН СССР Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц за создание всемирно известного многотомного «Курса», считающегося энциклопедией теоретической физики, были удостоены Ленинской премии в области науки.

Выпускник и ректор ХТИ *Я. М. Майер* стал директором Украинского НИИ двигателей внутреннего сгорания (в дальнейшем Украинского научно– исследовательского авиадизельного института), созданного на базе его лаборатории ДВС и территориально размещенного в ХММИ [6]. Здесь начал свою научно-производственную деятельность выпускник Киевского автомобильного техникума В. Н. Челомей, в дальнейшем автор ряда мировых открытий по динамике машин, теории колебаний, динамической устойчивости упругих систем; председатель редакционного совета справочника в 6-ти томах «Вибрации в технике». Далее будущий Академик, Лауреат 4-х Государственных премий СССР в области науки и техники, Золотой медали им. А. М. Ляпунова АН СССР (1977) учился в Киеве у Академика Д. А. Граве, бывшего преподавателя ХТИ, и Н. И. Ахиезера, в дальнейшем члена-корреспондента АН УССР и первого заведующего кафедрой теоретической и математической физики (ТМФ) ХММИ (ХПИ) в 1947–1955 гг.

Ученики профессора Я. М. Майера – *Ю. А. Гопп* и *Л. И. Штейнвольф* в ХММИ проводили перед войной исследования маятниковых антивибраторов.

Зарождение моделирования в науке связано с появлением понятия «подобие», применявшимся для решения ряда задач строительной механики, а после этого перешедшим в иные области техники. Формирование данного типа моделирования привело к образованию теории, именуемой порой теорией подобия. В. Л. Кирпичев, первым из ученых в Российской империи, поставил вопрос о теории подобия физических процессов и вывел условия подобия при упругих явлениях [14]. Профессор ХТИ, ХММИ и ХПИ; член Президиума и председатель отделения технических наук АН Украины Г. Ф. Проскура разрабатывал теорию подобия в гидроаэродинамике и закон динамического подобия турбомашин. В. М. Майзель применил теорию подобия при исследовании и моделировании задач прочности, устойчивости, колебаний.

Выпускник ХММИ В. Н. Ершов, в дальнейшем научный руководитель отраслевой (Минавиапром СССР) научно-исследовательской лаборатории аэродинамики компрессоров авиационных ГТД, Заслуженный работник высшей школы УССР, на основе им предложенного принципа «максимума правдоподобия» в ХПИ защитил докторскую диссертацию. Теория подобия является важной составляющей аналогового моделировании. Выпускник ХЭТИ, лауреат Государственной премии СССР Б. Я. Коган был одним из первых, кто начал научные исследования и разработку теории и методов математического моделирования с применением аналоговых и гибридных вычислительных систем для исследования сложных динамических систем, прежде всего систем управления [5].

Выпускник кафедры ДПМ ХММИ А. В. Дабагян, в дальнейшем исполняющий обязанности ее заведующего, Заслуженный работник высшей школы Украины, защитил в 1947 году кандидатскую диссертацию по теме «Электрическое моделирование колебаний танка при движении по пересеченной местности».

Заведующий кафедрой ДПМ ХММИ и ХПИ с 1948 по 1960 год; руководитель Лаборатории гидравлических машин, Харьковских филиалов Институтов механики и технической теплофизики АН УССР *А. П. Филиппов* основал и возглавил научное направление, связанное с анализом прочности элементов машиностроительных конструкций в условиях интенсивных динамических нагрузок при учете высокотемпературных полей и воздействия среды [9].

Под его руководством по решению Совета министров СССР в 1956 г. была организована проблемная лаборатория «Динамическая прочность деталей машин», которая была первой такого типа в ХПИ. В ней был создан под руководством А. Н. Подгорного (в дальнейшем первый директор Института проблем машиностроения АН УССР) в 1961 году первый в Украине научный экспериментальный комплекс «ВРД – 500» для исследования несущей способности моделей дисков и роторов турбомашин в условиях больших скоростей вращения и высоких температур [13].

Лаборатория внесла значительный вклад в разработку целого ряда проблем динамики турбомашин, авиационных газотурбинных и тепловых двигателей, высоконагруженных машиностроительных конструкций и сооружений, различных образцов новой техники; внедрение применения ЭВМ для расчетов колебаний, а также в подготовку научно-педагогических кадров [13]. Здесь работали 9 докторов и более 70 кандидатов наук. Опыт создания базовых и проблемных лабораторий в ХПИ был одобрен Минвузом УССР и распространен на другие вузы республики.

Выпускник ХТИ А. М. Сойфер стал первым директором Куйбышевского авиационного института (ныне национальный исследовательский Самарский аэрокосмический университет им. С. П. Королева) и организовал в 1958 первую в СССР отраслевую научно-исследовательскую лабораторию (ОНИЛ-1) «Вибрационная прочность и надежность авиационных изделий», в настоящее время носящую его имя [3]. Основным направлением исследований его научной школы являлось конструкционное демпфирование.

Среди учеников академика АН УССР А. П. Филиппова были выпускники, а затем и профессора ХПИ, лауреаты Государственной премии Украины в области науки и техники: С. И. Богомолов, Е. Г. Голоскоков, А. Н. Подгорный, В. В. Бортовой, Ю. С. Воробьев, В. Б. Гринев и другие. Обзор деятельности руководимых ими научных коллективов до 2005 г. содержится в монографии О. К. Морачковского [13]. Среди фундаментальных трудов лауреата Государственной премии Украины, Заслуженного деятеля науки и техники УССР А. П. Филиппова отметим «Колебания упругих систем» (1956 год); «Колебания механических систем» (1965 г.); «Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни» (соавтор -С. С. Кохманюк, 1967 г.); «Колебания деформируемых систем» (1970 г.); «Расчет на колебания с использованием электронно-вычислительной техники» (Ю.С. Воробъев, С. С. Кохманюк и др., 1974 г.); «Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок» (С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин, 1978); «Оптимизация стержней по спектру собственных значений» (В. Б. Гринев, 1979). Известный ученый в области динамики лопаточного аппарата турбомашин Ю. С. Воробьев сменил своего Учителя на посту заведующего отделом нестационарных механических процессов в ИПМаше АН УССР.

Профессор *Л. И. Штейнвольф* создал в рамках проблемной лаборатории научную группу по динамике боевых и транспортных машин, их двигателей и силовых передач. Среди его учеников отметим *В. Н. Карабана, В. Н. Митина, В. М. Шатохина, Ю. М. Андреева, Е. И. Дружинина, А. А. Ларина* [13]. Программный комплекс КиДиМ, созданный его научной группой и основанный на использовании специально созданной системы компьютерной алгебры, применяется при математическом моделировании динамических процессов для широкого класса дискретных механических систем со стационарными и нестационарными, голономными и неголономными связями.

В ХПИ заведующий кафедрой ДПМ с 1960 по 1991 гг., дважды лауреат Государственной премии Украины *С. И. Богомолов* сформировал научное направление – колебания сложных механических систем. Его докторская диссертация (1969 год) была посвящена проблемам взаимосвязанных колебаний в турбомашинах. Созданные уникальные установки позволили исследовать колебания дисков и рабочих лопаток при высоких температурах [13]. Под руководством Богомолова защитили кандидатские диссертации *А. М. Журавлева, В. Н. Грищенко, В. А. Жовдак, Б. С. Лукин, В. Л.Хавин, С. К. Шелковый, С. П. Иглин, Е. П. Петров, С. А. Назаренко* и другие ученые.

С 1965 года в Харькове начал издаваться Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Динамика и прочность машин» [13]. В 1977 году в ХПИ был организован один из первых в стране специализированный Ученый Совет по защитам кандидатских и докторских диссертаций по специальности 01.02.06 – динамика, прочность, надежность машин, приборов и аппаратуры.

На базе Специальных КБ Харьковских заводов имени Т. Г. Шевченко и «Коммунар» в 1959 было организовано Особое конструкторское бюро (ОКБ-692, а/я 67, КБ «Электроприборостроения», ОАО «Хартрон») по системам управления (СУ) межконтинентальных ракет [5, 8]. С самого начала в ОКБ решались проблемы колебаний (например, акустические и вибрационные нагружения ракеты, движущейся в шахте; вибропрочность приборов СУ и др.). Впервые в СССР в ОКБ–692 была решена проблема устойчивости ракеты при колебаниях жидкости в топливных баках.

В 1964 году по инициативе Главного конструктора КБ «Электроприборостроения» В. Г. Сергеева и профессора кафедры ДПМ А. В. Дабагяна в ХПИ была открыта кафедра «Автоматическое управление движением» (АУД) [13]. Первоначально кафедра АУД, учившая инженеров-механиков-исследователей по специальности «Динамика полета и управление движением ракет и космических аппаратов», разместилась территориально на кафедре ДПМ.

ОКБ-692 стал одной из трех организаций в бывшем СССР и единственной в Украине, создававшей СУ для ракет и космических аппаратов (КА). В научных исследованиях решались проблемы динамики систем с дискретным управлением [5, 8].

КБ «Электроприборостроения» были созданы СУ для четырех поколений межконтинентальных баллистических ракет, трех поколений космических ракетносителей, многих типов искусственных спутников земли и КА [11]. Лауреатами Государственных премий СССР и Украины в области науки и техники стали выпускники ХПИ: Генеральные и Главные конструкторы СУ ракет *Я. Е. Айзенберг, Г. А. Борзенко, А. И. Кривоносов, В. А. Уралов, В. Н. Горбенко, Г. И. Лящев*; начальники отделов *Б. М. Конорев, В. Ф. Шишков* и др. В разработках «Хартрона» участвовали выпускники ХПИ – Главные конструкторы *А. Н. Кал*-

# ногуз, Ю. М. Борушко, Б. Н. Гавранек и др.

Основоположник новой ветви средств выведения – авиационно-космических транспортных систем, выпускник ХММИ *Г. Е. Лозино-Лозинский* привлекал сотрудников и выпускников ХПИ к разработке уникального космоплана «Буран». Работы по динамике конструкций в ХПИ возглавлял Заслуженный деятель науки и техники Украины С. И. Богомолов [8].

В ХПИ Заслуженный работник высшей школы Украины Е. Г. Голоскоков основал научное направление – нелинейные и нестационарные колебания механических систем. Совместно с Филипповым он издал книги «Нестационарные колебания механических систем» (1966 г.) «Instationare Schwingungen mechanischer Systeme» (Berlin: Akademie-Verlag., 1970); «Нестационарные колебания деформируемых систем» (1977). Среди аспирантов Голоскокова отметим Д. К. Овчарову, В. И. Лавинского, Н. Е. Исикова, Ю. И. Зайцева, А. Л. Ключника, С. Е. Гардера [13].

С 1969 на кафедре ТМФ ХПИ под руководством заведующего **В. Л. Рвачева**, в дальнейшем академика НАН Украины, Почетного доктора Висконсинского университета, начинаются исследования в области теории R-функций [13]. Научная школа Заслуженного деятеля науки и техники Украины, Лауреата Государственной премии в области науки и техники и премии АН УССР им. А. Н. Динника, Соросовского профессора Рвачева насчитывает 60 кандидатов и 18 докторов наук, 2 члена-корреспондента НАН Украины.

Зав. кафедрой паровозостроения (локомотивостроения) ХММИ и ХПИ, Заслуженный деятель науки УССР (1982) *С. М. Куценко* создал новую теорию пространственного вписывания локомотива в кривые, основанную на математическом моделировании колебательных процессов конструкции тепловоза.

Выпускник кафедры ДПМ, Лауреат Государственной премии **В.** А. Марцинковский создал и возглавил кафедру теоретической механики и динамики энергетических машин в Сумском государственном университете [13]. Выпускник и преподаватель ХПИ, Заслуженный деятель науки УССР (1980) **П.** М. Заика занимался проблемой применения вибрационной техники для создания семяочистительных машин.

Выпускник ХПИ, Лауреат Государственной премии, член-корреспондент НАН Украины *А. А. Тарелин* разработал методы оптимального комплексного проектирования последней ступени турбины с учетом требований термогазодинамики, статической и динамической прочности, конструирования и эксплуатации [3]. Выпускник и профессор ХПИ, членкорреспондент НАН Украины *А. Е. Божко* исследовал проблемы надежности и ресурса машин, динамических испытаний и активной виброзащиты.

Участие выпускников и профессоров ХПИ С. И. Богомолова, В. В. Бортового, В. Б. Гринева, Ю. Т. Костенко, В. М. Лукьяненко, Л. М. Любчика, Э. А. Симсона в разработке теоретических основ автоматизированного оптимального проектирования конструкций машин и приборов, создание на этой базе образцов турбокомпрессорной и космической техники было отмечено Государственной премией Украины в области науки и техники за 1997 год [3, 13]. Авторами были получены новые научные результаты по методам решения обратных задач динамики.

Выпускник кафедры АУД, профессор ХПИ Е. Е. Александров в 1996 г. стал лауреатом премии Ярослава Мудрого за разработку метода оптимизации динамических систем с помощью функций Ляпунова. Ему как члену авторского коллектива была присуждена Государственная премия Украины 2000 г. за разработку теории и практики создания многоканальных систем управления транспортными объектами. Под руководством Заслуженного деятеля науки и техники Украины выпускник кафедры АУД, Лауреат Государственной премии, заместитель Генерального конструктора Государственного предприятия «Харьковское конструкторское бюро по машиностроению» Ю. И. Волченко защитил кандидатскую диссертацию.

В НТУ «ХПИ» образована в 2002 году кафедра газогидромеханики и тепломассообмена, которую возглавил выпускник кафедры ДПМ *Ю. М. Мацевитый*, Заслуженный деятель науки и техники, академик и директор ИПМаш НАН Украины. Он и выпускники ХПИ – руководитель отдела вибрационных и термопрочностных исследований ИПМаш им. А. Н. Подгорного *Н. Г. Шульженко, П. П. Гонтаровский* и *В. Н. Голощапов* в 2008 г. были удостоены Государственной премии Украины. Разработанные ими комплексы диагностики вибрационного состояния турбоагрегата на всех режимах работы обеспечивают повышение уровня его технологической безопасности и эксплуатационной надежности [3].

Выпускник И сотрудник кафедры ДПМ А. П. Зиньковский стал заведующим отделом колебаний и вибрационной надежности, зам. директора Института проблем прочности НАН Украины. Заместитель председателя Национального совета Украины по машиноведению выполнил комплекс исследований по изучению закономерностей колебаний регулярных механических систем с нарушенной симметрией. Председатель Оргкомитета Международной научнотехнической конференции «Проблемы динамики и прочности в газотурбиностроении» являлся ученым секретарем Научного совета по проблеме «Механика деформируемого твердого тела» НАН Украины; одним из разработчиков стандарта ДСТУ 2473-94 «Механические колебания. Термины и определения».

Выпускник и сотрудник каф. ДПМ *Е. П. Петров* работал в Imperial College London (Centre of Vibration Engineering), был сопредседателем сессий Международных конгрессов ASME «Turbo Expo» и симпозиумов стран НАТО «Многоцикловая усталость» [13].

В настоящее время в НТУ «ХПИ» под научным руководством заведующего кафедрой ДПМ, профессора *Г. И. Львова* разрабатываются математические модели описания нелинейного деформирования современных материалов; методы решения задач динамики и прочности машин и конструкций при взаимодействии тепловых, электромагнитных и механических полей. На кафедре ДПМ исследования в области моделирования случайных процессов в механических системах, инициированные *В. А. Жовдаком*, продолжают А. А. Ларин, А. И. Трубаев, А. А. Водка и др.

Разработкой эффективных бессеточных методов, базирующихся на теории R-функций, для исследования свободных, вынужденных и параметрических колебаний многослойных и функционально-градиентных пологих оболочек и пластин занимается кафедра «Прикладная математика» во главе с заведующей, профессором Л. В. Курпой. Усилиями сотрудников кафедры были успешно организованы 5 Международных конференций по нелинейной динамике, в которых участвовали ученые 14 стран [13]. Новые результаты по нелинейной динамике, бифуркации и устойчивости нелинейных колебаний в деформируемых системах получены под руководством профессоров ХПИ, членов научных обществ по математике и механики -AMS и GAMM *Ю. В. Михлина* и *К. В. Аврамова*. Руководитель отдела надежности и динамической прочности ИПМаш, выпускник ХПИ К. В. Аврамов исследует задачи вибрации, динамической прочности и аэродинамики ракетоносителей.

Заведующими кафедрами «Теоретическая механика» О. К. Морачковским и «Компьютерное моделирование процессов и систем» (КМПиС, ранее АУД) Д. В. Бреславским создана теория ползучести и разрушения твердых тел при их циклическом нагружении. Научная статья, опубликованная ими в 2000 в журнале «Journal of Strain Analysis» (Лондон), награждена престижной премией CEGB. Под руководством В. Б. Успенского, Ю. М. Андреева (КМПиС) проводятся исследования в области управления движением, ориентацией и динамики летательных аппаратов. Под руководством Заслуженного деятеля науки и техники Украины Э. А. Симсона разрабатываются модели для анализа динамического состояния и оптимизации многокомпонентных тел неоднородной структуры и процессов в технологических системах [15, 16].

Основные научные разработки кафедры «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин» (заведующий - Н. А. Ткачук) связаны с компьютерным моделированием сложных и сверхсложных механических систем с высокой степенью геометрической информативности (дискретизации), а значит и достоверности к исходному объекту. В частности, проведены исследования кинематики, статики, динамики корпусов легкобронированных машин и тепловозов, густоперфорированных компонентов конструкций, составляющих биомеханических систем, вибрационных машин с дебалансным приводом, крупногабаритных кранов-перегружателей, элементов гидропередач, цистерн топливозаправщиков, штампов и пресс-форм, а также многих других объектов [10, 17]. Комплексное математическое моделирование конструкций охватывает воспроизведение геометрических, вибрационных, прочностных, температурных, аэрогидродинамических и прочих характеристик на всех этапах жизненного цикла.

В НТУ «ХПИ» в 2003 году создан региональный центр компьютерных методов проектирования, исследования и изготовления машиностроительных конструкций «Тензор» [10]. В 2009 году в сотрудничестве с индустриальной группой «УПЭК» создан учебноопытный компьютерный кластер и центр для подготовки высококвалифицированных кадров в отрасли компьютерного проектирования, моделирования и технологической подготовки производства машиностроительных конструкций в Украине.

Выводы. В статье рассмотрена эволюция основных научных достижений ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в ХІХ – ХХІ ст. в области теоретического, экспериментального и компьютерного исследования научно–технических проблем динамики. Показано, как математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых моделей и методик анализа динамики конструкций с многоуровневой структурой в условиях интенсивных нагружений. Представлено изменение организационных форм работы ученых от индивидуальной к коллективной: созданию лабораторий, отраслевых НИИ и КБ, институтов Академии наук, научно-учебных кластеров и комплексов.

## Список литературы:

**1.** Александров Е. Е. Деятельность основателя отечественной научной школы механики и машиностроения профессора В. Л. Кирпичева / Е. Е. Александров, С. А. Назаренко, В. Л. Хавин // Механіка та машинобудування. – 2012. – №2. – С. 230–249.

**2.** *Timoshenko S. P.* As I Remember / *S. P. Timoshenko.* – D. Van Nostrand. – 1968.

**3.** Andreev A. G. Main achievements of scientists of NTU «KhPI» in the field of mechanics / A. G. Andreev, S. A. Nazarenko // Вісник НТУ «ХПІ». – 2015. – № 57 (1166). – PP. 3-7.

**4.** Академик Александр Михайлович Ляпунов / Л. Л. *Товажнянский [и др.].* – Х.: НТУ «ХПИ», 2007. – 288 с.

**5.** Андреев А. Г. Основные работы ученых ХПИ в области управления механическими системами / А. Г. Андреев, С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». – 2014. – № 57 (1099). – С. 3-14.

**6.** История Харьковского технологического института в лицах. [Электронный ресурс].– Режим доступу: http://library.kpi.kharkov.ua/prepodavately/PR %D0%9B.html.

7. Назаренко С. А. Основные работы профессора Д. С. Зернова / С. А. Назаренко [и др.] // Вісник НТУ «ХПІ». – № 51. – 2011. – С. 16–23.

8. Назаренко С. А. Деятельность воспитанников Харьковского политехнического института в области освоения космического пространства / С. А. Назаренко // Университеты. Наука и просвещение. – 2013. – № 2. – С. 64–74.

9. Воробьев Ю. С. Академик Анатолий Петрович Филиппов – лидер научной школы в области динамики и прочности машин / Ю. С. Воробьев, А. А. Ларин, Г. И. Львов // Вісник НТУ «ХПІ». – 2009. – № 42. – С. 3–7.

**10.** *Ткачук Н. А.* Кафедра ТММ и САПР: к 50-летию факультета транспортного машиностроения / *Н. А. Ткачук* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2015. – № 43 (1152). – С. 92-106.

**11.** Бесов Л. М. Классик отечественной механики Иван Михайлович Бабаков / Л. М. Бесов, А. А. Ларин, О. К. Морачковский // Історія Української науки на межі тисячоліть. – К.: 2007. – Вип. 28. – С. 35-42.

**12.** Львов Г. И. Основные работы членакорреспондента Академии Наук Украины В. М. Майзеля / Г. И. Львов, С. А. Назаренко, В. Л. Хавин // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 58. – С. 8-15.

**13.** *Морачковский О. К.* Инфиз: очерки истории творчества / О. К. Морачковский. – Х.: ЭнергоКлуб Украины, 2005. – 372 с.

14. Назаренко С. А. Ключевые работы ученых НТУ

«ХПИ» в области математического моделирования в технике / С. А. Назаренко, С. И. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». – 2015. – № 18 (1127). – С. 14-19.

**15.** Симсон Э. А. Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / Э. А. Симсон, С. А. Назаренко, М. В. Трохман // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – № 2/4. – С. 44-47.

**16.** Симсон Э. А. Математические модели элементов машин при воздействии физических полей и внешней среды / Э. А. Симсон, С. А. Назаренко // Механіка та машинобудування. – 2009. – № 1. – С. 69-77.

17. Теоретичні основи та практика проектнотехнологічного забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин на основі комп'ютерного моделювання / *М. А. Ткачук* [та ін.] // Вісник НТУ «ХПИ». – 2016. – № 39 (1211). – С. 102-106.

### **Bibliography (transliterated):**

1. Aleksandrov E. E., Nazarenko S. A., Havin V. L. Deyatel'nost' osnovatelya otechestvennoj nauchnoj shkoly mehaniki i mashinostroeniya professora V. L. Kirpicheva. Mekhanika ta mashynobuduvannya. 2012. No 2. PP. 230-249.

2. Timoshenko S. P. As I Remember. D. Van Nostrand. 1968.

**3.** Andreev A. G., Nazarenko S. A. Main achievements of scientists of NTU «KhPI» in the field of mechanics. Bulletin of NTU "KhPI". 2015. No 57 (1166). PP. 3-7.

**4.** Tovazhnyanskij L. L. i dr. Akademik Aleksandr Mihajlovich Lyapunov. Kharkiv: NTU "HPI". 2007. 288 p.

**5.** Andreev A. G., Nazarenko S. A. Osnovnye raboty uchenyh KhPI v oblasti upravleniya mehanicheskimi sistemami. Bulletin of NTU "KhPI". 2014. No 57 (1099). PP. 3-14.

6. Istoriya Har'kovskogo tehnologicheskogo instituta v licah. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupu: http://library.kpi.kharkov.ua/prepodavately/PR %D0%9B.html.

7. Nazarenko S. A. i dr. Osnovnye raboty professora D. S. Zernova. Bulletin of NTU "KhPI". No 51. 2011. PP. 16-23.

8. Nazarenko S. A. Deyatel'nost' vospitannikov Har'k-

ovskogo politehnicheskogo instituta v oblasti osvoeniya kosmicheskogo prostranstva. Universitety. Nauka i prosveschenie. 2013. No 2. PP. 64–74.

**9.** Vorob'ev Yu. S., Larin A. A., L'vov G. I. Akademik Anatolij Petrovich Filippov – lider nauchnoj shkoly v oblasti dinamiki i prochnosti mashin. Bulletin of NTU "KhPI". 2009. No 42. PP. 3-7.

**10.** Tkachuk N. A. Kafedra TMM i SAPR: k 50-letiyu fakul'teta transportnogo mashinostroeniya. Bulletin of NTU "KhPI". 2015. No 43 (1152). PP. 92-106.

**11.** Besov L. M., Larin A. A., Morachkovskij O. K. Klassik otechestvennoj mehaniki Ivan Mihajlovich Babakov. Istoriya Ukrayins'koyi nauky na mezhi tysyacholit'. Kyyiv: 2007. Vyp. 28. PP. 35-42.

**12.** L'vov G. I., Nazarenko S. A., Havin V. L. Osnovnye raboty chlena-korrespondenta Akademii Nauk Ukrainy V. M. Majzelya. Bulletin of NTU "KhPI". 2013. No 58. PP. 8-15.

**13.** Morachkovskij O. K. Infiz: ocherki istorii tvorchestva. Kharkiv: EnergoKlub Ukrainy. 2005. 372 p.

**14.** Nazarenko S. A., Marusenko S. I. Klyuchevye raboty uchenyh NTU "HPI" v oblasti matematicheskogo modelirovaniya v tehnike. Bulletin of NTU "KhPI". 2015. № 18 (1127). PP. 14-19.

**15.** Simson E. A., Nazarenko S. A., Trohman M. V. Metodika analiza chuvstvitel'nosti vibracionnyh parametrov mehanicheskih sistem. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. 2008. No 2/4. PP. 44-47.

**16.** Simson E. A., Nazarenko S. A. Matematicheskie modeli elementov mashin pri vozdejstvii fizicheskih polej i vneshnej sredy. Mekhanika ta mashynobuduvannya. 2009. No 1. PP. 69-77.

**17.** Tkachuk M. A. ta in. Teoretychni osnovy ta praktyka proektno-tekhnolohichnoho zabezpechennya taktyko-tekhnichnykh kharakterystyk bojovykh bron'ovanykh mashyn na osnovi komp'yuternoho modelyuvannya. Bulletin of NTU "KhPI". 2016. No 39 (1211). PP. 102-106.

Поступила (received) 05.09.2017

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Огляд основних напрямків досліджень вчених НТУ «ХПІ» в галузі динаміки конструкцій / С. О. Назаренко, М. А. Ткачук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 49-56. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

Обзор некоторых ключевых направлений исследований ученых НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций / С. А. Назаренко, Н. А. Ткачук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 49-56. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

Review of the main directions of research of scientists of NTU "KhPI" in the field of dynamics of constructions / S. A. Nazarenko, M. A. Tkachuk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 49-56. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Назаренко Сергій Олександрович* – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, кафедра Механіка суцільних середовищ та опір матеріалів, НТУ «ХПІ», тел.: 700-29-72, e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.

Назаренко Сергей Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, кафедра Механика сплошных сред и сопротивления материалов, НТУ «ХПИ», тел.: 700-29-72, e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.

*Nazarenko Sergej* – Candidate of Technical Sciences, Senior Staff Scientist, Department of Continuum Mechanics and Strength of Materials, NTU «KhPI», tel.: (057) 700-29-72, e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.

*Ткачук Микола Анатолійович* – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-69-02, e-mail: tma@tmm-sapr.org.

*Ткачук Николай Анатольевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-69-02, e-mail: tma@tmm-sapr.org.

*Tkachuk Mykola* – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Chief of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; NTU «KhPI», tel.: (057) 707-69-02, e-mail: tma@tmm-sapr.org.

УДК 534.1:539.3

# В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, В.В. БУРЛАКА, М.В. СЛІПЧЕНКО, О.М. МАЛЕЦЬ

# ПРО КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО-НЕЛІНІЙНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Розглянуто вільні коливання системи з одним ступенем вільності за умови, що відновлююча сила пружини пропорційна кубу її деформації. Задіяно дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння. В першій формі розв'язок виражено через еліптичний косинус, а в другий – через періодичні Ateb-функції. Складено таблиці для обчислень значень цих функцій і побудовано в безрозмірних координатах графіки, які спрощують розрахунки переміщень осцилятора у часі. Виведено формули для обчислення періодів коливань при наданні осцилятору початкового відхилення від положення рівноваги або початкової швидкості (миттєвого імпульса) в цьому положенні. Наведено приклади розрахунків з використанням відомих таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду та з використанням складеної таблиці періодичних Atebфункцій.

Ключові слова: кубічно-нелінійний осцилятор, вільні коливання, еліптичний косинус, Ateb-функції, їх апроксимація.

Рассмотрены свободные колебания системы с одной степенью свободы при условии, что восстанавливающая сила упругости пружины пропорциональна кубу ее деформации. Использовано две формы аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения. В первой форме решение выражено через эллиптический косинус, а во второй – через ппериодические Ateb-функции. Составлены таблицы для вычислений значений этих функций и построены в безразмерных координатах графики, которые упрощают расчеты перемещений осциллятора во времени. Выведены формулы для вычисления периодов колебаний при сообщении осциллятору начального отклонения от положения равновесия или начальной скорости (мгновенного импульса) в этом положении. Приведены примеры расчетов с использованием известных таблиц неполного эллиптического интеграла первого рода и с использованием составленной таблицы периодических Ateb-функций.

Ключевые слова: кубически-нелинейный осциллятор, свободные колебания, эллиптический косинус, Ateb-функции, их аппроксимация.

Free oscillations of a system with one degree of freedom are considered under the condition that the restoring force of spring elasticity is proportional to the cube of its deformation. Two forms of analytical solution of the nonlinear differential equation are used. In the first form, the solution is expressed in terms of an elliptic cosine, and in the second, through periodic Ateb-functions. The tables for calculating the values of these functions are constructed and plotted in dimensionless graphs coordinates, which simplify the calculations of the oscillator movements in time. Formulas are derived for calculating the oscillation periods when the oscillator sends the initial deviation from the equilibrium position or the initial velocity (instantaneous pulse) in this position. Examples of calculations using known tables of an incomplete elliptic integral of the first kind and using a compiled table of periodic Ateb functions are given.

Keywords: square-nonlinear oscillator, free vibrations, elliptic cosine, Ateb-function, approximation.

Вступ. Нелінійні коливання з великими амплітудами можуть спричинити руйнування елементів конструкцій або порушити їх працездатність. Тому дослідження нелінійних коливань механічних систем відноситься до актуальних задач. Їм присвячено публікації багатьох авторів. Серед них відзначимо монографічні видання останніх років українських вчених[1, 2], де є відповідні огляди літературних джерел. Про історію розвитку теорії нелінійних коливань йдеться в [3]. Тут проводимо порівняння класичного розв'язку задачі динаміки в еліптичних функціях Якобі з порівняно новими формами розв'язку в періодичних Atebфункціях [2, 4].

Метою статті є спрощення розрахунку вільних коливань суттєво нелінійного осцилятора з використанням аналітичних розв'язків рівняння руху в спеціальних функціях та встановлення зв'язку між двома формами цих розв'язків.

Викладення основного матеріалу. Коливальні переміщення x(t) у часі t матеріальної точки масою m описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = 0, \tag{1}$$

де c > 0 – характеризує жорсткість пружини осцилятора.

Розглянемо два варіанти початкових умов при t = 0:

a) 
$$x(0) = -a, \dot{x}(0) = 0,$$
  
 $\delta) x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0.$ 
(2)

У першому рух осцилятора спричинений початковим відхиленням осцилятора вліво на a (проти вісі Ox) від положення рівноваги x = 0, а у другому початковою швидкістю  $v_0$  у цьому положенні.

Уведенням позначень 
$$\dot{x} = v$$
,  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ , рівнянню

(1) надаємо форму:

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} + \frac{c}{m} x^3 = 0. \tag{3}$$

Провівши інтегрування в (3), отримуємо вираз швидкості, при русі осцилятора зліва вправо, в напрямі вісі *Ox*:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \sqrt{c_1 - \frac{c}{2m}x^4}.$$
 (4)

Тут *с*<sub>1</sub> – довільна стала.

1. Розглянемо спочатку коливання, спричинені початковим відхиленням осцилятора, коли при

© В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець, 2017

x = -a, v = 0. Для цих початкових умов  $c_1 = \frac{c}{2m}a^4$ .

Тоді з (4) випливає, що:

$$\sqrt{\frac{c}{2m}}dt = \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \, .$$

Інтегруванням цього виразу отримуємо:

$$\omega t = \tau = \int_{-x/a}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$
(5)

Tyr  $\omega = a \sqrt{\frac{c}{2m}}$ 

Інтеграл в правій частині (5) виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду  $F(\varphi,k)$ . Згідно з [5, с. 96]:

$$\sqrt{2}\tau = F(\varphi,k),$$

причому  $(-x/a) = \cos \varphi$ ;  $k = \sin 45^\circ$ .

В теорії еліптичних функцій Якобі прийнято, що [5, с. 103]:

$$\cos\varphi = \operatorname{cn}\left(\sqrt{2}\tau,k\right).$$

Тому:

$$x = x(t) = -a \cdot \operatorname{cn}\left(\sqrt{2}\tau, k\right),\tag{6}$$

де  $\operatorname{cn}\left(\sqrt{2}\tau,k\right)$  – еліптичний косинус.

Вираз (6) дає можливість знайти період коливань осцилятора *T*, оскільки:

$$\frac{\partial T}{4} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

Згідно з [5, с. 53], значення I виражається через Гама-функцію  $\Gamma(z)$  за формулою:

$$I = \sqrt[4]{4} \frac{\Gamma^2(5/4)}{\Gamma(3/2)}.$$

Враховуючи, що [5, с. 52]:  $\Gamma(5/4) \approx 0,9064025$ ;

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
, одержуємо:  
 $I \approx 1,311029$ ;  $T = \frac{4I}{\omega} \approx 7,41630 \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{c}}$ .

Виведена формула T співпадає з надрукованою в роботі [6, с. 73]. Період коливань обернено пропорційний модулеві початкового відхилення осцилятора від положення x = 0, тобто порушується ізохорність коливань.

Формула (6) має можливість при обчисленні x(t) користуватись таблицями неповного еліптичного інтеграла, надрукованими в [5, с. 102] або [7, с. 429].

Розглянемо приклад. Нехай параметри системи такі, що в деякий момент часу  $\tau = 0,7$ . Тоді  $\sqrt{2}\tau \approx 0,990$ . В таблиці в [5, с. 102] знаходимо, що при  $k = 1/\sqrt{2}$  цьому значенню  $\tau$  відповідає  $\varphi = 53^{\circ}$ . Для нього  $\cos \varphi \approx \operatorname{cn} \left(\sqrt{2}\tau; k\right) \approx 0,602$ . Отже, згідно з (6)  $x/a \approx -0,602$ .

З метою спрощення розрахунку x(t), для початкових умов а) в (2), на рис. 1 наведено графік в безрозмі-

рних координатах  $\tau$ , x/a. Його треба продовжити симетрично вправо відносно вертикалі  $\tau = 2,622$  до значення  $\tau = 5,244$ , де (завершується перший цикл коливань).



Рисунок 1 – До розрахунку коливань при  $x(0) = -a, \dot{x}(0) = 0$ 

2. У випадку початкових умов б) в (2), при русі осцилятора вправо на проміжку  $x \in [0; a_*]$ , стала інтегрування  $c_1$  в (4) приймає значення  $c_1 = v_0^2$ . Тоді, по аналогії з (5):

$$\omega_* t = \tau_* = \int_0^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$
(7)

Γут 
$$ω_* = \sqrt[4]{\frac{c}{2m}v_0^2}; a_* = \sqrt[4]{\frac{2mv_0^2}{c}}.$$

Враховуючи, що:

$$\int_{0}^{x/a_{*}} \frac{du}{\sqrt{1-u^{4}}} = \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{4}}} - \int_{x/a_{*}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{4}}} = I - \int_{x/a_{*}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{4}}} = \tau_{*},$$

приходимо до розрахункової формули:

$$x = a_* cn \left( \sqrt{2} \left( I - \tau_* \right), k \right), \tag{8}$$

де, як і раніше,  $k = \sin 45^\circ$ . У відповідності з (7), для обчислення періода коливань  $T_*$ , маємо:

$$\frac{\omega_* T_*}{4} = I_* \Longrightarrow T_* = \frac{4I_*}{\omega_*} \approx 6,23634 = \sqrt[4]{\frac{m}{c \, \upsilon_0^2}}.$$

Період коливань залежить від наданої осцилятору початкової швидкості. Він обернено пропорційний квадратному кореневі з цієї швидкості.

Для розрахунку x(t) за формулою (8) теж можна використовувати таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду.

Розглянемо приклад. Нехай параметри осцилятора такі, що в деякий момент часу  $\tau_* = 0,5$ . Тоді  $I - \tau_* \approx 0,811; \sqrt{2} (I - \tau_*) \approx 1,147$  і в таблиці [5, с. 102] для цього аргументу  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\cos \varphi \approx \operatorname{cn}(1,147; \sin 45^\circ) \approx 0,5$ . Отже, згідно з (8)  $x/a \approx 0,5$ .

З метою спрощення розрахунків коливань осцилятора спричинених початковим імпульсом, на рис. 2 подано графік в безрозмірних координатах  $\tau_*$ ,  $x/a_*$ . Для поширення на один цикл коливань, цей графік слід продовжити вправо антисемитрично відносно вертикалі  $\tau_* = 2,622$  до значення  $\tau_* = 5,244$ , де  $x/a_* = 0$ .



Рисунок 2 – До розрахунку коливань при  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ 

Зазначимо, що, крім наданої тут графічної інформації, в наближених розрахунках руху осцилятора можна використовувати також графіки еліптичного косинуса сп $(\eta, 1/\sqrt{2})$ , що є в [7, 8].

Далі розглянемо більш сучасні розв'язки рівняння (1), які розвиває Львівська школа математики і механіки [2, 8-11].

Співвідношення (5), одержане для початкових умов а) в (2), є окремим випадком більш загального виразу:

$$\frac{\nu+1}{2} \int_{0 \le \zeta \le 1}^{1} \frac{du}{\left(1-u^{\nu+1}\right)^{n/(n+1)}} = q.$$
(9)

Формули (5) і (9) співпадають коли:  $\zeta = -x/a$ ; v = 3; n = 1;  $q = 2\tau$ .

Згідно з [2, 4], нижня границя інтегрування в (9) є так званим Аteb-косинусом, що позначають наступним чином:

$$\zeta = Sa(v, n, q).$$

Тому, стосовно нашої задачі, коли при x = -a, v = 0, маємо:

$$x = -a \, Ca(3, 1, 2\tau). \tag{10}$$

Співвідношення (7), яке одержано при початкових умовах б) в (2),  $\epsilon$  окремим випадком більш загального виразу:

$$\frac{\nu+1}{2} \int_{0}^{0 \le \zeta \le 1} \frac{du}{\left(1-u^{\nu+1}\right)^{n/(n+1)}} = q.$$
(11)

Він переходить в (7), коли  $\zeta = -x/a_*$ ; v = 3; n = 1;  $q = 2\tau_*$ .

Згідно з [2, 4], верхня межа інтегрування в (11) називається Аteb-синусом, який позначають наступним чином:

$$\zeta = Sa(\nu, n, q). \tag{12}$$

Тому із (7), (11), (12) випливає, що:  $x = a_* Sa(3,1,2\tau_*).$  (13)

Щоб спростити розрахунки за формулами (10), (13), було складено таблиці, задіяних тут періодичних Аteb-функцій.

| η    | $Sa(3,1,2\eta)$ | $Ca(3,1,2\eta)$ | η     | $Sa(3,1,2\eta)$ | $Ca(3,1,2\eta)$ |  |  |
|------|-----------------|-----------------|-------|-----------------|-----------------|--|--|
| 0,00 | 0,000           | 1,000           | 0,70  | 0,684           | 0,603           |  |  |
| 0,05 | 0,050           | 0,997           | 0,75  | 0,727           | 0,556           |  |  |
| 0,10 | 0,100           | 0,990           | 0,80  | 0,769           | 0,507           |  |  |
| 0,15 | 0,150           | 0,978           | 0,85  | 0,808           | 0,459           |  |  |
| 0,20 | 0,200           | 0,961           | 0,90  | 0,844           | 0,410           |  |  |
| 0,25 | 0,250           | 0,939           | 0,95  | 0,878           | 0,360           |  |  |
| 0,30 | 0,300           | 0,914           | 1,00  | 0,908           | 0,311           |  |  |
| 0,35 | 0,350           | 0,884           | 1,05  | 0,934           | 0,261           |  |  |
| 0,40 | 0,399           | 0,852           | 1,10  | 0,957           | 0,211           |  |  |
| 0,45 | 0,448           | 0,816           | 1,15  | 0,974           | 0,161           |  |  |
| 0,50 | 0,497           | 0,777           | 1,20  | 0,988           | 0,111           |  |  |
| 0,55 | 0,545           | 0,736           | 1,25  | 0,996           | 0,061           |  |  |
| 0,60 | 0,592           | 0,693           | 1,311 | 1,000           | 0,000           |  |  |
| 0,65 | 0,639           | 0,648           | -     | -               | -               |  |  |

Таблиця 1 – Значення періодичних Аteb-функцій

Звернемось до розглянутих вище прикладів і проведемо заново розрахунки на підставі розв'язків (10) і (13) та складеної табл. 1.

У першому прикладі  $\tau = \eta = 0,7$ . У табл. 1 для цього  $\tau$  маємо  $Ca(3,1,2\eta) = 0,603$ . Отже, згідно з (10), x/a = -0,603, що добре узгоджується з одержаними раніше результатом, де x/a = -0,602.

У другому прикладі  $\tau_* = \eta = 0,5$ . У таблиці цього  $\tau_*$  знаходимо, що  $Sa(3,1,2\tau_*) = 0,497$ . Тому згідно з (13) x/a = 0,497, що мало відхиляється від значення  $x/a \approx 0,5$ , одержаного раніше іншим способом.

При наближених обчисленнях значень, задіяних тут періодичних Ateb-функцій, можна також використати апроксимацію:

$$Sa(3,1,2\eta) = \begin{cases} \eta & 0 \le \eta < 0,6 \\ 0,088+0,84\eta & \text{при } 0,6 \le \eta \le 0,9 \\ 1-0,924(1,311-\eta)^2 & 0,9 < \eta \le 1,311. \end{cases}$$
 При цьому слід прийняти до уваги, що:

$$Ca[3,1,2(I-\eta)] = Sa(3,1,2\eta).$$

Похибка апроксимації (14) менша 1,5 %. В цьому переконує табл. 2, якщо порівняти записані в ній значення  $Sa(3,1,2\eta)$ , з тими, що вказані в табл. 1.

| Таблиця 2 – Апроксимовані значення |            |       |       |       |       |       |       |  |  |  |
|------------------------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|
|                                    | η          | 0,00  | 0,60  | 0,75  | 0,9   | 1,10  | 1,311 |  |  |  |
|                                    | Sa(3,1,2n) | 0.000 | 0.592 | 0.718 | 0.844 | 0.959 | 1.000 |  |  |  |

Висновки. При коливаннях, спричинених початковим відхиленням осцилятора від положення рівноваги, період коливань обернено пропорційний модулю цього відхилення. Якщо коливання спричинені початковим імпульсом в положенні рівноваги, то період коливань обернено пропорційний квадратному кореневі з початкової швидкості. В околі положення рівноваги |x| < 0.5a рух осцилятора наближено можна вважати рівномірним, тобто таким, що відбувається зі сталою швидкістю. Періодичні Аteb-функції, які описують рух розглянутого осцилятора, виражаються через еліптичний косинус.

## Список літератури:

1. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем Т.1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

**2.** Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П.Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.

**3.** *Ларин А.А.* Очерки истории развития теории механических колебаний / *А.А. Ларин.* – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.

**4.** Грицик В.В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Аteb-функції / В.В. Грицик, М.А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 12. – С. 37-42.

**5.** Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

**6.** *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара / *Я.Г. Пановко.* – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

7. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицам)

/ А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
 8. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

**9.** *Сеник П.М.* Про Аteb-функції / *П.М. Сенник* // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1968. – № 1. – С. 23-27.

**10.** Возний А.М. Застосування Аteb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь / А.М. Возний // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1970. – № 9. – С. 971-974.

11. Сокіл Б.І. Про застосування Аteb-функцій для по-

будови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / *Б.І. Сокіл* // Доповіді Національної академії наук України. – 1997. – № 1. – С. 55-58.

### **References (transliterated):**

**1.** Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Nelineynaya dinamika uprugikh sistem T.1. Modeli, metody, yavleniya [Nonlinear dynamics of elastic systems. T.1. Models, methods, phenomena]. Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2010. 704 p.

**2.** Pukach P.Ya. Yakisni metody doslidzhennya neliniynykh kolyval'nykh system [Qualitative methods of nonlinear vibration systems]. L'viv: L'vivs'ka politekhnika, 2014. 288 p.

**3.** Larin A.A. Ocherki istorii razvitiya terii mekhanicheskikh kolebaniy [Essays on the history of the development of the theory of mechanical oscillations]. Sevastopol': Veber, 2013. 403 p.

**4.** Hrytsyk V.V., Nazarkevych M.A. Matematychni modeli alhorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiyi [Mathematic models of algorithms and realizations of Ateb-functions]. Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny. 2007. No 12. PP. 37-42.

**5.** Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsial'nye funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

**6.** Panovko Ya.G. Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of Applied theory of vibrations and shock]. Leningrad: Mashinostroenie, 1976. 320 p.

**7.** Abramovits A., Stigan I. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsam) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.

**8.** Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) [A handbook on mathematics (for scientists and engineers)]. Moscow: Nauka, 1974. 832 p.

**9.** Senyk P.M. Pro Ateb-funktsiyi [About Ateb-function]. Dopovidi AN URSR, ser. A. 1968. No 1. PP. 23-27.

**10.** Voznyy A.M. Zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv"yazku odnoho klasu istotno neliniynykh dyferentsial'nykh rivnyan'[Application Ateb-function solution for building a class of essentially nonlinear differential equations]. Dopovidi AN URSR, ser. A. 1970. No 9. PP. 971-974.

**11.** Sokil B.I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv"yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' neliniyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyshch [About Ateb-use features for building solutions of some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional environments]. Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny. 1997. No 1. PP. 55-58.

Надійшла (received) 23.05.2017

# Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про коливання осцилятора з кубічно-нелінійною жорсткістю / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 57-61. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

О колебаниях осциллятора с кубически-нелинейной жесткостью / В.П. Ольшанский, В.В. Бурлака, М.В. Слипченко, О.Н. Малец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 57-61. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

On oscillations of an oscillator with cubic-nonlinear stiffness / V.P. Olshanskiy, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko, O.M. Malec // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – N 39 (1261). – C. 57-61. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.

### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики, теоретической

механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

*Olshanskiy Vasyl Pavlovych* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

*Бурлака Володимир Васильович* – кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (050) 526-51-69, е-mail: VVBurlaka@ukr.net.

*Бурлака Владимир Васильевич* – кандидат технических наук, доцент, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: VVBurlaka@ukr.net.

Burlaka Volodymyr Vasilovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: VVBurlaka@ukr.net.

*Сліпченко Максим Володимирович* кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (066) 712-09-89, е-mail: Slipchenko M@ukr.net.

Слипченко Максим Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 712-09-89, e-mail: Slipchenko M@ukr.net.

Slipchenko Maksym Volodymyrovych Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, TET.: (066) 712-09-89, e-mail: Slipchenko\_M@ukr.net.

*Малець Ольга Миколаївна* – аспірант, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Lelikmalec@ukr.net.

*Малец Ольга Николаевна* – аспирант, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Le-likmalec@ukr.net.

*Malec Olga Mykolayivna* – Postgraduate student at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Lelikmalec@ukr.net.

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115768

# В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

## КОЛИВАННЯ КВАДРАТИЧНО-НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Розглянуто механічні коливання нелінійного осцилятора, у якого відновлююча сила пропорційна квадрату деформації пружини. Рух спричинений або миттєво прикладеною силою сталої величини або прямокутним силовим імпульсом скінченної тривалості. Побудовано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійної задачі Коші для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. В першому переміщення осцилятора у часі виражено через еліптичний косинус Якобі, що дає можливість обчислювати їх за допомогою відомих таблиць. У другому для розрахунку переміщень, задіяно Ateb-синус. Запропоновано апроксимації, які з похибкою меншою одного відсотка, подають Ateb-синус в елементарних функціях. Показано, що коефіцієнт динамічності у розглянутого осцилятора менший двох. Він залежить від тривалості дії прямокутного силового імпульсу. Знайдена тривалість дії сили, коли досягається максимальний ефект розгойдування вільних коливань розвантаженого осцилятора. Вона залежить не тільки від параметрів осцилятора, а й від значення прикладеної сили, що не властиво лінійним системам. Наведено приклади розрахунків та відповідні графіки.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, дія силового імпульсу, аналітичний розв'язок, еліптичний косинус, Ateb-синус.

Рассмотрены механические колебания нелинейного осциллятора, у которого восстанавливающая сила пропорциональная квадрату деформации пружины. Движение вызвано или мгновенно приложенной силой постоянной величины или прямоугольным силовым импульсом конечной протяженности. Построено два варианта аналитического решения нелинейной задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. В первом, перемещения осциллятора во времени выражено через эллиптический косинус Якоби. Во втором, для расчета перемещений, задействовано Ateb-синус. Предложены аппроксимации, которые, с погрешностью меньшей одного процента, представляют Ateb-синус в элементарных функциях. Показано, что коэффициент динамичности у рассматриваемого осциллятора меньший двух. Он зависит от длительности действия прямоугольного силового импульса. Найдена продолжительность действия силы, когда достигается максимальный эффект раскачки свободных колебаний разгруженного осциллятора. Она зависит не только от параметров осциллятора, но и от значения приложенной силы, что не свойственно линейным системам. Приведено примеры расчетов и соответствующие графики.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, действие силового импульса, аналитическое решение, эллиптический косинус, Ateb-синус.

The mechanical oscillations of a nonlinear oscillator, which has a rebounding force proportional to the square of the strain of the spring, have been considered. The movement is caused either by a instantly applied force of a constant value or by a rectangular force pulse of the finite extent. Two variants of the analytic solution of the nonlinear Cauchy problem for a nonhomogeneous differential equation of second order have been constructed. In the first one, the displacement of the oscillator in time is expressed in terms of the elliptic cosine of Jacobi. In the second, the Ateb-sinus is used to calculate displacements of the oscillator. Approximations, which, with an error of less than one percent, represent the Ateb-sinus in elementary functions have been proposed. It is shown that the coefficient of dynamism of the oscillator under consideration is less than two. It depends on the duration of the rectangular force impulse. The duration of the force when the maximum effect of the free oscillations of an unloaded oscillator is reached have been discovered. It depends not only on the parameters of the oscillator, but also on the value of the applied force, which is not typical of linear systems. Examples of calculations and corresponding graphs have been provided.

Keywords: nonlinear oscillator, force impulse action, analytical solution, elliptic cosine, Ateb-sinus.

Вступ. Дослідження нелінійних коливань механічних систем з великими амплітудами відноситься до актуальних науково-прикладних задач, бо такі коливання можуть бути причиною передчасного руйнування елементів конструкцій та виходу їх з ладу. Тому, незважаючи на порівняно давню історію досліджень у цій галузі механіки [1], вони продовжують активно проводитись і в останні роки. Підтвердженням тому є монографічні публікації [2-5] та численні статті в наукових виданнях. Серед них заслуговує уваги окремий огляд [6], в якому йдеться про нелінійні коливання систем змінної маси. Коливання таких систем, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8], де точні розв'язки окремих задач будували методом припасовування, а наближені – методом енергетичного балансу.

розрахункових формул для обчислення переміщень квадратично-нелінійного осцилятора при дії силового імпульсу.

Ставиться задача побудови аналітичних розв'язків задачі Коші в спеціальних функціях та використання їх для аналізу впливу різних чинників на особливості руху осцилятора.

Спочатку розглядаємо рух, спричинений миттєво прикладеною силою сталої величини, а потім узагальнюємо задачу на випадок дії прямокутного силового імпульсу скінченної тривалості.

## Основна частина роботи

1. Коливання осцилятора, спричинені миттєво прикладеною сило. Переміщення осцилятора x(t) у часі t описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = P \cdot H(t).$$
<sup>(1)</sup>

Тут *m* – маса осцилятора; *с* > 0 – характеристика

© В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, 2017

Метою даної роботи є виведення та апробація

жорсткості його пружини; P – миттєво прикладена сила; H(t) – функція Хевісайда; крапкою позначена похідна по t.

Початковими умовами до (1) приймаємо:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$
 (2)

Уведенням позначень:  $\dot{x} = v$ ,  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ , рівнянню

(1) надаємо вигляд:

в яком

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{m} \left( P - cx^2 \right). \tag{3}$$

прийнявши  $x \ge 0; v \ge 0$ .

Проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\int_{0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y(a^{2}-y^{2})}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}}t.$$
 (4)

Тут  $a = \sqrt{\frac{3P}{c}} = \sqrt{3} x_{CT}$ , де  $x_{CT} = \sqrt{\frac{P}{c}}$  переміщення

осцилятора при статичному навантаженні його силою *P*. Таким чином, для осцилятора з вибраною характеристикою пружності коефіцієнт динамічності становить:

$$K_g = \frac{a}{x_{CT}} = \sqrt{3} < 2$$

тобто він менший, ніж у лінійної системи.

Переходом до нової змінної інтегрування за формулами:  $y = au^2$ ; dy = 2au du, вираз (4) зводимо до співвідношення:

$$\int_{0}^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega t , \qquad (5)$$
  
by  $\omega = \sqrt{\frac{ac}{6m}} = \left(\frac{P \cdot c}{12m^2}\right)^{1/4} .$ 

Користуючись (5), знайдемо час, коли досягається максимальне відхилення осцилятора від початкового положення x = 0. Поклавши в (5)  $x = a, t = t_*$ , маємо:

$$\omega t_* = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = I$$

Значення I виражається через Гама-функцію  $\Gamma(z)$  [9, с. 295] по формулі:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \,.$$

Враховуючи, що [10, с. 52]: Г(1/4) ≈ 3,62561;

$$Sa(3, 1, 2 \cdot \omega t) = \begin{cases} \omega t; \\ 0, 2 + 1,0333(\omega t - 0, 2) - 0,1444(\omega t - 0, 2)^{2}; \\ 1 - \frac{2}{3}\sin^{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(I - \omega t)\right] \end{cases}$$

створюють можливість наближено, з похибкою меншою 1 %, обчислювати x/a і при  $\omega t \in [I; 2I]$ , тобто повністю охопити перший цикл коливань, які відбуваються відносно положення  $x = x_{CT}$ .

З метою порівняння результатів, до яких призводять викладені форми розв'язку, розглянемо приклади Динаміка і міцність машин

 $\Gamma(3/4) \approx 1,22542$ , одержуємо:  $I \approx 1,31103$ . Таким чином,

$$t_* = \frac{1}{\omega} I \approx 2,4401 \left(\frac{m^2}{P \cdot c}\right)^{1/4}.$$

На відміну від лінійної системи, тут час  $t_*$  залежить не тільки від маси і жорсткості осцилятора, а також від величини прикладеної сили. Збільшення сили скорочує час досягнення максимального відхилення від положення x = 0. Із теорії еліптичних функцій Якобі відомо, що в інтегралі:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \zeta , \qquad (6)$$

залежність z від  $\zeta$  подається виразом [9, с. 129]:

$$z = cn\left(\sqrt{2}\zeta, \sin 45^{\circ}\right),\tag{7}$$

де  $cn(\sqrt{2}\zeta, \sin 45^{\circ})$  – еліптичний косинус. Тому, враховуючи співвідношення:

і вирази (6), (7) та парність еліптичного косинуса, одержуємо наступну розрахункову формулу:

$$\frac{x}{a} = cn^2 \left( \sqrt{2} \left| I - \omega t \right|, \sin 45^\circ \right). \tag{7}$$

Вона дає можливість обчислювати переміщення осцилятора на першому циклі коливань  $\omega t \in [0; 2I]$  за допомогою таблиць еліптичних функцій або таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, яка є в [10, с. 102]. Графіки еліптичного косинуса приведені в [11, с. 382] і в [12, с. 761].

Замість (7), для дослідження руху осцилятора, можна використовувати і більш сучасну форму розв'язку розглянутої задачі Коші, де переміщення x(t)виражається через Ateb-синус  $Sa(3,1,2\omega t)$ . Згідно з [5, 13, 14], із (5) випливає, що:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} = Sa(3,1,2\omega t).$$

Тому на проміжку  $0 \le \omega t \le I$  маємо:

$$\frac{x}{a} = Sa^2 \left(3, 1, 2\omega t\right). \tag{8}$$

Залежність:

$$Sa(3,1,2\omega t) = Sa[3,1,2(I-\omega t)]$$

та апроксимація:

$$0 \le \omega t < 0,2;$$
  
при  $0,2 \le \omega t \le 0,8;$  (9)  
 $0,8 < \omega t \le I.$ 

розрахунків.

**Приклад 1.** Знайдемо двома способами x/a, коли  $\omega t = 0,5; \quad \sqrt{2} |I - \omega t| \approx 1,1469$ . По таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду,  $F(\varphi, \sin 45^{\circ})$ , надрукованій в [10], знаходимо, що

 $F(\varphi, \sin 45^{\circ}) = 1,1469$  при  $\varphi \approx 60,2^{\circ}$ . Оскільки в даному випадку  $cn(\sqrt{2}|I - \omega t|, \sin 45^{\circ}) = \cos \varphi \approx \cos 60,2^{\circ}$ , то по формулі (7)  $x/a \approx \cos^2 60,2^{\circ} = 0,247$ . Якщо використовувати апроксимацію (9), то при  $\omega t = 0,5$  $Sa(3,1,2\omega t) \approx 0,497$  і по формулі (8)  $x/a \approx 0,247$ . Отже, результати розрахунків різними способами збігаються до трьох цифр після коми.

Приклад 2. Обчислимо x/a, коли  $\omega t = 2$ . Для нього  $\sqrt{2}|I - \omega t| \approx 0,9744$ . По таблиці в [10] знаходимо, що  $F(\varphi, \sin 45^{\circ}) = 0,9744$  при  $\varphi \approx 52,2^{\circ}$ . Тому, згідно з (7)  $x/a = \cos^{2}(52,2^{\circ}) \approx 0,376$ . У цьому випадку, при використанні (9), туди треба задати  $\omega t = 2I - 2 \approx 0,622$ , що дає  $Sa(3,1,2\omega t) \approx 0,610$ . Отже, згідно з (8),  $x/a \approx 0,61^{2} \approx 0,373$ , що добре узгоджується з попереднім результатом, одержаним з використанням таблиць.

Графік залежності x(t) у безрозмірних змінних  $\omega t$ , x/a, зображено на рис. 1. Він охоплює перший цикл коливань, що в разі потреби, не складно поширити і на більші значення  $\omega t$ .



Рисунок 1 – Графік руху осцилятора при миттєвому навантаженні сталою силою

Із графіка видно, що час перебування осцилятора в області  $x \in [x_{CT}; a]$  менший, ніж у області  $x \in [0; x_{CT}]$ . Ця особливість коливань не властива лінійному осцилятору, де графік x(t) перетинає пряму  $x = x_{CT}$  через рівні проміжки часу.

2. Коливання осцилятора, спричинені силовим імпульсом обмеженої тривалості.

Припустимо, що тривалість дії сили сталої величини дорівнює *t*<sub>1</sub>. Тоді рух осцилятора буде описуватись рівнянням:

$$n\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = P[H(t) - H(t - t_1)]$$

Як і раніше, початковими умовами до нього приймаємо (2).

Якщо  $t_1 \in (0, 2t_*]$ , а  $t \in [0, t_1]$ , то  $x \ge 0$  і мають чинність одержані вище формули (7) і (8). Тому при

$$t = t_1; x_1 = x(t_1)$$
 i:  
$$\frac{x_1}{x_1} = cn^2 \left( \sqrt{2} |I - \omega t_1|, \sin 45^\circ \right)$$

або

$$\frac{x_1}{x_1} = Sa^2 (3, 1, 2\omega t_1).$$
(10)

В цей момент часу швидкість дорівнює:

a

$$\upsilon_{1} = \upsilon_{1}(t_{1}) = \sqrt{\frac{2x_{1}}{m}} \left( P - \frac{c x_{1}^{2}}{3} \right) = \sqrt{\frac{2c}{3m}} \sqrt{x_{1} \left( a^{2} - x_{1}^{2} \right)}.$$

Для дослідження руху осцилятор при  $t > t_1$ , коли вже не діє на нього сила P, треба розв'язати однорідне рівняння:

$$m\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = 0, \qquad (11)$$

при початкових умовах:  
$$x(t_1) = x_1; \quad \dot{x}(t_1) = v_1.$$
 (12)

Переходом від похідної по t до похідної по x, рівнянню (11) надаємо форму:

$$\upsilon \frac{d\,\upsilon}{d\,x} = -\frac{c}{m}x^2,\tag{13}$$

оскільки x > 0, при  $t_1 \in (0, 2t_*)$ .

Проінтегрувавши (13), з урахуванням (12), одержуємо:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2c}{3m}} \sqrt{x_1 \left(a_*^3 - x^3\right)},$$
 (14)

де  $a_* = \lambda a$ ;  $\lambda = \sqrt[3]{x_1/a}$ .

Далі будемо розрізняти два випадки.

2.1. Для першого приймаємо  $t_1 \in (0, t_*]$  і  $v \ge 0$ .

Подальше інтегрування виразу (14), при  $v \ge 0$ , дає:

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dy}{\sqrt{a_*^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} (t - t_1).$$
(15)

Прийнявши в (15)  $y = a_*u$ ,  $dy = a_*du$ , йому надаємо форму:

$$\int_{-x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega_*(t-t_1).$$
(16)

$$\Gamma \text{yt} \ \omega_* = \sqrt{\frac{2a_*c}{3m}} = 2\sqrt{\lambda} \ \omega \ .$$

Вираз (16) створює можливість знайти час  $t_2$ , коли зупиниться осцилятор, відхилившись на  $a_*$  від положення x = 0. Задавши в (16)  $x = a_*$ ;  $t = t_2$ , отримуємо:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = I_*.$$

Звідки

де

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \Longrightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{I_*}{2\sqrt{\lambda}\omega t_1} + 1.$$
 (17)

Значення *I*<sup>\*</sup> можна знаходити за допомогою таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, бо в [9, с. 126]:

$$I_* = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\psi_*, k), \qquad (18)$$

Для

3

згідно

нього

(19),

Отже,

Приклад 3. Використовуючи виведені формули,

обчислимо максимальне відхилення а « осцилятора і

час  $t_2$ , коли воно досягається, при дії імпульсу сили, у якого  $\omega t_1 = 0,3$ . Підставивши це значення  $\omega t_1$  в (10),  $x_1 / a \approx 0.09$ .

 $\lambda = a_* / a \approx 0,448$ , що є відношенням фактичного максимального відхилення до максимально можливого.

i

 $I_* \approx 1,202$ .

 $\psi_* \approx \arccos 0.369 \approx 68.375^\circ$ . Користуючись таблицею неповного еліптичного інтеграла першого роду [10, с. 103], одержуємо  $F(\psi_*, k) \approx 1,581$  і по формулі (18)

 $ωt_2 = I_*/(2\sqrt{\lambda}) + ωt_1 \approx 1,198$ . Відношення  $t_2/t_1$  дорівнює

3,993. Якщо  $\omega t_1 = 0.8$ , то аналогічні розрахунки дають:

 $x_1 / a \approx 0.590$ ;  $\lambda \approx 0.839$ ;  $x_1 / a_* \approx 0.703$ ;  $\psi_* \approx 44.968^{\circ}$ ;

 $I_* \approx 0,663$ ;  $\omega t_2 \approx 1,162$ ;  $t_2/t_1 \approx 1,453$ . Тут, у порівнян-

ні з попереднім варіантом числових даних значно зро-

сло відношення а «/а і суттєво зменшилось відношення

2.2. Перейдемо до другого випадку, коли

$$k = \sin 75^{\circ}; \ \psi_* = \arccos \frac{\sqrt{3} - 1 + x_1 / a_*}{\sqrt{3} + 1 - x_1 / a_*}.$$
(19)

Щоб вивести залежність x(t), проведемо наступне перетворення в (16):

$$\int_{x_{1}/a_{*}}^{x/a_{*}} \frac{du}{\sqrt{1-u^{3}}} = \int_{x_{1}/a_{*}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{3}}} - \int_{x/a_{*}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{3}}} =$$
$$= I_{*} - \int_{x/a_{*}}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^{3}}} = \omega_{*}(t-t_{1}).$$

Тоді:

$$\int_{x/a_*}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I_* - \omega_* \left(t - t_1\right) = \tau$$
(20)

і, згідно з [9, с. 126], при  $t \in [t_1; t_2]$ :

$$\frac{x}{a} = \lambda \left[ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, k\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, k\right)} \right].$$
(21)

Отже, переміщення осцилятора на вказаному проміжку часу теж виражається через еліптичний косинус, який зручно обчислювати за допомогою таблиць

Залежності (21) можна надати й більш сучасну форму, використовуючи періодичні Аteb-функції [5, 13, 14]. Із (20) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa\left[2, 1, \frac{3}{2}\left(J - \tau\right)\right].$$
(22)

При цьому [9, с. 295]:

$$J = \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{3}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \approx 1,40218.$$

Значення Ateb-синуса в (22), з похибкою меншою 1 %, надає апроксимація:

$$Sa\left(3,1,\frac{3}{2}\eta\right) = \begin{cases} \eta;\\ 0,2+1,0283(\eta-0,2)-0,1833(\eta-0,2)^{2};\\ 1-\sin^{2}(\sqrt{3}/2)(J-\eta)\\ 0 \le \eta < 0,2; \end{cases}$$

 $0,2 \le \eta \le 0,8;$ при

$$0,8 < \eta \le J.$$
  
Якщо  $J \le \eta \le 2J$ , то  
 $Sa\left[2,1,\frac{3}{2}(2J-\eta)\right] = Sa\left[2,1,\frac{3}{2}\eta\right].$ 

Тому не виникає ускладнень при використанні формули (22).

Після відхилення на  $x = a_*$ , при  $t > t_*$ , осцилятор здійснює вільні коливання з амплітудою  $am(x) = a_*$ відносно положення x = 0. Їх окремо розглядали в [15], де виведено відповідні формули для розрахунку руху.

Аналіз викладеної теорії у розглянутому випадку показує, що амплітуда коливань а залежить від тривалості дії прикладеної сили Р. Вона найбільша, коли  $t_1 = t_*$  і становить  $a_* = a = \sqrt{3P/c}$ . Отже імпульс з тривалістю дії  $t_1 = t_* \in$  найбільш ефективним для розгойдування коливань. Нагадаємо, що час t\* залежить не тільки від маси й жорсткості осцилятора, а й від величини прикладеної сили, тоді як у лінійного осци-

 $t_1 \in [t_*, 2t_*]; x \ge 0$ , а  $v \le 0$ . Взявши знак мінус перед

(22) радикалом в (14), після інтегрування цього виразу,  
отримуємо:  
$$-\int_{x_1}^{x} \frac{dy}{\sqrt{a_*^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} (t - t_1).$$

лятора час *t*\* не залежить від *P*.

що

 $x_1 / a_* \approx 0,201$ 

знаходимо,

знаходимо

Тоді.

 $t_2/t_1$ .

Заміною змінних:  $y = a_*u$ ,  $dy = a_*du$  йому надаємо вигляд:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega_*(t-t_1), \qquad (23)$$

де  $x \leq x_1$ .

Поклавши в (23)  $t = t_2$ ; x = 0, знаходимо час  $t_2$ , коли осцилятор повернеться у вихідне положення, яке він мав при t = 0. Для цього розв'язуємо рівняння:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = J - I_* \approx 1,40218 - I_* .$$

Тоді:

$$\omega t_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( J - I_* \right) + \omega t_1 \,. \tag{24}$$

Щоб одержати залежність x(t) на проміжку  $t \in [t_1; t_2]$ , виконаємо наступне перетворення в (23):

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} - I_*.$$
  
Звідки отримуємо:

$$\int_{x/a_*}^{t} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I_* + 2\sqrt{\lambda} \,\omega(t-t_1) = \xi \,.$$

Тому, згідно з [9, с. 126]:

$$\frac{x}{a} = \lambda \left[ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}\xi, k\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}\xi, k\right)} \right].$$
(25)

Якщо залежність x(t) (21) виражати через Ateb-

Вісник НТУ «ХПІ». 2017. № 39 (1261)

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa\left[2, 1, \frac{3}{2}\left(J - \xi\right)\right].$$
(26)

Отже, формули (25) або (26) дають можливість обчислювати переміщення розвантаженого осцилятора, коли  $0 \le x \le x_1$ .

Приклад 4. Обчислимо час повернення осцилятора в положення x = 0, коли  $\omega t_1 = 2$ . Для нього, по формулі (10),знаходимо  $x_1 / a \approx 0,373$ ;  $a_* / a = \lambda = \sqrt[3]{x_1 / a} \approx 0,720$ . Тоді,  $x_1 / a_* \approx 0,518$ . Згідно з (19), *ψ*<sup>\*</sup> ≈ arccos0,565 ≈ 55,63<sup>°</sup>. Інтерполяцією табличних даних в [10, с. 103] одержуємо  $F(\psi, k) \approx 1,151$ і по формулі (18) знаходимо *I*<sub>\*</sub> ≈ 0,875. Подальший розрахунок по формулі (24) дає  $\omega t_2 \approx 2,311$ , тобто відношення t<sub>2</sub>/t<sub>1</sub> приблизно дорівнює 1,155. Максимальне відхилення осцилятора від положення x = 0 становить  $a = \sqrt{3P/c}$ , при  $\omega t_* \approx 1,311$ . Як бачимо, осцилятор більше часу віддалявся від вихідного положення, ніж повертався до нього.

У вихідне положення x = 0 осцилятор повертається зі швидкістю:

$$\upsilon_0 = -\sqrt{\frac{2c}{3m}}\sqrt{a_*^3} = -\sqrt{\frac{2c}{3m}}a\sqrt{x_1} = -\sqrt{\frac{2Px_1}{m}}$$

Якщо  $\omega t_1 = 2I$ , то згідно з (10)  $x_1 = 0$ . Тому, при цій тривалості імпульсу, осцилятор зробить лише один повний цикл коливань, бо повернеться в положення x = 0 з нульовою швидкістю. Це означає, що далі він повністю припинить свій рух, спричинений силовим імпульсом.

Якщо  $|v_0| > 0$ , то осцилятор буде в стані вільних коливань. Формули для їх розрахунку виведено в [15] і тут їх виписувати не будемо. Лише зазначимо, що амплітуда  $a_0$  коливань, які проходять відносно положення x = 0, залежить від  $|v_0|$  і становить:

$$am(x) = a_0 = \sqrt[3]{\frac{3mv_0^2}{2c}} = a\sqrt{\frac{x_1}{a}} = \sqrt{ax_1}$$

Дослідження підтвердило, що тривалість імпульсу суттєво впливає на динаміку осцилятора. Залежність його коефіцієнта динамічності  $K_g = \max(x)/x_{CT}$ від  $t_1$  показана на рис. 2.

Тут, при  $\omega t_1 \ge I$ ,  $K_g = \sqrt{3}$ , тобто коефіцієнт динамічності має таке значення як і при дії, миттєво прикладеної сталої сили.

Про вплив часу  $t_1$  на амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора, що проходять при  $t > t_1$  відносно положення x = 0, надана інформація на рис. 3.

Із графіка видно, що коли  $\omega t_1 = 2I$ , то амплітуда вільних коливань дорівнює нулю, тобто при  $t > t_1 = 2t_*$  осцилятор буде знаходитись в стані спокою.





### Висновки.

1. Коефіцієнт динамічності квадратичнонелінійного осцилятора при дії миттєво прикладеної сталої сили (ступінчастого навантаження) дорівнює

 $\sqrt{3}$ . Він менший, ніж у лінійного осцилятора.

 Переміщення осцилятора суттєво залежать від тривалості силового імпульсу і виражаються через еліптичній косинус Якобі або через Ateb-синус. Це дає можливість проводити розрахунки за допомогою відомих таблиць або з використанням запропонованих апроксимацій.

 Існує така тривалість дії силового імпульсу, при якій осцилятор робить лише один цикл коливань, а потім знаходиться в стані спокою.

### Список літератури:

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.

2. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

**3.** *Кузнецов А. П.* Нелинейные колебания / *А. П. Кузне цов, Н. М. Рыскин.* – М. : Физматлит, 2002. – 292 с. **4.** *Митропольський Ю. А.* Избранные труды в 2-х томах / *Ю. А. Митопольский.* – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.

5. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.

**6.** *Cveticanin L.* A rewiew on dynamics of mass variable system / *L. Cveticanin //* Journal of the Serbian Society for Computational Machanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – Pp. 56-74.

7. Ольшанский В. П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.

8. Ольшанський В. П. Динаміка дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко. – Х.: Міськдрук, 2016. – 264 с.

9. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

**10.** Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 344 с.

**11.** Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

**12.** *Корн* Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

13. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 2007. – № 12. – С. 37-42.

14. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / Б. І. Сокіл // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 1997. – № 1. – С. 55-58.

**15.** Ольшанський В. П. Про коливання осцилятора з квадратично-нелінійною жорсткістю / В. П. Ольшанський, В. В. Бурлака, М. В. Спіпченко, О. М. Малець // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. – Х.: 2017. – № 8. – С. 177-185.

### **References (transliterated):**

1. Larin A. A. Ocherki istorii razvitija teorii mehanicheskih kolebanij. Sevastopol: Veber, 2013. 403 p.

**2.** Avramov K. V., Mihlin Ju. V. Nelinejnaja dinamika uprugih sistem. Tom 1: Modeli, metody, javlenija. Moscow-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2010. 704 p.

**3.** Kuznecov A. P., Ryskin N. M. Nelinejnye kolebanija. Moscow: Fizmatlit, 2002. 292 p.

**4.** Mitropol's'kij Ju. A. Izbrannye trudy v 2-h tomah. Kyyiv: Naukova dumka, 2012. 504 p.

**5.** Pukach P. Ja. Jakisni metodi doslidzhennja nelinijnih kolival'nih sistem. L'viv: L'vivs'ka politehnika, 2014. 288 p.

**6.** Cveticanin L. A rewiew on dynamics of mass variable system. Journal of the Serbian Society for Computational Machanics. 2012. Vol. 6, No 1. PP. 56-74.

7. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Metod VBK v raschetah nestacionarnyh kolebanij oscilljatora. Kharkiv: Mis'kdruk, 2014. 264 p.

**8.** Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V., Tishenko L. M. Dinamika disipativnih osciljatoriv. Kharkiv: Mis'kdruk, 2016. 264 p.

**9.** Prudnikov A. P., Brychkov A., Marichev O. I. Integraly i rjady. Jelementarnye funkcii. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

**10.** Janke E., Jemde F., Ljosh F. Special'nye funkcii. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

**11.** Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

**12.** Korn G., Korn T. Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers). Moscow: Science, 1974. 832 p.

**13.** Gricik V. V., Nazarkevich M. A. Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noï akademiï nauk Ukraïni. Kyyiv: 2007. No 12. PP. 37-42.

14. Sokil B. I. Pro zastosuvannja Ateb-funkcij dlja pobudovi rozvjazkiv dejakih rivnjan', jaki opisujut' nelinijni kolivannja odnovimirnih seredovishh. Dopovidi Nacional'noï akademiï nauk Ukraïni. Kyyiv: 1997. No 1. PP. 55-58.

**15.** Olshanskiy V. P., Burlaka V. V., Spipchenko M. V., Malets O. M. About the collusion of the oscillator in a quadratically-nonlinear confinement. Technical services of the agroindustrial, forest and transport complex. Kharkiv: 2017. No 8. PP. 177-185.

Надійшла (received) 21 .09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Коливання квадратично-нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

Колебания квадратично-нелинейного осциллятора, вызванные импульсным нагружением / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

Oscillations of a quadratic-nonlinear oscillator caused by a pulsed voltage / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – N 39 (1261). – C. 62-67. – Bibliogr.: 15. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри фізики і теоретичної механіки, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Василий Павлович – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры и физики, теоретической механики, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, еmail: OlshanskiyVP@gmail.com.

*Olshanskiy Vasyl Pavlovych* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фіз.-мат. наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка, м. Харків, тел.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физ.-мат. наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, г. Харьков, тел.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.

*Olshanskiy Stanislav Vasilevich* – Phd in physics and mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkiv, tel.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 621.77

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115769

# А.В. СТЕПУК, Л.В.АВТОНОМОВА, С.В. БОНДАРЬ, В.Л. ХАВИН, С.И. МАРУСЕНКО

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОКРЫТИЕМ ПРИ УДАРЕ ПРОБОЙНИКОМ

У роботі методом кінцевого елементу проведено чисельне моделювання процесу ударної взаємодії тонкої двошарової пластини з двостороннім міцним покриття при частковому проникненні сталевого пробійника з плоскою робочою частиною. Для визначення напружено-деформованого стану конструкції було вирішено нестаціонарну контактну крайову термовязкопластичну задачу з урахуванням нелінійної залежності зміни механічних властивостей матеріалу від температури і швидкості деформацій. Аналіз полів деформацій і напружень показав, що при неповному проникненні пробійника відбувається відшарування нижнього шару покриття і крихке руйнування верхнього шару, тобто перерозподіл поля напружень не призводить до повного руйнування пластини.

Ключові слова: удар, пластина, покриття, моделювання, термопружньопластичність, метод скінчених елементів.

В работе методом конечного элемента проведено численное моделирование процесса ударного воздействия на тонкую двухслойную пластину с двухсторонним покрытием стального пробойника с плоской рабочей частью при его частичном проникновении в пластину. Для определения напряженно-деформированного состояния конструкции была решена нестационарная контактная краевая термо-упругопластическая задача с учетом изменения механических свойств материала и их нелинейной зависимости от температуры и скорости деформаций. Анализ полей деформаций и напряжений показал, что при неполном проникновении пробойника происходит отслаивание нижнего слоя покрытия и хрупкое разрушение верхнего слоя, т.е. перераспределение поля напряжений не приводит к полному разрушению пластины или ее пробою. При использовании слоистых структур и прочных покрытий материалов пластинчатых элементов защитных конструкций из легких металлов и сплавов происходит повышение стойкости конструкции к разрушению при ударе.

Ключевые слова: удар, пластина, покрытие, моделирование, термоупругопластичность, метод конечных элементов.

A numerical simulation of the impact process on a thin two-layer plate with a double-sided coating of a steel punch having a flat working part with its partial penetration into the plate was carried out applying the finite element method. To determine the structure's stress-strain state, a non-stationary contact boundary thermo-elastoplastic problem was solved, in such way as to put in variation of the materials' mechanical properties and their nonlinear dependence on temperature and strain rate. Analysis of the deformations and stresses fields showed that when the punch is not fully penetrated, the lower layer of the coating peels off and the brittle fracture of the upper layer occurs, i.e. redistribution of the stress field does not lead to a complete destruction of the plate or its breakdown. With the use of layered structures and durable coatings of plate elements materials in protective structures made of light metals and alloys, the resistance of the structure to an impact failure increases.

Key words: impact, plate, coating, modeling, thermo-elasticity, finite element method.

Введение. При проектировании элементов защитных конструкций традиционно используются изотропные материалы с высокой прочностью и вязкостью, которые должны быть устойчивыми к проникновению пробойника. Исследование механизма разрушения защитных материалов элементов позволяет разработать математические модели, которые описывают процесс повреждения всей многокомпонентной конструкции. На практике также широко используются анизотропные материалы или материалы с покрытием для многослойных тонкостенных конструкции, поперечный удар по которым приводит к расслоению и дальнейшему разрушению. В следствие неоднородности свойств и слоистости структуры материала при ударе наблюдаются различные процессы разрушения (пластическое, хрупкое) элементов защитной конструкции. При исследовании деформирования и разрушения таких конструкций при ударном воздействии обходимо решать динамическую краевую задачу с использованием численных методов механики.

Анализ последних исследований и литературы. Вопросам динамического поведения многокомпонентных пластин при ударном воздействии посвящено много исследований. Так в работе [1] для описания

поведения композитных пластин при ударе используется теория Миндлина и закон Герца на основе МКЭ. Уточненная дискретно-структурная теория слоистых пластин применена при анализе отклика многослойной пластины на удар в работе [2]. Сравнение численных и экспериментальных результатов исследований поведения многослойных пластин при ударе проведено в работе [3]. Исследование разрушения при ударе композитных защитных пластин приведено в работе [4]. Анализу моделей, которые описывают процесс проникновение пробойника в слоистые структуры при ударе посвящена работа [5]. Численное решение методом конечного элемента вязкоупругих контактных задач при ударном взаимодействии и результаты исследований прочностных характеристик керамических покрытий приведено в работе [6]. Прочность алюминиевых пластин при ударном нагружении анализируется в работе [7]. Численное моделирование методом конечного элемента процесса высокоскоростного деформирования тонкой пластины из алюминиевого сплава с корундовым покрытием при ударе пробойником полусферической формы представлено в работе [8]. Исследование показало, что отслоение высокопрочного корундового покрытия оказывает влияние на характер развития процесса разрушения пластины по

© А.В. Степук, Л.В.Автономова, С.В. Бондарь, В.Л. Хавин, С.И. Марусенко, 2017

толщине.

Целью данной статьи является численное определение напряженно-деформированного состояния тонкой двухслойной пластины с двухсторонним высокопрочным покрытием при частичном внедрении стального пробойника с плоской рабочей поверхностью.

Постановка задачи. При исследовании деформирования и разрушения многослойной пластины рассматривается частичное проникновение пробойника в пластину при ударе. Математические модель, которая описывает динамическое поведение и разрушение при ударном при воздействии пробойником на тонкую двухслойную металлическую пластину с двухсторонним высокопрочным покрытием включает в себя уравнения закона сохранения массы, энергии и момента количества движения, условия неразрывности, нелинейные физические уравнения, зависящие от деформаций, скоростей деформаций и температуры, уравнение Грюнайзена, уравнение модели разрушения, условия контакта. Система уравнений в осесимметричной постановке в переменных Эйлера представлена в [5]:

$$\begin{split} \frac{d}{dt} \int_{v} \rho dv &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{v} \rho u_{r} dv &= \int_{s} (\sigma_{nn} n_{r} + \sigma_{n\tau} \tau_{r}) ds, \\ \frac{d}{dt} \int_{v} \rho u_{z} dv &= \int_{s} (\sigma_{nn} n_{z} + \sigma_{n\tau} \tau_{z}) ds, \\ \frac{d}{dt} \int_{v} \rho E dv &= \int_{s} (\sigma_{nn} u_{n} + \sigma_{n\tau} u_{r}) ds, \\ e_{r} &= \frac{1}{2\mu} \frac{D}{Dt} s_{r} + 2\lambda s_{r}, \quad e_{z} = \frac{1}{2\mu} \frac{D}{Dt} s_{z} + 2\lambda s_{z}, \\ e_{rz} &= \frac{1}{2\mu} \frac{D}{Dt} s_{rz} + 2\lambda s_{rz}, \\ P(\rho, \varepsilon) &= P_{s}(\rho) + \gamma(\rho, \varepsilon) \upsilon [\varepsilon - \varepsilon_{s}(\rho)], \\ \varepsilon_{s}(\rho) &= \begin{cases} \frac{B_{0}}{\rho_{0}} \frac{9}{2\rho^{2}} \left\{ \exp \left[ \varphi(1 - \delta^{\frac{1}{3}}) \right] - 1 \right\}^{2}, \\ npu \quad \delta \leq 1, \\ \frac{B_{0}}{\rho_{0}} \frac{3}{\psi - 4} \left\{ \frac{3}{\psi} \exp \left[ \psi(1 - \delta^{\frac{1}{3}}) \right] - \delta^{-1} + \frac{\psi - 3}{\psi} \right\} \end{cases} \\ \gamma(\rho, \varepsilon) &= \frac{2}{3} + \frac{K}{\delta} + \left( \gamma_{0} - K - \frac{2}{3} \right) \frac{1 + \nu L \delta^{2}}{(1 + L \delta^{2})^{2}} \frac{\ln(1 + \delta)}{\ln 2}, \\ K &= \left( \beta - \frac{2}{3} \right) \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right)^{-1}; \quad \delta = \frac{\rho_{0}}{\rho}; \\ L &= \frac{\varepsilon}{\Lambda_{0}}; \quad P_{s} = \rho^{2} \frac{d\varepsilon_{s}}{d\rho}. \end{split}$$

где t – время;  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты;  $\rho$  – плотность;  $u = (u_r, u_{\varphi}, u_z)$  – вектор скорости; E – полная

(удельная) энергия;  $\sigma_n$  – вектор напряжения на элементарной площадке с единичной нормалью  $n = (n_r, n_{\varphi}, n_z)$  и единичной касательной  $\tau = (\tau_r, \tau_{\varphi}, \tau_z)$ ;  $\sigma_{nn}$  – нормальная компонента вектора  $\sigma_n$ ;  $\sigma_{n\tau}$  – касательная компонента вектора  $\sigma_n$ ;  $u_n$ ,  $u_{\tau}$  – нормальная и касательная компоненты вектора u;  $\lambda$  – неотрицательная функция;  $\mu$  – модуль сдвига; D/Dt – производная по Яуману;  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\beta$ , v – параметры формулы;  $B_0$  – модуль объемной адиабатической сжимаемости;  $\varepsilon_s$ ,  $P_s$  – энергия сжатия и гидростатическое давление,  $\gamma_0$  – термодинамический коэффициент Грюнайзена.

Для определения напряженно-деформированного состояния и оценки разрушения многослойной пластины при ударе необходимо решать нелинейную нестационарную термо-упругопластическую контактную задачу с учетом критериев разрушения. Для решения краевой задачи задаются граничные и начальные условия. В начальный момент времени отсутствуют напряжения и деформации во взаимодействующих телах. При контакте на свободных поверхностях также отсутствуют напряжения, а в зоне контакта при соударении пробойника с пластиной выполняется условие скольжения. На контактной границе сред (слоев) с различными характеристиками (свойства материала) должно выполнятся равенство перемещений и напряжений. Т.к. рассматривается процесс высокоскоростного деформирования необходимо учитывать зависимость механических свойств материала от температуры и скоростей деформаций (при помощи семейства диаграмм деформирования, полученных для широкого диапазона температур и скоростей деформаций).

**Численная реализация.** Поставленная краевая нестационарная контактная задача термоупругопластичности численно может быть решена методом конечного элемента на основе независимого подхода Лагранжа-Эйлера, при использовании которого для оптимизации вычислительного процесса движение сетки задается независимо и определяется процессом деформирования материала. Нелинейная краевая задача термоупругопластичности решается итерационным методом Ньютона-Рафсона.

В работе представлено численное решение задачи высокоскоростного (ударного) нагружения круглой двухслойной пластины (толщина каждого слоя равна 6мм) из стали и алюминиевого сплава радиусом равным 30 мм с двусторонним высокопрочным корундовым покрытием. Толщина нижнего и верхнего слоя покрытия равна 300 мкм. На контактных поверхностях между слоями пластины выполняются условия скольжения с трением. Пластина взаимодействует с стальным цилиндрическим ударником с плоской рабочей частью марки Ст3. Расчетная схема ударного нагружения пластины представлена на рис. 1.

Конечно-элементная модель пластины состоит из 8837 элементов. Модель материала представляется собой таблично заданное семейство кривых деформирования полученных экспериментально в широком диапазоне скоростей деформаций.

Напряженно-деформированное состояние пла-

стины определялось при значениях начальной скорости удара пробойника - 10м/с и 100м/с.



Рисунок 1 – Схема ударного нагружения двухслойной пластины с покрытиями

Обсуждение результатов. При решении поставленной задачи были получены параметры напряженно-деформированного состояния в круглой пластине алюминиевого сплава с двусторонним высокопрочным корундовым покрытием. На рис. 2 и рис. 3 представлено распределение перемещений двухслойной пластины в конце ударного процесса при скорости удара пробойника 10 м/с и 100 м/с соответственно.



Рисунок 2 – Распределение перемещений в пластине с покрытием при скорости удара 10 м/с

При ударе пробойником с низкой скоростью 10 м/с наблюдается изгиб пластины и отслоение высокопрочного покрытия, но разрушения пластины и отрыва откольного слоя покрытия не происходит.



Рисунок 3 – Распределение перемещений в пластине с покрытием при скорости удара 100 м/с

При ударе пробойником со скорость 100 м/с двухслойной пластины с двухсторонним высокопрочным на сжатие (твердость) покрытием наблюдается расслоение ее и хрупкое разрушение материала. Для протекания и завершения процесса разрушения верхнего слоя покрытия достаточно упругой энергии при разрушении конструкции, т.к. материал покрытия обладает не высокой прочностью на растяжение. Вокруг зоны контакта наблюдается растрескивание и сколы верхнего высокопрочного слоя. Возникают радиальные и кольцевые трещины на поверхности покрытия, удаленной от области контакта. По толщине пластины распространяются расходящиеся под углом к траектории движения пробойника трещины конуса Герца и боковые трещины, а нижний слой покрытия отслаивается. Экспериментально установлено, что в пластине с покрытием вследствие последовательно возникающих напряжений растяжения, сдвига и сжатия происходит макроструктурное разрушение материала, сопровождающееся помимо этого развитием микродефектов: межкристаллитных микротрещин, дислокаций, двойникования, образование полос сдвига и другими, влияющими на механические свойства материала. При внедрении пробойника в тонкую металлическую пластину происходит также его деформирование, а площадь контакта увеличивается. В связи с потерями кинетической энергии пробойника (деформирование пробойника, расход энергии, поглощенной материалом пластины на пластическое деформирование при расширении пробивного отверстия, изгиб всей пластины, дополнительный расход энергии на трещинообразование, отслаивание, разрушение и отрыв и отколы слоя покрытия) происходит затухание скорости внедрения пробойника, уменьшаются запреградные эффекты. При ударе пробойником металлической пластины без высокопрочного покрытия происходит ее разрушение (выбивание поврежденного материала пробки из траектории движения пробойника).

Выводы. Проведено численное моделирование процесса ударного взаимодействия тонкой двухслойной пластины с двухсторонним высокопрочным покрытием и стальным пробойником с плоской рабочей частью. Решение нестационарной контактной термоупругопластической задачи было получено методом конечных элементов с использованием независимого подхода Лагранжа-Эйлера Расчет напряженнодеформированного состояния пластины при двух значений ударной скорости пробойника (10м/с и 100м/с) дало возможность проанализировать процесс динамического деформирования и разрушения высокопрочного покрытия. Выявлено, что при использовании прочных покрытий происходит повышение стойкости пластинчатых элементов защитных конструкций из легких металлов и сплавов к разрушению при ударе.

## Список литературы:

**1.** *Tiberkak R.* Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact / R. *Tiberkak, M. Bachene, S. Rechak, B. Necib* // Composite structures. – 2008. – Vol. 83. – P. 73-82.

**2.** Nosier A. Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / A. Nosier, R.K. Kapania // Comput. Mechanics. – 1994. – № 13. – Р. 360-379.

**3.** Choi I. H. Low-velocity impact response of composite laminates considering high-order shear deformation and large deflection / I. H. Choi, C. S. Hong // Mech. Composite Materials and Structures. – 1994. – Vol. 1, № 2. – P. 157-170.

**4.** *Hazell P.J.* Impact, penetration and perforation of a bonded CFRP composite panel by a high velocity steel sphere: an experimental study / *P.J. Hazell, G.J. Appleby-Thomas, G. Kister //* Cranfield Defence and Security, Cranfield University. – Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 2010. – Vol. 45 (6). – PP. 439-450.

**5.** Patel B.P. Penetration of Projectiles in Composite Laminates / B.P. Patel, S.K. Bhola, M. Ganapathi, and D.P. Makhecha // Institute of Armament Technology. – Pune-

411 025. – Defence Science Journal. – April 2004. – Vol. 54, No. 2. – PP. 151-159.

6. Śliwa A. Finite Element Method application for modeling of PVD coatings properties / A. Śliwa, L.A. Dobrzański, W. Kwaśny, W. Sitek // Journal of Achievements in Materials and Manufact.Eng. – 2008. – Vol. 27.

7. Sudhakara I. Enhancement of wear and ballistic resistance of armour grade AA7075 aluminium alloy using friction stir processing / I. Sudhakara, V. Madhub et al // Defence Technology. – November 2014.

8. Автономова Л. В. Особенности высокоскоростного деформирования тонкой пластины с высокопрочным покрытием / Л. В. Автономова, С.В. Бондар, А.В. Степук, В..Л.Хавін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 57. – С.8-10.

### **Bibliography (transliterated):**

1. Tiberkak R., Bachen M., S. Rechak S., Necib B. Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact. Composite structure. 2008. Vol. 83. PP. 73-82.

**2.** Nosier A., Kapani R.K. Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory. Comput. Mechanics. 1994. No 13. PP. 360-379.

**3.** Choi I.H., Hong C.S. Low-velocity impact response of composite laminates considering high-order shear deformation and large deflection. Mech. Composite Materials and Struc-

tures.1994. Vol. 1, No 2. PP. 157-170.

**4.** Hazell P.J., Appleby-Thomas G.J. and Kister G. Impact, Penetration and Perforation of a Bonded CFRP Composite Panel by a High Velocity Steel Sphere: an Experimental Study. Cranfield Defence and Security, Cranfield University, Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2010. Vol. 45 (6). PP. 439-450.

**5.** Patel B.P., Bhola S.K., Ganapathi M., Makhecha D.P. Penetration of Projectiles in Composite Laminates. Institute of Armament Technology, Pune-411 025, Defence Science Journal. April 2004. Vol. 54, No. 2. PP. 151-159.

6. Śliwa A., Dobrzański L.A., Kwaśny W., Sitek W. Finite Element Method Aplication for Modeling of PVD Coatings Properties. Journal of Achievements in Materials and Manufact. Eng. 2008. Vol. 27.

7. Sudhakara I., Madhub V. et al. Enhancement of Wear and Ballistic Resistance of Armour Grade AA7075 Aluminium Alloy Using Friction Stir Processing. Defence Technology November 2014.

8. Avtonomova L.V., Bondar S.V., Stepuk A. V., Xavin V.L. Osobenosti visokoskorostnogo deformirovaniy tonkoy plastinyi s visokoprochnyim [High-speed deformation of a high-strength coated thinplate]. Visnik NTU "KhPI". SerIya: Dinamika imitsnist mashin. Kharkiv: NTU "KhPI". 2015. No. 57. PP.8-10.

Поступила (received) 09.10.2017

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельне визначення напруженно-деформованого стану тонкої пластини з покриттям при ударній дії пробійником / О.В. Степук, Л.В.Автономова, С.В. Бондар, В.Л. Хавін, С.І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 68-71. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Численное определение напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с покрытим при ударном воздействии пробойником / А.В. Степук, Л.В. Автономова, С.В. Бондарь, В.Л. Хавин, С.И. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 68-71. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Numeral determination of the tensely-deformed state of coated thin plate at shock influence punch / A.V.Stepuk, L.V. Avtonomova, S.V.Bondar, V.L. Khavin, S,I,Marusenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 68-71. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Степук Олександр Володимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. наук. співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

*Степук Александр Владимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

Stepuk Alexander – Candidate of Physics-Mathematical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

*Автономова Людмила Володимирівна* – кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

*Автономова Людмила Владимировна* – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

Avtonomova Ludmila - Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Leading Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

*Бондар Сергій Володимирович* – кандидат технічних наук, ст. науковий співробітник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru.

**Бондарь Сергей Владимирович** – кандидат технических наук, ст. научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru.

Bondar Sergiy - Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru.

Хавін Валерій Львович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Хавин Валерий Львович – кандидат технических наук, заведующий кафедры, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Khavin Valeriy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Head of department, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Марусенко Світлана Іванівна – науковий співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78. Марусенко Светлана Ивановна – научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78.

Marusenko Svitlana – Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78.
УДК 539

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115770

# А.В. СТЕПУК, Л.В.АВТОНОМОВА, С.В. БОНДАРЬ, В.Л. ХАВИН

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАННИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПРОБОЙНИКОМ

У роботі методом скінченних елементів проведено чисельне моделювання процесу ударної взаємодії двошарової пластини (метал - біотканина) со сталевим пробійником. Рішення нестаціонарної контактної краєвої термовязкопружньопластичної задачі дозволило знайти параметри напружений-деформованого стану в шарах пластини. Аналіз полів деформацій і напружень показав, що при неповному проникненні пробійника в пластину область деформації шару біотканини значно перевищує область локальної деформації металевого шару.

Ключові слова: удар, двошарова пластина, біотканина, моделювання, термовязкопружньопластичність, метод скінченних елементів.

В работе методом конечных элементов проведено численное моделирование процесса ударного взаимодействия двухслойной пластины (металл - биоткань) со стальным пробойником. Решение нестационарной контактной краевой термовязкоупругопластической задачи позволило найти параметры напряженно-деформированного состояния в слоях пластины. Анализ полей деформаций и напряжений показал, что при неполном проникновении пробойника в пластину область деформирования слоя биоткани значительно превышает область локального деформирования металлического слоя.

Ключевые слова: удар, двухслойная пластина, биоткань, моделирование, термовязкоупругокопластичность, метод конечных элементов.

The numeral simulation of double-layer plate (metal and bio-tissue) deform process under steel punch impact is provided applying the method of finite elements. The solution of non-stationary thermos viscous elastic boundary value problem allowed to find out the parameters of the stress-strain deformed state within the layers of the plate. The analysis of the strain fields and stresses demonstrated that the deformation area of bio-tissue layers considerably exceeds the area of metallic local deformation during the incomplete punch penetration into a plate. The maximum displacement in the bio-tissue layer does not exceed the critical depth of the dent in the metal layer.

Keywords: impact, double-layer plate, bio-tissue, simulation, thermos viscous elasticity, finite element method.

Введение. Основными критериями при выборе защитной конструкции с пластинчатыми бронеэлементами является защита от всех видов пробоя, охват большой площади защиты и минимальный вес. Пластинчатые элементы защитной конструкции также должны обеспечить минимальное запреградное действие на объект, которое оценивают по глубине вмятины при изгибе пластины после удара пробойником. Статистика, собранная специалистами, показывает, что при глубине вмятины 22 мм после удара возникают тяжелые запреградные травмы. Поэтому, при изготовлении различных защитных пластин (стальных, многослойных, керамических) проводятся как экспериментальное исследования, так и численное моделирование процессов разрушения и проникновения пробойника в преграду после удара.

Анализ последних исследований и литературы. В последние годы появилось много работ, посвященных моделированию деформирования и разрушения биоткани при ударном воздействии. Так была разработана теории Мартеля о связи нанесенного повреждения и освободившейся энергией. В работе [1] предполагается, что размер разрушенной области биоткани прямо пропорционален рассеиваемой энергии. На основании анализа ряда экспериментов с биобъектами была доказана корреляция между количеством разрушенной биоткани и рассеянной кинетической энергией пробойника [2]. В работе [3] при выводе уравнения пороговой скорости пули было учтено, что проницаемость кожи зависит прежде всего от плотности сечения S снаряда (S – масса, деленная на площадь поперечного сечения пули). Исследованию пробивания кости пулей посвящена работа [4]. Кость не эластична и имеет большую плотность с удельным весом 1.11, а также большую прочность, чем окружающая мышечная ткань. Как прямой удар, так и кавитационное давление могут привести к разрушению кости. При прямом попадании пуля сначала создает временную полость при входе в мягкую ткань перед костью. Затем пуля разрушает кость, и давление будет проталкивать часть кости в осевом направлении наружу, создавая временную полость кости. Исследованию запреградного действия при ударе на биообъект посвящена работа [5]. Быстрая акустическая ударная волна и более медленная волна давления, создаваемая движением кавитирующих тканей при ударе без разрушения защитной пластины, могут создавать давление 34 МПа в биоткани и вызывать вредные эффекты в биообъекте. Поэтому при проектировании пластинчатых защитных конструкций необходимо анализировать процесс взаимного деформирования система защитыбиоткань при полном и частичном проникновении пробойника после удара.

Целью данной работы является численное моделирование процесса частичного проникновения пробойника в двухслойную пластину (металл - биоткань) и определение распределения их параметров напряженно-деформированного состояния при ударе.

© А.В. Степук, Л.В.Автономова, С.В. Бондарь, В.Л. Хавин, 2017

Постановка задачи. Математическое моделирование процесса совместного деформирования или разрушения пластинчатого элемента защитной конструкции и присоединенной массой биоткани при ударе пробойником осуществляется с помощью решения динамической контактной задачи деформирования двухслойной пластины (металл-биоткань). При ударе пробойником может происходить изгиб или разрушение двухслойной пластины в окрестности его контакта с пластиной. При сквозном проникновении пробойника наблюдается разрушение как металлического слоя пластины, так и слоя биоткани. При частичном проникновении может происходить изгиб и поверхностное разрушение металлического слоя без разрушения слоя биоткани.

Математическая модель, которая описывает процесс ударного взаимодействия двухслойной пластины при частичном проникновении пробойника в пластину, включает в общем случае следующие уравнения [6]:

– уравнение движения:  $\sigma_{ii} + \rho \cdot dv_i$ 

$$y_{ij,j} + \rho \cdot dv_i / dt = 0, \qquad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{ij} + v_{ji})/2$$
, (2)

– физические уравнения в скоростной форме:

$$\sigma_{ij}^{T} = C_{ijkl} D_{kl} , \qquad (3)$$

где  $\sigma_{ij}^{T}$  – компоненты тензора скоростей напряжения,  $C_{ijkl}$  – компоненты упруго-пластического тензора связи напряжений-деформаций 4-го порядка,  $D_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформаций;

– условие несжимаемости:  $v_{ii} = 0$ ;

– определяющие соотношения, которые устанавливают связь интенсивности напряжений  $\sigma_{Y}$  от деформаций  $\varepsilon_{i}$ , скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и температуры *T*:

$$\sigma_{v} = \sigma_{v}(\bar{\varepsilon}^{p}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{p}, T).$$
(4)

Биоткани нередко имеют различные значения характеристик прочности материала при растяжении и при сжатии, поэтому в качестве определяющих соотношений можно использовать модель Грюнайзена, которая включает различные соотношения в зависимости от того, расширяется или сжимается материал. Для сжимаемых материалов:

$$\sigma_{Y} = \sigma_{0}C^{2}\mu_{j} \left[ 1 + (1 - \gamma_{0}/2)\mu_{j}^{2} - a\mu_{j}^{2}/2 \right] / \left[ 1 - (S_{1} - 1)\mu_{j} - S_{2}\mu_{j}^{2}/(\mu_{j} + 1) - S_{3}\mu_{j}^{3}/(\mu + 1)^{2} \right]^{2} + (\gamma_{0} + a\mu_{j}) \cdot E,$$
(5)

для расширяющихся материалов:

$$\sigma_Y = \sigma_0 C^2 \mu_i + (\gamma_0 + a\mu_i) \cdot E , \qquad (6)$$

где *C*, *S*<sub>1</sub>, *S*<sub>2</sub> и *S*<sub>3</sub> – константы,  $\gamma_0$  – постоянная Грюнайзена, *a* – коррекция объема первого порядка и  $\mu_j = \sigma_Y / \sigma_0 - 1$ .

Уравнение теплопроводности:

$$\rho cT = k_1 T_{ij} + \beta \sigma \dot{\varepsilon} . \tag{7}$$

При выборе критерия прочности биоткани необходимо также учитывать анизотропию характеристик материала при растяжении и при сжатии, зависимость свойств материала от гидростатического давления и наличие экспериментальных данных. Т.к. верхний слой пластины (металл) изотропный и более прочный, то разрушение двухслойной пластины при частичном проникновении пробойника при ударе начинается с разрушения этого слоя и связей между слоями. Поэтому для металлического слоя выбирается критерий прочности Друкера-Прагера в виде:

$$\sqrt{J_2} = A + BJ_1 \,, \tag{8}$$

где  $I_1$  – первый инвариант тензора напряжений, а  $J_2$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений. Константы *A*, *B* определяются экспериментально.

Для решения динамической краевой задачи задаются граничные и начальные условия. Начальные условия для взаимодействующих пластины и пробойника задаются исходя из того, что пластина находится в покое, а пробойник движется с некоторой начальной скоростью. Угол атаки пробойника при встрече с пластиной равен нулю.

Граничные условия задавались на свободных поверхностях пластины и пробойника, где нормальные и касательные составляющие напряжений считались равными нулю. В зоне контакта при соударении пробойника с пластиной выполняется условие проскальзывания. На контактной границе слоев с различными характеристиками свойств материала должно выполняться проскальзывание с незначительным трением. Начальная температура равна температуре окружающей среды.

**Численная реализация.** Для численного определения параметров напряженно-деформированного состояния при ударном взаимодействии двухслойной пластины и пробойника решается краевая нестационарная контактная задача термоупругопластичности методом конечных элементов. Для оптимизации вычислительного процесса выбран независимый подход Лагранжа-Эйлера, при использовании которого движение конечно-элементной сетки задается независимо и определяется процессом деформирования материала.

На рис. 1 представлена расчетная схема ударного нагружения двухслойной пластины стальным пробойником (вес 8.62 г, высота – 20 мм, диаметр – 5 мм), который движется с начальной скоростью 400 м/с.



Рисунок 1 – Схема ударного нагружения двухслойной пластины

Пластина состоит из верхнего металлического слоя толщиной 7 мм с физико-механическими свойствами материала: плотность  $\rho = 7,85$  г/см<sup>3</sup>, модуль объсжатия K = 175 ΓΠa, емного модуль сдвига  $G = 80 \Gamma \Pi a$ . динамический предел текучести *Y* = 0,4 ГПа. Для нижнего слоя пластины (толщина 20 мм) выбрана биоткань с усредненными характеристиками: модуль упругости Е<sub>Б</sub> = 0,01 МПа, предел прочности равен 40 МПа, деформация при разрыве составляет 150-200 %. На контактной поверхности между слоями пластины выполняются условия скольжения с трением (коэффициент трения равен 0,1).

Конечно-элементная модель пластины состоит из 9622 элементов и 117652 узла. Модель материала для верхнего металлического слоя задается экспериментально полученным семейством кривых деформирования в широком диапазоне скоростей деформаций и температур. Для нижнего слоя биоткани задается зависимость связи интенсивности напряжений  $\sigma_Y$  от деформаций  $\varepsilon_i$ . Численные результаты расчета были получены при помощи специализированного программного комплекса ANSYS.

Обсуждение результатов. При решении поставленной задачи были получены параметры напряженно-деформированного состояния в двухслойной пластине при неполном проникновении пробойника после удара.

Распределение деформаций в нижнем слое биоткани и перемещений двухслойной пластины в конце ударного процесса представлено соответственно на рис. 2 и рис. 3. В процессе ударного взаимодействия пластины с пробойником не происходит изгиб верхнего слоя без разрушения, а наблюдается расслоение слоев металла и биоткани. Максимальная величина перемещения в металлическом слое наблюдается в зоне контакта с пробойником и равна 17,5 мм, что не превышает размер критической глубины вмятины 22 мм. Это позволяет предполагать о незначительном уровне действия запреградных эффектов.



Рисунок 2 – Распределение деформаций в нижнем слое пластине при неполном проникновении пробойника

Несмотря на затухание скорости движения пробойника за счет потерь его кинетической энергии на термовязкоупругопластическое деформирование металлического слоя пластины, поглощение энергии на образование лунки, расслаивание пластины, область деформирования биоткани значительно превышает размеры области локального деформирования металлического слоя.



Рисунок 3 – Распределение перемещений в двухслойной пластине при неполном проникновении пробойника при ударе

Следует отметить, что усреднение механических характеристик биоткани при расчете искажает истинную волновую картину деформирования анизотропного материала (биоткани) нижнего слоя, а усреднение прочностных характеристик биоткани приводит к уменьшению объема биоматериала, охваченного деформированием и возможным разрушением.

Выводы. В работе проведено численное моделирование процесса деформирования двухслойной пластины (металл-биоткань) при ударе воздействии пробойником. Решалась нестационарная контактная термовязкоупругопластическая задача для пластины, деформируемой при ударном воздействии пробойником. Численное решение задачи было получено методом конечных элементов с использованием независимого подхода Лагранжа-Эйлера при помощи программного комплекса ANSYS. Численное моделирование процесса ударного взаимодействия двухслойной пластины (металл-биоткань) и стальным пробойником поопределить параметры зволило напряженнодеформированного состояния пластины при начальной скорости пробойника 400 м/с и оценить величину глубины вмятины (лунки).

#### Список литературы:

**1.** Kneubuehl B.P. Measuring the Wounding Potential of Rifle and Handgun Ammunition / B.P. Kneubuehl // International workshop on wound ballistics. – Thun, Switzerland: 1999. –  $N_{2}$  3. – P. 24.

**2.** Coupland R. Legal and health issues: International humanitarian law and the lethality or non-lethality of weapons / R. Coupland, D. Loye // Non-Lethal Weapons: Technological and Operational Prospects. -2000.  $-\mathbb{N}_{2}$  6.  $-\mathbb{P}$ . 60.

**3.** Sellier K.G. Wound Ballistics and the Scientific Background / K.G. Sellier, B.P. Kneubuehl // Elsevier. – 1994. – ISBN 0-444-81511-2.

**4.** *Amato J.J.* Bone as a Secondary Missile: An Experimental Study in the Fragmenting of Bone by High-velocity Missiles / *J.J. Amato, D. Syracuse, P.R. Seaver, N.Rich* // J. Trauma. – 1989. – Vol. 29, No. 5. – PP. 609-612.

**5.** *Peters C.E.* A Mathematical-Physical Model of Wound Balistics / *C.E. Peters* // J. Trauma (China). – 1990. – № 6. – PP. 303-318.

6. Автономова Л. В. Особенности высокоскоростного деформирования тонкой пластины с высокопрочным покрытием / Л. В. Автономова, С.В. Бондар, А.В. Степук, В. Л.Хавін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 57. – С. 8-10.

#### **Bibliography (transliterated):**

1. Kneubuehl B.P. Measuring the Wounding Potential of

Rifle and Handgun Ammunition. International workshop on wound ballistics. Thun. Switzerland: 1999. No 3. P. 24.

**2.** Coupland R., Loye D. Legal and health issues: International humanitarian law and the lethality or non-lethality of weapons. Non-Lethal Weapons: Technological and Operational Prospects. 2000. No 6. P. 60.

**3.** Sellier K.G., Kneubuehl B.P. Wound Ballistics and the Scientific Background. Elsevier. 1994. ISBN 0-444-81511-2.

**4.** Amato J.J., Syracuse D., Seaver P.R., Rich N. Bone as a Secondary Missile: An Experimental Study in the Fragmenting

of Bone by High-velocity Missiles. J. Trauma. 1989. Vol. 29. No. 5. PP.609-612.

**5.** Peters C.E. A Mathematical-Physical Model of Wound Balistics. J. Trauma (China). 1990. No 6. PP. 303-318.

**6.** Avtonomova L.V., Bondar S.V., Stepuk A. V., Xavin V.L. Osobenosti visokoskorostnogo deformirovaniy tonkoy plastinyi s visokoprochnyim. Visnik NTU «KhPI». Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Kharkiv: NTU «KhPI». 2015. No 57. PP.8-10.

Поступила (received) 02.10.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельне моделювання процесу деформування двошарової пластини при ударній взаємодією з пробійником / О.В. Степук, Л.В. Автономова, С.В. Бондар, В.Л. Хавін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 72-75. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Численное моделирование процесса деформирования двухслойной пластины при ударном воздействии пробойником / А.В. Степук, Л.В. Автономова, С.В. Бондарь, В.Л. Хавин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 72-75. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Numeral simulation of double-layer plate deform process under punch impact/ A.V.Stepuk, L.V. Avtonomova, S.V.Bondar, V.L. Khavin // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 72-75. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Степук Олександр Володимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. наук. співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

*Степук Александр Владимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

Stepuk Alexander - Candidate of Physics-Mathematical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

*Автономова Людмила Володимирівна* – кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 70 7-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

*Автономова Людмила Владимировна* – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

Avtonomova Ludmila - Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Leading Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com.

Бондар Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, ст. науковий співробітник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: serg xpi@mail.ru.

Бондарь Сергей Владимирович – кандидат технических наук, ст. научный сотрудник, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: serg xpi@mail.ru.

Bondar Sergiy - Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru.

Хавін Валерій Львович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Хавин Валерий Львович – кандидат технических наук, заведующий кафедры, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Khavin Valeriy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Head of department, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

### УДК 629.4.02

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115771

# О.В. ФОМІН, О.В. БУРЛУЦЬКИЙ, М.І. ГОРБУНОВ, О.А. ЛОГВІНЕНКО, А.М. ФОМІНА

# ТЕРМІЧНА ПРАВКА ТЕХНОЛОГІЧНО-ДЕФОРМОВАНИХ ВЕРХНІХ ОБВ'ЯЗУВАНЬ ПІВВАГОНІВ

Зазначена важлива роль залізничного транспорту в дорожньо-транспортному комплексі України. Відмічено, що в сучасних умовах господарювання, конкуренції зі сторін інших видів транспорту та закордонних залізничних компаній перед вітчизняними залізницями гостро стоїть проблема постійного підвищення ефективності використання їх рухомого складу, переважна більшість якого приходиться на вантажний вагонний парк. Обгрунтована актуальність підвищення надійності вітчизняного парку вантажних вагонів. Зазначена роль зварювального виробництва при створенні нових та модернізації існуючих вантажних вагонів. Відмічена доцільність заміни методу холодної правки післязварних деформацій, які виникають при виготовленні технологічно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів на метод теплової безударної правки. Наведені результати математичне моделювання процесу термічної правки технологічно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів.

Ключові слова: залізничний транспорт, рухомий склад, вагонний парк, піввагон, несучі системи, технологічнодеформоване верхнє обв'язування, термічна правка, математична модель, допоміжні графіки.

Выделена важная роль железнодорожного транспорта в дорожно-транспортном комплексе Украины. Отмечено, что в современных условиях хозяйствования, конкуренции со стороны других видов транспорта и зарубежных железнодорожных компаний перед отечественными железными дорогами остро стоит проблема постоянного повышения эффективности использования подвижного состава, подавляющее большинство которого приходится на грузовой вагонный парк. Обоснована актуальность повышения надежности отечественного парка грузовых вагонов. Выделена роль сварочного производства при создании новых и модернизации существующих грузовых вагонов. Обоснована целесообразность замены метода холодной правки послесварных деформаций, которые возникают при изготовлении технологически-деформированных верхних обвязок полувагонов, на метод тепловой безударный правки. Приведены результаты математическое моделирование процесса термической правки технологически-деформированных верхних обвязок полувагонов.

**Ключевые слова:** железнодорожный транспорт, подвижной состав, вагонный парк, полувагон, несущие системы, технологически-деформированная верхняя обвязка, термическая правка, математическая модель, вспомогательные графики.

An important role of railway transport in the road transport complex of Ukraine is highlighted. It is noted that in the current conditions of management, competition from other modes of transport and foreign railway companies, the problem of constant increase in the efficiency of rolling stock use, the overwhelming majority of which falls on the freight wagon fleet, is acute before the domestic railways. The urgency of increasing the reliability of the domestic fleet of freight cars is substantiated. The role of welding production in the creation of new and modernization of existing freight cars is singled out. The expediency of replacing the method of cold dressing of post-welded deformations that arise in the manufacture of technologically deformed upper girders of open-top wagons is substantiated, the method of thermal unstressed straightening. The results of mathematical modeling of the process of thermal straightening of technologically deformed top girders of open-top wagons are presented.

**Keywords:** railway transport, rolling stock, car fleet, gondola car, load-bearing systems, technologically deformed upper strapping, thermal correction, mathematical model, auxiliary graphs.

Вступ. Залізничний транспорт України є провідною галуззю в дорожньо-транспортному комплексі країни. За довжиною мережі залізниць Україна посідає третє місце в Європі (22,05 тисяч кілометрів залізниць). Його стабільне та ефективне функціонування є необхідною умовою для забезпечення обороноздатності, національної безпеки і цілісності держави, підвищення рівня життя населення [1-8]. На даний час залізниці, в основному, задовольняють потреби суспільного виробництва та населення у перевезеннях. Проте стан виробничо-технічної бази залізниць і технологічний рівень перевезень за багатьма параметрами не відповідає зростаючим потребам суспільства та європейським стандартам якості надання транспортних послуг [1-3, 8], що найближчим часом може стати перешкодою для подальшого соціально-економічного розвитку держави. Проведення ринкових перетворень на залізничному транспорті сприятиме прискоренню темпів європейської інтеграції, налагодженню більш тісного міжнародного економічного співробітництва та підвищенню конкурентоспроможності українських залізниць на ринку транспортних послуг, дасть можливість ефективно використовувати вигідне геополітичне розташування України, а також збалансувати інтереси залізниць та споживачів їх послуг.

Постановка проблеми. В сучасних умовах господарювання, конкуренції зі сторін інших видів транспорту та закордонних залізничних компаній перед вітчизняними залізницями гостро стоїть проблема постійного підвищення ефективності використання їх рухомого складу, переважна більшість якого приходиться на вантажний вагонний парк. Тому підвищення надійності вітчизняного парку вантажних вагонів є актуальною та комплексною проблемою, вирішення якої потребує розв'язання наступних основних завдань: розробка та створення більш досконалої їх конструкції; удосконалення технології виробництва, удосконалення систем ремонту та технічного обслуговування; використання в експлуатації сучасних високоефективних пристроїв контролю технічного стану вагонів та підвищення їх довговічності.

© О.В. Фомін, О.В. Бурлуцький, М.І. Горбунов, О.А. Логвіненко, А.М. Фоміна, 2017

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що великого значення в створенні нових та модернізації існуючих вантажних вагонів набуває зварювальне виробництво, як один з провідних технологічних процесів у створенні зварних металоконструкцій, застосування якого забезпечує значну економію матеріалів та трудових ресурсів [6,7].

В той же час не зважаючи на переваги зварювання в порівнянні з іншими типами нероз'ємних з'єднань, високотемпературне нагрівання зварних металоконструкцій, яке має місце при цьому технологічному процесі, призводить до зміни як фізичних так і механічних характеристик їх матеріалу. При цьому в зварних елементах виникають післязварювальні залишкові напруження та деформації, які можуть суттєво знижувати якість зварних металоконструкцій. Отже жоден з існуючих способів зварювання не забезпечує гарантованого бездефектного зварного з'єднання. Тому в останні роки велика увага у всьому світі приділяється післязварювальним методам обробки зварних з'єднань, а саме методам правки, які дозволяють відновити геометричні форми деталей після їх зварюван-НЯ.

Метою статті є розгляд процедури правки технологічно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів шляхом створення внутрішнього напруженого стану термічним впливом.

Викладення основного матеріалу дослідження.

У відповідності до формалізованих описань піввагонів, на долю яких приходиться понад третини залізничних вантажоперевезень [4, 8], в якості основного складового елементу їх несучих систем можна виділити обв'язування верхнє, виготовлення якого пов'язано з технологічною операцією зварювання. В результаті її виконання по довжині обв'язування виникає вертикальний прогин  $\Delta v$  (рис. 1), який на даний час усувається з використанням методу холодної правки [9]. Недоліком вказаного методу правки є нестійка форма виправленого верхнього обв'язування, причиною якої є неоднорідні залишкові деформації, що виникають в перерізах обв'язування, які в свою чергу викликані результатом нерівномірного деформування металу. В той же час відбувається погіршення його властивостей основного металу, а саме: знижується ударна в'язкість, підвищується межа текучості.

Авторами статті було встановлено, що усунення вказаних недоліків можливо, за рахунок заміни процедури холодної правки технологічно-деформованого верхнього обв'язування піввагону, яке показана на рис. 1, на процедуру теплової безударної правки, яка отримала назву методу прогрівання «клинів» і реалізується шляхом створення внутрішнього напруженого стану термічним впливом. Цей метод передбачає короткочасне нагрівання трикутників («клинів») рис. 2 у відповідних зовнішніх місцях бокових (вертикальних) стінок профілю, поперечний переріз якого наведений на рис. 3.

Процедура правки технологічно-деформованого верхнього обв'язування піввагону з використанням

вищезазначеного методу реалізується наступним чином. Два газорізальники одночасно та симетрично за допомогою нагрівального обладнання (при термічній правці нагрів проводиться газокисневим полум'ям або електричною дугою) виконують прогрівання рівнобічних трикутників («клинів») (рис. 2) на бокових (вертикальних) стінках профілю (рис. 1, місця 1-8) до набуття вишнево-червоного – вишневого кольору сталі у зоні прогрівання. Після виконання процесу прогрівання усіх клинів обв'язування верхнє залишають для остигання у виробничому приміщенні. По закінченню остигання технологічно-деформованого обв'язування верхнього на ньому спостерігається вертикальне додатне переміщення середніх точок профілю до вирівнювання його поздовжньої вісі з горизонталлю.



Рисунок 2 - «Клин»

Основною складністю термічної правки технологічно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів є визначення розмірів форм (в даному випадку «клина») та режимів нагрівання. Для їх знаходження авторами було проведено математичне моделювання процесу термічної правки технологічно-деформованого верхнього обв'язування піввагону, яке полягало в складанні математичних планів, розробці відповідних математичних моделей та побудові допоміжних номограм з їх подальшим аналізом.





Рисунок 3 - Поперечний переріз верхнього обв'язування

Нижче наведені розроблені авторами трифакторні узагальнені математичні моделі (отримані з використанням методу математичного планування експерименту), які описують зміну основного показника (прогину профілю обв'язування верхнього  $\Delta y$ ) в залежності від варіювання керованих змінних (геометричних параметрів «клина» – ширини *b* та висоти *h*, а також температури нагрівання *t*)

$$\Delta y = 2239,51667 - 5,23146 \cdot b - 8,93556 \cdot h - -4,60260 \cdot t - 0,00889 \cdot b^{2} + 0,06986 \cdot h^{2} + +0,00299 \cdot t^{2} + 0,03656 \cdot b \cdot h + 0,00731 \cdot b \cdot t - -0,00256 \cdot h \cdot t ;$$
(1)  
$$\Delta y = -3092,45833 + 25,76542 \cdot b + 25,48611 \cdot h + +5,16319 \cdot t - 0,08472 \cdot b^{2} + 0,01403 \cdot h^{2} -$$

$$-0,00244 \cdot t^{2} - 0,17688 \cdot b \cdot h - 0,00213 \cdot b \cdot t - -0,02538 \cdot h \cdot t;$$

$$\Delta y = -923,666667 + 19,58958 \cdot b - 8,39444 \cdot h +$$

$$+2,98597 \cdot t - 0,04861 \cdot b^2 + 0,05139 \cdot h^2 -$$

$$-0,00144 \cdot t^2 - 0,00313 \cdot b \cdot h - 0,01813 \cdot b \cdot t + +0,00063 \cdot h \cdot t$$
.

Перевірка адекватності, наведених вище математичної моделей, засвідчила їх працездатність та можливість для подальшого використання.

На рис. 4, 5, 6 в якості прикладу подано допоміжні графіки до визначення геометричних параметрів «клина» (при температурах нагрівання 800 °C, 680 °C та 600 °C) на яких показані ізолінії (лінії рівних значень) прогину обв'язування верхнього.

Слід зазначити, що підтвердження теоретичних положень з усунення вертикального прогину обв'язування верхнього піввагона за рахунок використання методу термічної правки, можливо отримати за результатами експериментального дослідження на натурному зразку.





жунок э – дономіжний графік до вноору розмірів «клина» (t = 680 °C)

*b, м*и

(2)

(3)



Висновки. Застосування представленого в статті технічного рішення, а саме використання процедури теплової безударної правки, яка полягає в створенні внутрішнього напруженого стану за рахунок термічного впливу, дозволяє отримувати стійку форму виправлених технологічно-деформованих металоконструкцій вантажних вагонів та уникнути погіршення властивостей їх основного металу. Також наведені в статті матеріали можуть бути використані фахівцями в галузі вагонобудування при виконанні технологічних операцій при створенні або модернізації піввагонів.

#### Список літератури:

1. Фомін О.В. Концепція ідеальних кузовів напіввагонів / О.В. Фомін // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля: науковий журнал. -Луганськ: СНУ ім. В. Даля, 2013. – № 4 (193). – С. 267-271.

2. Fomin O. Improvement of upper bundling of side wall of gondola cars of 12-9745 model / O.V. Fomin / Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». - 2015. -No. 1. – P. 45-48.

3. Fomin O. Development and application of cataloging in structural design of freight car building / O.V. Fomin, O.V. Burlutsky, Yu.V. Fomina / Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». - 2015. - No. 2. - P. 250-256.

4. Фомін О.В. Математичні моделі зміни основних показників базових несучих елементів кузовів напіввагонів / О.В. Фомін, О.А. Логвіненко, Р.Ю. Дьомін, Г.П. Бородай, В.В. Фомін, О.В. Бурлуцький // Науково-практичний журнал «Залізничний транспорт України». - К.: ДНДЦ УЗ, 2013. -№ 5/6 (102/103). – C. 95-104.

5. Logvinenko A. A. Peculiarities of stress calculation of basic parts of valve timing gear of modern locomotive electric power installations / A. A. Logvinenko // Metallurgical and mining industry (Machine building). - Dnipropetrovsk: 2014. - No. 6. - P. 59-63. (www.metaljournal.com.ua).

6. Фомін О.В. Наукове обгрунтування вибору геометричних параметрів зон нагріву при термічній правці елементів несучих систем вантажних вагонів / О.В. Фомін, О.А. Логвіненко, О.В. Бурлуцький // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. Науковий журнал. - Сєвєродонецьк: СНУ ім. В. Даля, 2017. - № 4 (234). - C. 227-232.

7. Фомін О.В. Процедура правки технологічнодеформованих вагонних металоконструкцій шляхом створення внутрішнього напруженого стану термічним впливом / О.В. Фомін, О.А. Логвіненко, О.В. Бурлуцький // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. Науковий журнал. - Сєвєродонецьк: СНУ ім. В. Даля, 2017. – № 3 (233). – С. 234-238.

8. Фомін О.В. Аналіз існуючих та перспективних профілів складових елементів несучих систем одиниць рухомого складу залізниць / О.В. Фомін, О.А. Логвіненко, О.В. Бурлуцький, А.М. Фоміна // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. -Харків: НТУ(ХПІ), 2016. – Т. 1, № 46. – С. 66-72. – Режим доступу: DOI: http://dx.doi.org/10.20998/2078-9130.2016.46.88052.

9. Герасимов В.С. Технология вагоностроения и ремонта вагонов: Учебник для вузов / В.С. Герасимов, И.Ф. Скиба, Б.М. Кернич и др.; Под ред. В.С. Герасимова. -2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1988. – 381 с.

#### **References (transliterated):**

1. Fomin O.V. Kontseptsiya ideal'nykh kuzoviv napivvahoniv [The concept of gondola cars]. Visnyk Skhidnoukrayins'koho natsional'noho universytetu imeni Volodymyra Dalva: naukovyy zhurnal - Bulletin of Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University: Scientific Journal, Lugansk, Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University Publ. 2013. No. 4 (193). PP. 267-271.

2. Fomin O.V. Improvement of upper bundling of side wall of gondola cars of 12-9745 model. Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». 2015. No. 1. PP. 45-48.

3. Fomin O.V., Burlutsky O.V., Fomina Yu.V. Development and application of cataloging in structural design of freight car building. Scientific and technical journal «Metallurgical and Mining Industry». 2015. No. 2. PP. 250-256.

4. Fomin O.V., Logvinenko O.A., Domin R.Yu., Fomin V.V., Boroday G.P., Burlutskiy O.V. Matematychni modeli zminy osnovnyh pokaznykiv bazovyh nesuchih elementiv kuzoviv napivvagoniv [Mathematical models of the main indicators of change in the basic elements of gondolas carrying bodies]. Zaliznychnyi transport Ukrainy - Railway transport of Ukraine. 2013. Iss. 5/6 (102/103). PP. 95-104.

5. Logvinenko A. A. Peculiarities of stress calculation of basic parts of valve timing gear of modern locomotive electric power installations. Metallurgical and mining industry (Machine 2014. No. 6. P. 59-63. building). Dnipropetrovsk, (www.metaljournal.com.ua).

6. Fomin O.V., Logvinenko O.A., Burlutskiy O.V. Naukove obgruntuvannya vyboru heometrychnykh parametriv zon nahrivu pry termichniy pravtsi elementiv nesuchykh system vantazhnykh vahoniv [Scientific substantiation of the choice of geometrical parameters of heating zones during thermal adjustment of the elements of load bearing systems of freight cars]. Visnyk Skhidnoukrayins'koho natsional'noho universytetu imeni Volodymyra Dalya: naukovyy zhurnal - Bulletin of Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University: Scientific Journal, Severodonetsk, Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University Publ. 2017. No. 4 (234). PP. 227-232.

7. Fomin O.V., Logvinenko O.A., Burlutskiy O.V. Protsedura pravky tekhnolohichno-deformovanykh vahonnykh metalokonstruktsiy shlyakhom stvorennya vnutrishn'oho napruzhenoho stanu termichnym vplyvom [The procedure of editing technologically-deformed wagon metal structures by creating an internal stressed state by thermal influence]. Visnyk Skhidnoukravins'koho natsional'noho universytetu imeni Volodymyra Dalya: naukovyy zhurnal - Bulletin of Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University: Scientific Journal, Severodonetsk, Volodymyr Dahl East-Ukrainian National University Publ. 2017. No. 3 (233). PP. 234-238.

8. Fomin O.V., Logvinenko O.A., Burlutsky O.V., Fomina Yu.V. Analiz isnuyuchykh ta perspektyvnykh profiliv skladovykh elementiv nesuchykh system odynyts' rukhomoho skladu zaliznyts' [Analysis of existing and perspective profiles of constituent elements of bearing systems of units of rolling stock of railways]. Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn - Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and Durability of Machines, Kharkiv, National Technical University "KhPI" Publ. PP 66-72. DOI 2016. Vol 1 No. 46. http://dx.doi.org/10.20998/2078-9130.2016.46.88052.

9. Gerasimov V.S., Skiba I.F., Kernich B.M. Tehnologija vagonostroenija i remonta vagonov [Technology of car building and car repair]. Moscow: Transport Publ. 1988. 381 p.

Надійшла (received) 26.09.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Термічна правка технологічно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів / О.В. Фомін, О.В. Бурлуцький, М.І. Горбунов, О.А. Логвіненко, А.М. Фоміна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 76-80. – Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2078-9130.

Термическая правка технологически-деформированных верхних обвязок полувагонов / А.В. Фомин, А.В. Бурлуцкий, Н.И. Горбунов, А.А. Логвиненко, А.Н. Фомина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 76-80. – Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2078-9130.

Thermal correction of technologically deformed top girders of open wagons / O.V. Fomin, O.V. Burlutsky, M.I. Gor-

**bunov, O.A. Logvinenko, A.M. Fomina** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 76-80. – Bibliogr.: 9. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Фомін Олексій Вікторович** – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри вагони та вагонне господарство, Державний економіко-технологічний університет транспорту, тел.: (067) 813-97-88, e-mail: fomin1985@list.ru.

**Фомин Алексей Викторович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры вагоны и вагонное хозяйство, Государственный экономико-технологический университет транспорта, тел.: (067) 813-97-88, e-mail: fomin1985@list.ru.

*Fomin Oleksiy Viktorovich* – Doctor of Technical Sciences, Docent, Professor at the Department of Car and Carriages' Economy, State Economy and Technology University of Transport, tel.: (067) 813-97-88, e-mail: fomin1985@list.ru.

*Бурлуцький Олексій Вікторович* – завідувач навчальними лабораторіями кафедри механіки і проектування машин, Український державний університет залізничного транспорту, тел.: (095) 735-66-87, e-mail: leha200681@mail.ru.

*Бурлуцкий Алексей Викторович* – заведующий учебными лабораториями кафедры механики и проектирования машин, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, тел.: (095) 735-66-87, e-mail: leha200681@mail.ru.

*Burlutsky Olexiy Viktorovich* – Head of the educational laboratories at the Department of "Mechanics and Machine Design", Ukrainian State University of Railway Transport, tel.: (095) 735-66-87, e-mail: leha200681@mail.ru.

*Горбунов Микола Іванович* – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри залізничного, автомобільного транспорту та підйомно-транспортних машин, Східноукраїнський національний університет імені В. Даля, тел.: (095) 309-10-39, e-mail: gorbunov0255@gmail.com.

*Горбунов Николай Иванович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой железнодорожного, автомобильного транспорта и подъемно-транспортных машин, Восточноукраинский национальный университет имени В. Даля, тел.: (095) 309-10-39, e-mail: gorbunov0255@gmail.com.

*Horbunov Mykola Ivanovych* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the department of railway, motor transport and hoisting-and-transport machines, East-Ukrainian National University named after V. Dal, tel.: (095) 309-10-39, e-mail: gorbunov0255@gmail.com.

*Логвіненко Олександр Анатолійович* – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри механіки і проектування машин, Український державний університет залізничного транспорту, тел.: (066) 373-03-50, e-mail: logvinenko.alexandr@rambler.ru.

*Логвиненко Александр Анатольевич* – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механики и проектирования машин, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, тел.: (066) 373-03-50, e-mail: logvinenko.alexandr@rambler.ru.

*Logvinenko Oleksandr Anatoliyovich* – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor at the Department of "Mechanics and Machine Design", Ukrainian State University of Railway Transport, tel.: (066) 373-03-50, e-mail: logvinenko.alexandr@rambler.ru.

Фоміна Анна Миколаївна – інженер, філія «ПВРЗ» ПАТ «Укрзалізниця».

Фомина Анна Николаевна – инженер, филиал «ПВРЗ» ПАО «Укрзализныця».

Fomina Anna Mykolayivna - the branch of engineering «PVRZ» PAT «Ukrzaliznytsia».

УДК 539.1

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115772

# В. Л. ХАВИН, Б. Н. КИРКАЧ, А. Б. КИРКАЧ, А. В. СТЕПУК

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ЭЛЕМЕНТА ЗАЩИТНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И УДАРЕ.

Представлені результати комплексних іспитів на міцність окремих елементів та пакетів елементів тонкостінної захисної конструкції. З іспитів на розтягання отримані значення розривних зусиль для фрагментів захисної конструкції, що складаються з двох, трьох та чотирьох послідовно з'єднаних елементів. Також проведені іспити окремих елементів захисної конструкції на удар конічним сталевим пробійником. На підставі отриманих експериментальних даних проведена оцінка ступеня руйнівного (проникаючого) впливу при ударі в залежності від кінетичної енергії пробійника, а також розривної міцності замкових елементів з'єднань.

Ключові слова: захисна конструкція, міцність на розрив, руйнування, ударна дія, тонкостінний елемент.

Представлены результаты комплексных испытаний на прочность одиночных элементов и пакетов элементов тонкостенной защитной конструкции. Путем испытаний на растяжение получены величины разрывных усилий для фрагментов защитной конструкции, состоящих из двух, трех и четырех последовательно соединенных элементов. Также проведены испытания одиночных элементов защитной конструкции на удар коническим стальным пробойником. На основе полученных экспериментальных данных произведена оценка степени разрушающего (проникающего) воздействия при ударе в зависимости от кинетической энергии пробойника, а также разрывной прочности замковых элементов соединений.

Ключевые слова: защитная конструкция, прочность на разрыв, разрушение, ударное воздействие, тонкостенный элемент.

The results of an experimental strength study on single- and multi-element fragments of a multi-component thin-wall roller shutter protective structure are presented. In the framework of the study tensile tests were conducted to measure the in-plane rupture strength of the roller curtain using two-, three- and four-lath fragments of the structure. Also the impact tests on single-lath specimens of the roller shutter hit by a conical steel punch were performed. The results of the measurements were used to estimate the dependence of the kinetic puncher energy on the amount of impact penetration as well as the per unit length lock rupture force of the roller structure. The results obtained should contribute to the enhanced design and reliability of such protective structures as well as objects equipped with them.

Keywords: roller shutter structure, tensile strength, rupture, impact loading, thin-wall element.

Введение. Для защиты помещений от несанкционированного проникновения зачастую применяют защитные конструкции, охранные свойства которых напрямую зависят от их качества. Такие конструкции имеют многокомпонентную структуру, состоящую из пластинчатых элементов различной конфигурации, скрепленных замками. Антивандальные свойства таких конструкций определяются их стойкостью к разрывным и ударным нагрузкам. Прогнозирование величины разрывного усилия и энергии разрушения при точечном ударе элементов защитных конструкций позволяет сформулировать рекомендации по увеличению прочности и жесткости всей конструкции в целом.

Анализ последних исследований и литературы. Вопросы ударного деформирования тонкостенных конструкций рассмотрены в ряде работ [1-3]. В работе [6] численными и аналитическими методами исследуется прочность одно- и двумерных тонкостенных конструкций, обладающих ребрами жесткости, при динамическом воздействии. Методом конечных элементов получено напряженно-деформированное состояние тонких пластин под действием свободно падающего груза [7]. В работе [5] рассмотрено деформирование тонкостенной П-образной конструкции при ударе шаром.

Как правило, при численном моделировании ударных процессов вводится ряд упрощающих пред-

положений, которые могут внести определенные погрешности в результаты вычислений. Поэтому возникает необходимость в проведении экспериментальных исследований, результаты которых имеют как самостоятельную ценность, так и могут быть использованы для оценки точности численных моделей.

Цель работы – экспериментальное определение минимальной кинетической энергии разрушающего (проникающего) воздействия конического пробойника на элемент защитной конструкции коробчатого профиля с ребрами жесткости, а также разрывных усилий для фрагментов конструкции, состоящих из двух, трех и четырех ее элементов.

# Методика и результаты испытания на ударное разрушение элемента защитной конструкции.

Испытание на ударное разрушение (пробой) производилось путем ударного нагружения массивным коническим стальным пробойником весом 1 кг многокомпонентного элемента защитной составной конструкции. Элемент включает наружную (1-й слой) и внутреннюю (2-й слой) тонкие пластины, соединенные поперечными ребрами жесткости, а профиль имеет коробчатое сечение (рис. 1). Ударное воздействие осуществляется по нормали к пробиваемой поверхности. Аналогичная задача решалась численно в работе [6].

Обеспечивалась прямолинейная траектория дви-

© В. Л. Хавин, Б. Н. Киркач, А. Б. Киркач, А. В. Степук, 2017

жения пробойника. Постепенное уменьшение высоты падения ударника h позволило определить минимальные ее значения  $h_{min}$ , соответствующие как полному сквозному пробитию элемента, так и разрушению только наружного слоя. Потенциальная энергия гравитационного поля, соответствующая высоте падения ударника  $h_{min}$ , позволяет определить минимальную кинетическую энергию ударного разрушения.



Рисунок 1 – Ударное разрушение элемента защитной конструкции

Эксперименты на ударное разрушение проводились на специально для этих целей изготовленном испытательном стенде, включающем в себя крепление для испытуемых образцов, направляющее устройство и конический ударник. В ходе испытаний было исследовано 10 образцов, 6 из которых были нагружены до полной пробивки (оба слоя), 4 других образца были доведены до разрушения только наружного слоя. Ударное воздействие осуществлялось в зонах, удаленных от ребер жесткости. На рис. 2 представлены экспериментальные образцы, имеющие различный характер разрушения.



Рисунок 2 – Результаты экспериментов: *а* – поверхностное разрушение, *б* – сквозное отверстие

Полученные результаты, приведенные в табл. 1, позволяют оценить скорость удара, наносимого стальным ударником с углом атаки 30<sup>0</sup> и энергию (работу) разрушения (пробития) образца элемента защитной конструкции.

Оценка минимальной энергии разрушающего (проникающего) ударного воздействия производилась на основе равенства потенциальной энергии поднимаемого ударника  $U_{\Pi}$  и его кинетической энергии  $U_K$  в момент соударения (потери на трение не учитывались):

$$U_{\Pi} = U_{K} \Longrightarrow m_{0}gh_{\min} = m_{0}\frac{v_{\min}^{2}}{2}, \qquad (1)$$

где  $m_0$  – масса ударника, g – ускорение свободного падения,  $h_{min}$  и  $v_{min}$  – минимальные высота падения и скорость пробойника в момент соударения при разрушающем (проникающем) воздействии соответственно.

|  | Разрушение двух | слоев (полное пробитие) | Разрушение наружного слоя |                          |  |
|--|-----------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|--|
| N п/п образца                          | Высота падения  |                         | Высота падения            | Deputit TOT OKOHODUMAUTO |  |
|  | <i>h</i> , мм   | тезультат эксперимента  | <i>h</i> , мм             | тезультат эксперимента   |  |
| 1                                      | 1600            | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 2                                      | 1400            | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 3                                      | 1300            | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 4                                      | 1000            | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 5                                      | 800             | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 6                                      | 600             | Пробито 2 слоя          | -                         | -                        |  |
| 7                                      | 500             | Пробит 1 слой           | 500                       | Пробит 1 слой            |  |
| 8                                      | -               | -                       | 300                       | Пробит 1 слой            |  |
| 9                                      | -               | -                       | 250                       | Пробит 1 слой            |  |
| 10                                     | -               | -                       | 200                       | Не пробит 1 слой         |  |
| Энергия разрушения, Нм                 | 5,88            |                         | 2,45                      |                          |  |
| Мин. скорость при разру-<br>шении, м/с | 0,767           |                         | 0,495                     |                          |  |

| T C 1     |                      |                |           |             |                        |            |         |
|-----------|----------------------|----------------|-----------|-------------|------------------------|------------|---------|
|           | I — Результаты экспе | пиментов по v  | ларному р | азпушению   | элемента зап           | питнои кон | тпукшии |
| таолица і | I I USYMBIAIDI SKUIG | primerrob no y | dupnomy p | uspy monnio | June Sultanta Sultanta | uninon kon | лрукции |

Полученные экспериментальные оценки минимальной энергии и скорости ударного разрушения позволяют легко определять минимальную скорость разрушающего соударения в зависимости от массы ударника:

$$v_{1\min} = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1/2} v_{\min}, \qquad (2)$$

где *m*<sub>0</sub>, *v*<sub>min</sub> – масса и минимальная скорость ударника, обеспечивающая разрушающее воздействие ударника

на элемент защитной конструкции,  $v_{lmin}$  — минимальная скорость соударения защитной конструкции с телом массой  $m_l$ , обеспечивающая разрушающее воздействие.

Например, скорость пробивающего удара для двух слоев тонкостенного образца составит:

– для пробойника массой 0,5 кг:

$$v_{1\min} = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1/2} v_{\min} = \left(\frac{1}{0.5}\right)^{1/2} 0.767 = 1.08 \text{ M/c}.$$

- для пробойника массой 5 кг:

$$v_{1\min} = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{1/2} v_{\min} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} 0,767 = 0,343 \text{ m/c.}$$

Экстраполируя результаты измерений, полученные на лабораторных образцах, на реальную конструкцию, необходимо учитывать, что при ширине в 1 метр она обладает гораздо большей податливостью, а угол заострения реального пробойника может увеличиваться. Поэтому можно ожидать, что минимальная скорость разрушающего воздействия на практике будет выше (по примерным оценкам до 2-3 раз).

Методика и результаты испытания на разрыв в поперечном направлении. Фрагменты защитной конструкции, состоящие из двух, трех и четырех ее элементов, соединенных между собой в замках, испытывались на растяжение в поперечном направлении на машине FP-100 для определения величины погонного (распределенного) разрушающего усилия. Растягивающее усилие прикладывалось в направлении, перпендикулярном замковому соединению элементов (рис. 3).



Рисунок 3 – Испытание на растяжение образцов из двух элементов

Двухэлементный фрагмент шириной 10 см шарнирно закреплялся в захватах испытательной машины FP-100 с помощью разработанного оригинального Vобразного приспособления, позволяющего равномерно распределить растягивающее усилие по ширине образца и максимально уменьшить возможность перекосов и величину местных деформаций. В процессе силового нагружения на силоизмерителе испытательной машины регистрировалось максимальное усилие ( $F_{max}$ ), соответствующее моменту разрушения. Для контроля измерений также регистрировалось удлинение, достигнутое к моменту разрушения ( $\Delta l_{max}$ ). Основные результаты испытаний сведены в табл. 2.

Обработка полученных результатов позволила с достаточной точностью получить величину распределенного разрушающего усилия  $f_{\rm max}$  =15,5 H/мм. Во всех случаях имело место разрушение замковых соединений экспериментальных образцов (рис. 4).

Для учета влияния на величину разрушающего усилия количества элементов в соединении были проведены эксперименты по испытанию на растяжение трех- и четырехэлементных фрагментов. Численные результаты испытаний приведены в табл. 3.

Таблица 2 – Результаты испытаний на растяжение двухэле-

| ментных фрагментов |  |  |   |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|---|--|--|--|--|
| Номер<br>образца   | Макси-<br>мальное<br>(разрывное)<br>усилие F <sub>max</sub> ,<br>Н | Удлинение<br>к моменту<br>разрушения<br><i>Дl<sub>max</sub></i> , мм | Распреде-<br>ленное раз-<br>рывное<br>усилие <i>f<sub>max</sub></i> ,<br>Н/мм |  |  |  |  |
| 1                  | 1550   | 7,0  | 15,5  |  |  |  |  |
| 2                  | 1350   | 5,0  | 13,5  |  |  |  |  |
| 3                  | 1750   | 6,0  | 17,5  |  |  |  |  |
| 4                  | 1550   | 7,0  | 15,5  |  |  |  |  |
| 5                  | 1550   | 7,0  | 15,5  |  |  |  |  |
| Среднее            | 1550   | 6,4  | 15,5  |  |  |  |  |



исунок 4 – Характер разрушения при разрыве образцов

Таблица 3 – Результаты испытаний для трех- и четырехэле-

| ментных фрагментов               |               |                       |                  |  |  |  |  |
|----------------------------------|---------------|-----------------------|------------------|--|--|--|--|
| Кол-во<br>элементов<br>в образце | Максималь-    | Удлинение             | Распределен-     |  |  |  |  |
|                                  | ное (разрыв-  | к моменту             | ное разрыв-      |  |  |  |  |
|                                  | ное) усилие   | разрушения            | ное усилие       |  |  |  |  |
|                                  | $F_{max}$ , H | $\Delta l_{max}$ , мм | $f_{max}$ , Н/мм |  |  |  |  |
| 3                                | 1500          | 9,8                   | 15,0             |  |  |  |  |
| 4                                | 1550          | 13,2                  | 15,5             |  |  |  |  |
| Среднее                          | 1525          |                       | 15 25            |  |  |  |  |
| значение                         | 1525          | -                     | 15,25            |  |  |  |  |

Выводы. В результате экспериментальных исследований была дана оценка «антивандальных» свойств защитной конструкции, изготовленной из алюминиево-магниевого сплава. Были проведены серии испытаний пластинчатых элементов конструкции коробчатого профиля с ребрами жесткости на растяжение (разрыв) и ударное нагружение (пробой).

Результаты экспериментов, проведенных на фрагментах защитной конструкции, состоящих из двух, трех и четырех ее элементов, а также последующие оценочные расчеты, позволили определить величину максимального усилия, приводящего к потере несущей способности защитной конструкции произвольных размеров. Была получена энергия разрушения и зависимости, позволяющие получить минимальные скорости разрушающего воздействия.

#### Список литературы:

**1.** Баженов В.Г. Исследование упругопластических процессов деформации круглых пластин при импульсном нагружении с учетом больших прогибов / В.Г. Баженов, М.А. Батанин // Прикл. механика. –1978. – №3. – С. 74-78.

**2.** Воробьев Ю.С. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии / Ю.С. Воробьев, М. В. Чернобрывко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип.14. – С. 87-92. **3.** Бизюк А.В. Скоростной удар по тонкостенным конструкциям / А.В. Бизюк, В.В., Бизюк, А.В., Колодяжный // Вестник ХНУ ХПИ. – 2007. – № 775. – С. 29-35.

**4.** *Дмитриева Л. М.* Пластинки и оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, под действием локальных динамических нагрузок / Л. М. *Дмитриева* // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1976. – № 12. – С. 172-187.

**5.** Степук О. В. Особливості деформування П-подібної тонкостінної конструкції при ударі / О. В. Степук, Л. В. Автомонова, С. В. Бондар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 37. – С. 193-199.

**6.** Автомонова Л. В. Деформирование П-образной тонкостенной конструкции с ребрами жесткости при ударе шаром / Л. В. Автомонова, С. В. Бондарь, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 3-8.

#### **Bibliography (transliterated):**

1. Bazhenov V.G., Batanin M.A. Issledovanie uprugoplasticheskih processov deformacii kruglyh plastin pri impul'snom nagruzhenii s uchetom bol'shih progibov. Prikl. mehanika. 1978. No 3. P. 74-78.

**2.** Vorob'ev Ju., Chernobryvko V. Skorostnoe deformirovanie jelementov konstrukcij v uprugoplasticheskoj stadii. Problemy obchyslyuval'noiyi mekhaniky i mitsnosti konstruktsiy. 2010. Vol. 14. P. 87-92.

**3.** Bizjuk A.V., Bizjuk V.V., Kolodjazhnyj A.V. Skorostnoj udar po tonkostennym konstrukcijam.Vestnik NTU KhPI. 2007. No 775. P. 29-35.

**4.** Dmitrieva L. M. Plastinki i obolochki, podkreplennye rebrami zhestkosti, pod dejstviem lokal'nyh dinamicheskih nagruzok. Issledovanija po teorii plastin i obolochek. 1976. No 12. P. 172-187.

**5.** Stepuk O. V., Avtomonova L. V., Bondar S. V. Osoblyvosti deformuvannya P-podibnoyi tonkostinnoyi konstruktsiyi pry udari. Visnyk NTU KhPI. Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnytsi ta tekhnolohiyakh. Kharkiv: NTU KhPI. 2013. No 37. P. 193-199.

**6.** Avtomonova L. V., Bondar' S. V. Stepuk A. V. Deformirovanie P-obraznoj tonkostennoj konstrukcii s rebrami zhestkosti pri udare sharom. Visnyk NTU KhPI. Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. Kharkiv: NTU KhPI. 2014. No 6 (1049). P. 3-8.

Поступила (received) 27.09.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Експериментальне дослідження міцності багатокомпонентного елемента захисної конструкції при розтягуванні та ударі / В. Л. Хавін, Б. М. Киркач, О. Б. Киркач, О. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 81-84. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Экспериментальное исследование прочности многокомпонентного элемента защитной конструкции при растяжении и ударе / В. Л. Хавин, Б. Н. Киркач, А. Б. Киркач, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 81-84. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Experimental study of strength of a multi-component protective structure element under tensile and impact loadings / V. L. Khavin, B. M. Kyrkach, O. B. Kyrkach, A. V. Stepuk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – N 39 (1261). – C. 81-84. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Хавін Валерій Львович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Хавин Валерий Львович – кандидат технических наук, заведующий кафедры, НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

Khavin Valeriy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Head of department, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua.

*Киркач Борис Миколайович* – кандидат технічних наук, професор, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-62-02, е-mail: kirkach@kpi.kharkov.ua.

*Киркач Борис Николаевич* – кандидат технических наук, профессор, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-62-02, e-mail: kirkach@kpi.kharkov.ua

Kyrkach Borys – Candidate of Technical Sciences (Ph. D), Professor, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-62-02, e-mail: kirkach@kpi.kharkov.ua.

Киркач Олексій Борисович – старший викладач, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-62-02, e-mail: kyrkach@kpi.kharkov.ua

*Киркач Алексей Борисович* – старший преподаватель, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-62-02, e-mail: kyrkach@kpi.kharkov.ua.

Kyrkach Oleksiy – Senior Lecturer, NTU "KhPI", tel.: (057)-70-762-02, e-mail: kyrkach@kpi.kharkov.ua

*Степук Олександр Володимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. наук. співробітник НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78, е-mail: abtop@yahoo.com.

*Степук Александр Владимирович* – кандидат физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

Stepuk Alexander – Candidate of Physics-Mathematical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, NTU "KhPI", tel.: (057) 707-61-78, e-mail: abtop@yahoo.com.

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115773

# Д.С. ЯГУДИН

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ИНСТРУМЕНТА НА РАЗРУШАЕМУЮ ГРАНУЛИРОВАННУЮ СРЕДУ

В роботі проведено чисельне моделювання руйнування гранульованого середовища під дією робочого інструменту. Задача вирішувалася в тривимірній постановці з використанням безсіткового Лагранжевого решателя SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). В якості моделі середовища що руйнується застосовувалася модифікована модель Друкера-Прагера, яка враховує ефекти, пов'язані з зернистими матеріалами, такими як порошки, грунт, пісок та ін. Розглядалася робота інструменту при початковій швидкості 3 м/с і зусиллі, доданому в напрямку руху інструменту, яке дорівнює 100 Н. Аналіз показав, що швидкість руху інструменту встановлюється на величині 2.25 м/с через 32 мс.

Ключові слова: динамічний вплив, швидкість руху, метод згладжених часток, руйнування, модель Друкера-Прагера.

В работе проведено численное моделирование разрушение гранулированной среды под действием рабочего инструмента. Задача решалась в трехмерной постановке с использованием бессеточного Лагранжевого решателя SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). В качестве модели разрушаемой среды применялась модифицированная модель Друкера-Прагера, которая учитывает эффекты, связанные с зернистыми материалами, такими как порошки, почва, песок и др. Рассматривалась работа инструмента при начальной скорости 3 м/с и усилии. приложенном в направлении движения инструмента, равное 100 H. Анализ показал, что скорость движения инструмента устанавливается на величине 2.25 м/с через 32 мс.

Ключевые слова: динамическое воздействие, скорость движения, метод сглаженных частиц, разрушение, модель Дру-кера-Прагера.

In the article has been performed numerical simulation of the granular medium destruction under the action of working tools. The problem was solved in three-dimensional statement using mesh-free Lagrangian method SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). The modified Drucker–Prager model used as destructed medium model, which take account of effects related to granular material such as powder, soil, sand etc. Was considered operation of working tool with starting speed of 3 m/sec. and force of 100 N applied in direction of working tool moving. The analysis has shown that speed of working tool moving shall be set at value of 2.25 m/sec. after 32 msec.

Keywords: dynamic impact, speed of motion, the method of smoothed particles, damage, the Drucker-Prager model.

Введение. Анализ существующих методик оценки изменения динамического поведения инструмента в контакте с разрушаемой средой, на основе методов конечных элементов, методов дискретных элементов с применением различных моделей разрушаемой среды показал, что эти методики находятся в процессе постоянной разработки и усовершенствования. Необходимость решения такого рода задач в трехмерной постановке вызывает необходимость построения адекватной модели среды, которая позволит получить весь спектр эксплуатационных нагрузок на определенном интервале во времени. Современные научные подходы связаны с построением модели поведения различных рабочих органов в разрушаемой среде на основе бессеточных методов и методов дискретных элементов. Таким образом, изучения контактного взаимодействия рабочих органов с разрушаемой средой во времени, является актуальной научнопрактической задачей, которая определила направление данной работы.

Анализ последних исследований и литературы. Вопросам изучения процесса взаимодействия различных типов инструмента в разрушаемой среде посвящено большое количество исследований [1-4]. Моделирование процесса разрушения среды применяется в таких сферах как: изучение процесса резания, изучения взаимодействия рабочих органов сельскохозяйственной и горнодобывающей промышленности, задачи газо-гидро-динамики и многих других [5]. В современной науке изучение процессов взаимодействия со сплошной средой преимущественно осуществляется с применением бессеточных решателей. Такой подход выгодно отличается от применения метода конечных элементов благодаря тому, что он позволяет учитывать большие перемещения элементов среды. В работах [6] показано определение тягового усилия при обработке грунтового массива абсолютно жестким рабочим органом при помощи метода сглаженных частиц. Метод сглаженных частиц так же позволяет исследовать быстро протекающие процессы такие как удар, взрывы, постановка баллистических экспериментов и многие другие [7].

Целью данной статьи является определение изменения скорости движения инструмента в гранулированной среде при заданной начальной скорости и действующем в том же направлении усилии.

Постановка задачи. Для постановки трехмерной динамической задачи необходимо задать функции, описывающие движение точек среды. Эти функции называются законом движения точки:

$$\vec{x} = \vec{x} \big( \vec{X}, t \big),$$

где  $\vec{x}$  – координаты точки среды;  $\vec{X}$  – координаты точки в начальный момент времени. Начальные условия можно записать в следующем виде:

$$\vec{x}(X,0) = X, \quad \vec{x} \in A_{0 \text{ массива}} \cup A_{0 \text{ диска}};$$

© Д.С. Ягудин, 2017

( )

$$\begin{aligned} \dot{x}(\vec{X},0) &= 0, \quad \dot{x} \in A_{0 \text{ массива}}; \\ \dot{x}(\vec{X},0) &= \vec{V}(\vec{X}), \quad \vec{V} = (0,-3,0) \left(\frac{m}{s}\right), \quad \vec{x} \in A_{0 \text{ диска}} \end{aligned}$$

Решение задачи сводится к разрешению системы, в которую входят следующие уравнения:

- уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0 ,$$

 $\rho$  – истинная плотность массива; v – вектор скоростей;

- уравнение сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} ,$$

E – удельная внутренняя энергия;  $\dot{\varepsilon}$  – тензор скоростей деформации;

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

- уравнение сохранения моментов

$$\frac{d}{dt}v_i=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\,,$$

σ-тензор напряжений;

определяющие соотношения для материала диска

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}).$$

Граничные условия для начального ненапряженного состояния свободных поверхностей массива  $a_i$  и поверхности диска  $b_i$ :

$$\sigma_{ij}n_j=0, \qquad x \in a_i \cup b_i$$

Граничные условия жестко защемленных поверхностей разрушаемого массива имеют вид:

$$\vec{x}(\vec{X},t) = 0$$
,  $\vec{x} \in c_i$ 

Контактные граничные условия

$$\left(x_j^1-x_j^2\right)n_i^1=0,$$

где индексы 1 и 2 показывают отношения к контактным поверхностям, а само условие описывает компоненты перемещений контактирующих поверхностей

Условие равенства компонент вектора напряжений на контактирующих поверхностях принимается в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^1 n_i^1 n_j^1 = \sigma_{ij}^2 n_i^2 n_j^2.$$

Дискретизация разрешающей системы методом SPH. Метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH) является бессеточным Лагранжевым численным методом для расчетов процессов высокоскоростного соударения, интенсивного динамического нагружения, моделирования взрывов и разрушения. Данный метод выгодно отличается от классического метода конечных элементов тем, что позволяет решать задачи с большим изменением в топологии деформируемого вещества. Метод позволяет эффективно и корректно производить вычисления как в двухмерной, так и в трехмерной постановке.

SPH-представляет материал набором дискретных частиц  $x_k(t) \quad k \in \{1...M\}$ , где  $x_k(t)$  – вектор координат

частицы, находящихся в области  $\Phi$ , движущиеся со скоростью v. Для каждой частицы известна ее масса, скорость, плотность, давление и координата. Материал, в таком случае. представляется интегрально в виде следующего уравнения:

$$f(x) = \int_{\Phi} f(\widetilde{x}) \delta(x - \widetilde{x}) d\widetilde{x} ,$$

где  $\delta$  – функция Дирака. Интеграл () аппроксимируется интегралом () с функцией веса *W*.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(\widetilde{x}) W(x - \widetilde{x}, h) d\widetilde{x} .$$

Дискретная аппроксимация имеет вид:

$$\prod {}^{h} f(x) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t) f(x_k) W(x-x_k,h),$$

где  $w_k = \frac{m_k}{\rho_k}$  – «условный вес» частицы. Число N рав-

но количеству частиц, граничащих с данной. Граничащими частицами являются те, расстояние до которых не превосходит сглаживающей длинны *h*. Весовая функция чаще всего задается в виде полиномов. Вспомогательная функция обычно является кубическим сплайном.

$$W(x,h) = \frac{1}{h(x)^d} \theta(x),$$

где *h* – сглаживающая длина, а *d* – размерность пространства.

В дискретном виде разрешающая система уравнений имеет вид:

– уравнение неразрывности 
$$\rho_i = \sum_k m_k W_{ik};$$

$$\frac{d}{dt}(v_i)_i = \sum_k m_k \left(\frac{(\sigma_{ij})_i}{\rho_i^2} + \frac{(\sigma_{ij})_k}{\rho_k^2}\right) \frac{\partial}{\partial v_{j_i}} W_{ik} ;$$

- уравнение сохранения энергии

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left( (v_i)_k - (v_i)_i \right) \left( \frac{(\sigma_{ij})_i}{\rho_i^2} + \frac{(\sigma_{ij})_k}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial}{\partial v_{j_i}} W_{ik} .$$

В качестве модели материала среды используется модифицированная модель Друкера-Прагера (MO Granular). Эта модель является продолжением модели Drucker-Prager, которая учитывает эффекты, связанные с зернистыми материалами, такими как порошки, почва и песок. В дополнение к упрочнению от изменения давления модель также представляет собой упрочнение от изменения плотности и изменения модуля сдвига с плотностью. Предел текучести состоит из двух компонентов, зависящих от плотности и зависимости от давления

$$\sigma_T = \sigma_P + \sigma_{\rho}.$$

Предел текучести определяется кривой «пределом текучести – давления» и «предела текучести – плотности» по 10 точкам. Модуль сдвига определяется кривой «модуля сдвига – плотности» с точностью до 10 точек. Все три кривые должны быть определены. Эта модель может применяться только к твердым телам.

Анализ полученных результатов. В работе рассматривалось численное моделирования работы инструмента в разрушаемой среде. Рассматривалась работа инструмента при начальной скорости 3 м/с и усилии приложенном в направлении движения инструмента, равное 100 Н. Коэффициент трения между рабочей поверхностью инструмента и средой равен 0,4. На рис. 1 представлена модель взаимодействия до входа в контакт.



Рисунок 1 - Начальное состояние модели



Рисунок 2 – Положение частиц в момент времени 25 мс



Рисунок 3 - Положение частиц в момент времени 40 мс

После вступления дискового рабочего органа в контакт со средой начинается непрерывное деформирование и разрушение гранулированной среды. На рис. 2 и 3 приведено положение частиц в моменты времени 25 мс и 40 мс.

На рис. 4 приведен график изменения скорости рабочего инструмента под действием начальной скорости 3 м/с и усилия действующего в направлении движения инструмента равного 100 Н.



Рисунок 4 – График изменения скорости во времени

Скорость движения инструмента устанавливается на уровне 2.25 м/с и далее остается постоянной во времени.

Для проведения расчета на 6-ядерном процессоре с частотой ядра 3.6 ГГц и оперативной памятью 16 ГБ потребовалось около 30-ти часов.

Выводы. В работе проведено численное моделирование процесса разрушения гранулированной среды. Бессеточный решатель позволяет качественно смоделировать контактное взаимодействие с большими деформациями в трехмерной постановке. Анализ показал, что скорость движения инструмента устанавливается на величине 2.25 м/с через 32 мс. Таким образом решение данной задачи позволяет определить необходимое усилие и начальную скорость для задаваемых технологических требований обработки среды.

#### Список литературы:

**1.** *Meguid S.A.* FE analysis of geometry effects of an artificial bird striking an aeroengine fan blade / S.A. *Meguid, R.H. Mao, T.Y. Ng //* International Journal of Impact Engineering. – 2008. – No. 35. – PP. 487-498.

**2.** *Monaghan J.J.* An Introduction to SPH / *J.J. Monaghan* // Computer Physics Communications. – 1988. – No. 48. – PP. 89-96.

**3.** Ройз С.И. Численное моделирование последствий ударных воздействий на защитные конструкции / С.И. Ройз, А.П. Потапов, И.Б. Петров // Моделирование процессов обработки информации: Сб. ст. Мос. физ.-тех. ин-т. – М.: 2007. – С. 16-22.

**4.** Дульнев Г.Н. Процессы переноса в неоднородных средах / Г.Н. Дульнев, В.В. Новиков. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 248 с.

**5.** Паршиков А.Н. Релаксационные процессы при ударно-волновом нагружении пористых материалов / А.Н.Паршиков, С.А.Медин. Под ред. В.Е.Фортова и др. // Физика экстремальных состояний вещества-2007. – Черноголовка: ИПХФ РАН, 2007. – 340 с.

6. Медин С.А. Применение соотношений распада разрывов в методе SPH / С.А. Медин, А.Н. Паршиков // Сб. тр. Международной конференции «Разностные схемы и их приложения». Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша. – С.85.

7. Ma J. Soil-structure interaction effect from blastinduced horizontal and vertical ground vibration / J. Ma, S.T. Quek, K.K. Ang // International journal of computers & structures.  $-2004. - N \ge 82. - PP. 799-814.$ 

## **Bibliography (transliterated):**

**1.** Meguid S.A., Mao R.H., Ng T.Y. FE analysis of geometry effects of an artificial bird striking an aeroengine fan blade. International Journal of Impact Engineering. 2008. No. 35. PP. 487-498.

**2.** Monaghan J.J. An Introduction to SPH. Computer Physics Communications. 1988. No. 48. PP. 89–96.

**3.** Royz S.I., Potapov A.P., Petrov I.B. Chislennoe modelirovanie posledstviy udarnyih vozdeystviy na zaschitnyie konstruktsii. Modelirovanie protsessov obrabotki informatsii: Sb. st. / Mos. fiz.-teh. in-t. Moscow: 2007. PP. 16-22.

**4.** Dulnev G.N., Novikov V.V. Protsessyi perenosa v neodnorodnyih sredah. Leningrad: Energoatomizdat, 1991. 248 p.

**5.** Parshikov A.N., Medin S.A. Relaksatsionnyie protsessyi pri udarno-volnovom nagruzhenii poristyih materialov. Pod red. Fortova V.E. i dr. Fizika ekstremalnyih sostoyaniy veschestva. 2007.

6. Medin S.A., Parshikov A.N. Primenenie sootnosheniy raspada razryivov v metode SPH. Sb. tr. Mezhdunarodnoy konferentsii "Raznostnyie shemyi i ih prilozheniya". Moscow: IPM im. M.V. Keldyisha. P.85.

7. Ma J., Quek S.T., Ang K.K. Soil-structure interaction effect from blast-induced horizontal and vertical ground vibration. International journal of computers & structures. 2004. No 82. PP: 799-814.

Поступила (received) 16.10.2017

# Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Динамічний вплив інструмента на гранульоване середовище, що руйнується / Д.С. Ягудін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 85-88. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

Динамическое воздействие инструмента на разрушаемую гранулированную среду / Д.С. Ягудин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 85-88. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

**Dynamic impact of the instrument on a destructible granular environment / D. Yagudin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 85-88. – Bibliogr.: 7. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Ягудін Дмитро Сергійович* – аспірант, Кафедра опору матеріалів, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-761-78, е-mail: dmitriy.yagudin27@gmail.com.

*Ягудин Дмитрий Сергеевич* – аспирант, Кафедра сопротивления материалов, НТУ «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, еmail: dmitriy.yagudin27@gmail.com.

*Dmitriy Yagudin* – Postgraduate student, Strength of materials Chair, NTU "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: dmitriy.yagudin27@gmail.com.

УДК621.165

DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115774

# JU.O.BAKHMUTSKA, V.M.GOLOSHCHAPOV, R. KOCHUROV

# ROTOR HEATING CONDITIONS INFLUENCE ON THE THERMOSTRUCTURAL STATE AND LIFETIME OF THE 325 MW STEAM TURBINE DURING START-UPS

Виконано розрахункове дослідження теплового і термонапруженого стану ротора циліндра високого тиску парової турбіни потужністю 325 МВт на етапах прогріву і пуску із холодного стану. Для визначення нестаціонарного теплового стану, розроблена методика, що дозволяє визначити граничні умови теплообміну з високою точністю завдяки врахуванню процесу конденсації пари на поверхнях ротора і ступеня дискретизації теплових зон для призначення граничних умов. Врахування процесу конденсації у міжкорпусному просторі дозволило точніше визначити параметри пара на елементах ущільнень ротора. Базуючись на результатах дослідження, запропоновано зміну конструкції і умов прогріву ротора в області переднього кінцевого ущільнення на етапі підготовки до пуску з холодного стану. Показана можливість зниження рівня термічних напружень і вплив умов прогріву на ресурс турбіни.

Ключові слова: парова турбіна, термоміцнісний розрахунок, малоциклова втома, теплопередача, конденсація.

Выполнено расчетное исследование теплового и термонапряженного состояния ротора цилиндра высокого давления паровой турбины мощностью 325 МВт на этапах прогрева и пуска из холодного состояния. Для определения нестационарного теплового состояния, разработана методика, позволяющая определить граничные условия теплообмена с высокой точностью благодаря учету процесса конденсации пара на поверхностях ротора и степени дискретизации тепловых зон для назначения граничных условий. Учет процесса конденсации в межкорпусном пространстве позволил более точно определить параметры пара на элементах уплотнений ротора. Базируясь на результатах исследования, предложено изменение конструкции и условий прогрева ротора в области переднего концевого уплотнения на этапе подготовки к пуску из холодного состояния. Показана возможность снижения уровня термических напряжений и влияние условий прогрева на ресурс турбины.

Ключевые слова: паровая турбина, термопрочностной расчет, малоцикловая усталость, теплопередача, конденсация.

Thermal and thermostructural study for the 325 MW steam turbine high pressure cylinder rotor during pre-warming phase and cold start-up has been performed. To determine rotor transient thermal state with highest accuracy, the improved methodology was developed. According the approach, steam characteristics in rotor flow path and end seals regions have been calculated taking into the account leakages through drainages and specificity of turbine heating through exhaust hood. The highest accuracy of the method was provided by realistic prediction of the condensation process on rotor surfaces and simulation of the convection heating conditions taking to the account condensation influence. Based on the study, the front-end seals design changes and pre-warming process modification have been proposed. The thermo-structural and lifetime analyses results for the baseline and modified designs have been presented and discussed in the article.

Key words: steam turbine, thermo-structural analysis, low cycle fatigue, heat transfer, condensation.

**Introduction.** The lack of peaking power generating units in the energy sector of Ukraine compel the power plants operators to perform more frequent start-up events for 200-300 MW steam turbines [1]. These actions result in much higher levels of a lifetime consumption for primary turbine components.

The exploitation experience shows that for significant number of units with power 150-300 MW, which were in operation more than 50 k hours, circumferential cracks were observed in the high temperature rotors at the front-end seals zones and seals behind the control stage [2]. In all cases cracks were the result of high thermal stresses in the regions of stress concentrators, such as small fillets, thermo-compensation slots, grooves, etc.

The main factor that limits the number of turbine start-upsis high thermal stresses at the transient operation which results in low cycle fatigue(LCF) of components material. Thermal stresses occur in the turbine rotor and casing high-temperaturecomponents (high pressureHP and intermediate pressure IP cylinders). Steam turbine component transient thermal state directly influence on structural and lifetime analyses result and depend on the accuracy of calculated thermal boundary conditions (BC).

One of the factors that can accelerate LCF life consumption is condensation process, which usually takes place during the turbine pre-heating phase and at the initial phase of cold start-up (CS) and continues until the rotor surface temperature becomes higher than the surrounding steam saturation temperature.

Convection BCsimulation accuracy and, especially, the effect of steam condensation during CS, are the key factors to realistically predict turbine unit thermal state during transients.

A large number of studies have been devoted to the thermal and thermostructural analysis of the steam turbine elements [3, 4, 5]. Widely used practice for steam turbine component convection conditions determination is to apply correlations based on the Dittus-Boelter equation for turbulent pipe flow to calculate heat transfer coefficients (HTC) [1, 5, 6]. Due to complexity and uncertainties for 'condensation' conditions simulation, in most cases researchers ignore this effect, decreasing the accuracy of the results. Some information for the 'condensation' conditions simulation in steam turbine components is presented in monographs 0 and 0.

**The purpose** of the present study is to increase the start-up number for 325 MW steam turbine by design improvement. To reach the goal, following tasks will be solved in this study:

© Ju.O.Bakhmutska, V.M.Goloshchapov, R. Kochurov, 2017

1) Improve the methodology for steam turbine thermo-structural analysis at start-up regimes to increase the accuracy by

(a) 'Condensation' effect simulation (determination of start and end time of condensation process, 'condensation' conditions calculation utilization in thermal analysis);

(b)Account the effect of jet flow for regions with anticipated high level of stresses (front-end seal zone) by refining corresponding zones for convection conditions simulation;

(c) Flow parameters determination in seal chambers taking into the account inter-casing space condensation;

2) Calculate thermo-stress state for base line design and reveal critical zones with regards to LCF;

Suggest heating conditions and design changes;

3) Estimate the influence of the proposed design on the steam turbine LCF life.

Background. About 50 % of all steam turbines, which are used in fossil power plants in Ukraine today, are the models K-300-240 and K-300-240-2 (PJSC 'Turboatom'). All these turbines are in operation approximately200-290 k hours which exceed the design life.K-325-23,5 supercritical parameters steam turbine (fig. 1) was developed by PJSC 'Turboatom' to replace old work off machines and increase the efficiency and reliability of the power plants.

For similar steam turbines, as shown in [2], the most critical region with regards to LCF cracking is HP rotor front-end seal zone. To estimate rotor LCF lifetime, thermal and thermo-structural analysis for the component has been performed and discussed in this article.



Figure 1 – 325 MW Steam Turbine HP Cylinder Cross Section

Thermo-structural Analysis. Cold start-up (including turbine pre-warming phase) and shut down will be considered in this study. Start-up diagrams, recommended by OEM for K-325-23,5 steam turbine cold start-up, are presented in the fig. 2.

Cold start-up process for the steam turbine can be divided into 3 phases. At first phase (reaching the vacuum, 0-90 min) the steam with the temperature of 180 °Cand pressure of 130 kPa comes to the end seals chambers#2 and #10 (fig. 1). The seal'sejector is activated and the pressure in chambers #1 and #11 becomes of 97 kPa.

At the second period of start-up (90 - 180 min), the steam with the temperature of 190 °C flows from the boiler through the cold reheater steam pipes to exhaust hood. During 15 min steam temperature increases up to 290 °C. The steam from exhaust hood goes through 9th chamber ring slot to inter-casing space and then to the

front-end seal chamber #7. In this case a portion of the steam flows from exhaust hood through the turbine flow path to the front-end seals. Because of this the pressures from both sides of the carrier 'A' are almost the same, which result in negligible steam flow between 5<sup>th</sup> and 6<sup>th</sup> front end seals chambers and lack of rotor pre-heating in this region during whole pre-warming phase. As a result, at further steps of cold start-up the HP rotor zone under carrier 'A' may be overstressed.



Figure 2 – Cold Start-up Diagrams with Simulation Time Steps: a – Pre-warming Phase, b – Cold Start-up

At the third phase of cold start-up: main steam goes into the flow path, rotor starts to spin and rotation speed increases. Next steps are ramping-up to the idle mode, synchronization and reaching the nominal power (see fig. 2, b).

To simulate transient heating process start-up sequence was divided into time steps. For each time step (see fig. 2), steamflow parameters in the flow path and rotor gland seals/chambers were determined utilizing methodology developed by authors and described in [9].

The methodology allows to calculate steam parameters and flow characteristics in the end seals and accounts for steam leakages in each chamber (see fig. 1). End seals chambers pressure was determined, taking into account the hydraulic resistance of the drainage system elements, bypass steam pipes, and inter-casing space.

To simulate flow characteristics in end seals chambers for the period of heating from exhaust hood, described above, the special approach was developed. The approach allows to calculate heating conditions in intercasing space and estimate the amount of condensed steam in inter-casing space before the steam reach the chamber #7 to predict the flow characteristics in the chamber with high accuracy.

To simulate *heat convection conditions*, rotor surface was split into thermal zones with convection conditions identical or very close within each zone – see fig. 3.



Figure 3 – FE Model Fragment and Heat Convection Zones

The BCs of the third kind (HTC and steam temperature) for the cases of single-phase flow and flow with condensation have been calculated following [9] for all rotor surfaces. Convection conditions for HP rotor sealing zones (sealing groves) for the single-phase flow are calculated taking into the account jet flow and turbulent pulsation of working fluid velocity [10].

Finite element (FE) method was used to simulate thermal and thermo-structural state. 2D axisymmetric FE model based on 8-node quadrilateral plane elements (with axisymmetric option) has been developed for transient analyses. Mesh refinements were done in the regions of potential stress concentration, such as fillets, groves at sealing zones, etc. (see fig. 3).

To predict steam condensation during turbine heating, a special algorithm for transient *thermal analysis* has been developed. According to the methodology, for each local thermal zone (fig. 3) at each time during start-up, the temperature of the rotor surface was monitored and compared against saturation temperature of the steam surrounding this zone. If local saturation temperature for any zone is higher than that of local rotor metal temperature, the condensation process was assumed and 'condensation' HTC and steam saturation temperature are applied to this particular zone as a thermal BCs. In other case, when rotor surface temperature is higher than steam saturation temperature, HTCs were calculated with the assumption of single-phase flow and the superheated steam temperature is used for convection BCs.

Figure 3 shows calculated HP rotor temperature distribution for baseline model during pre-warming, CS, and steady state operation. It can be observed that at front-end seals region high-temperature gradients take place at time 105, 140 and 182 min. from the beginning of the turbine start-up. Another peculiarity of the baseline turbine design and start-up sequence is that a rotor portion between chambers 5 and 7 (see fig. 1) remains cold up to the time 180 min, when the rotor starts to spin.

**Design Modification.** To improve heating conditions for the HP rotor and overcome potential problems with high stresses, the design changes in the region of front end seals (see fig. 5) and modified start-up process have been proposed. Modified design (fig. 5b) contains three insertions in the inner carrier 'A', which forms chambers 12 - 14. The slot from chamber 7 has been made instead of chamber 6 slot. Carrier under chamber 7 contains three seal rings.



Figure 4 - Rotor Thermal State during CS (Baseline Design)



Figure 5 - Front End Seals Design: (a) Baseline; (b) Modified

At the first phase of start-up, steam from steam header additionally comes to the chambers 8, 12 and 14. Steam parameters for this case are equal to parameters in chambers 2 and 10 (temperature T = 180 °C, pressure P = 130 kPa).

At the second phase of start-up, the steam goes from cold reheater through the exhaust hood to 13<sup>th</sup> chamber with the similar to flow path and inter-casing space parameters. Chambers 3, 9, 12 and 14 are connected to the condenser.

Thermal analysis has been performed for the modified design according to approaches described above. Rotor thermal state during cold start-up for the modified design is presented in fig. 6. Thermal analysis results show that at pre-warming phase rotor portion under carrier 'A' is heated more uniformly and intensively in comparison with the baseline design.



Rotor *structural analysis*has been done in elastoplastic formulation. The effect of material plasticity was taken into the account to estimate total deformations in critical rotor regions and LCF life with high accuracy. Experimental stress-strain and strain-life data at room and elevated temperatures for the rotor steel grade 20H3MVFA have been used and can be found in [11]. The rotor material assumed to be cyclically hardened and the multi-linear kinematic hardening plasticity model has been applied for the thermo-structural simulation. The analysis model includes the Bauschinger effect and geometrical nonlinearity.

The thermal gradients contribute a major portion of stresses into the entire stress-strain state for the HP rotor. The transient temperature distribution, calculated earlier, is applied to the structural FE model as the thermal load at appropriate time steps to simulate thermal stresses. Structural BC and centrifugal loads were also considered in the analysis.



The results of the thermo-structural analysis are presented in fig. 7-9. Von Mises stresses distributions for the rotor at front-end seals region during cold start-up are presented in fig. 7 for baseline design (corresponding scheme in fig. 5, a) and in fig. 8 for modified design (corresponding scheme in fig. 5, b).

Equivalent von Mises stresses versus time during turbine pre-warming phase and cold start-up for the monitoring point #4 (fig. 3) and corresponding metal temperatures at this point are presented for baseline and modified designs in the fig. 9.



Figure 9 – Stresses in Monitoring point #4 during CS for Baseline and Modified Designs

The highest level of thermal gradients and stresses for the baseline design can be observed at front-end seals zone under the carrier 'A' (fig. 5, a) at 183 min from the beginning of cold start-up. At this time, hot steam comes in the turbine flow path and get into the seals under the carrier, where steam condensation process takes place. The analysis shows that the thermal shock at this time period is more critical than at all following start-up steps.

For the modified design (fig. 5, b) maximal stresses appear at 116 min in the front-end seals region. It should be noted that as the result of more uniform heating under the front-end seals carrier, overall stress level during turbine cold start-up for the proposed variant is much lower (see the chart in fig. 9). **Lifetime Analysis.** There are two major factors that limit high-temperature components service life: thermomechanical fatigue (LCF) and creep. For HP turbine rotor, thermo-mechanical fatigue evolves due to varying stresses during start-up – shut down cycles. While creep associated with the time of turbine continuous operation at steady state. The goal of the study is to estimate the number of steam turbine start-ups. Thus, the focus was paid to the LCF analysis only and creep effect was not considered in the present study.

LCF analysis is performed based on calculated thermo-mechanical stress-strain state in a non-linear plastic statement and experimental strain-life diagrams for the rotor material [11]. Two full cycles of start-up – nominal operation - shut down were considered in the thermo-structural analysis to reach stabilized stress-strain hysteresis loops for the rotor critical regions with regards to LCF crack initiation(stress monitoring points in fig. 3).

To estimate rotor LCF life, an equivalent effective strain range was calculated based on FE thermo-structural results for the rotor critical zones. The number of cold start-up cycles N to LCF crack initiation was calculated using formulas (1) and presented in table 1 for each critical point from fig. 3 for baseline and modified designs.

$$N = \min\{N_{aN}, N_{a\varepsilon}\}; \quad N_{aN} = \frac{N(\varepsilon_a)}{K_N}; \quad N_{a\varepsilon} = N(\varepsilon_a K_{\varepsilon}), \quad (1)$$

where  $\varepsilon_a$  – strain amplitude,  $K_N = 5$ ,  $K_{\varepsilon} = 1.5$  – safety factors recommended by [11].

Table 1 – LCF Analysis Results

| Point | Baseline            | e Design | Modifie             | Modified Design |  |  |
|-------|---------------------|----------|---------------------|-----------------|--|--|
| #     | $\varepsilon_a, \%$ | N        | $\varepsilon_a, \%$ | N               |  |  |
| 1     | 0.2558              | 320      | 0.0719              | >20000          |  |  |
| 2     | 0.1967              | 1200     | 0.0606              | >20000          |  |  |
| 3     | 0.1285              | 8000     | 0.0491              | >20000          |  |  |
| 4     | 0.0508              | >20000   | 0.0498              | >20000          |  |  |
| 5     | 0.0395              | >20000   | 0.0425              | >20000          |  |  |

The LCF analysis results show that maximal deformations for both variants of design appear in the point #1 (fig. 3). For the baseline design there a risk of the crack initiation after 320 cycles of cold start-up (not to take into the consideration other transients). Modified design shows significantly lower strain amplitudes and consequently the much higher allowable number of start-ups.

**Conclusions.** The improved approach for a steam turbine rotor thermal and thermostructural analysis, which allows to take into the account steam condensation process and calculate thermal BC with high accuracy has been developed. Based on the simulation results for 325 MW steam turbine HP rotor, the design changes of the frontend seals carrier and heating conditions modification during the pre-warming phase are proposed. The influence of heating conditions on thermostresses and LCF lifetime for the baseline and modified designs was estimated and the results show that proposed changes make it possible to

- Provide more uniform heating and lower thermostress level for the HP rotor at front-end seal region during pre-warming phase;

- Increased allowable number of turbine start-ups.

### **Bibliography:**

**1.** *Peshko V.A.* Establishing control over the residual resource of temperature elements of steam turbines: candidate-degree thesis: 05.14.14 thermal and nuclear power installations / *V.A. Peshko.* – Kyiv, 2017. – in rus.

**2.** Sudakov A.V. Servise Life Extension Substantiation for Steam Turbines with Components which have Deviation from Normative Documentation / A.V. Sudakov, S.N. Gavrilov, E.V. Georgievskaja, A.I. Levchenko // Neftegaz.RU. -2015 - 2,  $N \ge 1 - PP$ . 42–47. – in rus.

**3.** Brilliant H.M. Analytical Approach to Steam Turbine Heat Transfer in a Combined Cycle Power Plant / H.M. Brilliant, A.K. Tolpadi. – Proceedings of ASME Turbo Expo, Vienna, 2004.

**4.** Born D. Thermal modeling of an intermediate pressure steam turbine by means of conjugate heat transfer – simulation and validation / D. Born, P. Stein, G. Marinescu, S. Koch, D. Schumacher. – ASME Turbo Expo. Seoul, South Korea, 2016, GT2016-57247.

**5.** *Chernousenko O.Ju.* High power steam turbines service life estimation and lifetime extension: monograph / *O.Ju. Chernousenko.* – Kharkiv: FOP Brovin A. V., 2014. – 308 p. – in rus.

**6.** RTM 108.020.16-83. Steam Turbines Rotors and Casings Thermal Analysis. – M.: Minjenergomash, 1983. – 116 p. – in rus.

7. Matsevity Yu.M. Heat exchange in construction of steam turbines elements / Yu.M. Matsevity, S.V. Alyokhina, V.N. Goloschapov, O.V. Kotulskaja. – NAS of Ukraine, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv, Ukraine,2012. – in rus.

8. Maliarenko V.A. Heat exchange and gas dynamics in extraction chambers of steam turbines / V.A. Maliarenko, V.N. Goloschapov, V.A. Barsukov, O.V. Kotulskaja, O.Yu. Chernousenko. – NAS of Ukraine, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv, Ukraine, 1991. – in rus.

**9.** Bakhmutska Ju. 325 MW Steam Turbine High Pressure Cylinder Rotor Thermal and Thermostructural State at Cold Start-up / Ju. Bakhmutska, V. Goloshchapov // Problemi mashinobuduvannja. – 2017. – 20, № 2. – PP. 3-11. – in rus.

**10.** Bakhmutska Ju. Heat Exchange Boundary Conditions at stepped type seals' groves / Ju. Bakhmutska, V. Goloshchapov // Compressor and Power Energy Machinery Construction. – Sumy,  $2016. - N \ 3 \ (45). - P. 21-24. - in rus.$ 

**11.** RTM 108.021.103-85. Stationary Steam Turbine Components. Low Cycle Fatigue Analysis. – M.: 1985, № AZ-002/7382, 49p. – in rus.

#### **References (transliterated):**

**1.** Peshko V.A. Establishing control over the residual resource of temperature elements of steam turbines: candidate-degree thesis: 05.14.14 thermal and nuclear power installations. Kyiv, 2017.

**2.** Sudakov A.V., Gavrilov S.N., Georgievskaja E.V., Levchenko A.I. Servise Life Extension Substantiation for Steam Turbines with Components which have Deviation from Normative Documentation. Neftegaz.RU. 2015. Vol. 2, No 1. PP. 42–47.

**3.** Brilliant H.M., Tolpadi A.K. Analytical Approach to Steam Turbine Heat Transfer in a Combined Cycle Power Plant. Proceedings of ASME Turbo Expo, Vienna, 2004.

**4.** Born D., Stein P., Marinescu G., Koch S., Schumacher D. Thermal modeling of an intermediate pressure steam turbine by means of conjugate heat transfer – simulation and validation. ASME Turbo Expo. Seoul, South Korea, 2016, GT2016-57247.

**5.** Chernousenko O.Ju. High power steam turbines service life estimation and lifetime extension: monograph. Kharkiv: FOP

Brovin A. V., 2014. 308 p.

**6.** RTM 108.020.16-83. Steam Turbines Rotors and Casings Thermal Analysis. Moscow: Minjenergomash, 1983. 116 p.

7. Matsevity Yu.M., Alyokhina S.V., Goloschapov V.N., Kotulskaja O.V. Heat exchange in construction of steam turbines elements. NAS of Ukraine, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv, Ukraine, 2012.

**8.** Maliarenko V.A., Goloschapov V.N., Barsukov V.A., Kotulskaja O.V., Chernousenko O.Yu. Heat exchange and gas dynamics in extraction chambers of steam turbines. NAS of Ukraine, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv, Ukraine, 1991.

**9.** Bakhmutska Ju., Goloschapov V. 325 MW Steam Turbine High Pressure Cylinder Rotor Thermal and Thermostructural State at Cold Start-up. Problemi mashinobuduvannja. 2017. Vol. 20, No 2. PP. 3-11.

**10.** Bakhmutska Ju., Goloschapov V. Heat Exchange Boundary Conditions at stepped type seals' groves. Compressor and Power Energy Machinery Construction. Sumy, 2016. No 3 (45). P. 21-24.

**11.** RTM 108.021.103-85. Stationary Steam Turbine Components. Low Cycle Fatigue Analysis. Moscow: 1985, № AZ-002/7382, 49 p.

Received 10.10.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Вплив умов прогріву ротора парової турбіни К-325-23,5 на термонапружений стан і ресурс при пусках / Ю. О. Бахмутська, В. М. Голощапов, Р. Є. Кочуров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 89-94. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

Влияние условий прогрева ротора паровой турбины К-325-23,5 на термонапряженное состояние и ресурс при пусках / Ю. О. Бахмутская, В. Н. Голощапов, Р. Е. Кочуров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 89-94. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

Rotor Heating Conditions Influence on the Thermostructural State and Lifetime of the 325 MW Steam Turbine During Start-Ups / Ju.O. Bakhmutska, V.N. Goloshchapov, R. Kochurov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 89-94. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Бахмутська Юлія Олегівна* – інженер, Відділ вібраційних і термоміцнісних досліджень, Шмаш НАН України, e-mail: julia.bakhmutska@gmail.com, ORCID0000-0002-2334-7432.

*Бахмутская Юлия Олеговна* – инженер, Отдел вибрационных и термопрочностных исследований, ИПмаш НАН Украины, e-mail: julia.bakhmutska@gmail.com, ORCID0000-0002-2334-7432.

*Bakhmutska Julija* – engineer, Department for Vibration and Thermal Strength Research, IPMach NAS of Ukraine, e-mail: julia.bakhmutska@gmail.com, ORCID0000-0002-2334-7432.

*Голощапов Володимир Миколайович* – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Відділ моделювання та ідентифікації теплових процесів, Шмаш НАН України.

*Голощапов Владимир Николаевич* – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела моделирования и идентификации тепловых процессов, ИПмаш НАН Украины.

*Goloshchapov Vladimir* – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Department for Modeling and Identification of Thermal Processes, IPMach NAS of Ukraine.

*Кочуров Роман* – кандидат технічних наук, провідний інженер-механік, SoftInWay Inc., Burlington, MA, USA, skype: roman\_kochurov.

*Кочуров Роман* – кандидат технических наук, ведущий инженер-механик, SoftInWay Inc., Burlington, MA, USA, skype: roman\_kochurov.

Kochurov Roman – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Lead Mechanical Engineer @ SoftInWay Inc., Burlington, MA, USA, skype: roman\_kochurov.

UDC 539.3

# DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115775

# D.V. LAVINSKY

# THE NONLINEAR DEFORMATION OF THE COMPOUND STRUCTURES UNDER ELECTROMAGNETIC FORMING

В роботі обговорюються питання деформування системи електропровідних тіл під дією електромагнітного поля. Проблема нелінійного деформування технологічної системи для електромагнітної обробки розглядається як практичне застосування. Проблема вирішується методом скінчених елементів. Отримано просторово-часові розподіли основних компонент електромагнітного поля. Обгрунтовано можливість розгляду проблеми деформування в квазістаціонарній постановці. Наведено розподіл основних компонент напружено-деформованого стану. Оцінюється вплив величини струму на максимальні напруження.

Ключові слова: електромагнітне поле, пружно-пластичне деформування, пресування порошків, метод скінчених елементів.

В статье обсуждаются вопросы, касающиеся деформирования системы проводящих тел под действием электромагнитного поля. Задача нелинейного деформирования технологической системы для электромагнитного формования рассматривается как практическое применение. Задача решается методом конечных элементов. Получены пространственно-временные распределения основных компонентов электромагнитного поля. Обоснована возможность рассмотрения проблемы деформирования в квазистационарной постановке. Представлено распределение основных компонент напряженно-деформированного состояния. Оценивается влияние величины тока на максимальные напряжения.

Ключевые слова: электромагнитное поле, упругопластическое деформирование, прессование порошков, метод конечных элементов.

The paper discusses issues concerning the deformation of a system of conductive bodies under the action of the electromagnetic field. Problem of nonlinear deformation of technological system for electromagnetic forming is considered as a practical application. The problem is solved by the finite element method. Spatial-temporal distributions of the main components of the electromagnetic field are obtained. The ability to review the problem of deformation in the quasi-stationary formulation is justified. The distribution of the main component of the stress-strain state is presented. The influence of the current magnitude at the maximum stresses is evaluated.

Keywords: Electromagnetic field, nonlinear deformation, finite element method, electromagnetic forming.

Introduction. Electromagnetic field (EM-field) is an integral part of work for many elements of structures and High-intensity EM-fields cause substantial machines. energy levels in electro-conductive bodies, which can lead to failure. Therefore, approaches to determine stressstrain states (SSS) of electro-conductive bodies are required to estimate the strength. Such methods should be based on suitable models of continuum thermo-mechanics. Within the framework of thermo-mechanics, there are two classes of theories: the dynamic theory and the quasi-static one. The latter is used for slowly moving bodies with the speed much less than the speed of light in vacuum. For studies in which the main objective is the analysis of the structural strength the theory of magnetoelasticity can be used. Fundamentals of the theory of magnetoelasticity with coupling EM-field and mechanical stresses and strains in a moving electro-conductive body are given by Knopoff [1] and Chadwick [2]. Dunkin and Eringen [3] formulated the dynamic problems of magneto-elasticity in the case of vibrations of bodies and distribution of magneto-elastic waves. Pidstryhach et al. [4], and Ambarcumyan et al. [5] developed a general theory of magnetoelasticity.

Many production processes of pressure treatment involve the EM-field energy. A review of advances in the technologies of electromagnetic forming (EMF) of materials and the state of the art of the problem of simulation, design and development of manufacturing processes and the equipment for this kind of treatment are presented in [6]. Noteworthy is that a sufficient number of studies are currently known devoted to the simulation of the plastic deformation of workpieces with the EMF based on the analysis of their SSS. The simulation results for the process of the electromagnetic pulse forming of thin-walled workpieces using a continuum thermodynamic model are reported in [7], with the constitutive relations derived for the electromagnetic field components. The workpiece deformation is described using an anisotropic viscoelastoplastic material. The coupling between the EMF and the stress and strain fields is established by the electromagnetic forces in the equations of motion. The results for a numerical simulation of electromagnetic sheet bulging using pulsed electromagnetic fields are given in [8]. The simulation is performed by the finite element method (FEM) and consists of two steps: simulation of the propagation of electromagnetic fields in the workpiece, followed by its elastoplastic deformation. The finite element model includes the workpiece, a flat multi-turn inductor, or coil, and ambient medium (air). The numerical analysis of the distribution of electromagnetic field and electromagnetic force components in the electromagnetic forming of sheet metals is performed in [9]. The problem was solved in the axisymmetrical formulation using the developed FE-model for the flat multi-turn coil, workpiece and ambient medium. The special features of the external EMF are established, implying that the forces of attraction to the coil prevail over those of repulsion.

At the same time, no sufficient attention is paid to the SSS analysis of the electromagnetic field sources, such as coils. It is known that during the current pulse generation, strong electromagnetic forces, significant in magnitude, act on the coil, which may result in its irreversible deformation. With the variation of the coil shape, the spatial form of the generated pulse is distorted, which adversely affects the production process. The SSS analysis of the coil allows the formulation of recommendations for its design. Therefore, the development of the efficient methods for the SSS analysis of electrically conductive compound bodies and the strength evaluation are urgent from the scientific and practical standpoint.

**Formulation of the problem.** Papers [10, 11] concern the issues regarding the structural analysis of inductors intended for attraction of ferromagnetic workpieces. For the attraction of non-ferromagnetic workpieces, we can use the inductors with the assistant screen. In this case, there are many issues associated with the structural analysis of the inductor as a whole and its constituent parts. Fig. 1 provides a model variant of composed single-turn inductor with an assistant screen. Such an inductor can be used for straightening dents in thin-walled structural elements [12].



Figure 1 – The single-turn inductor. 1 - wireway of the inductor, 2 - insulation, 3 - assistant screen.

Conditions of loading, fixing and geometry allow us to consider the problem in the axisymmetric formulation. The fig. 2 shows the design scheme of the inductor with the workpiece. The gap introduced between the inductor and the workpiece, simulates a dent in the real case. The system is considered together with environment (air) in order to correctly specify the conditions of attenuation of the electromagnetic field on the distance from the source. Current, uniformly distributed over the cross section of the turn of the inductor, considered as a source of EM-field.



Figure 2 – Inductor – workpiece system (axisymmetrical model). 1 – wireway of the inductor, 2 – assistant screen, 3 – workpiece, 4 – insulation

It is necessary to consider the deformation of the system under given conditions, and then figure out how to change the state of the system with increasing of the current magnitude. For the analysis in this case, we will rely on the problem statement and the solution method proposed in the paper [10].

The general mathematical formulation of problems of non-isothermal elasto-plastic flow of electrically conductive bodies under the influence of an external electromagnetic field is discussed in [10]. To determine characteristics of the electromagnetic field for domains occupied by the body and the environment, the Maxwell equations are formulated. To describe the stress and strain states of the body, constitutive equations for non-isothermal elastoplastic flow are applied. The influence of electromagnetic fields on the heat transfer and deformation is described by the equations of heat transfer and dependencies for electromagnetic forces. Interactions of electromagnetic and thermal fields, and distributions of electromagnetic forces in the bodies and on the contact surfaces are discussed. The finite element method (FEM) is used as numerical method of analysis. Its specific implementation is based on the principle of minimum of total energy of the system.

The problem was solved with the following geometrical sizes:  $R_1 = 150 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 167 \text{ mm}$ ,  $R_3 = 175 \text{ mm}$ ,  $R_4 = 200 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 15 \text{ mm}$ ,  $h_3 = 1 \text{ mm}$ , d = 1 mm, thickness of the insulation -1 mm. The size of the environment was varied to meet the conditions of attenuation of the EM-field at a distance from the field source. Material properties: wireway (copper),  $\mu_r = 1$ ,  $\gamma = 7 \times 10^7 \, (\Omega m)^{-1}$ ,  $E = 180 \, \text{GPa}$ , v = 0.33.  $\sigma_{v} = 180 \text{ GPa}$ ; assistant screen (steel),  $\mu_r = 1$ ,  $\gamma = 0.2 \times 10^7 \, (\Omega m)^{-1}$ E = 215 GPav = 0.27.  $\sigma_{\rm Y} = 270 \, \text{GPa}$ ; workpiece (steel),  $\mu_r = 1$ ,  $\gamma = 0.2 \times 10^7 \, (\Omega m)^{-1}$ , E = 200 GPa, v = 0,29,  $\sigma_{\rm Y} = 220 \,\text{GPa}$ ; insulation (glass fiber),  $\mu_r = 1$ ,  $\gamma = 0(\Omega m)^{-1}$ , E = 2.5 GPa, v = 0.3,  $\sigma_{+} = 70 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{-} = 90 \text{ GPa}$ ; environment (air),  $\mu_r = 1$ ,  $\gamma = 0 (\Omega \text{m})^{-1}$ . Here:  $\mu_r$  – relative magnetic permeability,  $\gamma$  – electrical conductivity, E - modulus of elasticity, v - Poisson's ratio,  $\sigma_{\rm Y}$ - yield stress,  $\sigma_+$ - tensile strength,  $\sigma_-$  compressive strength.

The current density is changed in time according to the law  $j(t) = I_m e^{-\delta 2\pi f t} \cdot \sin(2\pi f t)$ , where magnitude of current  $I_m = 40$  kA, frequency f = 2 kHz, the relative damping coefficient  $\delta = 0.3$ . A finite element model was created using four-node axisymmetric finite element with bilinear approximation of displacements and circumferential components of the magnetic vector potential. To account the mechanical contact it was introduced the layers of special contact finite elements [13,14]. The boundary conditions, that model the attenuation of EMF on the distance from the source and fixing of the ends of the inductor and workpiece, were considered:

$$A|_{\Gamma_1} = 0; u_r|_{\Gamma_2} = 0; u_z|_{\Gamma_2} = 0.$$

The spatiotemporal distribution of components of the EM-field was obtained at the first stage of the solution. Also, we performed a series of calculations, which varied the dimensions of the surrounding area. Analysis of the results showed that the components of the EM-field are reduced approximately five times when the distance from the field source to the boundary of the environment is comparable to the double thickness of the assistant screen. Further, the value component of the electromagnetic force acting on the workpiece surface was determined. A comparison with the results presented in [12], which were obtained semi-analytical means showed that the maximum discrepancy does not exceed 12%.

Analysis of the EM-field main components distribution has shown that there is a significant decrease in their value over time. Therefore, the electromagnetic force acting on the workpiece will decrease as fast as the components of the electromagnetic field. Therefore, the deformation problem can be considered in the formulation of the quasi-stationary, with the values of the electromagnetic field components corresponding to the maximum time. Analysis of the displacements shows that the workpiece is deformed to a much greater extent than the inductor. This fact is explained by the peculiarities of the geometry of the objects involved. The inductor is much more massive body than the workpiece. Maximum of workpiece displacements are observed in the vicinity of its center. gerous values. Although, the stresses in the vicinity of the coil (insulation material) are approaching threat values.

Next, we conducted a series of calculations, which varied the magnitude of the current. Note that the qualitative characteristics of the stress distribution in the elements of the system persist for all values of the magnitude. In the fig.4 are plotted the maximum values of the Von Mises equivalent stress in the inductor and the workpiece versus the amplitude of the current. The maximum stress in the workpiece while all the considered values of the current magnitude do not reach the yield strength, i.e., the workpiece didn't begin to deform plastically. So, when this embodiment of the inductor of the conditions of technological operations will not be achieved. Stresses in the inductor are higher than in the workpiece. The stresses in the insulation material when, the current magnitude equals 60 kA, exceed the limit values. Insulation may deteriorate, which in this case is not valid.

It should also be noted that when current flows, heat generation occurs in the conductor. In our study, issues concerning non-stationary distribution of the temperature field due to heat generation were not considered. It is obvious that the increase in the amplitude of the current will increase the temperature of the system elements that must be considered in the analysis of SSS. Obviously in this case, the method of increasing the number of turns of the inductor is more promising, because, it is known that the generalized magnetic pressure is proportional to the number of turns.



Figure 3 – Distribution of the von Mises equivalent stress

The fig.3 shows the pattern of distribution of intensity of the Von Mises equivalent stress in the elements of the system. Note that the maximum stresses in the inductor are observed directly in the turn and its surroundings. The stresses in the workpiece have two peaks: in the area of fixation and in the vicinity of the center of the workpiece. The stresses in the inductor exceed the stresses levels in the workpiece. Overall, it should be noted that when the magnitude of the current equals 40 kA, neither in the workpiece nor in the inductor stresses does not exceed dan-



**Conclusions.** The paper deals with the issues devoted to the study of elastic-plastic deformation of conductive bodies under the action of the electromagnetic field. The feasibility of using numerical methods of analysis is justified. It is consider the practical task of the analysis of the deformation of the technological system for electromagnetic forming of materials. The distribution of stresses in the elements of the system is obtained. The change in maximum stress with increase in the current magnitude is analyzed.

#### **Bibliography:**

**1.** *Knopoff L.* The interactions between elastic wave s motions and a magnetic field in electric conductor / *L. Knopoff* // J. Geophys. Res. – 1955. – Vol.60. – P. 441-456. **2.** Chadwick P. Elastic wave propagation i n a magnetic field / P. Chadwick // Actes IX Congress International of Applied Mechanics. – Bruxelles; Univ. Bruxelles, 1957. – Vol.7. – P. 143-158.

**3.** *Dunkin J.W.* Propagation of waves in an electromagnetic elastic solid / *J.W. Dunkin, A.C. Eringen* // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – No. 1. – P. 461-495.

**4.** *Podstrigach Y.S.* Magneto-thermo-elasticity in Conducting Solids / *Y.S. Podstrigach, Y.I. Burak, V.F. Kondrat.* – Kyyiv: Naukova Dumka; 1982. (in Russ.)

**5.** *Ambarcumyan S.A.* Magneto-elasticity of Plates and Shells / *S.A. Ambarcumyan, G.E. Bagdarsanyan, M.B. Belubek-yan.* – Moscow: Nauka; 1977. (in Russ.)

6. Psyk V. Electromagnetic forming – a review / V. Psyk, D. Rich, B. L. Kinsey et al. // J. Mater. Process. Tech. – 2011. – Vol. 211, No. 5. – PP. 787–829.

7. Svendsen B. Continuum thermodynamic modeling and simulation of electromagnetic metal forming / B. Svendsen, T. Chanda // Technische Mechanik. – 2003. – Vol. 23. – PP. 103–112.

**8.** *Cui X.* Numerical simulation of electromagnetic sheet bulging based on FEM / X. *Cui, J. Mo, S. Xiao et al.* // Int. J. Adv. Manuf. Tech. – 2011. – Vol. 57. – PP. 127-134.

**9.** Deng J. Numerical simulation of magnetic flux and force in electromagnetic forming with attractive force / J. Deng, C. Li, Z. Zhao et al. // J. Mater. Process. Tech. – 2007. – Vol. 184. – PP. 190-194.

**10.** Altenbach H. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, D. Lavinsky // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2016. – Vol. 28 (5). – PP. 1421-1433.

11. Morachkovsky O.K. Nonlinear Dynamics of a Thin Plate in a Nonstationary Electromagnetic Field of the Inductor / O. K. Morachkovsky, D.V. Lavinsky // ND-KhPI2013: Proceeding of the 4th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics, June 19-22 2013, Sevastopol, Ukraine. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. – PP. 299-304.

**12.** *Batygin Y. V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals / Y.V. Batygin, S.F. Golovashchenko, A.V. Gnatov // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214 (2). – PP. 390-401.

**13.** Bondar S.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures / S.V. Bondar, D.V. Lavinskii // Strength of Materials. – 2011. – Vol. 43, No. 4. – PP. 447-454.

14. Lavinskii D.V. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field / D.V. Lavinskii, O.K. Morachkovskii // Strength of Materials. – 2016. – Vol. 48, No.6. – PP. 760-767.

#### **Bibliography (transliterated):**

1. Knopoff L. The interactions between elastic wave s motions and a magnetic field in electric conductor. J. Geophys. Res, 1955. Vol.60. PP. 441-456.

**2.** Chadwick P. Elastic wave propagation i n a magnetic field. In: Actes IX Congress International of Applied Mechanics. Bruxelles; Univ. Bruxelles, 1957. Vol. 7. PP. 143-158.

**3.** Dunkin J.W., Eringen A.C. Propagation of waves in an electromagnetic elastic solid. Int. J. Eng. Sci. 1963. No. 1. PP. 461-495.

**4.** Podstrigach Y.S., Burak Y.I., Kondrat V.F. Magnetothermo-elasticity in Conducting Solids. Kyyiv: Naukv Dumka; 1982. (in Russ.)

**5.** Ambarcumyan S.A., Bagdarsanyan G.E., Belubekyan M.B. Magneto-elasticity of Plates and Shells. Moscow: Nauka; 1977. (in Russ.)

6. Psyk V., Rich D., Kinsey B.L. et al. Electromagnetic forming – a review. J. Mater. Process. Tech. 2011. Vol. 211, No. 5. PP. 787-829.

**7.** Svendsen B., Chanda T. Continuum thermodynamic modeling and simulation of electromagnetic metal forming. 2003. Technische Mechanik. Vol. 23. PP. 103-112.

**8.** X. Cui, J. Mo, S. Xiao, et al., «Numerical simulation of electromagnetic sheet bulging based on FEM,» Int. J. Adv. Manuf. Tech., 57, 127–134 (2011).

**9.** Deng J., Li C., Zhao Z. et al. Numerical simulation of magnetic flux and force in electromagnetic forming with attractive force. J. Mater. Process. Tech. 2007. Vol. 184. PP. 190-194.

**10.** Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. Vol. 28 (5). PP. 1421-1433.

**11.** Morachkovsky O.K., Lavinsky D.V. Nonlinear Dynamics of a Thin Plate in a Nonstationary Electromagnetic Field of the Inductor. ND-KhPI2013: Proceeding of the 4th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics, June 19-22 2013, Sevastopol, Ukraine. Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. PP. 299-304.

**12.** Batygin Y.V., Golovashchenko S.F., Gnatov A.V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. Journal of Materials Processing Technology, 2014. Vol. 214 (2). PP. 390-401.

**13.** Bondar S.V., Lavinskii D.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials. 2011. Vol. 43, No. 4. PP. 447-454.

**14.** Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of Materials. 2016. Vol. 48, No. 6. PP. 760-767.

Поступила (received) 18.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Нелінійне деформування складених конструкцій при електромагнітній обробці / Д.В. Лавінський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 95-98. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.

Нелинейное деформирование составных конструкций при электромагнитной обработке / Д.В. Лавинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 95-98. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.

The nonlinear deformation of the compound structures under electromagnetic forming / D.V. Lavinsky // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 95-98. – Bibliogr.: 14. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Лавінський Денис Володимирович* – кандидат технічних наук, доцент, Кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Лавинский Денис Владимирович – кандидат технических наук, доцент, Кафедра теоретической механики, НТУ «ХПИ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

*Lavinsky Denis Vladimirovich* – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics, NTU «KhPI», tel.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

#### UDC 539.3

## DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115777

## H. TAHERZADEH, K.V. AVRAMOV

### LINEAR VIBRATIONS OF CYLINDRICAL CANTILEVER SHELLS WITHOUT IMPERFECTIONS

Для розрахунку власних частот і форм коливань консольних циліндрових оболонок застосовується метод Релея-Ритца. Застосовуються теорії Сандерса- Коїтера і Доннела. Коливання конструкції розкладаються по ортогональних поліномах. Досліджуються властивості зв'язаних мод коливань. Результати аналізу порівнюються зі скінченно-елементними розрахунками. Ключові слова: вібрація, консольні циліндрові оболонки, метод Релея-Ритца, ортогональні поліноми.

Для расчета собственных частот и форм колебаний консольных цилиндрических оболочек применяется метод Релея-Ритца. Применяются теории Сандерса-Коитера и Доннела. Колебания конструкции раскладываются по ортогональным полиномам. Исследуются свойства сопряженных мод колебаний. Результаты анализа сравниваются с конечно-элементными расчетами. Ключевые слова: вибрация, консольные цилиндрические оболочки, метод Релея-Ритца, ортогональные полиномы.

Cylindrical shells are commonly used as elements of rockets, aircrafts and others structures. The natural frequencies and eigenmodes of the linear cantilever cylindrical shells are very important to predict the dynamic behavior of complex engineering structures. The Rayleigh- Ritz method is applied to analyze the eigenfrequencies and the eigenmodes of the cantilever cylindrical shells. The Donnell's and Sanders-Koiter shell theories with orthogonal polynomials are used to study the shell linear vibrations. The eigenfrequencies and the eigenmodes of the cantilever shell are investigated. The eigenfrequencies, which are obtained by these two theories, are close. The obtained results are compared with the data, obtained by software ANSYS. The properties of the conjugate eigenmodes are analyzed. The results of the analysis are compared with the data of finite element calculations.

Keywords: vibration, cantilever cylindrical shells, Rayleigh- Ritz method, orthogonal polynomials.

#### 1. Introduction

Cylindrical shells are commonly used as elements of rockets, aircrafts and others structures. The natural frequencies and eigenmodes of the linear cantilever cylindrical shells are very important to predict the dynamic behavior of complex engineering structures. The most popular shell theories Donnell's, Sanders-Koiter, Flugge-Lur'r-Byrne and Novozhilov are treated in [1-4]. Chiba studied linear and nonlinear vibration of cylindrical clamped-free shells experimentally and theoretically [5-7]. Kurylov, and Amabili[8] studied large -amplitude nonlinear vibration of clamped -free circular cylindrical shell by using Sanders-Koiter nonlinear shell theory. Pellicano [9] used the idea of orthogonal polynomials instead of trigonometric functions to expand the cylindrical shell displacement fields. Kurylov, and Amabili [10] followed this idea and studied nonlinear flexural vibrations of clamped and simply supported cylindrical shells. They used the harmonic functions to approximate the displacements in the circumferential direction and the Chebyshev polynomials for approximation in longitudinal direction.

The linear vibrations of the cylindrical cantilever shell are analyzed by the Rayleigh- Ritz method. The Donnell's and Sanders-Koiter shell theories are used to study the shell linear vibrations. The eigenfrequencies and the eigenmodes of the cantilever shell are investigated. The obtained results are compared with the data, obtained by software ANSYS.

#### 2. The main equations

Thin, clamped-free cylindrical shell is considered (fig. 1). As the shell is thin, the shearand rotary inertia are not taken into account. It is assumed, that the strains and displacements are small. Therefore, the straindisplacements relations are linear. The cylindrical shell without imperfections is analyzed. The elements of the stress tensor and the strain tensor satisfy the Hooke law. Thus, the cylindrical shell performs linear vibrations. The position of the point on the shell middle surface is described by two coordinates  $(x, \theta)$ .



Figure 1 – Circular cylindrical shell

The cylindrical shell dynamics is described by three projections of the displacements  $u(x,\theta,t)$ ;  $v(x,\theta,t)$ ;  $w(x,\theta,t)$  on the axes x,  $\theta$ , t, respectively. The cylindrical shell potential energy takes the following form [11]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{L} (\varepsilon_{x,0}^2 + \varepsilon_{\theta,0}^2 + 2\nu\varepsilon_{x,0}\varepsilon_{\theta,0} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{x\theta,0}^2) dxRd\theta + + \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{L} (k_{x,0}^2 + k_{\theta,0}^2 + 2\nu k_{x,0}k_{\theta,0} + \frac{1-\nu}{2}k_{x\theta,0}^2) dxRd\theta + + \frac{Eh^3}{12R(1-\nu^2)} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{L} (\varepsilon_{x,0}k_{x,0} + \varepsilon_{\theta,0}k_{\theta,0} + \nu\varepsilon_{x,0}k_{\theta,0} + \nu\varepsilon_{\theta,0}k_{x,0} + + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{x\theta,0}k_{x\theta,0}) dxRd\theta + O(h^4),$$
(1)

where *E* is Young 's modulus of the shell material; *v* is the Poisson ratio; *R* is shell radius; *h* is the shell thickness; *L* is length of the shell;  $\varepsilon_{x,0}$ ,  $\varepsilon_{\theta,0}$ ,  $\gamma_{x\theta,0}$  are elements of the strain tensor;  $k_{x,0}$ ,  $k_{\theta,0}$ ,  $k_{x\theta,0}$  are curvatures of the middle surfaces. The first term of potential energy describes stretching and compression of the shell middle surface.

© H. Taherzadeh, K.V. Avramov, 2017

The second and the third terms describe the shell bending. The Donnell's shell theory is expressed by the fol-

lowing relations between the strains and displacements:

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R \partial x} + \frac{w}{R}; \quad \gamma_{x\theta,0} = \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$k_{x,0} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_{\theta,0} = -\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}; \quad k_{x\theta,0} = -2\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta}.$$
(2)

If the Sanders-Koiter shell theory is used, then the equations for the strains are the same as in the Donnell's theory. But the equations for the middle surface curvatures are changed as:

$$k_{x,0} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2};$$
  

$$k_{x\theta,0} = -2\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1}{2R} \left( 3\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right).$$
(3)

The kinetic energy of the cylindrical shell takes the form:

$$T_{s} = \frac{1}{2} \rho_{s} h \int_{0}^{2\pi L} \int_{0}^{2\pi L} (\dot{w}^{2} + \dot{u}^{2} + \dot{v}^{2}) dx R d\theta , \qquad (4)$$

where  $\rho_s$  is material density.

The cantilever shell is clamped at the edge x = 0 and it is free at x = L. The following geometrical boundary conditions are satisfied on the clamped edge:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
 at  $x = 0$ .

The natural boundary conditions are met at the free edge. As the method Rayleigh –Ritz is used to calculate the structure linear vibrations, only the geometrical boundary conditions are accounted [12].

The shell linear vibrations take the following form:

$$W(x,\theta,t) = W(x,\theta)\sin\omega t;$$
  

$$U(x,\theta,t) = \widetilde{U}(x,\theta)\sin\omega t;$$
 (5)  

$$V(x,\theta,t) = \widetilde{V}(x,\theta)\cos\omega t.$$

The equations (5) are substituted into (1, 4). Then the kinetic and potential energies can be presented as:

$$T(x,\theta,t) = \omega^{2} \sin^{2}(\omega t) \overline{T}(x,\theta);$$
  

$$P(x,\theta,t) = \sin^{2}(\omega t) \overline{P}(x,\theta).$$

The functions  $\widetilde{W}(x,\theta)$ ;  $\widetilde{U}(x,\theta)$ ;  $\widetilde{V}(x,\theta)$  can be presented in the form of the double Fourier series as:

$$W(x,\theta) = \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} W_{m,n} \phi_m(x) \cos(n\theta);$$
  

$$U(x,\theta) = \sum_{m=1}^{N_3} \sum_{n=1}^{N_4} U_{m,n} \chi_m(x) \cos(n\theta);$$
 (6)  

$$V(x,\theta) = \sum_{n=1}^{N_5} \sum_{n=1}^{N_6} V_{m,n} \chi_m(x) \sin(n\theta),$$

where  $\phi_m$ ,  $\chi_m(x)$  are trial functions;  $W_{m,n}, U_{m,n}, V_{m,n}$  are unknown coefficients, which are determined by the Rayleigh-Ritz method.

Several types of approximations are used for the displacements (6). In the first case, it is considered the beam functions for  $\phi_m(x)$  and orthogonal polynomial for  $\chi_m(x)$ . In the seond case, it is used the orthogonal polynomial for

both  $\phi_m(x)$  and  $\chi_m(x)$ . It is obtained these orthogonal polynomials. The following set of polynomials  $\{x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$  is used. The Gram-Schmidt orthogonalization is applied for these polynomials. As a result, the sequence of the orthogonal polynomials  $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_m\}$ is obtained. These polynomials are used for the functions  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  too.

The shell linear vibrations are satisfied the minimum of the following functional [12]:

$$\int_{0}^{2\pi/\omega} (P - T) dt = \frac{\pi}{\omega} \Big[ \overline{P} \Big( W_{1,1}, \dots, V_{N_5, N_6} \Big) - \omega^2 \overline{T} \Big( W_{1,1}, \dots, V_{N_5, N_6} \Big) \Big].$$
(7)

Minimum of the functional (7) is obtained on the set of  $X = \{W_{1,1}, ..., V_{N_5, N_6}\}$ . The conditions of the minimum of the functional have the following form:

$$\frac{\partial}{\partial W_{mn}} (\overline{P} - \omega^2 \overline{T}) = 0, (n = 1...N_1, m = 1..N_2);$$

$$\frac{\partial}{\partial U_{mn}} (\overline{P} - \omega^2 \overline{T}) = 0, (n = 1...N_3, m = 1..N_4); \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial V_{mn}} (\overline{P} - \omega^2 \overline{T}) = 0, (n = 1...N_5, m = 1..N_6).$$

The set of the equations (8) are transformed into the following eigenvalue problem:

$$Det\left[C - \omega^2 M\right] = 0, \tag{9}$$

where C, M are stiffness and mass matrixes.

Thus, the parameters of the cantilever shell linear vibrations are obtained from the eigenvalue problem (9).

#### 3. Analysis of linear vibrations

In this section the shell linear vibrations are analyzed numerically. The numerical results are compared with the data obtained by ANSYS. The calculations are carried out for the shell with the following numerical values of parameters:

$$L = 0.48 \text{ m}; h = 0.178 \cdot 10^{-3} \text{ m}; E = 6.82 \cdot 10^{10} \text{ Pa};$$

 $\rho = 27122 \text{ kg/m}^3; v = 0.3; R = 0.074 \text{ m.}$  (10)

The eigenvalue problem (9) is solved to calculate eigenfrequencies and eigenmodes of the shell. The obtained results are compared with the results, published by Kurilov and Amabili [5] and by Leissa [4].

The first case of the displacements approximation is considered. Then the beam functions are used for  $\phi_m(x)$ and the orthogonal polynomials are used for  $\chi_m(x)$ . The results of the analysis are published in Table 1. The data, obtained by the software ANSYS, is published in the second row of the Table. The data, which are published in the papers [5] and [4], are shown on the third and fourth rows of the Table. The results, obtained by the Rayleigh-Ritz method with Donnell's theory (2), are published in the fifth row of the Table. The results, obtained by the Rayleigh- Ritz method with Sanders-Koiter's shell theory (2, 3), are published in the sixth row of the Table.

Let us consider the case, when the orthogonal polynomials are used for both  $\phi_m(x)$  and  $\chi_m(x)$  functions of the expansion (6). The data of the calculations by the Donnell theory and the Sanders-Koiter theory are published in the seventh and the eight columns of the Table, respectively.



Вісник НТУ «ХПІ». 2017. № 39 (1261)

| Table 1 – The eigennequencies of the calific version |         |         |         |         |         |         |         |         |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Number of eigenfrequency                             | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       |
| Ansys  | 176.76  | 208.63  | 234.03  | 286.81  | 391.83  | 455.9   | 465.92  | 484.09  |
| Kurylov  | 175.5   | 205.3   | 233.9   | 377.6   | 456.4   | 494.1   | 627     | 776     |
| Leissa   | 181     | 207     | 246     | 378     | 489     | 494     | 456.029 | 527.859 |
| Donnell  | 181.694 | 212.78  | 287.366 | 385.798 | 463.291 | 466.885 | 478.982 | 502.412 |
| Sanders-Koiter                                       | 176.645 | 205.801 | 236.358 | 279.814 | 378.814 | 462.183 | 472.696 | 494.636 |
| Donnell1   | 181.1   | 212.6   | 236.4   | 287.3   | 385.8   | 457.5   | 464.8   | 478.2   |
| Sanders-Koiter1                                      | 176.1   | 205.7   | 234.4   | 279.8   | 378.1   | 457.1   | 460.1   | 471.9   |

Table 1 – The eigenfrequencies of the cantilever shell

Fig. 2 shows the eigenmodes of the shell bending vibrations obtained by software ANSYS and Fig. 3 shows the eigenmodes of the shell obtained by Rayleigh- Ritz method. The shell bending vibrations in the shell longitudinal direction are governed by the eigenmode of the cantilever beam. Note, that the first seven eigenmodes of the bending vibrations are governed by the first eigenmode of the cantilever beam. The first and the second eigenmodes of the bending vibrations contain eight and ten nodes in the circumference direction, respectively. The node number of the eigenmodescan be followed from Fig.2.

## Conclusion

The linear vibrations of the cylindrical cantilever shell are analyzed by the Rayleigh- Ritz method. The Donnell's and Sanders-Koiter shell theories are used to study the shell linear vibrations. The eigenfrequencies, which are obtained by these two theories, are close. The obtained results are compared with the data, obtained by software ANSYS.

## **Bibliography:**

**1.** Amabili M. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction / M. Amabili, M.P. Paidoussis // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56. – P. 349–381.

**2.** *Dowell E.H.* Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell / *E.H. Dowell, C.S. Ventres //* International Journal of Solids and Structures. – 1968. – P. 975–991.

**3.** Evenson D.A. Nonlinear flexural vibrations of thinwalled circular cylinders / D.A. Evenson // NASA TN D-4090. – 1967.

**4.** *Leissa A.W.* Vibration of Shells / *A.W. Leissa //* NASA SP-2881973, Government Printing Office, Now available from The Acoustical Society of America, 1993, Washington DC, 1973.

**5.** *Chiba M.* Non-linear hydroelastic vibration of a cantilever cylindrical tank – I. Experiment (empty case) / *M. Chiba //* International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1993. – Vol. 28. – P. 591-599.

6. *Chiba* M. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid – part II: Numerical results / *M. Chiba, N. Yamaki, J. Tani* // Thin-Walled Structures. – 1984. – Vol. 2. – P. 307-324.

7. *Chiba M*. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid – Part I: Theoretical analysis / *M. Chiba, N. Yamaki, J. Tani //* Thin-Walled Structures. – 1984. – Vol. 2. – P. 265-284.

8. Kurylov Y. Nonlinear vibrations of clamped-free circular

cylindrical shells / Y. Kurylov, M. Amabili // Journal of Sound and Vibration. - 2011. - Vol. 330. - P. 5363-5381.

**9.** *Pellicano F.* Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments / *F. Pellicano //* Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 303. – P. 154-170.

**10.** *Kurylov Y.* Polynomial versus trigonometric expansions for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with different boundary conditions / *Y. Kurylov, M. Amabili //* Journal of Sound and Vibration. – 2010. – Vol. 329. – P. 1435-1449.

**11.** *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / *M. Amabili.* – Cambridge University Press, 2008.

**12.** *Meirovitch L.* Elements of vibration analysis / *L. Meirovitch.* – McGraw-Hill Publishing Company, 2008.

## **Bibliography (transliterated):**

**1.** Amabili M., Paidoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. Applied Mechanics Reviews 56. 2003. – P. 349–381.

**2.** Dowell E.H., Ventres C.S. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell. International Journal of Solids and Structures. 1968. P. 975–991.

**3.** Evenson D.A. Nonlinear flexural vibrations of thinwalled circular cylinders. NASA TN D-4090, 1967.

**4.** Leissa A.W. Vibration of Shells, NASA SP-2881973,Government Printing Office,Now available from The Acoustical Society of America, 1993, Washington DC, 1973.

**5.** Chiba M. Non-linear hydroelastic vibration of a cantilever cylindrical tank – I. Experiment (empty case). International Journal of Non-Linear Mechanics. 1993. Vol. 28. P. 591-599.

6. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid – part II: Numerical results. Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2. P. 307-324.

7. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid – Part I: Theoretical analysis, Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2. P. 265-284.

**8.** Kurylov Y., Amabili M. Nonlinear vibrations of clamped-free circular cylindrical shells, Journal of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330. P. 5363-5381.

**9.** Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments. Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 303. P. 154-170.

**10.** Kurylov Y., Amabili M. Polynomial versus trigonometric expansions for nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with different boundary conditions, Journal of Sound and Vibration. 2010. Vol. 329. P. 1435-1449.

**11.** Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press, 2008.

**12.** Meirovitch L. Elements of vibration analysis. McGraw-Hill Publishing Company, 2008.

Received 12.09.2017

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Лінійні коливання консольних циліндричних оболонок без неоднорідностей / Х. Тахерзадех, К.В. Аврамов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 99-103. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.

Линейные колебания консольных цилиндрических оболочек без неоднородностей / Х. Тахерзадех, К.В. Аврамов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 99-103. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.

Linear vibrations of cylindrical cantilever shells without imperfections / H. Taherzadeh, K.V. Avramov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – C. 99-103. – Bibliogr.: 12. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

*Taxepзadex Xaмed*, Аспирант, НТУ «ХПІ», e-mail: taherzadeh.hamed@gmail.com.

*Taxepзadex Xamed*, Аспирант, НТУ «ХПИ», e-mail: taherzadeh.hamed@gmail.com.

Taherzadeh Hamed, PHD student, NTU «KhPI», e-mail: taherzadeh.hamed@gmail.com.

*Аврамов Костянтин Віталійович* – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник ІПМаш НАН України, тел.: 068 605 74 21, e-mail: kvavr@kharkov.ua.

Аврамов Константин Витальевич – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИПМаш НАН Украины, тел.: 068 605 74 21, e-mail: kvavr@kharkov.ua.

Avramov Konstantin Vitalievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher of IPMach NAS of Ukraine, tel.: 068 605 74 21, e-mail: kvavr@kharkov.ua.

# ЗМІСТ

| Виноградский Д.Г., Андреев А.Г. Влияние геометрических параметров на НДС соединений с натягом .   | 5  |
|---|----|
| <i>Грозенок Е.Д.</i> Численное определение усилий при двухпроходной формовке заготовки подшипникового кольца  | 10 |
| <i>Дон €.Ю.</i> Теоретичні дослідження впливу зміни тиску в електро¬пневматичному гальмівному приводі на динаміку руху коліс КТЗ  | 14 |
| <i>Исаков С.Н., Марусенко С.И.</i> Динамическая нелинейность ультразвуковой обработки неоднородных и биологических материалов   | 19 |
| <i>Красников С.В.</i> Моделирование и анализ вибрационных характеристик корпуса паровой турбины боль-<br>шой мощности   | 23 |
| <i>Кузьменко Д. И.</i> Динамические процессы в буровом долоте-расширителе для бурения компенсационных скважин   | 27 |
| <i>Мартиненко В. Г., Львов Г. І.</i> Огляд методів розв'язання контактних задач в'язкопружних композиційних оболонок  | 32 |
| <i>Назаренко С.А., Ткачук Н.А.</i> Обзор некоторых ключевых направлений исследований ученых НТУ «ХПИ» в области динамики конструкций  | 49 |
| <i>Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Малець О.М.</i> Про коливання осцилятора з кубічно-<br>нелінійною жорсткістю   | 57 |
| <i>Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.</i> Коливання квадратично-нелінійного осцилятора, спричинені ім-<br>пульсним навантаженням  | 61 |
| <i>Степук А.В., Автономова Л.В., Бондарь С.В., Хавин В.Л., Марусенко С.И.</i> Напряженно-<br>деформированное состояние тонкой пластины с покрытим при ударе пробойником                               | 68 |
| <i>Степук А.В., Автономова Л.В., Бондарь С.В., Хавин В.Л.</i> Численное моделирование процесса деформированния двухслойной пластины при ударном воздействии пробойником                               | 72 |
| Фомін О.В., Бурлуцький О.В., Горбунов М.І., Логвіненко О.А., Фоміна А.М. Термічна правка технологі-<br>чно-деформованих верхніх обв'язувань піввагонів  | 76 |
| Хавин В.Л., Киркач Б.Н., Киркач А. Б., Степук А.В. Экспериментальное исследование прочности мно-<br>гокомпонентного элемента защитной конструкции при растяжении и ударе                              | 81 |
| Ягудин Д.С. Динамическое воздействие инструмента на разрушаемую гранулированную среду   | 85 |
| <b>Bakhmutska Ju.O., Goloshchapov V.M., Kochurov R.</b> Rotor heating conditions influence on the thermostructural state and lifetime of the 325 MW steam turbineduring start-ups (англійською мовою) | 89 |
| <i>Lavinsky D.V.</i> The nonlinear deformation of the compound structures under electromagnetic forming (англійською мовою)   | 95 |
| <i>Taherzadeh H., Avramov K.V.</i> Linear vibrations of cylindrical cantilever shells without imperfections (англій-<br>ською мовою)  | 99 |

# CONTENTS

| Andreev A.G., Vinogradsky D.G. Influence of geometric parameters on the stressly wrapped state of compounds with a tension  | 5  |
|---|----|
| <i>Grozenok Ie. D.</i> Numerical determination of forces at two-pass forming of bearing ring blank  | 10 |
| <i>Don E.</i> Theoretical studies of the effect of the rate of change of pressure in the brake actuator elektropneumatische on the dynamics of the wheels of the wheeled vehicle                      | 14 |
| Isakov S.M., Marusenko S.I. Dynamic nonlinearity of ultrasonic treatment of inhomogeneous and biological materials  | 19 |
| <i>Krasnikov S.V.</i> Modeling and analysis of vibration characteristics of high power steam turbine case   | 23 |
| <i>Kuzmenko D. I.</i> Dynamic processes in rimming bit for drilling of compensative mining holes  | 27 |
| Martynenko V.G., Lvov G.I. Review of methods for solving the contact problems of viscoelastic composite shells  | 32 |
| <i>Nazarenko S.A., Tkachuk M.A.</i> Review of the main directions of research of scientists of NTU "KhPI" in the field of dynamics of constructions   | 49 |
| Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V., Malec O.M. On oscillations of an oscillator with cubic-<br>nonlinear stiffness  | 57 |
| <i>Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.</i> Oscillations of a quadratic-nonlinear oscillator caused by a pulsed voltage .   | 61 |
| Stepuk A.V., Avtonomova L.V., Bondar S.V., Khavin V.L., Marusenko S.I. Numeral determination of the tensely-deformed state of coated thin plate at shock influence punch                              | 68 |
| Stepuk A.V., Avtonomova L.V., Bondar S.V., Khavin V.L. Numeral simulation of double-layer plate deform process under punch impact   | 72 |
| <i>Fomin O.V., Burlutsky O.V., Gorbunov M.I., Logvinenko O.A., Fomina A.M.</i> Thermal correction of technologically deformed top girders of open wagons  | 76 |
| <i>Khavin V.L., Kyrkach B.M., Kyrkach O.B., Stepuk A.V.</i> Experimental study of strength of a multi-component protective structure element under tensile and impact loadings                        | 81 |
| <i>Yagudin D.</i> Dynamic impact of the instrument on a destructible granular environment   | 85 |
| <b>Bakhmutska Ju.O., Goloshchapov V.M., Kochurov R.</b> Rotor heating conditions influence on the thermostructural state and lifetime of the 325 MW steam turbineduring start-ups (англійською мовою) | 89 |
| Lavinsky D.V. The nonlinear deformation of the compound structures under electromagnetic forming  | 95 |
| <i>Taherzadeh H., Avramov K.V.</i> Linear vibrations of cylindrical cantilever shells without imperfections   | 99 |

# НАУКОВЕ ВИДАННЯ

# ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

# Збірник наукових праць

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 39 (1261) 2017

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. О. К. Морачковський Технічний редактор: О. В. Щепкін Відповідальний за випуск: канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ». Каф. ДММ Тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Обл.-вид № 58-17.

Підп. до друку 30.10.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,95. Облік.-вид. арк. 10,00. <u>Тираж 300 пр. 1-й завод 1-100. Зам. № 23. Ціна договірна.</u> Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р. <u>61002, Харків, вул. Кирпичова, 2</u> Цифрова друкарня «Zебра» Свідоцтво про Державну реєстрацію 2480000000115022 від 01.01.2011 р. Адреса: 61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28-А