



ISSN 2222-0631
30' 2017

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 30 (1252) 2017

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2017

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2017. – № 30 (1252). – 138 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

Координаційна рада:

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);

К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);

А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;

В. В. ЄПІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;

П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;

С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.; О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

В. І. НІКОЛАСНКО, канд. іст. наук, проф.; П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.;

В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.; Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

Члени редколегії: Ю. Л. ГЕВОРКЯН, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. ГРИГОР'ЄВ, д-р техн. наук, проф.; В. К. ДУБОВИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.; О. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

О. М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф.;

О. Г. НІКОЛАЄВ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. НОВОЖИЛОВА, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Ф. ПАЦЕГОН, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

А. Г. РУТКАС, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф.;

О. М. ШЕЛКОВИЙ, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. ЯНЮТІН, д-р техн. наук, проф.;

Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 10 від 24 листопада 2017 р.

Ministry of Education and Science of Ukraine
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

BULLETIN
OF NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

Series: "Mathematical modeling in engineering and technologies"

№ 30 (1252) 2017

Collected Works

Published since 1961

Kharkiv
NTU "KhPI", 2017

Bulletin of National Technical University "KhPI". Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2017. – No. 30 (1252). – 138 p.

State edition

Certificate of the State Committee for Information Policy of Ukraine

KB № 5256, July 2, 2001

Language: Ukrainian and Russian.

The Bulletin of the National Technical University "KhPI" is included in the List of Scientific Professional Editions of Ukraine, where the results of dissertations for the degree of doctor and candidate of sciences can be published approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 15, 2015. Decree No.1328 (Appendix No. 8) of 21.12.2015.

Coordinating Board:

L. L. Tovazhnyanskyy, Dr. Tech. Sci., Prof. (**chief**);
K. O. Gorbunov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof. (**secretary**);
A. P. Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, member NAS of Ukraine, Dr. Tech. Sci., Prof.;
E. E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A. V. Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
F. F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.;
A. I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. D. Dmitrienko, Dr. Tech. Sci., Prof.; I. F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. V. Epifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu. I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.;
P. O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. B. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
S. I. Kondrashov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
G. V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. K. Morachkovsky, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. I. Nikolaenko, PhD. His. Sci., Prof.; P. G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.;
V. A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.; G. M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
Yu. V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

Editorial Board of the Series:

Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.
Deputy Executive Editor: Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.
Executive Secretary: S. V. Dukhopelnykov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof.
Members of the Editorial Board: Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.;
O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;
L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;
V. P. Ol'shanskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; N. F. Patsegon, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;
A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. M. Shelkovyy, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

*In April 2013 the Bulletin of National Technical University "KhPI" series "Mathematical modeling in engineering and technologies" was included in the **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI".
Protocol number 10, November 24, 2017.

Ю. М. АНДРЕЕВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано аналітичні алгоритми для систем комп'ютерної алгебри, що вирішують завдання механіки структурно складних плоских і просторових дискретних моделей. При цьому використовується метод опису геометричних і механічних властивостей систем, прийнятий в програмі такого класу КиДиМ. Алгоритми включають аналітичну діагностику моделі, формування функцій кінетичної і потенційної енергії, лагранжіана, виразів перших інтегралів рівнянь руху.

Ключові слова: комп'ютерна алгебра, аналітична механіка, комп'ютерні аналітичні перетворення.

Предложены аналитические алгоритмы для систем компьютерной алгебры, решающих задачи механики структурно сложных плоских и пространственных дискретных моделей. При этом используется метод описания геометрических и механических свойств систем, принятый в программе такого класса КиДиМ. Алгоритмы включают аналитическую диагностику модели, формирование функций кинетической и потенциальной энергии, лагранжиана, выражений первых интегралов уравнений движения.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, аналитическая механика, компьютерные аналитические преобразования.

Analytic algorithms for computer algebra systems solving problems of the mechanics of structurally complex plane and spatial discrete models are proposed. In this case, a method is used to describe the geometric and mechanical properties of systems adopted in a program of this class of KiDiM. The algorithms include analytical diagnostics of the model, the formation of the kinetic and potential energy functions, the Lagrangian, the expressions for the first integrals of the equations of motion. Analytical computer algorithms for diagnostics of system conservatism, presence of cyclic coordinates, Jacobi integral – generalized energy integral and Routh integrals, automatic formation of such integrals are presented. Discrete mechanical systems described in generalized coordinates and pseudo-coordinates with arbitrary constraints are considered. The description of mechanical models used here is based on the discrete elements – power, inertial, dissipative and elastic. Such elements are assigned, respectively, to active forces acting in the system, inertia forces, linear viscous friction forces and linear elastic forces. This allows one to compactly describe the model and easily change its parameters and structure. Algorithms are proposed that, based on these data, allow the automatic construction of analytical expressions for kinetic and potential energies. After the construction of the kinetic and potential energies, the Lagrange function is constructed. Further, on the basis of an analysis of its explicit dependence on time and on generalized coordinates, the presence of the first Jacobi and Routh integrals is diagnosed. After this, these integrals are constructed.

Key words: computer algebra, analytical mechanics, computer analytical transformations.

Введение. Одним из этапов исследования динамики механических систем является исследование наличия *первых интегралов*, а также содержащейся в них информации [1].

Уравнения Лагранжа 2-го рода (а также *уравнения Аппеля*, *канонические уравнения Гамильтона*, *уравнения КиДиМ*) это обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие обобщенные координаты, обобщенные скорости (вместо них могут быть псевдоскорости или обобщенные импульсы) и обобщенные ускорения (вместо них могут использоваться псевдоускорения или производные от обобщенных импульсов по времени).

Первые интегралы таких уравнений – это некоторые функции обобщенных координат и обобщенных скоростей (или псевдоскоростей, или обобщенных импульсов), равные постоянным значениям

$$\varphi_j \{q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t\} = c_j, \quad j = \overline{1, m},$$

где $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ – обобщенные координаты и обобщенные скорости системы; c_j – некоторые постоянные; m – число первых интегралов.

В статье изложены алгоритмы аналитического построения первых интегралов для широкого класса механических систем, реализованные в системе компьютерной алгебры КиДиМ, разработанной для решения задач механики в НТУ «ХПИ», использующие элементы данных описания динамических моделей, принятые в этом программном комплексе. Это дает возможность получить дополнительную информацию об исследуемой системе и провести более глубокую ее диагностику. Данные алгоритмы приспособлены для моделей систем, описываемых в обобщенных координатах.

Анализ последних исследований. До сих пор поиск первых интегралов уравнений движений механических систем был предметом ручных технологий аналитической механики (например, [1], [2]). С появлением *специальных систем компьютерной алгебры* (ССКА), призванных решать задачи механики, примером которых является *система КиДиМ*, разработанная в НТУ «ХПИ», многие аналитические задачи механики достигают результата намного эффективнее. Основная задача таких программ – облегчить аналитический вывод уравнений движения многомассовых структурно сложных систем. ССКА КиДиМ способна по формальному описанию геометрических и силовых свойств формировать уравнения движения и равновесия плоских и пространственных механических систем, в том числе с нестационарными, *неголономными* связями [3], [4]. Проверить условия существования и получить выражения первых интегралов уравнений движения, например, робототехнических или сельскохозяйственных систем, является весьма непростой задачей. В связи с изложенным, автоматизация процесса получения и диагностики наличия первых интегралов в исследуемых современных моделях механических систем, представляется актуальной, имеющей научную новизну задачей.

Постановка задачі. Для систем, описуваних в обобщенных координатах, традиционным является поиск интеграла энергии Якоби и циклических интегралов. Это требует построения функции Лагранжа (а, значит, кинетической и потенциальной энергии), союзного выражения гамильтониана [5], содержащих обобщенные координаты и обобщенные скорости, дифференцирования математически сложных и громоздких выражений, сравнения аналитических формул. При этом требовать от пользователя таких компьютерных программ получения и вывода аналитических выражений указанных функций нецелесообразно, так как это ведет к неоправданно большим затратам человеческого труда и ограничивает дальнейшее варьирование параметров и структуры системы. Одним из самых эффективных способов описания дискретных механических моделей является метод, принятый в программном комплексе КиДиМ [4]. Он основан на использовании, в частности, понятий *инерционных* и *силовых* элементов модели. Это снимает с пользователя многие проблемы, связанные с формированием динамических функций механики, получением соответствующих уравнений, варьированием структуры и параметров модели, совершаемых в процессе исследований и расчетов. Поэтому надо получить алгоритмы, позволяющие по исходным данным КиДиМ сформировать выражения кинетической и потенциальной энергии, аналитически проверить условия существования первых интегралов и получить их окончательные выражения. Далее изложены эти алгоритмы.

Вычисление кинетической энергии системы по инерционным элементам. По определению *инерционным элементом* механической модели КиДиМ считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения) и *координаты*. Зависимость координаты элемента от обобщенных координат системы называется здесь *структурой элемента*. Он описывает действие в механической системе составляющей силы или пары сил инерции. Для каждого тела или точки механической системы задается, как правило, несколько инерционных элементов, отвечающих составляющим их движения. В качестве *характеристики* выступает соответствующий *координате* элемента *постоянный инерционный коэффициент* – *масса точки или тела (в поступательной части движения)*, *момент инерции тела (во вращательной части движения)*. В качестве *координаты* используется переменная, которая задает либо простое перемещение точки, либо простое перемещение тела при плоском движении (поступательное или вращательное), либо поступательное перемещение при пространственном движении тела. Для сферического движения (в том числе и как части свободного пространственного движения) координатой является переменная, которая задает проекцию угловой скорости тела на главную ось инерции тела. Под *простым движением* здесь понимается прямолинейное перемещение точки, прямолинейное поступательное перемещение тела, вращательное перемещение тела при плоских движениях. При этом плоскопараллельное движение представляется совокупностью двух или трех простых, одно из которых – вращательное. Криволинейное движение точки или поступательное движение тела – совокупностью двух (на плоскости) или трех (в пространстве) прямолинейных движений или одним движением по дуге заданной траектории. Упомянутые выше проекции угловой скорости тела выражаются через обобщенные скорости или псевдоскорости выражениями, которые называются *дифференциальными структурами*. Координатами инерционных элементов в простых движениях могут быть как перемещения (линейные и угловые), так и проекции соответствующих скоростей (линейных и угловых). В зависимости от этого они выражаются через обобщенные координаты или через обобщенные скорости и псевдоскорости, либо с помощью *структур (геометрических структур)*, либо – *дифференциальных структур*. Таким образом, кинетическая энергия всей системы может быть вычислена по простой формуле

$$T = \sum_{j=1}^m \frac{J_j v_j^2}{2}, \quad (1)$$

где m – число инерционных элементов; J_j – характеристики инерционных элементов; v_j – скорость, которая вычисляется дифференцированием координаты элемента (в простых перемещениях) по времени через соответствующие структуры,

$$v_j = \dot{\xi}_j(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \xi_j}{\partial t},$$

либо непосредственной подстановкой заданной дифференциальной структуры

$$v_j = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j.$$

В результате получается выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости (либо псевдоскорости).

Вычисление потенциальной энергии системы по силовым элементам. По определению *силовым элементом* механической модели КиДиМ, аналогично инерционному элементу (см. выше), считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения) и *координаты*. Каждый силовой элемент описывает действие в механической системе составляющей активной силы или пары сил. В качестве *характеристики* выступает, чаще всего, проекция описываемой силы или проекция момента описываемой пары сил. В качестве *координаты* может быть принята *любая геометрическая или кинематическая величина*, обозначенная некоторой

переменной. Аналитическое выражение такой геометрической величины через обобщенные координаты называется, соответственно *структурой* (точнее, *геометрической структурой*), а аналитическое выражение кинематической величины через обобщенные скорости – *дифференциальной структурой*. Для любого силового элемента произведение его характеристики на вариацию его координаты есть *виртуальная работа* описываемого элементом соответствующего силового воздействия на систему. Отсюда следует, что *характеристика* силового элемента есть *проекция* силы или момента пары или их совокупности на *виртуальное перемещение*, задаваемое вариацией координаты элемента. Если выразить вариацию координаты элемента через вариации обобщенных координат (или псевдокоординат), используя для этого геометрическую или дифференциальную структуру, то коэффициенты перед вариациями обобщенных координат (или псевдокоординат) будут представлять вклад данного силового элемента в соответствующие обобщенные силы системы.

Итак, пусть задан силовой элемент

$$P \cdot \rho_i = P_i,$$

где ‘ P ’ – буква, обозначающая «силовой элемент»; ρ_i – имя координаты элемента – имя некоторой переменной; ‘.’ – разделяет имя элемента (в данном случае состоящее из одной буквы, в другом случае после буквы P могут стоять любые буквы и цифры) и имя координаты; ‘=’ разделяет полное имя элемента (включающее имя координаты) и его характеристику (значение); P_i – формула, задающая характеристику (значение) элемента или имя переменная, формула для которой может быть приведена в другом месте исходных данных.

Таким образом, виртуальная работа заданных активных сил системы может быть получена по формуле

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \delta \rho_i, \quad (2)$$

где p – число силовых элементов в модели системы.

Для общего вывода используем геометрическую структуру $\rho_i = \rho_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$, выраженную через обобщенные координаты q_1, q_2, \dots, q_s , или дифференциальную структуру

$$\dot{\rho}_i = \sum_{j=1}^w r_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{\pi}_j + r_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (3)$$

для псевдоскоростей $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_w$, соответствующих псевдокоординатам $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_w$.

При использовании псевдокоординат должны быть заданы еще уравнения, связывающие псевдоскорости с обобщенными скоростями в виде

$$\dot{\pi}_j = \sum_{k=1}^s a_{kj}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{q}_k + a_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad (4)$$

откуда получается связь $\delta \pi_j = \sum_{k=1}^s a_{kj} \delta q_k$ между вариациями псевдокоординат и обобщенными координатами.

Тогда, в первом случае, получим $\delta \rho_i = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \delta q_k$, а во втором, согласно *правилу Лопиталья*,

$$\delta \rho_i = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \rho_i}{\partial \pi_j} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w a_{ij} \delta \pi_j.$$

Поэтому из (2) будет следовать, либо

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \sum_{k=1}^s \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^s Q_k^a \delta q_k,$$

либо

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{ij} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \left(\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \Pi_j^a \delta \pi_j,$$

где k – я обобщенная сила (j – я «псевдосила») складывается из вкладов каждого силового элемента по формулам

$$Q_k^a = \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k}, \quad \Pi_j^a = \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j}.$$

Если все силы системы потенциальны, то существует такая функция обобщенных координат – потенциальная энергия $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$, взятая с обратным знаком вариация которой равна виртуальной работе сил системы. Тогда, согласно, формуле (2), в первом случае, должно быть

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^s Q_k^a \delta q_k = -\delta \Pi = -\sum_{k=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k,$$

а во втором –

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^w \left(\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \left[\left(\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \sum_{k=1}^s a_{jk} \delta q_k \right] = \sum_{k=1}^s \left[\sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right] \delta q_k = -\delta \Pi = -\sum_{k=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Следовательно, с учетом (3), получим

$$\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (5)$$

В выражениях (5) в правых частях стоят функции обобщенных координат, поэтому каждое из этих равенств возможно, только если и характеристики силовых элементов P_i постоянны, либо зависят только от обобщенных координат. Поэтому силовые элементы с характеристиками, зависящими от обобщенных скоростей или псевдоскоростей, не могут участвовать в формировании потенциальной энергии и должны считаться, поэтому, непотенциальными.

Для того чтобы силовой элемент, характеристика которого либо постоянна, либо зависит только от обобщенных координат, описывал потенциальную силу для системы с несколькими степенями свободы, достаточно, чтобы выполнялись выражения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_l \partial q_k}, \quad k, l = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Согласно формулам (5) левая часть предыдущей формулы в первом случае представится в виде

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = -\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \right) = -\sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} + P_i \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_k \partial q_l} \right),$$

откуда для выполнения условия (6) необходимо (поскольку равенство $\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_l \partial q_k} = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_k \partial q_l}$ выполняется всегда), чтобы

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k}. \quad (7)$$

Заметим, что для характеристик силовых элементов, которые от координат не зависят, это равенство выполняется автоматически.

Аналогично, для второго равенства (5), получим

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) = \sum_{i=1}^p \left[P_i \sum_{j=1}^w \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} + a_{jk} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_l} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right].$$

Откуда для выполнения условия (6) требуется, чтобы

$$\sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}; \quad \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_k} = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_l}; \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k}. \quad (8)$$

Первое равенство (8), очевидно, будет иметь место, если для всех j выполнено

$$\frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} = \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}, \quad \text{то есть,} \quad \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l},$$

а это есть достаточный признак того, чтобы выражения (4) были интегрируемы [1], а все псевдокоординаты были истинными координатами.

Второе равенство обеспечится в случае, когда все коэффициенты r_{ij} в выражении (3) будут постоянными (это достаточное условие).

Наконец, третье равенство условий (8) обеспечится, если для j , для которых выполняется

$$\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \neq 0, \quad \text{будет} \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

что, очевидно, будет иметь место для силовых элементов с постоянными характеристиками (также достаточное условие).

Итак, алгоритм построения потенциальной энергии по силовым элементам состоит в следующем:

1. Для каждого силового элемента делаем проверки:

- а) если его характеристика зависит от обобщенных скоростей или псевдоскоростей, то элемент непотенциален, и его пропускаем;
- б) если его координата зависит от двух и более обобщенных координат, то проверяем условие (7), при его невыполнении – элемент непотенциален, и его пропускаем;
- в) если его координата зависит от псевдоскоростей и псевдокоординаты не являются истинными

ми координатами (что диагностируется в ССКА КиДиМ раньше), то первое равенство в (8) не выполняется, следовательно, элемент непотенциален. Если же псевдокоординаты являются истинными координатами, то выражения (4) интегрируются, и механическую систему можно описать в обобщенных координатах; тогда данная проверка будет не нужна.

2. По тем силовым элементам, для которых проверки п. 1 оказались положительными, построим по-

тенциальную энергию по формуле, которая следует из формулы $d\Pi = -dA = -\sum_{i=1}^p P_i d\rho_i$

$$\Pi = -\sum_{i=1}^{p_1} P_i \rho_i - \sum_{i=1}^{p_2} \int P_i(\rho_i) d\rho_i - \sum_{i=1}^{p_3} \int P_i \sum_{k=1}^s \frac{d\rho_i}{dq_k} dq_k, \quad (9)$$

где p_1 – число элементов с постоянными характеристиками; p_2 – число элементов с характеристиками, которые зависят только от координаты элемента; p_3 – число элементов с характеристиками, которые зависят от обобщенных координат.

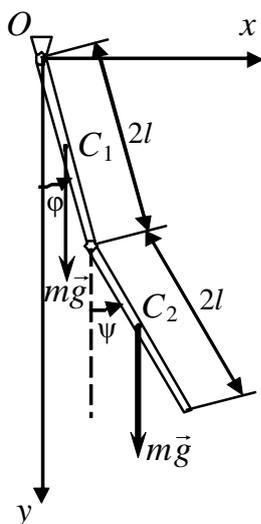


Рис. 1 – Двойной маятник.

Пример. Плоский двойной маятник, звенья которого имеют длину $2l$ (рис. 1). В качестве обобщенных координат выберем два угла отклонения от вертикали: φ – верхнего звена и ψ – нижнего звена. Очевидно, что потенциальная энергия этой системы даётся выражением

$$\Pi = -mgl \cos \varphi - mg(2l \cos \varphi + l \cos \psi) = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi).$$

При описании этой механической модели средствами КиДиМ, очевидно, будут записаны силовые элементы:

$$P.y_{C1} = mg; \quad y_{C1} = l \cos \varphi; \quad P.y_{C2} = mg; \quad y_{C2} = 2l \cos \varphi.$$

Используя полученную формулу (9), запишем

$$\Pi = -\sum_{i=1}^2 P_i \rho_i = -mgy_{C1} - mgy_{C2} = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi).$$

Запишем первый силовой элемент по-другому $P.\varphi = -mgl \sin \varphi$.

Тогда формула (9) дает тот же результат:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\sum_{i=1}^{p_1} P_i \rho_i - \sum_{i=1}^{p_2} \int P_i(\rho_i) d\rho_i = -mgy_{C2} - \int -mgl \sin \varphi d\varphi = \\ &= -mg(2l \cos \varphi + l \cos \psi) - mgl \cos \varphi = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi). \end{aligned}$$

Вычисление потенциальной энергии системы по упругим элементам. По определению *упругим элементом* механической модели КиДиМ считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения), *координаты* и *структуры*. Он описывает действие в механической системе составляющей упругой силы или пары. В качестве *характеристики* выступает соответствующий *координате* элемента *постоянный коэффициент жесткости*. В качестве *координаты* используется параметр, который задает *деформацию упругого тела* – линейное или угловое перемещение, вариация которого будучи умноженной на произведение коэффициента жесткости на саму координату элемента дает с обратным знаком виртуальную работу описываемой составляющей упругой силы или пары. Таким образом, для i -го упругого элемента, записанного в виде $C.x_i = C_i$; виртуальная работа получит выражение $\delta A_i^{\text{упр}} = -C_i x_i \delta x_i$. Соответственно, элементарную работу, а, значит, и дифференциал потенциальной энергии такого элемента можно вычислить по формуле $dA_i^{\text{упр}} = -C_i x_i dx_i = -d\Pi_i$.

Поэтому вся потенциальная энергия упругих элементов может быть посчитана так:

$$\Pi = \sum_{i=1}^u \int C_i x_i dx_i = \sum_{i=1}^u \frac{C_i [x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)]^2}{2}, \quad (10)$$

где u – число упругих элементов в механической модели; C_i – их характеристики.

Компьютерное построение первых интегралов. Для так называемых *лагранжевых систем* обычно имеет смысл искать обобщенный интеграл энергии (*интеграл Якоби*) и *интегралы Рауса* [1], [2], [5]. Условием существования интеграла Якоби является консервативность системы и независимость (явная) её функции Лагранжа от времени. С точки зрения программы диагностики исходных данных КиДиМ, первое требование означает потенциальность всех силовых элементов и отсутствие диссипативных элементов, отражающих наличие сил вязкого трения в системе. Второе требование для ядра комплекса КиДиМ становится тривиальным после построения самой функции Лагранжа путем формирования кинетической и потенциальной энергии по инерционным, силовым и упругим элементам модели по выше приведенным алгоритмам. Вид интеграла существенно зависит

от наличия нестационарных связей в системе, что приводит к наличию явных зависимостей геометрических и дифференциальных структур от времени, что также тривиально проверяется. Итак, в случае присутствия таких связей интеграл имеет вид

$$T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

где T_2, T_0 – квадратичная форма обобщенных скоростей и члены, не содержащие их в кинетической энергии системы; Π – потенциальная энергия системы; h – постоянная энергии, вычисляемая по начальным условиям движения системы. В случае отсутствия нестационарных (реономных) связей интеграл Якоби имеет вид обычного закона сохранения механической энергии

$$T + \Pi = h.$$

Условием существования интегралов Рауса является наличие в системе циклических координат – обобщенных координат, не входящих явно в функцию Лагранжа, для которых обобщенные силы равны нулю. В этом случае имеет место m таких интегралов вида [1], [2], [5]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, m},$$

где m – число циклических координат q_1, q_2, \dots, q_m ; β_j – постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения системы.

При реализации приведенных здесь алгоритмов наибольшую трудность представляет проверка совпадения формул в правых и левых частях соответствующих равенств, например, в (7). Это связано с тем, что даже одинаковые формулы могут выглядеть совсем не похожими друг на друга из-за перестановки слагаемых, объединения слагаемых в скобки или, наоборот, раскрытия их. Для решения этой проблемы в ССКА КиДиМ применены специальные процедуры, осуществляющие нормализацию формул. Эта нормализация заключается в следующем.

1. В формуле раскрываются все скобки, формируется список слагаемых, представляющих собой константы, переменные, унарные, бинарные и тернарные операции.
2. Далее этот список слагаемых упорядочивается в соответствии с приоритетами слагаемых, представляющих собой принятые отношения порядка:
 - две константы, больший приоритет будет иметь константа, большая по величине;
 - две переменные, больший приоритет будет иметь переменная, название которой начинается на старшую букву в алфавите (аналогично для именованных констант);
 - константу и переменную, больший приоритет будет иметь константа;
 - константу и унарную (бинарную или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь константа;
 - переменную и унарную (бинарную или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь переменная;
 - унарную и бинарную (или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь унарная операция;
 - бинарную и тернарную операцию, больший приоритет будет иметь унарная операция.

Такая нормализация преобразует формулы правой и левой части в однотипные выражения, что дает возможность безошибочно диагностировать совпадение исходных формул.

Результаты работы программы. Для проверки работы блоков программного комплекса КиДиМ, реализующие приведенные выше алгоритмы, были рассмотрены модели двойного маятника (рис. 1) и сферического движения твердого тела в случае Эйлера и в случае Лагранжа. В результате работы программы получены следующие первые интегралы (приведены фрагменты листингов отчета работы программы).

Для двойного маятника – один интеграл Якоби:

$$T + \Pi = 0.5 * (J1 * \varphi'^2 + m * xD'^2 + m * yD'^2 + J2 * \psi'^2) - m * g * (y + yD) = h = -39.2239.$$

Для сферически движущегося твердого тела – 3 интеграла + (один – интеграл Якоби и два – Рауса):

– для случая Эйлера $T + \Pi = 0.5 * (Jx * (\omega x^2 + \omega y^2) + Jz * \omega z^2) = h = 295.489.$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = Jz * \omega z = \beta_1 = 5.43301.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} = Jx * (\omega x * \omega x' \psi' + \omega y * \omega y' \psi') + Jz * \omega z * \omega z' \psi' = \beta_2 = 4.76763.$$

– для случая Лагранжа $T + \Pi = 0.5 * (Jx * (\omega x^2 + \omega y^2) + Jz * \omega z^2) + m * g * a * \cos \theta = h = 305.231.$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = Jz * \omega z = \beta_1 = 5.43301.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} = Jx * (\omega x * \omega x' \psi' + \omega y * \omega y' \psi') + Jz * \omega z * \omega z' \psi' = \beta_2 = 5.01763.$$

Как видно, эти результаты совпадают с формулами этих интегралов, приведенных в [7].

Перспективы дальнейших исследований. Перспективными исследованиями и реализациями в ССКА КиДиМ нам представляются генерация первых интегралов на основе *скобок Пуассона*, а также использование функции Рауса для получения эффективных уравнений движения механических систем с циклическими координатами.

Выводы. Таким образом, по данным КиДиМ вполне возможно корректно построить выражения потенциальной и кинетической энергии, а, значит, и выражения функции Лагранжа. Для этого следует воспользоваться формулами (1), (9), (10). Это позволяет автоматически получить аналитические выражения первых интегралов – интеграла энергии (интеграла Якоби) и циклических интегралов (интегралов Рауса) по заданным в исходных данных ССКА КиДиМ силовым, упругим и инерционным элементам. Относительно более сложно при этом получить выражения потенциальной энергии по силовым элементам, особенно если характеристики их зависят от координат элементов или обобщенных координат системы, так как это связано с неопределенным интегрированием. Поэтому для целей автоматического формирования аналитических выражений для потенциальной энергии по силовым элементам их следует стремиться записывать с постоянной характеристикой (значением). Разработанные и представленные в статье аналитические компьютерные алгоритмы позволяют существенно поднять уровень диагностики и исследовательские возможности ССКАКиДиМ.

Список литературы

1. Айзерман М. А. Классическая механика. 2-е изд. – М. : Наука, 1980. – 367 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М. : Физматгиз, 1966. – 300 с.
3. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 130 – 138.
4. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера-Лагранжа // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 106 – 115.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М. : Гл. ред. физмат. лит., 1961. – 824 с.
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М. : Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1967. – 520 с.
7. Бабаков И. М. Теория колебаний : учеб. пособие – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 591 с.

References (transliterated)

1. Ayzerman M. A. *Klassicheskaya mekhanika. 2-e izd.* [Classical Mechanics. 2nd ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 367 p.
2. Gantmakher F. R. *Leksii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on Analytical Mechanics]. Moscow, FizMatGiz Publ., 1966. 300 p.
3. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh system tverdykh tel [On the Dynamics of Holonomic Systems of Solids]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2005. vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
4. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Comp'uternoe modelirovanie negolonomnykh system tverdykh tel na osnove prinzipa d'Alamberta-Lagrange [Computer modeling of non-holonomic systems of solids based on the d'Alembert-Lagrange principle]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 106–115.
5. Lurie A. I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1961. 824 p.
6. Neymark Yu. I., Fufaev N. A. *Dinamika negolonomnykh system* [Dynamics of non-holonomic systems]. Moscow, Nauka, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1967. 520 p.
7. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy : ucheb. posobie – 4-e izd., ispr.* [Oscillation Theory: training manual – 4th ed.]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.

Поступила (received) 06.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Аналітична комп'ютерна побудова перших інтегралів рівнянь руху дискретних механічних систем / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 5 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Аналитическое компьютерное построение первых интегралов уравнений движения дискретных механических систем / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 5 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Analytical computer construction of the first integrals of the equations of motion of discrete mechanical systems / Y. M. Andreev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 5 – 11. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андреев Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Андреев Юрий Михайлович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andreev Yuriy Mikhaylovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

П. Н. АНДРЕНКО, А. Ю. ЛЕБЕДЕВ, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОРЦЕВЫХ УПЛОТНЕНИЙ РОТОРА ЛАБИРИНТНО-ВИНТОВОГО НАСОСА

Складено математичну модель роботи торцевого ущільнення із гладкими кільцями із реліту в умовах рідинного тертя. Особливістю моделі є врахування теплового розширення рідини в зазорі між кільцями; цей ефект, що діє разом із силами тертя, утворює додатковий тиск та підйомну силу, яка залежить від ширини зазору та швидкості ковзання. У розробленій моделі відображено процеси виділення, переносу та відводу тепла в елементах ущільнення, а також використовується сила спротиву осевому переміщенню кільця, яке виникає у зазорі під дією насосного ефекту та тертя у рідині, що перетікає; інерційність цієї рідини враховано методом приведення мас. Виконано лінеаризацію моделі і отримано динамічні характеристики перехідних процесів та вимушених коливань пристрою. Сформульовано умови, що накладаються на параметри торцевого ущільнення для забезпечення режиму рідинного тертя, що мінімізує знос.

Ключові слова: лабиринтно-гвинтовий насос, торцеве ущільнення ротора, кільця із реліту, рідинне тертя, насосний ефект, приведення мас.

Составлена математическая модель работы торцевого уплотнения с гладкими кольцами из релита в условиях жидкостного трения. Особенностью модели является учет теплового расширения жидкости в зазоре между кольцами; этот эффект, действующий совместно с силами трения, создает дополнительное давление и подъемную силу, зависящую от ширины зазора и скорости скольжения. В разработанной модели отображаются процессы выделения, переноса и отвода тепла в элементах уплотнения, а также используется сила сопротивления осевому перемещению кольца, возникающая в зазоре под действием насосного эффекта и трения в перетекающей жидкости; инерционность этой жидкости учитывается методом приведения масс. Выполнена линеаризация модели и получены динамические характеристики переходных процессов и вынужденных колебаний устройства. Сформулированы условия, накладываемые на параметры торцевого уплотнения для обеспечения режима жидкостного трения, что минимизирует износ.

Ключевые слова: лабиринтно-винтовой насос, торцевое уплотнение ротора, кольца из релита, жидкостное трение, насосный эффект, приведение масс.

A mathematical model of the work of the mechanical seal with smooth rings made from cast tungsten carbide in the condition of liquid friction is drawn up. A special feature of this model is the allowance for the thermal expansion of a liquid in the gap between the rings; this effect acting in the conjunction with the frictional forces creates additional pressure and lift which in its turn depends on the width of the gap and the speed of sliding. The developed model displays the processes of separation, transportation and heat removal in the compaction elements and also the resistance to axial movement of the ring arising in the gap caused by the pumping effect and the friction in the flowing liquid; the inertia of this fluid is taken into account by the mass reduction method. The linearization of the model is performed and the dynamic characteristics of the transient processes and the forced oscillations of the device are obtained. The conditions imposed on the parameters of the mechanical seal are formulated to provide a regime of the liquid friction, which minimizes the wear.

Key words: labyrinth screw pump, rotor mechanical seal, rings made from cast tungsten carbide, liquid friction, pumping effect, mass reduction method.

Введение и постановка задачи. Лабиринтно-винтовой насос (ЛВН, его уплотнительный узел показан рис. 1 [1]), устанавливается в нефтяной скважине на глубине примерно 1 км у нижнего торца трубопровода, по которому лопастные насосы поднимают нефть на поверхность земли; до указанной отметки она течет под действием пластового давления. Нефть в полости ЛВН имеет температуру 120° С и давление около 10 МПа. Известно [2], что в пластовой нефти растворено много газа, и при подъеме по скважине, по причине падения давления, примерно 2/3 его массы выделяется в форме пузырей, то есть нефть становится двухфазной средой. Задачей ЛВН является дробление пузырей и перемешивание их с жидкостью, что необходимо для надежной работы лопастных насосов.

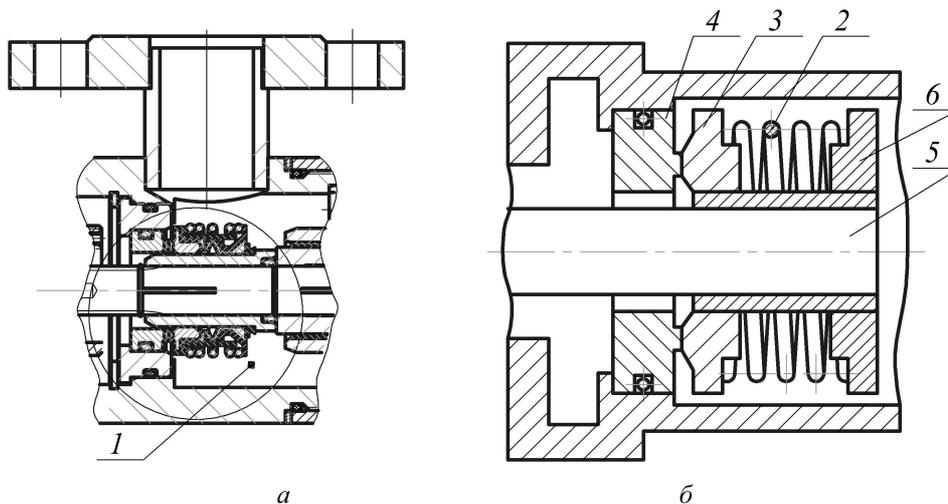


Рис. 1 – Торцевое уплотнение ротора ЛВН: а – конструкция; б – схема;
1– выходная камера; 2– пружина; 3, 4– обоймы колец; 5 – вал; 6 – опора пружины.

В ходе работы ЛВН повышает давление нефти на 0.2 МПа, и этот перепад действует на торцевое уплотнение выходной камеры, показанное на рис. 1. Наличие перепада давления, а также особенности физических свойств рабочего тела и очень высокая чистота уплотняющих поверхностей (шероховатость колец, изготовленных из *relmeta* – износостойкого сплава двух карбидов вольфрама – составляет всего лишь 0.03 мкм), создают предпосылки для поддержания в зазоре режима жидкостного трения, что минимизирует износ. Задачей исследования являлось определение параметров уплотнения, обеспечивающего этот режим.

Особенности уплотняемой жидкости. На каждые 100 м увеличения глубины температура земной породы повышается на 3 градуса. Глубина пласта, из которого добывается нефть, достигает примерно 3 км, а давление в пласте близко к 30 МПа. При подъеме нефти по скважине ее температура изменяется слабо, а давление – снижается в 3 раза, что приводит к выделению в газовую фазу значительной части растворенного углеводородного газа, а также азота. При этом первоначальная вязкость жидкой фазы увеличивается в 1.5 ... 2 раза.

Вращение ротора приводит к сепарированию нефти в выходной камере по плотности: вода, присутствующая в пластовой нефти, отжимается к стенкам камеры, а газовая фаза остается в центре. В результате к уплотнению поступают жидкие углеводородные фракции, но их вязкость не остается постоянной и варьируется в достаточно широких пределах.

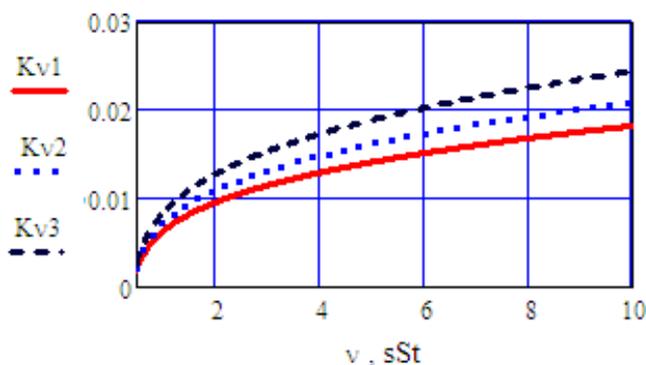


Рис. 2 – Изменение индекса K_v в зависимости от вязкости ν , сСт пластовой нефти и ее температуры; $Kv1 - t_{nl} = 120^\circ\text{C}$, $Kv2 - t_{nl} = 70^\circ\text{C}$, $Kv3 - t_{nl} = 20^\circ\text{C}$.

Принято считать, что средняя кинематическая вязкость дегазированной и сепарированной нефти при температуре 120°C составляет около 4 сСт, но у пластовой нефти, где растворено много газа, вязкость существенно ниже; кроме того, некоторые сорта нефти имеют большую вязкость [2]. В пласте вязкость нефти ν (определяемая в сСт) подчиняется уравнению Майера

$$\frac{\ln(\nu + 0.8)}{\ln(\nu_{20} + 0.8)} = \left(\frac{293}{273 + t_{nl}} \right)^{3.5}, \quad (1)$$

где ν_{20} – вязкость этой же нефти при температуре 20°C ; пластовая температура $t_{nl} = 120^\circ\text{C}$.

Дифференцируя обе части равенства (1) по температуре, получаем коэффициент изменения (индекс) вязкости:

$$K_v = \nu^{-1} d\nu / dt_{nl} = -3.5 (1 + 0.8/\nu) \ln(\nu + 0.8) / (273 + t_{nl}).$$

Чтобы учесть частичную дегазацию при подъеме нефти по скважине и ее сепарировании в насосе, вязкость в правой части этой формулы нужно уменьшить в 2 раза. В результате получаем зависимости, представленные на рис. 2. Кинематическая вязкость ν нефти в насосе изменяется в пределах 1 ... 4 сСт; для дальнейшего анализа примем среднее значение $\nu_{cp} = 2$ сСт.

Изменения температуры жидкости и материала кольца по длине зазора. В работе [3] отмечалось, что радиальный перепад температур приводит к конусности зазора, и это, в свою очередь, влечет изменение подъемной силы. Для расчета конусности решена задача теплопроводности для радиального сечения кольца (рис. 3). Выделение тепла вызвано работой силы жидкостного трения, и плотность потока тепла q описывается формулой

$$q(x) = \rho_n \nu ((R - x)\omega)^2 / (h_0 - \Delta h(x)), \quad (2)$$

где ρ_n, ν – плотность и кинематическая вязкость нефти; R_{cp}, ω – средний радиус и угловая скорость вращения кольца; h_0 – высота зазора на внешнем радиусе кольца; Δh – изменение зазора; x – радиальная координата, направленная по течению жидкости, $x \in [0, H]$; $\Delta h(0) = 0$; H, H_p – ширина и высота кольца.

Эта задача, после пренебрежения радиальным сужением кольца и потоком тепла от вала насоса, принимает вид:

$$\nabla^2 T = 0; \quad \partial T / \partial x|_{x=0} = 0; \quad \lambda_p \partial T / \partial x + \alpha T|_{x=H} = 0; \quad \partial T / \partial y|_{y=0} = 0; \quad \lambda_p \partial T / \partial y|_{y=H_p} = 0.5 q, \quad (3)$$

а ее решение получено по методу Фурье разделения переменных [4] в виде ряда

$$T(x, y) = 0.5 H \lambda_p^{-1} \sum_{j=0,1,\dots} A_j [\gamma_j \text{sh}(\gamma_j H_p / H)]^{-1} \text{ch}(\gamma_j y / H) \cos[\gamma_j (1 - x / H)], \quad (4)$$

где константы разделения γ_j и коэффициенты Фурье A_j определяются равенствами:

$$\gamma_j \operatorname{th} \gamma_j = \alpha H \lambda_p^{-1}, \quad A_j = 2H^{-1} \int_0^H q(x) \cos(\gamma_j(1-x/H)) dx; \quad \Delta\alpha = \alpha H \lambda_p^{-1};$$

$\bar{\nabla}^2$ – оператор Лапласа,

$$\bar{\nabla}^2 T = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2;$$

α – коэффициент теплоотдачи от кольца к жидкости в выходной камере ЛВН (ее температура в модели (3) считается нулевой); λ_p – средняя теплопроводность материала кольца, в расчетах уплотнения используем значение теплопроводности релита $\lambda_p = 29.5 \text{ Вт м}^{-1}\text{К}^{-1}$.

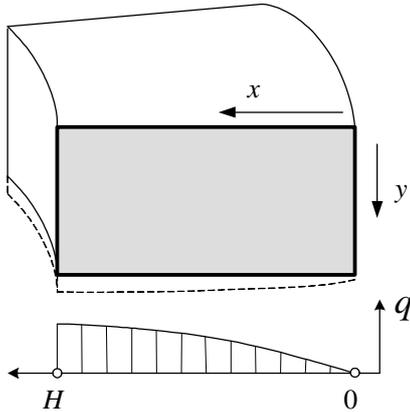


Рис. 3 – Сечение и деформации кольца и тепловой поток в зазоре.

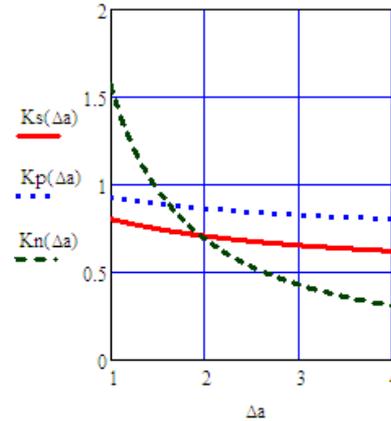


Рис. 4 – Графики коэффициентов пропорциональности для температур.

Интегрируя ряд (4) по высоте кольца, получаем:

$$\int_0^{Hp} T(x, y) dy = 0.5H^2 \lambda_p^{-1} \sum_{j=0,1,\dots} A_j \gamma_j^{-2} \cos(\gamma_j x/H), \quad (5)$$

и, что характерно, этот результат не зависит от высоты кольца Hp . Изменение температуры жидкости в зазоре (то есть температура стенки канала) определяется равенством

$$T_n(x) = 0.5H \lambda_p^{-1} \sum_{j=0,1,\dots} A_j [\gamma_j \operatorname{th}(\gamma_j Hp/H)]^{-1} (1 - \cos[\gamma_j(1-x/H)]) \quad (6)$$

и при соотношении $Hp > 0.5H$ слабо зависит от высоты Hp .

Анализ показал, что в суммах (4) – (6) можно ограничиться первым слагаемым; тогда все термические характеристики кольца пропорциональны одной температуре T_0 :

$$\Delta T_p = Kp(\Delta\alpha) T_0; \quad \Delta T_n = Ks(\Delta\alpha) T_0; \quad \Delta T_n = Kn(\Delta\alpha) T_0; \quad \operatorname{grad}_x T = 2Kp(\Delta\alpha) T_0 / H,$$

где $T_0 = 0.5q_{cp}H / \lambda_p$ – расчетное значение температуры, получаемое при условии передачи тепла с плотностью

$$q_{cp} = (\rho_n v (R_{cp} \omega)^2 / h_0)$$

от внутреннего радиуса кольца к внешнему радиусу; $R_{cp} = R - 0.5H$; ΔT_p , ΔT_n – радиальные перепады температуры кольца и жидкости; T_n – температура материала в начальном сечении кольца; соответствующие тепловые удлинения во входном ΔH_n и выходном сечениях ΔH_k определяются формулами

$$\Delta H_n = \alpha_p T_n H; \quad \Delta H_k = \alpha_p \Delta T_k H, \quad (7)$$

α_p – коэффициент теплового линейного расширения релита; $\alpha_p = 5.8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$; зависимости коэффициентов Ks , Kp , Kn от параметра $\Delta\alpha$ даны на графиках рис. 4.

При хорошей организации отвода тепла от колец значения $\Delta\alpha$ расположены в интервале 2 ... 3.

В [3] указано ограничение на градиент расширения материала кольца; оно составляет $6 \cdot 10^{-5}$, то есть должно выполняться условие $Kp(\Delta\alpha) \alpha_p T_0 < 6 \cdot 10^{-5}$. Отсюда, а также из графиков рис. 4, следует, что для кольца из релита величина ΔT_n повышения температуры жидкости в канале не должна превышать 6.5 К.

Изменение температуры кольца в переходном процессе. Если зазор или другие параметры, используемые в правой части равенства (2), изменяются в течение времени t , то стационарная задача (3) трансформируется в нестационарную задачу:

$$\lambda_p \nabla^2 T = c_p \rho_p \partial T / \partial t; \quad \partial T / \partial x \Big|_{x=0} = 0; \quad \dots; \quad \lambda_p \partial T / \partial y \Big|_{y=H_p} = 0.5 q(x, t),$$

где c_p , ρ_p – удельная теплоемкость и плотность материала колец.

Применяя преобразование Лапласа и метод Фурье разделения переменных, приходим к равенствам:

$$\int_0^{H_p} T(x, y, s) dy = 0.5 H^2 \lambda_p^{-1} \sum_{j=0,1,\dots} A_j(s) (\gamma_j^2 + \alpha_p H^2 s)^{-1} \cos[\gamma_j (1 - x/H)];$$

$$A_j(s) = 2H^{-1} \int_0^H q(x, s) \cos[\gamma_j (1 - x/H)] dx,$$

где s – это переменная Лапласа. Откуда для термических деформаций ΔH_n , ΔH_k получаем решения для изображений в форме *обобщенных рядов Фурье*:

$$\Delta H_i = 0.5 H^2 \lambda_p^{-1} \sum_j A_j(s) (\gamma_j^2 + \alpha_p H^2 s)^{-1} \cos \gamma_j, \quad \Delta H_e = 0.5 H^2 \lambda_p^{-1} \sum_j A_j(s) (\gamma_j^2 + \alpha_p H^2 s)^{-1},$$

$$A_j(s) = 2H^{-1} \int_0^H q(x, s) \cos(\gamma_j x/H) dx, \quad \alpha_p = c_p \rho_p \lambda_p^{-1}.$$

Возвращаясь к оригиналам и используя первые слагаемые рядов (остальные малы), получаем прежние пропорциональности

$$\Delta H_n(t) = K_n H T_0(t); \quad \Delta H_k(t) = K_k H T_0(t), \quad (8)$$

и дифференциальное уравнение для расчетной температуры $T_0(t)$:

$$\alpha_p H^2 \gamma_0^{-2} dT_0(t)/dt + T_0(t) = 0.5 q_0(t) H \lambda_p^{-1}; \quad q_0(t) = \rho_n v (R_{cp} \omega(t))^2 / h_0(t). \quad (9)$$

Условие статического равновесия уплотнительного кольца. Если зазор превышает размер шероховатостей в 3 раза или более, то наблюдается режим жидкостного трения. Здесь вращающееся кольцо не имеет контакта с неподвижным кольцом, и его равновесие достигается при равенстве

$$F_{np}(h_0) = F_{om}(h_0) + F_g$$

трех разнонаправленных сил – силы пружины $F_{np}(h) = F_{np,0} + z_{np} h$, силы тяжести F_g (в которой учтен закон Архимеда, а также третья часть массы движущихся витков пружины) и силы давления жидкости в зазоре

$$F_{om}(h_0) = \pi \int_0^H (R-x) p(x) dx, \quad (10)$$

где h_0 – начальный зазор на внешнем радиусе R кольца; z_{np} – коэффициент жесткости пружины; R – радиальная координата сечения; $p(x)$ – эпюра избыточного давления нефти в зазоре, которая удовлетворяет известному дифференциальному уравнению [5]

$$dp/dx = -12 \rho v u / h^2,$$

или, если от скорости течения u перейти к потоку массы $\dot{m} = 2\pi(R-x)hu$, уравнению вида

$$dp/dx = -[6\dot{m}v_0 / (\pi R h_0^3)] [\delta_r(x) / (\delta_r(x) \delta_h^3(x))]; \quad (11)$$

Здесь

$$\delta_r = (R-x)/R, \quad \delta_h = (h-h_0)/h_0, \quad \delta_v = v/v_0$$

– это относительные значения радиуса, зазора и кинематической вязкости в сечении x ; v_0 – значение вязкости на входе в уплотнение.

Для дифференциального уравнения (11) решена краевая задача с граничными условиями

$$p(0) = \Delta p, \quad p(H) = 0,$$

где Δp – заданный перепад давления на щели, из которого вычитается поправка на центробежную силу Кориолиса

$$\Delta p_k = 0.5 \rho_{cp} V_{m,cp}^2;$$

$V_{m,cp}$ – средняя тангенциальная скорость жидкости в зазоре, в исследуемом ЛВН на рабочем режиме

$$V_{m,cp} \approx 5.5 \text{ м/с};$$

ρ_{cp} – средняя плотность жидкости. После чего результат решения подставляется в интеграл (10).

Если принять, что зазор и вязкость по длине зазора не изменяются, то интегрирование дает значение силы

$$F_{om}(h_0) = f_k k_R \Delta p / 2,$$

где f_k – это площадь кольца; а поправка $k_R \approx 1 + 0.5 H / R_{cp}$ учитывает конусность, вызванную кольцевой фор-

мой зазора; она присутствует во всех дальнейших результатах.

Учтем, что величины $\delta v(x)$ и $\delta h(x)$ изменяются вместе с изменением температуры:

$$\delta v(x) = 1 + K_v (T_n(x) / \Delta T_n); \quad \delta h(x) = 1 + \alpha_p (2H / h_0) k_H (T_n(x) / \Delta T_n),$$

где $k_H = Kp(\Delta a) / Ks(\Delta a) \approx 0.8$; $\Delta T_n = T_n(H)$; K_v – индекс вязкости при $t_{nn} = 120^\circ C$ (рис. 2).

Причем поправка $\delta v(x)$ мало отличается от 1, поэтому

$$\delta_v(x) / (\delta_h(x))^3 \approx \Psi(x) = (1 + \delta T_n(x) / \Delta T_n)^{-3},$$

где $\delta = \Delta T_n (\alpha_p (2H / h_0) k_H - K_v / 3)$.

Использование функции $\Psi(x)$ в уравнении (11), а затем в интеграле (10), приводит к следующему результату:

$$F_{om}(h_0) = f_k k_R (\Delta p / 2) [1 + 0.45 \delta / (1 - 0.4 \delta)]. \tag{12}$$

В частности, если $\delta \approx 1$, то есть конусность зазора приводит к практически полному перекрытию течения у внутреннего радиуса кольца, то

$$F_{om}(h_0) \approx f_k \cdot \Delta p,$$

и это максимальная отрывающая сила, которую можно получить при жидкостном режиме трения. Однако если на рабочем режиме ЛВН получить такой результат (за счет соответствующей затяжки пружины), то это может привести к перегреву уплотняющего кольца.

Для исследуемого уплотнения связь между вязкостью ν , наружным зазором h_0 и максимальной температурой нагрева ΔT_n нефти в зазоре определяется равенством:

$$\Delta T_n = Ks(\Delta a) [\rho_n \nu (R_{cp} \omega)^2 / (\lambda_p / H)] / (h_0 - 2k_H \alpha_p H \Delta T_n), \tag{13}$$

откуда несложно выразить высоту зазора через значения вязкости и температуры:

$$h_0 = Ks(\Delta a) [\rho_n \nu (R_{cp} \omega)^2 H / \lambda_p] / \Delta T_n + 2k_H \alpha_p H \Delta T_n,$$

Далее использована формула (12), которая была переписана в следующем виде:

$$F_{om}(h_0) = f_k k_R (\Delta p / 2) [1 + \delta F],$$

где

$$\delta F = \Delta T_n A_T; \quad A_T = [0.9(\alpha_p H k_H / h_0 - K_v / 6)] / (1 - 0.8 \alpha_p H k_H \Delta T_n). \tag{14}$$

Коэффициент δF указывает долю отталкивающей силы, которая была приобретена после нагрева кольца. На рис. 5, а для параметров анализируемого уплотнения построены графики, соответствующие зависимостям (13), (14) при максимально допустимом значении $\Delta T_n = 6.5^\circ C$, а также при $5^\circ C$ и $8^\circ C$.

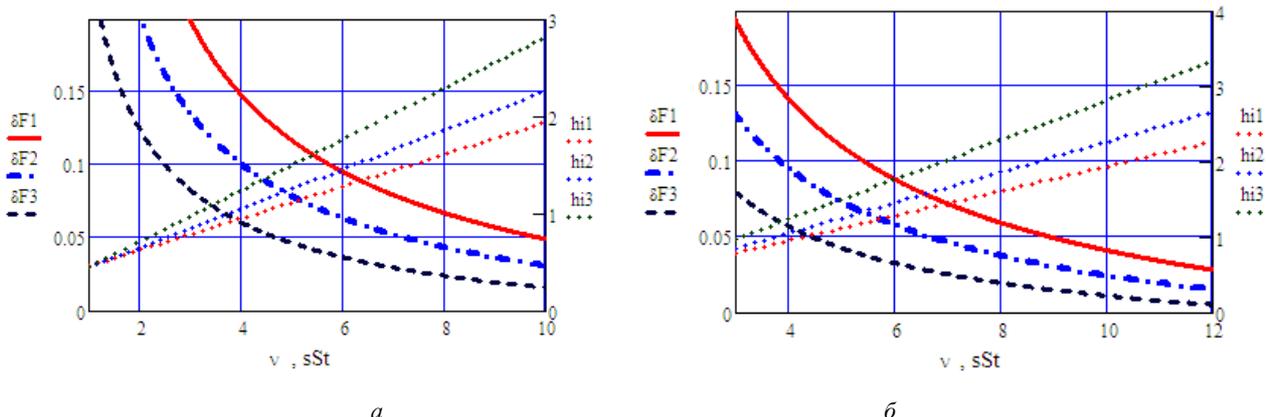


Рис. 5 – Коэффициенты δF увеличения подъемной силы и начальные зазоры hi , мкм при перепаде температур $8^\circ C$ (кривые 1), $6.5^\circ C$ (кривые 2) и $5^\circ C$ (кривые 3) и температуре нефти:

$a - 120^\circ C$; $b - 20^\circ C$.

При вязкости $\nu = \nu_{cp} = 2$ сСт зазор h_0 составляет 0.65 мкм, а на внутреннем радиусе он уменьшается до 0.45 мкм, 0.5 мкм и 0.4 мкм, соответственно. Если затяжка пружины выбрана и остается неизменной, то и коэффициент δF не изменяется. Как видим, при одинаковых значениях δF увеличение вязкости приводит к повышению установившегося перепада температуры, и, следуя этому правилу, затяжку нужно назначать по самой большой вязкости, где $\delta F \approx 1$, и осуществить столь тонкую настройку сложно. Но если флуктуация вязкости занимает малое время, то, как покажем далее, и перепад температуры будет изменяться мало. Поэтому затяжку

пружини нужно рассчитывать исходя из средней вязкости нефти.

В формуле (14) на изменение подъемной силы влияют два фактора: тепловое расширение колец увеличивает эту силу, а уменьшение вязкости с ростом температуры – уменьшает. При вязкости $\nu_{cp} = 2$ сСт первый фактор сильнее второго на порядок, но при больших вязкостях (по причине увеличения зазора) этот разрыв сокращается. Если значительно уменьшить температуру (рис. 5, б), то при увеличенных вязкостях $\nu > 6$ сСт настроить уплотнение на работу в режиме жидкостного трения станет сложно.

Моделирование движения кольца на переходных режимах. Как следует из (9), время тепловой инерции колец составляет

$$\tau_T = \alpha_p H^2 \gamma_0^{-2} \approx 1.6 \text{ с},$$

но при движении кольца действуют более сильные факторы, замедляющие переходные процессы. Рассмотрим одномерное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости по зазору переменной и изменяющейся высоты $h(x, t)$, описываемое известными уравнениями (здесь $S = 2\pi(R-x)h(x)$ – это площадь кольцевого сечения зазора):

$$\partial \dot{m} / \partial t + u \partial \dot{m} / \partial x + S \partial p / \partial x + 12\nu \dot{m} / h^2 = 0; \quad \partial(\rho S) / \partial t + u \partial(\rho S) / \partial x + \partial \dot{m} / \partial x = 0.$$

Скорость течения мала, поэтому конвективными слагаемыми пренебрегаем:

$$\partial p / \partial x = -12\nu \dot{m} / (S h^2) - \rho \dot{u}; \quad \partial \dot{m} / \partial x = -(\dot{\rho} + \dot{h} / h) S,$$

а ускорение \dot{u} , в силу не сжимаемости жидкости, считаем пропорциональным осевому ускорению кольца:

$$\dot{u} = [(x - 0.5H) / h] d^2 h / dt^2.$$

Интегрирование уравнения

$$dp / dx = -\rho [(x - 0.5H) / h] d^2 h / dt^2$$

при граничных условиях $p(0) = 0$, $p(H) = 0$ и подстановка результата в интеграл (10) приводит к появлению силы инерции

$$F_{ин} = m_{np} d^2 h / dt^2,$$

где m_{np} – масса жидкости в зазоре, приведенная к кольцу,

$$m_{np} = (1/3) \rho f_k k_R h (0.5H / h)^2.$$

Заметим, что масса m_{np} увеличивается пропорционально уменьшению зазора и на рабочих режимах уплотнения превышает массу m_k движущегося кольца (к которой, по известному правилу, приведена инерционная масса витков пружины) в несколько раз.

Уравнение

$$\partial p / \partial x = -12\nu \dot{m} / (S h^2)$$

совпадает с (11), но величина потока массы \dot{m} в силу нестационарности процесса для различных сечений может быть разной. Заметим, что в правой части второго уравнения плотность жидкости изменяется вместе с ее температурой, и

$$\dot{\rho} = -[\alpha_n + \alpha_p (2H / h)(k_H T_n(x) / \Delta T_n + K_n)] \rho \Delta \dot{T}_n,$$

где α_n – коэффициент теплового расширения нефти; $\alpha_n \approx 0.012$ 1/°C, а $\dot{h}(0, t) = dh / dt$ – это скорость осевого перемещения кольца; $K_n = Kn(\Delta a) / Kp(\Delta a) \approx 0.6 \dots 0.8$ (рис. 4).

Чтобы определить величину \dot{m} , выполнили интегрирование второго уравнения:

$$\dot{m}(x) = \dot{m}(0) - \int_0^x [\dot{\rho}(z) + \dot{h}(z) / h(z)] S(z) dz,$$

после чего эту функцию по отработанной процедуре подставили в уравнение (11) и интеграл (10). В результате получили следующую формулу для отрывающей силы:

$$F_{ом} = f_k k_R (\Delta p / 2) [1 + A_T \Delta T_n] - m_{np} d^2 h / dt^2 - 12 m_{np} (\nu / h^2) dh / dt + 12 m_{np} (\nu / h^2) B_T \Delta \dot{T}_n,$$

где $B_T = K_T (\alpha_n + \alpha_p (2H / h) \cdot k_H)$; $K_T = 1/15 + K_n / 12$.

Учитывая силы пружины и инерции кольца, получаем уравнение осевых колебаний:

$$(m_k + m_{np}) d^2 h / dt^2 + (12\nu / h^2) m_{np} dh / dt + z_{np} h = f_k k_R (\Delta p / 2) [1 + A_T \Delta T_n] + (12\nu / h^2) m_{np} B_T \Delta \dot{T}_n + F_g - F_{np,0} - 2 z_{np} K_n \alpha_p H \Delta T_n. \quad (15)$$

Последним слагаемым в правой части (15), которое учитывает деформацию пружины, вызванную тепловым расширением уплотнительных колец, можно пренебречь.

Заметим, что масса m_{np} увеличивается пропорционально изменению зазора и на рабочих режимах уплотнения превышает массу m_k в несколько раз.

Изменяющаяся часть силы зависит от температуры и скорости изменения температуры, которая определяется из уравнения (9). Равенства (9), (16) дополняются уравнением, описывающим угловые колебания $\psi(t)$ уплотняющего кольца относительно вала:

$$j_{кр} d^2\psi / dt^2 + f_k (\rho v / h) R_{cp}^2 d\psi / dt + z_{кр} \psi = f_k (\rho v / h) R_{cp}^2 \omega, \tag{16}$$

где $j_{кр}$, $z_{кр}$ – момент инерции кольца и крутильная жесткость пружины, а формула (9) для потока тепла уточняется и получает такой вид:

$$q_0(t) = \rho_n v (R_{cp}(\omega(t) + d\psi / dt))^2 / h_0(t).$$

Таким образом, динамика уплотнения описывается системой трех нелинейных дифференциальных уравнений и имеет 5-ый порядок.

Частотный анализ и упрощение модели. Линеаризация системы уравнений (9), (15), (16) и анализ частот ее свободных колебаний показал, что в переходном процессе уплотнения присутствуют затухающие периодические и аperiodические колебания. Периодические угловые колебания вращающегося кольца имеют частоту около 12 Гц и декремент затухания, увеличивающийся по мере уменьшения зазора; указанные величины в основном определяются коэффициентами уравнения (16). Аperiodический процесс изменения радиального перепада температуры в зазоре имеет *постоянную времени*

$$\tau_T \approx 1.6 \text{ с},$$

которая, в основном, определяется коэффициентами уравнения (9).

Осевые перемещения кольца имеют две постоянные времени:

$$\tau_{h,1} = (1 + m_k / m_{np})^{-1} h^2 / (12\nu) \approx h^2 / (12\nu) < 10^{-6} \text{ с}, \quad \tau_{h,2} = 12(m_{np} / z_{np}) \nu / h^2 \approx 10^2 \dots 10^3 \text{ с}$$

Как видим, первый процесс является слишком скоротечным, и при моделировании его учитывать не нужно. Для его устранения достаточно исключить из уравнения (15) силу инерции. В результате получили уравнение движения, имеющее первый порядок:

$$dh / dt = [h^2 / (12\nu m_{np})] [f_k k_R (\Delta p / 2) [1 + A_T \Delta T_n] + F_g - F_{np,0} - z_{np} h] + B_T \dot{\Delta T}_n. \tag{17}$$

Результаты решения тестовых задач. На рис. 6 – 9 приведены результаты расчета переходных процессов, вызванных различными факторами. Изменение величин показано в относительной форме:

$$\delta h = h(t) / h_0, \quad \delta \psi = \psi(t) / \psi(0), \quad \delta T = \Delta T_p(t) / \Delta T_p(0), \quad \delta Fd = Fd(t) / F_{np,0},$$

где Fd – это сумма активных сил, приложенных к кольцу (без учета силы трения); аргумент t , как и ранее, обозначает время и измеряется в секундах.

На рис. 8 величины δh и δT показаны в процентах и долях процента.

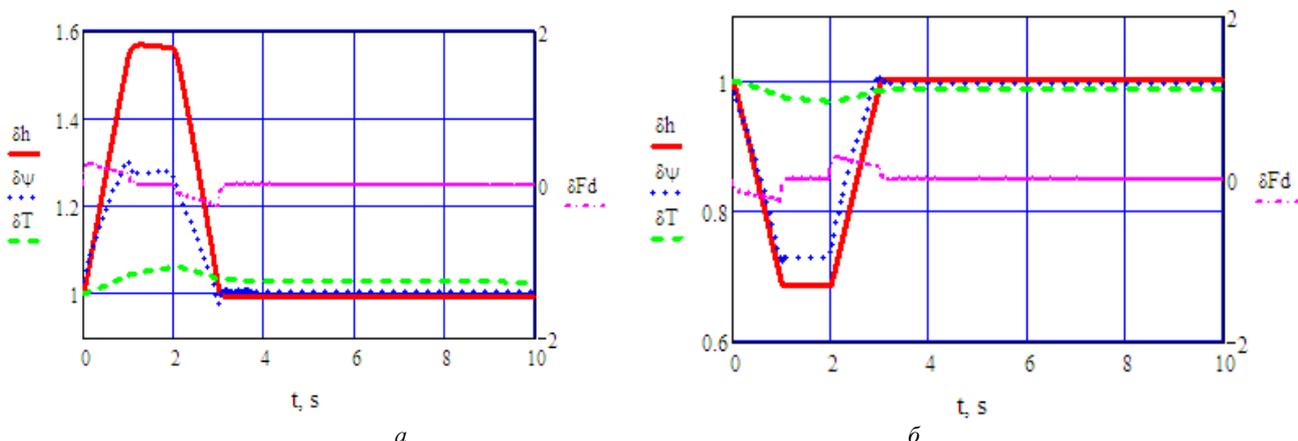


Рис. 6 – Флуктуации вязкости (в 2 раза): а – в большую; б – в меньшую стороны.

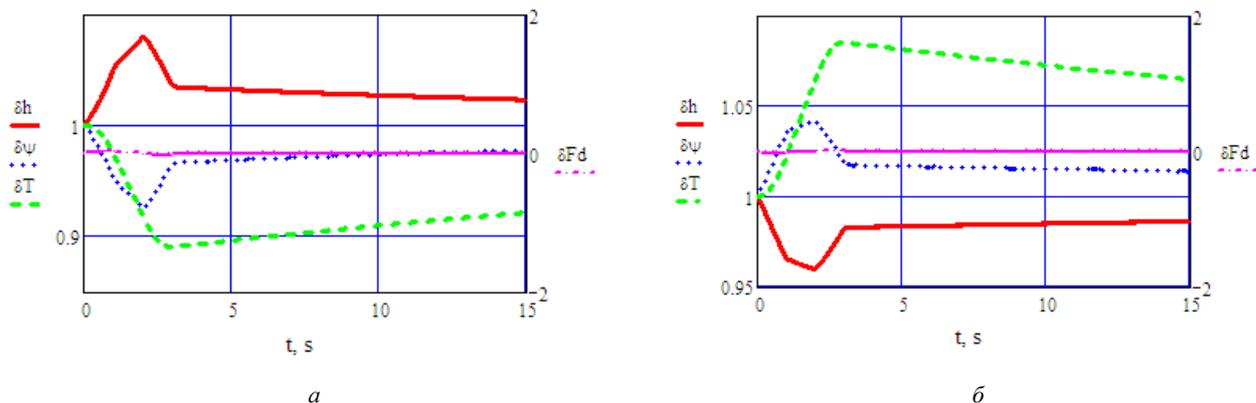


Рис. 7 – Флуктуации перепада давления (в 2 раза): а – в большую; б – в меньшую стороны.

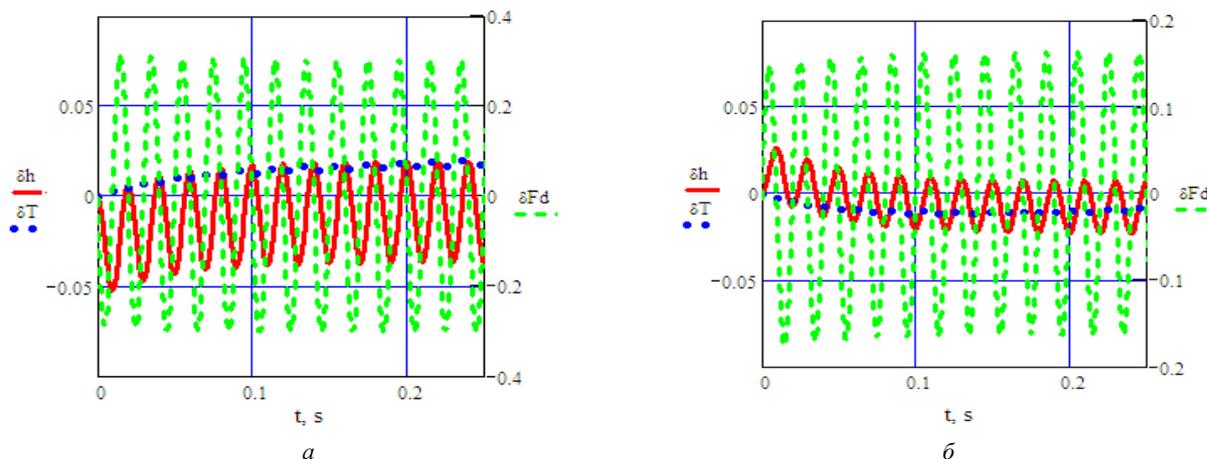


Рис. 8 – Вынужденные колебания частотой 50 Гц:
 а – осевая вибрация корпуса амплитудой 0.2 мм; б – неравномерность подачи насосов 2.5%.
 Величина δh показана в процентах, а δT – в десятых долях процента (промиллях).
 Время t отсчитывается от начала действия причины колебаний.

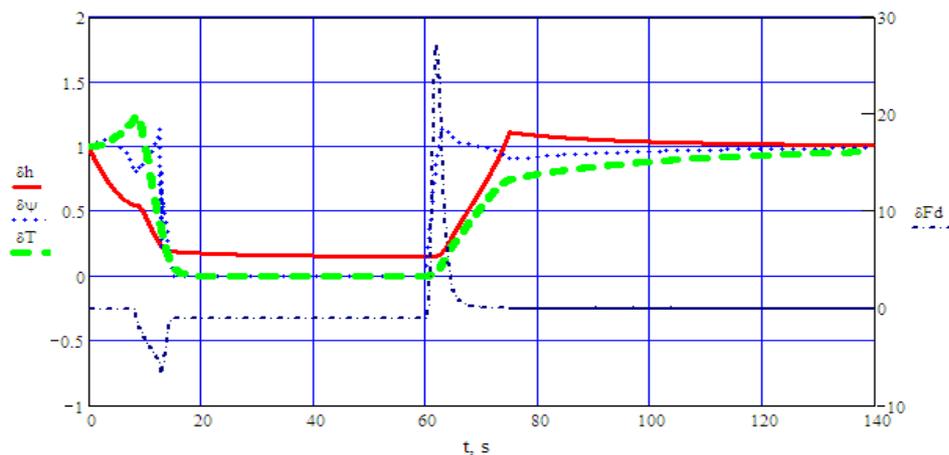


Рис. 9 – Моделирование сбоя подачи электроэнергии длительностью 60 с.

Анализируя графики, можно прийти к выводу, что силы трения эффективно демпфируют действие возмущений, благодаря чему сохраняется герметичность. Утечки нефти через торцевой зазор не превышают 0.5 г/ч, что для данного устройства считается допустимым.

Кроме того, в этих процессах не наблюдается существенного перегрева колец.

Заключение. Чтобы обеспечить устойчивую работу торцевого уплотнения в режиме жидкостного трения конструктору необходимо создать дополнительную гидродинамическую силу, стремящуюся увеличить зазор между кольцами при повышении частоты вращения вала или прижимающей силы. Авторы ушли от традиционного представления, что причиной возникновения этой силы является шероховатость или волнистость поверхностей, и тому есть объяснения. Максимальный размер неровностей на шлифованной поверхности кольца из ре-

лита не превышает 0.03 мкм, что на порядок меньше, чем рабочий зазор. Кроме того, релит – это на 96 % (по массе) вольфрам, и его высокая твердость препятствует увеличению шероховатости в процессе эксплуатации, что происходит с уплотнениями из мягких композитных материалов.

Оказалось, что возникновение и изменение дополнительной подъемной силы можно объяснить неравномерными температурными деформациями колец, которые приводят к появлению конусности зазора. Отсутствие эмпирики в формуле подъемной силы позволило с единых позиций объяснить статику и динамику уплотнения. Расчетные уравнения отображают известные из литературы факторы, но в замкнутой форме они рассматриваются и используются впервые.

Далее авторы планируют уточнить модель: учесть тепловой поток, идущий от вала, а также закономерные пластические деформации уплотняемых поверхностей, возникающие во время эксплуатации. После чего будет искать пути идентификации модели, но, если принять во внимание экстремальные значения давления и температуры нефти, сделать это будет сложно.

Список литературы

1. Андренко П. М., Лебедев А. Ю. Лабіринтно-гвинтові насоси. – Харків, 2017. – 156 с.
2. Эйгельсон А. С., Шейх-али Д. М. Расчет плотности и вязкости пластовой нефти по данным поверхностной дегазации // Геология нефти и газ. – 1989. – № 11.
3. Майер Э. Торцовые уплотнения. – М. : Машиностроение, 1978. – 288 с.
4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. – М. : Мир, 1983. – 381 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газов. – М. : Наука, 1978. – 736 с.

References (transliterated)

1. Andrenko P. M., Lebedev A. Yu. *Labiryntno-gvintovi nasosy* [Labyrinth screw pumps]. Kharkiv, 2017. 156 p.
2. Eygel'son A. S., Sheykh-ali D. M. Raschet plotnosti i vyazkosti plastovoy nefti po dannym poverkhnostnoy degazatsii [Calculation of density and viscosity of layer oil by data of surface degassing]. *Geologiya nefti i gaza* [Geology of oil and gas]. 1989, no. 11.
3. Mayer E. *Tortsovyye uplotneniya* [Mechanical seals]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1978. 288 p.
4. Farlou S. *Uraveneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh sotrudnikov* [Partial differential equations for researchers and engineers]. Moscow, Mir Publ., 1983. 381 p.
5. Loityanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gazov* [Mechanics of liquids and gases]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 736 p.

Поступила (received) 16.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Динамічний аналіз торцевих ущільнень ротора лабіринтно-гвинтового насоса / П. М. Андренко, А. Ю. Лебедев, О. Л. Григор'єв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 12 – 20. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Динамический анализ торцевых уплотнений ротора лабиринтно-винтового насоса / П. Н. Андренко, А. Ю. Лебедев, А. Л. Григорьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 12 – 20. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Dynamic analysis of the mechanical seals of the rotor of the labyrinth screw pump / P. M. Andrenko, A. J. Lebedev, A. L. Grigoriev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 12 – 20. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андренко Павло Миколайович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 103-88-83; e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.

Андренко Павел Николаевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 103-88-83; e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.

Andrenko Pavlo Mykolayovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (067) 103-88-83; e-mail: kpi_mmtt@mail.ru.

Лебедев Антон Юрійович – кандидат технічних наук, інженер, ТОВ «ХЗТФ «Моторімпекс», м. Харків; тел.: (050) 842-14-04; e-mail: anton.kh@ukr.net.

Лебедев Антон Юрьевич – кандидат технических наук, инженер, ООО «ХЗТФ «Моторімпекс», г. Харьков; тел.: (050) 842-14-04; e-mail: anton.kh@ukr.net.

Lebedev Anton Yuriyovych – Candidate of Technical Sciences, Engineer at the LLC «KFTC «Motorimpex», Kharkov; tel.: (050) 842-14-04; e-mail: anton.kh@ukr.net.

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Ю. В. БАТЫГИН, Е. А. ЧАПЛЫГИН, С. А. ШИНДЕРУК, О. С. САБОКАРЬ

РЕЗОНАНС ВО ВТОРИЧНОМ КОНТУРЕ ТРАНСФОРМАТОРА ТЕСЛА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Из залученням математичного апарату теорії електричних ланцюгів без будь-яких гіпотез про будову матеріального світу проаналізовано процеси збудження вторинного контуру трансформатора Тесла гармонійним сигналом в умовах його максимальної ефективності. Визначено кількісні показники дієвості трансформатора в порівнянні з якісними рекомендаціями великого винахідника. Показано, що при резонансі у вторинній обмотці збуджується електрична рушійна сила, що багаторазово перевищує амплітуду, обумовлену індуктивним зв'язком обмоток трансформатора.

Ключові слова: трансформатор Тесла, резонанс, коефіцієнт перетворення енергії, резонансний контур.

С привлечением математического аппарата теории электрических цепей без каких-либо гипотез о строении материального мира проанализированы процессы возбуждения вторичного контура трансформатора Тесла гармоническим сигналом в условиях его максимальной эффективности. Определены количественные показатели действенности трансформатора в сравнении с качественными рекомендациями великого изобретателя. Показано, что при резонансе во вторичной обмотке возбуждается электрическая движущая сила, многократно превышающая амплитуду, обусловленную индуктивной связью обмоток трансформатора.

Ключевые слова: трансформатор Тесла, резонанс, коэффициент преобразования энергии, резонансний контур.

In the paper electromagnetic processes of resonant excitation of the secondary circuit of the Tesla transformer by a harmonic signal under conditions of the maximum voltage conversion efficiency are theoretically analyzed. The quantitative indicators of the transformer effectiveness in comparison with the qualitative recommendations of the great inventor are determined. It is shown that at the resonance in the secondary circuit an electromotive force is excited which exceeds the amplitude conditioned by the inductive coupling of the transformer coils. The integral voltage conversion coefficient obtained is proportional to the Q-factor of the secondary circuit, which is consistent with the Tesla's phenomenological statement that the Q-factor of the transformer secondary circuit and the voltage excited at its output are correlated. It is shown that the voltage conversion under resonance excitation and sufficiently large Q-factor of the secondary circuit occurs with efficiency much higher than the conversion at the expense of the inductive coupling between the primary and secondary circuits of the Tesla transformer.

Key words: Tesla transformer, resonance, coefficient of energy conversion, resonant circuit.

Введение. 22 сентября 1896 года *Никола Тесла* получил патент США на «Аппарат для производства электрических токов высокой частоты и потенциала». Предложение автора было реализовано с помощью устройства, получившего в специальной литературе название *трансформатора Тесла* [1].

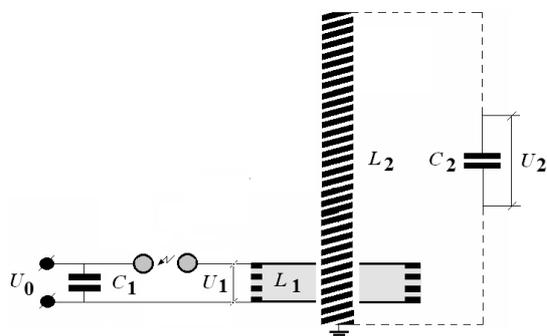


Рис. 1 – Простейшая иллюстративная схема трансформатора Тесла: L_1C_1 – первичный контур; L_2C_2 – вторичный контур; $U_{1,2}$ – напряжения на первичной и вторичной обмотках, соответственно.

Принцип его действия (рис. 1) был достаточно прост [1 – 3]. Предварительно заряженный конденсатор C_1 разряжается в цепи первичной обмотки L_1 , которая содержит несколько витков провода большого сечения. Временная форма разряда – гармоническая зависимость. Вторичная обмотка L_2 , в свою очередь, содержит значительно большее число витков из провода меньшего диаметра, причем лишь малая часть вторичной обмотки индуктивно связана с первичной, в то время, как остальная часть вторичной обмотки выступает в роли независимой индуктивности. Вторичный контур не замкнут и протекание тока в нём обусловлено наличием эквивалентной распределённой ёмкости C_2 между высоковольтным и заземлённым выводом вторичной обмотки.

Отличительной особенностью трансформатора Тесла является необычайно высокий коэффициент преобразования напряжения ($k > 1000$), намного превышающий его величину, обусловленную индуктивной связью между обмотками.

Согласно мнению великого учёного, данный факт объясняется извлечением дополнительной энергии из внешней субстанции, пронизывающей всё окружающее пространство и названной *эфиром*. Н. Тесла считал, что мы «купаемся в море энергии эфира», потоки которой это, в частности, и потоки электричества [1].

Точка зрения великого учёного получила поддержку и в современных научных работах, например [4 – 7], где предложены различные гипотезы и показано, что получение дополнительной (*радиантной* [5, 6] или *свободной* [7, 8]) энергии из окружающего пространства не противоречит законам сохранения, потому что энергия, как непрямая субстанция материального мира, нигде и никогда не исчезает и не появляется. Она просто трансформируется из одного вида в другой [6, 7]. Попытки перейти от теории к практике, и создать реальные устройства для извлечения энергии из окружающего пространства, описаны разными авторами [4, 5, 10, 11]. И хотя, как следует из открытых публикаций, говорить о действительных успехах в этом направлении ещё рано, но,

безумовно, можна считать, что практические возможности трансформатора Тесла, как преобразователя энергии, далеко не исчерпаны известными и малозначимыми практическими приложениями [8, 9].

В этой связи продолжение поисковых работ представляется достаточно актуальным. И здесь, в первую очередь, необходимо развитие адекватных физико-математических моделей, на базе которых можно описать процессы, происходящие в трансформаторе Тесла, в терминах рекомендаций его автора. Успешность этих работ позволит перейти от «устройства генерирования тока высокой частоты при очень высоком выходном напряжении, но весьма малой интенсивности [12]», к созданию, по крайней мере, реального усилителя мощности электрических сигналов.

Анализ последних исследований. Сразу следует отметить, что в современной научной периодике встречается достаточно много публикаций, посвящённых трансформатору Тесла. В представленном списке литературы выбраны основные работы, где помимо собственного предмета исследований имеются достаточно обширные обзорные материалы, охватывающие практически всё, что было наработано учёными, инженерами и конструкторами до настоящего времени.

Вначале идёт общая характеристика публикаций и выделение основных направлений с соответствующими результатами проведенных исследований.

Первые, – это работы, посвящённые резонансным эффектам с определением рабочих частот и возбуждаемым напряжениям [12 – 14, 19, 20, 23]. Вторые, – это исследования, направленные на повышение эффективности процессов генерирования высоковольтных сигналов. Здесь расчёты и измерения пространственно-временного распределения электрического поля вдоль вторичной обмотки трансформатора, определение характеристик электромагнитной связи между обмотками, наконец, подавление высших типов колебаний в спектре возбуждаемого напряжения [15 – 17]. Третьи, – это конструкторские решения, конкретные проекты и описание полученных показателей действенности выполненных разработок [16, 18 – 23].

Следует отметить, что разделение цитируемых работ по направлениям исследований является весьма условным, поскольку в каждой из них в большей или меньшей степени присутствуют все аспекты указанных проблем по трансформатору Тесла.

Оставим конструкции вне проводимого рассмотрения и сконцентрируем внимание на результатах, представляющих наибольший интерес как предмет дальнейшего развития в рамках настоящей работы.

Так, нельзя согласиться с исходной физической предпосылкой о влиянии вторичного тока на процессы возбуждения первичного контура трансформатора при исследовании резонансных эффектов. Фактически, цепь вторичного контура замкнута распределённой ёмкостью. Протекающий ток крайне незначителен, и его влияние на энергообмен между обмотками не может быть существенным. Этот вывод подтверждается достаточно малым коэффициентом электромагнитной связи между обмотками и, соответственно, возбуждением вторичного контура на *антирезонансной частоте*, практически равной частоте резонанса. То есть, в терминах классической электротехники трансформатор Тесла работает в режиме холостого хода [24, 25].

В большинстве цитируемых работ ёмкость вторичного контура рассматривается как паразитный параметр межвитковой электрической связи, и все вычисления выполнены в пренебрежении распределённой ёмкостью, зависящей от окружения вторичной обмотки. В этой связи результаты расчётов рабочих частот, пространственно-временного распределения возбуждаемого напряжения вдоль катушки вторичного контура, влияния взаимной индуктивности обмоток и вклада высших мод на временную форму выходного сигнала представляются достаточно сомнительными.

Не выдерживают критики вычисления возбуждаемого напряжения с помощью закона сохранения энергии, поскольку в этом случае отсутствует резонансный фактор необычайно высокого роста коэффициента преобразования напряжения.

Заканчивая обзор цитируемых работ, следует отметить, что, по мнению авторов [15], все выше представленные подходы к описанию процессов в трансформаторе Тесла не дали убедительных результатов.

В целом, как следует из проведенного анализа, многочисленные научные публикации содержат лишь фрагментарные вычисления и не содержат последовательной «замкнутой» теории резонансных электромагнитных процессов в трансформаторе Тесла. Как следствие, и это главное, отсутствуют попытки согласования с фундаментальными рекомендациями Николы Тесла, обеспечивающими достижение максимума эффективности преобразования напряжения. Основные из них перечислены ниже [1]:

- резонансное возбуждение вторичного контура;
- добротность вторичного контура – $Q_2 = \omega L_2 / R_2$ должна быть достаточно большой, то есть, $Q_2 \gg 1$;
- Q_1 – добротность первичного контура должна быть достаточно малой, то есть $Q_1 \ll Q_2$;
- величина энергии, снимаемой в нагрузку, должна быть намного меньше энергии, генерируемой вторичным контуром (≤ 1 %).

Постановка задачи. Задачей анализа является определение выходного напряжения трансформатора Тесла как зависимости, связывающей количественные характеристики разнородных физических явлений (электромагнитной индукции и резонанса), согласующейся с соответствующим качественным выводом изобретателя и полученной с помощью простейшей модели резонансного возбуждения вторичного контура трансформатора

гармоническим напряжением заданной частоты.

Математическая модель. Расчётная схема, где первичный контур рассматривается как независимый RLC – источник энергии (влияние вторичного контура пренебрежимо мало), представлена на рис. 2.

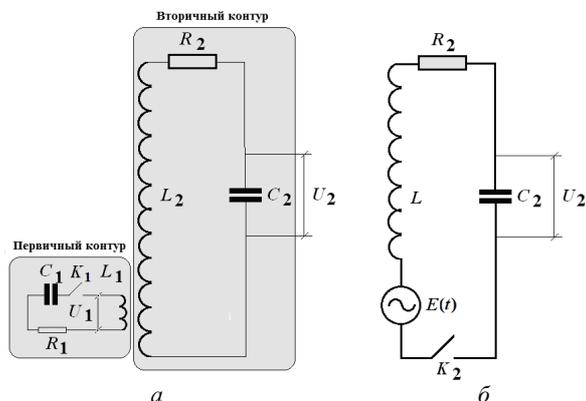


Рис. 2 – Схемы замещения трансформатора Тесла: а – электрическая; б – эквивалентная; $L_{1,2}$ – индуктивности; $C_{1,2}$ – ёмкости; $K_{1,2}$ – коммутаторы; $R_{1,2}$ – активные сопротивления контуров; $U_{0,1,2}$ и $E(t)$ – соответствующие напряжения.

- Ёмкость C_2 на схеме замещения представляет собой эквивалентный схемный параметр, величина которого устанавливается всеми электрофизическими процессами в трансформаторе и определяется по заданной индуктивности вторичной обмотки из результирующего значения рабочей частоты.

- Исследование процесса в резонансном вторичном контуре начинается с переходного режима. Начальные условия $U_2(0) = (d/dt)U_2(0) = 0$.

- Добротность вторичного контура соответственно рекомендации Н.Тесла, должна быть достаточно большой, то есть $Q_2 \gg 1$.

- Особо подчеркнём, что рассмотрение проводится с помощью известных методов теории цепей без привлечения каких-либо гипотетических представлений о природе материального мира [24, 25].

Вывод расчётных соотношений. Согласно принятой постановке задачи первичный контур есть независимый генератор гармонического напряжения, трансформируемого (с коэффициентом преобразования k_1) через индуктивную связь в цепь вторичного последовательного активно-реактивного контура. В этой связи возбуждение последнего можно рассматривать как процесс вынужденных колебаний под действием внешней гармонической силы, и уравнение для напряжения на ёмкости вторичного контура, возбуждаемого полем обмотки первичного контура, можно записать в виде [24, 25]:

$$\frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dU_2(t)}{dt} + \omega_{20}^2 U_2(t) = (\omega_{20}^2 k_1) U_{1m} \sin(\omega_1 t), \quad (1)$$

где $\omega_{20} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ и $\delta_2 = R_2 / 2L_2$ – собственная частота и коэффициент затухания контура вторичной обмотки трансформатора Тесла, соответственно.

Общий интеграл уравнения (1) можно представить в виде суммы общего решения однородного $U_{20}(t)$ и частного решения соответствующего неоднородного уравнения $U_{21}(t)$ [25, 26]:

$$U_2(t) = U_{20}(t) + U_{21}(t), \quad (2)$$

где $U_{20}(t) = e^{-\delta_2 t} [A_1 \cos(\omega_2 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)]$; A_1, A_2 – произвольные постоянные интегрирования;

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{20}^2 - \delta_2^2}; \quad (3)$$

$$U_{21}(t) = \frac{(\omega_{20}^2 k_1) U_{1m}}{(\omega_{20}^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta_2 \omega_1)^2} [(\omega_{20}^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t) - (2\delta_2 \omega_1) \cos(\omega_1 t)].$$

Полученное выражение (2) можно проверить предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ с последующим допущением $\delta_2 \rightarrow 0$. С физической точки зрения речь идёт о стационарном режиме в отсутствие активных потерь во вторичном контуре.

- Первичный контур – генератор синусоидального напряжения на индуктивности L_1 с частотой ω_1 и постоянной амплитудой

$$U_{1m}, U_1(t) = U_{1m} \cdot \sin(\omega_1 t).$$

- Первичная обмотка индуктивно связана с вторичной так, что её витки w_1 частично покрывают соответствующее число витков вторичной обмотки $w_2^{(1)}$.

- Вторичная обмотка трансформатора Тесла разомкнута, вследствие чего влиянием вторичной обмотки на электромагнитные процессы в первичном контуре можно пренебречь и считать, что коэффициент трансформации по напряжению будет равен $k_1 = w_2^{(1)} / w_1$.

Из (2) с учетом (3) находим, что

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta_2 \rightarrow 0}} U_2(t) = \frac{\omega_{20}^2 U_{1m}}{\omega_{20}^2 - \omega_1^2} \sin(\omega_1 t) \Big|_{\omega_1 \rightarrow \omega_{20}} = U_2(t) \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Результат (4) – это хорошо известная зависимость, переход к которой свидетельствует о достоверности формулы (2) [24, 25].

Удовлетворяя нулевым начальным условиям в выражении (3), находим напряжение на ёмкости вторичного контура трансформатора Тесла.

В соответствии с постановкой задачи должна выполняться рекомендация Н. Тесла: $Q_2 \gg 1$. Это означает что $Q_2 = \omega_{20} L_2 / R_2 = 0,5 \omega_{20} / \delta_2 \gg 1$.

$$U_2(t) = \frac{(\omega_{20}^2 k_1) U_{1m}}{(\omega_{20}^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta_2 \omega_1)^2} \times \left[\begin{aligned} & e^{-\delta_2 t} \frac{\omega_1}{\omega_2} \left((2\delta_2 \omega_2) \cos(\omega_2 t) + (2\delta_2^2 - (\omega_{20}^2 - \omega_1^2)) \sin(\omega_2 t) \right) + \\ & + (\omega_{20}^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t) - (2\delta_2 \omega_1) \cos(\omega_1 t) \end{aligned} \right]. \quad (5)$$

Следовательно, $\delta_2 / \omega_{20} \sim 1 / Q_2 \ll 1$ есть бесконечно малая величина [26].

В выражении (5) пренебрежём бесконечно малыми величинами второго порядка и выше относительно $\sim (\delta_2 / \omega_{20})$. В этом случае можно считать, что $\omega_2 \approx \omega_{20}$. Кроме того, введём условие резонанса и примем, что резонансная частота и частота возбуждения системы равны между собой, $\omega_1 \approx \omega_{20}$.

После выполнения необходимых тождественных преобразований получим временную зависимость для резонансного напряжения на ёмкости вторичного контура трансформатора Тесла [26].

$$U_2(t) \approx \left(\frac{k_1}{2} \right) U_{1m} \left[2Q_2 \cos(\omega_1 t) \cdot (1 - e^{-\delta_2 t}) \right] \quad (6)$$

В установившемся режиме, когда $t \gg 1 / \delta_2 = 2L_2 / R_2$, пренебрегая малыми величинами порядка $(1 / Q_2)^2$ и выше, из выражения (6) находим что

$$U_2(t) \rightarrow (k_1 Q_2) U_{1m} \cos(\omega_1 t). \quad (7)$$

Из (7) получаем коэффициент преобразования напряжения в трансформаторе Тесла:

$$K_{Tesla} \rightarrow k_1 Q_2 \gg 1. \quad (8)$$

Полученный результат связывает количественные характеристики разнородных физических явлений (электромагнитной индукции и резонанса) и показывает, что трансформация напряжения при выполнении резонансных условий возбуждения и требования достаточно большой добротности вторичного контура происходит с эффективностью, намного превышающей трансформацию за счёт индуктивной связи между первичным и вторичным контурами, поскольку $K_{Tesla} / k_1 \rightarrow Q_2 \gg 1$, и, собственно $Q_2 \gg 1$.

Подчеркнём, что полученный результат (8) не требует дополнительной верификации, поскольку он коррелирует с соответствующими экспериментами Николы Тесла [1]. Кроме того, результат (8) является количественным показателем его феноменологического качественного указания о связи добротности вторичного контура трансформатора с напряжением, возбуждаемым на его выходе, то есть $U_{Tesla} \sim Q_2 = (\omega L_2 / R_2)$.

Основные результаты проведенного рассмотрения проиллюстрируем численными оценками для экспериментальной модели трансформатора Тесла. Для численных оценок полученных аналитических выражений составим программу численного расчета в продукте Wolfram Research Mathematica.

Результаты работы программы. В качестве исходных были приняты следующие данные.

1. Рабочая (резонансная) частота $f_1 = 300$ кГц, $\omega_1 = 2\pi f_1$.

2. Вторичный контур, параметры (рис. 2):

- диаметр каркаса для обмотки соленоида $D_2 = 0,075$ м;
- диаметр провода обмотки из меди с удельным сопротивлением $\gamma_2 = 5,58 \cdot 10^7$ 1/Ом·м составляет $d_2 = 0,00075$ м.

Вычисления:

- длина провода обмотки, $\zeta_2 = 249,886$ м;
- число витков $w_2 \approx 1061$;
- длина соленоида $l_2 \approx 0,8$ м;
- индуктивность соленоида $L_2 \approx 7850,4$ мкГн;
- величина скин-слоя $\Delta = 0,000093$ м;

- активное сопротивление с учётом скин-эффекта $R_2 = 18,06$ Ом;
 - величина ёмкости, найденной по рассчитанной индуктивности и заданной рабочей частоте $C_2 = 35,85$ пФ;
 - добротность $Q_2 = 819,338$.
3. Первичный контур, параметры (рис. 2):
- диаметр каркаса для обмотки соленоида $D_1 = 0,125$ м;
 - диаметр провода обмотки из меди $d_2 = 0,01$ м, число витков $w_1 = 6$;
 - $w_1 = 6$ витков первичной обмотки, общей шириной $\sim 0,06$ м, покрывают $w_2^{(1)} \approx 80$ витков вторичной обмотки;
 - коэффициент трансформации по индуктивной связи примем равным $k_1 = w_2^{(1)} / w_1 = 14$.
- Вычисления:
- индуктивность соленоида: $L_1 \approx 9,253$ мкГн;
 - величина активного сопротивления соленоида с учётом скин-эффекта: $R_{1i} = 0,01$ Ом;
 - величина дополнительного активного сопротивления для выполнения рекомендации Н.Тесла о минимизации возбуждающего воздействия: $R_1 = 1,0$ Ом.
 - величина ёмкости: $C_1 = 30417,7$ пФ;
 - относительный декремент затухания: $\delta_1 = 0,03$;
 - добротность: $Q_1 = 16,08$; $Q_2 = 819,338$, то есть $Q_1 \ll Q_2$.

Опираясь на результаты вычислений, находим, что интегральный коэффициент преобразования напряжения в трансформаторе Тесла будет равен $K_{Tesla} \approx k_1 Q_2 = 11466 \gg 1$. Этот результат количественно согласуется с данными самого Н.Тесла [1].

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными пути исследования, связанные с созданием источника энергии, у которого интегральный коэффициент преобразования напряжения будет больше единицы, $k \gg 1$, что позволит создать энергоэффективные источники.

Выводы. Таким образом, в данной работе с помощью математического аппарата теории электрических цепей без привлечения каких-либо гипотез о строении материального мира показано, что трансформация напряжения при резонансном возбуждении и достаточно большой добротности вторичного контура происходит с эффективностью, намного превышающей трансформацию за счёт индуктивной связи между первичным и вторичным контурами трансформатора Тесла.

Найденный интегральный коэффициент преобразования напряжения пропорционален добротности вторичного контура трансформатора Тесла, что всецело согласуется с феноменологическим утверждением изобретателя о связи добротности вторичного контура трансформатора с напряжением, возбуждаемым на его выходе.

Следует также заметить, что полученные результаты достоверны и не требуют дополнительной верификации, поскольку подтверждаются соответствующими экспериментами Николы Тесла.

Список литературы

1. Тесла Н. Лекции и статьи. – М.: Tesla Print, 2003. – 386 с.
2. Haddad Dr. A., Warne D. F. Advances in High Voltage Engineering. – Stevenage, United Kingdom: IET, 2009. – 668 p.
3. Naidu M. S., Kamaraju V. High-Voltage Engineering (Fifth Edition). – Tata McGraw-Hill Education, 2013. – 504 p.
4. Яворский В. Энергия из ниоткуда // Наука и жизнь. – 1998. – № 10. – С. 78 – 79.
5. Lindemann P. A. Tesla's Radiant Energy. – N.Y., 2000. – 36 p.
6. Эткин В. А. Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии). – Санкт-Петербург: Наука, 2008. – 409 с.
7. Эткин В. А. О потенциале и движущей силе лучистого энергообмена // Вестник Дома Учёных Хайфы. – 2010. – Т.20, – С. 2 – 6. – Режим доступа: <http://dom-uchenyh-0620092.narod.ru/VESTNIK-20.pdf>. – Дата обращения: 05 октября 2017.
8. Lindemann Piter. The Free Energy Secrets of Cold Electricity. – Publishing House: Clear Tech Inc, 2000. – 132 p.
9. Аюковский В. А. Физические основы электромагнетизма и электромагнитных явлений. Эфиродинамическая интерпретация. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 144 с.
10. "Tesla coil". Museum of Electricity and Magnetism, Center for Learning. National High Magnetic Field Laboratory website. – Florida State Univ., 2011. – Режим доступа: <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/demos/tesla-coils>. – Дата звращения: 05 октября 2017.
11. Plesch P. H. High Vacuum Techniques for Chemical Syntheses and Measurements. – Cambridge University Press, 2005. – 167 p.
12. Gerekos Ch. The Tesla Coil. – Belgium: Université Libre de Bruxelles, Brussels, 2012. – 77 p.
13. Spratt J. Physics Demonstrations: A Sourcebook for Teachers of Physics. – Univ. of Wisconsin Press, 2006. – 302 p.
14. Denicolai M. Optimal performance for Tesla Transformers // Review of Scientific Instruments. – 2002. – Vol. 73 (9). – pp. 3332 – 3336.
15. Voitkans J., Voitkans A. Tesla Coil Theoretical Model and its Experimental Verification // Electrical, Control and Communication Engineering. – 2014. – no. 7. – pp. 11 – 19.

16. Agheb E., Hayati Soolot A., Niayesh K., Hashemi E., Jadidian J. On the Optimum Design of Air-Cored Tesla Transformers // *Acta Physica Polonica*. – 2009. – Vol. 115 (6). – pp. 1152 – 1154.
17. Craven R. M., Smith I. R., Novac B. M. Optimizing the secondary coil of a Tesla transformer to improve spectral purity // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 2014. – Vol. 42 (1). – pp. 143 – 148.
18. Denicolai M. *Tesla Transformer for Experimentation and Research. Abstract of the licentiate thesis*. – Helsinki : Helsinki university of technology, 2001. – 96 p.
19. Tilbury M. *The Ultimate Tesla Coil Design and Construction Guide*. – McGraw-Hill, 2008. – 442 p.
20. Ацюковский В. А. Трансформатор Тесла: энергия из эфира. – Жуковский : ООО «Петит», 2004. – 24 с.
21. Желтков К. А. Пикосекундные сильноточные электронные ускорители. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 115 с.
22. Месяц Г. А. Импульсная энергетика и электроника. – М. : Наука, 2004. – 704 с.
23. Мысовский Л. В. Лабораторный метод получения высоких потенциалов // *Успехи физических наук*. – 1930. – Т. X. – №4. – С. 545 – 569.
24. Яворский Б. М., Детлаф А. А., Лебедев А. К. *Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов*. – М. : Изд. «Оникс», 2006. – 1056 с.
25. Атабеков Г. И. *Основы теории цепей*. – Ленинград : Энергия, 2006. – 220 с.
26. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

References (transliterated)

1. Tesla N. *Leksii i stat'i* [Lectures and articles]. Moscow, Tesla Print Publ., 2003. 386 p.
2. Haddad Dr. A., Warne D. F. *Advances in High-Voltage Engineering*. United Kingdom, Stevenage, IET Publ., 2009. 668 p.
3. Naidu M. S., Kamaraju V. *High-Voltage Engineering (Fifth Edition)*. Tata McGraw-Hill, Education Publ., 2013. 504 p.
4. Yavorskiy V. Energiya iz niotkuda [Energy from nowhere]. *Nauka i zhizn'* [Science and life]. 1998, no. 10, pp. 78–79.
5. Lindemann P. A. *Tesla's Radiant Energy*. New York, 2000. 36 p.
6. Etkin V. A. *Energodinamika (sintez teorii perenosa i obrazovaniya energii)* [Energy Dynamics (synthesis of transfer and energy conversion theories)]. Sankt Petersburg, Nauka Publ., 2008. 409 p.
7. Etkin V. A. O potentsiale i dvizhushchey sile luchistogo energoobmena [About the potential and the driving force of radiant energy exchange]. *Vestnik Doma Uchenykh Khai'fy* [Bulletin of Scientist's House (Haifa)]. 2010, vol. 20, pp. 2–6. Available at: <http://dom-uchenyh-0620092.narod.ru/VESTNIK-20.pdf>. (accessed 05.10.2017)
8. Lindemann P. *The Free Energy Secrets of Cold Electricity*. Publishing House, Clear Tech Inc Publ., 2000. 132 p.
9. Atsyukovskiy V. A. *Fizicheskie osnovy elektromagnetizma i elektromagnitnykh yavleniy. Efirodinamicheskaya interpretatsiya* [Physical fundamentals of electromagnetism and electromagnetic phenomena. Eirdynamic interpretation]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001. 144 p.
10. "Tesla coil". Museum of Electricity and Magnetism, Center for Learning. National High Magnetic Field Laboratory website, Florida State Univ. 2011. Available at: <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/demos/tesla-coils>. (accessed 05.10.17)
11. Plesch P. H. *High Vacuum Techniques for Chemical Syntheses and Measurements*. Cambridge University Press Publ., 2005. 167 p.
12. Gerekos Ch. *The Tesla Coil*. Belgium, Brussels, Université Libre de Bruxelles Publ., 2012. 77 p.
13. Sprott J. *Physics Demonstrations: A Sourcebook for Teachers of Physics*. Univ. of Wisconsin Press Publ., 2006. 302 p.
14. Denicolai M. Optimal performance for Tesla Transformers. *Review of Scientific Instruments*. 2002, vol. 73, no. 9, pp. 3332–3336.
15. Voitkans J., Voitkans A. Tesla Coil Theoretical Model and its Experimental Verification. *Electrical, Control and Communication Engineering*. 2014, no. 7, pp. 11–19.
16. Agheb H., Soolot A., Niayesh K., Hashemi E., Jadidian J. On the Optimum Design of Air-Cored Tesla Transformers. *Acta Physica Polonica*. 2009, vol. 115 no. 6, pp. 1152–1154.
17. Craven R. M., Smith I. R., Novac B. M. Optimizing the secondary coil of a Tesla transformer to improve spectral purity. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2014, vol. 42, no. 1, pp. 143–148.
18. Denicolai M. *Tesla Transformer for Experimentation and Research. Abstract of the licentiate thesis*. Helsinki, Helsinki university of technology Publ., 2001. 96 p.
19. Tilbury M. *The Ultimate Tesla Coil Design and Construction Guide*. McGraw-Hill Publ., 2008. 442 p.
20. Atsyukovskiy V. A. *Transformator Tesla: energiya iz efira* [Tesla coil: energy from air]. Zhukovskiy, ООО «Petit» Publ., 2004. 24 p.
21. Zheltkov K. A. *Pikosekundnye sil'notochnye elektronnye uskoriteli* [Picosecond high-current electron accelerators]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 115 p.
22. Mesyats G. A. *Impul'snaya energetika i elektronika* [Pulsed power engineering and electronics]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 704 p.
23. Mysovskiy L. V. *Laboratornyy metod polucheniya vysokikh potentsialov* [Laboratory method for obtaining high potentials]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Successes of physical sciences]. 1930, vol. X, no. 4, pp. 545–569.
24. Yavorskiy B. M., Detlaf A. A., Lebedev A. K. *Spravochnik po fizike dlya inzhenerov i studentov VUZov* [Physics handbook for engineers and students of universities]. Moscow, Oniks Publ., 2006. 1056 p.
25. Atabekov G. I. *Osnovy teorii tsepey* [Fundamentals of circuit theory]. Leningrad, Energiia Publ., 2006. 220 p.
26. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 832 p.

Поступила (received) 16.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Резонанс у вторинному контурі трансформатора Тесла при збудженні гармонійною напругою / Ю. В. Батигін, Є. О. Чаплигін, С. О. Шиндерук, О. С. Сабокар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 21 – 27. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.

Резонанс во вторичном контуре трансформатора Тесла при возбуждении гармоническим напряжением / Ю. В. Батыгин, Е. А. Чаплыгин, С. А. Шиндерук, О. С. Сабокар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 21 – 27. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.

Resonance in the secondary circuit of the Tesla transformer excited by the harmonic voltage / Yu. V. Batygin, E. A. Ghaplygin, S. A. Shynderuk, O. S. Sabokar // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 21 – 27. Bibliogr.: 26 titles. – ISSN 2222-0631.

Бати́гін Ю́рій Ві́кторович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

Батыгин Юрий Викторович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

Batygin Yuriy Victorovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

Чапли́гін Євге́н Олекса́ндрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

Чаплыгин Евгений Александрович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

Chaplygin Evgen Olexandrovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

Шинде́рук Сві́тлана Олекса́ндрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

Шиндерук Светлана Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

Shynderuk Svitlana Olexandrivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

Сабока́р О́лег Серге́йович – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

Сабокарь Олег Сергеевич – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

Sabokar Oleg Serhiyovych – Postgraduate Student, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ

ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Розглядаються імпульсні дії довільних складних навантажень на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини. Деформування пластини моделюється в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Під складними навантаженнями розуміються такі, які можуть мати не тільки поперечну, а й поздовжню складову, а також зосереджені моментні навантаження. Представлена теорія вирішення прямих і обернених задач теорії пружності при дії на пластину скінченної системи незалежних нестационарних навантажень. В рамках прямої задачі в загальному вигляді отримані підсумкові співвідношення, які дозволяють обчислювати переміщення та деформації в довільній точці пластини. Наведено загальний вигляд постановки обернених задач і викладено алгоритм їх вирішення.

Ключові слова: пластина середньої товщини, ідентифікація, нестационарне навантаження, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Рассматриваются импульсные воздействия произвольных сложных нагрузок на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины. Деформирование пластины моделируется в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко. Под сложными нагрузками понимаются такие, которые могут иметь не только поперечную, но и продольную составляющую, а также сосредоточенные моментные нагрузки. Представлена теория решения прямых и обратных задач теории упругости при действии на пластину конечной системы независимых нестационарных нагрузжений. В рамках прямой задачи в общем виде получены итоговые соотношения, которые позволяют вычислять перемещения и деформации в произвольной точке пластины. Приведен общий вид постановки обратных задач и изложен алгоритм их решения.

Ключевые слова: пластина средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

Impulse actions of arbitrary complex loads on rectangular elastic isotropic plates of medium thickness are considered. The plate deforming is simulated by the Timoshenko's refined theory. Complex loads are the loads, that can have both transverse and longitudinal components, as well as concentrated moment loads. A theory for solving the direct and inverse problems of the theory of elasticity under a finite system of independent nonstationary loads acting on the plate is presented. Within the framework of the direct problem the resulting relationships are obtained in general form. These resulting relationships allow to calculate the displacements and deformations at an arbitrary point of the plate. A general formulation of the inverse problems is given and an algorithm for their solution is presented.

Key words: medium-thickness plate, identification, nonstationary loading, system of Volterra integral equation, Tikhonov's regularization algorithm.

Введение и анализ последних исследований. Одними из самых широко распространенных элементов конструкций являются пластины, большинство из которых – прямоугольные. Элементы конструкции в виде металлических пластин средней толщины, несмотря на конструктивную простоту, хорошо работают в условиях динамических, а особенно ударных нагрузений. Однако при проектировании конструкторы зачастую сталкиваются с проблемой недостаточной информации о действии нестационарных нагрузок на механические системы. В ряде случаев при анализе напряженно-деформированного состояния ударные и другие подобные нагружения моделируются приблизительно или вообще заменяются коэффициентами динамичности нагрузки или компенсируются коэффициентами запаса. Только для ответственных элементов или конструкций в целом производится ряд дорогостоящих экспериментальных исследований. Решение обратных задач идентификации неизвестных нестационарных нагружений при обработке экспериментальных данных может существенно снизить стоимость и время исследований, а иногда частично или полностью заменить реальные исследования специальными вычислительными экспериментами.

В работах [1, 2] описана методика идентификации законов изменения во времени системы из нескольких независимых нестационарных поперечных нагрузок, воздействующих на прямоугольную пластину средней толщины *типа С. П. Тимошенко*. Приводятся примеры численных расчетов по идентификации систем из двух и трех нагрузок. Задача об идентификации нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины, описана в [3, 4]. В работах [2, 5] рассматриваются импульсные воздействия произвольных сложных нагрузок (имеющих не только поперечную, а и продольную составляющую) на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины.

Учитывая сказанное выше, актуальной задачей является обобщение методики, описанной в монографии [2], на случай воздействия на прямоугольную пластину конечной системы произвольных сложных нагружений, которые могут быть ориентированы относительно пластины продольно, поперечно или под произвольным углом.

Постановка задачи. Расположим пластину в декартовых координатах так, что ее срединная плоскость будет находиться в плоскости xOy , пластину ограничена прямыми $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=m$, а направление оси Oz будет совпадать с нормалью к плоскости xOy рис. 1.

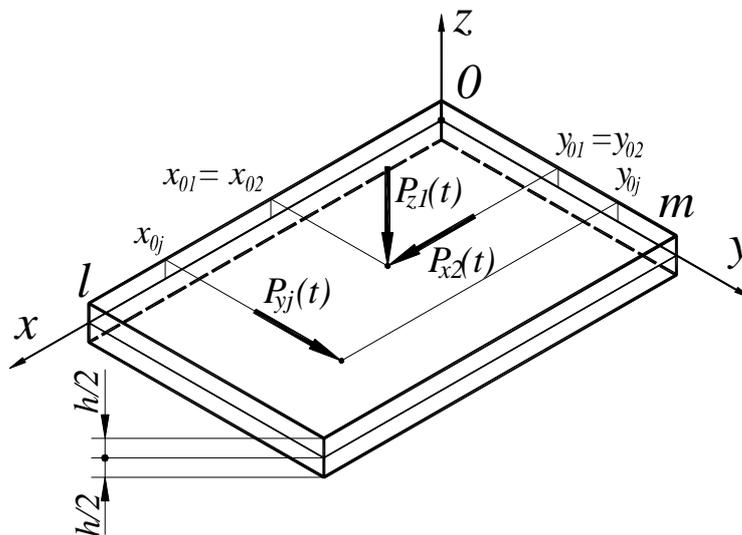


Рис. 1 – Пластина, нагруженная системой продольных и поперечных сил.

Укажем, что l и m – размеры пластины в плане. Координаты точки приложения j -й сосредоточенной силы или центра малой области равномерно распределенной нагрузки – x_{0j} , y_{0j} . Число воздействующих нагрузок равняется N .

Для решения данной задачи воспользуемся моделью пластин теории С. П. Тимошенко, которая учитывает эффекты инерции вращения нормального элемента и поперечного сдвига.

Составляющие перемещения элемента пластины обозначим u , v и w . Далее сделаем следующие допуще-

ния: будем полагать, что компоненты перемещения u и v – линейно зависимы от z , а w от z не зависит [6, 7]. Тогда, исходя из вышеуказанного, можно записать такие соотношения:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t); \quad v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t); \quad w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t). \quad (1)$$

В этих соотношениях x, y, z – декартовы координаты, u_0, v_0 и w_0 – перемещения точек срединной плоскости пластины, а ψ_x и ψ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины в плоскостях xOz и yOz , соответственно; $z \in [-h/2; h/2]$, где h – толщина пластины.

Задача о нестационарном деформировании упругой изотропной пластины с учетом соответствующих начальных и граничных условий, а также нагружения системой из N сил и моментов сводится к решению следующей системы пяти дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Gh \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t); \\ Gh \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + E_p h \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t); \\ G' h (\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t); \end{array} \right. \quad (2)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала пластины; G – модуль сдвига,

$$G = E/2(1+\nu); \quad I = h^3/12; \quad E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad D = (Eh^3)/12(1-\nu^2) = E_p \cdot I$$

– цилиндрическая жесткость пластины; G' – приведенный модуль сдвига $G' = k'G$. Отметим, что k' – коэффициент сдвига, подробные сведения о котором приведены в [8].

Полную систему уравнений (2), описывающих деформирование пластин в рамках гипотез Тимошенко можно разделить на две независимых подсистемы. Первая подсистема, состоящая из первых двух уравнений (2), относительно неизвестных $u_0(x, y, t)$ и $v_0(x, y, t)$ соответствует продольным нагружениям, а вторая подсистема из (2), состоящая из трёх уравнений, относительно функций прогибов $w_0(x, y, t)$ и углов поворота нормали $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$ – поперечным нагружениям.

Приведенная система уравнений взята из монографии [2] с учетом введенных здесь воздействующих нагрузок:

$$\text{нормальных } \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t), \text{ касательных } \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t) \text{ и моментных } \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t).$$

Построение решения прямой задачи в общем виде. При решении задачи примем нулевые начальные условия, а именно:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, 0) = v_0(x, y, 0) = w_0(x, y, 0) = \psi_x(x, y, 0) = \psi_y(x, y, 0) = 0; \\ \frac{\partial u_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для шарнирно-опертой пластины, чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям [9]: вдоль краев $y = 0$ и $y = m$:

$$w_0 = 0; \quad \psi_x = 0; \quad M_y = 0; \quad S_{xy} = 0; \quad v_0 = 0; \quad (4)$$

вдоль краев $x = 0$ и $x = l$:

$$w_0 = 0; \quad M_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad u_0 = 0; \quad S_{xy} = 0, \quad (5)$$

запишем искомые функции в виде разложений в следующие двойные ряды Фурье:

$$u_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (6)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (7)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (8)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{xkn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (9)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{ykn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}. \quad (10)$$

Подставив разложения (6) – (10) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) и, воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t . Система дифференциальных уравнений решается следующим образом: при нулевых начальных условиях выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа [10, 11]; в пространстве изображений на основе решения системы алгебраических уравнений находятся искомые коэффициенты разложения $w_{kn}^L(s)$, $u_{kn}^L(s)$, $v_{kn}^L(s)$, $\psi_{xkn}^L(s)$, $\psi_{ykn}^L(s)$; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем:

$$u_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + (c_p^2 \nu + c^2) \frac{C_{knj}^{Pyj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{yj}(\tau) d\tau; \quad (11)$$

$$v_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau + (c_p^2 \nu + c^2) \frac{C_{knj}^{Pxj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{xj}(\tau) d\tau; \quad (12)$$

$$\int_0^t \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + c_T^2 \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{xj}(\tau) d\tau + c_T^2 \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (13)$$

$$\psi_{xknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (14)$$

$$\psi_{yknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (15)$$

где $c_G^2 = \frac{G}{\rho}$; $c_T^2 = \frac{G'}{\rho}$; $c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}$; $\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}$; $\mu_n^* = \pi \frac{n}{m}$; $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$, $\mu_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} - \frac{n^2}{m^2} \right)$;

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Delta_{kn}^* = \sqrt{(c_p^2 + c_G^2)^2 \lambda_{kn}^4 - 4c_G^2 c_p^2 (\lambda_k^{*4} + \mu_n^{*4}) - 4\lambda_k^{*2} \mu_n^{*2} (c_p^4 (1 - \nu^2) - 2\nu c_G^2 c_p^2)};$$

$$\Omega_{1kn}^W = \omega_{1kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^W = -\omega_{2kn} + \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^{\psi} = \omega_{1kn} - \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^{\psi} = -\omega_{2kn} + \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{2kn}}; \quad \Omega_{3kn}^{\psi} = 0;$$

$$\Omega_{1kn}^{\phi X} = - \frac{(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \cdot \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\phi X} = - \frac{(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \cdot \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\Phi X} = \Delta_{kn} \frac{(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)},$$

$$\Omega_{1kn}^{\Phi Y} = \frac{(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\Phi Y} = - \frac{(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\Phi Y} = -\Delta_{kn} \frac{(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left(\omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)},$$

$$\Omega_{4kn}^U = \omega_{4kn} - \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^U = -\omega_{5kn} + \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{4kn}^V = \omega_{4kn} - \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^V = -\omega_{5kn} + \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

причем ω_{ikn} – круговые частоты собственных колебаний:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_{kn})}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_{kn})};$$

$$\omega_{3kn} = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda_{kn}^2 + c_T^2 12/h^2}; \quad \omega_{4kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) + \Delta_{kn}^*}{2}}; \quad \omega_{5kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) - \Delta_{kn}^*}{2}}.$$

В результате решения соответствующих вековых уравнений, полученных на основе (2), можно записать следующие зависимости для собственных частот колебаний пластины средней толщины:

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{0.5 \left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 + \sqrt{(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_2(\lambda) = \sqrt{0.5 \left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 - \sqrt{(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_3(\lambda) = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + c_T^2 12/h^2}; \quad \omega_4(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_p^2}; \quad \omega_5(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_G^2}.$$

На рис. 2 показаны графики зависимости квадрата собственных частот от квадрата волновых чисел для поперечных и продольных колебаний пластинчатых элементов конструкции согласно гипотезам типа Тимошенко (1) для системы уравнений (2). На этом рисунке кривая 1 соответствует функции $\omega_1(\lambda)$, кривая 2 – $\omega_2(\lambda)$, кривая 3 – $\omega_3(\lambda)$, кривая 4 – $\omega_4(\lambda)$, кривая 5 – $\omega_5(\lambda)$.

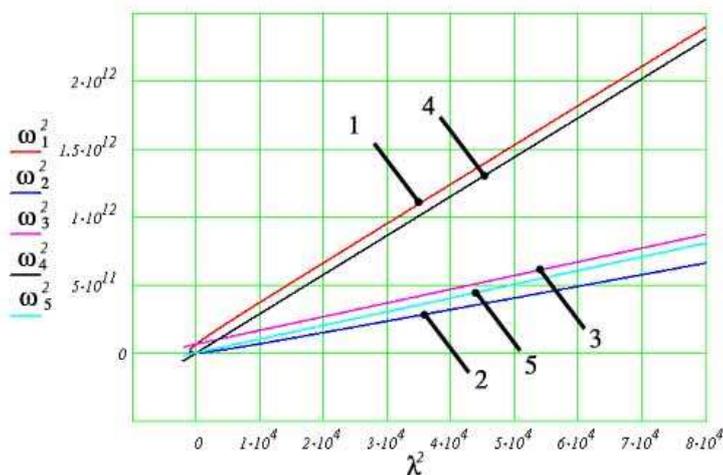


Рис. 2 – Решение векового уравнения для продольных и поперечных колебаний.

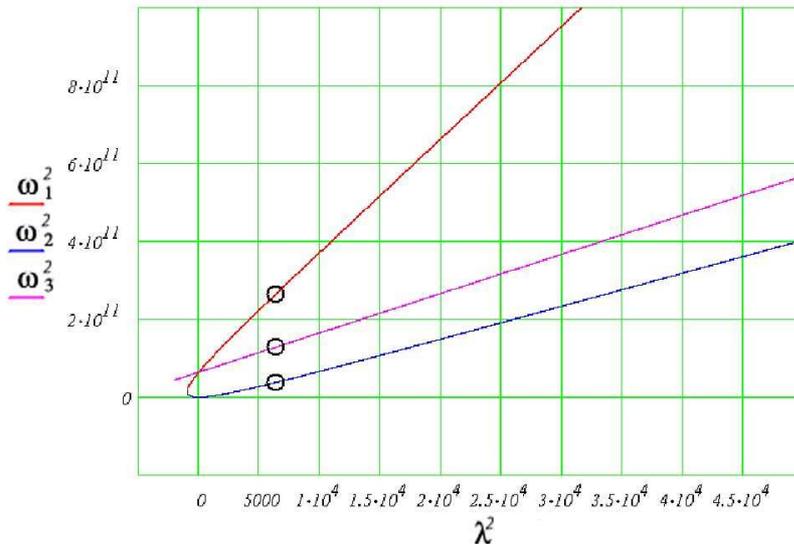


Рис. 3 – Решение векового уравнения для поперечных колебаний (изгибных и сдвиговых).

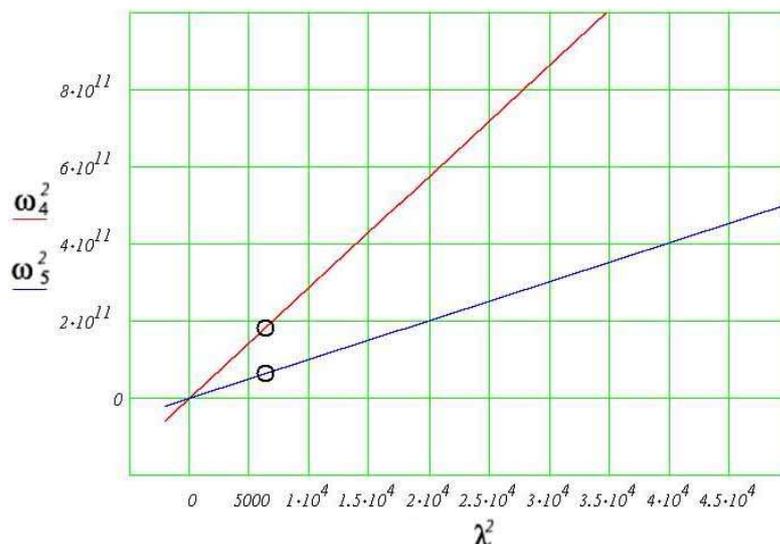


Рис. 4 – Решение векового уравнения для продольных колебаний.

На рис. 3 показаны отдельно зависимости частот собственных колебаний $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$, $\omega_3(\lambda)$ для поперечных сдвиговых и изгибных волн, причём на указанных графиках для примера показаны точки (черные кружочки), соответствующие дискретным собственным частотам $\omega_{1,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{2,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{3,7,9}(\lambda_{7,9})$.

На рис. 4 показаны такие же зависимости для продольных волн $\omega_4(\lambda)$, $\omega_5(\lambda)$ и дискретные собственные частоты $\omega_{4,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{5,7,9}(\lambda_{7,9})$.

Показывать дискретные собственные частоты, используемые в решении системы уравнений (2) не имеет смысла, поскольку даже если учитывать по 50 членов ряда Фурье в каждом направлении, то получается 2500 частот, и эти дискретные точки сливаются и повторяют линии на рис. 2.

Следует отметить, что в выражениях (11) – (15) коэффициенты C_{knj}^{Px} , C_{knj}^{Py} , C_{knj}^{Pz} , C_{knj}^{Mx} , C_{knj}^{My} являются коэффициентами разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье.

В случае сосредоточенного нагружения пластины в точке с координатами x_{0j} , y_{0j} эти коэффициенты будут иметь вид:

$$C_{knj}^{Px} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{16}$$

$$C_{knj}^{Py} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{17}$$

$$C_{knj}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (18)$$

$$C_{knj}^{Mx} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (19)$$

$$C_{knj}^{My} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (20)$$

Последующие выражения для коэффициентов разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье приведены только для поперечной составляющей нагрузки $P_{zj}(x, y, t)$, как наиболее часто встречающейся в реальных задачах. Выражения для других составляющих несложно получить по аналогии с выражениями (16) – (20).

Случай, когда нагрузка равномерно распределена по малой прямоугольной области, представлен на рис. 5. Здесь $\Delta x, \Delta y$ – размеры области приложения вдоль осей Ox и Oy , соответственно, а точка (x_{0j}, y_{0j}) – центр прямоугольника:

$$P_z(x, y, t) = P(t) \left[H(x - (x_{0j} - \Delta x/2)) - H(x - (x_{0j} + \Delta x/2)) \right] \times \\ \times \left[H(y - (y_{0j} - \Delta y/2)) - H(y - (y_{0j} + \Delta y/2)) \right]. \quad (21)$$

Коэффициенты разложения будут иметь вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi x_{0j}}{l} \sin \frac{k\pi \Delta x}{2l} \sin \frac{n\pi y_{0j}}{m} \sin \frac{n\pi \Delta y}{2m}. \quad (22)$$

В случае если нагрузка равномерно распределена по кругу (рис. 6) радиусом r :

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P_j(t), & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2, \end{cases} \quad (23)$$

где $P_j(t)$ – неизвестная функция изменения во времени j -й нагрузки $P_{zj}(x, y, t)$. Тогда:

$$C_{jkn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn} r) \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (24)$$

причем $J_1(\lambda_{kn} r)$ – функция Бесселя первого рода. Отметим, что способ получения выражений для приведенного коэффициента описан в работе [12].

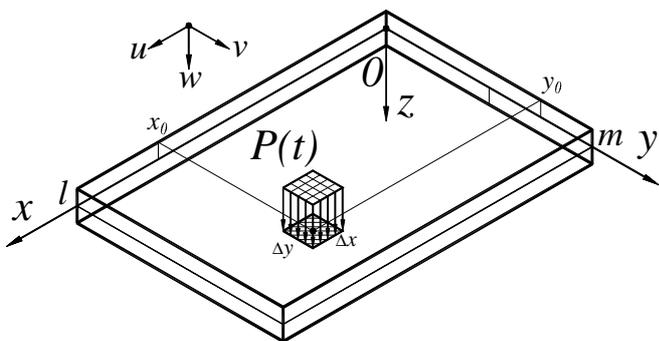


Рис. 5 – Поперечная нагрузка распределена по малой прямоугольной области.

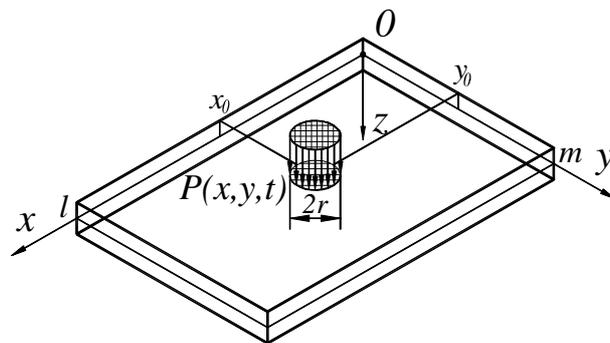


Рис. 6 – Поперечная равномерно распределенная по малому кругу нагрузка.

Если предположить, что в зоне контакта нагрузка распределена не равномерно, а в виде эллипсоида вращения, что в некоторых случаях более точно отражает физические аспекты процесса деформирования, то

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P(t) \sqrt{1 - \frac{(x - x_{0j})^2}{r^2} - \frac{(y - y_{0j})^2}{r^2}}, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2. \end{cases} \quad (25)$$

В этом случае коэффициент разложения нагрузки в двойные ряды Фурье примут следующий вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2} \left(\frac{\sin(\lambda_{kn} r)}{\lambda_{kn} r} - \cos(\lambda_{kn} r) \right) \sin\left(\frac{k\pi x_{0j}}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_{0j}}{m}\right). \quad (26)$$

При воздействии на пластину подвижных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью, необходимо в

соответствующих формулах для коэффициентов разложения вместо аргументов, связанных с неподвижной точкой (x_{0j}, y_{0j}) , записать новые аргументы вида $(V_{xj} \cdot t, V_{yj} \cdot t)$, где V_{xj}, V_{yj} – составляющие скорости подвижной нагрузки вдоль осей Ox и Oy , соответственно. Например, если точка приложения сосредоточенной поперечной нагрузки движется вдоль оси Ox с постоянной скоростью V_0 (рис. 7), то коэффициент этой нагрузки, аналогичный (18) будет иметь вид:

$$C_{kn}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot V_0 \cdot t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right). \tag{27}$$

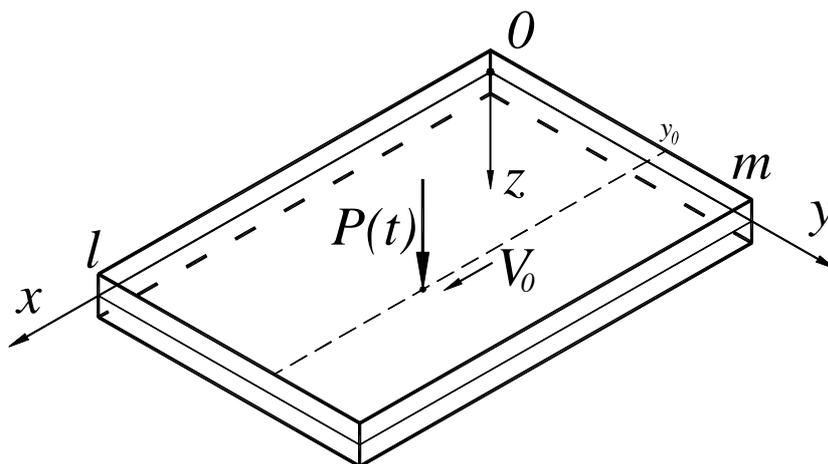


Рис. 7 – Поперечная подвижная нагрузка.

Перемещение произвольной точки пластины с координатами x_s, y_s при произвольном нагружении можно найти из следующих соотношений

$$u_{0S}(t) = u_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_{xj}}^U(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{P_{yj}}^U(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{28}$$

$$v_{0S}(t) = v_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_{xj}}^V(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{P_{yj}}^V(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{29}$$

$$w_S(t) = w(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_{zj}}^W(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^W(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^W(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{30}$$

$$\psi_{xS}(t) = \psi_x(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_{zj}}^{\psi X}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^{\psi X}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^{\psi X}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{31}$$

$$\psi_{yS}(t) = \psi_y(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_{zj}}^{\psi Y}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^{\psi Y}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^{\psi Y}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right), \tag{32}$$

где

$$K_{P_{xj}}^U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t; \quad K_{P_{yj}}^U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t;$$

$$K_{P_{xj}}^V(t) = (c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right);$$

$$K_{P_{yj}}^V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t; \quad K_{P_{zj}}^W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn} t;$$

$$K_{M_{xj}}^W(t) = -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);$$

$$K_{M_{yj}}^W(t) = -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);$$

$$\begin{aligned}
K_{P_{zj}}^{\psi X}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
K_{M_{xj}}^{\psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{M_{yj}}^{\psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{P_{zj}}^{\psi Y}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
K_{M_{xj}}^{\psi Y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{M_{yj}}^{\psi Y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn} t.
\end{aligned}$$

Отметим, что при решении реальных задач, в которых необходимо исследовать перемещения в нескольких точках при воздействии сложной системы внешних нагрузок, выражения (28) – (32) в максимально компактной форме могут быть записаны в виде:

$$u_i^v(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau, \quad (33)$$

где индекс j соответствует номеру внешней нестационарной (сосредоточенной или распределенной по малой области) нагрузки с координатами (x_{0j}, y_{0j}) , причем в случае сложного нагружения – его компоненты удобнее считать и обозначать как независимые нагрузки; индекс i отвечает точке, в которой исследуются компоненты перемещения (u, v, w) , а индекс $v = I, II, III$ – непосредственно самому компоненту перемещения, то есть:

$$u_i^I(t) = u_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_x(x_i, y_i, t); \quad u_i^{II}(t) = v_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_y(x_i, y_i, t); \quad u_i^{III}(t) = w_0(x_i, y_i, t). \quad (34)$$

Укажем, что на основе зависимостей (28) – (32) несложно получить выражения для напряжений и деформаций в произвольной точке пластины, например, выражения для деформаций будут иметь вид аналогичный и отличаться от предыдущих выражений значениями ядра:

$$\varepsilon_{v_i}(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Здесь обозначения аналогичны описанным ранее в (33), за исключением индексов $v = x, y$ – которые удобнее обозначить в виде букв, совпадающих с направлениями осей, вдоль которых определяется деформация ($\varepsilon_x(t)$ и $\varepsilon_y(t)$; напомним, что согласно принятым гипотезам $\varepsilon_z(t) = 0$).

Для получения деформационных ядер необходимо ядра для определения функций компонент перемещения $u_0(x_i, y_i, t)$, $v_0(x_i, y_i, t)$ и углов поворота $\psi_x(x_i, y_i, t)$, $\psi_y(x_i, y_i, t)$ рассмотреть не как функцию переменной t в точке (x_i, y_i, t) , а как функцию нескольких переменных (x, y, t) и взять частную производную по соответствующей пространственной координате (∂x или ∂y):

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(x, y, t) = \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}.$$

Следовательно, для деформационных ядер можно записать:

$$\begin{aligned}
K_j^{\varepsilon x}(x, y, t) &= \frac{\partial K_j^U(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial K_j^{\psi X}(x, y, t)}{\partial x} = K_j^{dU}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi X}(x, y, t); \\
K_j^{\varepsilon y}(x, y, t) &= \frac{\partial K_j^V(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial K_j^{\psi Y}(x, y, t)}{\partial y} = K_j^{dV}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi Y}(x, y, t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{P_{zj}}^{dU}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{P_{yj}}^{dU}(t) &= -(c_p^2 V + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^{*2} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right); \\
K_{P_{zj}}^{d\psi X}(t) &= -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^{*2}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{Mxj}^{d\psi X}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Myj}^{d\psi X}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Px}^{dV}(t) &= -(c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^{Px} \lambda_k^* \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right); \\
 K_{Pyj}^{dV}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Pzj}^{d\psi Y}(t) &= -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
 K_{Mxj}^{d\psi Y}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Myj}^{d\psi Y}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t.
 \end{aligned}$$

В выражениях (35) ядра для определения, например, деформации в точке $(x_1, y_1) - \varepsilon_{x_1}(t)$ при воздействии только поперечной нагрузки $P_{z1}(t)$ и момента $M_{x2}(t)$ будут иметь следующий вид:

$$K_{11}^x(t) = K_{Pzj}^{d\psi X}(t), \quad K_{12}^x(t) = K_{Mxj}^{d\psi X}(t),$$

а сама деформация $\varepsilon_{x_1}(t)$ описывается формулой:

$$\varepsilon_{x_1}(t) = \int_0^t K_{11}^x(t-\tau) P_{z1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{12}^x(t-\tau) M_{x2}(\tau) d\tau. \tag{36}$$

Таким образом, получение зависимостей вида (33), (35), по сути, завершает построение решения прямой задачи о сложном нестационарном деформировании прямоугольной пластины.

В операторной форме выражения (33), (35) можно записать в виде:

$$u_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} p_j, \tag{37}$$

где u_i – соответствует искомой функции компоненты перемещения или деформации от времени; A_{ij} – интегральный оператор Дюамеля для соответствующих конечно-разностных ядер Коши $K_{ij}(t)$ или оператор свёртки; p_j соответствует изменению во времени j -й силы $P_j(t)$.

Однако при практических исследованиях нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкции требуются конкретные числовые значения, а не формулы, и удобнее вместо выражений вида (37) записывать их дискретные аналоги:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{P}_j, \tag{38}$$

где вектор \mathbf{u}_i соответствует функции u_i ; матрица \mathbf{A}_{ij} – интегральному оператору свёртки A_{ij} ; элементы которой a_{ij} соответствуют разностным ядрам $K(t_i - t_j)$; вектор \mathbf{P}_j отвечает функциям нагрузки $P_j(t)$.

В ряде случаев возникает следующая обратная задача: напряженно-деформированное состояние (НДС) объекта известно только в некоторых точках, а необходимо найти внешнее нестационарное нагружение, воздействующее на данный объект. Более сложная проблема возникает при идентификации произвольных сложных нагрузок. Например, когда в определенной точке на пластину воздействует произвольная сосредоточенная нагрузка, содержащая все компоненты нагружения (три силовые и две моментные), тогда необходимо знать изменение во времени пяти параметров НДС (не обязательно в одной точке). В этом случае следует при решении идентификационной задачи анализировать систему из пяти интегральных уравнений Вольтерра I рода, содержащих пять неизвестных функций времени и отражающих зависимости для пяти параметров НДС с заданными функциями времени, которые принимаются в качестве исходных данных.

Обратная задача. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину.

Особый интерес представляют исследования в области обратных некорректных задач по идентификации одновременно действующих нескольких независимых произвольных (продольных и поперечных) нагрузок.

Рассматривается импульсное воздействие на упругую изотропную пластину средней толщины системы не-

скольких нагрузок. Под импульсным воздействием понимается нестационарное нагружение пластины на протяжении времени соизмеримого с периодом низших собственных частот ее колебаний. Поведение пластины изучается на конечном интервале времени. Пусть законы изменения во времени этих нагрузок неизвестны, однако при этом предполагается, что геометрические области нагружений и их координаты заданы. Также предполагается, что заданные плоские области приложения нагрузок являются односвязными (в общем случае), а в пределах области нагружения нагрузки, воздействующие на пластину, не зависят от пространственных координат.

Комбинация соотношений типа (33), (35) при заданных функциях в правой части и искомым функциях $P_j(t)$ является системой из N линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, решение которой является целью в задаче идентификации.

В операторной форме система интегральных уравнений вида (37) будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \sum_{i=1}^N A_{i1} \cdot p_i = u_1; \dots; \sum_{i=1}^N A_{ij} \cdot p_i = u_j; \dots; \sum_{i=1}^N A_{iN} \cdot p_i = u_N. \right. \quad (39)$$

Укажем, что описание системы (39) аналогично приведенному выше для операторного выражения (37).

Система интегральных уравнений решается при помощи специально разработанного комплекса методов, который базируется на использовании обобщенных алгоритмов для решения блочных матричных уравнений [13] и *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова*.

Последовательность решения, согласно описанному комплексу методов, следующая: для системы интегральных уравнений выполняется дискретизация по времени, в результате чего, указанная система интегральных уравнений вида (39) сводится к блочной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1j} & \dots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \dots & \mathbf{A}_{ij} & \dots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \dots & \mathbf{A}_{Nj} & \dots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Здесь \mathbf{A}_{ij} – матрица, соответствующая интегральному оператору A_{ij} , вектор \mathbf{p}_i соответствует функции p_i , а $\mathbf{u}_j - u_j$.

Блочная СЛАУ типа (40) решается с использованием *обобщенного алгоритма Гаусса – (ОАГ)* [14] или *Крамера – (ОАК)*, в результате можно получить N уравнений, зависящих только от одной i – ой нагрузки:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}i. \quad (41)$$

где \mathbf{M} и $\mathbf{M}i$ – матрицы, определенные с применением ОАК.

Для каждого уравнения вида (41) выполняется процедура регуляризации по А. Н. Тихонову, в результате которой мы приходим к регуляризированной СЛАУ вида:

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_i \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}^T \mathbf{M}i. \quad (42)$$

где $\alpha_i > 0$ – параметр регуляризации; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, форма которой приведена в [13].

Параметр регуляризации α_i , который входит в (42), вычисляется на основе минимизации по α_i , соответствующего каждому \mathbf{p}_i функционала вида:

$$\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i(\alpha_i) - \mathbf{M}i\|^2. \quad (43)$$

Выводы. В данной работе представлена теория решения прямых и обратных задач теории упругости при действии на пластину конечной системы независимых нестационарных сложных нагружений.

В рамках прямой задачи в общем виде получены итоговые соотношения, которые позволяют вычислять перемещения и деформации в произвольной точке пластины.

Приведена постановка обратной задачи по идентификации системы нескольких одновременно действующих независимых произвольных (продольных и поперечных) нагрузок. Изложен алгоритм решения задачи идентификации на базе решения системы интегральных уравнений Вольтерра.

Список литературы

1. Вороний А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – № 7. – С. 90 – 97.
2. Янютин Е. Г., Вороний А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
3. Янютин Е. Г., Вороний А. В. Идентификация нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины // Проблемы машиностроения. – 2004. – Вып. 7. – №1. – С. 76 – 81.
4. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Вороний А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
5. Вороний А. В., Поваляев С. И., Шараната А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математичне моделювання.

- вання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2005. – № 661. – С. 69 – 82.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1967. – 444 с.
 7. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикладная математика и механика. – 1948. – Вып. – 12. – № 3. – С. 287 – 300.
 8. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
 9. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К. : Наук. думка, 1982. – 400 с.
 10. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М. : Высшая школа, 1966. – 405 с.
 11. Лурье А. И. Операционное исчисление. – М. : Гостехтеориздат, 1950. – 432 с.
 12. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – К. : Наук. думка, 1978. – 184 с.
 13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука, 1983. – 200 с.
 14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.

References (transliterated)

1. Voropay A. V., Yanyutin Ye. G. Identifikatsiya neskol'kikh impul'snykh nagruzok, vozdeystvuyuschikh na plastinu [Identification of several impulse loads acting on a plate]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2007, vol. 43, no. 7, pp. 90–97.
2. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Load identification during pulsed deformation of a body. Monograph in 2 parts. Part II]. Kharkov, Izdatel'stvo KhNADU Publ., 2010. 212 p.
3. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V. Identifikatsiya nestatsionarnogo nagruzheniya, kasatel'nogo k litsevoy poverkhnosti pryamougol'noy plastiny [Identification of nonstationary load tangent to the face of a rectangular plate]. *Problemy mashinostroyeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2004, vol. 7, no. 1, pp. 76–81.
4. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruktivnykh elementov* [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Kharkov KhNADU Publ., 2004. 392 p.
5. Voropay A. V., Povalyayev S. I., Sharapata A. S., Yanyutin Ye. G. Primeneniye teorii integral'nykh uravneniy Vol'terra pri reshenii dinamicheskikh obratnykh zadach dlya plastin i obolochek [Using Volterra integral equation theory for solving dynamical inverse plate and shell problems]. *Visnyk natsional'nogo universytetu. Seriya matematichne modelyuvannya. Informatsiyi tehnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2005, no. 661, pp. 69–82.
6. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in Engineering]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1967. 444 p.
7. Uflyand Ya. S. Rasprostraneniye voln pri poperechnykh kolebaniyakh sterzhney i plastin [Wave propagation during transverse oscillations of rods and plates]. 1948, vol. 12, no. 3, pp. 287–300.
8. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tvyerdukh deformiruyemykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
9. Guz' A. N., Kubenko V. D. *Metody raschyeta obolochek. T. 5. Teoriya nestatsionarnoy aehrogidrouprugosti obolochek* [Shell computation methods. Vol. 5. Shell nonstationary aerohydroelasticity theory]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1982. 400 p.
10. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 405 p.
11. Lur'e A. I. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1950. 432 p.
12. Filippov A. P., Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G. *Deformirovaniye ehlementov konstruktivnykh elementov pod deystviyem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under the action of impact and pulse loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 184 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushchiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.
14. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.-ry Publ., 1967. 576 p.

Поступила (received) 28.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Вплив на прямокутну пластину скінченної системи довільних навантажень / О. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагрузжений / А. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Action of finite system of arbitrary loads on rectangular plate / A. V. Voropay // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 27 – 38. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

А. Л. ГРИГОРЬЕВ, А. И. ДЕРИЕНКО

РАСЧЁТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ ПРИ АСИММЕТРИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И УЧЕТЕ ФАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Розроблено чисельно-аналітичний підхід до врахування нелінійних факторів та асиметрії крайових умов. При його реалізації використовується складена раніше лінійна математична модель коливань циліндричної пружини стискання при симетричних умовах закріплення крайніх витків, яка враховує повну групу позовжних (а в опорних витках – й поперечних) переміщень перерізу гвинтового стрижня при 3-х (або 6-ти) степенях свободи. Розв'язки рівнянь цієї моделі представлено у формі інтегралів із різницевиими ядрами типу Коші (для перехідних процесів) або Фредгольма (для сталих коливань). Асиметрія та нелінійності враховані як малі додаткові силові дії, що виникають в процесі коливань. Таким чином, наприклад, вдалося врахувати нелінійних спротив середовища при установці пружини у вузькому каналі, який заповнений в'язкою рідиною, а також співударяння витків та сухе тертя в опорах. При врахуванні вказаних факторів використано методи суперпозиції розв'язків та простої ітерації.

Ключові слова: циліндрична пружина стискання, умови закріплення пружини; модель гвинтового стрижня, згорткові інтеграли, співударяння витків, нелінійне зовнішнє тертя, сухе тертя у опорах.

Разработан численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий. При его реализации используется составленная ранее линейная математическая модель колебаний цилиндрической пружины сжатия при симметричных условиях закрепления крайних витков, учитывающая полную группу продольных (а в опорных витках – и поперечных) перемещений сечения винтового стержня при 3-х (или 6-ти) степенях свободы. Решения уравнений этой модели представлены в форме интегралов с разностными ядрами типа Коши (для переходных процессов) или Фредгольма (для установившихся колебаний). Асимметрия и нелинейности учитываются как малые дополнительные силовые воздействия, возникающие в процессе колебаний. Таким способом, например, удается учесть нелинейное сопротивление среды при установке пружины в узком канале, заполненном вязкой жидкостью, а также соударения витков и сухое трение в опорах. При учете указанных факторов используются методы суперпозиции решений и простой итерации.

Ключевые слова: цилиндрическая пружина сжатия, условия закрепления пружины; модель винтового стержня, сверточные интегралы, соударения витков, нелинейное внешнее трение, сухое трение в опорах.

A numerical-analytical approach to accounting for nonlinear factors and asymmetry of boundary conditions is developed. For implementing the approach the linear mathematical model of oscillations of a cylindrical compression spring with symmetric conditions of fixed extreme coils taking into account a full group of longitudinal (and for the supporting coils also transverse) displacements of a section of a screw rod with 3 (or 6) degrees of freedom is used. The solutions of the equations of this model are represented in the form of integrals with Cauchy-type (for transient processes) or Fredholm (for steady-state oscillations) difference kernels. Asymmetry and nonlinearities are taken into account as small additional force effects arising in the process of oscillations. In this way, for example, it is possible to take into account the nonlinear resistance of the medium when installing the spring in a narrow channel filled with viscous liquid, as well as the impact of the coils and dry friction in the supports. When these factors are taken into account, the methods of superposition of solutions and simple iteration are used.

Key words: cylindrical compression spring, spring fastening conditions; model of a screw rod, convolution integrals, collisions of coils, nonlinear external friction, dry friction in supports.

Введение и постановка задачи. При работе цилиндрической пружины сжатия в механическом, гидромеханическом или электромеханическом устройстве источником вынужденных колебаний витков является перемещение её опор. При этом, как правило, одна из опор остаётся неподвижной, а вторая перемещается в направлении оси пружины по периодической или (на переходных режимах работы устройства) почти периодической закономерности. В некоторых устройствах движутся обе опоры; этот случай учитывается методом наложения колебаний и в отдельном рассмотрении не нуждается. В других конструкциях наряду с осевым перемещением опоры происходит её поворот на некоторый (небольшой) угол, т.е. наблюдаются продольные качания опоры. Поэтому при разработке универсального метода расчёта [1, 2] предусмотрена возможность произвольного перемещения опоры по трём координатам ν , α , γ , определяющим группу продольных деформаций (рис. 1).

Поперечные деформации β , u , w учитываются только в опорных витках. В пружинах, опирающихся на подогнутый торцевой виток, продольные вынужденные колебания могут рассчитываться независимо от поперечных колебаний, что делает расчёт поперечных колебаний необязательным.

Разработанный метод расчёта вынужденных колебаний пружин учитывает все известные виды трения (внутреннее, внешнее и в опорах), а также соударения рабочих и опорных витков; большинство указанных факторов являются нелинейными, и в работах [1, 2], где решение представлялось в форме интегральных операторов с разностными ядрами Коши или Фредгольма, они не рассматривались. Учёт нелинейных факторов имеет практическую ценность не для всех пружин; кроме того, при изложении теоретических основ метода авторы предпочитают двигаться в направлении от простого материала к сложному. Поэтому о действительных возможностях метода и его универсальной силе можно судить после знакомства с материалами этой статьи, а также примерами его практического применения, рассмотренными в [3].

Задача с несимметричными условиями является актуальной, например, в конструкции пружин вагонных тележек, где один из концов жёстко закреплён в опоре, а второй выполнен с опиранием на подогнутый шлифованный торец (рис. 2). Другим важным для практики примером является динамический анализ пружин, у которых движущаяся опора имеет большую податливость, чем неподвижная.

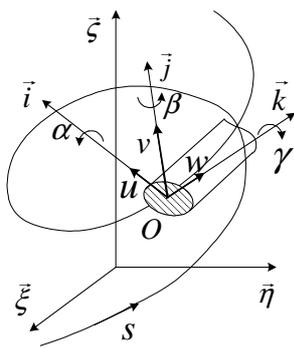


Рис. 1 – Координаты сечения.

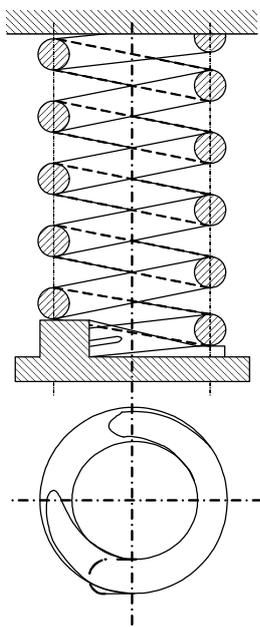


Рис. 2 – Пружина подвески вагона.



Рис. 3 – Блок-схема численно-аналитического алгоритма решения задачи.

Численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий.

Общий порядок учёта нелинейных факторов при динамическом анализе пружины проиллюстрирован на рис. 3. На каждом этапе расчёта используется линейная модель колебаний однородного упругого континуума, опирающаяся на алгебраический метод [4] нахождения спектра колебаний (его результаты для конкретной пружины показаны на рис. 4) и аппроксимирующая исходную (нелинейную) модель колебаний пружины за счёт усреднения её переменных коэффициентов и/или уточнения граничных условий.

После нахождения спектра могут быть определены собственные формы и выполнены все этапы алгоритма, о которых шла речь выше. До учета трения результат расчета неустановившихся колебаний имеет вид интегралов Дюамеля:

$$\vec{x}(t, \theta) = \vec{x}h(\theta) \cdot h(t) + \int_0^t \vec{K}_x^v(t - \zeta, \theta) d\dot{h}(\zeta); \vec{q}(t, \theta) = z \cdot \vec{q}h(\theta) \cdot h(t) + \int_0^t \vec{K}_q^v(t - \zeta, \theta) d\dot{h}(\zeta),$$

причём ядра Коши вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \vec{K}_x^v(t, \theta) \\ \vec{K}_q^v(t, \theta) \end{pmatrix} = \sum_1^\infty (-\phi_k) \cdot \frac{\sin(\omega_k \cdot t)}{\omega_k} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_k(\theta) \\ \vec{q}_k(\theta) \end{pmatrix}.$$

где $\vec{x}_k(\theta), \vec{q}_k(\theta)$ – собственные формы перемещений \vec{x} и упругих сил (или моментов сил) \vec{q} , отвечающие круговой собственной частоте ω_k ; t – время; θ – координата поперечного сечения пружины.

Симметрия граничных условий позволяет расщеплять задачу на деформационную и вибрационную части, имеющие свои спектры (табл. 1, 2), что упрощает решение, а асимметрии приводит к значительным вычисли-

тельными проблемами. Поэтому представляется целесообразным разработать такой метод решения, который позволил бы учесть асимметрию путем несложной корректировки алгоритма.

Рассмотрим задачу расчета вынужденных колебаний пружины

$$M \cdot (\ddot{\bar{x}}) = ((\partial/\partial\theta) \cdot I - B) \cdot \bar{q} ; C \cdot \bar{q} = ((\partial/\partial\theta) \cdot I + B^T) \cdot \bar{x} ; \bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0 ; \bar{x}(-\theta_0) + G_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t) ,$$

где M, C – диагональные матрицы, составленные из инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения пружинной проволоки; I, B – единичная матрица и матрица связей координат; G_{\pm} – матрицы податливости опор; и предположим, что матрицы G_{\pm} не удовлетворяют условию симметрии

$$G_+ \cdot J = -J \cdot G_- , J = \text{diag}(1, -1, 1) .$$

Образует матрицу $\bar{G}_- = -J \cdot G_+ \cdot J$, симметричную матрицу G_+ , и преобразует граничные условия к виду

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0 ; \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t) + \Delta G \cdot \bar{q}(-\theta_0) , \quad (1)$$

где матрица $\Delta G = \bar{G}_- - G_-$.

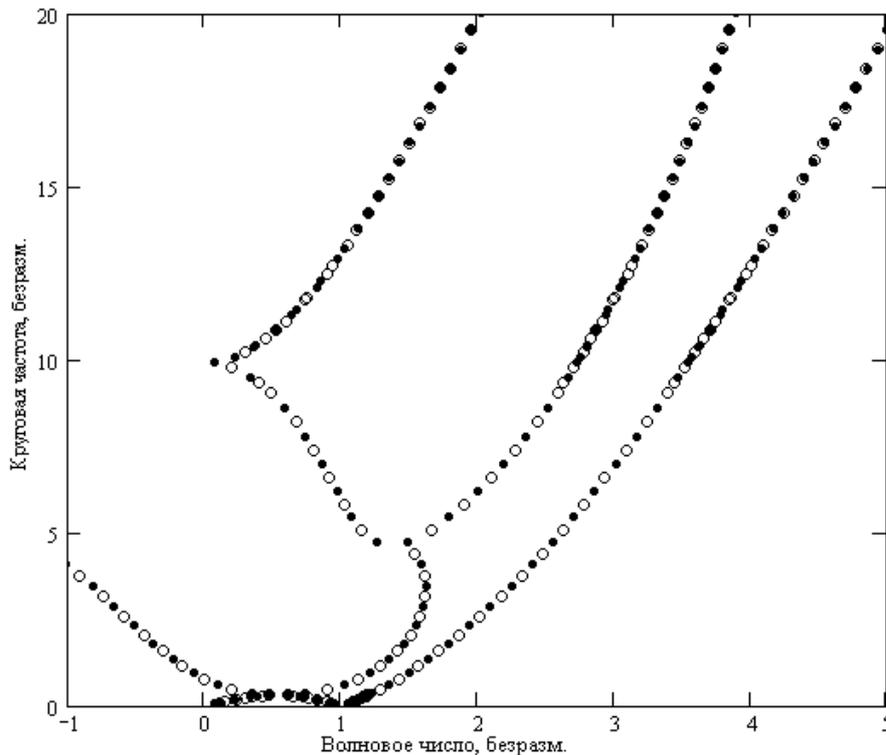


Рис.4 – Распределение собственных частот на ветвях векового уравнения для пружины с числом рабочих витков 6,5 и индексом 7.

Частоты деформационной части спектра закрашены; для комплексно сопряженных волновых чисел по оси абсцисс отложена сумма и разность их вещественной и мнимой части.

Таблица 1 – Выполнение равенства Парсеваля при расчете реакции на мягкий удар для деформационной части спектра, %

Форма перемещения опоры	Число учитываемых гармоник							
	1	2	3	4	5	6	7	8
продольная	11,47	79,23	79,47	86,21	86,21	86,70	91,27	93,83
изгибная	88,47	89,66	92,33	92,37	92,57	92,63	97,67	99,44
крутильная	21,82	69,90	84,79	93,72	95,61	96,14	99,20	99,32

Таблица.2 – Выполнение равенства Парсеваля для вибрационной части спектра, %

Форма перемещения опоры	Число учитываемых гармоник							
	1	2	3	4	5	6	7	8
продольная	90,37	90,43	92,72	94,34	94,38	95,28	96,00	97,00
изгибная	8,38	15,00	46,73	65,28	72,35	77,43	83,12	93,97
крутильная	77,22	93,14	96,36	96,49	96,51	97,69	99,63	99,79

Будем предполагать, что матрица ΔG является малой; в примерах, рассмотренных ниже, такое предполо-

жение вполне оправдывается. Построим итерационный алгоритм, позволяющий решить задачу с условиями (1).

На первом шаге алгоритма условия (1) заменяем следующими:

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0; \quad \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t), \quad (2)$$

решаем полученную задачу с симметричными граничными условиями известным методом [4], получаем вектор обобщённых сил $\bar{q}(-\theta_0)$ и корректируем движение опоры:

$$\bar{x}_{кор}(t) = \bar{x}_0(t) + \Delta G \cdot \bar{q}(-\theta_0). \quad (3)$$

На втором и последующих шагах условия (2) имеют вид:

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0; \quad \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_{кор}(t),$$

а для корректировки правой части используется формула (3).

Итерационный процесс выполняется до установления. На практике, если необходимая точность остаётся невыполненной за 2 – 3 шага алгоритма, от дальнейших итераций нужно отказываться и переходить к разработанному ранее общему методу нахождения спектра [4].

Примеры влияния граничных условий на динамику пружины. В статьях [1, 2] указывалось, что при работе дизеля динамические напряжения в пружине форсунки превышают статическую нагрузку в 3 ... 4 раза. Причина столь существенного расхождения – колебания витков пружины. В табл.3 проиллюстрировано влияние различных форм колебаний и условий закрепления пружины на уровень максимальных касательных напряжений в её витках. Расчёты выполнялись для форсуночных пружин производства *ПО "Волгадизельмаш"*, при эксплуатации которых были выявлены случаи поломок или усадок. Модель эквивалентного стержня описывает только продольные колебания витков; в рамках этой модели касательные напряжения пропорциональны сближению витков. Модель прямого бруса учитывает реальную пространственную форму пружины, а винтового бруса – ещё и моменты инерции кручения и изгиба. В рамках последней, наиболее точной, модели учитывалось также влияние длины опорных (так называемых *мёртвых*) витков и качество прилегания шлифованного торца к опорной поверхности.

Таблица 3 – Максимальные расчётные значения касательных напряжений, Мпа

Пружина дизельной форсунки	Статический расчёт		Модель эквивал. стержня	Модель прямого бруса	Модель винтового бруса				
	При рабочей деформации	При смыкании витков			Жёсткая заделка			Цилиндрическая заделка	Сферическая заделка
					Длина мёртвого опорного витка				
					0	1/4	1/3		
21-140709	380	790	630	890	920	920	930	930	960
0110.24.008	350	970	700	780	830	840	840	840	930
Г66-140707	370	1000	720	900	960	960	1000	990	1100
51М.12.101	370	1270	700	950	990	1000	1010	1020	1060

В целом данные табл. 3 свидетельствуют о том, что представленные пружины были спроектированы правильно. При соблюдении условий жёсткой заделки максимальные рабочие напряжения не превышают величину $0,75 \cdot \sigma_g$, что, с учетом обязательной процедуры *заневоливания*, является общепринятыми для пружин данного типа. Поэтому причины имевших место усадок и поломок пружин форсунок следует искать в недоработках технологического процесса, к которому указанный уровень напряжений предъявляет высокие требования. Попытки упростить технологию изготовления форсуночных пружин или снизить уровень максимальных касательных напряжений в их витках приводят к значительному увеличению установочных размеров и при модернизации серийно выпускаемых образцов не приемлемы. Вместе с тем, опыт отечественных и зарубежных предприятий, выпускающих топливную аппаратуру, позволяет выработать конкретные рекомендации по параметрам технологического процесса [5] и обеспечить необходимые свойства пружин при рабочих напряжениях $\tau_{max} = 0,75 \cdot \sigma_g$.

Формула для определения коэффициента внешнего трения. Как отмечено выше, для цилиндрической пружины разработаны современные динамические модели, анализирующие не только продольные, но и крутильные, радиальные, тангенциальные и др. формы колебания витков. Для уравнений этих моделей удалось получить т.н. численно-аналитические общие решения, позволяющие за минимальное время определять основные динамические характеристики пружины при конкретном законе её деформирования. Опыт работы с этими моделями показал, что они могут быть полезны при проведении прочностного анализа проектируемых пружин ди-

зельной топливной аппаратуры (особенно — для форсуночных), поскольку учёт крутильных колебаний существенно повышает уровень максимальных касательных напряжений. Вместе с тем, влияние этих колебаний на силу пружины клапана и форсунки невелико, и при выполнении гидродинамического расчёта целесообразно ограничиться моделью эквивалентного стержня.

Внутреннее трение нужно учитывать при динамическом анализе всех пружин, а внешнее – тех, которые погружены в жидкость, оказывающую существенное сопротивление перемещению витков. Заметим, что если пружина погружена в жидкость с высокой вязкостью, то её динамический анализ становится не актуальным. Для пружины, помещённой в свободный резервуар с маловязкой жидкостью (например, бензином или дизельным топливом), наблюдается другая крайность – учёт внешнего трения не приводит к заметному уточнению результатов расчёта. Исключение из этого правила составляет анализ резонансных колебаний пружины, а также её установка в тесном канале (рис. 5), что приводит к значительному увеличению лобового сопротивления, возникающего при движении витка. Сила лобового сопротивления пропорциональна квадрату скорости витка, поэтому внешнее трение нелинейно. Однако, как и для любого другого слабого фактора, непрерывно зависящего от характеристик движения, влияние внешнего трения удаётся линеаризовать. Именно в таком, линеаризованном, виде оно рассматривалось в [6] и многих др. работах по динамике пружин.

При учете внешнего трения о среду в уравнении колебаний пружины [2] появляется слагаемое, пропорциональное скорости:

$$\partial^2 \bar{x} / \partial t^2 + \mu \cdot \partial \bar{x} / \partial t = L_{\theta}[\bar{x}], \quad (1)$$

где \bar{x} – вектор обобщённых координат сечения (рис. 1), составленный из продольного перемещения $x_1 \sim v$ и углов изгиба и кручения $x_2 \sim \alpha$, $x_3 \sim \gamma$; L_{θ} – линейный дифференциальный оператор второго порядка по координате сечения θ , отвечающий силам упругости и внутреннего трения.

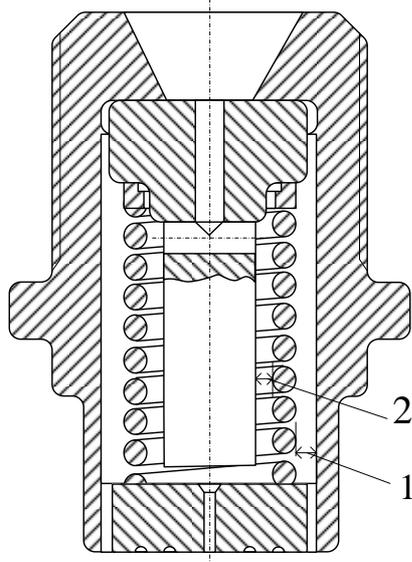


Рис. 5 – Установка пружины в клапане топливного насоса:
1, 2 – радиальные зазоры

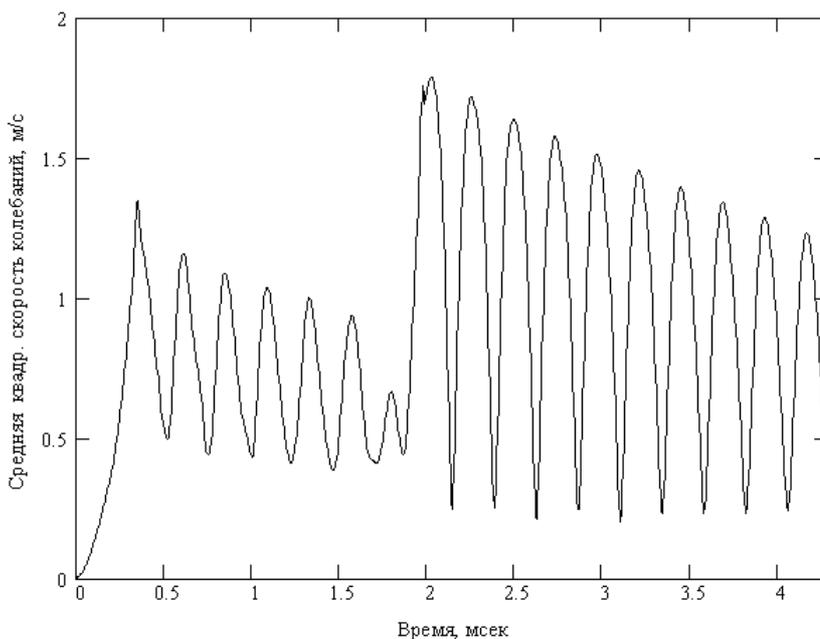


Рис. 6 – Изменение средней скорости витков при колебаниях пружины клапана.

Значение коэффициента внешнего трения μ можно найти линеаризацией формулы для силы сопротивления движению обтекаемого тела из [7]:

$$\mu = k c \rho_{cp} V_{cp} / (\pi \rho D_{cp}), \quad k \approx 0.8;$$

где c , D_{cp} – индекс и средний диаметр пружины; ρ_{cp} , ρ – плотности окружающей среды и материала пружины, соответственно; V_{cp} – средняя квадратичная скорость движения витков относительно среды.

На рис. 6 приведен график изменения средней (по длине пружины) скорости V_{cp} , полученный для пружины клапана дизельной топливной аппаратуры. Характерное значение скорости составляет 1 м/с, и это значение V_{cp} использовано в расчёте после корректировки соответствующих ядер (рис. 2).

Заметим, что если пружина установлена в тесном канале с неподвижными стенками, то величина V_{cp} суще-

ственно превосходит скорость V_a движения витков, и её величина может быть вычислена по формуле:

$$V_{cp} = 0.5 \cdot V_a \cdot d \cdot (\Delta d_1^{-1} + \Delta d_2^{-1}),$$

где d – диаметр проволоки; $\Delta d_1, \Delta d_2$ – диаметральные зазоры между пружиной и стенками канала (рис. 3).

Решение уравнения (1) получено в [2] в форме интегралов Дюамеля с ядрами Коши и Фредгольма. В частности, для неустановившихся колебаний пружины получена зависимость

$$\vec{q}(t, \theta) = h_0(t) \cdot \vec{q}_0(\theta) + \int_0^t \dot{h}_0(\tau) d(\vec{z}_{кол}(t - \tau, \theta)),$$

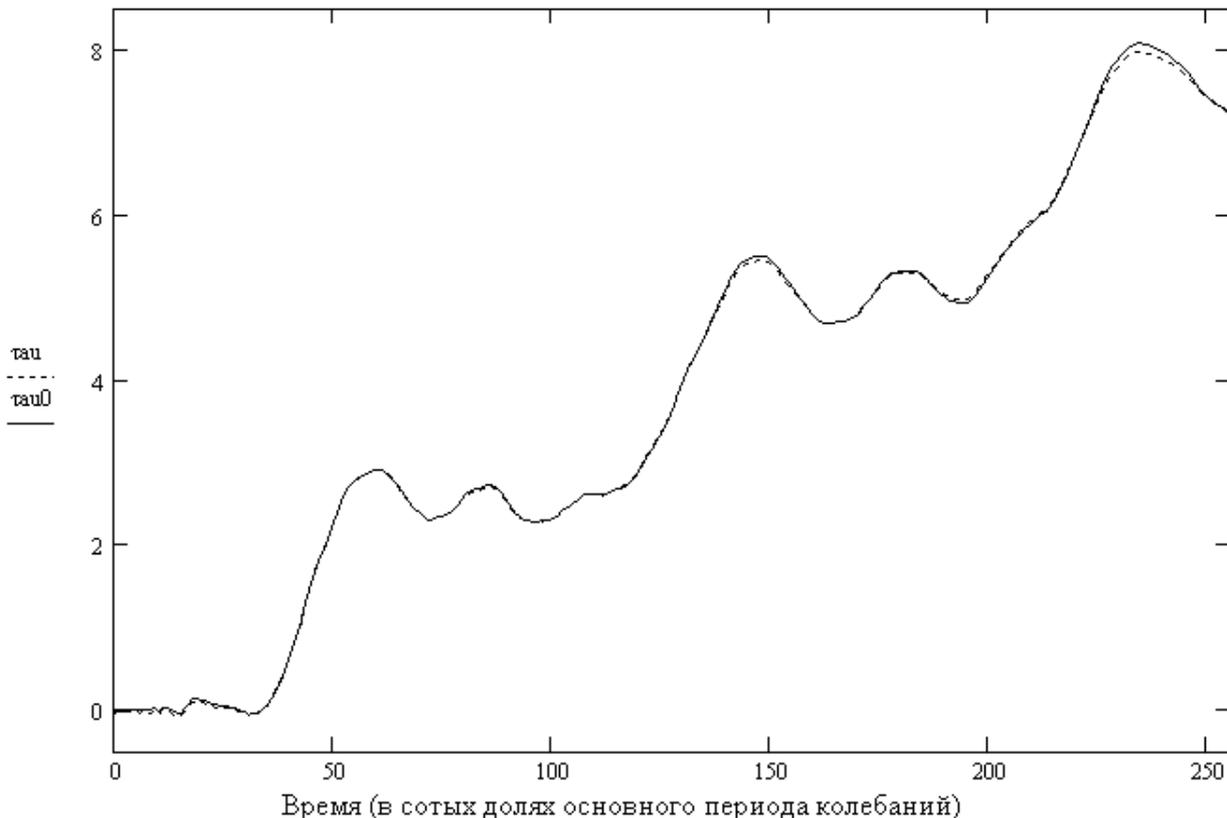


Рис. 7 – Влияние внешнего трения на касательное напряжение в витках пружины (без учета трения – сплошная линия, с учетом трения – пунктир).

где \vec{q} – вектор обобщённых сил, компоненты которого пропорциональны перерезывающей силе, моментам изгиба и кручения; $\vec{z}_{кол}(t, \theta)$ – ядро Коши.

Влияние внешнего трения на динамические характеристики пружины дизельной форсунки проиллюстрировано на рис. 5. Моделируемая пружина установлена в тесном канале с зазором $\Delta d_1 \approx 0.05 \cdot d$, что привело к высокой скорости обтекания пружины дизельным топливом $V_{cp} \approx 20$ м/с и соответствующему декременту затухания колебаний $d_1 = 0.08$. Тем не менее, корректировка ядра оказалась незначительной, что подтверждает вывод о том, что рассмотренный нелинейный фактор является слабым.

Учёт соударения витков. Для пружины, опирающейся на подогнутый торцевой виток, характерно неравномерное изменение межвиткового зазора (рис. 8), что связано с особенностями её изготовления (рис. 9) [5]. Поэтому для таких пружин место соударения витков известно – у опор. При этом удар происходит сразу на отрезке витка, составляющем 0.6 ... 0.7 его длины.

На практике количество ударов может быть достаточно большим. Разработанный подход позволяет учесть все соударения; при этом каждый удар обрабатывается независимо от других.

Импульс скорости, сообщаемой движущемуся витку, имеет треугольную форму (рис. 10). Импульс раскладывается в *обобщённый ряд Фурье* по собственным формам пружины \vec{x}_k , что даёт полный набор начальных условий для расчёта свободного дополнительного колебания, которое накладывается на вынужденное колебание пружины, вызванное движением опоры.

Расчёт дополнительных перемещений и сил выполняется по формулам:

$$\vec{x}_{don}(\theta, t) = \sum \vec{x}_k(\theta) \cdot hud_k(t); \quad \vec{q}_{don}(\theta, t) = \sum \vec{q}_k(\theta) \cdot hud_k(t),$$

где функции $hud_k(t)$ удовлетворяют уравнению затухающих колебаний элементарного осциллятора

$$\ddot{h}_k + (\mu + f \cdot \omega_1 \cdot \omega_k) \dot{h}_k + \omega_k^2 h_k = 0.$$

При моделировании установившихся колебаний интегралами с ядрами Фредгольма учитывается, что в силу периодичности каждый удар влияет не только на последующие, но и на «предыдущие» соударения. Для этого выполняется последовательный расчёт нескольких циклов деформации (рис. 3); до момента установления колебаний (при допустимой погрешности).

При расчёте пружины с малым межвитковым зазором наблюдаются серии слабых множественных ударов, которыми в рамках принятой модели фактически описывается неупругий удар. Серии таких ударов попеременно происходят у обоих концов и приводят к значительному увеличению общего уровня вибрации пружины. Графики рис. 11 свидетельствуют о правильной локализации ударов: близкие к этим отрезкам сечения прекращают своё сближение с опорой, и расширение зоны соударения не происходит.

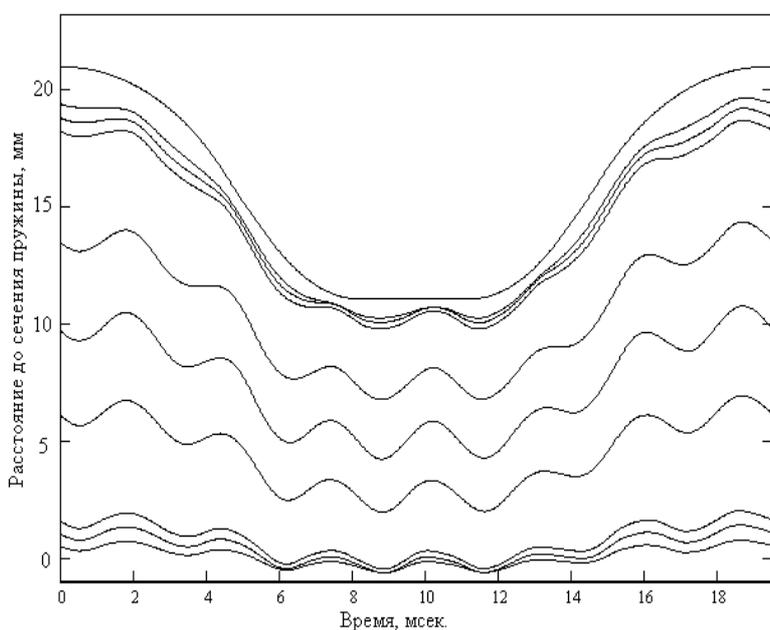


Рис. 8 – Изменение межвиткового зазора пружины плунжера топливного насоса на номинальном режиме работы дизеля СМД-31.

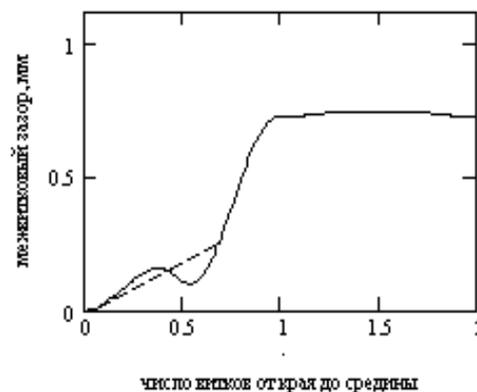


Рис. 9 – Начальный межвитковый зазор (пунктир – после заневольвания).

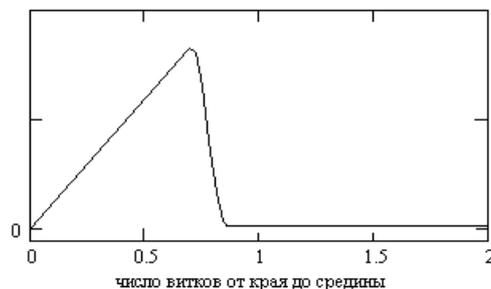


Рис. 10 – Форма дополнительного импульса скорости.

Уточнение граничных условий с учётом трения в опорах. В работе [8] в результате проведения экспериментального исследования стальной цилиндрической пружины сжатия, опирающейся на подогнутый торцевой виток, было выявлено существенное влияние сухого трения в опорах на демпфирование её колебаний. Декремент затухания колебаний, связанный с этим видом трения, зависит от амплитуды колебаний, и при высокой амплитуде колебаний исследуемой форсуночной пружины он составил 0.03 ... 0.04, что примерно соответствовало вкладу внутреннего гистерезисного трения. Ранее на необходимость учёта сухого трения в опорах пружины указывалось в монографии [9].

При моделировании граничных условий для пружин такого типа в [10] получено матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где вектор \vec{y} объединяет группу координат, отвечающую поперечным колебаниям пружины (y_1 – угол качания β , y_2 , y_3 – радиальное u и тангенциальное w перемещения сечения); $A = [A_{ij}]$ – матрица податливости с квадратными блоками A_{ij} ; $i, j=1, 2$; вектор обобщённых сил \vec{f} отвечает группе поперечных колебаний.

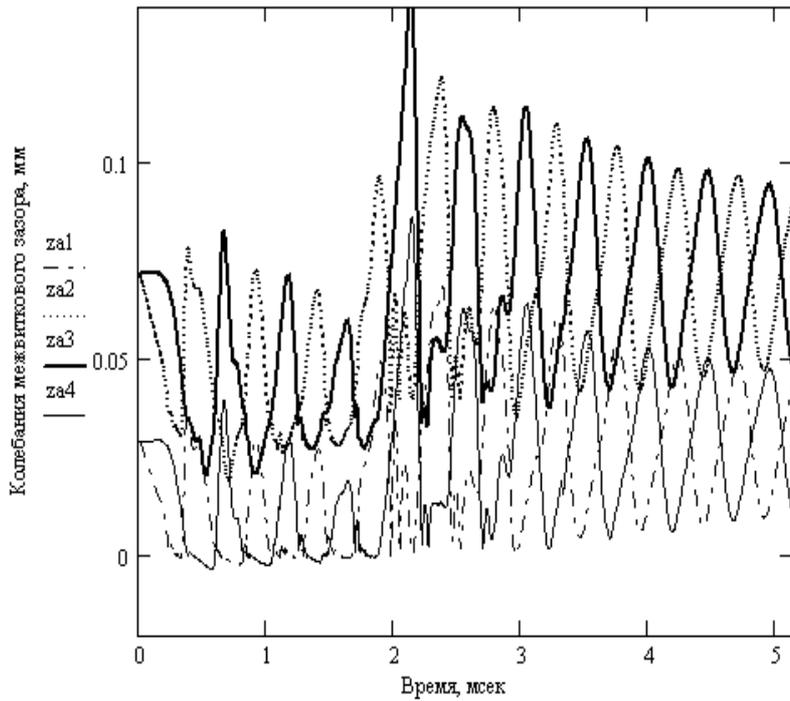


Рис. 11 – Изменение зазоров вблизи опорных витков при соударениях.

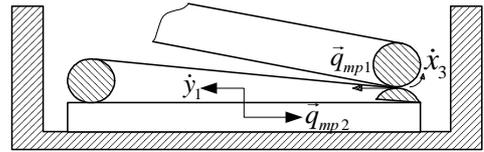


Рис. 12 – Силы и моменты сил, действующие в опорном витке.

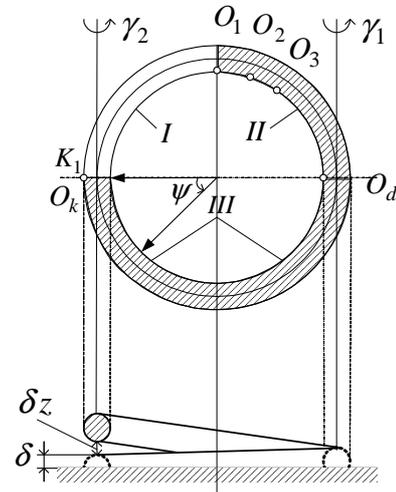


Рис. 13 – Схема опорного витка: I – висвящая, II – падающая, III – лежащая части; шлифованная часть заштрихована.

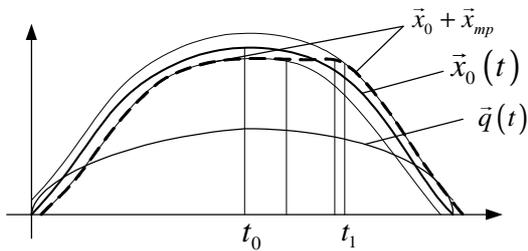


Рис. 14 – График перемещения без учета и с учетом силы трения.

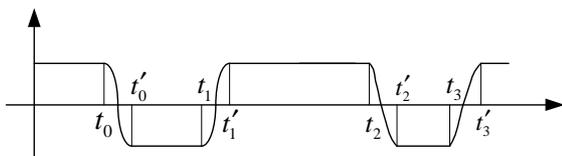


Рис. 15 – График силы трения.

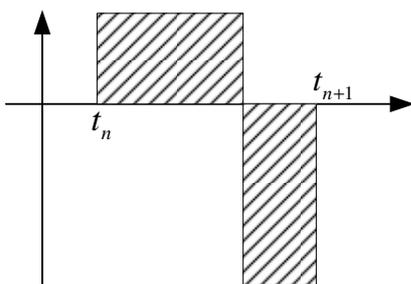


Рис. 16 – График ускорения.



Рис. 17 – Алгоритм учета сухого трения в опорах.

В [10] было принято, что в точках контакта движущегося и опорного витка имеет место качение цилиндри-

ческих поверхностей, а опорная тарелка (или шайба) пружины перемещается в плоскости, перпендикулярной оси пружины, без сопротивления. Ясно, что такие допущения идеализируют реальную картину, и поэтому соответствующее граничное условие

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = \bar{0} \quad (3)$$

в [1] названо *идеальным*. В действительности при существенной амплитуде колебаний вместо качения поверхностей наблюдается скольжение, что требует учёта трения (рис. 12). Сила трения q_{mp1} создаёт одинаковые моменты по кручению и изгибу. В результате условие (3) приобретает иной вид:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot (\bar{q} - \bar{q}_{mp}) = \bar{0}, \quad (4)$$

где

$$\bar{q}_{mp} = \chi \cdot (N_1 / c) \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot (0 \ 1 \ 1)^T; \quad (5)$$

$N_1 \approx 0.5 q_1$ – прижимающая сила; χ – коэффициент сухого трения; c – индекс пружины.

При выводе формулы (5) было принято, что изменение знака углового ускорения $\dot{\omega}$ совпадает с моментом достижения экстремума перерезывающей силы \dot{q}_1 , действующей в крайнем рабочем сечении пружины.

Кроме того, между тарелкой пружины и корпусом действует трение, направление которого противоположно движению опоры. Результаты, полученные в [10], позволяют определить направление перемещения опоры. Используя матричное уравнение при значении $\bar{f} \approx \bar{0}$, получаем

$$\bar{y} \approx -A_{21} \cdot \bar{q}.$$

Анализ этого соотношения показывает, что перерезывающая сила не оказывает влияния на поперечную деформацию; кроме того $y_3 \approx 0$.

Следовательно, опора перемещается в радиальном направлении и поворачивается вокруг оси, проходящей через точку контакта K_1 (рис. 13). Среднее плечо силы трения для остальных контактных точек приближённо равно радиусу витка пружины R , а суммарная реакция –

$$N_2 \approx 0.5 \cdot q_1$$

В результате получена приближённая формула для соответствующей силы и момента сил трения:

$$\bar{f}_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) (0,5 \ 1 \ 0)^T. \quad (6)$$

Подстановка (6) вместо вектора \bar{f} в уравнение

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} + A_{12} \cdot \bar{f} = \bar{0}$$

приводит к новому граничному условию:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = -A_{12} \cdot f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot (0,5 \ 1 \ 0)^T. \quad (7)$$

Объединяя результаты (4) и (7), получаем:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = \bar{x}_{mp}(t), \quad (8)$$

где

$$\bar{x}_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot \left[c^{-1} \cdot A_{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (9)$$

Порядок учёта трения. Таким образом, влияние сухого трения удалось свести к учёту дополнительного (условного) движения опоры. Это движение включает в себя перемещение по трём координатам и его «направление» в пространстве продольных координат x_1, x_2, x_3 определяется вектором

$$\bar{v} = c^{-1} \cdot A_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При скольжении поверхностей величина χ постоянна ($\chi = \chi_{mp}$), величина $q_1 \approx const$, поэтому $\bar{x}_{mp} \approx const$. В результате график изменения \bar{x} после учета трения начинает "отставать" от прежнего графика \bar{x}_0 (без учета трения), причем он отстает на одинаковую величину, но в разные стороны (рис. 14).

График $\bar{x}_{mp}(t)$ имеет, в основном, вид кусочно-постоянной линии, отдельные "полочки" которой соедине-

ны переходными участками (рис. 15).

Заметим, что на переходных участках (t_n, t'_n) коэффициент трения $f < f_{mp}$ и сила трения определяется условием отсутствия скольжения трущихся поверхностей, то есть перемещение практически постоянно. Кроме того, длина этих участков, как правило, не велика, и поэтому условие $\ddot{x} \approx const$ эквивалентно такому:

$$\ddot{x}_{mp}(t) = A_{11} \cdot \ddot{q}_{mp}(t_n) = const, \tag{11}$$

где в момент времени t_n :

$$q_1(t_n) = 0 \text{ и } \dot{x}_{mp}(t_n) = \vec{0}.$$

Условие (11) выполняется на большей части переходного участка, но в конце этого участка знак ускорения меняется на противоположный (рис. 16).

Амплитуды ускорений выбираются так, что к концу переходного участка производная $\dot{x}_{mp}(t'_n) = \vec{0}$.

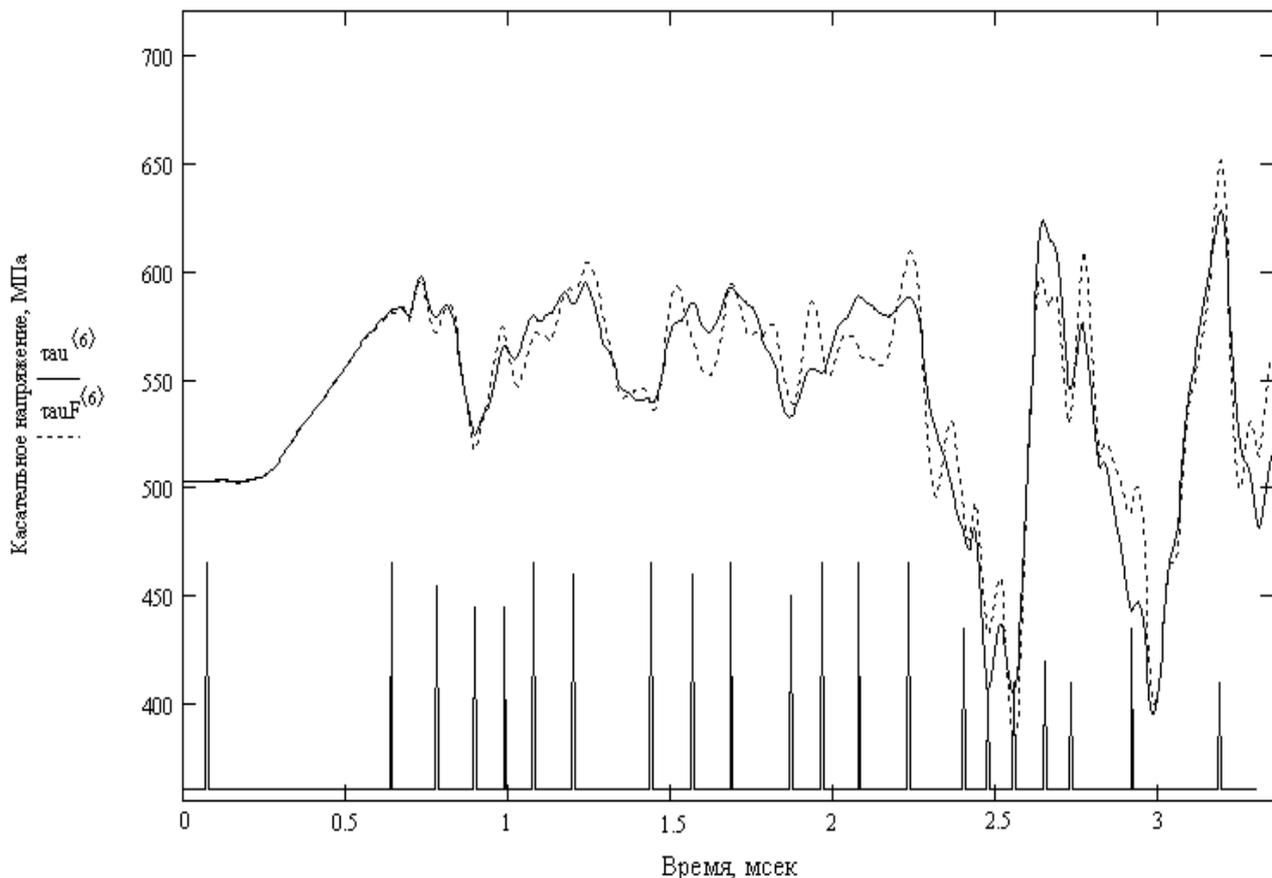


Рис. 18 – Влияние сухого трения на расчетные касательные напряжения у неподвижной опоры пружины форсунки дизеля ЯМЗ-238 (столбиками отмечены моменты переключения силы трения).

Алгоритм решения задачи проиллюстрирован на рис. 14, где дополнительные перемещения и силы находятся по формулам:

$$\vec{x}_0(t, \theta) = x_{mp}(t) \cdot \vec{x}h_{mp}(\theta) + \ddot{x}_{mp}(t) \cdot \vec{x}w_{mp}(\theta) + \int_0^t \vec{K}_{x_{mp}}^w(t - \tau, \theta) d\ddot{x}_{mp}(\tau);$$

$$\vec{q}_0(t, \theta) = z \cdot x_{mp}(t) \cdot \vec{q}h_{mp}(\theta) + \frac{m}{3} \cdot \ddot{x}_{mp}(t) \cdot \vec{q}w_{mp}(\theta) + \int_0^t \vec{K}_{q_{mp}}^w(t - \tau, \theta) d\ddot{x}_{mp}(\tau); \quad x_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1),$$

а ядра статических, квазистатических и динамических составляющих, используемые в этих формулах, получают в результате взвешенного суммирования ядер, отвечающих отдельным видам движения опоры:

$$\vec{x}h_{mp} = (\vec{x}_1h_{mp} \quad \vec{x}_2h_{mp} \quad \vec{x}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \quad \vec{q}h_{mp} = (\vec{q}_1h_{mp} \quad \vec{q}_2h_{mp} \quad \vec{q}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \text{ и т.д.}$$

Данные ядра, как и все другие ядра разработанного метода, вычисляются в начале работы программы, а используются многократно. Кроме того, при расчёте установившихся колебаний моделирование одного цикла деформации также приходится выполнять многократно:

$$\vec{x}h_{mp} = (\vec{x}_1h_{mp} \quad \vec{x}_2h_{mp} \quad \vec{x}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \quad \vec{q}h_{mp} = (\vec{q}_1h_{mp} \quad \vec{q}_2h_{mp} \quad \vec{q}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \text{ и т.д.}$$

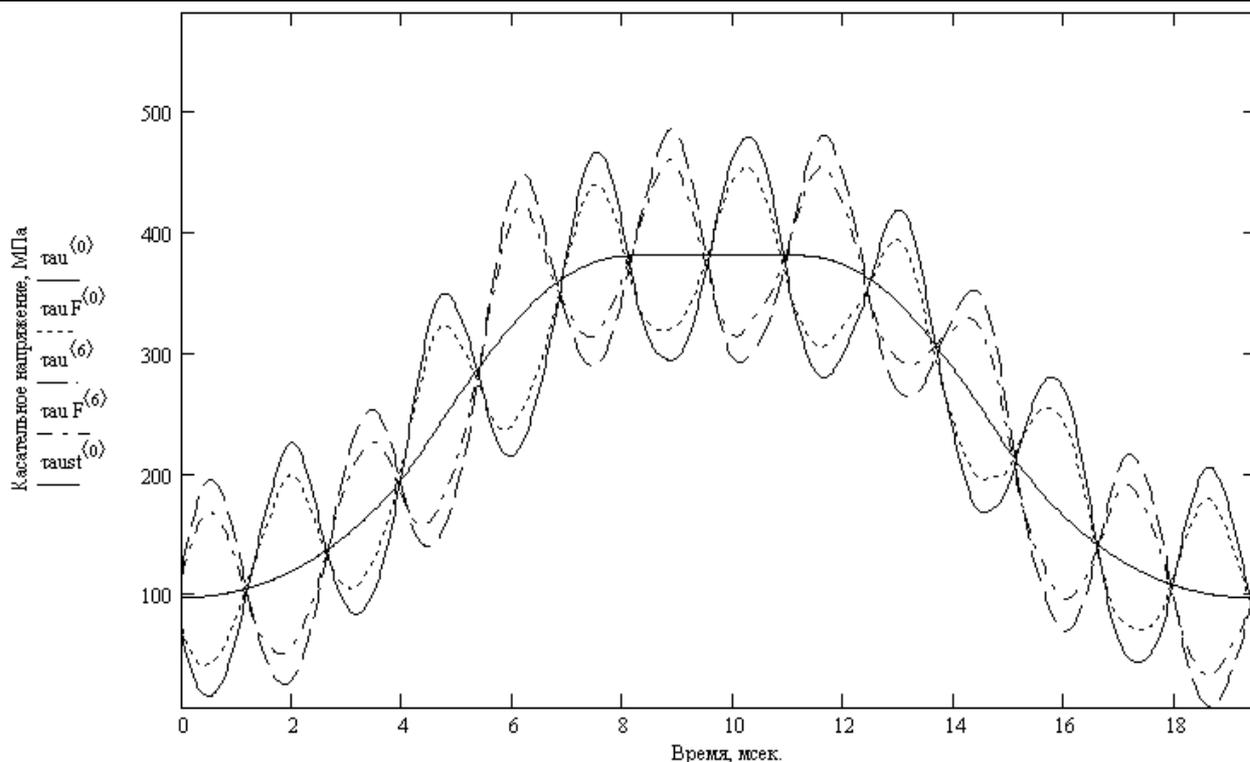


Рис. 19 – Влияние сухого трения на касательные напряжения у подвижной опоры (индекс 6) и неподвижной опоры (индекс 0) пружины плунжера топливного насоса дизеля СМД-31. Сплошной линией показан результат квазистатического расчета.

Данные ядра, как и все другие ядра разработанного метода, вычисляются в начале работы программы, а используются многократно. Кроме того, при расчёте установившихся колебаний моделирование одного цикла деформации также приходится выполнять многократно.

Результат применения метода для расчёта пружины форсунки (установившиеся колебания) и пружины плунжера (установившиеся колебания) показаны на рис. 18, 19. Заметим, что в случае установившихся колебаний можно воспользоваться известным *методом гармонической линеаризации* сухого трения; тем более, что правомочность такого решения подтверждается формой расчетных кривых рис. 19, на которых, фактически, присутствует только лишь одна гармоника, а остальные малы. Однако указанный переход нецелесообразен, поскольку задача колебаний пружины пусть и останется линейной, но её граничные условия не будут порождать самосопряженный дифференциальный оператор [11], и мы не сможем использовать его собственные формы.

Выводы. Разработан численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий при расчете установившихся и установившихся колебаний пружины.

В нем использована линейная модель связанных продольно – поперечных колебаний винтового стержня при симметричных условиях закрепления крайних витков.

Решения уравнений этой модели представлены в форме интегралов с разностными ядрами типа Коши или Фредгольма, что позволило сохранить невысокую трудоемкость метода.

Асимметрия граничных условий и/или факторы нелинейности учтены как малые дополнительные силовые воздействия, возникающие в процессе колебаний и уточняемые при использовании метода простой итерации.

Рассмотрены примеры практической реализации такого подхода для учета нелинейное сопротивление среды при установке пружины в узком канале, заполненном вязкой жидкостью, а также соударений витков и сухого трение в опорах, которые доказали его эффективность при решении указанных задач.

Список литературы

1. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Методика расчёта установившихся колебаний в цилиндрической пружине сжатия // Вісник НТУ «ХП». – Харків, 2005. – № 12. – С. 119 – 128.
2. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Численно-аналитический метод динамического анализа установившихся колебаний пружины // Вісник НТУ «ХП». – Харків, 2005. – № 22. – С. 149 – 160.
3. Григорьев А. Л., Вештак И. А. Проектирование пружин, испытывающих динамические нагрузки // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков : ХГПУ, 1999. – Вып. 65. – С. 122 – 128.
4. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Алгебраический метод последовательной локализации спектра и расчета частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня // Вісник НТУ «ХП» Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – № 39 (1082). – С. 45 – 70.
5. Григорьев А. Л., Вештак И. А. Методика определения параметров заневоливания пружин дизельных форсунок // Високі технології в машинобудуванні : Зб. наук. праць. – Харків : ХДПУ, 1999. – С. 93 – 96.
6. Корчемный Л. В. Механизмы газораспределения автомобильного двигателя. – М. : Машиностроение, 1981 – 211 с.

7. Кухлинг Х. Справочник по физике. – М. : Наука, 1982. – 419 с.
8. Григорьев А. Л., Король С. А., Дерієнко А. И. Экспериментальное и расчётное исследование колебаний витков пружины дизельной форсунки // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2005. – № 37. – С. 159 – 168.
9. Хвингия М. В. Вибрация пружин. – М. : Машиностроение, 1969 – 287 с.
10. Григорьев А. Л., Дерієнко А. И. Моделирование граничных условий при анализе колебаний пружины со шлифованным торцом // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2005. – Вып. № 1 (30). – С. 45 – 52.
11. Наймарк А. М. Линейные дифференциальные операторы. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

References (transliterated)

1. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Metodika rascheta neustanovivshikhnya kolebaniy v tsilindricheskoy pruzhine szhatiya [Method of computing transient oscillations of a cylindrical compression spring]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Buletting of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 12, pp. 119–128.
2. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Chislenno-analiticheskiy metod dinamicheskogo analiza ustanovivshikhnya kolebaniy pruzhyny [Numerical-analytical method for dynamical analysis of spring steady-state oscillations]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Buletting of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 22, pp. 149–160.
3. Grigor'ev A. L., Veshtak I. A. Proektirovaniye pruzhin, ispytyvayushchikh dinamicheskiye nagruzki [Designing springs under dynamical loads]. *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kharkov State Polytechnic University]. Kharkov, KhGPU Publ., 1999, no. 65, pp. 122–128.
4. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Algebraicheskiy metod posledovatel'noy lokatsii spectra i rascheta chastot svobodnykh kolebaniy vintovogo tsilindricheskogo sterzhnya [Algebraic method for sequential localization of spectrum and computing frequencies of free oscillations of cylindrical helical spring]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2014, no. 39 (1082), pp. 45–70.
5. Grigor'ev A. L., Veshtak I. A. Metodika opredeleniya parametrov zanevolivaniya pryzhin dizel'nykh forsunok [Method for determining diesel injector spring hardening parameters]. *Vysoki tekhnologiyi v mashinobuduvanni : Zb. nauk. prats'* [High tech in mechanical engineering: collected scientific works]. Kharkov, KhDPU Publ., 1999, pp. 96–96.
6. Korchemnyy L. V. *Mekhanizmy gazoraspredeleniya avtomobil'nogo dvigatelya* [Automobile engine gas distribution mechanism]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1981. 211 p.
7. Kuhlning Kh. *Spravochnik po fizike* [Handbook in Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 419 p.
8. Grigor'ev A. L., Korol' S. A., Deriyenko A. I. Ekspeymental'noye i raschetnoye issledovaniye kolebaniy vitkov pruzhiny dizel'noy forsunki [Experimental and numerical study of diesel injector spring coil oscillations]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 37, pp. 159–168.
9. Khvingiya M. V. *Vibratsiya pruzhin* [Spring vibration]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1969. 287 p.
10. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Modelirovaniye granichnykh usloviy pri analize kolebaniy pruzhiny so shlifovanntm tortsom [Modeling boundary conditions when analyzing oscillations of spring with polished end]. *Visnyk KDPU* [Buletting of KSPU]. Kremenchyk, 2005, no. 1 (30), pp. 45–52.
11. Naymark A. M. *Lineynyye differentsial'nyye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 528 p.

Поступила (received) 27.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розрахунок вимушених коливань пружини при асиметрії крайових умов та врахуванні факторів нелінійності / О. Л. Григор'єв, А. І. Дерієнко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 39 – 50. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Расчёт вынужденных колебаний пружины при асимметрии граничных условий и учете факторов нелинейности / А. Л. Григорьев, А. И. Дерієнко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 39 – 50. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Calculation of forced oscillations of a spring with asymmetric boundary conditions taking into account the nonlinearity factors / A. L. Grigoriev, A. I. Deriyenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 39 – 50. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Дерієнко Андрій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, м. Кременчук; тел.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.

Дерієнко Андрей Иванович – кандидат технических наук, доцент, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, г. Кременчуг; тел.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.

Deriyenko Andriy Ivanovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kremenchuk Mychailo Ostrohradskiy National University, Kremenchuk, tel.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.

П. С. ЗАВЬЯЛОВ, Ю. М. КУХТЕНКОВ, Ю. А. ПОДВОЙСКИЙ, В. Д. ВАРЕНКО

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АМПЛИТУД НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В ОБРАТИМОЙ ГИДРОМАШИНЕ

Розглядається апробація розробленої раніше математичної моделі і методу розрахунку низькочастотних (джгутових) пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі, перевірених експериментом (моделним і натурним) на ряді радіально-осьових гідротурбін, стосовно оборотних гідромашин типу ОРО в турбінному режимі, зокрема до ОРО170. Необхідні для розрахунку геометричні параметри вихрових джгутів отримані на підставі фотографування потоку у відсмоктуючій трубі на модельному блоці в ГТЛ НПО «Турбоатом». Наведено результати розрахунку амплітуд пульсацій тисків і їх порівняння з експериментальними даними.

Ключові слова: математична модель, геометричні параметри вихрових джгутів, апробація методу розрахунку, оборотна радіально-осьова гідромашина, робоче колесо, циркуляція потоку, інтенсивність вихрового джгута, осесимметрична течія, джгутові пульсації тиску.

Рассматривается апробация разработанной ранее математической модели и метода расчета низкочастотных (жгутовых) пульсаций давления в отсасывающей трубе, проверенных экспериментом (моделным и натурным) на ряде радиально-осевых гидротурбин, применительно к обратимым гидромашинам типа ОРО в турбинном режиме, в частности к ОРО170. Необходимые для расчета геометрические параметры вихревых жгутов получены на основании фотографирования потока в отсасывающей трубе на модельном блоке в ГТЛ НПО «Турбоатом». Приведены результаты расчета амплитуд пульсаций давлений и их сравнение с экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическая модель, геометрические параметры вихревых жгутов, апробация метода расчета, обратимая радиально-осьевая гидромашина, рабочее колесо, циркуляция потока, интенсивность вихревого жгута, осесимметричное течение, жгутовые пульсации давления.

In the paper applicability of the mathematical model and the method for calculating low-frequency pressure pulsations in a suction tube, previously developed and verified by experiments (model and full-scale) on a number of radial-axial hydroturbines, to reversible hydro machines of the ORO type in the turbine mode, in particular to ORO170, is discussed. The geometric parameters of the vortex swirls necessary for the calculations are obtained on the basis of the photos of the flow in the suction pipe of the model block in the SPA "Turboatom" hydroturbine laboratory. The results of calculating the amplitudes of pressure pulsations are presented and compared with experimental data.

Key words: mathematical model, geometric parameters of vortex swirls, calculation method approbation, reversible radial-axial hydraulic machine, impeller, flow circulation, vortex swirl intensity, axisymmetric flow, pressure pulsations.

Введение. В работах [1 – 3] с учетом результатов [4] были рассмотрены пространственная математическая модель и метод расчета низкочастотных пульсаций давления в отсасывающей трубе (ОТ) жестколопастной гидротурбины и обратимой гидромашини типа ОРО в турбинном режиме. В [5] приведена усовершенствованная математическая модель. Однако численная реализация вышеуказанных разработок, а также сравнение теоретических результатов с экспериментальными для оценки точности расчетов, выполнялось, в основном, для различных гидротурбин типа РО и ПР [3, 5]. Учитывая важность таких исследований и для обратимых гидромашин, они были проведены, и для гидромашини ОРО170 в зоне турбинного режима, в основном, при пониженных приведенных оборотах n'_1 .

Основные положения математической модели и метода расчета низкочастотных (жгутовых) пульсаций давления (ПД). На основании многочисленных исследований потока в ОТ с его визуальным наблюдением и фотографированием, проведенных в НТУ «ХПИ» и НПО «Турбоатом» [6, 7], а также [4, 8, 9] и в других работах установлено, что *вихревые жгуты* (ВЖ) за рабочим колесом (РК) гидротурбины и в турбинном режиме обратимых гидромашин при недогрузке и перегрузке имеют сложную спиралеобразную форму. Поэтому в математической модели рассматривается произвольное число ВЖ винтовой спиральной формы с постоянным шагом. Внутренняя стенка ОТ, как и в [4], моделируется вихревой поверхностью, состоящей из элементарных *вихревых нитей* с шагом, равным шагу основных (физических) вихрей и с переменной интенсивностью. Задача рассматривается в квазистационарной постановке; жидкость принимается невязкой и несжимаемой. Поток вне вихрей при определении индуцированных скоростей принимается потенциальным. Учитывается также дополнительный осесимметричный поток, обусловленный прохождением жидкости через РК гидромашини. Задача сводится к определению скоростей и давлений в ОТ в тех поперечных сечениях, где обычно устанавливаются датчики измерения пульсаций давления (ПД). Суммарную скорость в произвольной точке ОТ находим из выражения:

$$\vec{V} = \sum_{s=1}^{z_{ж}} \vec{V}_{жs} + \vec{V}_{п} + \vec{V}_{q}, \quad (1)$$

где $\vec{V}_{жs}$ – скорость, индуцированная физическим ВЖ с порядковым номером s ; $\vec{V}_{п}$ – скорость, индуцированная вихревой поверхностью внутренней стенки отсасывающей трубы; \vec{V}_{q} – скорость дополнительного осесимметричного потока, состоящая из осевой (расходной) V_{qz} и окружной (циркуляционной) $V_{q\varphi}$ компонент; $z_{ж}$ – число вихревых жгутов, $1 \leq s \leq z_{ж}$ [5].

Скорости, индуцируемые физическими и моделирующими вихревыми нитями, определяются по формулам, полученным из известного решения при заданном распределении вихрей и расхождения скорости [10]:

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}, \tag{2}$$

где

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } \vec{V}(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\Omega}(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

Здесь $A(\vec{r})$ – векторный потенциал; $\varphi(\vec{r})$ – скалярный потенциал; $\vec{\Omega}(\vec{r}')$ – удвоенная угловая скорость, причем, поскольку для несжимаемой жидкости $\text{div } \vec{V} = 0$, то $\text{grad } \varphi = 0$, следовательно, $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$.

В окончательных формулах проекции скорости $\vec{V}(V_r, V_\varphi, V_z)$ выражены через геометрические параметры ВЖ и его интенсивность $\Gamma = \Omega\sigma$, где $\Gamma = \Gamma_{2\text{ вт}} / z_{\text{ж}}$, $\Gamma_{2\text{ вт}}$ – циркуляция потока за РК в зоне втулки [3, 5]. Незвестная функция напряженности вихревого слоя $\gamma(\alpha_2)$, входящая в проекции скорости $\vec{V}_\Pi(V_{\Pi r}, V_{\Pi\varphi}, V_{\Pi z})$, определяется при выполнении граничного условия на стенке трубы (3) и дополнительной зависимости (4):

$$\sum_{s=1}^{z_{\text{ж}}} V_{\text{жрс}} + V_{\Pi r} = 0, \tag{3}$$

$$R \sin \beta_\Pi \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha_2) d\alpha_2 = -\Gamma_{2\text{ вт}}, \tag{4}$$

где $\beta_\Pi = \text{arctg}(\bar{e}\text{tg} \beta_{\text{ж}})$ – угол наклона вихревой нити вихревой поверхности; R – радиус стенки ОТ в расчетном сечении; α_2 – угол смещения вихревой нити слоя относительно винтовой линии основного (физического) ВЖ.

Преобразование уравнения (3) после подстановки в него выражений для $V_{\text{жрс}}$ и $V_{\Pi r}$ приводит к интегральному уравнению Фредгольма I рода [4], непосредственное решение которого из-за погрешностей вычислительного метода не всегда обеспечивает достаточную точность расчетов [11]. Поэтому неизвестную функцию $\gamma(\alpha_2)$ задаем в виде отрезка ряда Фурье (5) с неизвестными коэффициентами x_k , которые в дальнейшем определяем из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричном виде [1 – 3]:

$$\gamma(\alpha_2) = -\frac{\Gamma}{R\pi \sin \beta_\Pi} + \sum_{k=1}^n x_k \cos k\omega\alpha_2 + \sum_{k=1}^n x_{k+n} \sin k\omega\alpha_2. \tag{5}$$

Минимальное число расчетных точек, расположенных равномерно по периметру поперечного сечения ОТ (расчетное сечение), для которых записывается (3) в виде уравнения Фредгольма I рода, равно $2n$, где n – задаваемое число гармоник ряда Фурье. Однако для повышения точности расчета принимается число расчетных точек значительно больше ($2n$), то есть, переходим к переопределенной СЛАУ:

$$Ax = b, \tag{6}$$

где A – уже не квадратная матрица, а прямоугольная размера $p \times 2n$, $p = 2\pi n$, а x – искомый вектор-столбец; b – известный вектор-столбец. Для определения неизвестных коэффициентов x_k используем метод наименьших квадратов. Выбор решения ведем по полученной минимальной невязке

$$s = \sum_{i=1}^p \left[b_i - \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} x_j \right]^2 \rightarrow \min$$

системы уравнений (6).

Тогда решение исходной СЛАУ находится из модифицированной задачи [12]:

$$\tilde{A}Ax = \tilde{A}b, \tag{7}$$

где \tilde{A} – транспонированная матрица; $\tilde{A}A$ – квадратная матрица размера $2n \times 2n$ независимо от того, как сильно была переопределена система (6). Решение системы (6) уточняем методом прямого поиска Хука-Дживса.

После определения коэффициентов x_k вычисляем $\gamma(\alpha_2)$, где α_2 задается в пределах от 0 до 2π с учетом особенностей в этих точках, далее находим проекции скоростей $\vec{V}_\Pi(V_{\Pi r}, V_{\Pi\varphi}, V_{\Pi z})$, а затем и суммарные скорости из (1); причем

$$V_{qz} = Q / \pi \cdot R^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{z_{\text{ж}}} \bar{d}_{\text{ж}}^2 \right) \text{ и } V_{q\varphi} = \frac{\Gamma_{2\text{ пер}} - \Gamma_{2\text{ вт}}}{2\pi R}.$$

Двойную амплитуду пульсаций давления вычисляем с использованием интеграла Бернулли

$$\left(\frac{2A}{H} \right) \% = \frac{V_{\text{max}}^2 - V_{\text{min}}^2}{2gH} \cdot 100\%. \tag{8}$$

Геометрические параметры вихревых жгутов. Для численного прогнозирования амплитуд и частот пульсаций давления в широком диапазоне в поле универсальной характеристики в соответствии с используемой математи-

ческой моделью необходимы зависимости относительного эксцентриситета ВЖ ($\bar{e} = e / R$), относительного диаметра ВЖ $\bar{d} = d_{\text{ж}} / 2R$ и угла наклона вихревой нити ($\beta_{\text{ж}}$) от n'_1 и Q'_1 . Для расчета и прогнозирования амплитуд пульсаций для выбранных режимов достаточно только зависимостей для \bar{e} и $\beta_{\text{ж}}$ [1]. Они были получены на основании фототрафий при визуальных исследованиях потока в диффузоре ОТ.

Для определения этих параметров могут применяться также и другие экспериментальные методы – зондирование потока безинерционными зондами, с применением лазерной техники и др. Для получения аппроксимационных зависимостей геометрических параметров ВЖ в поле универсальной характеристики в зоне эксплуатации гидромашин достаточно определить геометрические параметры для 3 – 5 значений $n'_1 = \text{const}$ и для каждого из них по 5 – 6 точек с разными Q'_1 . Для этого используются полиномы 3-й степени относительно линий уровня нулевой циркуляции вида [5]:

$$\bar{e}(\bar{n}'_1, \bar{Q}'_1) = a_0 + a_1 \left(\frac{\bar{Q}'_1}{\bar{n}'_1} - 1 \right) + a_2 \left(\frac{\bar{Q}'_1}{\bar{n}'_1} - 1 \right)^2 + a_3 \left(\frac{\bar{Q}'_1}{\bar{n}'_1} - 1 \right)^3, \quad (9)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – коэффициенты, которые являются полиномами 2-й степени от $(\bar{n}'_1 - 1)$ [3].

Численные исследования с экспериментальной проверкой, выполненные для модельных турбин РО115-РО310, показали, что аппроксимационные зависимости для геометрических параметров ВЖ $\bar{e}, \bar{d}, \beta_{\text{ж}}$ в поле $(n'_1 - Q'_1)$ вида (9) для РО170 могут быть с достаточной точностью использованы для турбин РО115-РО310. Примерно аналогичные выводы при исследовании модельных РО турбин других типов приведены в [8].

Однако для ОРО170/5217 модельные исследования с визуализацией потока были проведены по производственным условиям для малого числа режимов. Для близких по напору и быстроходности гидромашин типа ОРО данных по геометрическим параметрам ВЖ также недостаточно. Поэтому в данном случае не представлялось возможным получить аппроксимационные зависимости, как для гидротурбин, а, следовательно, и выполнить численные исследования ПД для всех возможных режимов работы гидромашин ОРО170 в турбинном режиме.

В связи с этим в данной работе геометрические параметры ВЖ приведены не в виде аппроксимационных зависимостей, аналогичных (9), а дискретно для нескольких режимных точек (табл. 1). Поэтому и амплитуды ПД рассчитаны только для этих режимов.

Определение интенсивности вихревого жгута за рабочим колесом. Интенсивность вихревого жгута и функция напряженности вихревого слоя стенки ОТ $\gamma(\alpha_2)$ определяются по значению циркуляции потока за колесом вблизи втулки РК. Для расчета циркуляции потока вдоль выходной кромки необходимо вычисление меридиональной скорости. Ее можно принять в первом приближении из равнораспределенного меридионального потока. Дальнейшее ее уточнение при заданной геометрии лопасти выполняем с помощью уравнения упрощенной модели осесимметричного потока [13] вида

$$\frac{dV_m}{dl} + M(l)V_m = N(l), \quad (10)$$

Зная скорость V_m , определяем приведенную циркуляцию за рабочим колесом у втулки:

$$\Gamma'_{12\text{вт}} = \pi \bar{R}_{\text{вт}} (k_z \bar{R}_{\text{вт}} \pi \frac{n'_1}{60} - V'_m \text{ctg } \beta_{\text{вт}}), \quad (11)$$

где k_z – коэффициент, учитывающий конечное число лопастей; $\bar{R}_{\text{вт}} = 2R_{\text{вт}} / D_1$.

Интенсивность вихревого жгута Γ принимается равной циркуляции $\Gamma'_{12\text{вт}}$ за РК для одновихревой схемы. При наличии 2-х или 3-х жгутов их интенсивность соответственно принимается $\Gamma'_{12\text{вт}} / 2$ и $\Gamma'_{12\text{вт}} / 3$ [3].

Наличие принятых допущений для коэффициентов $M(l)$ и $N(l)$ в (10) потребовало введение поправки на величину циркуляции за РК $\Delta \Gamma'_{12\text{вт}} = \Gamma'_{12\text{вт, опт}}$, где $\Gamma'_{12\text{вт, опт}}$ рассчитывается на основании вышеизложенного метода расчета в точке оптимума универсальной характеристики гидромашин. Поэтому расчеты выполняем с использованием уточненного значения приведенной циркуляции за РК:

$$\Gamma'_{12\text{вт, ут}} = \Gamma'_{12\text{вт}} - \Delta \Gamma'_{12\text{вт, опт}}.$$

С целью повышения точности расчета меридионального потока, а, следовательно, и $\Gamma'_{12\text{вт, ут}}$, характеризующей интенсивность вихревого жгута, расчеты можно выполнять, используя современные программы трехмерного течения с учетом вязкости жидкости, типа *FlowVision, Fluent, Ansys* и др. Однако это требует значительно большего времени. Поэтому для экспресс-оценки ПД возможно использование упрощенной осесимметричной задачи, обеспечивающей достаточную точность расчетов.

Результаты численных и экспериментальных исследований. Программы для расчета амплитуд и частот ПД, а также вычисления интенсивности ВЖ через циркуляцию за РК были разработаны на языке Фортран и в пакете *MathCAD*. Численные эксперименты проведены на персональных компьютерах. Результаты расчета циркуляции за РК у втулки $\Gamma'_{12\text{вт, ут}}$ и ПД в виде $(2A/H)_p$ % приведены в табл. 1:

Таблиця 1 – Результати определения геометрических параметров ВЖ, расчета приведенной циркуляции у втулки за РК $\Gamma'_{12вт,ут}$ и амплитуд жгутовых ПД за РК в ОТ

a_0 , мм	35	45	45	55	35
n'_1 , мин ⁻¹	61	70	76	75	92,6
Q'_1 , м ³ /с	0,4	0,48	0,475	0,535	0,403
$\beta_{ж}$	50	40	50	50	–
\bar{e}	0,45	0,37	0,3	0,6	–
$\Gamma'_{12вт,ут}$	-2,53	-3,088	-2,545	-3,547	0,047
$(2A/H)_p$ %	3,0	3,8	3,0	5	≈0
$(2A/H)_y$ %	4,5	3,5	2,5	3,8	≈0

Столбцы 1 – 4 таблицы соответствуют модельной гидромашине ОРО170-В-50 с РК ОРО170/5217. В последнем столбце табл. 1 приведены результаты натурных испытаний в турбинном режиме для гидромашин ОРО170/5217-В-730, полученные доц. Бондаренко А. В. при $H = 147,5$ м, что соответствует точке на универсальной характеристике с $n'_1 = 92,6$ мин⁻¹ и $Q'_1 = 0,403$ м³с⁻¹, находящейся вблизи линии нулевой циркуляции за РК. По расчету на этом режиме $\Gamma'_{12вт,ут} = 0,047$, следовательно, $(2A/H)_p$ % ≈ 0, что согласуется с экспериментом.

Суммарная двойная амплитуда ПД зарегистрированная на этом режиме $(2A/H)_y$ % = 2,4 %, однако, в частотном спектре нет низкочастотной (жгутовой) составляющей, что согласуется с принятой нами математической моделью [1, 5], в которой интенсивность ВЖ является причиной низкочастотных ПД, принимается равной циркуляции за РК у втулки.

Из табл. 1 следует, что амплитуды ПД, полученные расчетом $(2A/H)_p$ % и экспериментом $(2A/H)_y$ %, достаточно хорошо согласуются. В связи с этим математическую модель и метод расчета жгутовых ПД, можно использовать для численного прогнозирования жгутовых ПД в турбинном режиме обратимых гидромашин типа ОРО.

Лабораторные испытания проводились на модельном блоке ОРО170/5217-50 в ГТЛ НПО «Турбоатом». Для исследованных режимов были определены геометрические параметры ВЖ. ПД измеряются с использованием тензометрических датчиков давления.

Эти режимы соответствуют, в основном, правой нижней зоне универсальной характеристики модельной гидравлической машины, где обычно в жестколопастных гидротурбинах и турбинном режиме обратимых гидравлических машин имеют место большие амплитуды ПД в связи с большой отрицательной циркуляцией потока.

Следует отметить, что эта зона находится ниже области нормальной эксплуатации Днестровской гидравлической машины ($n'_{1\max} = 95$ мин⁻¹, $n'_{1\min} = 87,4$ мин⁻¹, $n'_{1\text{расч}} = 94,2$ мин⁻¹) [14], но представляет интерес при анализе жгутовых ПД при работе на переходных режимах. Полученные результаты могут быть также использованы для обратимых гидромашин ГАЭС с близкими техническими параметрами.

Выводы. Сравнение амплитуд низкочастотных (жгутовых) ПД, полученных расчетом и физическим экспериментом, на основе модельных испытаний, а также данные натурных испытаний, свидетельствуют о достаточной точности математической модели и метода расчета, апробированных ранее для жестколопастных гидротурбин, а, в данном случае, и для обратимой гидромашин ОРО170 в турбинном режиме.

Уровень амплитуд низкочастотных (жгутовых) ПД для исследованных турбинных режимов обратимой гидромашин ОРО170/5217, существенно влияющих на динамические нагрузки и вибрацию гидроагрегата, является допустимым.

Список литературы

1. Завьялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойский Ю. А. Прогнозирование пульсаций давлений от нескольких вихревых жгутов за рабочим колесом РО гидротурбины // Вісник НТУ «ХП». – Х. : НТУ «ХП», 2001. – Вып. 129, Т.1. – С. 95 – 104.
2. Завьялов П. С. Методы численного определения напряженности вихревого слоя в задаче пространственного вихря в отсасывающей трубе гидротурбины // Труды международной научно-технической конференции 12 – 14.05.97. Часть 2. ХГПУ, Мишкольцкий университет (Венгрия), Магдебургский университет (Германия). – Х. : ХГПУ, 1997. – С. 61 – 63.
3. Завьялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойский Ю. А. К методу расчета пульсационных характеристик от вихревых жгутов за рабочим колесом гидротурбины // Проблемы машиностроения. – Х. : ИПМаш НАНУ, 2003. – Т. 6. – № 2. – С. 84 – 92.
4. Григорьев В. Н. Определение пульсаций давления в отсасывающей трубе под действием вихря за рабочим колесом гидротурбины // Энергомашиностроение. – 1989. – № 9. – С. 42 – 44.
5. Завьялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойский Ю. А. Математическое моделирование низкочастотных пульсаций давлений в отсасывающих трубах жестколопастных гидротурбин и обратимых гидромашин // Вісник НТУ «ХП». Серія : Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х. : НТУ «ХП», 2014. – № 1 (1044). – С. 204 – 213.
6. Zavalov P., Veremeenko I., Diakin V. Investigation of unsteady flow phenomena in a water passage of model hydroturbine // 8th Symposium IAHR. Section for hydraulic machinery equipment and cavitations. – Leningrad, September 6 – 8, 1976. – P. 519 – 535.
7. Veremeenko I., Vapnik B., Zavalov P. Methods of reducing low-frequency pressure fluctuations behind Francis hydroturbine runner // 24 Kongress IAHR. – Madrid, September 9 – 13, 1991. – P. 315 – 319.
8. Пази Л. Г. Исследование периодических пульсаций давления в отсасывающих трубах гидротурбин // Труды ВНИИгидромаша. – Москва, 1968. – Вып. 37. – С. 34 – 42.
9. Kubota T., Jamada S. Effect of cone angle at draft tube inlet in hydraulic characteristics of Francis turbine // Symposium Operating Problems of Pump Sta-

- tions and Power Plants. – Amsterdam, The Netherlands, September 13 – 17, 1982. – P. 111 – 116.
10. Кошин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.: ГИТЛ, 1948. – 560 с.
 11. Лаврентьев М. М., Романов В. Г. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 287 с.
 12. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиздат, 1961. – 524 с.
 13. Эттингер И. Э., Раухман Б. С. Гидродинамика гидравлических турбин. – Л.: Машиностроение, 1978. – 280 с.
 14. Завьялов П. С., Вапник Б. К., Рыжов С. А., Рыбалко В. А. Исследование влияния формы статора на пульсации давления в обратимой гидромашине // Гидравлические машины. – Х.: ХПИ, 1988. – Вып. 22. – С. 24 – 27.

References (transliterated)

1. Zavyalov P. S., Kuhtenkov Y. M., Podvoyskiy Y. A. Prognozirovanie pul'satsiy davleniy ot neskol'kikh vikhrevykh zhgutov za rabochim kolesom RO gidroturbiny [Predicting pressure pulsations caused by several vertex swirls behind the radial-axial turbine wheel]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU "KhPI"]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ, 2001, no. 129, pp. 95–104.
2. Zavyalov P. S. Metody chislennogo opredeleniya napryazhennosti vikhrevoogo sloya v zadache prostranstvennogo vikhrya v otsasyvayuschey trube gidroturbiny [Methods of numerical determination of vertex layer strength for the problem of special vertex in the suction tube of a hydroturbine]. *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii 12 – 14.05.97. Chast 2. KHGPU, Mishkol'tskiy universitet (Vengriya), Magdeburgskiy universitet (Germaniya)* [Proceedings of the International Scientific and Technical conference 12 – 14.05.97. Part 2. KhNPI, University of Miskolc (Hungary), University of Magdeburg (Germany)]. Kharkov, KHGPU Publ., 1997, pp. 61–63.
3. Zavyalov P. S., Kuhtenkov Y. M., Podvoyskiy Y. A. K metodu rascheta pul'satsionnykh charakteristik vikhrevykh zhgutov za rabochim kolesom gidroturbiny [On the method of computing pulsation characteristics caused by vertex swirls behind the hydroturbine wheel]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering]. Kharkov, IPMASH NANU Publ., 2003, vol. 6, no 2, pp. 84–92.
4. Grigoriev V. N. Opredelenie pul'satsiy davleniya v otsasyvayuschey trube pod deystviem vikhrya za rabochimi kolesami gidroturbiny [Determining pressure pulsations in the suction tube caused by a vertex behind the hydroturbine wheel. Определение пульсаций давления в отсасывающей трубе под действием вихря за рабочим колесом гидротурбины]. *Energomashinostroenie* [Power Engineering]. 1989, no. 9, pp. 42–44.
5. Zavyalov P. S., Kuhtenkov Y. M., Podvoyskiy Y. A. Matematicheskoe modelirovanie nizkочастотnykh pul'satsiy davleniy v otsasyvayuschikh trubakh zhestkolopastnykh gidroturbiny i obratimyykh gidromashin [Mathematical modeling of low-frequency pressure pulsations in the suction tubes of hard-bladed hydroturbines and reversible hydraulic machines]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya :Gidravlichni mashyny ta gidroagregaty* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydrounits]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 1 (1044), pp. 204–213.
6. Zavalov P., Veremeenko I., Diakin V. Investigation of unsteady flow phenomena in a water passage of model hydroturbine. *8th Symposium IAHR. Section for hydraulic machinery equipment and cavitations*. Leningrad, September 6 – 8, 1976. pp. 519 – 535.
7. Veremeenko I., Vapnik B., Zavalov P. Methods of reducing low-frequency pressure fluctuations behind Francis hydroturbine runner. *24 Kongress IAHR*. Madrid, September 9 – 13, 1991. pp. 315 – 319.
8. Pazi L. G. Issledovanie periodicheskikh pul'satsiy davleniy v otsasyvayuschikh trubakh gidroturbiny [Studying periodic pressure pulsations in the suction tubes of hydroturbines]. *Trudy VNIlgidromasha*. Moscow, 1968, vol. 37, pp. 34–42.
9. Kubota T., Jamada S. Effect of cone angle at draft tube inlet in hydraulic characteristics of Francis turbine. *Symposium Operating Problems of Pump Stations and Power Plants*. Amsterdam, The Netherlands, September 13 – 17, 1982, pp. 111–116.
10. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Moscow, GITL Publ., 1948. Print.
11. Lavrentiev M. M., Romanov V. G. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow: Nauka, 1980. 560 p.
12. Lancos K. *Prakticheskie metody prikladnogo analiza* [Practical methods of applied analysis]. Moscow, Fizmatizdat Publ., 1961. 524 p.
13. Ettinger I. E., Rauhan B. S. *Gidrodinamika gidravlicheskikh turbin* [Hydrodynamics of hydraulic turbines]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1978. 280 p.
14. Zavyalov P. S., Vapnik B. K., Ryzhov S. A., Rybalko V. A. Issledovanie vliyaniya formy statora na pul'satsiy davleniy v obratimoy gidromashine [Studying the influence of the stator on the pressure in a reversible hydraulic machine]. *Gidravlicheskkiye mashiny* [Hydraulic Machines]. Kharkov, KhPI Publ., 1988, no. 22, pp. 24–27.

Поступила (received) 26.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

До питання чисельного прогнозування амплітуд низькочастотних пульсацій тиску у оберненій гідромашині / П. С. Зав'ялов, Ю. М. Кухтенков, Ю. А. Подвойський, В. Д. Варенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

К вопросу численного прогнозирования амплитуд низкочастотных пульсаций давления в обратимой гидромашине / П. С. Завьялов, Ю. М. Кухтенков, Ю. А. Подвойский, В. Д. Варенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

On the numerical prediction of amplitudes of low-frequency pressure pulsations in a reversible hydraulic machine / O. P. S. Zavyalov, Yu. M. Kukhtenkov, Yu. A. Podvoisky, V. D. Varenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 51 – 56. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Зав'ялов Павло Сергійович – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: zavyalov.ps@gmail.com.ua.

Завьялов Павел Сергеевич – кандидат технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: zavyalov.ps@gmail.com.ua.

Zavyalov Pavel Sergeevych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Professor National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 303-06-29; e-mail: zavyalov.ps@gmail.com.ua.

Кухтенков Юрій Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Кухтенков Юрий Михайлович – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Kukhtenkov Yurii Michaylovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Подвойський Юрій Андрійович – науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Подвойский Юрий Андреевич – научный сотрудник, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Podvoisky Yurii Andriyovich – research associate, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 303-06-29; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Варенко Віктор Дмитрович – начальник сектору комплексних досліджень гідротурбін СКБ «ТГМ», ПАО «Турбоатом», м. Харків; тел.: (057) 349-39-01; моб. тел.: (068) 610-07-50; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Варенко Виктор Дмитриевич – начальник сектора комплексных исследований гидротурбин СКБ «ТГМ», ПАТ «Турбоатом», г. Харьков; тел.: (057) 349-39-01; моб. тел.: (068) 610-07-50; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

Varenko Victor Dmitrovich – Head of Sector of Integrated Dosage Engineering Enterprises SKB "TGM", PJSC "Turboatom", Kharkov; tel.: (057) 349-39-01; tel.: (068) 610-07-50; e-mail: kuhtenkov.um@gmail.com.ua.

УДК 629.114.2.073.286

Б. І. КАЛЬЧЕНКО, А. П. КОЖУШКО, А. Р. КІСЕЛЬОВ

ОЦІНКА ПЛАВНОСТІ РУХУ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА ХТЗ-242К ПРИ ВПЛИВІ НЕРІВНОСТЕЙ ПОВЕРХНІ

Наведено математичний опис руху підресорених мас колісного трактора ХТЗ-242К, який має ресорну підвіску. Представлено передаточну функцію підресореної маси трактора. Сформовано випадкову функцію мікропрофілю поверхні, по якій експлуатується колісний трактор при виконанні транспортних та технологічних операцій. Визначено оціночні характеристики плавності руху колісного трактора, які базуються на обчисленні значення дисперсії вертикальних переміщень та прискорень остову передньої та задньої частин трактора.

Ключові слова: трактор, коливання остову, передаточна функція, мікропрофіль, плавність руху.

Приведено математическое описание движения поддресоренных масс колесного трактора ХТЗ-242К, который имеет рессорную подвеску. Представлено передаточную функцию поддресоренной массы трактора. Сформирована случайная функция микропрофиля поверхности, по которой эксплуатируется колесный трактор при выполнении транспортных и технологических операций. Определены оценочные характеристики плавности движения колесного трактора, основанные на вычислении значения дисперсии вертикальных перемещений и ускорений остова передней и задней частей трактора.

Ключевые слова: трактор, колебания остова, передаточная функция, микропрофиль, плавность движения.

In this paper the mathematical description of motion of the submerged masses of a wheeled tractor KhTZ-242K, which has spring suspension, is given. The transmission function of the submerged mass of the tractor is presented, on the basis of which the displacements and accelerations of the front and rear parts of the tractor frame are determined. A random function of the microprofile of the surface (asphalt concrete, ground and spherical spike cultures) on which the wheeled tractor is used during transport and technological operations is formed. The estimation characteristics of the smoothness of motion of the wheeled tractor are determined based on the calculation of the value of the dispersion of vertical displacements and acceleration of the front and rear parts of the tractor frame.

Key words: tractor, oscillation of body, suspension function, microprofile, smoothness of motion.

Вступ. На сьогоднішній день світові виробники галузі тракторобудування намагаються вирішити проблему збільшення об'ємів продукції сільськогосподарського призначення. Одним зі шляхів вирішення цієї проблеми є створення нових енергонасичених тракторів, модернізація конструкції яких покликана збільшити робочі швидкості. Проте дана модернізація веде до виникнення підвищених коливальних процесів в системі «грунт – колесо – силова установка», що, безумовно, призводить до зниження продуктивності, плавності руху, керованості та, як наслідок, погіршення якості виконання технологічних операцій.

Дослідження плавності руху є системоутворюючим процесом, причому як при створенні нової техніки, так і модернізації старої. Одним з напрямків покращення плавності руху самохідних машин є вдосконалення конструкції ходової системи, що напряму впливає на зниження величини зовнішніх впливів.

Аналіз останніх досліджень. Існує ряд публікацій [1 – 3], присвячених розгляду питань, пов'язаних з аналізом плавності руху самохідних машин; необхідно звернути увагу на різноплановість цих робіт. В залежності від поставлених задач досліджень, прийнятої розрахункової схеми моделі, а також застосуванням того чи іншого методу дослідження, в цих роботах приймався ряд припущень, які потребують узагальнення, а методи досліджень – подальшого розвитку та аналізу.

Визначенню мікропрофіля дорожньої поверхні присвячені роботи [5 – 9], проте вони розглядають асфальтобетону поверхню, як базову, що не зовсім відповідає вимогам роботи колісних тракторів.

В роботі [4] наведено підхід щодо визначення завантаженості трансмісії колісного трактора при впливі нерівностей поверхні. В даній роботі автори наводять передаточну функцію підвіски, яка описує плавність руху колісного трактора, проте не наводять випадкову функцію для опису мікропрофілю.

Постанова задачі. Оцінка плавності руху колісних тракторів при виконанні різноманітних операцій була завжди актуальною проблемою, адже використання в підвісках новітніх технологій (пневматичних ресор, пневмогідролічних ресор) змушує конструкторів та науковців продовжувати дослідження в даному напрямку. Але для реалізації нових технічних рішень необхідно спершу навести оціночні показники для техніки, яка існує сьогодні. Тому метою даної роботи є наведення оціночної характеристики плавності руху колісного трактора ХТЗ-242К шляхом дослідження коливальних процесів, що виникають в підресорених масах остову при експлуатації на різноманітному мікропрофілю поверхні.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- сформулювати передаточну функцію підвіски колісного трактора ХТЗ-242К, яка базуються на представлені математичної моделі руху підресорених мас остову;
- навести випадкову функцію мікропрофілю асфальтобетонної, ґрунтової доріг та стерні колосових культур.

Передаточна функція підвіски. Основою для створення математичної моделі підвіски є наведення диференціальних рівнянь, які описують процеси в підвісці за допомогою складання коливальної схеми, зображеної на рис. 1, [4].

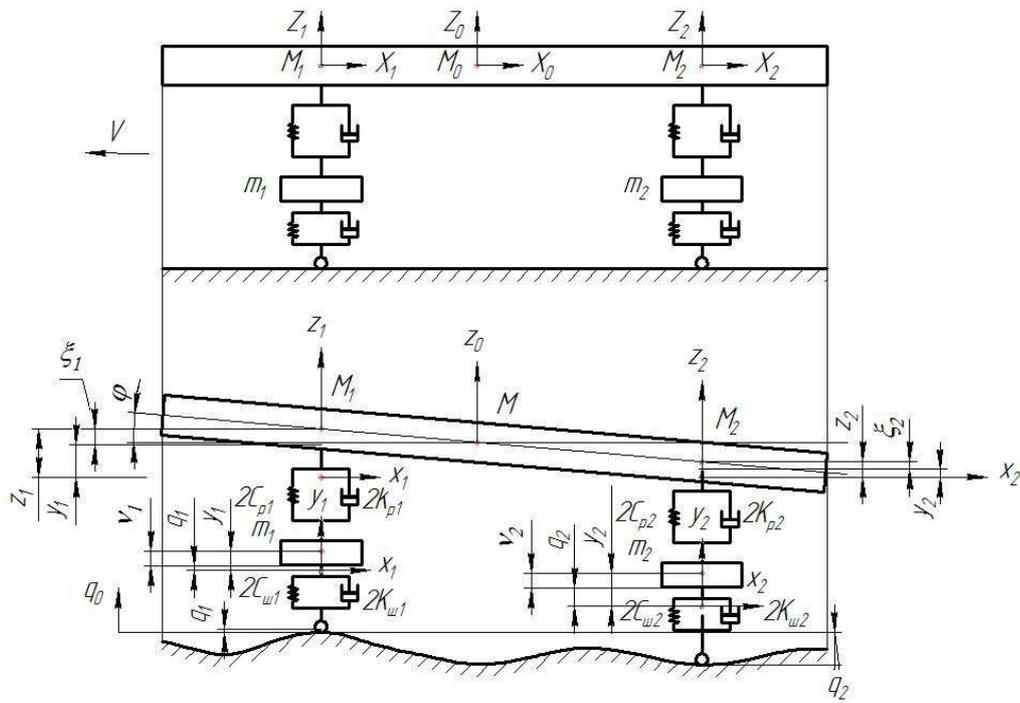


Рис. 1 – Коливальна схема колісного трактора.

Для складання математичної моделі коливальних досліджуваної системи скористаємося основним способом, який базується на *рівнянні Лагранжа 2-го роду*. Рівняння складаються для кожної маси, що входять в розрахункову систему.

Конкретно для колісного трактору типу ХТЗ-242К з двома ведучими мостами диференціальні рівняння мають наступний вигляд:

$$\begin{cases}
 \ddot{z}_1 + (2 \cdot K_{p1} / M_1) \cdot \dot{z}_1 + (2 \cdot C_{p1} / M_1) \cdot z_1 - (2 \cdot K_{p1} / M_1) \cdot \dot{y}_1 - (2 \cdot C_{p1} / M_1) \cdot y_1 = 0; \\
 \ddot{z}_2 + (2 \cdot C_{p2} / M_2) \cdot z_2 - (2 \cdot C_{p2} / M_2) \cdot y_2 = 0; \\
 \ddot{y}_1 + ((2 \cdot K_{p1} + 2 \cdot K_{u1}) / m_1) \cdot \dot{y}_1 + ((2 \cdot C_{p1} + 2 \cdot C_{u1}) / m_1) \cdot y_1 - (2 \cdot K_{p1} / m_1) \cdot \dot{z}_1 - \\
 - (2 \cdot C_{p1} / m_1) \cdot z_1 = (2 \cdot K_{u1} / m_1) \cdot \dot{q}_1(t) + (2 \cdot C_{u1} / m_1) \cdot q_1(t); \\
 \ddot{y}_2 + (2 \cdot K_{u2} / m_2) \cdot \dot{y}_2 + ((2 \cdot C_{p2} + 2 \cdot C_{u2}) / m_2) \cdot y_2 - (2 \cdot C_{p2} / m_2) \cdot z_2 = \\
 = (2 \cdot K_{u2} / m_2) \cdot \dot{q}_2(t) + (2 \cdot C_{u2} / m_2) \cdot q_2(t),
 \end{cases} \quad (1)$$

де z_1, z_2 – переміщення остова в зоні переднього і заднього моста; y_1, y_2 – переміщення переднього і заднього мостів; $q(t)$ – зовнішній вплив нерівностей; K_{p1}, K_{p2} – коефіцієнти демпфування амортизаторів; K_{u1}, K_{u2} – коефіцієнти демпфування шин; C_{p1}, C_{p2} – жорсткості ресор; C_{u1}, C_{u2} – жорсткості шин.

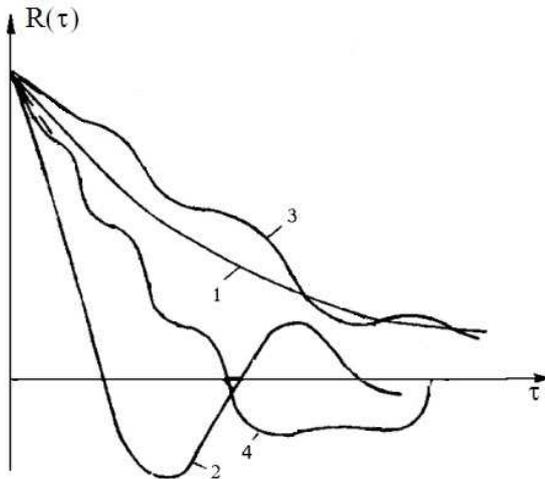


Рис. 2 – Нормовані функції кореляції: 1 – з рівняння (8); 2 – з рівняння (9); 3 – з рівняння (10); 4 – з рівняння (11).

Для механізму, що досліджується, коефіцієнт демпфування амортизатору K_{p2} дорівнює нулю, тому що задній міст трактора жорстко з'єднано з остовом трактора; окрім того жорсткість ресори C_{p2} має максимальне значення.

Далі вводяться умовні позначення для парціальних частот, парціальних коефіцієнтів демпфування та парціальних коефіцієнтів зв'язку.

У разі симетричної системи підресорювання чотири рівняння будуть утворювати дві підсистеми, кожна з яких описуватиме рух передньої або задньої частини трактора. Це дозволить розглядати окремо коливання передньої або задньої частини трактора. При цьому немає необхідності виражати $q_1(t)$ і $q_2(t)$ через рух центру мас системи, що досліджується.

Рішення лінійних диференціальних рівнянь системи (1), що мають незмінні коефіцієнти, можливо за допомогою *перетворення Лапласа*. Отже, модуль комплексної

передавальної функції по координаті z має вигляд:

$$|W_z(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}_z(\omega)^2 + \text{Im}_z(\omega)^2} \tag{2}$$

Модуль комплексної передавальної функції по координаті y має вигляд:

$$|W_y(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}_y(\omega)^2 + \text{Im}_y(\omega)^2} \tag{3}$$

Максимальне переміщення частин остову:

$$S_z(\omega) = S(\omega) \cdot |W_z(j\omega)|, \tag{4}$$

де $S_z(\omega)$ – спектральна щільність функції мікропрофілю.

Максимальне прискорення частин остову:

$$S_z(\omega) = S(\omega) \cdot \omega^2 \cdot |W_z(j\omega)|. \tag{5}$$

Таким чином, сформовані основні критерії оцінки характеристик підвіски, які впливають на плавність руху колісного трактора.

Функція мікропрофілю. Формування мікропрофілю поверхні, по якій експлуатується колісний трактор, визначається під впливом багатьох факторів (це, насамперед, властивості покриття, інтенсивність руху трактору та інше) [5 – 9].

Аналітичним шляхом визначення зміна мікропрофілю відбувається при обчисленні випадкової функції, яка залежить від координат усередненої площини, відносно якої змінюється висота нерівностей.

Статистичними характеристиками поверхні полотна шляху будуть кореляційні функції [5]:

$$R_q(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^N q(x) \cdot q(x+l) dx; \tag{6}$$

$$R_\psi(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^N \psi(x) \cdot \psi(x+l) dx, \tag{7}$$

де $R_q(l)$ та $R_\psi(l)$ – кореляційні функції повздовжніх та поперечних перетинів мікропрофілю; q – ординати середнього перерізу; ψ – кут нахилу поперечного перетину.

Відомо, що нормовані кореляційні функції ординат середнього перетину апроксимуються за наступними виразами:

$$R(\tau) = D \cdot e^{-\alpha|\tau|}; \tag{8}$$

$$R(\tau) = D \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau); \tag{9}$$

$$R(\tau) = \begin{cases} D \cdot (A_1 \cdot e^{-\alpha_2|\tau|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau)); \\ A_1 + A_2 = 1; \end{cases} \tag{10}$$

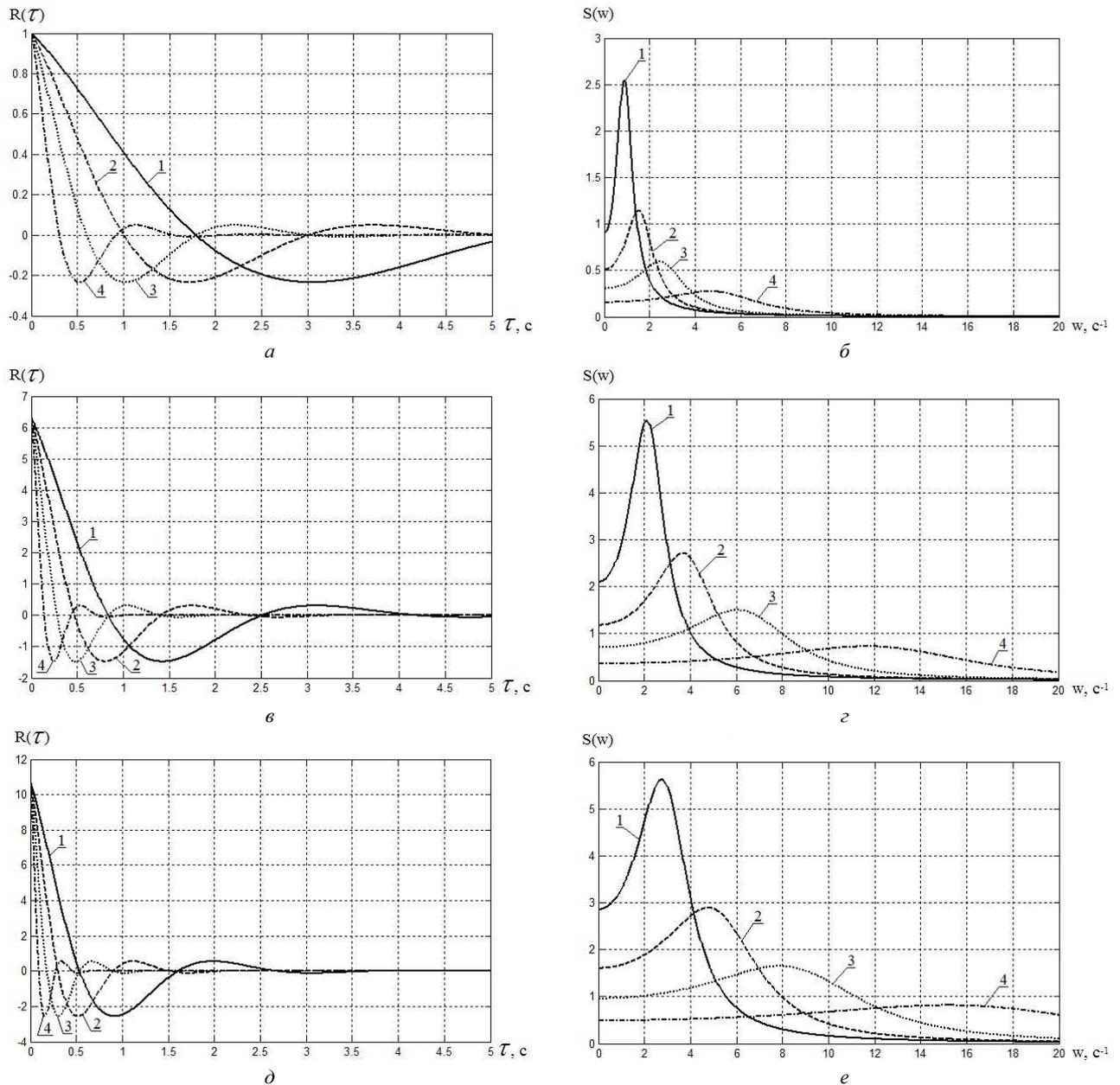


Рис. 3 – Криві кореляційних функцій та спектральних щільностей:

а, б – асфальтобетонна поверхня; в, г – ґрунтова поверхня; д, е – стерня колосових культур; 1 – швидкість 7,2 км/год; 2 – швидкість 12,8 км/год; 3 – швидкість 21,5 км/год; 4 – швидкість 42 км/год.

$$R(\tau) = \begin{cases} D \cdot (A_1 \cdot e^{-\alpha_1|\tau|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2|\tau|} + A_3 \cdot e^{-\alpha_3|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau)); \\ A_1 + A_2 + A_3 = 1, \end{cases} \quad (11)$$

де D – дисперсія висот нерівностей поверхні; α, β – коефіцієнти кореляції.

На рис. 2 наведено графіки нормованої функції кореляції в залежності від вибору функції (8) – (11).

Спектральна щільність – це найбільш повна характеристика збурень, що діють на самохідну машину. Застосовуючи *перетворення Фур'є*, наведемо спектральну щільність для нормованих кореляційних функцій.

$$S(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\omega^2 + \alpha^2}; \quad (12)$$

$$S(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2}; \quad (13)$$

$$S(\omega) = D \cdot \left[\frac{2 \cdot A_1 \cdot \alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + \frac{2 \cdot A_2 \cdot \alpha_2 \cdot (\omega^2 + \alpha_2^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot (\alpha_2^2 - \beta^2) \cdot \omega^2 + (\alpha_2^2 + \beta^2)^2} \right]; \quad (14)$$

$$S(\omega) = D \cdot \left[\frac{2 \cdot A_1 \cdot \alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + \frac{2 \cdot A_2 \cdot \alpha_2}{\omega^2 + \alpha_2^2} + \frac{2 \cdot A_3 \cdot \alpha_3 \cdot (\omega^2 + \alpha_3^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot (\alpha_3^2 - \beta^2) \cdot \omega^2 + (\alpha_3^2 + \beta^2)^2} \right]. \quad (15)$$

На рис. 3 наведено криві кореляційних функцій (9) та спектральних щільностей (13) при експлуатації на асфальтобетонній, ґрунтовій поверхнях та на стерні колосових культур.

За допомогою генерації білого шуму будується випадкова функція $q(t)$, яка описує висоти нерівностей за відомими методами [8 – 9]. Суть цих методів зводиться до формування диференційного рівняння

$$T_1^2 \cdot \ddot{q}(t) + T_2 \cdot \dot{q}(t) + q(t) = K_\zeta \cdot \zeta(t), \quad (16)$$

де T_1 та T_2 – сталі часу, які формують функцію $q(t)$ при подачі на його вхід білого шуму $\zeta(t)$; K_ζ – коефіцієнт підсилення [9].

Оскільки колісний трактор ХТЗ-242К виконує транспортні та технологічні операції, то цілком доцільно визначити випадкову функцію $q(t)$ для таких поверхонь, як асфальтобетонної, ґрунтової доріг та стерні колосових культур. В табл. 1 зведено значення сталих часу T_1 та T_2 , а також коефіцієнта підсилення K_ζ , для наведених поверхонь. Проте необхідно відмітити, що в ході даного дослідження колісний трактор ХТЗ-242К виконуватиме транспортні роботи на асфальтобетонній поверхні (при швидкості 42 км/год), технологічні – на ґрунтовій поверхні (при швидкості 12,8 та 21,5 км/год) та на стерні колосових культур (при швидкості 7,2 км/год). На основі даних з табл. 1 будується на рис. 4 випадковий мікропрофіль відповідної поверхні.

Таблиця 1 – Значення сталих часу T_1 та T_2 , а також коефіцієнта підсилення K_ζ

Тип поверхні	Швидкість	T_1	T_2	K_ζ
асфальтобетонна	42	0,175	0,147	0,395
ґрунтова	21,5	0,133	0,114	0,948
ґрунтова	12,8	0,225	0,184	1,23
стерня колосових культур	7,2	0,308	0,238	1,69

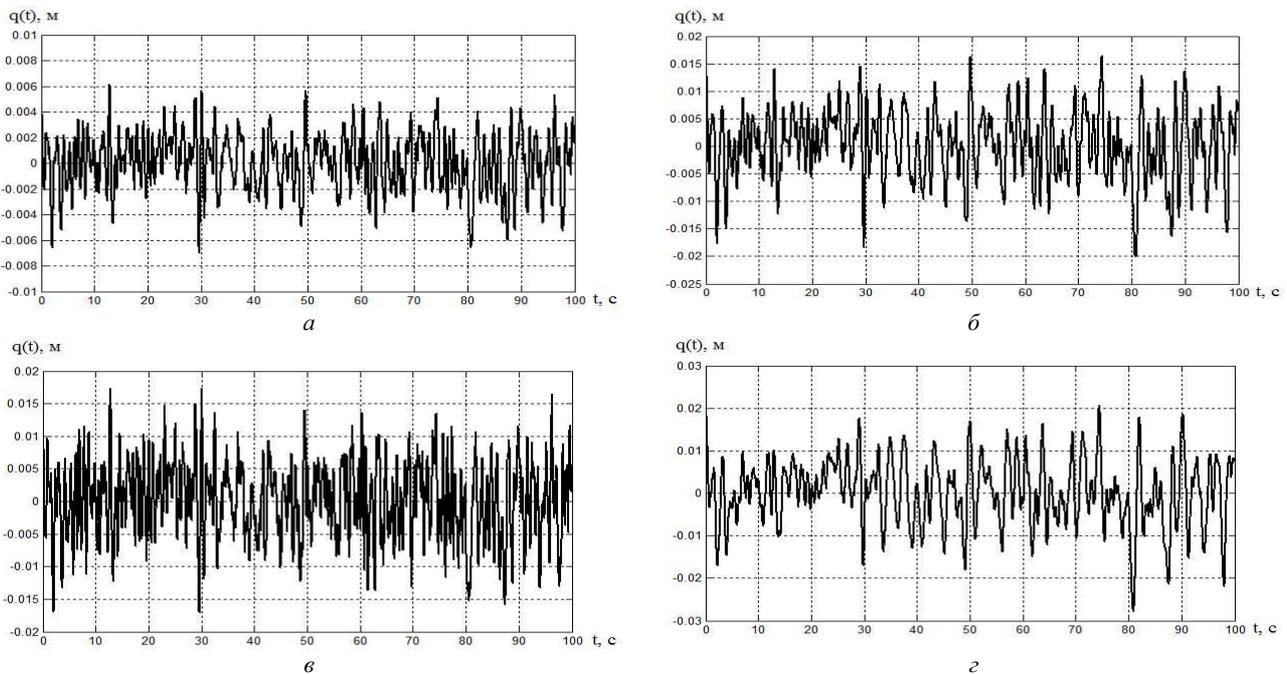


Рис. 4 – Реалізація випадкового мікропрофілю дороги:
 а – асфальтобетонна поверхня; б, в – ґрунтова поверхня; г – стерня колосових культур.

На основі рівнянь (12) – (15) отримано спектральну щільність для кореляційної функції мікропрофілю.

Оцінка плавності руху. При оцінюванні плавності руху самохідної машини від впливу нерівностей необхідно проаналізувати значення дисперсії вертикальних переміщень та прискорень остову трактора [4]

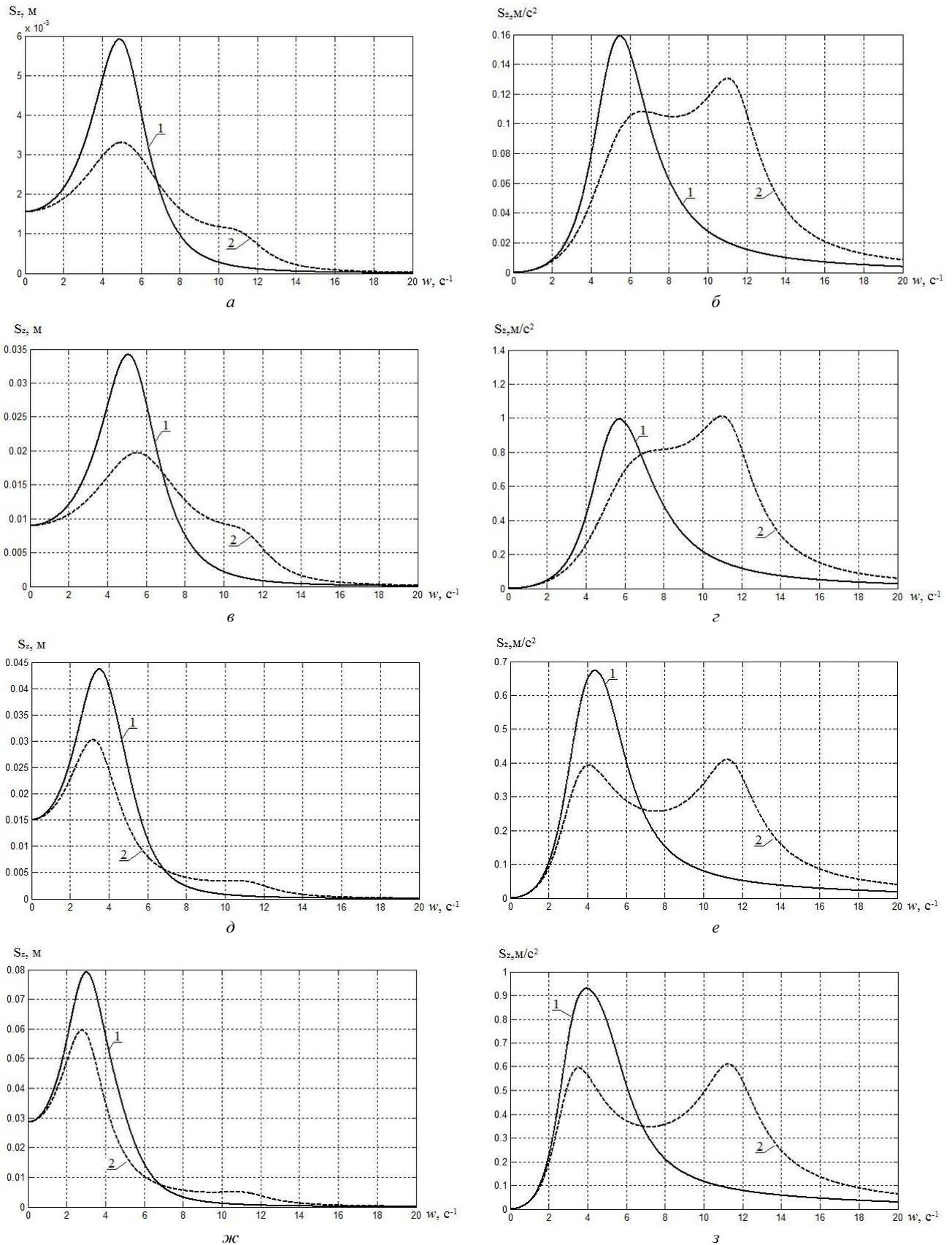


Рис. 5 – Спектральна щільність амплітуд вертикальних переміщень та прискорень передньої та задньої частин остову трактора ХТЗ-242К: а, б – для асфальтобетонної поверхні, швидкість 42 км/год; в, г – для ґрунтової поверхні, швидкість 21,5 км/год; д, е – для ґрунтової поверхні, швидкість 12,8 км/год; ж, з – для стерні колосових культур, швидкість 7,2 км/год; 1 – передня частина; 2 – задня частина остову.

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega; \quad (17)$$

$$\sigma_{\ddot{z}}^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} S_{\ddot{z}}(\omega) d\omega. \quad (18)$$

На рис. 5 наведено спектральну щільність амплітуд та дисперсію вертикальних переміщень та прискорень передньої та задньої частин остову самохідної машини, на прикладі колісного трактора ХТЗ-242К. В табл. 2 наведено значення дисперсії вертикальних переміщень та прискорень остову колісного трактора ХТЗ-242К при експлуатації по різних поверхнях.

Таблиця 2 – Значення дисперсії вертикальних переміщень та прискорень остову

Тип поверхні	Швидкість, км/год	σ_{z1} , м	$\sigma_{\ddot{z}1}$, м/с ²	σ_{z2} , м	$\sigma_{\ddot{z}2}$, м/с ²
		Передня частина остову		Задня частина остову	
асфальтобетонна	42	0,09	0,48	0,09	0,6
грунтова	21,5	0,23	1,25	0,23	1,63
грунтова	12,8	0,24	0,99	0,22	1,14
стерня колосових культур	7,2	0,31	1,2	0,29	1,4

На основі даних з табл. 2 можна стверджувати про те, що максимальне значення дисперсії вертикальних переміщень остову (як передньої, так і задньої частин) спостерігається при експлуатації трактора на поверхні стерня колосових культур. А максимальне прискорення остову трактора при експлуатації на ґрунтовій поверхні зі швидкістю ($V = 21,5$ км/год).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним шлях дослідження, пов'язаний з подальшим підвищенням плавності руху самохідних машин. Особливої уваги треба надати дослідженню впливу плавності руху на завантаженість ступінчастих та безступінчастих трансмісій [10 – 12], адже саме аналіз коливальних процесів в трансмісії свідчитиме про ресурс силової установки в цілому.

Висновки. Розглянуто математичну модель руху підресорених мас колісного трактора з урахуванням таких показників, як жорсткість та коефіцієнт демпфування. На основі обчислення моделі сформовано передаточну функцію підвіски.

Наведено декілька варіантів реалізації кривих кореляційних функцій та спектральних щільностей, використання яких обумовлено в залежності від поставлених задач. Сформовано математичну модель визначення випадкової функції мікропрофілю поверхні.

На основі спільного вирішення рівнянь математичних моделей підвіски та функції мікропрофілю поверхні стає можливим виконання оціночної характеристики плавності руху, яка передусім впливає на техніко-економічні та ергономічні показники.

Список літератури

1. Шупляков В. С. Колебания и нагруженность трансмиссии автомобиля. – М. : Транспорт, 1974. – 328 с.
2. Барский И. Б., Анлиович В. Я., Кут'ков Г. М. Динамика трактора. – М. : Машиностроение, 1973. – 280 с.
3. Попов В. В. Математическое моделирование мобильного сельскохозяйственного агрегата в режиме транспортного переезда // Вестник Гомельского государственного технического университета им. П.А. Сухого. – 2005. – № 3 (22). – С. 13 – 18.
4. Кальченко Б. І., Чернявський І. С., Кожушко А. П. Підхід до визначення завантаженості трансмісії колісного трактора при впливі нерівностей поверхні // Науковий журнал технічний сервіс, агропромислового, лісового та транспортного комплексу. – 2017. – № 8. – С. 49 – 54.
5. Хачатуров А. А., Афанасьев В. Л., Васильев В. С. Динамика системы дорога – шина – автомобиль – водитель // Под ред. А. А. Хачатурова. – М. : Машиностроение, 1976. – 536 с.
6. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1991. – 320 с.
7. Сергиенко А. Н., Медведев Н. Г., Любарский Б. Г. Методика описания неровностей профиля дороги при моделировании подвески автомобиля с рекуператором энергии колебаний // Вестник НТУ «ХПИ». – 2013. – №37. – С. 185–192.
8. Белецкий А. В. Моделирование профиля дорожного основания в задаче анализа динамики трансмиссии колесной машины. – [2010]. – Режим доступа : <http://sdm.str-t.ru/insertfiles/5.pdf>. – Дата звертання : 25 жовтня 2017.
9. Александрова Т. Е., Александрова И. Е., Беляев С. Н. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку // Механика та машинобудування. – 2011. – № 1. – С. 43 – 50.
10. Самородов В. Б., Бондаренко А. І., Кожушко А. П., Пелипенко Є. С., Мітцель М. О. Перспективні трансмісії колісних тракторів // Вісник Національного технічного університету «ХПИ». – Харків : НТУ «ХПИ», 2014. – № 10 (1053). – С. 3 – 10.
11. Кожушко А. П. Особливості роботи колісних тракторів з гідрооб'ємно-механічними трансмісіями / Сільськогосподарські машини : 36 наук. ст. – 2015. – № 31. – С. 70 – 82.
12. Кожушко А. П. Результати моделювання роботи колісного трактора з гідрооб'ємно-механічними трансмісіями, що працюють по схемі «диференціал на вході» / Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті : Науковий журнал. – 2015. №1 (3). – С. 93 – 102.

References (transliterated)

1. Shuplyakov V. S. *Kolebaniya i nagruzhennost' transmissii avtomobilya* [Oscillations and loading of vehicle transmission]. Moscow, Transport Publ., 1974. 328 p.
2. Barskiy I. B., Anilovich V. Ya., Kut'kov G. M. *Dinamika traktora* [Tractor dynamics]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1973. 280 p.
3. Popov V. V. *Matematicheskoye modelirovaniye mobil'nogo sel'skokhozyaystvennogo agregata v rezhime transportnogo pereyezda* [Mathematical modeling of the mobile agricultural unit in the mode of transport moving]. *Vestnik Gomeľ'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. P. A. Sukhogo* [Bulletin of the Gmel State Technical University]. 2005, vol. 3 (22), pp. 13–18.
4. Kal'chenko B. I., Chernyav'skiy I. S., Kozhushko A. P. *Pidkhid do vyznachennya zavantazhenosti transmissiyi kolisnogo traktora pry vplyvi*

- nerivnostey poverkhni [Approach to determination of load of transmission of a wheeled tractor under the influence of surface irregularities]. *Naukovyy zhurnal tekhnichnyy servis, agropromyslovogo, lisovogo ta transportnogo kompleksu* [Scientific journal technical service, agroindustrial, forestry and transport complex]. 2017, vol. 8, pp. 49–54.
5. Khachaturov A. A., Afanas'ev V. L., Vasil'ev V. S. *Dinamika sistemy doroga – shina – avtomobil' – voditel'* [Dynamics of the system road – tire – car – driver]. Moscow, 1976. 536 p.
 6. Svetlitskiy V. A. *Sluchaynyye kolebaniya mekhanicheskikh system – 2-ye izdaniye, pererab. i dop.* [Random oscillations of mechanical systems. 2nd ed.]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1991. 320 p.
 7. Sergiyenko A. N., Medvedev N. G., Lyubarskiy, B. G. Metodika opisaniya nerovnostey profilya dorogi pri modelirovani podveski avtomobilya s rekuperatorom energii kolebaniy [Method of road roughness description when simulating car suspension with vibration energy recuperator]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of National Technical University "KhPI"]. 2013, vol. 37, pp. 185–192.
 8. Beletskiy A. V. Modelirovanie profilya dorozhnogo osnovaniya v zadache analiza dinamiki transmissii kolesnoy mashiny [Modeling of the road foundation profile in the task of analyzing the dynamics of the transmission of a wheeled vehicle]. 2010. Availabl at : <http://sdm.str-t.ru/insertfiles/5.pdf>. (accessed 25.10.2017).
 9. Aleksandrova T. E., Aleksandrova I. E., Belyaev S. N. Imitatsionnoe modelirovaniye vneshnikh vozmushheniy, deystvuyushhikh na tankovuyu pushku [Simulation modeling of external perturbations acting on a tank gun]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and machine building]. 2011, vol. 1, pp. 43–50.
 10. Samorodov V. B., Bondarenko A. I., Kozhushko A. P., Pelipenko E. S., Mittsel' M. O. Perspektivni transmissii kolisnykh traktoriv [Perspective transmissions of the wheeled tractors]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [The bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, vol. 10 (1053), pp. 3–10.
 11. Kozhushko A. P. Osoblyvosti roboty kolisnykh traktoriv z gidroob'yemno-mekhanichnymy transmissiyamy [Operation features of wheeled tractors with hydrostatic mechanical transmissions]. *Sil'skogospodars'ki mashyny : Zb. Nauk. St.* [Agricultural machines: collected works]. 2015, vol. 31, pp. 70–82.
 12. Kozhushko A. P. Rezul'taty modelyuvannya roboty kolisnogo traktora z gidroob'yemno-mekhanichnymy transmissiyamy, shho pratsuyut' po skhemi «dyferentsial na vkhodi» [Results of simulation of the work of a wheeled tractor with hydromechanical transmissions, working according to the scheme "differential at the input"]. *Suchasni tekhnologiyi v mashinobuduvanni ta transporti : Naukovyy zhurnal* [Modern technologies in machine building and transport: Scientific journal]. 2015, vol. 1 (3), pp. 93–102.

Поступила (received) 06.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Оцінка плавності руху самохідної машини при впливі нерівностей поверхні / Б. І. Кальченко, А. П. Кожушко, А. Р. Кисельов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 56 – 63. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Оценка плавности движения самоходной машины при воздействии неровностей поверхности / Б. И. Кальченко А. П. Кожушко, А. Р. Киселев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 56 – 63. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Evaluation of smoothness of motion of self-propelled machine when exposed to surface irregularities / B. I. Kalchenko, A. P. Kozhushko, A. R. Kiselev // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 56 – 63. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кальченко Борис Іванович – доктор технічних наук, професор кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Kabor7777777@gmail.com.

Кальченко Борис Іванович – доктор технических наук, профессор кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Kabor7777777@gmail.com.

Kalchenko Boris Ivanovych – Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: Kabor7777777@gmail.com.

Кожушко Андрій Павлович – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Кожушко Андрей Павлович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Kozhushko Andriy Pavlovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Lecturer at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, tel.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Кисельов Андрій Русланович – викладач кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: andreykiselev07@ukr.net.

Киселев Андрей Русланович – преподаватель кафедры автомобиле- и тракторостроения, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: andreykiselev07@ukr.net.

Kiselev Andriy Ruslanovych – Associate at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-64; e-mail: andreykiselev07@ukr.net.

УДК 621.51+539.3

А. А. КАРПИК

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА В МЕЖЛОПАТОЧНОМ КАНАЛЕ КОМПРЕССОРА С УЧЕТОМ
ВРАЩЕНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ**

Представлено чисельне моделювання турбулентної в'язкої течії газу на основі рівнянь Нав'є-Стокса осереднених по Рейнольдсу (RANS-модель). Результати розрахунку параметрів течії в нестационарній тривимірній постановці отримані за допомогою програмного комплексу F. Чисельний аналіз проводився з метою дослідження характеру течії у вінці робочих лопаток з урахуванням взаємодії між ними. В результаті був отриманий розподіл полів тиску і швидкості в різні моменти часу при обертанні робочого колеса. У міжлопатковому каналі виявлені несприятливі зони течії.

Ключові слова: міжлопатковий канал, RANS-модель, в'язка течія, нестационарність.

Представлено численное моделирование турбулентного вязкого течения газа на основе уравнений Навье-Стокса осредненных по Рейнольдсу (RANS-модель). Результаты расчета течения в нестационарной трехмерной постановке получены с помощью программного комплекса F. Численный анализ проводился с целью исследования характера течения в венце рабочих лопаток с учетом взаимодействия между ними. Получено распределение полей давления и скорости в разные моменты времени при вращении рабочего колеса. В межлопаточном канале выявлены неблагоприятные зоны течения.

Ключевые слова: межлопаточный канал, численное моделирование, вязкое течение, нестационарность.

This paper presents numerical simulation of turbulent viscous flows using the Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) equations. The gas-dynamic simulation is required to estimate the vibration strength and additional losses caused by the periodic non-stationarity of the gas flow. The non-uniformity of the flow represents itself as a non-uniformity of the fields of the velocity and pressure in front of and behind the working blades. The simulation is carried on for a model describing all the properties, such as compressibility, viscosity, 3D effects, influence of the radial gap, leakages etc. The differential two-parametrical $k-\omega$ SST Menter's model is used as a model of turbulence. The values of the flow parameters in the non-stationary three-dimensional formulation are obtained using the F solver. Numerical analysis is used to investigate the character of the flow in the rotor, in particular the blade interaction. The model allows determining the flow in the blade channel and zones of the adverse flow. The basic factors causing non-uniformity and non-stationary of the gas flow are determined. The pressure and velocity fields at different times during the rotation of the runner are computed.

Key words: blade channel, numerical simulation, viscous flow, non-stationarity.

Введение. Лопаточный аппарат турбомашин представляет собой деформируемую систему, способную совершать механические колебания. Основным источником переменных во времени нагрузок являются вибрация ротора, кромочные следы за решеткой профилей соплового аппарата, неравномерность распределения газодинамических параметров из-за радиального зазора. Течение в компрессорных решетках профилей может быть неустойчивым с возможным отрывом потока, что также может являться причиной повышения вибрационной нагрузки на лопатки.

Все отмеченные факторы, которые являются причинами возникновения нестационарных нагрузок, имеют периодический характер. Определение распределений вибрационных напряжений под действием гармоник возмущающих газодинамических сил является актуальной задачей для обеспечения динамической прочности лопаточного аппарата турбомашин [1]. С этой целью необходимо провести газодинамический расчет компрессора.

Исследование обтекания лопастей турбомашин на основе различных математических моделей имеет важное значение в энергетике при проектировании и оптимизации конструкций. Склонные к отрывным течениям высоконагруженные осевые компрессоры являются наиболее сложными для численных исследований. Реальное течение в межлопаточном канале характеризуется турбулентностью, отрывом потока и возникновением вторичного течения [2]. Математические модели, описывающие подобные явления, базируются на основе *системы уравнений Навье-Стокса*. Учет турбулентности является одним из определяющих факторов для оценки характеристик реального течения, следовательно, математическая модель должна включать соответствующие уравнения. Система нестационарных уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями турбулентности, представлена в виде нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Анализ последних исследований. В настоящее время для расчета вязкого течения газа в межлопаточном канале используются CFD решатели уравнений газовой динамики. В них реализованы наиболее эффективные вычислительные алгоритмы для решения систем уравнений в виде методов конечных разностей и конечных объемов. [3, 4]. Разработка метода CFD за последние годы позволила проводить расчеты и моделирование рабочих процессов за более короткое время и с высокой точностью. Моделирование с помощью CFD-решателей обеспечивает расчет параметров газодинамического потока, поскольку экспериментальные испытания компрессоров очень дороги и во многих случаях невозможны.

Численное моделирование потока газа для решения практических инженерных задач зачастую проводят в стационарной постановке. Однако такой подход не позволяет учесть некоторые важные моменты, такие как статор-ротор взаимодействие, вторичные течения, взаимодействие кромочных следов, которые оказывают существенное влияние на достоверность полученных результатов моделирования.

В настоящее время проводится много исследований в области моделирования газодинамического потока при вращении аэродинамической решетки профилей [3 – 5]. При этом часто использовалась двумерная модель потока. Потoki обычно описывались уравнениями Эйлера, которые решались либо с помощью центрально-разностных схем второго порядка аппроксимации с искусственной вязкостью, либо с помощью схем обратного потока [5].

© А. А. Карпик, 2017

Постановка задачі. В данной статье представлено моделирование газодинамического потока в межлопаточном канале, которое в дальнейшем будет использовано для оценивания газодинамических сил, действующих на лопатки компрессора.

Численное моделирование, представленное в данной работе, проведено с помощью программного комплекса F [2]. CFD программа решения системы уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, для расчетов течений вязкого газа в проточных частях турбомашин была разработана в ИПМаш НАН Украины.

В качестве объекта исследования выбрана ступень осевого компрессора низкого давления газотурбинного двигателя, состоящая из ВНА и 1 РК. Меридиональное сечение проточной части исследуемого компрессора изображено на рис. 1

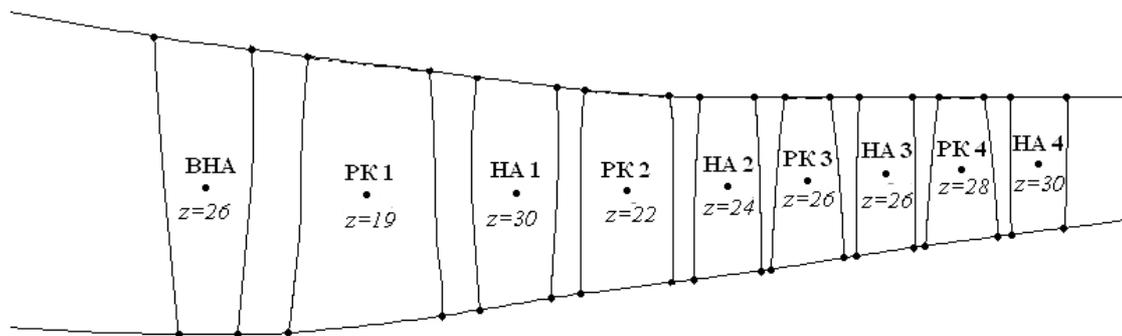


Рис. 1 – Проточная часть осевого компрессора: ВНА – входной направляющий аппарат; РК – рабочее колесо; НА – направляющий аппарат.

Для моделирования течения газа рассматривалась регулярная разностная H – сетка трех уровней. Вид профилей сечений лопаток 1РК и расчетная сетка показаны на рис. 2. Размерность мелкой сетки, использованной для всего расчета, составляет $96 \times 96 \times 144 = 1327104$ ячеек, что в значительной степени увеличивает точность численного решения данной задачи [7].

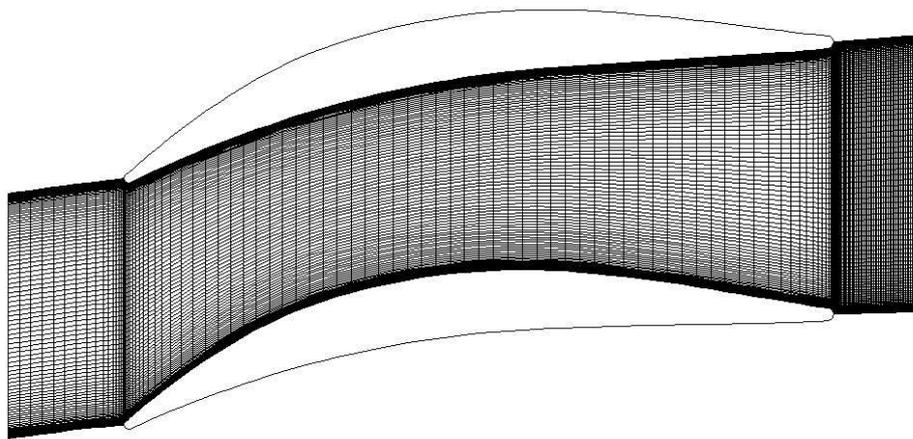


Рис. 2 – Расчетная сетка в межлопаточном канале 1РК.

Математическая модель. Турбулентное течение вязкого сжимаемого газа многоступенчатого компрессора описывается системой нелинейных уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS-модель).

Система, записанная в локальной криволинейной системе координат, связанной с обтекаемыми телами и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси z в векторной форме имеет вид [8]:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial \psi_i} = H_j,$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ h \end{bmatrix}; \quad F_j = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + \delta_{1j} p - \tau_{1j} \\ \rho u_2 u_j + \delta_{2j} p - \tau_{2j} \\ \rho u_3 u_j + \delta_{3j} p - \tau_{3j} \\ (h+p)u_j - u_i \tau_{ij} + q_j \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\rho u_2 \Omega + \rho \Omega^2 r_x \\ -2\rho u_1 \Omega + \rho \Omega^2 r_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tau_{ij} = 2(\mu + \hat{\mu}) \left[S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad q_i = -(\lambda + \hat{\lambda}) \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad h = e + p \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \Omega^2 r^2}{2} + \rho k;$$

Q – вектор консервативных переменных; F_j – вектора потоков; H – вектор источников членов; J – якобиан преобразования координат; ψ_i – криволинейные координаты ξ, η, ζ ; u_j – декартовы компоненты скорости; τ_{ij} – тензор вязких напряжений; ρ – плотность; Ω – скорость вращения; p – давление; k – кинетическая энергия турбулентности; r – расстояние от оси вращения до текущей точки; r_x, r_y – проекции r на оси x, y соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера; T – температура; μ – коэффициент молекулярной динамической вязкости; $\hat{\mu}$ – коэффициент турбулентной динамической вязкости; λ – коэффициент теплопроводности (молекулярный); $\hat{\lambda}$ – коэффициент теплопроводности (турбулентный); q – тепловой поток; e – внутренняя энергия единицы объема.

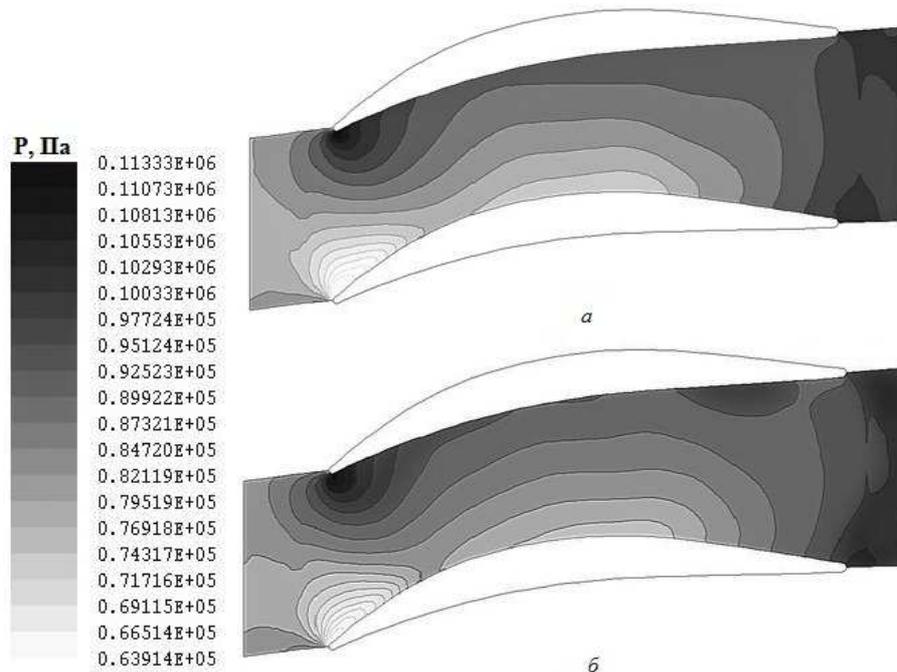


Рис. 3 – Поля давления: *a* – на временном шаге полупериода; *b* – на временном шаге периода.

Рассматривается $k - \omega$ SST модель турбулентности, которая учитывает перенос касательных напряжений и дает точное предсказывание отрыва потока при неблагоприятных градиентах давления [6].

$$\frac{\partial \bar{\rho} \hat{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{k} - (\bar{\mu} + \sigma_k \hat{\mu}) \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_i} \right] = P_k - \beta^* \bar{\rho} \hat{\omega} \hat{k};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \hat{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \hat{u}_j \hat{\omega} - (\bar{\mu} + \sigma_\omega \hat{\mu}) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x_j} \right] = \frac{\alpha \bar{\rho}}{\hat{\mu}} P_k - \beta \bar{\rho} \hat{\omega}^2 + (1 - F_1) \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x_j},$$

где $\bar{\mu}$ и $\hat{\mu}$ – коэффициенты динамической ламинарной и турбулентной вязкости соответственно; $P_k = \hat{\tau}_{ij} S_{ij}$ – производство кинетической энергии турбулентности; F_1 – смешивающая функция Ментера; $\hat{\omega}$ – удельная скорость диссипации.

Исходные уравнения интегрируются численно с помощью итерационной явно-неявной разностной схемой, явный оператор которой основан на ENO схеме Хартена, а неявная аппроксимация реализована с помощью схемы Бима-Уорминга-Стегера [2].

На входе в расчетную область задаются распределения по радиусу полного давления, полной температуры, меридионального и тангенциального углов, задающих направление вектора скорости. На твердых стенках задаются условия прилипания. На проницаемых поверхностях, отделяющих текущий межлопаточный канал от соседних каналов того же лопаточного аппарата задаются условия периодичности.

Численные результаты. После определения газодинамических параметров потока и неблагоприятных явлений, вызывающих дополнительные потери, предоставляется возможность конструктивными способами снизить значения неблагоприятных факторов и повысить эффективность работы конструкции в целом. Набегающий поток характеризуется неравномерным распределением параметров, поэтому для оценки прочности лопаточно-

го аппарата и дополнительных потерь, вызванных периодической нестационарностью, необходимо определить нестационарные силы, действующие на лопатки рабочего колеса.

В результате расчета были получены распределения полей скорости и давления. Моделирование было проведено с учетом вращения рабочего колеса и представленные результаты дают возможность определить характер изменения потока в разные моменты времени. Это позволяет выделить нестационарную газодинамическую составляющую в аэродинамических силах и проводить расчет колебаний лопаточного аппарата. Радиальное сечение межлопаточного канала рабочего колеса и поля давления, и чисел Маха в разные моменты времени при вращении (на периоде и полупериоде) показаны на рис. 3 – 4.

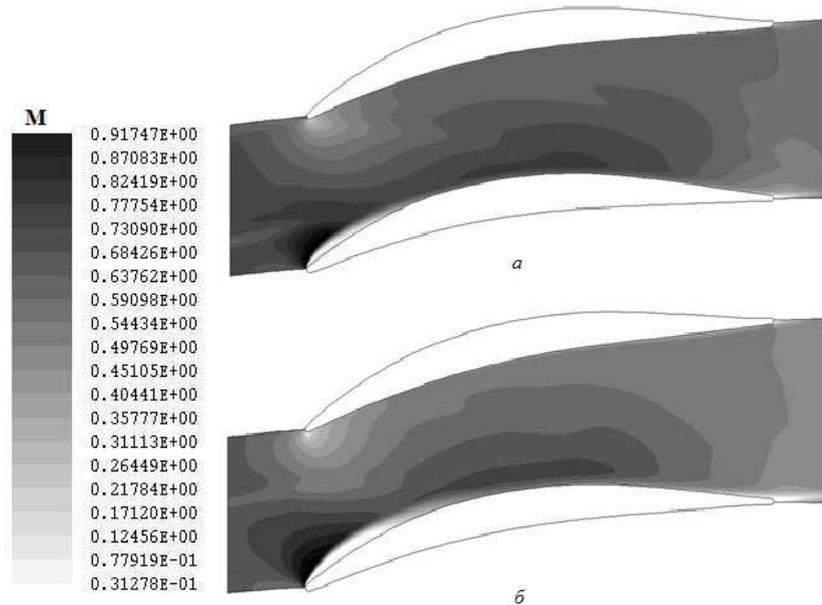


Рис. 4 – Поля чисел Маха: *a* – на временном шаге полупериода; *b* – на временном шаге периода.

Из рис. 5 видно, что на периферии лопатки у входной и выходной краях интенсивность турбулентности возрастает, под воздействием радиального зазора и кромочного следа направляющего аппарата. Данные области характеризуются значительной завихренностью и образованием обратного течения (рис. б).

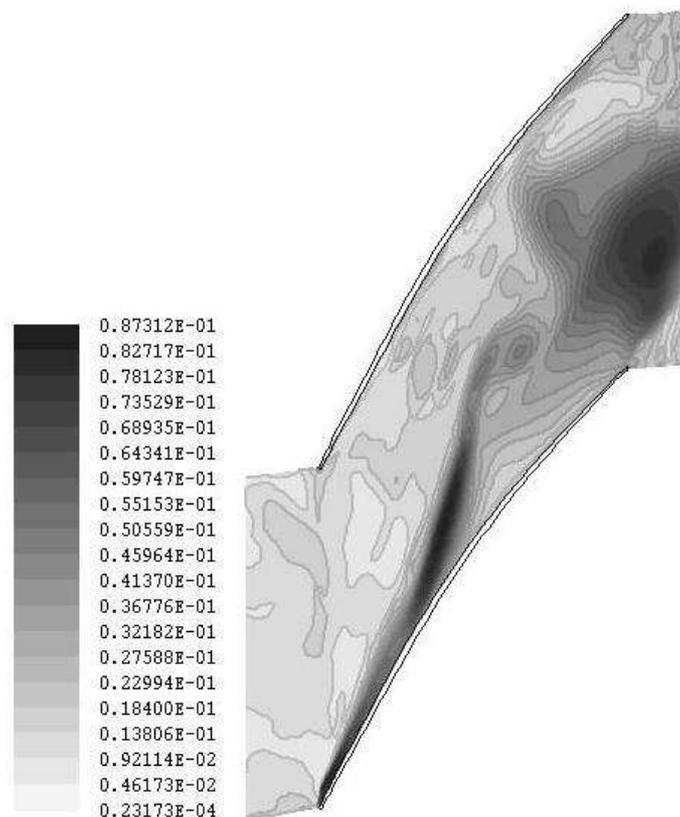


Рис. 5 – Степень турбулентности в межлопаточном канале на периферии лопатки.

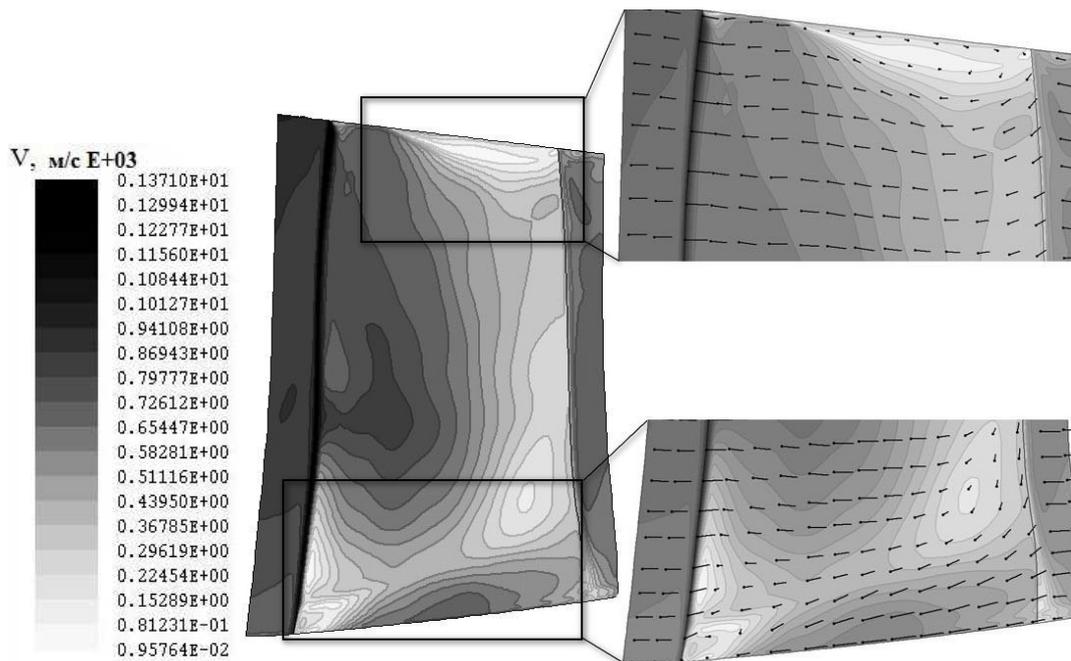


Рис. 6 – Обратное течение в канале.

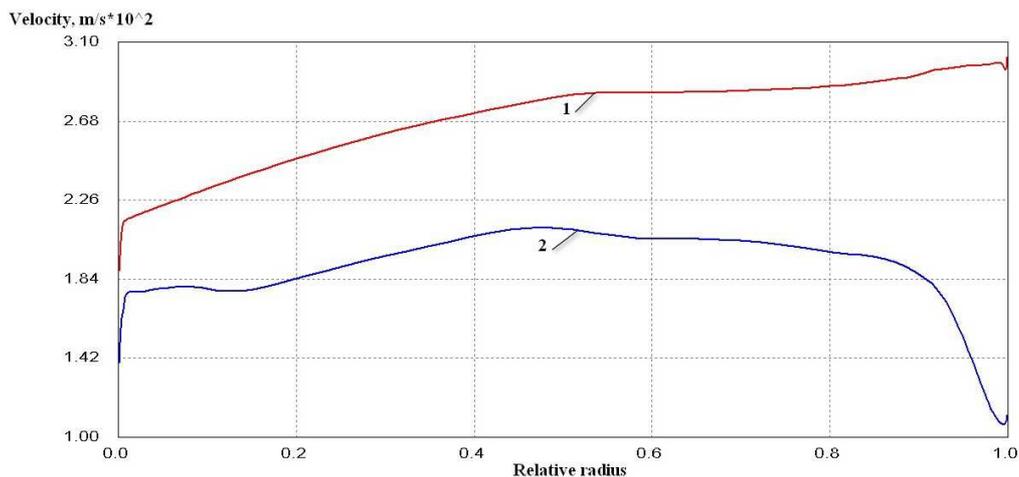


Рис. 7 – Сравнительная характеристика осредненной скорости в радиальном зазоре: 1 – на входе; 2 – на выходе.

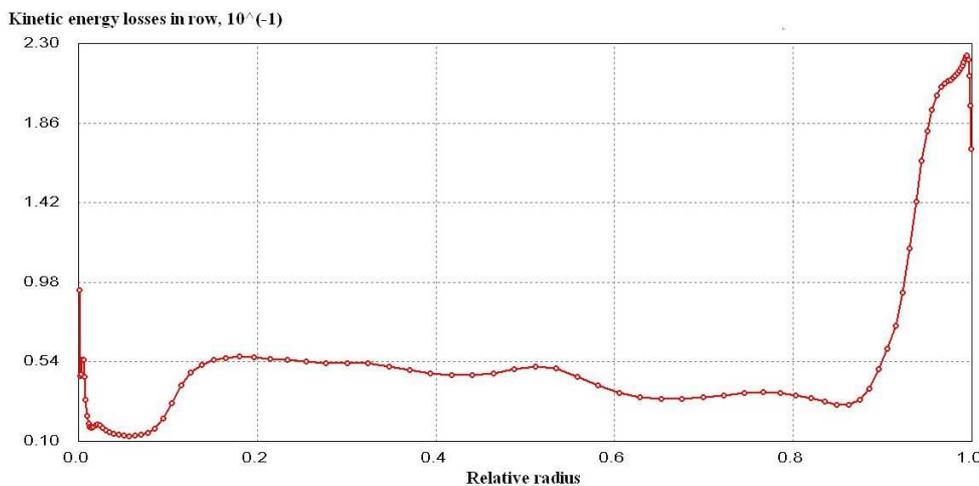


Рис. 8 – Потери кинетической энергии в лопаточном винце.

Перетекание через радиальный зазор существенно влияет на характер обтекания лопатки. На поверхности корпуса происходит нарастание пограничного слоя и возникает обратное течение. Область образования вихре-

вой структуры характеризуется значительным понижением скорости на выходе из радиального зазора. Сравнительная характеристика осреднённой скорости в радиальном зазоре на входе и выходе изображена на рис. 7.

Наличие радиального зазора над рабочими лопатками существенно оказывает влияние на распределение параметров потока в ступени компрессора. Уменьшение перепада давления на поверхности профиля приводит к снижению окружного усилия. Данные явления сопровождаются энергетическими потерями в венце. На рис. 8 показано распределение потерь кинетической энергии, осредненное в окружном и осевом направлениях.

Выводы. Численное моделирование газодинамического потока позволяет оценить прочность лопаточного аппарата компрессора. С этой целью было выполнено численное исследование течения в компрессорной решетке с помощью программного пакета *F*. Реализованная в нём математическая модель течения газа позволяет определить структуру потока и различные эффекты, которые могут вызывать дополнительные нагрузки.

Учёт вращения рабочего колеса позволяет определить действие периодически изменяющихся газовых сил, возникновение которых связано с неравномерностью газоздушного потока по окружности в проточной части двигателя. Данная неравномерность проявляется в виде неоднородности поля скоростей и поля давлений перед и за рабочей лопаткой. Из полученного распределения полей видно, что кромочные следы вызывают локальные изменения в окружном направлении поля скоростей и давлений.

Газодинамическая структура потока имеет изменчивый характер по высоте лопатки от корня к периферии, что объясняется закруткой рабочей лопатки.

Все отмеченные факторы являются причиной возникновения переменных усилий, вызывающих изгибные и крутильные колебания при действии нестационарного потока. Данное моделирование было проведено с целью определения газодинамической силы для дальнейшего расчета вынужденных колебаний под её действием.

Список литературы

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф. Динамика авиационных газотурбинных двигателей. – М. : Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. Ершов С. В., Русанов А. В. Проблемы численного моделирования трехмерных вязких течений в осевых и центробежных компрессорах // Вісник СумДУ. – 2005. – № 1 (73). – С. 25 – 34.
3. Karpik A., Vorobiev Yu. Nonlinear Analysis Of Gas Flow In Compressors Stage Based On Cfd-Method // Proceedings of the 5 th International Conference «Nonlinear Dynamics – 2016», Sept. 27 – 30, 2016, Kharkov. – P. 318 – 319.
4. Yershov S., Yakovlev V., Derevyanko A., Gryzun M., Kozyrets D. The development of new CFD solver for 3D turbomachinery flow computations // Ciepłota Maszyn Przepływowe. Turbomachinery. – 2012. – No. 141. – P. 15 – 24.
5. Niazi S. Numerical Simulation of Axial Compressor Rotor Flow Using Two Dimensional Euler Equations // Journal of Basic and Applied Scientific Research. – 2012. – No. 2 (4). – P. 3926 – 3934.
6. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. – 1994. – V. 32. – No. 8. – P. 1598 – 1605.
7. Карпик А. А., Яковлев В. А., Воробьев Ю. С. Анализ газодинамической структуры потока в решетках профилей осевого компрессора газотурбинного двигателя // Проблемы машиностроения. – 2015. – No. 18, 4/2. – С. 18 – 23.
8. Ершов С. В., Яковлев В. А. Аэродинамическая оптимизация лопаточных аппаратов турбин : подходы, методы, результаты // Проблемы машиностроения. Аэро- и гидромеханика в энергетических машинах. – 2012. – Т. 15 (№2). – С. 3 – 13.

References (transliterated)

1. Birger I. A., Shorr B. F. *Dinamika aviatsionnykh gazoturbinnykh dvigateley* [Dynamics of aviation gas-turbine engines]. Moscow, Mashinostroeniye, 1981. 232 p.
2. Yershov S. V. Rusanov A. V. *Problemy chislennogo modelirovaniya trekhmernykh vyazkikh techeniy v osevykh i tsestrobeznykh kompressorakh* [Problems of numerical simulation of three-dimensional viscous flows in axial and centrifugal compressors]. *Visnyk SumDU* [Bulletin of Sumy State University]. 2005, no. 1 (73), pp. 25–34.
3. Karpik A., Vorobiev Yu. Nonlinear Analysis Of Gas Flow In Compressors Stage Based On Cfd-Method. *Proceedings of the 5 th International Conference «Nonlinear Dynamics – 2016», Sept. 27 – 30, 2016, Kharkov*. Kharkov, 2016, pp. 318–319.
4. Yershov S., Yakovlev V., Derevyanko A., Gryzun M., Kozyrets D. The development of new CFD solver for 3D turbomachinery flow computations. *Ciepłota Maszyn Przepływowe. Turbomachinery*. 2012, no. 141, pp. 15–24.
5. Niazi S. Numerical Simulation of Axial Compressor Rotor Flow Using Two Dimensional Euler Equations. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*. 2012, no. 2 (4), pp. 3926–3934.
6. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J*. 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
7. Karpik A. A., Yakovlev V. A., Vorobiev Yu. S. Analiz gazodinamicheskoy struktury potoka v reshetkakh profiley oseвого kompressora gazoturbinного dvigatelya [Analysis of the gas-dynamic structure of the flow in the blade channel of the axial compressor of a gas turbine engine]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering]. 2015, no. 18, 4/2, pp. 18–23.
8. Yershov S., Yakovlev V. Aerodinamicheskaya optimizatsiya lopatochnykh apparatov turbin : podkhody, metody, rezultaty [Aerodynamic optimization of turbine blades: approaches, methods, results]. *Problemy mashinostroeniya. Seriya : Aerodinamika i gidromekhanika v energeticheskikh mashinakh* [Problems of Mechanical Engineering. Ser.: Aero- and hydromechanics for energy machinery]. 2012, vol. 15, no. 2, pp. 3–13.

Поступила (received) 12.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання потоку в міжлопатковому каналі компрессора з урахуванням обертання робочого колеса для визначення аеродинамічних сил / А. О. Карпик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 64 – 70. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование потока в межлопаточном канале компрессора с учетом вращения рабочего колеса для определения аэродинамических сил / А. А. Карпик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 64 – 70. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

вання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 64 – 70. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Simulation of the flow in the compressor blade channel taking into account the rotation of the runner for the estimation of aerodynamic forces / A. O. Karpik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 64 – 70. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Карпик Анна Олександрівна – асистент кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 739-39-62; e-mail: Karpikann@gmail.com.

Карпик Анна Александровна – ассистент кафедры компьютерного моделирования процессов и систем Национального технического университета «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 739-39-62; e-mail: Karpikann@gmail.com.

Karpik Anna Aleksandrovna – assistant at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 739-39-62; e-mail: Karpikann@gmail.com.

УДК 621.317.1

О. Ю. КРОПАЧЕК

КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ АВТОКОГЕРЕНТНОСТИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Удосконалено математичну модель для розрахунку коефіцієнта автокогерентності з метою виявлення частотної і тимчасової нестационарності перехідних випадкових теплових процесів. Показано можливість використання коефіцієнта частотної нестационарності по зрушенню для контролю екстремальних значень багатовимірних теплових процесів при істотних обмеженнях інтервалу часу спостереження. Доведено можливість екстраполяції контрольованих багатовимірних термодинамічних параметрів за вдосконаленими коефіцієнтами автокогерентності з використанням імовірно обґрунтованої процедури локального прогнозування.

Ключові слова: теплові процеси, температура, прогнозування, діагностика, ідентифікація, когерентність.

Усовершенствована математическая модель для расчёта коэффициента автокогерентности с целью выявления частотной и временной нестационарности переходных случайных тепловых процессов. Показана возможность использования коэффициента частотной нестационарности по сдвигу для контроля экстремальных значений многомерных тепловых процессов при существенных ограничениях интервала времени наблюдения. Доказана возможность экстраполяции контролируемых многомерных термодинамических параметров по усовершенствованным коэффициентам автокогерентности с использованием вероятностно обоснованной процедуры локального прогнозирования.

Ключевые слова: тепловые процессы, температура, прогнозирование, диагностика, идентификация, когерентность.

The mathematical model for computing the coefficient of auto-coherence has been improved to detect the frequency and time nonstationarity of transient random thermal processes. The possibility of using the factor of frequency nonstationarity in the shift to control the extreme values of multidimensional thermal processes is shown under significant limitations of the observation time interval. The possibility of extrapolation of the controlled multidimensional thermodynamic parameters by the improved coefficients of auto-coherence with the use of a probabilistically grounded procedure of local prediction is proved. Equations for predicting error variances for alternative computational procedures are obtained and conditions for improving forecasting efficiency are determined. The possibility of increasing the accuracy of the statistical control of thermal processes when extrapolating by the improved coefficients of auto-coherence is proved.

Key words: thermal processes, temperature, prediction, diagnostics, identification, coherence.

Введение. Измерительные случайные сигналы, отражающие локальные термодинамические процессы, несут важную информацию о долговременной функциональной стабильности динамических объектов. Однако обнаружить такую информацию в сигналах с априори неизвестными вероятностными моделями нестационарности – это проблема. Ее возможное решение – создание информационных технологий параметризации и нормирования случайных спектральных изменений сигналов при существенных ограничениях на время наблюдения. Выявление закономерностей в случайных моделях нестационарности – это получение принципиально новой дополнительной информации о функциональных свойствах динамического объекта, способствующей решению многих проблемных задач идентификации объектов и оптимального синтеза информационных компьютеризированных систем в условиях априорной неопределенности.

Анализ последних исследований. Проблема эффективного прогнозирования поведения сложных промышленных объектов по характеру процессов, протекающих в них, всегда являлась предметом вероятностно-статистического анализа процедур преобразования первичной измерительной информации во вторичные логические решения. При этом, степень и глубина изучения проблемы связывалась со сложностью математической

© О. Ю. Кропачек, 2017

модели процедуры такого преобразования [1 – 2]. Лучше всего изучена проблема для простых (линейных) процедур, реализованных в виде параметрических линейных *дискриминантных функций* (ДФ) [1, 3]. Квадратичные функции, учитывающие априорную информацию большего (в разы) объема, исследованы недостаточно [4]. По крайней мере, отсутствуют статистически обоснованные модели функциональной связи между объемами обучающих выборок, используемых для синтеза коэффициентов дискриминантной функции, и интервальными оценками достоверности получаемых решений.

Постановка задачи. Целью исследований в данной статье является усовершенствование методов вероятностного анализа математических моделей автокогерентности для нестационарных инфранизкочастотных термодинамических сигналов, для чего необходимо:

- развить экстраполяционную теорию прогнозирования случайных процессов и разработать математические модели сравнительного анализа информационных возможностей структурно различных экстраполяционных вычислительных процедур для контроля многомерных термодинамических систем;
- усовершенствовать вероятностную модель статистического анализа процедур измерительно-логического преобразования типа квадратической решающей функции, когда существенно ограничены объемы обучающих выборок;
- использовать полученную модель для информационного ранжирования и оптимизации пространства корреляционно-спектральных параметров.

Выбор математической модели показателя автокогерентности. Теория взаимно-корреляционного и взаимно-спектрального анализа нестационарных случайных процессов широко используется для контроля изменений различных моделей нестационарности, в частности, нестационарности спектральной [5]. Для контроля стационарно-связанных сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ [6], один из которых *нормативно стационарен*, а в другом допускается появление коррелированности гармоник, используют *функцию когерентности*

$$\gamma_{\xi\eta}(\omega) = |f_{\xi\eta}(\omega)| / [f_{\xi}(\omega) \cdot f_{\eta}(\omega)]^{1/2}, \quad (1)$$

где $f_{\xi\eta}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, а $f_{\xi}(\omega)$ и $f_{\eta}(\omega)$ – их спектральные плотности мощности.

При выявлении коррелированности гармонических составляющих на частотах $\omega + k\omega_0/2$ и $\omega - k\omega_0/2$ (здесь $\omega_0 = 2\pi/T$, где T – период нестационарности, k – номер гармоники) используют функцию автокогерентности [7], подобную модели (1):

$$\gamma_k(\omega) = \left| f_k\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right) \right| / \left[f_0\left(\omega - k\frac{\omega_0}{2}\right) \cdot f_0\left(\omega + k\frac{\omega_0}{2}\right) \right]^{1/2}. \quad (2)$$

В модели (2) используют две версии исходного случайного процесса, сдвинутых влево и вправо от частоты ω на величину $k\omega_0/2$.

Более удобной математической моделью выявления случайной модуляции отдельных гармоник, а, следовательно, и их коррелированности с соседними гармониками, является модель автокогерентности вида

$$\gamma_x(k) = |\mu_k| / [\mu_k^2 + \sigma^2(k)]^{1/2}, \quad (3)$$

где μ_k – математическое ожидание амплитуды k -той гармоники; $\sigma^2(k)$ – математическое ожидание ее дисперсии [8].

Модель (3) – это нормированный коэффициент линейной корреляции между k -той гармоникой исходного процесса $x(t)$ и этой же гармоникой, но квадратично преобразованной, при условии, что исходный процесс является *гауссовским с параметрами μ_k , $\sigma^2(k)$* .

Используем модель (3) для выявления спектральной нестационарности сигналов термопреобразователей, когда математическое ожидание спектральной плотности μ_k является двумерной функцией времени (на интервале сдвига) и частоты (на интервале масштаба). Сама спектральная плотность процесса изменения температуры может быть представлена множеством вейвлет-коэффициентов дискретизированного непрерывного преобразования в соответствии с математической моделью.

Обозначим символами ξ спектр исходного процесса изменения контролируемой температуры и $\eta = \xi^2$ – спектр после его квадратического преобразования. Получим две модели спектральной нестационарности теплового процесса:

- а) частотной нестационарности;
- б) нестационарности по времени,

позволяющие построить таблицу составляющих ковариационного разложения взаимоспектральной зависимости спектров ξ и η по частоте и по времени. Такое разложение дает возможность рассматривать модель $\gamma_x(k)$ (выражение (3)) в двумерном варианте, с усреднением по масштабу a и усреднением по сдвигу b вейвлет-изображения, а именно:

а) для нестационарности спектра теплового процесса по частоте – как характеристику изменчивости спектра внутри групп для разных моментов времени;

б) для нестационарности спектра этого же процесса по времени – как характеристику его изменчивости внутри групп на разных частотах.

Такие усреднения позволяют заменить модель (3) оценками частных корреляций, учитывающих преобразование $\eta = \xi^2$, мы получаем:

а) для модели частотной нестационарности –

$$\gamma_x^{(11)}(a) = \left(\sigma_\xi \sigma_{\xi^2}\right)^{-1} \frac{Q}{(L-1)} \sum_{l=1}^L (\bar{\xi}_l - \bar{\xi}) (\bar{\xi}_l^2 - \bar{\xi}^2), \quad (4)$$

$$\gamma_x^{(12)}(b) = \left(\sigma_{(a)} \sigma_{(b)} L(Q-1)\right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^Q (\xi_{lq} - \bar{\xi}_l) (\xi_{lq}^2 - \bar{\xi}_l^2), \quad (5)$$

б) для нестационарности по времени –

$$\gamma_x^{(21)}(b) = \left(\sigma_\xi \sigma_{\xi^2}\right)^{-1} \frac{L}{(Q-1)} \sum_{q=1}^Q (\bar{\xi}_q - \bar{\xi}) (\bar{\xi}_q^2 - \bar{\xi}^2), \quad (6)$$

$$\gamma_x^{(22)}(a) = \left(\sigma_{(a)} \sigma_{(b)} Q(L-1)\right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^Q (\xi_{lq} - \bar{\xi}_q) (\xi_{lq}^2 - \bar{\xi}_q^2). \quad (7)$$

Равенства (4) – (7) полностью определяют независимые (в рамках, частотной либо временной моделей нестационарности) пары частных коэффициентов автокогерентности:

а) $\gamma_x^{(11)}(a)$ и $\gamma_x^{(12)}(b)$;

б) $\gamma_x^{(21)}(b)$ и $\gamma_x^{(22)}(a)$.

Такая информационная независимость обеспечена статистическими свойствами математических моделей дисперсионного разложения вейвлет-изображения. Следует, также, отметить, что среднеквадратичные отклонения $\sigma_{(a)}$ и $\sigma_{(b)}$ в выражениях (5) и (7) являются остаточными и определяются исходя из условий

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^L \rho = \sum_{q=1}^Q \rho_q = 0; \quad \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^Q \varepsilon_{lq}^{(a)} = \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^Q \varepsilon_{lq}^{(b)} = 0; \\ M \left[\varepsilon_{lq}^{(a)2} \right] = \sigma_{(a)}^2 = const; \quad M \left[\varepsilon_{lq}^{(b)2} \right] = \sigma_{(b)}^2 = const, \end{cases} \quad (8)$$

модели нестационарности по времени

$$\xi_{lq}^{(b)} = \bar{\xi} + \rho_q^{(b)} + \varepsilon_{lq}^{(a)}, \quad (9)$$

где $M[\bullet]$ – знак математического ожидания; $\rho_q^{(b)}$ – изменение среднего значения спектра ξ_{lq} по сдвигу (времени), обусловленное влиянием фактора Φ ; $\varepsilon_{lq}^{(a)}$ – остаточные (случайные) изменения спектра ξ_{lq} по масштабу, при фиксированном сдвиге.

Практическое использование полученных уравнений предполагает, что общее число масштабов (L) и сдвигов (Q) должно быть достаточно большим ($L \geq 30$ и $Q \geq 30$), обеспечивая статистическую устойчивость оценок частных коэффициентов автокогерентности (4) – (7). При этом обозначение k в общем выражении (3) является условным целочисленным параметром, определяя множество масштабов или сдвигов вейвлет-преобразования.

Исследование коэффициентов автокогерентности при контроле параметрической стабильности многомерных термодинамических процессов. Совершенствование методов контроля тепловых режимов технологического оборудования предполагает, в первую очередь, учет особенностей динамики конечного множества переходных термодинамических процессов. Такое множество позволяет представить объект контроля в виде вектора-функции в p - мерном пространстве температур T_1, \dots, T_p (где p – размерность множества переходных процессов). Контролировать динамику изменений такого вектора удобнее всего, если исходные переходные процессы $\{T_1(t), \dots, T_p(t)\}$ представлены в форме параметров, несущих информацию о виде математической модели динамических изменений во времени, включающей как регулярно-функциональную, так и случайную составляющие. Такими параметрами являются два частных коэффициента автокогерентности $\gamma_x^{(21)}(b)$ и $\gamma_x^{(12)}(b)$, определяемых уравнениями (6) и (5) соответственно. Оба коэффициента несут информацию о крупномасштабной (функциональной) и мелкомасштабной (остаточной) спектральной нестационарности тепловых процессов для различных интервалов времени наблюдения.

В табл. 1 представлены значения коэффициентов $\gamma_x^{(21)}(b)$ и $\gamma_x^{(12)}(b)$ для неполных (по отношению к номи-

нальному Δt_n) интервалов наблюдения Δt пяти экспоненциально нарастающих до пределов T_{n1}, \dots, T_{n5} процессов $T_1(t), \dots, T_5(t)$. Столбцы, отвечающие исследуемым тепловым процессам $T_1(t), \dots, T_5(t)$, расставлены в порядке возрастания их предельных значений T_1, \dots, T_5 . Все нарушения ранжировки соответствующих коэффициентов автокогерентности затенены. Из таблицы видно, что только для коэффициента $\gamma_x^{(12)}(b)$ ранжировка его значений не нарушена (причём даже для малых интервалов наблюдения $0.33\Delta t_n$ и $0.66\Delta t_n$). Это позволяет контролировать нормативно ранжированные соотношения глобальных температурных экстремумов на начальных стадиях разогрева термодинамической технологической установки, экономя, например, время ее испытаний. Фактически коэффициент автокогерентности $\gamma_x^{(12)}(b)$ можно использовать для экстраполяции (прогнозирования) многомерных температурных экстремумов.

Таблица 1 – Значения частных коэффициентов автокогерентности при ограничениях на время наблюдения тепловых процессов

Коэффициент автокогерентности	Интервал наблюдения Δt	Предельные значения тепловых процессов				
		$T_{n1} = 4.902^\circ\text{C}$	$T_{n2} = 6.0^\circ\text{C}$	$T_{n3} = 6.351^\circ\text{C}$	$T_{n4} = 6.949^\circ\text{C}$	$T_{n5} = 45.21^\circ\text{C}$
$\gamma_x^{(21)}(b)$	$0.33\Delta t_n$	-0.9673	-0.9670	-0.9191	-0.9631	-0.9405
	$0.66\Delta t_n$	-0.7418	-0.7298	-0.7648	-0.7418	-0.7992
	$0.8\Delta t_n$	-0.4074	-0.4756	-0.4705	-0.5911	-0.6773
	$0.9\Delta t_n$	-0.3642	-0.4685	-0.4392	-0.6064	-0.6912
	Δt_n	-0.4001	-0.4915	-0.4717	-0.6036	-0.6849
$\gamma_x^{(12)}(b)$	$0.33\Delta t_n$	0.8872	0.7785	0.7409	0.4939	0.4292
	$0.66\Delta t_n$	0.8719	0.8406	0.8043	0.7606	0.7133
	$0.8\Delta t_n$	0.9868	0.8779	0.8540	0.8307	0.7976
	$0.9\Delta t_n$	0.8985	0.8821	0.8562	0.8344	0.7986
	Δt_n	0.9059	0.8940	0.8680	0.8577	0.8278

Второе, важное свойство коэффициента $\gamma_x^{(12)}(b)$ позволяет обнаружить табл. 2, в которой представлены мгновенные (на момент окончания интервала наблюдения Δt) значения температур для процессов $T_1(t), \dots, T_5(t)$.

В табл. 2 в строке для $\Delta t = 0.66\Delta t_n$ нарушена ранжировка текущих температур $T_2(\Delta t_2)$ и $T_3(\Delta t_3)$. Соответствующие температуры затонированы. Такое нарушение, тем не менее, не повлияло на ранжировку коэффициента $\gamma_x^{(12)}(b)$ в табл. 1, что указывает на свойство такого коэффициента отражать общую тенденцию многомерной ранжировки во времени для всей системы термодинамических показателей контроля. Это еще раз указывает на экстраполяционные (в многомерном представлении) свойства частотного коэффициента автокогерентности $\gamma_x^{(12)}(b)$. Это свойство особенно важно при контроле тепловых процессов, динамика и предельные (экстремальные) значения которых находятся в зонах пересечения допусковых интервалов, и уменьшение этих интервалов метрологически обеспечить невозможно (как, например, для температур $T_2(t)$ и $T_3(t)$).

Таблица 2 – Текущие значения температур в конце интервалов наблюдения

Интервал наблюдения Δt	Предельные значения тепловых процессов				
	$T_{n1} = 4.902^\circ\text{C}$	$T_{n2} = 6.0^\circ\text{C}$	$T_{n3} = 6.351^\circ\text{C}$	$T_{n4} = 6.949^\circ\text{C}$	$T_{n5} = 45.21^\circ\text{C}$
$0.33\Delta t_n$	1.712	2.664	2.994	4.218	31.502
$0.66\Delta t_n$	4.360	5.619	5.566	6.711	42.431
$0.8\Delta t_n$	4.661	5.823	6.082	6.888	44.123
$0.9\Delta t_n$	4.820	5.930	6.253	6.948	44.718

Реализации температурных процессов $T_2(t)$ и $T_3(t)$ и их вейвлет-спектров практически неразличимы, однако, различия все же существуют. Они содержатся в моделях остаточных мелкомасштабных спектральных изменений, выявляемых с помощью частотного коэффициента автокогерентности $\gamma_x^{(12)}(b)$.

Выводы. Таким образом, в данной работе получены следующие результаты [9]. Усовершенствована математическая модель расчёта коэффициента автокогерентности для выявления частотной и временной нестационарности переходных случайных тепловых процессов.

Рассмотрены модели построения пространства информативных параметров таких, как коэффициентов автокогерентности термодинамических процессов и показана возможность использования этих параметров для прогнозирования функциональных термодинамических состояний.

Доказана возможность экстраполяции контролируемых многомерных термодинамических параметров по усовершенствованным коэффициентам автокогерентности с использованием вероятностно обоснованной процедуры локального прогнозирования.

Список литературы

1. Раудис Ш. Ограниченность выборки в задачах классификации // Статистические проблемы управления. – Вильнюс. – 1976. – Вып. 18. – С. 1 – 185.
2. Мигушненко Р. П. Исследование влияния ограниченности априорной информации на вид и размер достоверности диагностики // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. – Белгород : БГТУ им. В. Г. Шухова. – 2014. – № 6. – С. 201 – 204.
3. Уткин Л. В., Жук Ю. А., Селиховкин И. А. Модель классификации на основе неполной информации о признаках в виде их средних значений // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – № 3. – С. 71 – 81.
4. Щапов П. Ф., Аврунин О. Г. Повышение достоверности контроля и диагностики объектов в условиях неопределенности : монография. – Х. : ХНАДУ, 2011. – 191 с.
5. Мирский Г. Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 320 с.
6. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М. : Мир, 1983. – 312 с.
7. Gardner W. A. Introduction to Random Processes with Application to Signals and Systems. – New York : Macmillan, 1985. – 434 p.
8. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів : ФМІ НАН України, 2013. – 802 с.
9. Мигушненко Р. П., Крощак О. Ю., Хрипунова А. Л., Коржов І. М. Формирование системы корреляционно-спектральных информативных параметров нестационарных вибросигналов // Матеріали 17-ої міжнародної науково-технічної конференції «Проблеми інформатики та моделювання». – Одеса. – 2017. – С. 3.

References (transliterated)

1. Raudis Sh. Ogranichennost' vyboriki v zadachakh klassifikatsii [Sample limitation in classification problems]. *Statisticheskie problemy upravleniya* [Statistical problems of control]. Vil'nyus, 1976, no. 18, pp. 1–185.
2. Migushhenko R. P. Issledovanie vliyaniya ogranichennosti apriornoj informatsii na vid i razmer dostovernosti diagnostiki [Studying the influence of a priori data limitations on the type and dimension of diagnostics reliability]. *Vestnik BGTU im. V. G. Shukhova* [Bulletin of the V. G. Shuhov BSTU]. Belgorod, BGTU im. V. G. Shukhova Publ., 2014, no. 6, pp. 201–204.
3. Utkin L. V., Zhuk Yu. A., Selikhovkin I. A. Model' klassifikatsii na osnove nepolnoy informatsii o priznakakh v vide ikh srednikh znacheniy [Classification model based on the incomplete information about characteristics in the form of their mean values]. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy* [Artificial intelligence and making decisions]. 2012, no. 3, pp. 71–81.
4. Schapov P. F., Avrunin O. G. *Povyshenie dostovernosti kontrolya i diagnostiki ob"ektov v usloviyakh neopredelyonnosti : monografiya* [Improving control reliability and objects diagnostics in undetermined conditions: monograph]. Kharkov, KhNADU Publ., 2011. 191 p.
5. Mirskiy G. Ya. *Kharakteristiki stokhasticheskoy vzaimosvyazi i ikh izmereniya* [Stochastic correlation characteristics and their measurements]. Moscow, Yenergoatomizdat Publ., 1982. 320 p.
6. Bendat Dzh., Pirsol A. *Primeneniya korrelyatsionnogo i spektral'nogo analiza* [Applications of correlation and spectral analysis]. Moscow, Mir Publ., 1983. 312 p.
7. Gardner W. A. *Introduction to Random Processes with Application to Signals and Systems*. New York, Macmillan Publ., 1985. 434 p.
8. Yavors'kiy I. M. *Matematychni modeli ta analiz stokhastychnykh kolyvan'* [Mathematical models and analysis of stochastic oscillations]. Lviv, FMI NAN Ukrainy Publ., 2013. 802 p.
9. Migushhenko R. P., Kropachek O. Yu., Khripunova A. L., Korzhov I. M. Formirovanie sistemy korrelyatsionno-spektral'nykh informativnykh parametrov nestacionarnykh vibrosignalov [Forming a system of correlation-spectral informational parameters of non-stationary vibration signals]. *Materiyali 17-oyi mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiyi "Problemy informatyky ta modelyuvannya"* [Proceedings of the 17-th international scientific and technical conference „Problems of informatics and modelling“]. Odessa, 2017, pp. 3.

Поступила (received) 02.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Кореляційно-спектральна модель контролю автокогерентності термодинамічних процесів / О. Ю. Крощак // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 70 – 74. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Корреляционно-спектральная модель контроля автокогерентности термодинамических процессов / О. Ю. Крощак // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 70 – 74. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Correlation-spectral model for controlling auto-coherence of thermodynamic processes / O. Yu. Kropachek // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 70 – 74. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Крощак Ольга Юрійвна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-69-61; e-mail: kropachek@ukr.net.

Крощак Ольга Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-69-61; e-mail: kropachek@ukr.net.

Kropachek Olga Yurievna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-69-61; e-mail: kropachek@ukr.net.

Ю. О. МЯГКА, О. Р. БЕЛЯНСЬКА, М. Д. ВОЛОШИН

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНО-ХІМІЧНОЇ ОБРОБКИ АКТИВНОГО МУЛУ З ПЕРСПЕКТИВОЮ ЙОГО ПОДАЛЬШОЇ УТИЛІЗАЦІЇ

Наведено дослідження впливу закономірностей процесу знешкодження активного мулу шляхом диспергування активного мулу при додаванні кальцієвмісного шламу; при цьому початкова вологість мулу зменшується у 1,1 рази. Визначено вплив ряду факторів на якість процесу механо-хімічної обробки активного мулу, зокрема вплив температурного режиму процесу, концентрації кальцієвмісного шламу, частоти коливання рідини та тривалості перемішування. Складено технологічну схему механо-хімічної обробки мулу.

Ключові слова: активний мул, диспергування, кальцієвмісний шлам, фрезерна мішалка.

Приведены исследования влияния закономерностей процесса обезвреживания активного ила путем диспергирования активного ила при добавлении кальцийсодержащего шлама; при этом начальная влажность ила уменьшается в 1,1 раза. Определено влияние ряда факторов на качество процесса механо-химической обработки активного ила, а именно влияние температурного режима процесса, концентрации кальцийсодержащего шлама, частоты колебания жидкости и продолжительности перемешивания. Составлена технологическая схема узла механо-химической обработки ила.

Ключевые слова: активный ил, диспергация, кальцийсодержащий шлам, фрезерная мешалка.

The influence of the regularities of the process of neutralization of activated sludge by dispersing the activated sludge when adding calcium-containing sludge followed by sedimentation is studied. The influence of several factors on the quality of the process of neutralization of the activated sludge by dispersing when adding calcium-containing sludge followed by sedimentation is determined, in particular the influence of the temperature regime of the process, the concentration of the calcium-containing sludge, the frequency of oscillation of the fluid, and the duration of mixing. It is established that the most optimal process is the dispersion of the activated sludge when adding the calcium-containing sludge in the amount of 28 mg/dm^3 in the solution with the active sludge, with the initial humidity of the sludge reducing 1.1 times in terms of 1 kg of dry matter. A process flow diagram of the mechanical and chemical treatment of activated sludge with adding calcium-containing sludge is compiled.

Key words: activated sludge, dispersion, calcium-containing sludge, milling mixer.

Вступ. Останнім часом в Україні виникає проблема утилізації осаду очисних споруд, що мають четвертий клас токсичності (малонебезпечні). В той же час через економічну кризу загальне виробництво мінеральних добрив за останні роки в Україні значно скоротилося (з 5074 до 2304 тис. т на рік), що відбувається на фоні розвитку сільського господарства і необхідності збільшення технологічних потужностей [1, 2]. Сьогодні в Україні фосфатні добрива є найдефіцитнішими. Наприклад, якщо у ґрунті є запаси нітрогену і калію в доступній формі для рослин, щоб сформувати 60 ц/га озимої пшениці, а фосфору – всього 40 кг, урожайність за сприятливих умов становитиме мінімум 40 ц/га [3 – 5]. Зі зміною економічного стану в країні, а також з різким підвищенням цін купівля та використання органо-мінеральних добрив стає нерентабельним для сільського господарства. Виникає необхідність збільшення виробництва добрив з більш доступної, дешевої сировини, зокрема відходів виробництва. Одним з таких відходів є активний мул очисних споруд, що тонами скидається на мулові майданчики і роками зберігається [6 – 8].

Передбачається, що використання надлишкового активного мулу у виробництві органо-мінеральних добрив дозволить утилізувати відходи виробництва і одержати якісні органо-мінеральні добрива [6, 9].

Аналіз останніх досліджень. Відходи міського комунального господарства, в тому числі й активний мул у великих містах і населених пунктах, породжують масу проблем у зв'язку з їх утилізацією. Одним із способів утилізації осаду стічних вод є їх використання в якості органо-мінерального добрива. Одночасно виключається необхідність зберігання (захоронення), підвищується родючість ґрунтів і врожайність сільськогосподарських культур, навколишнє природне середовище залишається чистим.

Проведено і розроблено способи отримання і застосування органо-мінеральних добрив на основі шламу хімоводопідготовки ТЕЦ, що включає подачу шламу на автоматичні камерні фільтрпреси [6].

За результатами досліджень виявлено наявність фітотоксичної дії кислих ґрунтів після застосування в якості кальцієвмісного добрива на основі шламу хімоводопідготовки ТЕЦ. Встановлено, що після вапнування промисловими відходами інтенсивність ростових процесів на ґрунтах не знижується. Отже, шлами хімоводопідготовки ТЕЦ придатні для використання в технології одержання органо-мінеральних добрив [3 – 7].

Постановка задачі. Дослідити вплив кальцієвмісного шламу, що додають до розчину активного мулу, на кінетику його відстоювання, зміну початкової вологості мулу. Методом статистичного аналізу та лабораторних досліджень визначити технологічні параметри процесу диспергування активного мулу при додаванні в його розчин кальцієвмісного шламу, розкрити механізм процесу. Розробити технологічну схему вузлу механо-хімічної обробки активного мулу.

Математична модель і метод розрахунку. Диспергування мулу виконували на лабораторній установці механо-хімічної обробки активного мулу із використанням фрезерної мішалки (рис. 1) та керамічної ємності обсягом $0,5 \text{ dm}^3$ [10].

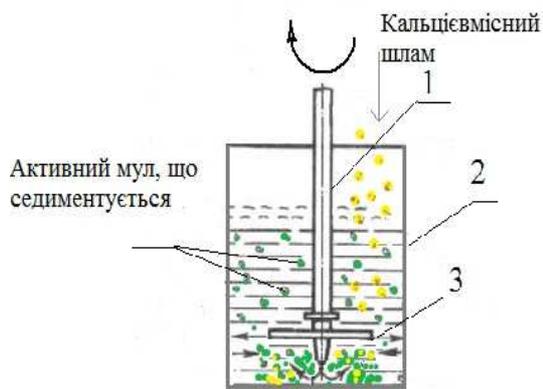


Рис. 1 – Схема лабораторної установки механо-хімічної обробки активного мулу: 1 – фрезерна мішалка; 2 – ємність; 3 – фреза.

Мішалку занурювали у досліджуваний активний мул, який мав концентрацію 250 мг/дм³.

Для дослідження впливу температурного режиму на процес диспергування активного мулу з додаванням кальцієвмісного шламу, досліди виконували на лабораторній установці, в якій використовували термонагрівач з терморегулятором, що регулював температуру у діапазоні 0–25 °С з інтервалом в 5 °С.

Термонагрівач занурювали у металеву ємність, в яку попередньо наливали технічну воду і розміщували шість мірних циліндрів із різною концентрацією кальцієвмісного шламу в розчині активного мулу, що попередньо диспергували, а саме:

- кальцієвмісний шлам цеху синтезу аміаку із концентраціями: 24, 28, 32 мг/дм³;
- кальцієвмісний шламу хімводопідготовки ТЕС із концентраціями: 24, 28, 32 мг/дм³, відповідно.

Зі збільшенням числа обертів фрезерної мішалки вище 17 с⁻¹ утворювалась емульсія, що є однорідно-стійкою дисперсною системою (рис. 2, а). На протязі години відстоювання така емульсія є умовно-стійкою. По завершенні годинного відстоювання спостерігали спухання мулу. Отже, використання більшої частоти обертів мішалки не є раціональним з технологічної і економічної точки зору.

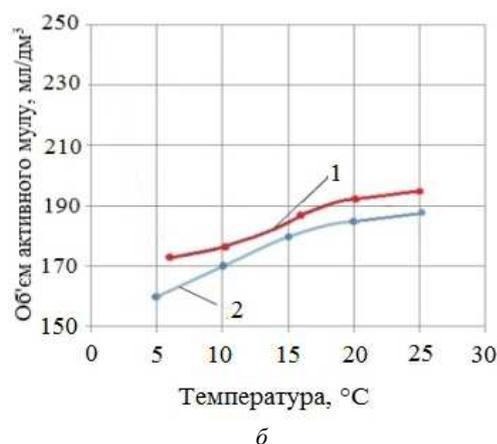
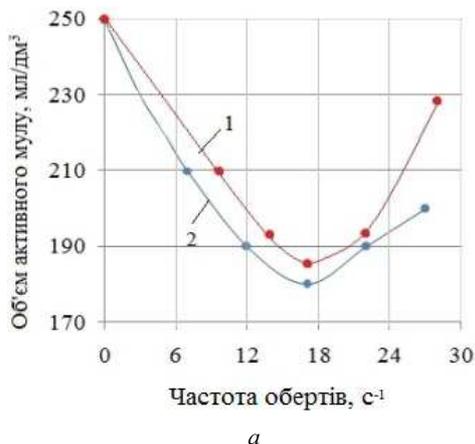


Рис. 2 – Залежність впливу на залишковий об'єм активного мулу: а – частоти обертів фрезерної мішалки та б – температури: 1 – при додаванні кальцієвмісного шламу синтезу аміаку; 2 – при додаванні кальцієвмісного шламу ТЕС.

Встановлено, що оптимальна концентрація шламу – 28 мг/дм³, а оптимальна температура механо-хімічної обробки мулу є 5...15 °С. При більш низьких температурах процес седиментації мулу майже не відбувається, в той час, як при температурі, більшій за пропоновану, відбувається спухання мулу і починається процес збродження органічної частини в розчині.

Розрахунок похибки обчислень процесу механо-хімічної обробки активного мулу виконували згідно методики [11]. При диспергуванні активного мулу у фрезерній мішалці визначено середню швидкість обертання фрези, $N_{сер.}$, с⁻¹:

$$N_{сер.} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} \tag{1}$$

та середнє квадратичне відхилення цієї величини, S_N

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n N_i^2 - n \cdot N_{сер.}^2}{n-1}}, \tag{2}$$

де N – швидкість обертів фрезерної мішалки в даному випадку, с⁻¹; n – кількість значень обертів фрезерної мішалки для кожної проби окремо [10, 11].

Розрахунок похибки дослідження температурного режиму проводили аналогічно обчислювання процесу диспергування. Відхилення від істинного значення об'єму диспергованого активного мулу при його наступному

відстоюванні обчислювали за формулою [10, 11]:

$$\Delta_N = \frac{t \cdot S_N}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

де t – коефіцієнт Ст'юдента. Відносну похибку вимірювань обчислювали за формулою [10, 11]:

$$\Delta_g = \frac{\Delta_N}{N_{\text{сер}}} \cdot 100\%. \quad (4)$$

У випадку розрахунку похибки вимірювання шести режимів обертів фрезерної мішалки, значення коефіцієнту Ст'юдента становило 3,93, що свідчить про відносно невелику похибку вимірювань. Коефіцієнт Ст'юдента у вимірюванні інтервалу температур від 0 до 25 °C включно склав 4,33.

На рис. 3 представлено залежність зміни початкової вологості активного мулу від концентрації кальцієвмісного шламу.

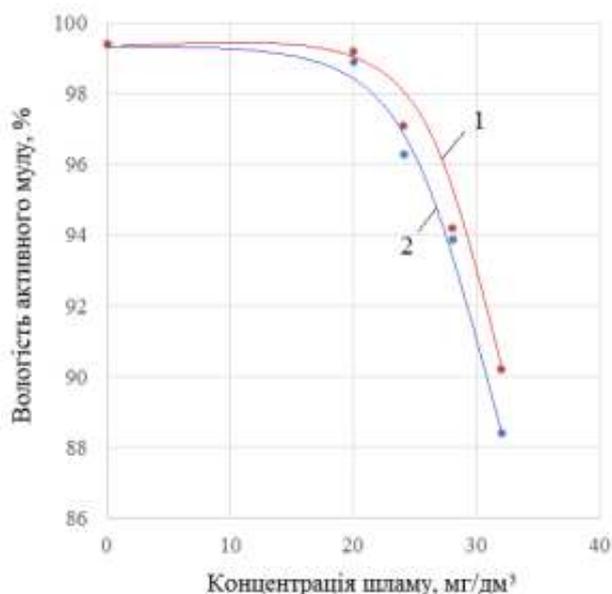


Рис. 3 – Залежність зміни початкової вологості активного мулу від концентрації кальцієвмісного шламу при інтенсивному перемішуванні: 1 – при додаванні кальцієвмісного шламу, що утворюється в процесі водопідготовки в цеху синтезу аміаку; 2 – при додаванні кальцієвмісного шламу ТЕС.

При додаванні відпрацьованого кальцієвмісного шламу ТЕС, що утворюється при пом'якшенні річкової води вапном, можливо знизити початкову вологість мулу з 99,4 до 88,4 % при наступному її перемішуванні фрезерною мішалкою і 2-х годинному відстоюванні.

Для отриманих моделей значення коефіцієнта апроксимації (R^2) близьке до 1, що свідчить про високі апроксимативні якості побудованих моделей.

Для розроблення рекомендацій за двома видами шламу провели порівняльний аналіз результатів досліджень. З цією метою проведено математичне описання процесу диспергування активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу на основі даних, отриманих в лабораторних умовах.

Результатами є рівняння регресії, що описують процес седиментації активного мулу із додаванням відпрацьованого кальцієвмісного шламу, який утворюється в процесі водопідготовки в цеху синтезу аміаку та з додаванням кальцієвмісного шламу ТЕС за двома дослідями:

а) вплив температури на залишковий об'єм активного мулу описується залежністю

$$\hat{y} = -0,09x^2 + 3,70x + 143, \quad R^2 = 0,989; \quad (5)$$

б) вплив частоти обертів фрезерної мішалки на залишковий об'єм активного мулу оцінено формулою

$$\hat{y} = 0,21x^2 - 7,57x + 251,06, \quad R^2 = 0,992. \quad (6)$$

Аналіз побудованих моделей дозволяє стверджувати, що процес диспергування активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу, зокрема шламу ТЕС, був найбільш оптимальним (рис. 3). Після такої механо-хімічної обробки вологість активного мулу знижується з 99,4 до 88,4 %. Йому майже не поступається процес додавання шламу, що утворюється в процесі водопідготовки у цеху синтезу аміаку. Найменш ефективним є процес диспергування активного мулу без додавання шламу.

Встановлено, що в процесі механо-хімічної обробки активного мулу окрім вивільнення зв'язаної гігроскопічної вологи утворюється колоїдний субстрат на основі шламу та зруйнованих бактерій і шкідливих мікроорганізмів, які при інтенсивному перемішуванні фрезерною мішалкою розрізаються навпіл і, як наслідок, гинуть.

Накопичення надлишкового активного мулу на міських очисних спорудах призводить до вторинного забруднення повітря, водоймищ, ґрунту та підземних вод. Економічні збитки розраховували за всіма об'єктами, на які впливає забруднення, зокрема фосфати, що містяться в розчині активного мулу.

Формула визначення економічних збитків $Z_{\text{відх}}$ від забруднення навколишнього середовища активним мулом із домішками фосфатів має вигляд [12, 13]:

$$Z_{\text{відх}} = B_{\text{відх}} + B_{\text{тер}} + P_{\text{в}}, \quad (7)$$

де $B_{\text{відх}}$ – витрати на вивіз, завантаження і розвантаження, захоронення та знищення відходів, грн/т; $B_{\text{тер}}$ – розмір збитків від використання території під складування, утворювання відвалів, грн/т; $P_{\text{в}}$ – збитки від забруднення водних об'єктів, грн/т.

Витрати на вивіз, завантаження, розвантаження, захоронення і знищення $B_{\text{відх}}$ 1 т відходів, розраховували за формулою, грн/т [12, 13]:

$$B_{\text{відх}} = B_{\text{т}} + B_{\text{утр}} + E_{\text{н}} \cdot K_{\text{с}}, \quad (8)$$

де $B_{\text{т}}$ – витрати на видалення відходів, $B_{\text{т}} = 10,2$ грн./т; $B_{\text{утр}}$ – експлуатаційні витрати, що пов’язані з обслуговуванням звалища, знезараженням відходів, $B_{\text{утр}} = 0,75$ грн./т; $E_{\text{н}}$ – нормативний коефіцієнт капітальних вкладень, $E_{\text{н}} = 0,16 \text{ рік}^{-1}$; $K_{\text{с}}$ – питомі капітальні витрати на будівництво системи видалення, знешкодження відходів у спеціальних спорудах ($K_{\text{с}} = 0,3 \div 0,5$) [12, 13].

На лівобережних очисних спорудах м. Кам’янське на добу утворюється 10,8 т активного мулу, за рік – $M_{\text{мулу}}^{\text{лів.}} = 3844,8$ тон мулу. Тоді, річні витрати на вивіз, завантаження, розвантаження, захоронення і знищення активного мулу становитимуть:

$$B_{\text{відх}}^1 = B_{\text{відх}} \cdot M_{\text{мулу}}, \quad (9)$$

де $M_{\text{мулу}}$ – кількість річного утвореного сухого активного мулу м. Кам’янське для лівого берега Дніпра

$$B_{\text{відх}}^{\text{лів.}} = B_{\text{відх}} \cdot M_{\text{мулу}}^{\text{лів.}}$$

Розмір збитків $B_{\text{тер}}$ від вилучення території під складування та утворювання відвалів визначали за формулою, грн/рік:

$$B_{\text{тер}} = B_{\text{відх}} \cdot S, \quad (10)$$

де S – площа, що використовується для складування відходів; її приймали, в середньому, із діапазону від 0,0002 до 0,00002 га/т відходів.

Розрахунок річних платежів за забруднення довкілля підприємством КВП ДМР «Міськводоканал» проводиться наступним чином. Розмір платежу за скид фосфатів з активного мулу у поверхні води визначали за формулою [12, 13]:

$$P_{\text{в}} = \sum_{i=1}^n [(H_{\text{бі}} \cdot M_{\text{лі}}) + (10H_{\text{бі}} \cdot M_{\text{сі}})] \cdot K_{\text{бр}} \cdot K_{\text{і}}, \quad (11)$$

де $H_{\text{бі}}$ – базовий норматив плати за скиди у водні об’єкти 1 т фосфатів у межах ліміту, грн/т; $M_{\text{лі}}$, $M_{\text{сі}}$ – річна маса лімітного та надлімітного річного викиду фосфатів в поверхні води; n – кількість забруднюючих речовин; $K_{\text{бр}}$ – регіональний (басейновий) коефіцієнт; $K_{\text{і}}$ – коефіцієнт індексації.

Тоді, економічні збитки від забруднення навколишнього середовища надлишковим активним мулом і фосфатами для лівобережних очисних споруд підприємством КВП ДМР «Міськводоканал» м. Кам’янське відповідно становлять 850 тис. грн/рік.

Технологічна схема процесу. На основі отриманих даних складено принципову технологічну схему вузлу механо-хімічної обробки активного мулу при додаванні кальцієвмісного шламу (рис. 4), яку можливо побудувати на базі очисних споруд лівого берега м. Кам’янського підприємства КВП КМР «Міськводоканал».

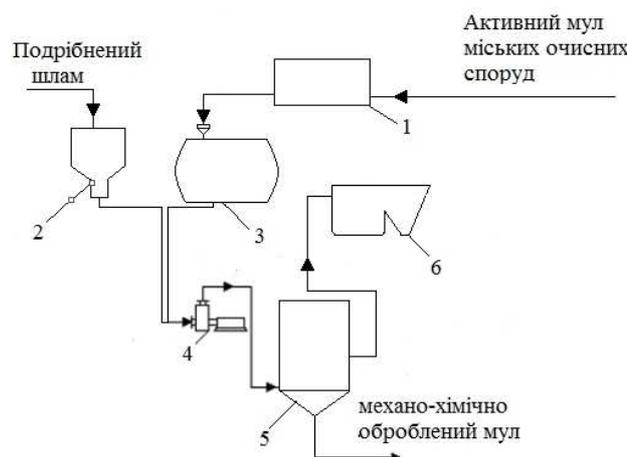


Рис. 4 – Принципова технологічна схема вузлу механо-хімічної обробки активного мулу:

1 – мулоушільнювач; 2 – бункер; 3 – приймальна ємність; 4 – фрезерна мішалка; 5 – відстійник; 6 – аеротенк.

Схема вузлу механо-хімічної обробки активного мулу при додаванні кальцієвмісного шламу складається із мулоушільнювача 1, де відбувається стадія попереднього зневоднення активного мулу, звідти мул самопливом надходить у приймальну ємність 3. В той же час у приймальний бункер 2 засипається попередньо подрібнений на грохоті кальцієвмісний шлам хімпідготовки ТЕС, концентрацією $28 - 32 \text{ мг/дм}^3$. У фрезерній мішалці 4 (критерій Рейнольдса $4,49 \times 10^4$, частота коливання рідини 533 с^{-1}), активний мул і шлам при частоті $12 -$

17 с⁻¹ і тривалості перемішування 1 хв подрібнюються до однорідної емульсії і перекачуються у відстійник 5, де відбувається седиментація активного мулу протягом 1,5 – 2 годин. Температурний режим процесу складає 5–15 °С, що, в свою чергу, дає змогу спростити апаратне оформлення технологічного вузлу, і, як наслідок, виключає питомі витрати теплоти процесу, що є доцільним з економічної та енергетичної точки зору. Утворений освітлений шар води, що вивільнюється під час седиментації активного мулу зі шламом, повертається на очисні споруди, для розбавлення висококонцентрованих стоків, у аеротенк 6. Із відстійника 5 механо-хімічно оброблений мул може використовуватись у якості компонента органо-мінерального добрива.

Аналіз отриманих даних та перспективи подальших досліджень. З отриманих результатів лабораторних досліджень встановлено, що додавання кальцієвмісного шламу до суміші активного мулу дає позитивний результат. В наслідок такої обробки зменшується гігроскопічна волога диспергованої суміші з 99,4 % до 88,4 %, знижується тривалість подальшого ущільнення суміші. Розкрито механізм седиментації механо-хімічно обробленого активного мулу, під час якого відбувається вивільнення зв'язаної гігроскопічної вологи, утворюється колоїдний субстрат на основі шламу та зруйнованих бактерій і шкідливих мікроорганізмів, які при інтенсивному перемішуванні фрезерною мішалкою розриваються навпіл. Встановлено, що седиментація активного мулу протікає в температурному інтервалі 5–15 °С, що, в свою чергу зменшує апаратне оформлення процесу.

Виконано математичне описання кінетики диспергування активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу, за допомогою якого можливо прогнозувати зменшення початкового об'єму активного мулу при збільшенні частоти обертів фрезерної мішалки.

Розроблено принципову технологічну схему вузлу механо-хімічної обробки активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу.

Вважаємо перспективним напрямком досліджень впливу кількості та складу кальцієвмісного шламу, що використовують при диспергуванні активного мулу. Це дозволяє спростити переробку активного мулу, що в свою чергу дозволяє досягти певного економічного ефекту на підприємстві КВП КМР «Міськводоканал», що несе збитки близько 850 тис. грн. в рік від забруднення навколишнього середовища активним мулом, насиченим фосфатами.

Висновки. За отриманими результатами лабораторних досліджень наведено математичний опис процесу механо-хімічної обробки активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу. Для розробки рекомендацій проведено порівняльний аналіз результатів досліджень побудованих моделей. Найбільш оптимальним виявляється процес механо-хімічної обробки активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу, зокрема шламу ТЕС, в кількості 28–32 мг/дм³, завдяки чому можливо знизити початкову вологість мулу з 99,4 до 88,4 % при наступному її перемішуванні фрезерною мішалкою і 2-х годинному відстоюванні. Складено принципову технологічну схему вузлу механо-хімічної обробки активного мулу із додаванням кальцієвмісного шламу.

Список літератури

1. Карпіщенко О. І., Карпіщенко О. О. Еколого-економічні проблеми використання мінеральних добрив // Вісник Сумського державного університету. Сер. : Економіка. – 2013. – № 2. – С. 5 – 11.
2. Гриневич В. А., Ксандров В. Н., Гришаев І. Г., Лобачёва М. П. Мировые цены на удобрения и сырьё // Мир серы, N, P и K. – Сумы : ОАО НИУИФГП «СГНИИ МИНДИП», 2012. – № 1. – С. 30 – 31.
3. Смирненко В. І., Асеева Л. І. Влияние илового осадка сточных вод на рост и развитие ячменя. – Ставрополь : «Ставропольское книжное издательство», 1989. – С. 31 – 34.
4. Соколов Л. И. Ресурсосберегающие технологии в системах водного хозяйства промышленных предприятий. – М. : АСВ, 1997. – 256 с.
5. Якушко С. І., Іванов В. П. Органо-мінеральні добрива. Переваги та способи виробництва. – С. : Хімічна промисловість України, 2008. – № 3. – Вип. 86. – С. 38 – 43.
6. Чертеж К. Л., Стрелков А. К., Биків Д. Е. Новий напрямок використання надлишкового активного мулу // Водопостачання й санітарна техніка. – 2001. – № 5. – С. 34 – 37.
7. Евилевич А. З., Евилевич М. А. Утилизация осадков сточных вод. – Л. : Стройиздат, 1998. – 248 с.
8. Кльопа Т. П., Волошин М. Д. Рекомендації по зменшенню біологічних обростань в оборотних системах водопостачання підприємств азотної промисловості // Екологія та інженерія. Стан, наслідки, шляхи створення екологічно чистих технологій. Тези доповідей VI міжнародної науково-практичної конференції (24 – 27 жовтня 2006 р., Дніпродзержинськ). – Д. :НТУУ «КПІ», 2006. – С. 57 – 59.
9. Зюман Б. В., Пасенко А. В. Пат. 30651. Україна. Спосіб застосування органо-мінерального добрива із шламу хімводопідготовки ТЕЦ і пташиного посліду. – 2007.
10. Очеретнюк О. Р. (Белянська), Волошин М. Д., Кармазіна В. В. Використання диспергатора в технології отримання модифікованих біомінеральних добрив з міських стічних вод // Новітні енерго- та ресурсозберігаючі хімічні технології та екологічні проблеми. Тези доповідей VI міжнародної науково-практичної конференції (10 – 12 вересня 2013 р.) – О. : ОНПУ, 2013. – С. 175–179.
11. Белянська О. Р., Волошин М. Д., Кармазіна В. В. Моделювання впливу попереднього диспергування в технології одержання комплексного добрива // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – № 6 (1115). – С. 12 – 21.
12. Мирончик Г. М., Бердичевский Д. А., Высота А. Е., Ярославский Л. В. Канализация. Наружные сети и сооружения. – М. :Стройиздат, 1986. – 233 с.
13. Быстров А. С., Варанкин В. В., Виленский М. А., Гофман К. Г., Гусев А. А., Дунаевский Л. В., Федоренко Н. П., Хачатуров Т. С. Временная типовая методика определения экономической эффективности осуществления природоохранных мероприятий и оценки экономического ущерба, причиняемого народному хозяйству загрязнением окружающей среды. – М. : Экономика, 1986. – 32 с.

References (transliterated)

1. Karpishhenko A. I., Karpishhenko A. A. Ekologo-ekonomichni problemy vykorystannya mineral'nykh dobyrv [Ecological and economic problems of using fertilizers]. *Visnyk Sums'kogo derzhavnogo universytetu. Ser. : Ekonomika* [Bulletin of the Sumy State University. Ser.: Economix], 2013, no. 3, pp 5–11.
2. Grinevich V. A., Ksandrov V. N., Grishaev I. G., Lobachyeva M. P. Mir sery, N, P i K [The world of sulfur, N, P and K.] Sumy, OAO NIUIFGP «SGNII MINDIP» Publ., 2011, no. 1, pp. 30–31.
3. Simirenko V. I., Aseyeva L. I. Vliyaniye ilovogo osadka stochnykh vod na rost i razvitiye yachmenya [Influence of wastewater sludge on growth and development of barley]. Stavropol, Stavropol'skoye knizhnoye izdatel'stvo Publ., 1989, pp. 31–34.
4. Sokolov L. I. *Resursosberegayushhiye tekhnologii v sistemakh vodnogo khozyaystva promyshlennykh predpriyatiy* [Resource-saving technologies in water management systems of industrial enterprises]. Moscow, Publishing house ASV Publ., 1997. 256 p.
5. Yakushko S. I., Ivanov V. P. Organo-mineral'ni dobyryva. Perevagy ta sposoby vyrobnytsva [Organo-mineral fertilizers. Advantages and production methods]. Summy, Khimichna promyslovič' Ukrainy Publ., 2008, no. 3, vol. 86, pp. 38–43.
6. Chertes K. L., Strelkov A. K., Bykiv D. E. Novyy napryamok vykorystannya nadlyshkovogo aktyvnogo mulu [A new direction of using excess activated sludge]. *Vodopostachannya ta sanitarna tekhnika* [Water supply and sanitary technique]. Summy, 2001, no. 5, pp. 34–37.
7. Evilevich M. A. *Utilizatsiya stochnykh vod* [Utilization of sewage sludge]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1998. 248 p.
8. Kl'epa T. P., Voloshin M. D. [Recommendations for reducing biological fouling in circulating water systems of the enterprises of nitrogen industry]. *Ekologiya ta inzheneriya. Stan, naslidky, shlyakhy stvorenniya ekologichno chystykh tekhnologiy. Tezy dopovidey VI mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi (24 – 27 zhovtnya 2006 r, Dniprodzerzhynsk)* [Ecology and engineering. The status, consequences, ways of creation of ecologically clean technologies. Abstracts of the VI Int. Sci.-Pract. Conf. (24 – 27 October 2006, Dniprodzerzhynsk)]. Dniprodzerzhynsk, NTUU KPI Publ., 2006, pp. 57–59.
9. Zuman B. V., Pasenko A. V. *Sposib zastosuvannya organo-mineral'nogo dobyryva iz shlamu khimpidgotovky TETS i ptashynogo poslidu* [Method of application of organo-mineral fertilizer from power plant chemical water treatment sludge and bird droppings]. Patent UA, no. 200710598, 2008.
10. Ocheretnyuk A. G. (Belyanskaya), Voloshin M. D., Karmazina V. V. [The use of the dispersant in the production of modified biomineral fertilizer from urban waste water treatment]. *Novini energo- ta resursozberigayuchi khimichni tekhnologiyi ta ekologichni problemy. Tezy dopovidey VI mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi (24 – 27 veresnya 2013 r., Odesa)* [New energy and resource saving chemical technologies and environmental issues. Abstracts of the V Int. Sci.-Pract. Conf. (September 10 – 12, 2013, Odessa)]. Odesa, ONPU Publ., 2013, pp. 175–179.
11. Belyanskaya O. R., Voloshin M. D., Karmazina V. V. Modelyuvannya vplyvu poperednyego dysperguvannya v tekhnologii oderzhannya kompleksnogo dobyrya [Modeling of the influence of the preliminary dispersing in the technology of obtaining complex fertilizers]. *Visnyk NTU "KhPI". Ser. : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 12–21.
12. Mironchik G. M., Berdichevskiy D. A., Vysota A. E., Yaroslavskiy L. V. *Kanalizatsiya. Naruzhnye seti i sooruzheniya* [Sewerage. External networks and facilities]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1986. 233 p.
13. Bystrov A. S., Varankin V. V., Vilenskiy M. A., Goffmann K. G., Gusev A. A., Dunayevskiy L. V., Fedorenko N. P., Khachaturov T. S. *Vremennaya tipovaya metodika opredeleniya ekonomicheskoy effektivnosti osushchestvleniya prirodookhrannykh meropriyatiy i otsenki ekonomicheskogo usherba, prichynayemogo narodnomu khozyaystvu zagryazneniem okruzhayushhey sredy* [Temporary typical method of determining the economic effectiveness of the implementation of environmental protection measures and assess the economic damage to the national economy by environmental pollution]. Moscow, Ekonomika Publ., 1986. 32 p.

Надійшла (received) 06.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Дослідження механо-хімічної обробки активного мулу з перспективою його подальшої утилізації / Ю. О. Мягка, О. Р. Белянська, М. Д. Волошин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 75 – 81. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.

Исследование механо-химической обработки активного ила с перспективой его дальнейшей утилизации / Ю. О. Мягкая, А. Р. Белянская, Н. Д. Волошин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 75 – 81. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.

Study of mechanical and chemical treatment of activated sludge with the prospect of its subsequent utilization / Y. O. Miahka, A. R. Belianska, N. D. Voloshin // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 75 – 81. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мягка Юлія Олегівна – бакалавр кафедри Хімічна технологія неорганічних речовин Дніпровського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (098) 551-63-57; e-mail: korthun@mail.ru.

Мягкая Юлия Олеговна – бакалавр кафедры Химическая технология неорганических веществ Днепропетровского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (098) 551-63-57; e-mail: korthun@mail.ru.

Miahka Yuliia Olegivna – Bachelor of Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dniprovsky State Technical University, Kamenskoe; tel.: (098) 551-63-57; e-mail: korthun@mail.ru.

Белянська Олександра Ростиславівна – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри хімічна технологія неорганічних речовин Дніпровського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Белянская Александра Ростиславовна – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры химической технологии неорганических веществ Днепропетровского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Belianska Alexandra Rostislavovna – Candidate of Engineering Sciences, Senior Lecturer, Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dniprovsky State Technical University, Kamenskoe; tel.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Волошин Микола Дмитрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Хімічна технологія неорганічних речовин Дніпровського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Волошин Николай Дмитриевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры Химическая технология неорганических веществ Днепропетровского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Voloshin Nikolai Dmitrievich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Chemistry of Inorganic Substances, Dniprovsky State Technical University, Kamenskoe; tel.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

УДК 519.6

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО РУХ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

З використанням періодичних еліптичних функцій Якобі одержано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. Виведено замкнені формули для обчислення переміщень маятника у часі та періодів коливань, спричинених початковим відхиленням маятника від вертикального положення або наданою йому в цьому положенні початковою швидкістю. Наведено приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень переміщень за виведеними формулами добре узгоджуються з результатами числового розв'язку задачі Коші на комп'ютері.

Ключові слова: математичний маятник, пружний осцилятор, вільні коливання, задача Коші, аналітичні розв'язки, еліптичні функції.

С использованием периодических эллиптических функций Якоби получены два варианта аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения движения. Выведены замкнутые формулы для вычисления перемещений маятника во времени и периодов колебаний, вызванных начальным отклонением маятника от вертикального положения или данной ему в этом положении начальной скоростью. Приведены примеры расчетов, в которых показано, что результаты вычисления перемещений по выведенным формулам хорошо согласуются с результатами численного решения задачи Коши на компьютере.

Ключевые слова: математический маятник, упругий осциллятор, свободные колебания, задача Коши, аналитические решения, эллиптические функции.

Two variants of the analytical solution to the nonlinear differential equation of motion are obtained using Jacobi periodic elliptic functions. Closed formula for computing the displacements of the pendulum in time and the periods of its oscillations, induced by the initial deflection from the vertical position or initial velocity communicated to the pendulum in this position, are derived. The computational examples are given. The results of calculating the displacements using the derived formula are in close agreement with the numerical results of solving the Cauchy problem using computer.

Key words: mathematical pendulum, elastic oscillator, free oscillations, Cauchy problem, analytical solutions, elliptic functions.

Вступ. Задача руху математичного маятника відноситься до класичних в теорії нелінійних механічних коливань. Їй приділялась значна увага не тільки в науковій, а і в навчальній літературі. Рівняння руху математичного маятника має точний аналітичний розв'язок, який традиційно використовують для визначення похибок різних наближених аналітичних методів механіки, зокрема при визначенні залежності періоду і частоти від амплітуди коливань нелінійної системи [1 – 3]. При цьому значно менше уваги приділялося дослідженню самого руху, тобто аналізу переміщення маятника як функції часу.

Для розрахунку переміщень часто використовують лінійний варіант теорії так званих *малих* коливань, коли похибки наближення зростають при збільшенні амплітуд коливань маятника [1, 4 – 7]. Зустрічаються роботи, де математичний маятник отожднюють з фізичним маятником, рухи яких описуються однотипними диференціальними рівняннями, що відрізняються лише сталими коефіцієнтами. Але для фізичного маятника не потрібні такі обмеження на амплітуди коливань, які доводиться вводити для математичного маятника, щоб забезпечувалась його стійкість руху. Тому заслуговує уваги черговий аналіз зазначеної класичної задачі.

Метою статті є виведення замкнутих розрахункових формул для обчислення переміщень математичного маятника у часі, перевірка їх вірогідності та доведення можливості використання для аналізу руху нелінійного механічного осцилятора, коли він є пружним аналогом математичного маятника. У математичного маятника роль відновлюючої сили виконує сила гравітації, тоді як у його аналога такою є сила пружності пружини.

Постановка задачі. Математичним маятником тут вважаємо таку коливальну систему з одним ступенем вільності, що традиційно визначена в теоретичній механіці, а саме конструктивно це невагома нерозтяжна нитка, один кінець якої закріплено в нерухомому циліндричному шарнірі, а на другому кінці прикріплена вагома матеріальна точка [3 – 5].

Рух такого маятника описуємо загальновідомим диференціальним рівнянням:

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0, \quad (1)$$

у якому Θ – кут відхилення розтягнутої нитки від вертикалі $\Theta = 0$; g – прискорення вільного падіння; l – довжина нитки; крапка означає похідну за часом t .

Оскільки нитка не чинить опору стисканню, то кут Θ повинен задовольняти нерівності:

$$|\Theta| \leq \pi/2. \quad (2)$$

У супротивному випадку на деяких ділянках, біля кінців траєкторії, нитка не буде розтягнутою складовою сили гравітації та відцентровою силою, а тому вся траєкторія вже не буде дугою кола радіуса l , і порушиться стійкість руху математичного маятника та втратить чинність рівняння (1). Про це йдеться в [3], де визначають умови злипання нитки.

Далі ставимо задачу одержати точні аналітичні розв'язки рівняння (1) для двох варіантів початкових умов:

$$1) \Theta(0) = \Theta_0, \quad \dot{\Theta}(0) = 0; \quad 2) \Theta(0) = 0, \quad \dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0 = v_0/l. \quad (3)$$

У першому випадку рух спричинено початковим відхиленням маятника на кут Θ_0 від вертикального положення, а в другому – наданою йому в цьому положенні кутовою швидкістю $\dot{\Theta}_0$ або лінійною швидкістю v_0 кінця маятника (матеріальної точки).

Перша форма розв'язку задачі Коші. Для інтегрування рівняння (1) йому надаємо форму:

$$\dot{\Theta} \frac{d\dot{\Theta}}{d\Theta} = -\frac{g}{l} \sin \Theta. \quad (4)$$

Інтеграл рівняння (4), з точністю до сталої c , має вигляд:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \dot{\Theta} = \pm \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}} \sqrt{\cos \Theta + c}. \quad (5)$$

У випадку початкових умов 1) в (3) стала c приймає значення $c = -\cos \Theta_0$ і, згідно з (5), кутова швидкість руху описується виразом:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}} \sqrt{\cos \Theta - \cos \Theta_0}.$$

Тому другим інтегралом рівняння руху є

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \Theta_0}} = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}} t \quad (6)$$

або

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\Theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (7)$$

Далі, користуючись формулами

$$\sin \frac{\Theta}{2} = u \sin \frac{\Theta_0}{2}, \quad d\Theta = 2 \sin \frac{\Theta_0}{2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}} = \frac{2du}{\sqrt{\sin^{-2} \frac{\Theta_0}{2} - u^2}},$$

перейдемо до нової змінної інтегрування u в (7). Тоді:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(\sin^{-2} \frac{\Theta_0}{2} - u^2\right)}} = \sqrt{\sin \frac{\Theta_0}{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t, \quad (8)$$

де $z = \frac{\sin(\Theta/2)}{\sin(\Theta_0/2)}$.

Ліва частина одержаного співвідношення зводиться до неповного інтеграла першого роду $F(\varphi, k)$, бо згідно з [8, стор. 260]

$$\int_z^b \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)}} = \frac{1}{a} F(\varphi, k). \quad (9)$$

Тут $a > b \geq y \geq 0$; $\varphi = \arcsin \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - z^2}{a^2 - z^2}}$, $k = \frac{b}{a}$.

Тому, поклавши в (8) і (9): $b = 1$, $a = 1/\sin \frac{\Theta_0}{2}$, отримуємо

$$F\left(\varphi, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) = \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t; \quad z = \frac{\sin \Theta/2}{\sin \Theta_0/2} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\Theta_0/2) \sin^2 \varphi}}. \quad (10)$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t) = 2 \arcsin \frac{\sin \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2 \frac{\Theta_0}{2} + \left[\sin \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right)\right]^2}}, \quad (11)$$

де $\operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right)$ – відповідне значення *еліптичного косинуса Якобі*.

Формула (11) описує рух маятника у першій чверті циклу коливань з періодом T , що легко поширити і на більші значення t .

У околах граничних точок вказаного проміжку маємо:

$$\tau \rightarrow 0, \quad \operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) \rightarrow 1, \quad \Theta \rightarrow \Theta_0; \quad \tau \rightarrow T/4, \quad \operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) \rightarrow 0, \quad \Theta \rightarrow 0.$$

Поклавши в (10) $t = T/4$; $\varphi = 90^\circ$, одержуємо формулу для обчислення періоду коливань:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(90^\circ, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\Theta_0}{2}\right). \quad (12)$$

Тут $K\left(\sin \frac{\Theta_0}{2}\right)$ – відповідне значення повного *еліптичного інтеграла першого роду*, затабульованого в [9, стор. 114]. Тому, при визначенні періоду коливань, зручно використовувати вказану таблицю.

Для малих амплітуд Θ_0 : $\operatorname{cn}\left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) \rightarrow \cos \tau$, $\sin \frac{\Theta_0}{2} \rightarrow \frac{\Theta_0}{2}$ і (11) наближено переходить у рівність

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cdot \cos \tau, \quad (13)$$

що відповідає лінійній теорії *малих* коливань маятника [4, 7].

Побудуємо далі аналітичний розв'язок рівняння (1) при початкових умовах 2) в (3). Щоб виконувалась нерівність (2), вводимо обмеження і на швидкість v_0 , а саме приймаємо:

$$0 < v_0 \leq \sqrt{2gl}.$$

Швидкості v_0 відповідає амплітуда коливань

$$\Theta_0 = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gl}\right). \quad (14)$$

Тому, аналогічно з (7), другий інтеграл рівняння руху має вигляд:

$$\int_0^z \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(\sin^{-2} \frac{\Theta_0}{2} - u^2\right)}} = \sqrt{\sin \frac{\Theta_0}{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (15)$$

Ліва частина цього виразу теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Згідно з [8, стор. 260]

$$\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)}} = \frac{1}{a} F(\varphi_1, k), \quad (16)$$

причому $a > b \geq y \geq 0$; $\varphi_1 = \arcsin \frac{z}{b}$.

Поклавши в (16) $b = 1$, $a = \sin^{-1} \frac{\Theta_0}{2}$, отримуємо:

$$F\left(\varphi_1, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) = \tau, \quad \frac{\sin \Theta/2}{\sin \Theta_0/2} = \sin \varphi_1.$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t) = 2 \arcsin \left[\sin \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{sn} \left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \right]. \quad (17)$$

Тут $\operatorname{sn} \left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right)$ – відповідне значення еліптичного синуса Якобі, а Θ_0 пов’язано з v_0 залежністю (14).

Формула (17) описує рух математичного маятника в першій чверті циклу коливань, що потім легко поширити і на більші t .

У околах граничних точок вказаного проміжку маємо:

$$\tau \rightarrow 0, \sin \left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \rightarrow 0, \Theta \rightarrow 0; \tau \rightarrow T/4, \sin \left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \rightarrow 1, \Theta \rightarrow \Theta_0.$$

Період коливань залежить від v_0 і визначається за формулою (12), в якій

$$\sin \frac{\Theta_0}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \text{ або } \Theta_0 = 2 \arcsin \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}.$$

При малих амплітудах коливань $\operatorname{sn} \left(\tau, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \rightarrow \sin \tau$, $\sin \frac{\Theta_0}{2} \rightarrow \frac{\Theta_0}{2}$, і формула (17) має наближення

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cdot \sin \tau, \quad (18)$$

що відповідає лінійній теорії коливань маятника [4, 7].

В рамках лінійної теорії $K \left(\sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ і, згідно з (12), $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, що теж є загальновідомим результатом.

Друга форма розв’язку задачі Коші. Її одержимо, використовуючи табличні інтеграли [8, стор.168] або [10, стор. 197], де

$$\int_0^{\omega} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - a}} = \sqrt{2}F(\varphi_*, k_*), \quad \varphi_* = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 - a}}, \quad k_* = \sqrt{\frac{1 - a}{2}}, \quad |a| \leq 1. \quad (19)$$

Для початкових умов 1) в (3), згідно з (6), (19), маємо:

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \Theta_0}} = \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \Theta_0}} - \int_0^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos \Theta - \cos \Theta_0}} = \sqrt{2}F(90^\circ, k_*) - \sqrt{2}F(\varphi_*, k_*) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{l}}t. \quad (20)$$

Оскільки $a = \cos \Theta_0$, то $k_* = k = \sin \frac{\Theta_0}{2}$. Тому вираз (20) набуває форму:

$$F\left(\varphi_*, \sin \frac{\Theta_0}{2}\right) = \tau_* = K\left(\sin \frac{\Theta_0}{2}\right) - \tau.$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t) = \arccos \left[1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\tau_*, \sin \frac{\Theta_0}{2} \right) \right]. \quad (21)$$

Значимо, що розв’язки (11) і (21) рівнозначні. Вони приводять до однакових числових результатів.

Період коливань T , як і раніше, визначається за формулою (12).

У випадку початкових умов 2) в (3), згідно з (15) і (19), маємо:

$$\Theta(t) = \arccos \left[1 - \frac{v_0^2}{2gl} \operatorname{sn}^2(\tau, k_*) \right], \quad (22)$$

де $k_* = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}$.

Період коливань теж залежить від v_0 і визначається за формулами (12), (14).

Розв’язок (22) рівносильний розв’язку (17).

Приклади розрахунків.

Приклад 1. Обчислимо значення Θ для заданих t , якщо коливання маятника спричинені початковим відхиленням від вертикального положення на кут $\Theta_0 = 80^\circ$. Для такого початкового відхилення в таблиці [9, стор. 114] $K(\sin 40^\circ) = 1,7868$. Тому, задаючи $\tau = \sqrt{g/l}t$, легко знайти τ_* , а потім по таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду методом лінійної інтерполяції визначити і $\operatorname{sn}(\tau_*, \sin 40^\circ)$. Одержані числові результати занесено до табл. 1.

Таблиця 1 – Значення $\Theta(t)$, обчислені різними способами при $\Theta_0 = 80^\circ$

τ	τ_*	Θ , град., формула (21)	Θ , град., числовий метод	Θ , град., формула (13)
0,0000	1,7868	80	80,002	80
0,4496	1,3372	74,317	74,318	72,050
0,8695	0,9173	58,997	58,997	51,617
1,2534	0,5334	37,494	37,494	24,968
1,6119	0,1749	12,817	12,817	-3,287
1,7868	0,0000	0,0000	0,0000	-17,146

В табл. 1 результати обчислень за формулою (21) добре узгоджуються з результатами числового інтегрування рівняння (1) на комп'ютері, тоді як лінійна теорія, формула (13), дає суттєві похибки.

Приклад 2. Обчислимо $\Theta(t)$ для значення t , при коливаннях маятника довжиною $l = 2$ м, спричинених лінійною початковою швидкістю $v_0 = 5,081$ м/с. Результати обчислень за формулою (22) та іншими способами, записано в табл. 2

Таблиця 2 – Значення Θ , обчислені різними способами при $v_0 = 5,081$ м/с

τ	Θ , град., формула (22)	Θ , град., числовий метод	Θ , град., формула (18)
0,0000	0,000	0,0000	0,000
0,3514	22,625	22,626	24,095
0,7162	43,267	43,264	45,957
1,1049	59,565	59,565	62,539
1,5187	68,781	68,783	69,905
1,7312	69,996	69,998	69,101

Тут результати обчислень за формулою (22) теж добре узгоджуються з результатами числового комп'ютерного інтегрування рівняння (1), а лінійна теорія, формула (18), дає менші похибки, ніж у першому прикладі, бо коливання мають меншу амплітуду.

Висновки. Встановлено існування різних форм аналітичного розв'язку рівняння руху математичного маятника, які призводять до однакових числових результатів. Виведені формули дають можливість оцінювати похибки лінійного наближення в задачі руху математичного маятника.

Список літератури

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
3. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Н. Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
4. Старжинский В. М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
5. Кошляков В. Н. Краткий курс теоретической механики. – Киев: Вища школа, 1993. – 311 с.
6. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: Т. 2. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.
7. Кузьо І. В., Зін'юк Я. А., Ванькович Т.-Н. М. Теоретична механіка. – Харків: Фоліо, 2017. – 780 с.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

References (transliterated)

1. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation Theory]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
2. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillation Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
3. Butenin N. V., Lunts Ya. L., Merkin D. R. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Vol. 2: Dinamika* [Course in Theoretical Mechanics. Vol. 2: Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 496 p.
4. Starginskiy V. M. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 464 p.
5. Koshlyakov V. N. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Short Course in Theoretical Mechanics]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1993. 311 p.
6. Loitsyanskiy L. G., Lur'e A. I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki: Vol. 2* [Course in Theoretical Mechanics: Vol. 2]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 720 p.
7. Kuz'o I. V., Zin'ko Ya. A., Van'kovych T.-N. M. *Teoretychna mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Kharkiv, Folio Publ., 2017. 780 p.
8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
9. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Yelementarnye funktsii* [Integrals and Series. Elementary Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

Надійшла (received) 31.08.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про рух математичного маятника / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 81 – 86.

Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

О движении математического маятника / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

On the motion of mathematical pendulum / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 81 – 86. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasily Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 539.3; 534.1

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Описано нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності, що має лінійну (від'ємну) і кубічну (додатну) складові у виразі силової характеристики, при позитивному переміщенні системи. Розглянуто три можливих режими руху, в залежності від наданої амплітуди коливань в момент початку руху. Два з них проходять відносно центру, в положенні стійкої рівноваги, а третій – відносно сідлової точки, в положенні нестійкої рівноваги. Побудовано замкнуті аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші, з використанням періодичних еліптичних функцій. Запропоновано наближені подання вказаних спеціальних функцій комбінацією елементарних функцій, що спрощує використання аналітичних розв'язків. Наведено чисельні приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень на підставі одержаних розв'язків добре узгоджуються з результатами числового комп'ютерного інтегрування рівняння руху.

Ключові слова: вільні коливання, нелінійне диференціальне рівняння руху, аналітичний розв'язок, періодичні еліптичні функції.

Описаны нелинейные колебания системы с одной степенью свободы, которая имеет линейную (отрицательную) и кубическую (положительную) составляющие в выражении силовой характеристики при позитивном перемещении системы. Рассмотрены три возможных режима движения в зависимости от приданной амплитуды колебаний в момент начала движения. Два из них проходят относительно центра, в положении устойчивого равновесия, а третий – относительно седловой точки, в положении неустойчивого равновесия. Построены замкнутые аналитические решения нелинейной задачи Коши, с использованием периодических эллиптических функций. Предложены приближенные представления указанных специальных функций комбинацией элементарных функций, что упрощает применение аналитических решений в расчётах. Приведены численные примеры расчётов, в которых показано, что результаты расчётов на основе полученных решений хорошо согласуются с результатами численного компьютерного интегрирования уравнения движения.

Ключевые слова: свободные колебания, нелинейное дифференциальное уравнение движения, аналитическое решение, периодические эллиптические функции.

The paper deals with nonlinear oscillations of a system with one degree of freedom having a linear (negative) and a cubic (positive) components in the power characteristic under the positive motion of the system. Three possible motion modes depending on the oscillation amplitude communicated at the beginning of the motion are considered. Two of the motion modes are at the vicinity of the center, which is a stable equilibrium point, and the third one is at the vicinity of the saddle point, which is a point of unstable equilibrium. Closed analytical solutions for the nonlinear Cauchy problem are obtained using periodic elliptic functions. Approximations of the elliptic functions by a combination of elementary functions are presented which simplifies applying the analytical solutions in computations. The examples of numerical computations given in the paper confirm good compliance of the computational results based on the obtained solutions with the results of numerical computer integration of the equation of motion.

Key words: free oscillations, nonlinear differential equation of motion, analytical solution, periodic elliptic function.

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2017

Вступ. Вивченню нелінійних механічних коливань приділялась і продовжує приділятися значна увага дослідників. Свідченням тому є не тільки численні наукові статті, а і монографічні видання, серед яких, з публікацій останніх років, виділимо [1 – 4]. В них є відповідні огляди літературних джерел та списки літератури. Зазначимо, що силова характеристика з кубічною нелінійністю найбільш часто використовується в наукових дослідженнях нелінійних коливань. Це, в першу чергу, стосується її варіантів, що мають лише один центр в положенні стійкої рівноваги. Значно менше досліджень присвячено випадку, коли силова характеристика має два центри. Про неї, зокрема, йдеться в довіднику [5], де побудовано фазові портрети руху, що мають два центри і одну сідлову точку. Але в довіднику не приведено аналітичних розв'язків цієї задачі для обчислення переміщення системи і періоду коливань. Особливості руху згаданої коливальної системи числовими методами досліджували також в [6]. Тут, на відміну від відомих публікацій, робимо наголос на побудові аналітичних розв'язків, з використанням спеціальних функцій, які відносяться до затабульованих.

Метою статті є побудова та апробація нових формул для обчислення переміщень і періодів коливань у різних режимах руху осцилятора з кубічною нелінійністю, коли на фазовому портреті є три особливих точки: два центри і одна сідлова точка.

Постановка задачі та її розв'язки. Переміщення осцилятора $x(t)$ у часі t описуємо диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} - c_1x + c_2x^3 = 0, \quad (1)$$

у якому m – маса рухомої матеріальної точки; $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – коефіцієнти, що визначають силову характеристику з кубічною нелінійністю; крапка над x означає похідну по t .

Замість (1) далі будемо розв'язувати рівняння

$$\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = 0, \quad (2)$$

увівши позначення: $\alpha = c_1/m > 0$, $\beta = c_2/m > 0$.

Його доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (3)$$

де $a > 0$ – відхилення системи вправо від положення нестійкої рівноваги $x = 0$ – чим спричинений рух осцилятора.

Згідно з (2) маємо два положення стійкої рівноваги:

$$x_* = \pm\sqrt{\alpha/\beta}.$$

В залежності від значення a буде три режими руху. Тому ставиться задача знайти розв'язки задачі (2), (3), які описують ці режими.

Перший режим руху. Він характеризується тим, що $0 < a < x_*$, $a \leq x \leq \sqrt{2x_*^2 - a^2}$. Для інтегрування (2) подамо його у вигляді:

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = \alpha x - \beta x^3. \quad (4)$$

Провівши інтегрування, з урахуванням (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{(x^2 - a^2)(2x_*^2 - a^2 - x^2)}.$$

Тому переміщення осцилятора визначається виразом:

$$\int_a^x \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(b^2 - u^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \quad (5)$$

у якому $b^2 = 2x_*^2 - a^2$.

Ліва частина в (5) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду $F(\chi, k)$. Так, згідно з [7, с. 260], вираз (5) набуває вигляд:

$$\frac{1}{b} F(\chi, k) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \quad (6)$$

$$\text{де } \chi = \arcsin\left(\frac{b}{x} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}\right), \quad k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

Із (6) впливає розв'язок поставленої задачі:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\tau, k)}}, \quad (7)$$

у якому $\tau = b\sqrt{\frac{\beta}{2}}t$; $sn(\tau, k)$ – еліптичний синус Якобі.

Для обчислення періоду коливань одержуємо формулу:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{b\sqrt{\beta}} K(k).$$

Тут $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, таблиці якого надруковано в [8, с. 114].

Згідно з (7):

при $\tau \rightarrow 0$, $sn(\tau, k) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$;

при $\tau \rightarrow T/2$, $sn(\tau, k) \rightarrow 1$, $x \rightarrow b$;

при $\tau \rightarrow T$, $sn(\tau, k) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$.

Отже розв’язок (7) описує періодичні коливання осцилятора в околі правого положення стійкої рівноваги $x = x_* = \sqrt{\alpha/\beta}$.

При застосуванні формули (7), для обчислення еліптичного синуса, можна використовувати його апроксимацію:

$$sn(\tau, k) = \sin[\theta(\tau, k)], \tag{8}$$

в якій

$$\theta(\tau, k) = \frac{\pi\tau}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin \frac{\pi\tau}{K}; \quad q = \exp\left(-\pi \frac{K_*}{K}\right); \quad K_* = K(\sqrt{1-k^2}), \tag{9}$$

причому K і K_* затабульовані в [8].

Для аналізу точності реалізації аналітичного розв’язку у вигляді (7), (8), (9), розглянемо приклад.

Приклад 1. Розрахунок проводимо при $\alpha = 8\text{с}^{-2}$; $\alpha/\beta = 10^{-4}\text{м}^2$; $x_* = 0,01$ м; $a = 0,005$ м. Цим даним відповідає: $b = 0,01323$ м; $K = 2,4118$; $K_* = 1,6319$; $q = 0,1193$; $\tau = 2,646t$. Одержані відношення x/a , для різних t , запишемо в табл. 1. Там же, для порівняння, записано $(x/a)_r$, до яких призводить числове комп’ютерне інтегрування рівняння (2).

Таблиця 1 – Одержані двома способами x/a при $a = 0,005$ м

t	τ	$\theta(\tau, k)$	x/a	$(x/a)_r$
0,1	0,2646	0,2519	1,028	1,030
0,3	0,7938	0,7193	1,262	1,273
0,6	1,5876	1,2409	2,072	2,045
0,9	2,3814	1,5603	2,645	2,645

Як бачимо, використання формул (7), (8), (9) дає результати, близькі до результатів числового інтегрування рівняння (2). Розбіжність спричинена апроксимацією (9), яка створює можливість обійтись без таблиць еліптичних функцій.

Про вплив a на характер руху осцилятора надано інформацію на рис. 1. Зі збільшенням a зменшуються амплітуди і період коливань. Осцилятор нерухомий, коли $a = x_*$.

лятор нерухомий, коли $a = x_*$.

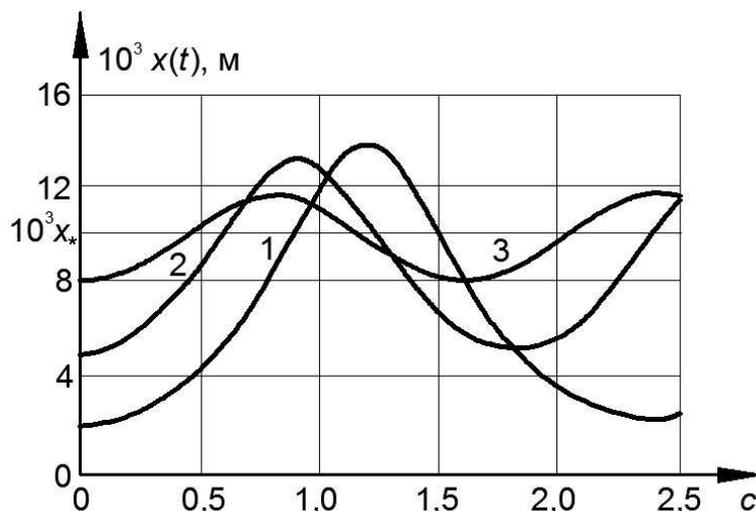


Рис. 1 – Графіки $x(t)$ при різних a : 1 – $a = 0,002$ м; 2 – $a = 0,005$ м; 3 – $a = 0,008$ м.

Другий режим руху. Він також проходить в околі положення $x = x_* = \sqrt{\alpha/\beta}$ і характеризується тим, що $x_* < a < \sqrt{2x_*}$; $\sqrt{2x_*^2 - a^2} < x < a$. У цьому випадку, проінтегрувавши (4), з урахуванням (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}.$$

Подальше інтегрування цього виразу дає:

$$\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t. \quad (10)$$

Ліва частина в (10) теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Користуючись довідником [7, с. 260], замість (10) одержимо:

$$\frac{1}{a} F(\lambda, r) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t.$$

$$\text{Тут } \lambda = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - b^2}}; \quad r = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

У підсумку приходимо до розв'язку:

$$x = a \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sn}^2(\xi, r)}, \quad (11)$$

$$\text{де } \xi = a \sqrt{\frac{\beta}{2}} t.$$

При цьому період коливань становить:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{\beta}} K(r).$$

Для перевірки формули (11) розглянемо приклад 2.

Приклад 2. Зберігаючи попередні α, β, x_* , обчислення x/a проводимо при $a = 0,012$ м. Маємо: $b = 0,00748$ м; $r = 0,7820$; $K = 1,9623$; $K_* = 1,7697$; $q = 0,0588$. Одержані x/a з використанням формул (8), (9) і (11) заносимо в табл. 2, де також вказано $(x/a)_r$, отримані числовим інтегруванням рівняння руху.

Таблиця 2 – Значення x/a , обчислені двома способами, при $a = 0,012$ м

t	ξ	$\theta(\xi, k)$	x/a	$(x/a)_r$
0,0	0,000	0,000	1,000	1,000
0,2	0,480	0,466	0,936	0,935
0,4	0,960	0,886	0,796	0,796
0,6	1,440	1,240	0,673	0,674
0,8	1,920	1,545	0,624	0,324

У цій таблиці теж спостерігається гарна узгодженість результатів розрахунків двома способами.

Графіки коливань, що відповідають другому режиму руху, для двох значень a , наведено на рис. 2.

Тут збільшення a супроводжується збільшенням амплітуд і періодів коливань.

Як і в першому режимі руху, час знаходження осцилятора в положенні $x > x_*$ значно менший, ніж у положенні $x < x_*$, внаслідок несиметричності силової характеристики відносно $x = x_*$.

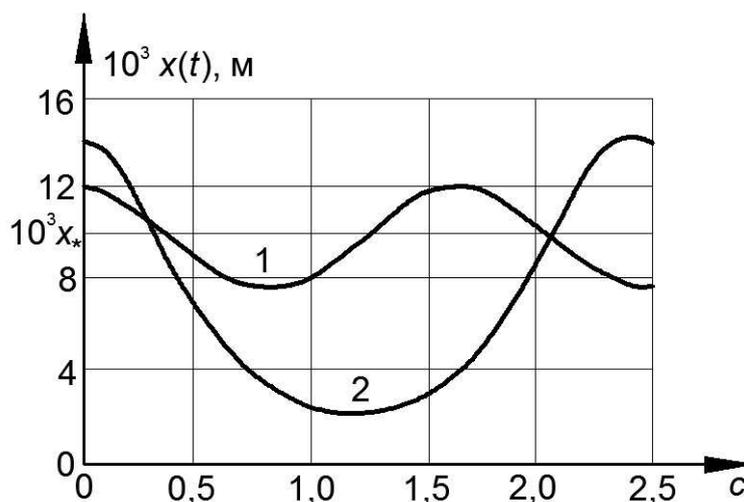


Рис. 2 – Графіки переміщень при $x_* < a < \sqrt{2x_*}$: 1 – $a = 0,012$ м; 2 – $a = 0,015$ м.

Третій режим руху. Він виникає при $a > \sqrt{2}x_*$ і відбувається навколо положення нестійкої рівноваги $x = 0$. При цьому переміщення осцилятора задовольняють нерівності $|x| \leq a$.

У третьому режимі руху переміщення визначається інтегралом:

$$\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 + c^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \tag{12}$$

де $c^2 = a^2 - 2x_*^2$.

Ліва частина в (12) теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Використовуючи [7, с. 259], виразу (12) надаємо вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} F(\delta, s) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \tag{13}$$

причому $\delta = \arccos \frac{x}{a}$; $s = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

В результаті із (13) отримуємо розв'язок

$$x = a \cdot \text{cn}(\eta, s), \tag{14}$$

у якому $\eta = \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{\frac{\beta}{2}} t$; $\text{cn}(\eta, s)$ – еліптичний косинус Якобі.

Обчислення періоду коливань зводяться до використання формули:

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(a^2 + c^2)}} K(s).$$

Збільшення a супроводжується зменшенням періоду коливань, що властиво нелінійним системам з жорсткою характеристикою пружності.

Розв'язок (14) описує рух осцилятора на першому напівциклі коливань $t \in [0; 0,5T]$, що потім легко поширити і на більші t .

Згідно з (14):

при $\tau \rightarrow 0$, $\text{cn}(\eta, s) \rightarrow 1$, $x \rightarrow a$;

при $\tau \rightarrow 0,5T$, $\text{cn}(\tau, k) \rightarrow -1$, $x \rightarrow -a$.

При використанні (14), еліптичний косинус можна наближено обчислювати за формулою:

$$\text{cn}(\eta, s) = \cos[\theta(\eta, s)], \tag{15}$$

де $\theta(\eta, s)$ – подається виразом (9)

Щоб з'ясувати похибки такого способу розрахунку, розглянемо приклад 3.

Приклад 3. Зберігаючи попередні значення α, β, x_* , обчислення x/a проводимо при $a = 0,016$ м. Маємо: $c = 0,00748$ м; $s = 0,9059$; $K = 2,3069$; $K_* = 1,6494$; $q = 0,1058$; $\eta = 3,5324 \cdot t$. Одержані x/a заносимо до

Таблиця 3 – Значення x/a , обчислених двома способами, при $a = 0,016$ м

t	η	$\theta(\eta, s)$	x/a	$(x/a)_r$
0,15	0,5299	0,4991	0,878	0,872
0,30	1,0597	0,9291	0,599	0,597
0,45	1,5896	1,2558	0,310	0,319
0,60	2,1194	1,4960	0,075	0,079
0,65	2,2961	1,5665	0,004	0,004

табл. 3, де поряд також вказано $(x/a)_r$, які дає числовий метод.

Як бачимо, розбіжності переміщень, обчислених двома способами, і в третьому режимі руху несуттєві.

Точність аналітичного способу розрахунку можна підвищити, якщо замість (9) використати формулу:

$$\theta(\tau, k) = \frac{\pi\tau}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin\left(\frac{\pi\tau}{K}\right) + \frac{q^2}{1+q^4} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{K}\right). \tag{16}$$

Це підтверджують результати обчислень x/a за формулами (14), (15), (16), записані в табл. 4.

Таблиця 4 – Уточнені значення $\theta(\eta, s)$ і x/a

t	0,15	0,30	0,45	0,60	0,65
$\theta(\eta, s)$	0,5102	0,9319	1,2454	1,4905	1,5662
x/a	0,873	0,596	0,320	0,080	0,004

Про вплив відхилення a на амплітуду і період коливань надана інформація на рис. 3, де зображено графіки $x(t)$, одержані при $a = 0,015$ м і $a = 0,017$ м.

Збільшення a приводить до збільшення

амплітуд коливань і зменшення їх періоду.

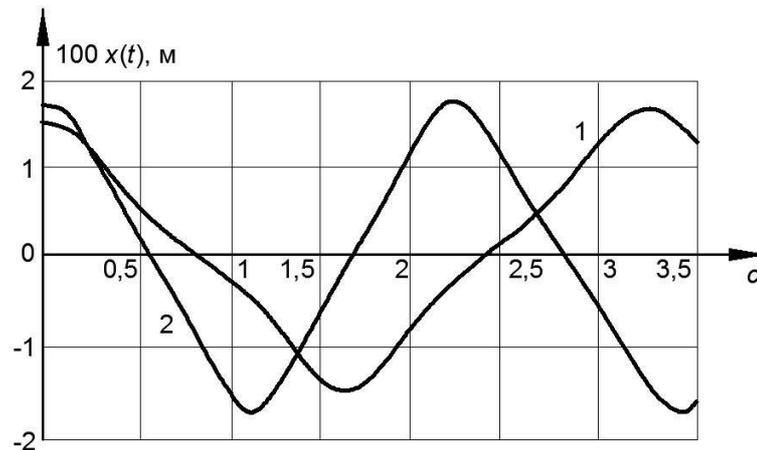


Рис. 3 – Графіки коливань при $a > \sqrt{2}x_*$: 1 – $a = 0,015$ м; 2 – $a = 0,017$ м.

Висновки. Для різних значень початкових відхилень виділено три режими коливань осцилятора, які описуються різними аналітичними виразами. Порівняльний аналіз показав, що результати розрахунків, з використанням одержаних аналітичних розв'язків і запропонованих апроксимацій еліптичних функцій, добре узгоджуються з результатами числового інтегрування рівняння руху на комп'ютері, чим підтверджена вірогідність виведення розрахункових формул.

Список літератури

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1: Модели, методы, явления. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
2. Митропольский Ю. А. Избранные труды в двух томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
4. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
5. Вибрации в технике : Справочник в 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – Москва : Машиностроение, 1979. – 351 с.
6. Бондарь Н. Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике (конструкции с прощёлками). – Киев : Вища школа, 1987. – 200 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва : Наука, 1962. – 1100 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.

References (transliterated)

1. Avramov K. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Tom 1: Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Volume 1: Models, methods, phenomena]. Moscow – Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
2. Mitropol'skiy Yu. A. *Izbrannyye trudy v dvukh tomakh* [Selected works in two volumes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
3. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods for studying nonlinear oscillatory systems]. Lviv, L'vivs'ka politekhnika Publ., 2014. 288 p.
4. Shatokhin V. M. *Analiz i parametricheskii sintez nelineynykh silovykh peredach mashin* [Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2008. 456 p.
5. *Vibratsii v tekhnike : Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technics: Reference book in 6 volumes. Vol. 2: Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1979. 351 p.
6. Bondar' N. G. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem v sovremennoy tekhnike (konstruktsii s proshcholkivaniyem)* [Stability and oscillations of elastic system in modern engineering (snap-through structures)]. Kyiv, Vyshsha shkola Publ., 1987. 200 p.
7. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
8. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.

Надійшла (received) 06.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про вільні коливання осцилятора з кубічно нелінійною силовою характеристикою / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 30 (1252). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

О свободных колебаниях осциллятора с кубической нелинейной силовой характеристикой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 30 (1252). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

On free oscillations of oscillator with cubic nonlinear power characteristic / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 86 – 92. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasilii Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 531.16:629.4.067

В. М. ПЕТУХОВ, Н. А. АКСЁНОВА**КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ПОСЛЕ СХОДА С РЕЛЬС**

Визначено траєкторію руху колісної пари вагону після її сходу з рейок. Побудовано кінематичну модель руху колеса по шпальній решітці. Виконано кінематичний аналіз руху колеса по шпалах. Отримано аналітичний вираз, що зв'язує рух колеса з параметрами верхньої будови колії. Показано, що амплітуда і частота коливань колісної пари при її сході залежать від діаметра колеса, ширини горизонтальної поверхні шпал і відстані між осями шпал. Визначено миттєві центри швидкостей колеса в характерних точках. Розроблена кінематична модель визначає основні діагностичні ознаки сходу вагонів з рейок. Це дозволить створити надійний алгоритм розпізнавання сходу для побудови апаратного і програмного забезпечення технічної системи контролю сходів вагонів з рейок.

Ключові слова: колесо, кінематичний аналіз, діагностична модель, траєкторія.

Определена траектория движения колесной пары вагона после ее схода с рельс. Построена кинематическая модель движения колеса по шпальной решетке. Выполнен кинематический анализ движения колеса по шпалам. Получено аналитическое выражение, связывающее движение колеса с параметрами верхнего строения пути. Показано, что амплитуда и частота колебаний колесной пары при ее сходе зависят от диаметра колеса, ширины горизонтальной поверхности шпалы и расстояния между осями шпал. Определены мгновенные центры скоростей колеса в характерных точках. Разработанная кинематическая модель определяет основные диагностические признаки схода вагонов с рельс. Это позволит создать надежный алгоритм распознавания схода для построения аппаратного и программного обеспечения технической системы контроля сходов вагонов с рельс.

Ключевые слова: колесо, кинематический анализ, диагностическая модель, траектория.

Kinematic analysis of the movement of a wagon wheel pair after its derailment is performed. Based on the studies carried out, the following results were obtained. The trajectory of motion of the center of the wheel after its coming off the rail along the sleeper grating is determined graphically. The center of the wheel moves rectilinearly along the horizontal section of the sleeper and along the arc of the circle in the areas where the wheel rolls from a sleeper and hits the next one. Thus, the trajectory of motion looks like a cyclic combination of rectilinear segments and segments of circles. An analytic expression characterizing wagon derailment is obtained, which connects the parameters of the upper structure of the track (the sleeper grid) and the wheel. The motion of the center of the wheel is determined by different equations depending on the stages of motion. The law of motion is given by different functions corresponding to different motion stages. It is shown that the amplitude and frequency of oscillations of a wheel pair at its derailment depend on the diameter of the wheel, the width of the horizontal surface of the sleeper and the distance between the axes of the sleepers. Instantaneous centers of wheel velocities at characteristic points are determined. The development of a kinematic model of the movement of a wagon wheel pair after its derailment allows one to proceed constructing a dynamic model of such a motion. The ultimate goal of studying this process should be the construction of a diagnostic model for the derailment of wagons based on the presented kinematic and dynamic models. This will make it possible to create a reliable derailment recognition algorithm for constructing the hardware and software of a wagon derailment technical control system.

Key words: wheel, kinematic analysis, diagnostic model, trajectory.

Введение. Сход вагонов с рельс – наиболее опасный инцидент, приводящий к тяжелым последствиям. Его опасность заключается в том, что обнаружить его для своевременной остановки поезда довольно сложно.

Наиболее известный случай – крушение электропоезда ICE-1, которое произошло в 1998 году, когда на линии Ганновер – Гамбург у поезда лопнул бандаж колеса, в результате чего колесная пара сошла с рельсов. Поезд проследовал ещё более 6 километров пока не ударился об опоры автомобильного моста. В результате трагедии погиб 101 человек, 88 были ранены.

Также не менее актуальна эта проблема и для грузовых поездов, поскольку значительный ущерб от сходо

грузовых вагонов наносится экономике и инфраструктуре железнодорожного транспорта, а также окружающей среде [1]. К сожалению, в настоящее время отсутствуют надежные системы распознавания сходов. И к тому же, внимание исследователей направлено на решение задач по устранению причин схода подвижного состава, но, тем не менее, сходы происходят довольно часто. Поэтому решение проблемы своевременного обнаружения схода вагонов имеет важное как экономическое, так и социальное значение.

Анализ последних исследований. Причины и механизм схода вагонов в настоящее время достаточно изучены. Наиболее полные современные исследования сходов вагонов в результате дефектов пути или дефектов ходовых частей представлены в работах [2, 3, 4]. Кинематике колесной пары при сходе посвящены труды [2, 5]. Различным аспектам схода и регистрации этого явления посвящены работы [6 – 8]. Тем не менее, детально изученной кинематики колесной пары после ее схода с рельс нигде не представлено.

Цель и постановка задачи. Целью работы является построение кинематической модели движения колесной пары после ее схода. Такая модель позволит в дальнейшем сформировать основные диагностические признаки схода, а также на базе этой модели построить диагностическую модель схода колесной пары.

Для этого требуется решить следующие задачи:

- определить траекторию движения колесной пары после ее схода с рельсов;
- получить аналитическое выражение, связывающее движение колеса с параметрами верхнего строения пути (шпальной решетки);
- выполнить кинематический анализ движения колеса по верхнему строению пути после схода.

Математическая модель. Колесная пара после схода её с рельс движется, как правило, по шпальной решетке. Соответственно, ее траектория движения зависит от верхнего строения пути на данном участке. При этом колеса продолжают двигаться вдоль оси пути. В данной работе, для первоначального упрощения рассматривается только движение колеса в плоскости, параллельной вертикальной плоскости оси пути. Также не учитывается неупругая деформация шпал при невысоких скоростях движения.

Схема движения колеса радиусом R после схода показана на рис. 1.

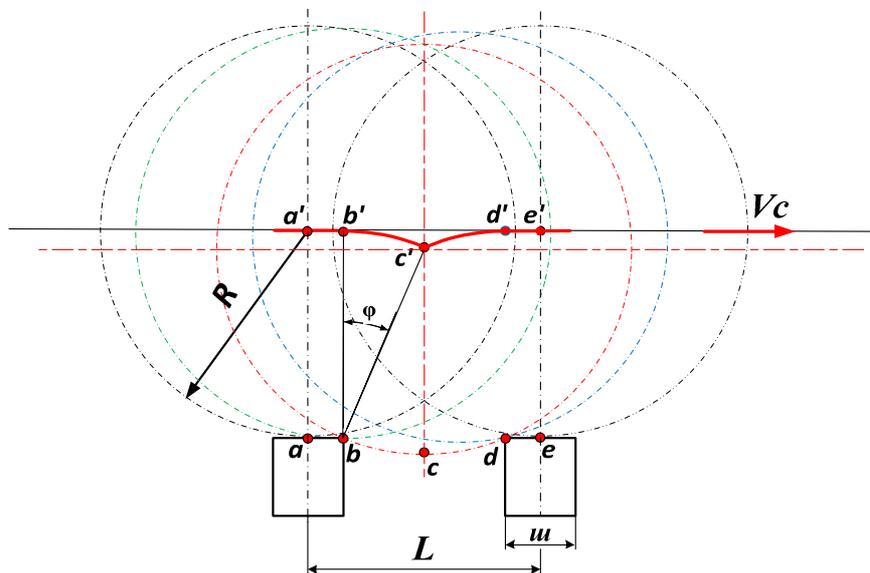


Рис. 1 – Схема движения колеса после схода.

Здесь характерные точки a, e – это мгновенные центры скоростей колеса на середине шпал; точки b и d – на ребрах шпал; c – середина расстояния между шпалами. Соответственно точки a', b', c', d', e' – проекции этих точек на траекторию центра колеса C . Центр колеса движется прямолинейно по участку, равному шпалы, и по дуге окружности на участках, где происходит его скатывание в межшпальное пространство и его выкатывание на шпалу.

На рис. 2, а приведена траектория центра колеса, из которого видно, что она имеет периодичность T , равную расстоянию L , между центрами шпал с максимальной глубиной провала колеса A между шпалами (рис. 2, б).

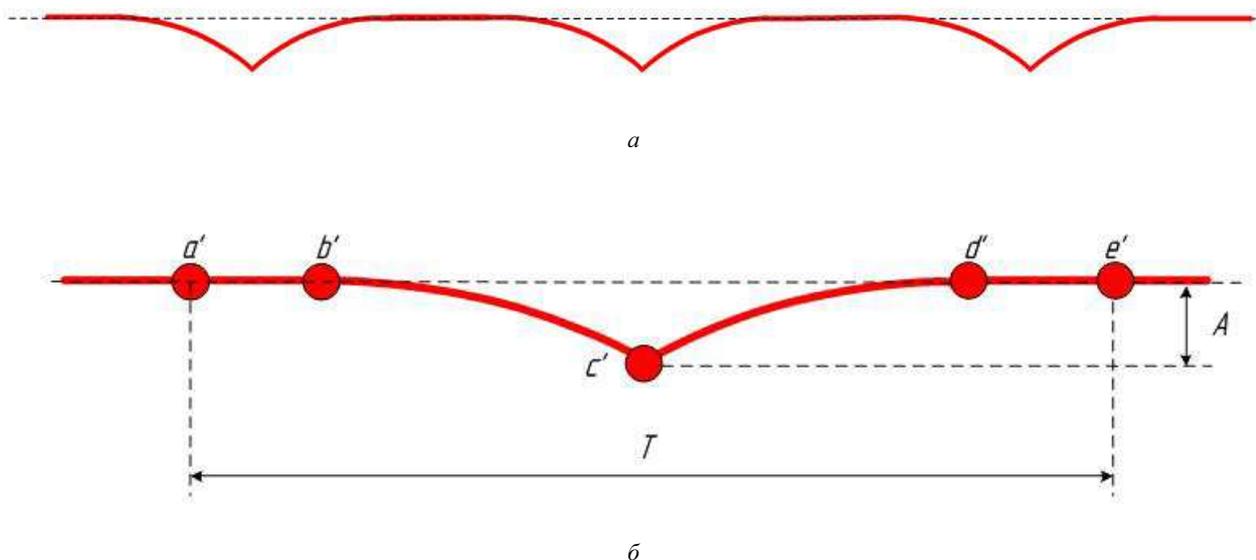


Рис. 2 – Траектория движения колеса после схода.

Амплитуда (провал) колеса будет определяться выражением

$$A = R - \sqrt{R^2 - (L - u)^2} / 4, \tag{1}$$

где R – радиус колеса.

Частота провалов ν при качении колеса по шпалам имеет следующую зависимость от скорости движения:

$$\nu = \frac{V_C}{(L - u)}, \tag{2}$$

где L – расстояние между центрами шпал; u – ширина шпалы.

Центр колеса движется прямолинейно (по горизонтальному участку шпалы) и по дуге окружности (на участках, где происходит скатывание колеса с одной шпалы и удар о следующую шпалу).

Уравнения движения центра колеса могут быть представлены по этапам движения. Закон движения описывается функциями, соответствующими этапам движения, с периодом L , в зависимости от времени t (рис. 3).

Первый и четвертый интервалы представляют прямолинейное движение, а второй и третий – движение по дуге окружности (рис. 3). Дальнейшее движение происходит с периодом, равным L , и постоянным приращением горизонтальной координаты.

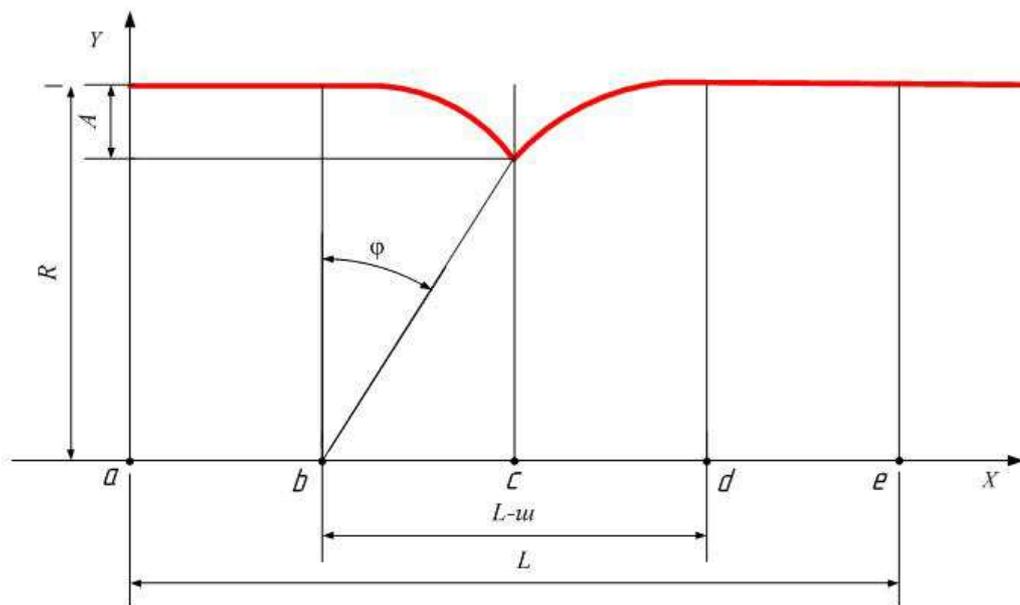


Рис. 3 – К определению уравнения движения центра колеса.

1. На участке $a \leq x \leq b$

$$x = a + V_C \cdot t; \quad y = R. \quad (3)$$

2. На участке $b \leq x \leq c$

$$x = b + R \cdot \sin \alpha; \quad y = R \cdot \cos \alpha, \quad (4)$$

где α – центральный угол, образующийся при скатывании центра колеса в межшпальное пространство, при этом угол α принимает значения: $0 \leq \alpha \leq \varphi$, тогда

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(R-A)}{R}\right). \quad (5)$$

3. На участке $c \leq x \leq d$

$$x = c + R \cdot \sin \alpha; \quad y = R \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

4. На участке $d \leq x \leq e$

$$x = d + V_C \cdot t; \quad y = R. \quad (7)$$

Периодические удары вагонного колеса о шпалы вызывают резкое мгновенное изменение направления V_C вектора скорости центра колеса (оси) и, следовательно, мгновенный центр скоростей (точка) перемещается из положения b в d . График кинематической модели представлен на рис. 4.

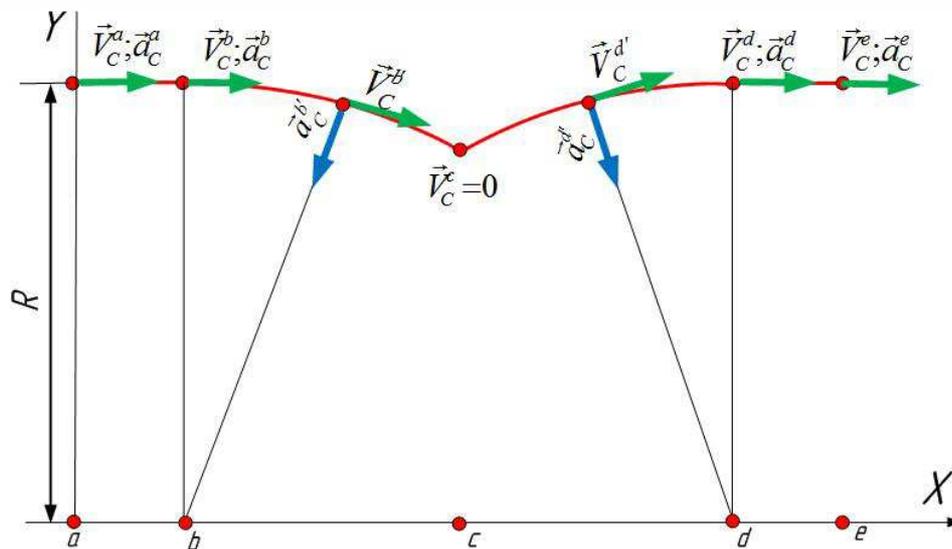


Рис. 4 – Траектория движения колеса после схода.

При равномерном движении скорость V_C и ускорение a_C центра колеса определяются первой и второй, соответственно, производными от закона движения по времени. То есть, при движении по дуге окружности вектор скорости V_C направлен по касательной, а ускорения a_C по радиусу (рис. 4).

Перспективы дальнейших исследований. Разработка кинематической модели движения колесной пары после ее схода – это первый этап к построению динамической модели такого движения. Конечной целью изучения этого процесса должно стать построение диагностической модели схода вагонов с рельсов на базе представленной модели. Все это позволит создать надежный алгоритм распознавания схода для построения аппаратного и программного обеспечения технической системы контроля сходов вагонов с рельс. Разрабатываемые и существующие встроенные системы контроля букс при определенной доработке программного обеспечения вполне способны определять сход колесной пары [9].

Выводы. На основе проведенных исследований в работе были получены следующие результаты.

Определена графическим способом траектория движения колеса после схода его с рельс по шпальной решетке, которое выглядит как циклическая комбинация прямолинейных участков и сегментов окружностей.

Полученное аналитическое выражение, характеризующее сход, связывает параметры верхнего строения пути (шпальная решетка) и колеса. Показано, что амплитуда и частота колебаний колесной пары при ее сходе зависят от диаметра колеса, ширины горизонтальной поверхности шпалы и расстояния между осями шпал.

Выполнен кинематический анализ движения колесной пары после ее схода.

Таким образом, разработанная кинематическая модель движения колесной пары после ее схода определяет

основные диагностические признаки схода вагонов с рельс и позволяет использовать ее в дальнейшем для построения диагностической модели и создания датчиков схода.

Список литературы

1. Сокол Э. Н. Сходы с рельсов и столкновения подвижного состава (Судебная экспертиза. Элементы теории и практики). Монография. 2-е издание, дополненное. – К. : Транспорт Украины, 2004. – 368 с.
2. Вериго М. Ф., Коган А. Я. Взаимодействия пути и подвижного состава. – М. : Транспорт, 1986. – 559 с.
3. Лысюк В. С. Причины и механизм схода колеса с рельса. Проблема износа колес и рельсов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 2002. – 215 с.
4. Сокол Э. Н. Механизм железнодорожно-транспортных происшествий при сходе с рельсов подвижного состава // Матер. докл. науч.-техн. конф. «Фізичні методи та засоби контролю матеріалів та виробів», 17 – 21 лютого 1997 р., м. Славське. – Киев, Львов, 1997. – С. 100 – 102.
5. Панов Ю. Л., Панов А. Ю. Кинематика колесных пар вагонной тележки // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2013. – № 4 (1). – С. 180 – 185.
6. Салтыков Д. Н., Павлюков А. Э. Анализ изменения взаиморасположения элементов грузового вагона в результате схода // Труды научно-практической конференции «Безопасность движения поездов». Сборн. докл. – М. : МИИТ, 2004. – С. VI-25 – VI-26.
7. Салтыков Д. Н., Павлюков А. Э. Разработка принципов создания устройств регистрации схода с рельсов нетягового подвижного состава // Труды Международной конференции «Развитие транспортного машиностроения в России». Сборн. докл. – М. : ВНИИЖТ, 2004. – С. 135 – 136.
8. Орлова А. М., Лесничий В. С., Смирнов Н. В. Выбор типов, мест расположения датчиков и критериев для сигнализации о сходе грузового вагона на основе математического и физического моделирования // «Наука та прогрес транспорту». – Днепропетровск : Днепропетровский национальний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна, 2004. – №5. – С. 162 – 166.
9. Мартынов И. Э., Петухов В. М. Натурные испытания встроенной системы контроля технического состояния буксовых узлов // Мир транспорта. – 2013. – № 2. – С. 180 – 182.

References (transliterated)

1. Sokol E. N. *Skhody s rel'sov i stolknoveniya podvizhnogo sostava (Sudebnaya ekspertiza. Elementy teoryi i praktiki). Monografiya. 2-e izdanie, dopolnennoe* [Derailments and collisions of rolling stock (Forensic expertise. Elements of theory and practice). Monograph. 2nd ed. Augmented]. Kiev, Transport Ukraine Publ., 2004. 368 p.
2. Verigo M. F., Kogan, A. Ya. *Vzaimodeystviya puti i podvizhnogo sostava* [Railway – rolling stock interactions]. Moscow, Transport Publ., 1986. 559 p.
3. Lysjuk V. S. *Prichiny i mekhanizm skhoda koleasa s rel'sa. Problema iznosa koles i rel'sov. 2-e izd., pererab. i dop.* [Reasons and mechanisms of wheel derailment. Problems of wheel and sleeper wear. 2nd ed. Revised and augmented]. Moscow, Transport Publ., 2002. 215 p.
4. Sokol E. N. *Mekhanizm zheleznodorozhno-transportnykh proishestviy pri skhode s rel'sov podvizhnogo sostava* [Mechanism of railway and transport incidents caused by rolling stock derailment]. *Mater. dokl. nauk.-tekhn. konf. "Fizychni metody i zasoby kontrolyu materialiv ta vyrobiv", (17 – 21 luytogo 1997 r., Slavs'ke)* [Proceedings of the Scientific and Technical Conference "Physical methods and means of control of materials and products"]. Kiev, Lvov, 1997. – pp. 100–102.
5. Panow Yu. L., Panow A. Yu. *Kynematika kolesnykh par vagonnoy telezhki* [Kinematics of a wagon car wheel pair]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo* [Bulletin of the N. I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod], 2013, no. 4 (1), pp. 180–185.
6. Saltykov D. N., Pavlyukov A. E. *Analiz izmeneniy vzaimoraspolzheniya elementov gruzovogo vagona v rezul'tate skhoda* [Analysis of relative positioning of the elements of a freight car caused by derailment]. *Trudy nauchno-prakticheskoy konferentsiy. "Bezopasnost' dvizheniya poezdov" Sb. Dokl.* [Proceedings of the Scientific and Practical Conference "Train traffic safety". Report collection]. Moscow, MIIT Publ., 2004, pp. VI-25–VI-26.
7. Saltykov D. N., Pavlyukov A. E. *Razrabotka printsypov sozdaniya ustroystv registratsii skhoda s rel'sov netyagovogo podvizhnogo sostava* [Development of principles for creating non-traction rolling stock derailment registration devices]. *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii "Razvitiye transportnogo mashinostroeniya v Rossyi". Sborn. Docl.* [Proceedings of the International Conference "Development of Transport Engineering in Russia"]. Moscow, VNIIZhT Publ., 2004, pp. 135–136.
8. Orlova A. M., Lesnichiy V. S., Smirnov N. V. *Vybor tipov, mest raspolzheniya datchikov i kriteriev dlya sygnalizatsiyi o skhode gruzovogo vagona na osnove matematicheskogo i fizicheskogo modelirovaniya* [Choosing types, sensor placement spots, and criteria for signaling about freight car derailment based on mathematical and physical modeling]. *"Nauka ta progres transportu"* ["Science and transport advancement"]. Dnepropetrovsk, Dnepropetrovskiy natsional'nyy universitet zheleznodorozhnogo transporta im. V. Lazaryana Publ., 2004, no. 5, pp. 162–166.
9. Martynov I. E., Petukhov V. M. *Naturnye ispytaniya vstroennoy sistemy kontrolya tekhnicheskogo sostoyaniya buksovikh uzlov* [Full-scale testing of inbuilt axle-box technical condition control system]. *Mir transporta* [World of transport]. 2013, no. 2, pp. 180–182.

Поступила (received) 26.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Кінематична модель руху колісної пари після її сходу з рейок / В. М. Петухов, Н. А. Аксьонова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 92 – 97. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Кинематическая модель движения колёсной пары после схода с рельс / В. М. Петухов, Н. А. Аксёнова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 92 – 97. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Kinematic model of wheel pair motion after its derailment / V. M. Petukhov, N. A. Aksenova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 92 – 97. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: hiitwagen@gmail.com.

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технических наук, доцент, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: hiitwagen@gmail.com.

Petukhov Vadim Mykhaylovych – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkov; tel.: (057) 730-10-52; e-mail: hiitwagen@gmail.com.

Аксёнова Наталья Анатольевна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

Aksёnova Natalya Anatolyevna – кандидат физико-математических наук, доцент, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

Aksenova Natalya Anatolyevna – Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkov; tel.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

УДК 621.43.001.4

И. С. РЕВЕЛЮК

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИНФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СИЛИКОНОВОГО МАСЛА ПО КОЛЬЦЕВЫМ КАНАЛАМ ДЕМПФЕРОВ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ДИЗЕЛЯ

Досліджуються динамічні характеристики в дослідних конструкціях демпферів крутильних коливань колінчастого вала дизеля, у яких для накопичення і розсіювання енергії резонансних коливань вала використовуються синфазні течії силіконового масла середньої в'язкості по кільцевих каналах круглого або прямокутного перерізу. На основі рівнянь нестационарного руху нестискуваної рідини складені математичні моделі зазначених течій і, при використанні перетворення Лапласа для перехідного процесу або методу комплексних амплітуд для сталих коливань, знайдені аналітичні рішення цих рівнянь (у вигляді сум відповідного функціонального ряду). Вказані механічні моделі механізмів, що замінюють, з фрикційними зв'язками, які відповідають цим моделям. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнта в'язкого демпфування і приведенного моменту інерції, що залежать від частоти усталених коливань вала. Виконано порівняння динамічних характеристик для демпферів крутильних коливань, обладнаних рідким (силіконовим) і твердим (сталевим) маховиком.

Ключові слова: демпфування крутильних коливань, маховик з фрикційним зв'язком, нестационарні течії по каналу, в'язка нестискувана рідина, властивості силіконового масла.

Исследуются динамические характеристики в опытных конструкциях демпферов крутильных колебаний коленчатого вала дизеля, у которых для накопления и рассеивания энергии резонансных колебаний вала используются синфазные течения силиконового масла средней вязкости по кольцевым каналам круглого или прямоугольного сечения. На основе уравнений нестационарного движения несжимаемой жидкости составлены математические модели указанных течений и, при использовании преобразования Лапласа для переходного процесса или метода комплексных амплитуд для установившихся колебаний, найдены аналитические решения этих уравнений (в виде сум соответствующего функционального ряда). Указаны механические модели заменяющих механизмов с фрикционными связями, отвечающие этим моделям. Получены аналитические выражения для коэффициента вязкого демпфирования и приведенного момента инерции, зависящих от частоты установившихся колебаний вала. Выполнено сравнение динамических характеристик для демпферов крутильных колебаний, снабженных жидким (силиконовым) и твердым (стальным) маховиком.

Ключевые слова: демпфирование крутильных колебаний, маховик с фрикционной связью, нестационарные течения по каналу, вязкая несжимаемая жидкость, свойства силиконового масла.

Dynamic characteristics in experimental designs of torsional vibration dampers of a diesel engine crankshaft, in which an in-phase flow of silicone oil of medium viscosity along annular channels of circular or rectangular cross-section is used to accumulate and dissipate the energy of resonant vibration of the shaft, are studied. On the basis of the equations of nonstationary motion of incompressible fluid, mathematical models of these flows are compiled. Analytical solutions of these equations are found (in the form of the sums of the corresponding functional series) using the Laplace transform for transient or complex amplitude method for steady-state vibration. Mechanical models of the replacement mechanisms with frictional bonds, corresponding to these models, are indicated. Analytical expressions are obtained for the coefficient of viscous damping and the reduced moment of inertia, which depend on the frequency of the steady vibration of the shaft. Dynamic characteristics for torsional vibration dampers equipped with a liquid (silicone) and a solid (steel) flywheel are compared.

Key words: damping of torsional vibrations, flywheel with frictional coupling, nonstationary flow along a channel, viscous incompressible fluid, properties of silicone oil.

Введение и постановка задачи. Демпфер крутильных колебаний, показанный на рис. 1, применяется в конструкциях большинства современных высокооборотных дизелей. Устройство устанавливается на носок коленчатого вала, где, как правило, наблюдается максимальная амплитуда колебаний. Шлицевое соединение обеспечивает совместное вращение вала и корпуса демпфера. Фрикционная связь между маховиком и корпусом осуществляется через узкие кольцевые каналы плоской формы, заполненные силиконовым маслом высокой вязкости, а точнее, специально синтезированной для решения подобных задач полиметилсилоксановой жидкостью (ПМС), имеющей длинные молекулы. Выбор рабочего тела вызван положительными качествами ПМС, а именно относительно слабой зависимостью её вязкости от температуры [1].

На установившемся режиме маховик вращается вместе с валом, но при появлении угловых ускорений на стенках каналов возникают касательные напряжения, пытающиеся сохранить угловую скорость неизменной. При этом указанные напряжения оказываются одинаковыми во всех поперечных сечениях канала, поэтому жидкость в канале колеблется *синфазно*. Гидродинамический расчет этих напряжений не вызывает больших проблем и основывается на том предположении, что эпюра скоростей жидкости в зазоре не отличается от её формы

при установившемся вращении стенок маховика и корпуса и ламинарном установившемся течении жидкости. Если принять, что угловые скорости вращения равняются ω_I и ω_{II} , средний радиус течения равен r , ширина зазора $2h$, кинематическая вязкость и плотность ПМС составляют ν_c, ρ_c , то локальные касательные напряжения на стенке оцениваются формулой

$$\tau = \rho_c \cdot \nu_c \cdot (\omega_I - \omega_{II}) \cdot r / (2h) . \tag{1}$$

Далее выражение для плотности $\tau \cdot r$ интегрируется по площади стенки Ω_c , и получаем момент сопротивления

$$M_c = b \cdot (\omega_I - \omega_{II}) .$$

где b – это коэффициент вязкого трения, вычисляемый по формуле

$$b = \rho_c \cdot \iint_{\Omega_c} \nu_c \cdot r^2 / (2h) dS , \tag{2}$$

или, если зазор и вязкость считать постоянными, то

$$b = J_c \cdot \nu_c / (2h)^2 , \tag{3}$$

J_c – суммарный момент инерции силиконового масла в зазорах демпфера.

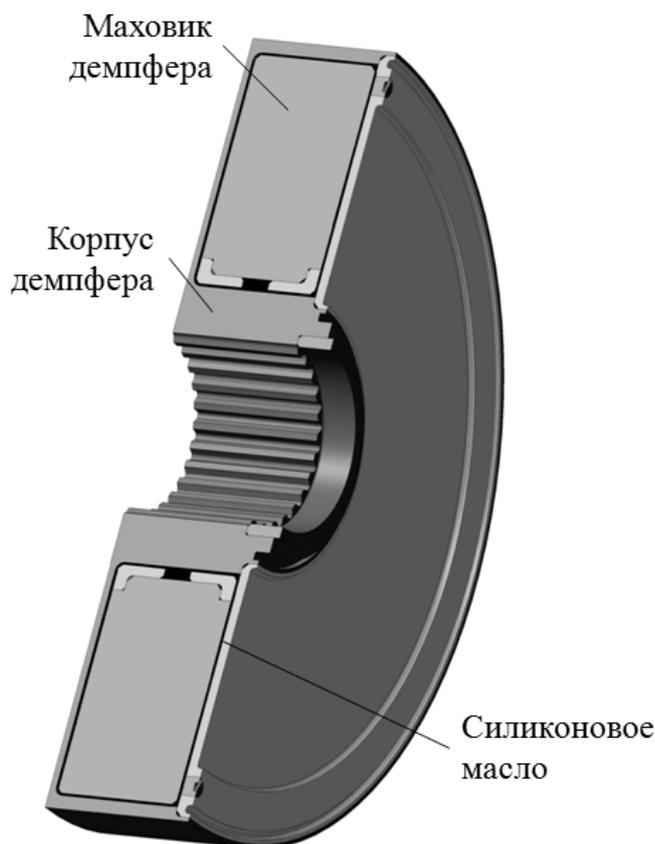


Рис. 1 – Конструкция демпфера с фрикционной связью и стальным маховиком.

Коэффициент b присутствует в системе уравнений

$$\left\{ J_{кр} d\omega_I / dt + b \cdot (\omega_I - \omega_{II}) + b_0 \cdot \omega_I + Z_{кр} \varphi_I = M_{кр} ; J_M d\omega_{II} / dt + b \cdot (\omega_{II} - \omega_I) = 0 , \tag{4}$$

посредством которой моделируют связанные вынужденные колебания носка коленчатого вала и демпфера.

Здесь $J_{кр}, Z_{кр}$ – приведенные моменты инерции и крутильная жесткость вала при соответствующей форме собственных колебаний (одноузловой или двух узловой), связанные соотношением

$$Z_{кр} / J_{кр} = (2\pi\nu_p)^2 ,$$

ν_p – соответствующая резонансная частота свободных колебаний вала; φ_I – угол закручивания носка вала относительно маховика; J_M – момент инерции маховика; $M_{кр}$ – суммарный крутящий момент от кривошипов многоцилиндрового двигателя, приведенный к носку вала по правилу, описанному в [1]; b_0 – суммарный коэф-

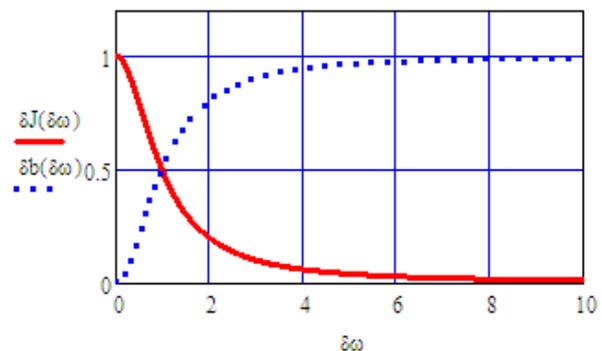


Рис. 2 – Зависимость характеристик демпфера от частоты вращения коленчатого вала.

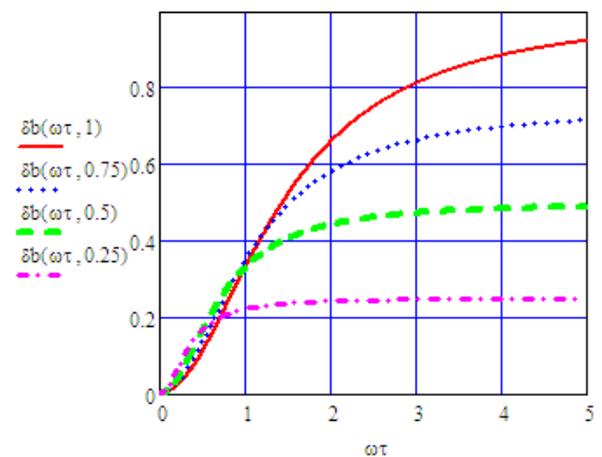


Рис. 3 – Зависимости коэффициентов демпфирования от вязкости ПМС (в скобках указан уровень вязкости).

коэффициент вязкого трения в деталях кривошипно-шатунных механизмов, приведенный к носку вала по данным [2], где используется приближенная формула Хольцера,

$$b_0 = 0.04 \cdot J_{кр} \cdot \omega_l.$$

Анализируя систему уравнений (4) на резонансной частоте вращения вала, замечаем, что:

- амплитуда колебаний носка вала выше амплитуды колебаний маховика демпфера;
- для снижения этих амплитуд колебаний значения момента J_M и коэффициента b нужно увеличивать.

На других частотах вращения устройства сочетает в себе свойства маховика, повышая момент инерции вала на дополнительную величину $J_0 = J_M \cdot \delta J$, и вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования $b_0 = b \cdot \delta b$; в итоге уравнение крутильных колебаний получает простейший классический вид:

$$(J_{кр} + J_{к.д} + J_0) d^2 \varphi_l / dt^2 + (b_0 + b) \cdot d\varphi_l / dt + Z_{кр} \varphi_l = M_{кр},$$

где $J_{к.д}$ – момент инерции корпуса демпфера.

Характер изменения величин J_0 и b_0 показан на рис. 2, где *относительная* $\delta\omega$ и *демпферная* ω_0 частоты определяются равенствами

$$\delta\omega = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = b / J_M.$$

Демпферная частота примерно отвечает середине диапазона частот, на котором происходит включение устройства в работу, то есть из маховика, создающего дополнительную инерционность, он постепенно трансформируется в вязкий демпфер, установленный между колеблющимся коленчатым валом и маховиком, вращающимся (на высоких частотах) без колебаний.

Как видим, значение b – это наибольший коэффициент демпфирования крутильных колебаний, который обеспечивает данное устройство при высоких частотах.

Причем, для получения приемлемой для практики точности расчета этого коэффициента в формулах (2), (3) приходится учитывать зависимость вязкости от температуры T_c жидкости, определяемую в силу линейности функции $\lg \nu_c(T_c)$, использованной в [3], по экспоненциальной формуле

$$\nu_c(T_c) = \nu_c(20) \cdot \exp(-(T_c - 20) / \Delta T_c), \quad (5)$$

где $\nu_c(20)$ – это вязкость масла при температуре 20° С; ΔT_c – *характерная температура*, для ПМС эта величина составляет приблизительно 55° С.

А при вычислении интеграла (2) учитывается зависимость вязкости ПМС от градиента γ изменения скорости, $\gamma = (\omega_1 - \omega_2) \cdot r / (2h)$; по данным из [4] она описывается равенством

$$\nu_c = \nu_c(T_c) / \sqrt{1 + 0.12 \cdot \nu_c(T_c) \cdot \gamma}, \quad (6)$$

и при больших градиентах изначально высокая вязкость ПМС снижается в 2 и более раз.

Вязкость ПМС оказывает сильное влияние на динамические характеристики демпфера (рис. 3).

Кроме того, при градиентах $\gamma > 250 \text{ с}^{-1}$ по данным работы [5] в ПМС высокой вязкости (большей, чем 1000 сСт) происходят необратимые разрывы длинных молекул (называемые *дилатансией* [1]), что ограничивает срок службы этого масла. С другой стороны, чтобы обеспечить эффективное демпфирование вязкость силиконового масла в этом устройстве, как правило, превышает 20000 сСт, а зазор $2h$ составляет десятки доли миллиметра. Что, в силу влияния неизбежных технологических погрешностей изготовления и действия температурных деформаций приводит к соударениям боковых поверхностей маховика с корпусом демпфера и образованию металлической стружки, загрязняющей ПМС.

Поэтому, конструкция демпфера крутильных колебаний коленчатого вала, показанная на рис. 1, не является идеальной, и инженеры предпринимали неоднократные попытки её изменения. В результате, например, был разработан и внедрен на некоторых автотракторных дизелях демпфер с упругой связью между маховиком и валом [1]. В данной работе анализируется другое техническое решение, в котором стальной маховик отсутствует, а его роль выполняет силиконовое масло ПМС, имеющее среднюю вязкость (порядка 1000 сСт). Варианты конструктивного решения показаны на рис. 4; кольцевые канавки выполнены на боковых поверхностях пластин, которые запрессованы в корпус демпфера.

Значительное снижение начального уровня вязкости ПМС и увеличение зазоров уменьшает коэффициент вязкого демпфирования, но данное уменьшение компенсируется в этих устройствах тремя факторами:

- значительным увеличением площади жидкостного трения, что повторяет принцип работы вискомуфты [6];
- отсутствием зависимости вязкости от напряжений сдвига и ослабленным влиянием температуры на вязкость, которым, в данном случае, допустимо пренебречь;
- уменьшенным влиянием погрешности изготовления зазоров, которой также допустимо пренебречь.

Важнейшим преимуществом исследуемого демпфера является возможность длительной работы устройства без замены масла. Но имеется и очевидный недостаток: в силу меньшей плотности силикона (по сравнению со сталью) диаметр его корпуса, для обеспечения необходимого момента инерции J_M придется увеличить.

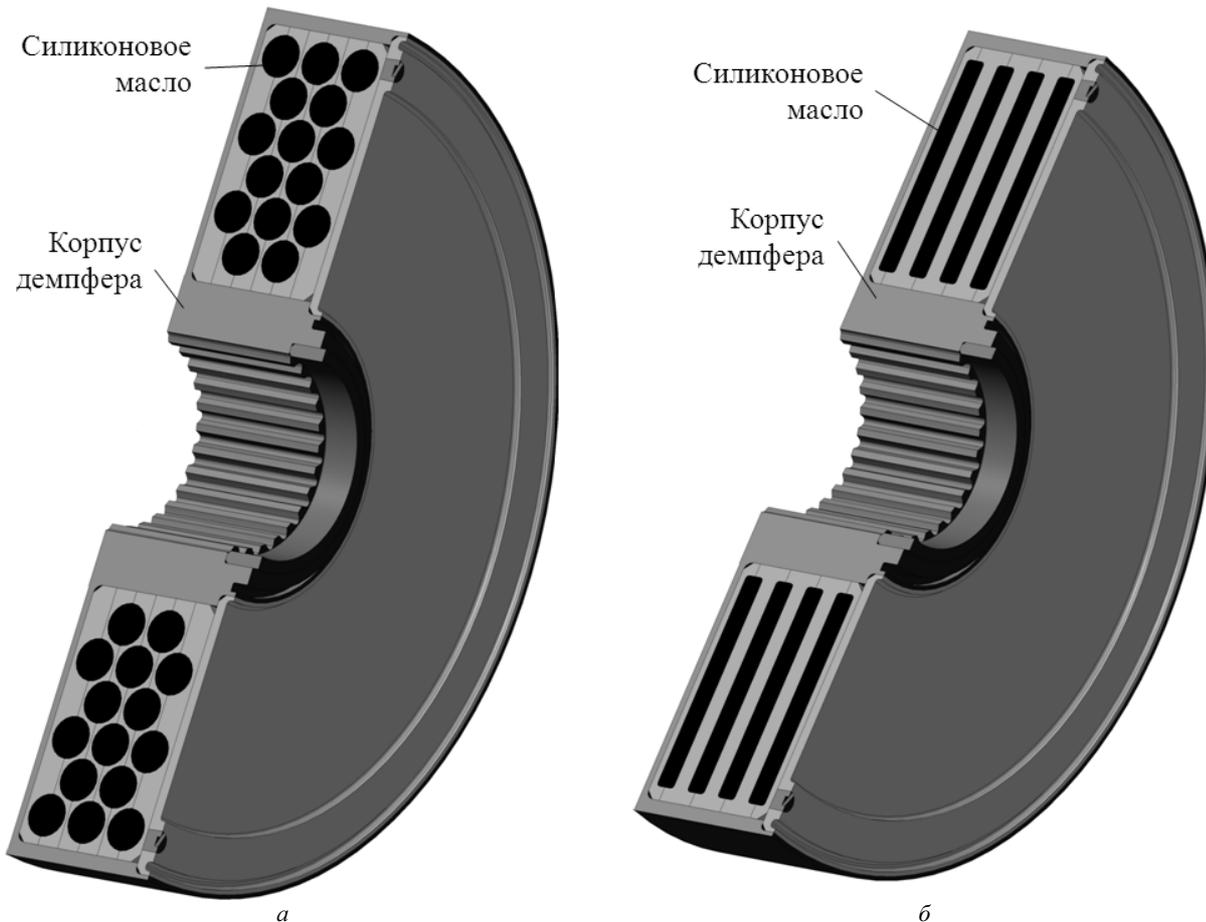


Рис. 4 – Конструкции демпферов с жидким маховиком в форме кольцевых каналов:
 а – круглого сечения; б – прямоугольного сечения.

Целью данной работы являлось составление математических моделей течения вязкого силиконового масла по кольцевым каналам демпфера с жидким маховиком и получение динамических характеристик демпфера. Кроме того, предстояло выяснить, насколько правомерным является использование при расчетах колебаний демпфера с твердым маховиком соотношений установившегося течения ПМС по его зазорам, в которых колебания угловых скоростей стенок канала не учитываются.

Если судить по открытым литературным источникам, такие задачи решаются впервые.

Обзор дискретных моделей течения. Рассмотрим демпфер, показанный на рис. 4, а. Укажем основные предположения, используемые при его моделировании:

- поток жидкости – осесимметричный, и зависит от двух координат – времени t и расстояния до оси r ;
- давление во всех сечениях одинаково (гравитационной составляющей и зависимостью от температуры пренебрегаем).

Базовая модель отвечает теории Пуазейля [7], когда поле скоростей определяется графиком рис. 5 и формулой

$$V(r, t) = 2 \cdot V_{cp}(t) \cdot (1 - (r/r_k)^2).$$

По существу, эту модель следует считать одномассовой, потому что сила трения на стенке

$$F_{mp} = 2\pi r_k \rho_c (4\nu_c / r_k^2) (V_{cp} - V_{стен}) L_k,$$

где $L_k = 2\pi R_{oc}$ – длина канала; V_{cp} , $V_{стен}$ – средняя тангенциальная скорость жидкости и тангенциальная скорость стенки, причем скорость V_{cp} удовлетворяет уравнению:

$$m_{сст} \cdot dV_{cp} / dt = -F_{mp}.$$

Недостатком модели, на что обращается внимание в [7], является значительное занижение силы трения при больших ускорениях. Реальный профиль скорости имеет более крутые фронты у стенки (рис. 6).

Ситуацию можно исправить, если перейти к многомассовым моделям, которые применительно к этому объекту можно назвать *телескопическими*. Здесь круглое поперечное сечение разбивают на n колец, напр., одинаковой толщины (рис. 7).

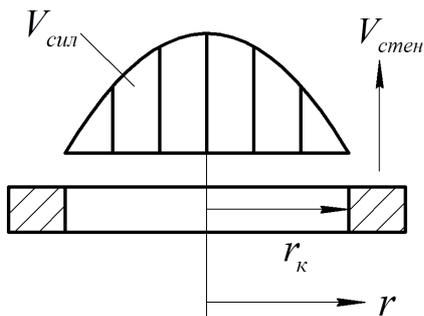


Рис. 5 – Эпюра скоростей для параболы Пуазейля.

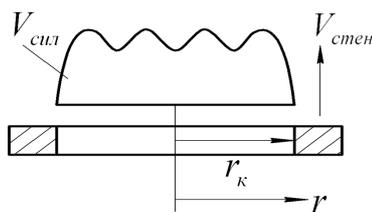


Рис. 6 – Эпюра скоростей для нестационарного течения жидкости.

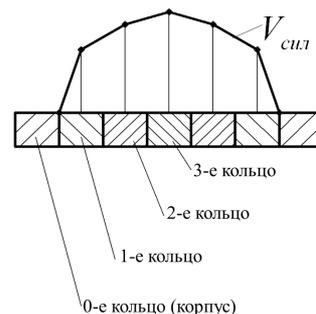


Рис. 7 – Телескопическая модель течения жидкости для канала круглого сечения.

Кольца связаны между собой фрикционными связями, а угловые скорости вращения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = f_1(\omega_0 - \omega_1) + f_2(\omega_2 - \omega_1); J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = f_2(\omega_1 - \omega_2) + f_3(\omega_3 - \omega_2); \dots; J_n \frac{d\omega_n}{dt} = f_n(\omega_{n-1} - \omega_n),$$

где J_n – моменты инерции; ω_n – угловые скорости вращения; f_n – фрикционные коэффициенты.

Недостаток телескопической модели – чтобы получить высокие силы трения, ширину кольца у стенки нужно делать малой, что неоправданно увеличивает n и затрудняет расчет. Понятно, что нужно использовать неравномерное распределение ширины слоев, но какое именно – пока неясно.

Континуальная модель течения. Чтобы разобраться с этим вопросом, необходимо использовать континуальную модель течения, в которой число колец изначально равно ∞ . Тем более, что для аналогичных (но других) случаев поступали именно так [8, 9]. А затем, после использования континуальной модели, можно будет вернуться к дискретной модели, рекомендуемой для выполнения реальных расчетов. Но, как будет показано далее, распределение слоев в этой модели уже не будет телескопическим.

Радиус канала обозначим r_k (рис. 8), радиус оси канала – R_{oc} , кинематическая вязкость силиконового масла – ν_c , плотность силикона – ρ_c . Угловую скорость вращения демпфера обозначим $\dot{\varphi}$, угловое ускорение – $\ddot{\varphi}$, “.” – это дифференцирование по t . Тангенциальную скорость демпфера обозначим $U_{oc} = R_{oc} \cdot \dot{\varphi}$, тангенциальное ускорение – $a_{oc} = R_{oc} \cdot \ddot{\varphi}$ – это скорость и ускорение стенки.

Силиконовое масло имеет тангенциальную скорость

$$V(r, t) + U_{oc}(t),$$

где r – радиальная координата сечения, V – относительная скорость жидкости (если стенку считать неподвижной). Выполняется условие прилипания:

$$V(r_k, t) = 0.$$

Во всех сечениях кольца (рис. 9) поле скоростей $V(r, t)$ одинаково, поэтому давление жидкости также одинаково,

$$(d/d\varphi)P(\varphi, r, t) = 0,$$

то есть давление во всех точках жидкости одинаково и не влияет на ее движение.

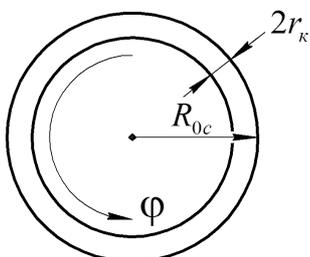


Рис. 8 – Кольцевой канал круглого сечения.

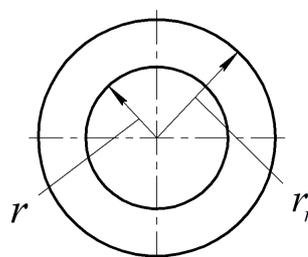


Рис. 9 – Поперечное сечение кольцевого канала круглого сечения.

Движение жидкости принимаем ламинарным. Для этого случая число Рейнольдса следует находить по формуле:

$$Re = V_{cp} \cdot (2r_k) / \nu_c,$$

где $V_{cp} = \frac{1}{\pi r_k^2} \int_0^{r_k} V(r) \cdot 2\pi r dr$ – средняя относительная скорость.

Для примера, если $V_{cp} = 10$ м/с; $2r_k = 10$ мм, $v_c = 100$ сСт, то $R_e = 1000 < R_{exp} = 2320$. На самом деле, $V_{cp} \ll 10$ м/с, а $v_c \gg 100$ сСт, и по этому допущению имеем большой запас.

Уравнение нестационарного движения жидкости [7] принимает следующий вид

$$\frac{d}{dt}(V(r,t) + U_{oc}(t)) - v_c \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} V(r,t) - v_c \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{d}{dt} U_{oc}(t). \tag{7}$$

В этом уравнении (7) ускорение $a_{oc}(t) = dU_{oc}(t)/dt$ является причиной движения.

Для решения уравнения (7), как и в других подобных методах расчета, используем операционное исчисление:

$$sV(r,s) - v_c \left(\frac{\partial^2 V(r,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V(r,s)}{\partial r} \right) = -a_{oc}(s),$$

где s – переменная Лапласа.

Это дифференциальное уравнение Бесселя. Искомое решение выражается через обобщенные цилиндрические функции $I_0(x)$ и имеет следующий вид:

$$V(r,s) = \left[\frac{I_0(\sqrt{s/v_c} r)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} - 1 \right] \cdot \frac{a_{oc}(s)}{s}. \tag{8}$$

Если подставить $r = r_k$, то получим

$$V(r_k,s) = \left[\frac{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} - 1 \right] \cdot \frac{a_{oc}(s)}{s} \equiv 0,$$

то есть условие прилипания выполнено.

Силу сопротивления демпфера создают касательные напряжения на стенке трубы,

$$\tau_{кас} = -\rho_c \cdot v_c \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_k} = -\rho_c v_c \cdot \frac{I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) \sqrt{s/v_c}}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot \frac{a_{oc}}{s} = -\rho_c r_k \cdot \frac{I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_{oc}.$$

Внутренняя поверхность трубы имеет площадь: $f_{вн} = 2\pi r_k \cdot (2\pi R_{oc})$.

Следовательно, сила сопротивления равна:

$$F_{сопр}(s) = -f_{вн} \cdot \tau_{кас} = (2\pi R_{oc}) \cdot \pi r_k^2 \rho_c \cdot \frac{2I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_{oc}(s)$$

или

$$F_{сопр}(s) = m_c \cdot \frac{2I_1(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_o(s), \tag{9}$$

где m_c – это масса силикона в трубке; кроме того, использовано тождество $I_0'(x) = I_1(x)$.

Учтем, что демпфер используется для крутильных колебаний, и перепишем (9) в эквивалентной форме:

$$M_{сопр}(s) = m_c \cdot R_{oc}^2 \cdot \psi(\sqrt{s/v_c} r_k) \cdot \ddot{\phi}(s), \tag{10}$$

где $\psi(x) = \frac{2I_1(x)/(x)}{I_0(x)}$; $\ddot{\phi}(x)$ – изображение по Лапласу для углового ускорения.

При малых значениях x : $\psi(x) \approx 1 - x^2/8 \approx 1$, и вместо (10) получаем приближенное равенство

$$M_{сопр}(t) \approx m_c \cdot R_{oc}^2 \cdot \ddot{\phi}(t),$$

то есть момент сопротивления совпадает с моментом инерции силикона, если он движется вместе со стенкой. Но это выполняется только при очень медленном изменении углового ускорения $\ddot{\phi}(t)$.

В общем случае применим формулу (10) к каждой из N трубок демпфера и получим:

$$M_{\text{сопр.сум}}(s) = \left(\sum_{j=1}^N m_{c,j} R_{oc,j}^2 \right) \psi(\sqrt{s/V_c} r_k) \varphi'' , \quad 3$$

или

$$M_{\text{сопр.сум}}(s) = I_{\text{сум}} \cdot \psi(\sqrt{s/V_c} r_k) \ddot{\varphi}(s) , \quad (11)$$

где $I_{\text{сум}} = \sum_{j=1}^N m_{c,j} \cdot R_{oc,j}^2$ – это суммарный момент инерции силикона.

Далее обозначение $M_{\text{сопр.сум}}$ будем сокращать до M_c .

Пусть изображение $\psi(\sqrt{s/V_c} r_k)$ имеет оригинал $\psi(t)$; тогда по теореме о свертке

$$M_c = J_{\text{сум}} \cdot \int_0^t \psi(t-\tau) \cdot \ddot{\varphi}(\tau) d\tau . \quad (12)$$

Далее будет удобно работать в масштабе безразмерного времени τ , когда величина

$$\frac{r_k^2}{V_c} = 1, \text{ то есть } \tau = t/t_c, \text{ где } t_c = \frac{r_k^2}{V_c} .$$

Тогда формула для передаточной функции и ее изображение по Лапласу выглядит проще:

$$\psi(s) = \frac{2I_1(\sqrt{s})/\sqrt{s}}{I_0(\sqrt{s})} .$$

Поскольку $I_0(z) = J_0(iz)$, то эта функция имеет простые полюса в точках

$$s_j = -x_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

где x_j – положительный корень функции Бесселя $I_0(x)$; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Вычислим вычеты в полюсах:

$$\begin{aligned} \text{res} [\psi(s)e^{s\tau}] &= \lim_{s \rightarrow s_j} [2I_1(\sqrt{s})/\sqrt{s} e^{s\tau}] , \\ \frac{(s-s_j)}{I_0(\sqrt{s})} &= e^{-s_j\tau} (2I_1(\sqrt{s_j})/\sqrt{s_j}) \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{(s-s_j)}{I_0(\sqrt{s})} = e^{-s_j\tau} (2I_1(\sqrt{s_j})/\sqrt{s_j}) \cdot \frac{1}{2I_1(\sqrt{s_j})/(2\sqrt{s_j})} = 4e^{-s_j\tau} = 4e^{-x_j^2\tau} . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi(\tau) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2\tau} .$$

Если вернуться к масштабному (то есть обычному) времени t , то

$$\psi(t) = \frac{4V_c}{r_k^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2 \frac{V_c t}{r_k^2}} , \quad (13)$$

и

$$M_c = J_{\text{сум}} \cdot \frac{4V_c}{r_k^2} \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} (t-\tau)} \cdot \ddot{\varphi}(\tau) d\tau . \quad (14)$$

Особая (экспоненциальная) форма ядра интеграла (14) позволяет предложить простой способ вычисления момента сопротивления M_c . Представим общий момент M_c в виде суммы парциальных моментов $M_{c,j}$,

$$M_c = \sum_{j=1}^N M_{c,j} , \quad (15)$$

отвечающих отдельным членам ряда, то есть

$$M_{c,j} = J_{\text{сум}} \frac{4V_c}{r_k^2} \int_0^t e^{-x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} (t-\tau)} \cdot \ddot{\varphi}(\tau) d\tau .$$

Такой момент, как несложно проверить, является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dt} M_{c,j}(t) + \left(x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} \right) \cdot M_{c,j}(t) = J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} \ddot{\varphi}(t). \quad (16)$$

Поскольку ряд (13) очень быстро сходится, на практике достаточно использовать не более 10 уравнений вида (16). Эти уравнения вместе с равенством (15) и образуют метод расчета сопротивления силиконового демпфера.

Пример. Рассмотрим простейшую динамическую систему, включающую вращающуюся массу $m_{вр}$, связанную жесткостью $Z_{кр}$ с остальным валом и нагруженную моментом сопротивления M_c и моментом возмущения $M_{дв}$.

Уравнения вращения имеют вид:

$$J_{вр} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi + Z_{кр} \varphi = M_{дв}(t) - M_c(t); M_c = \sum_{j=1} M_{c,j}; \left. \frac{d}{dt} M_{c,j} + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} M_{c,j} = J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} \ddot{\varphi}, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (17)$$

где $J_{вр}$ – момент инерции массы $m_{вр}$, φ – угловая деформация системы.

Систему (17) можно использовать для описания переходного процесса; тогда начальные условия выглядят так:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0; M_{c,j}(0) = 0, j = 1, \dots, n.$$

Если возмущающий момент $M_{дв}(t)$ известный, то компьютер легко решит эту задачу.

Заменяющая дискретная схема. Уравнениям системы (17) полезно дать иную форму, возвращающую первоначальный механический смысл.

Обозначим

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 t; M_{c,j} = -J_{cил} \left(4V_c / r_k^2 \right) (\omega_j - \omega_0),$$

где ω_j – круговая частота вращения некоторой части силикона.

Подставим эти замены в (16):

$$\frac{4V_c}{r_k^2} J_{cил} \frac{dV_c}{r_k^2} (\dot{\omega}_0 - \dot{\omega}_j) + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_0 - \omega_j) = J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} \omega_0.$$

После сокращения слагаемых, содержащих $\dot{\omega}_0$:

$$-J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} \dot{\omega}_j + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_0 - \omega_j) = 0.$$

Теперь разделим на $-\frac{V_c}{r_k^2} x_j^2$ и получим уравнение:

$$\left(J_{cил} \frac{4}{x_j^2} \right) \dot{\omega}_j + J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_j - \omega_0) = 0.$$

Учтем, что $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{x_j^2} = 1$, и обозначим $J_{c,j} = J_{cил} \frac{4}{x_j}$ – это парциальный момент инерции силикона;

$$\sum_{j=1}^{\infty} J_{c,j} = J_{cил}.$$

Постоянную величину $J_{cил} \frac{4V_c}{r_k^2}$ обозначим K – это фрикционный коэффициент связи. Получим:

$$\left\{ M_c(t) = \sum_{j=1}^n K (\omega_j - \omega_0), J_{c,j} \dot{\omega}_j + K (\omega_j - \omega_0) = 0. \right. \quad (18)$$

Уравнения (18) отвечают схеме, показанной на рис. 10 (фрикционная связь коленчатого вала с корпусом двигателя, возникающая в подшипниках, а также при трении боковой поверхности поршней и втулок, здесь не показана).

Уравнение вращения вала:

$$J_{вр} \ddot{\varphi} + \sum_{j=1}^n K (\dot{\varphi} - \omega_j) + Z_{кр} \varphi = M_{дв}(t),$$

где, напомним, $\dot{\varphi} = \omega_0$.

Рассмотрим случай установившихся колебаний, происходящих с круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$. Тогда начальные условия заменяются условиями периодичности, а для решения системы (17) удобно применить метод комплексных амплитуд.

Пусть

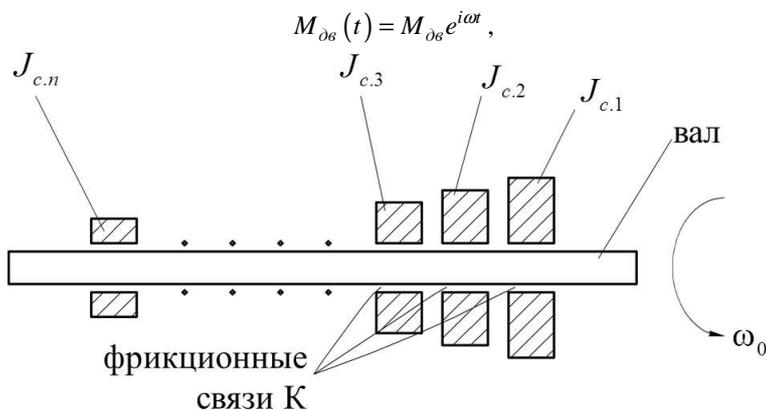


Рис. 10 – Заменяющая дискретная схема с фрикционными связями между вращающимися массами.

тогда

$$\varphi(t) = \bar{\varphi} \cdot e^{i\omega t}, \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi e^{i\omega t}$$

и

$$i\omega M_{c.j} + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} M_{c.j} = J_c \frac{4V_c}{r_k^2} (-\omega^2 \varphi), \quad j = 1, \dots, n$$

откуда

$$M_{c.j} = \frac{J_c \frac{4V_c}{r_k^2} (-\omega^2 \varphi)}{x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} + i\omega} = \frac{-4\omega^2 J_c \varphi}{x_j^2 + i\omega t_k},$$

где $t_k = r_k^2 / V_c$.

Получаем уравнение:

$$-\omega^2 J_{кр} \varphi + Z_{кр} \varphi - 4\omega^2 J_c \varphi \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega t_k} = M_{\text{дв}},$$

то есть

$$\varphi = \frac{M_{\text{дв}}}{Z_{кр} - \omega^2 J_{кр} - 4\omega^2 J_c \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega t_k}}.$$

На резонансной частоте $\omega_p = \sqrt{Z_{кр} / J_{кр}}$ выражение упрощается:

$$\varphi_p = \frac{-M_{\text{дв}}}{4\omega^2 J_{\text{сил}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega_p t_k}} = -\frac{M_{\text{дв}}}{Z_{кр}} \cdot \frac{J_{\text{вр}}}{J_{\text{сил}}} \cdot A(\omega_p),$$

где $A(\omega) = 1 / \sum_{j=1}^n \frac{4}{x_j^2 + i\omega t_k}$.

Функция $A(\omega)$ позволяет, при необходимости, построить график т.н. коэффициента динамичности для вала с демпфером на резонансных частотах:

$$d(\omega_p) = 1 / \left| \sum_{j=1}^n \frac{4}{x_j^2 + i\omega_p t_k} \right|.$$

Синфазное течение в тонком кольцевом зазоре. Ширину зазора обозначим $2h$. Получим поле скоростей течения жидкости относительно стенки $V(x, t)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + a(x,t), & V(\pm h,t) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $a = \dot{U}$ – мгновенное ускорение стенки в точке контакта (это ускорение зависит от расстояния до оси вращения z , $a = z \cdot \dot{\omega}$).

Применим к задаче (19) преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} sV(x,s) = v_c \frac{d^2 V(x,s)}{dx^2} = a(s); & V(\pm h,s) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Решение системы (20) имеет вид:

$$V = \left(1 - \frac{ch(\sqrt{s/v_c} x)}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \right) \cdot \frac{a(s)}{s}. \quad (21)$$

Откуда изображение по Лапласу для касательного напряжения определяется формулой:

$$\tau = \rho_c v_c \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=h} = -\rho_c \frac{sh(\sqrt{s/v_c} h) \cdot \sqrt{s/v_c}}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \cdot \frac{v_c}{s} \cdot a(s) = -\rho_c h \frac{sh(\sqrt{s/v_c} h) / (\sqrt{s/v_c} h)}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \cdot a_c$$

Передаточная функция $\psi(s) = \frac{sh(\sqrt{s})/\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}}$ раскладывается в ряд:

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{s + y_j^2}, \quad (22)$$

где $y_j = \pi(j-1/2)$, $j = 1, 2, \dots$ – положительные корни косинуса.

Проинтегрируем касательные напряжения по площади стенки и получим момент сопротивления в виде суммы ряда:

$$M_{con} = \sum_{j=1}^{\infty} M_{c,j},$$

где парциальные моменты отвечают отдельным слагаемым (22) и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} M_{c,j} + \frac{v_c}{h^2} y_j^2 M_{c,j} = J_c \frac{2v_c}{h^2} \dot{\omega}; \quad (23)$$

J_c – момент инерции силикона.

Пусть

$$M_{c,j} = J_c \frac{2h^2}{v_c} \frac{1}{y_j^2} \omega_j,$$

где ω_j – некоторая условная угловая скорость вращения части силикона, имеющего момент инерции

$$J_c \cdot (2/y_j^2).$$

Поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} (2/y_j^2) = 1$, то это соответствующая парциальная часть жидкости.

Тогда угловые скорости ω_j можно найти из дифференциального уравнения

$$J_c \frac{2}{y_j^2} \frac{d\omega_j}{dt} + J_c \frac{2v_c}{h^2} (\omega_j - a_c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Синфазное течение в зазоре между корпусом и маховиком. В этом пункте статьи проводится проверка правомочности использования простейшей (квазистационарной) модели течения ПМС, использованной в формуле (1) для касательных напряжений и следующих из неё методов расчета демпфера с твердым маховиком.

Обозначим ширину зазора $2h$, по аналогии с диаметром круглого канала $2r_k$; тогда и многие результаты расчета окажутся аналогичными рассмотренному выше случаю; а цилиндрические функции $I_0(x)$, $I_1(x)$ перейдут в гиперболические функции $ch(x)$, $sh(x)$, имеющие, к тому же, сходные графики.

Пусть стенки канала имеют тангенциальные скорости $U_I(t)$ и $U_{II}(t)$ (рис. 11). По ним определим две новые скорости:

- для совместно направленного движения $U_{сов}(t) = \frac{1}{2}(U_I(t) + U_{II}(t))$;
- для противоположно направленного движения $U_{пр}(t) = \frac{1}{2}(U_I(t) - U_{II}(t))$.

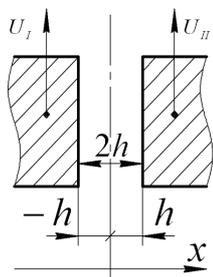


Рис. 11 – Течение жидкости при параллельном движении стенок канала.

От линейных скоростей можно перейти к угловым скоростям и получить формулы для сонаправленного и противоположно направленного вращения:

$$\omega_{сов} = \frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II}); \quad \omega_{пр} = \frac{1}{2}(\omega_I - \omega_{II}). \quad (24)$$

В силу линейности задачи указанные движения можно проанализировать отдельно.

Рассмотрим совместно направленное движение. Уравнение для относительных ускорений жидкости $V(x, t)$ имеет вид:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} - \nu_c \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{dU_{сов}}{dt}; \quad V(\pm h, t) = 0. \right.$$

Применяем к этой задаче операционное исчисление:

$$\left\{ sV - \nu_c \frac{d^2 V}{dx^2} = s \cdot U_{сов}; \quad V(\pm h, s) = 0. \right. \quad (25)$$

Решение системы (25) выражается через гиперболический косинус:

$$V = \left(1 - \frac{ch(\sqrt{s/\nu_c} x)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \right) \cdot U_{сов}(s). \quad (26)$$

Дифференцируя равенство (26) по координате x , находим касательные напряжения на стенках:

$$\tau_{сов}(\pm h) = \rho_c \nu_c \frac{sh(\sqrt{s/\nu_c} h) \cdot \sqrt{s/\nu_c}}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \cdot U_{сов}(s)$$

или

$$\tau_{сов}(\pm h, s) = \rho_c \frac{sh(\sqrt{s/\nu_c} h) / (\sqrt{s/\nu_c} h)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \cdot h \cdot s \cdot U_{сов}(s).$$

Передаточная функция $\psi_{сов}(s) = \frac{ch(\sqrt{s/\nu_c} h) / (\sqrt{s/\nu_c} h)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)}$ имеет полюса в точках $s_j = \frac{\nu_c}{h^2} \cdot y_j^2$,

где $y_j = \pi(j-1/2)$, $j = 1, 2, \dots$ – положительные корни косинуса, откуда получаем ее разложение в ряд

$$\psi_{сов}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{s h^2 / \nu_c + y_j^2}.$$

Следовательно, момент сопротивления силикона на каждой стенке канала можно найти в виде суммы

$$M_{с.сов} = \sum_{j=1}^n M_{сов.j},$$

где парциальные моменты находятся из решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dM_{сов.j}}{dt} + \frac{\nu_c}{h^2} y_j^2 M_{сов.j} = J_c \frac{2\nu_c}{h^2} \cdot \dot{\omega}_{сов}. \quad (27)$$

Пусть $M_{сов.j} = J_c \frac{h^2}{\nu_c} \frac{2}{y_j^2} \cdot \omega_{сов.j}$, $j = 1, 2, \dots$

Тогда (27) можно вернуть первоначальный механический смысл:

$$J_c \frac{2}{y_j^2} \frac{d\omega_{сов.j}}{dt} + J_c \frac{2\nu_c}{h^2} (\omega_{сов.j} - \omega_{сов}) = 0, \quad (28)$$

причем $\sum_{j=1}^{\infty} (2/y_j^2) = 1$.

Рассмотрим противоположно направленное движение. Уравнение для относительного движения жидкости $V(x, t)$ имеет вид:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} - v_c \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{x}{h} \frac{dU_{np}}{dt}; V(\pm h, t) = 0 \right.$$

Здесь $(x/h)U_{np}(t)$ – это квазистационарное поле скоростей в зазоре, получаемое по теории Пуазейля после пренебрежения силами инерции.

После применения операционного исчисления получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$sV - v_c \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{x}{h} s \cdot U_{np}(s),$$

которое после учета граничных условий $V(\pm h) = 0$ имеет решение

$$V = \left(\frac{sh(\sqrt{s/v_c} x)}{sh(\sqrt{s/v_c} h)} + \frac{x}{h} \right) \cdot U_{np}(s). \tag{29}$$

Касательные напряжения на стенках получаем, дифференцируя (29) по координатах x :

$$\tau(h, s) = -\tau(-h, s) = v_c \frac{dV}{dx} \Big|_{x=h} = \left(\frac{ch(\sqrt{s/v_c} h) \cdot (\sqrt{s/v_c})}{sh(\sqrt{s/v_c} h) \cdot s} + \frac{1}{h \cdot s} \right) \cdot v_c \cdot s \cdot U_{np}(s).$$

Передаточная функция

$$\psi_{np}(s) = \frac{ch(\sqrt{s/v_c} h)}{sh(\sqrt{s/v_c} h) / (\sqrt{s/v_c} h)}$$

имеет полюса в точках $s_j = (v_c/h^2) \cdot z_j^2$, где $z_j = \pi \cdot j$, $j = 1, 2, \dots$ – положительные корни синуса, откуда получаем ее разложение в ряд:

$$\psi_{np}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (v_c/h^2)}{s + (v_c/h^2) \cdot z_j^2}.$$

Следовательно, момент сопротивления слоя силикона на каждой стенке канала можно найти в виде суммы

$$M_{c,np} = M_{кв.см} + \sum_{j=1}^{\infty} M_{np,j},$$

где квазистатический момент

$$M_{кв.см} = J_c \frac{v_c}{2h^2} \omega_{np} = J_c \frac{v_c}{2h^2} (\omega_I - \omega_{II}),$$

а парциальные динамические моменты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dM_{np,j}}{dt} + \frac{v_c}{h^2} z_j^2 M_{np,j} = J_c \frac{2v_c}{h^2} \dot{\omega}_{np}. \tag{30}$$

Пусть $M_{np,j} = J_c \frac{h^2}{v_c} \frac{2}{z_j^2} \cdot \omega_{np,j}$, $j = 1, 2, \dots$

Тогда (30) можно записать в форме, имеющей механический смысл:

$$J_c \frac{2}{z_j^2} \frac{d\omega_{np,j}}{dt} + J_c \frac{2v_c}{h^2} (\omega_{np,j} - \omega_{np}) = 0, \tag{31}$$

причем сумма коэффициентов здесь имеет другое значение: $\sum_{j=1}^{\infty} (2/z_j^2) = 0.5$.

В дифференциальных уравнениях (28) и (31) величины

$$\tau_y = \frac{h^2}{v_c \cdot y_j^2}, \quad \tau_z = \frac{h^2}{v_c \cdot z_j^2}$$

являются их *постоянными времени*, и, если учесть используемые значения вязкости и зазоров, очень малы. Например, если $\nu_c = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$, $h = 0.5 \text{ мм}$, то эти постоянные не превосходят 10^{-6} с . Это означает, что первые слагаемые уравнений принимают существенные значения, только лишь, в диапазоне радиочастот, и при моделировании работы демпфера с твердым маховиком этими инерционными слагаемыми можно пренебречь. Но тогда все нестационарные моменты сопротивления $M_{сов.j}$ и $M_{пр.j}$ также оказываются равными 0, и, как доказано в результате проведенного исследования,

фрикционную связь корпуса с маховиком можно рассчитывать по квазистатической теории Пуазейля.

Однако, следует заметить, что это утверждение не носит абсолютный характер, и если, напр., уменьшить вязкость ПМС в 50 – 100 раз, а зазоры увеличить в 5 – 10 раз, то динамика течения масла в кольцевых каналах будет оказывать значительное влияние на работу демпфера с твердым маховиком, и здесь ограничиваться только лишь квазистационарными силами сопротивления недопустимо.

Особенности динамических характеристик демпфера с жидким маховиком. Рассмотрим демпфер с кольцевыми каналами прямоугольного сечения (рис. 4, б) и введем в расчет, как и ранее, относительную и демпферную частоты

$$\delta\omega = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = b / J_M = \left\| b = 8J_c \cdot \nu_c / (2h)^2, \quad J_M = J_c \right\| = \nu_c / (2h)^2 \cdot 8. \quad (32)$$

Для твердого маховика демпферная частота вычисляется по формуле

$$\omega_0 = b / J_M = \nu_c / (2h)^2 \cdot (J_c / J_M),$$

где последний множитель мал и имеет порядок величины 0,001...0,002. В формуле (32) соответствующий множитель равен 8. Поэтому, если при переходе к жидкому маховику величина демпферной частоты остается прежней (а это необходимо для правильной настройки демпфера на резонансные частоты коленчатого вала), то вязкость ПМС нужно уменьшить и/или зазоры между пластинами нужно увеличить таким образом, чтобы отношение ν_c / h^2 уменьшилось примерно в 5000 раз.

Например, целесообразно приблизительно в 50 раз уменьшить вязкость, то есть перейти к использованию ПМС средней вязкости, которая является ньютоновской жидкостью и не изменяет свои свойства в зависимости от градиента скоростей течения. Одновременно, нужно будет примерно в 10 раз увеличить ширину зазоров.

Тогда коэффициент вязкого демпфирования и приведенный момент инерции демпфера будут определяться равенствами

$$b_0 = b \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + [(j-0.5) / \delta\omega]^2}, \quad J_0 = J_c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 / (j-0.5)^2}{1 + [(j-0.5) / \delta\omega]^2}.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 12. Сравнивая с рис. 2, видим качественное отличие: в новом устройстве коэффициент демпфирования с ростом частоты возрастает неограниченно (примерно как квадратный корень из частоты), и это обстоятельство улучшает качество работы демпфера на высоких собственных частотах резонансных колебаний коленчатого вала. Но, к сожалению, на основных резонансных частотах, отвечающих одноузловой и двухузловой формам крутильных колебаний, коэффициент демпфирования уменьшается соответственно в 6 и в 4 раза (если сохранен габарит узла, рис. 13, кривые 1 и 2).

Этот недостаток можно устранить, увеличив диаметр корпуса примерно в 1,5 раза (кривая 3 на рис. 13). Заметим, что благодаря меньшей плотности ПМС (по сравнению с плотностью стали) масса демпфера уменьшается значительно – почти в 3 раза, что снижает поперечные колебания вала.

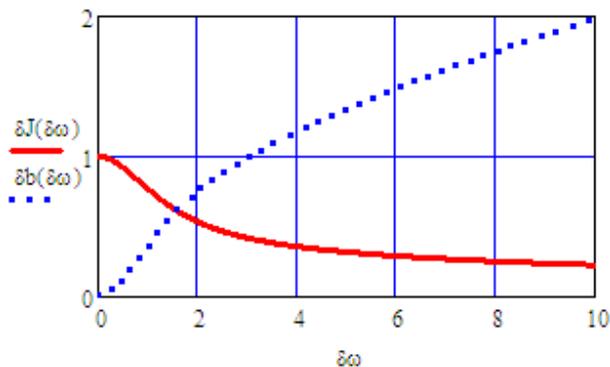


Рис. 12 – Характер изменения динамических характеристик демпфера с жидким маховиком.

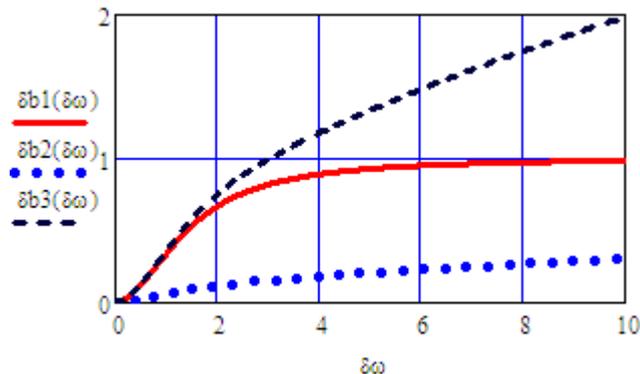


Рис. 13 – Сравнение коэффициентов вязкого демпфирования для демпферов с твердым маховиком и жидким (при двух значениях диаметра) маховиком.

Выводы. Разработаны математические модели нестационарного синфазного ламинарного течения вязкой жидкости по каналам кольцевой формы.

Найдені аналітичні рішення дифференціальних рівнянь синфазного течення жидкості (в формі сумми функціональних рядів) для неустановившихся і установившихся коливань.

Получені формули для основних динамічних характеристик демпферів нової конструкції (с жидким маховиком) – коефіцієнта вязкого демпфирования, приведенного момента інерції і демпфирующей частоты.

Показано, що для збереження демпфирующей частоты і коефіцієнта демпфирования на рівні устроїства-аналога (с маховиком из стали) діаметр жидкого маховика необхідно збільшити приблизно в 1.5 рази.

Список літератури

1. Гоц А. Н. Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей : учеб. пособие – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с.
2. Терских В. П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок : в 3 т. – Л. : Судпромгиз, 1953 – 1954. Т. 1. – 259 с., Т. 2 – 215 с., Т. 3 – 200 с.
3. Бетлей Ш. Исследование силиконовых демпферов крутильных колебаний : автореф. дис. канд. техн. наук. – Харьков, 1966. – 14 с.
4. Зайдман Е. С., Осипова О. А. Определение вязкости жидкости в силиконовых демпферах крутильных колебаний // Сб. «Проблемы развития комбинированных двигателей внутреннего сгорания». – М. : Машиностроение, 1968. – С. 273 – 282.
5. Гоц А. Н. Научные основы расчета и ускоренных испытаний деталей кривошипно-шатунного механизма тракторных дизелей на стадии проектирования : автореф. дис. д-ра техн. наук. – Владимир, 2004. – 32 с.
6. Труханов К. А. Гидропривод вентилятора для системы охлаждения автомобильного двигателя // Известия МГТУ «МАМИ». – М., 2011 – №2 (12). – С. 78 – 84.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1950. – 736 с.
8. Григорьев А. Л. Использование интегралов Дюамеля для расчета импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 63 – 86.
9. Григорьев А. Л. Метод и результаты расчета неустановившегося ламинарного течения топлива по нагнетательному трубопроводу топливной аппаратуры дизеля // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999 – Вып. 60. – С. 86 – 97.

References (transliterated)

1. Gots A. N. *Krutil'nye kolebaniya kolenchatykh valov avtomobil'nykh i traktornykh dvigatelei : ucheb. posobie* [Torsional vibration of crankshafts of automobile and tractor engines]. Vladimir, Vladimir National University Publ., 2008, 200 p.
2. Terskikh V. P. *Raschety krutil'nykh kolebaniy silovykh ustanovok : v 3 t.* [Calculation of torsional vibration of power plants: in 3 vol.]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1953 – 1954, vol. 1, 259 p., vol. 2, 215 p., vol. 3, 200 p.
3. Betley Sh. *Issledovanie silikonovykh dempferov krutil'nykh kolebaniy : avtoref. dis. kand. tekhn. nauk* [Study of silicone dampers of torsional vibrations: the author's abstract of the Candidate of Technical Sciences Dissertation]. Kharkov, 1966. 14 p.
4. Zaydman E. S., Osipova O. A. *Opredelenie vyazkosti zhidkosti v silikonovykh dempferakh krutil'nykh kolebaniy* [Determining viscosity of fluid in silicone dampers of torsional vibrations]. *Sb. «Problemy razvitiya kombinirovannykh dvigateley vnutrennego sgoraniya»* [Development problems of combined internal combustion engines. Collected works]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, pp. 273–282.
5. Gots A. N. *Nauchnye osnovy rascheta i uskorennykh ispytaniy detaley krivoshipno-shatunnogo mekhanizma traktornykh dizeley na stadii proektirovaniya : avtoref. dis. d-ra tekhn. nauk.* [Scientific basis for calculation and accelerated testing of the details of the crank gear of tractor diesels at the design stage: the author's abstract of the Doctor of Technical Sciences Dissertation]. Vladimir, 2004. 32 p.
6. Trukhanov K. A. *Gidroprivod ventilyatora dlya sistemy okhlazhdeniya avtomobil'nogo dvigatelya* [Hydraulic fan drive for engine cooling system] *Izvestiya MGTU «MAMI»* [Bulletin of the Moscow State Technical University “MAMI”]. Moscow, 2011, no. 2 (12), pp. 78–84.
7. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Nauka Publ., 1950. 736 p.
8. Grigor'ev A. L. *Ispol'zovanie integralov Dyumelya dlya rascheta impul'sov davleniya i skorosti techeniya vyazkoi zhidkosti po truboprovodu* [Using the Duhamel integral to calculate the pressure pulses and the viscous fluid flow rate through conduit]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, 2013, no. 54 (1027), pp. 63–86.
9. Grigor'ev A. L. *Metod i rezul'taty rascheta neustanovivshegosya laminarnogo techeniya topliva po nagnetatel'nomu truboprovodu toplivnoy apparatury dizelya* [Method and results of calculating the unsteady laminar flow of fuel through the diesel fuel supply line]. *Vestnik KhGPU* [Bulletin of the KhNPU]. Kharkiv, 1999, Vyp. 60, pp. 86–97.

Поступила (received) 27.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Континуальні моделі синфазної течії силіконового масла по кільцевих каналах демпферів крутильних коливань вала дизеля / І. С. Ревелюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 97 – 110. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Континуальные модели синфазного течения силиконового масла по кольцевым каналам демпферов крутильных колебаний вала дизеля / И. С. Ревелюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 97 – 110. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Continuous models of in-phase flow of silicone oil along annular channels of torsional vibration dampers of the diesel shaft / I. S. Reveliuk // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 97 – 110. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ревелюк Іван Сергійович – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.

Ревелюк Іван Сергеевич – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, г. Харьков; тел.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.

Reveliuk Ivan Sergeevich – Postgraduate, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.

А. Н. СЫРОВАЦКИЙ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС ПО СПЕКТРУ

Одна з найважливіших задач теорії збурень полягає у вивченні спектра збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. Класичним результатом, який дає розв'язок цієї задачі в скінченновимірному випадку для операторів з простим спектром, є теорема Льовнера. У даній роботі застосовується результат цього твердження для розв'язання конкретної практичної задачі. В роботі вивчається задача про лінійні коливання точкових мас, а також збурення її розв'язків, за допомогою зміни умов середовища експерименту. Досліджується поведінка частот коливань при цих змінах. В роботі розв'язується як пряма задача (дослідження поведінки спектра при одновимірних збуреннях) так і зворотна задача (знаходження збурення по заданому спектру).

Ключові слова: самоспряжений оператор, спектр, збурення оператора, задача про лінійні коливання точкових мас.

Одна из важнейших задач теории возмущений состоит в изучении спектра возмущенного оператора и описании спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который дает решение этой задачи в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. В данной работе применяется результат этого утверждения для решения конкретной практической задачи. В работе изучается задача о линейных колебаниях точечных масс, а также возмущения её решений, посредством изменения условий среды эксперимента. Исследуется поведение частот колебаний при этих изменениях. В работе решается как прямая задача (исследование поведения спектра при одномерных возмущениях) так и обратная задача (нахождения возмущения по заданному спектру).

Ключевые слова: самосопряженный оператор, спектр, возмущение оператора, задача о линейных колебаниях точечных масс.

One of the major tasks of the perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe its spectral projectors. The classical result, which gives a solution to this problem for the operators with a simple spectrum in the finite-dimensional case, is the Lowner theorem. In this paper the result of this statement is applied to solve a specific practical problem. In this paper the problem of linear oscillations of point masses is studied as well as perturbations of its solutions induced by changing the conditions of the experimental environment. The behavior of the oscillations' frequencies under these changes is investigated. Both the direct problem (investigation of the behavior of the spectrum for one-dimensional perturbations) and the inverse problem (finding the perturbation from a given spectrum) are solved.

Key words: self-adjoint operator, spectrum, perturbation of the operator, the problem of linear oscillations of point masses.

Введение. Начало спектральной теории возмущений восходит к работам Г. Вейля [1] (1909), Ф. Реллиха [2] (1936) и К. Фридрихса [3] (1939). В частности, Г. Вейлю [1] принадлежит теорема об инвариантности непрерывной части спектра самосопряженного оператора при вполне непрерывном возмущении. В работах Т. Като [4] и М. Роземблума [5] показано, что абсолютно непрерывная часть спектра инвариантна при конечномерных возмущениях. В данной же работе рассматривается возмущение дискретного спектра. Работа посвящена изучению задачи колебаний точечных масс при одномерном возмущении; последнее отвечает изменению среды, где изучаются колебания. Это соответствует, например:

- изменению вязкости среды (погружение колеблющейся системы в жидкость, в воду, масло и др.);
- изменению температурного режима среды колебаний;
- помещению изучаемой системы в движущуюся инерциальную систему и др.

Решение обратной задачи состоит в восстановлении возмущения по заданному возмущенному спектру. Иначе говоря, вопрос заключается в том, как изменить среду колебаний для системы точечных масс, чтобы получить требуемые частоты.

В работе решается как прямая задача (исследование поведения спектра при одномерных возмущениях) так и обратная задача (нахождения возмущения по заданному спектру).

Анализ последних исследований. Как правило, ранее изучались прямые задачи возмущения (описание спектра, собственных функций и т.д.). Решению же обратных задач, то есть восстановлению исходных параметров по возмущенному спектру уделялось мало внимания. В частности никем не была предложена процедура нахождения возмущения по спектру. В статье Л. П. Нижника [6] изучались одномерные возмущения неограниченных операторов и были получены формулы для *резольвенты* возмущенного оператора, однако задача о восстановлении одномерного возмущения по двум спектрам не рассматривалась.

Постановка задачи. В работе изучается задача о линейных колебаниях точечных масс, на которые действует возмущение ранга один. Целью является описание спектра (частот колебаний) при таком возмущении, а также решение обратной задачи восстановления возмущения по спектру.

Задача о линейных колебаниях точечных масс. Рассмотрим систему, состоящую из точечных масс m_0, m_1, \dots, m_{N-1} , соединенных невесомыми пружинками с жесткостями k_0, k_1, \dots, k_{N-1} , длины которых в нерастянном состоянии равны l_0, l_1, \dots, l_{N-1} соответственно. Сумму длин пружин обозначим $\sum_{i=0}^{N-1} l_i = L_0$.

Расстянем эту систему так, чтобы общая длина пружин стала равняться L_1 , и закрепим неподвижно левый конец пружинки l_0 и правый конец пружинки l_N .

Для описания положения системы введем систему координат: направим ось Ox вдоль прямой, соединяющей точки крепления, начало координат выберем в точке закрепления левой пружинки. Тогда координата точки закрепления правой пружинки L_1 .

Найдем координаты $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{N-1}^0$ масс в состоянии равновесия. Рассмотрим i -ю пружинку. Ее длина в растянутом состоянии равна $x_i^0 - x_{i-1}^0$, то есть ее относительное удлинение составляет $-(x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i)/l_i$. По закону Гука i -я пружинка действует на массу m_i с силой

$$F_i = -k_i \frac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i},$$

а $(i+1)$ -я – с силой

$$F_{i+1} = -k_{i+1} \frac{x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Так как система находится в равновесии, то сумма сил, действующих на массу m_i , должна быть равна нулю, то есть

$$-k_i \frac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i} + k_{i+1} \frac{x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}}{l_{i+1}} = 0, \quad (i = 0, \dots, N-1), \quad (1)$$

где $x_{-1}^0 = 0$ – точка закрепления левого конца; $x_N^0 = 0$ – точка закрепления правого конца.

Мы получили линейную относительно $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{N-1}^0$ систему из N уравнений, решая которую, находим координаты масс в состоянии равновесия.

Рассмотрим теперь движение этой системы при условии, что точки закрепления остаются неподвижными, а массы могут перемещаться вдоль оси Ox . Обозначим через $u_i(t)$ смещение массы m_i от положения равновесия x_i^0 в момент времени t . Таким образом, координата массы m_i в момент времени t равна $x_i^0 + u_i(t)$.

Поскольку координаты x_i^0 ($i = 0, \dots, N-1$) известны, то для описания положения системы достаточно знать смещения $u_i(t)$. Подчеркнем, что в положении равновесия $u_i(t) = 0$ ($i = 0, \dots, N-1$).

При выведении системы из положения равновесия сила, действующая на массу m_i , станет равной (с учетом (1)):

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{k_i}{l_i} \left[(x_i^0 + u_i(t)) - (x_{i-1}^0 + u_{i-1}(t) - l_i) \right] + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left[(x_{i+1}^0 + u_{i+1}(t)) - (x_i^0 + u_i(t) - l_{i+1}) \right] - \\ &= -\frac{k_i}{l_i} (x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} (x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}) - \frac{k_i}{l_i} (u_i(t) - u_{i-1}(t)) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} (u_{i+1}(t) - u_i(t)) = \\ &= \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} u_{i+1}(t) - \left(\frac{k_i}{l_i} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \right) u_i(t) + \frac{k_i}{l_i} u_{i-1}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

По второму закону Ньютона

$$F_i = m_i w_i = \frac{d^2}{dt^2} (x_i^0 + u_i(t)) = m_i \ddot{u}_i(t).$$

Подставляя вместо F_i выражение (2), мы получаем систему уравнений относительно $u_i(t)$:

$$\alpha_{i+1} u_{i+1}(t) - (\alpha_{i+1} + \alpha_i) u_i(t) + \alpha_i u_{i-1}(t) = m_i \ddot{u}_i(t), \quad (3)$$

где $\alpha_i = k_i / l_i = \text{const}$, $i = 0, \dots, N-1$, $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= (u_0(t), u_1(t), \dots, u_{N-1}(t)), \\ M &= \begin{pmatrix} m_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{N-1} \end{pmatrix}, \\ J &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N + \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

и эту систему переписываем в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2} M \vec{u}(t) = -J \vec{u}(t). \quad (5)$$

Найдем общее решение системы (5). Для этого сначала несколько преобразуем ее. Проще всего это сделать прямо с уравнением (3). Оно эквивалентно такому:

$$\sqrt{m_i} \ddot{u}_i(t) = \frac{\alpha_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}} \sqrt{m_{i+1}} u_{i+1}(t) - \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{m_i} \sqrt{m_i} u_i(t) + \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} \sqrt{m_{i-1}} u_{i-1}(t).$$

Если теперь ввести обозначения

$$\sqrt{m_i} u_i(t) = v_i(t), \quad \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} = -b_{i-1}, \quad \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{m_i} = a_i,$$

то это уравнение примет вид

$$\ddot{v}_i(t) = -b_i v_{i+1}(t) - a_i v_i(t) - b_{i-1} v_{i-1}(t),$$

то есть, система (5) будет эквивалентна такой:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{v}(t) = -A \vec{v}(t), \quad (6)$$

где $a_i = \frac{1}{m_i} \left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i} \right)$, $b_i = -\frac{k_{i+1}}{l_{i+1} \sqrt{m_i m_{i+1}}}$, A – якобиевая матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A . Собственные значения $\{\alpha_i\}_1^n$ (квадраты собственных частот колебаний масс) совпадают с корнями полинома [8]

$$Q_N(z) = zP_{N-1}(z) - a_{N-1}P_{N-1}(z) - a_{N-2}P_{N-2}(z).$$

Здесь $P_i(z)$ – ортогональные полиномы степени i , получающиеся по рекуррентным формулам из коэффициентов матрицы A :

$$\begin{cases} a_0 + b_0 P_1(z) = z; \\ b_0 + a_1 P_1(z) + b_1 P_2(z) = zP_1(z); \\ \dots \\ b_{N-3} P_{N-3}(z) + a_{N-2} P_{N-2}(z) + b_{N-2} P_{N-1}(z) = zP_{N-2}(z); \\ b_{N-2} P_{N-2}(z) + a_{N-1} P_{N-1}(z) = zP_{N-1}(z). \end{cases}$$

Заметим, что $Q_N(z)$ – полином степени N .

Собственные векторы матрицы имеют вид:

$$h_i = (1, P_1(\alpha_i), P_2(\alpha_i), \dots, P_{N-1}(\alpha_i)), \quad i = \overline{(1, N)}. \quad (7)$$

Далее будем предполагать, что используемые векторы h_i – ортонормированы.

Одномерное возмущение и задача о линейных колебаниях точечных масс. Подействуем на систему сторонней силой, например, поместим пружину в жидкость. Тогда параметры изменятся. Система (6) примет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{v}(t) = -B \vec{v}(t), \quad (8)$$

где матрица

$$B = A + c \langle \cdot, \varphi \rangle \varphi. \quad (9)$$

Перейдем к базису, состоящему из собственных векторов матрицы A .

Тогда

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Резольвента

$$R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - \alpha_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda - \alpha_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda - \alpha_n} \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \xi_k h_k, \text{ где } \xi_k = \langle \varphi, h_k \rangle.$$

Пусть

$$\langle \varphi, h_k \rangle \neq 0, \forall h_k : Ah_k = \alpha_k h_k \quad (k = \overline{1, n}). \tag{10}$$

В [7] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Особенностями $R_\lambda(B)$, где B имеет вид (9) и φ удовлетворяет условию (10), могут быть лишь те λ , при которых $m(\lambda) = 0$, где $m(\lambda) = 1 + c \langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi \rangle$.*

В нашем случае

$$m(x) = 1 + c \sum_{k=1}^n \frac{|\xi_k|^2}{x - \alpha_k},$$

$$m(x) = \frac{\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n (x - \lambda_k) + |\xi_1|^2 \sum_{k \neq 1} (x - \lambda_k) + \dots + |\xi_n|^2 \sum_{k \neq n} (x - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (x - \lambda_k)}. \tag{11}$$

Числитель (11) имеет вид

$$\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n (x - \lambda_k) + |\xi_1|^2 \sum_{k \neq 1} (x - \lambda_k) + \dots + |\xi_n|^2 \sum_{k \neq n} (x - \lambda_k) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \tag{12}$$

где коэффициенты a_k соответственно равны:

$$a_n = \frac{1}{c}; \quad a_{n-1} = -\frac{1}{c} \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2; \quad a_{n-2} = \frac{1}{c} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j - \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \left(\sum_{1 \leq i \leq n; i \neq k} \lambda_i \right);$$

$$a_{n-k} = (-1)^k \left[\frac{1}{c} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{k-1}} - \frac{1}{c} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} - \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n; i_j \neq k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{k-1}} \right) \right]. \tag{13}$$

Таким образом, функция $m(x)$ для возмущенной задачи о линейных колебаниях точечных масс является полиномом степени n с коэффициентами (13). Нули данной функции, а поэтому и собственные значения оператора B , будут перемежаться с собственными значениями оператора A .

Обратная задача для линейных колебаний точечных масс. Постановка этой задачи такова. Пусть нам известны собственные частоты колебания точечных масс в случае проведения эксперимента в воздушной среде и в случае изменения среды; мы хотим узнать некоторую возможную характеристику данной среды, которая повлияла на изменение частот колебаний. То есть, пусть даны 2 набора вещественных чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$. Необходимо найти одномерное возмущение.

Считая, что числа $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ являются собственными значениями оператора A , построим (неоднозначным образом) оператор A . Будем искать оператор B в виде $B = A + c \langle \cdot, \varphi \rangle \varphi$, такой, что числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ являются его собственными значениями. Для этого найдем $c \neq 0, c \in R$ и все компоненты вектора φ (будем предполагать, что они также вещественны).

В [7] была доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть даны вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$, где $\{\alpha_i\}_1^n$ – собственные значения линейного самосопряженного оператора A , действующего в n -мерном пространстве H . Тогда существует оператор P ранга 1: $Ph = c \langle h, \varphi \rangle \varphi$, где h – произвольный вектор из $H, \varphi \in H, c$ – скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^n$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.*

Таким образом, восстановим возмущение (правда неединственным способом), которое будет характе-

ризовать некоторое свойство среды, которая повлияла на изменение частот колебаний.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда собственные значения матрицы A :

$$\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Возьмем конкретное возмущение. Пусть

$$c = 1, \quad |\xi_1|^2 = \frac{7}{24}, \quad |\xi_2|^2 = \frac{7}{12}, \quad |\xi_3|^2 = \frac{7}{24}.$$

Тогда полином из (12) примет вид:

$$(x - (1 - \sqrt{2}))(x - 1)(x - (1 + \sqrt{2})) + \frac{7}{24}(x - 1)(x - (1 + \sqrt{2})) + \frac{7}{12}(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2})) + \frac{7}{24}(x - 1)(x - (1 + \sqrt{2})) = 0.$$

После элементарных преобразований полинома получим:

$$(x - 1)^3 + \frac{7}{6}(x - 1)^2 - 2(x - 1) - \frac{7}{6} = 0.$$

Тогда корни полинома, а, следовательно, и собственные значения возмущенного оператора B , таковы:

$$\beta_1 = x_1 = \frac{2 - \sqrt{22}}{3}, \quad \beta_2 = x_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_3 = x_3 = \frac{2 + \sqrt{22}}{3}.$$

Легко видеть, что имеет место перемежаемость собственных значений:

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3.$$

Перспективы дальнейших исследований. Предложенный метод может быть развит на случай бесконечного числа масс и на случай возмущений ранга больше единицы.

Выводы. В работе рассмотрена задача о линейных колебаниях точечных масс, а также исследована задача ее возмущения посредством изменения условий среды эксперимента. Кроме того, была решена обратная задача по восстановлению некоторой характеристики среды, которая могла бы повлиять на колебания точечных масс. Доказано, что в случае возмущения собственные значения оператора системы (собственные частоты колебания точечных масс) будут перемежаться с собственными значениями невозмущенной задачи. Также описан метод восстановления или идентификации изменения в некоторой характеристике среды (например, вязкость жидкости, скорость инерциальной системы), которая могла повлиять на эксперимент.

Список литературы

1. Weyl H. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist // *Rend. Circolo mat. Palermo*. – 1909. – № 27. – С. 373 – 392.
2. Rellich F. Störungstheorie der Spektralzerlegung I // *Math. Ann.* – 1936. – № 113. – С. 600 – 619.
3. Friedrichs K. O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators // *Math. Ann.* – № 115 (1938). – С. 259 – 272.
4. Kato T. Теория возмущения линейных операторов. – Москва : Мир, 1972. – 740 с.
5. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence // *Pacif. Journ. Math.* – 1957. – Т. 7. – № 1. – С. 997 – 1010.
6. Nizhnik L. P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators // *Methods of Functional Analysis and Topology*. – 2001. – Т. 4. – № 3. – С. 54 – 66.
7. Сыровацкий А. Н. Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром // *Вестник ХНУ. Сер. : Математика, прикладная математика и механика*. – 2010. – № 922. – С. 20 – 31.
8. Марченко В. А., Славин В. В. Обратные задачи теории малых колебаний. – Киев : Наукова думка, 2015. – 218 с.

References (transliterated)

1. Weyl H. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist. *Rend. Circolo mat. Palermo*. 1909, no. 27, pp. 373–392.
2. Rellich F. Störungstheorie der Spektralzerlegung I. *Math. Ann.* 1936, no. 113, pp. 600–619.
3. Friedrichs K. O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators. *Math. Ann.* no. 115 (1938), pp. 259–272.
4. Kato T. *Teoriya vozmushheniya lineynykh operatorov* [Perturbation theory for linear operators]. Moscow, Mir Publ., 1972. 740 p.
5. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. *Pacif. Journ. Math.* 1957, vol. 7, no. 1, pp. 997–1010.
6. Nizhnik L. P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2001, vol. 7, no. 3, pp. 54–66.
7. Syrovatsky A. N. Ob odnomernom vozmushhenii samosopryazhennykh operatorov s prostym spektrom [About one-dimensional perturbation of self-adjoint operators with a simple spectrum]. *Vestn. KhNU. Ser.: Matematika, prikladnaya matematika i mekhanika* [Bulletin of Kharkov National University. Series: Mathematics, applied mathematics and mechanics]. 2010, no. 922, pp. 20–31.
8. Marchenko V. A., Slavin V. V. *Obratnye zadachi teorii malykh kolebaniy* [Inverse problems of the theory of small oscillations]. Kiev. Naukova Dumka Publ., 2015, 218 p.

Поступила (received) 28.08.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про відновлення збурення коливань точкових мас по спектру / О.М. Сыровацкий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 111 – 116. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

О **восстановлении возмущения колебаний точечных масс по спектру / А. Н. Сыровацкий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 111 – 116. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

On restoring point mass oscillation perturbations by spectrum / A. N. Syrovatsky // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 111 – 116. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сыровацкий Александр Миколайович – викладач Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

Сыровацкий Александр Николаевич – преподаватель Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

Syrovatsky Aleksandr Nikolaevich – teacher at the V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov; tel.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

УДК 669.187.2

С. Н. ТИМОШЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ВАННЫ И ПОДОВОГО ЭЛЕКТРОДА ДУГОВОЙ ПЕЧИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ЦЕЛЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ

На основі чисельного моделювання розтікання струму у ванні дугової сталеплавильної печі постійного струму місткістю 12 тонн виконана оцінка питомої потужності перемішування при електровихровій течії металу, що характеризує інтенсивність процесів тепло- і масообміну. Збільшення глибини ванни при даній місткості печі і зміщення подового електрода щодо осі симетрії в певних межах є більш ефективним засобом підвищення енергоефективності дугової печі малої місткості, ніж застосування двох електродів стрижневого типу або електроду пластинчастого типу.

Ключові слова: дугова сталеплавильна піч постійного струму, подовий електрод, електровихрова течія, потужність перемішування, геометрія ванни, енергоефективність.

На основе численного моделирования растекания тока в ванне дуговой сталеплавильной печи постоянного тока вместимостью 12 тонн выполнена оценка удельной мощности перемешивания при электровихровом течении металла, характеризующая интенсивность процессов тепло- и массообмена. Увеличение глубины ванны при данной вместимости печи и смещение подового электрода относительно оси симметрии в определенных пределах являются более эффективным средством повышения энергоэффективности дуговой печи малой вместимости, чем применение двух электродов стержневого типа или электрода пластинчатого типа.

Ключевые слова: дуговая сталеплавильная печь постоянного тока, подовый электрод, электровихровое течение, мощность перемешивания, геометрия ванны, энергоэффективность.

Based on the numerical simulation of current flow distribution in the bath of a 12-ton DC electric arc steelmaking furnace (EAF), the specific mixing power of the electro-vortex flow (EVF) in the liquid bath, characterizing the intensity of the heat and mass transfer processes, was estimated. Modernization of a standard bath (diameter to height ratio 4.0 – 5.5) to a "deep" one (ratio 1.7) allows reducing the duration of refining period and the specific energy consumption of the EAF by 9% due to growth of the EVF mixing power. For the given case it seems reasonable to install a single billet-type bottom electrode (BE) along the EAF axis of symmetry instead of two symmetrical BE, which leads to cost saving, reducing the heat loss due to water cooling and minimizing the refractory wear. If the realization of the "deep" bath is hampered by design constraints, it is advisable to install a single billet-type BE, shifted from the EAF axis of symmetry to a certain distance, which is a compromise solution between increasing the EAF energy efficiency and local wear of the lining. Using the fin-type BE in a small capacity EAF, operating by classical technology without leaving the "hot heel", seems less energy efficient than the billet-type BE.

Key words: DC electric arc steelmaking furnace, bottom electrode, electro-vortex flow, mixing power, bath geometry, energy efficiency.

Введение. Дуговые сталеплавильные печи (ДСП) привлекают технологов возможностью интенсивного и концентрированного ввода энергии, регулирования окислительного потенциала в рабочем пространстве и широкого выбора вариантов исходной шихты. Печи, работающие на постоянном токе (ДСПТ), в сравнении с ДСП переменного тока, характеризуются устойчивым горением дуги, что способствует снижению угара шихты, уровня шума и *фликер-эффекта* [1 – 3]. В «большой» металлургии при интенсивной двухстадийной технологии эти преимущества в значительной мере нивелируются скоротечностью плавки полупродукта [2]. Более прочные позиции ДСПТ заняли в «малой» металлургии, представленной литейными цехами с агрегатами, как правило, малой вместимости и классической технологией плавки с относительно длительным периодом доводки жидкой стали [3, 4].

Анализ последних исследований и публикаций. Постановка проблемы. Важным и критичным узлом ДСПТ является подовый электрод (ПЭ), который замыкает вторичную электрическую цепь: верхний графитированный электрод (катод) – дуга – шлак – металл – ПЭ (анод) и обеспечивает проведение технологического

© С. Н. Тимошенко, 2017

процесса. Наибольшее распространение получили ПЭ стержневого и пластинчатого (или игольчатого) типа [1], показанные схематично на рис. 1. ПЭ стержневого типа [1, 5] выполнен в виде биметаллической конструкции с верхней стальной головкой, контактирующей с жидкой ванной, и медным водоохлаждаемым основанием. ПЭ пластинчатого (игольчатого) типа [1, 6] представляет собой моноблок, включающий стальные пластины (штыри) в огнеупорной набивке, охлаждаемый снизу компрессорным воздухом.

Для ДСППТ, работающих в «большой» металлургии с выплавкой стандартного полупродукта по современной интенсивной технологии с оставлением в печи после выпуска плавки части жидкой стали – «болота», раскисленного в подине пластинчатый ПЭ, не требующий водяного охлаждения, представляется более энергоэффективным. При классической технологии получения в печи готовой стали различных марок работа с «болотом» неприемлема, поэтому для ДСППТ «малой» металлургии рациональным решением является ПЭ стержневого типа, который обеспечивает надежный электрический контакт с шихтой в начальный период плавки. В условиях недостатка объективной технико-технологической информации, при выборе типа ПЭ руководствуются коммерческими соображениями. Так для крупнейшей в мире 420-тонной ДСППТ завода «Tokyo Steel» (Япония), работающей по интенсивной технологии, поставщик печи (компания «Danieli» (Италия)) применил собственную разработку – систему их четырех ПЭ стержневого типа [7].

На заводах Украины установлены ДСППТ вместимостью до 12 т, в которых используют ПЭ, в основном, стержневого типа.

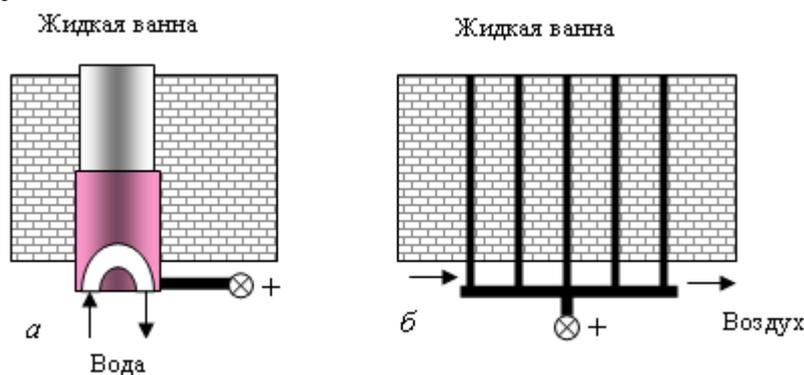


Рис. 1 – Подовый электрод: а – стержневого типа и б – пластинчатого.

Общим недостатком дуговых печей является относительно низкий тепловой коэффициент полезного действия (КПД), обычно не превышающий 70–75%. Около половины потерь энергии происходит излучением жидкой ванны и поверхности верхнего электрода на водоохлаждаемые элементы корпуса и свода. Для повышения энергоэффективности ДСППТ рациональным представляется уменьшение излучающей поверхности ванны за счет увеличения ее глубины при снижении диаметра с учетом особенностей загрузки шихты и роста относительных потерь тепла излучением верхнего электрода [8]. Важным фактором реализации «глубокой» ванны является интенсификация в ней электровихревых течений (ЭВТ) для компенсации снижения удельной реакционной поверхности шлак–металл путем ускорения процессов тепло- и массообмена. Перемешивание расплава при ЭВТ способствует также сокращению длительности периода доводки стали и плавки в целом, то есть повышению энергоэффективности ДСППТ.

Возможность применения в металлургических процессах ЭВТ, вызванных объемной электромагнитной силой (ОЭМС) в токнесущей жидкости при взаимодействии тока с собственным магнитным полем, впервые отражена в монографии Института физики АН Латвии [9]. В частности, теоретически обоснована зависимость характерной скорости ЭВТ от плотности тока, плотности жидкости и расстояния между электродами.

М. Ramirez и др. выполнили численное моделирование нагрева ванны 25-тонное ДСППТ при ЭВТ [10]. Показано положительное влияние глубины ванны, силы тока, расхода инертного газа при донной продувке ванны и негативное воздействие длинной дуги и слоя шлака на продолжительность нагрева и усреднения стали по температуре. К недостаткам работы относится то, что глубину ванны варьировали при постоянном ее диаметре, то есть без привязки к массе плавки; задавали силу тока, а не вторичное напряжение и характеристики проводимости токнесущих сред; а в качестве ПЭ рассматривали кольцевой элемент токопроводящей подины, весьма редко используемой на практике.

И. М. Ячиков и И. В. Портнова [11] исследовали ЭВТ применительно к 5-тонное ДСППТ на физической модели в линейном масштабе 1 к 10 с использованием легкоплавких металлов. При наличии одного ПЭ по оси симметрии печи на поверхности ванны наблюдается ЭВТ со средней скоростью 0,2 м/с. При установке двух ПЭ наблюдается увеличение средней скорости ЭВТ на 35%. Смещение оси ПЭ относительно оси верхнего электрода приводит к дополнительному росту данного параметра на 6%. По результатам моделирования рекомендуют установку двух ПЭ минимального сечения с максимально возможным шагом и смещением относительно верхнего электрода. Недостатком работы является невысокая точность измерений (отклонение до 100%), связанная, по-видимому, с масштабным фактором.

О. В. Казак и А. Н. Семко выполнили численные исследования ЭВТ в ванне 100-тонное ДСППТ при варьировании угла наклона стен ванны и положения верхнего торца осесимметрично расположенного ПЭ относительно уровня подины [12, 13]. Показано, что электромагнитная объемная сила достигает 30% объемной силы тяжести и обуславливает ЭВТ с максимальной скоростью 0,5 м/с в области контакта ПЭ с ванной. Переход от цилиндрической ванны к цилиндрико-конической и конической при неизменных диаметре и глубине ведет к росту скорости ЭВТ и сдвигового напряжения на поверхности футеровки, как к фактору ее износа [12], а перемещение торца стальной головки ПЭ выше и ниже уровня подины способствует уменьшению и увеличению скорости ЭВТ соответственно [13]. Вместе с тем, авторы при варьировании формы ванны недостаточно корректно сопос-

твляють результати моделювання, що стосуються до різної маси металу. Не обґрунтовано також механізм управління положенням торця ПЭ для регулювання ЭВТ.

Отримані в роботах [10 – 13] значення середньої швидкості ЭВТ узгоджуються з теоретичними представленнями [9]. Задачу вдосконалення геометрії ванни, як співвідношення між діаметром і глибиною при фіксованій масі плавки, для досягнення максимально можливої потужності перемішування при ЭВТ в відомих дослідженнях не розглядали. Дане завдання залишається актуальним, зокрема в плані співставительної оцінки вимог в промисловості типів ПЭ і їх розташування в ванні, для підвищення енергоефективності ДСППТ.

Ціль і задачі досліджень. Робота заключається в оцінці впливу геометрії сталеплавильної ванни при заданій масі плавки, розташування і типу ПЭ на потужність перемішування при ЭВТ – показателя енергоефективності ДСППТ.

Основний матеріал досліджень. Параметром, що характеризує металургічну ефективність магнітогідродинамічних процесів в ванні ДСППТ, є удільна потужність перемішування при ЭВТ $N_{ЭВТ}$, що визначається добутком ОЭМС $\vec{F}_{эм}$, активного об'єму ванни V_a і характерної швидкості ЭВТ расплава \vec{u}_0 .

$$N_{ЭВТ} = (\vec{F}_{эм} \cdot V_a \cdot \vec{u}_0) / M. \quad (1)$$

Термін «активний об'єм» застосовується до частини ванни, через яку переважно проходять силові лінії електричного струму між верхнім і подовим електродами і, таким чином, виникає ОЭМС. Приймають, що в межах активного об'єму густина електричного струму зменшується не більше ніж в e (основання натурального логарифма) раз відносно максимального значення. ОЭМС є векторним добутком середньої густини електричного струму \vec{j}_{cp} в сеченні активного об'єму ванни радіусом R_a і індукції магнітного поля $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$, де μ_0 – магнітна постійна, $\vec{H} = \vec{j}_{cp} \cdot \pi \cdot R_a^2 / 2\pi \cdot R_a$ – напруженість магнітного поля по периметру сечення активного об'єму. Рівняння для абсолютної величини ОЭМС з урахуванням геометричних параметрів ванни ДСППТ в скалярній формі набуває вигляду:

$$|F_{эм}| = (\mu_0 / 2) \cdot \vec{j}_{cp}^2 \cdot R_a. \quad (2)$$

Характерна швидкість ЭВТ в активному об'ємі ванни визначається залежністю, отриманою в припущенні рівномірного руху рідини на основі балансу сил інерції і ОЭМС [9]:

$$\vec{u}_0 = \vec{j}_{cp} \cdot h \cdot \sqrt{\mu_0 / \rho}, \quad (3)$$

де ρ – густина рідини; H_g – глибина ванни.

З урахуванням (1 – 3) потужність перемішування при ЭВТ визначається з виразу:

$$N_{ЭВТ} = |\vec{j}_{cp}^3| \cdot R_a^3 \cdot h^2 \cdot \pi \cdot \mu_0^{1.5} / (2 \cdot \rho^{0.5} \cdot M), \quad (4)$$

де M – маса металу в печі.

Як випливає з (4), суттєвий вплив на потужність перемішування мають густина струму, радіус активного об'єму і глибина сталеплавильної ванни. Для розрахунку потужності перемішування при ЭВТ розроблено методику, що заключається в чисельному моделюванні двовимірної задачі стаціонарної електропровідності в пакеті прикладних програм ELCUT 6.2 [14] і обробці результатів у вигляді полів густини електричного струму в ванні для оцінки інтегральних показників ЭВТ: ОЭМС, активного об'єму, характерної швидкості, потужності перемішування.

Моделювали розтікання струму в ванні промислової ДСППТ ємністю 12 т в реальному лінійному масштабі. Розв'язання задачі виконується методом кінцевих елементів. Електромагнітні явища в рідині ванни при протіканні електричного струму описуються рівняннями Максвелла (5, 6), узагальненим законом Ома для рухомої середовища (7) і законом збереження електричного заряду (8).

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0; \quad (6)$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}); \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (8)$$

де \vec{j} – густина струму; ρ_e – густина заряду; \vec{B} – індукція магнітного поля; \vec{E} – напруженість електричного поля; σ – удільна електропровідність; μ_0 – магнітна постійна; ϵ_0 – електрична постійна; \vec{u} – швидкість рідини.

Форма сталеплавильної ванни прийнята циліндро-сферична з відношенням елементів по висоті 1 к 1. В моделі варіювали глибину ванни, кількість стержневих ПЭ (один або два), крок між двома ПЭ або зміщення продольної осі ПЭ відносно осі симетрії печі, тип ПЭ (стержневої, пластинчастої). Верхній електрод розташований осесиметрично з умов енергоефективності періоду плавлення шихти електричної дугою. Глибину ванни, при даній масі плавки, співносили з діаметром ванни через рівняння об'єму тіла обертання. Розглянуто два варіанти ванни: стандартна і «глибока» з урахуванням обмежень [8]. Все роз-

меры приведены в табл. 1.

Модель включает расчетные блоки и границы, указанные на рис. 2, а (стандартная ванна) и рис. 3, а («глубокая» ванна), характеристики которых даны в табл. 1. Для оставшихся граней в модели граничным условием является электрическая изоляция.

В полученное поле плотности тока на среднем по глубине горизонте ванны вводили контур (рис. 2, а, 3 а), на котором анализировали распределение параметра по радиальной координате. При этом определяли радиус активного объема и среднюю величину плотности тока j_{cp} как полусумму максимального j_{max} и условного j_{max} / e значений, входящие в зависимость (4) для искомой мощности перемешивания при ЭВТ.

Электродинамическое давление дуги на поверхность расплава не учитывали ввиду сопоставительного (относительного) характера выполняемого анализа.

Результаты моделирования в виде полей плотности тока приведены на рис. 2 (стандартная ванна) и рис. 3 («глубокая» ванна) для вариантов: а) осесимметрично расположенный ПЭ стержневого типа – базовый вариант, б) два симметрично установленных ПЭ стержневого типа; в) смещенный от оси симметрии ПЭ стержневого типа; г) ПЭ пластинчатого типа.

Таблица 1 – Исходные данные численного моделирования

Блок (Б)/ грань (Г) и порядковый номер на рис. 2, 3	Электропроводность для блока. Потенциал для грани	Размеры, м (рис. 2, 3)	
		Стандартная ванна $D_6 = 2,30; H_6 = 0,60;$ $L = (0 \dots 75) \cdot D_6; B = L/2$	«Глубокая» ванна $D_6 = 1,7; H_6 = 1,0;$ $L = (0 \dots 75) \cdot D_6; B = L/2$
Электрод верхний графитированный (Б1)/ Катод (Г1)	105000 См/м [15] (-) 150 В	$dr = 0,4$	
Электрическая дуга (Б2)	5600 См/м [16,17]	Диаметр 0,08; длина 0,15 [10]	
Жидкий шлак (Б3)	110 См/м [18]	Толщина слоя 0,10 м	
Жидкая сталь (Б4)	730000 См/м [19]	В соответствии с размерами ванны	
Стальная часть ПЭ (Б5)/ Анод (Г2)	1200000 См/м (+) 150 В [20]	$d_{nc} = 0,20$ для ПЭ стержневого типа	
		$d_m = (0,5 \dots 0,75)D_6$ для ПЭ пластинчатого типа	

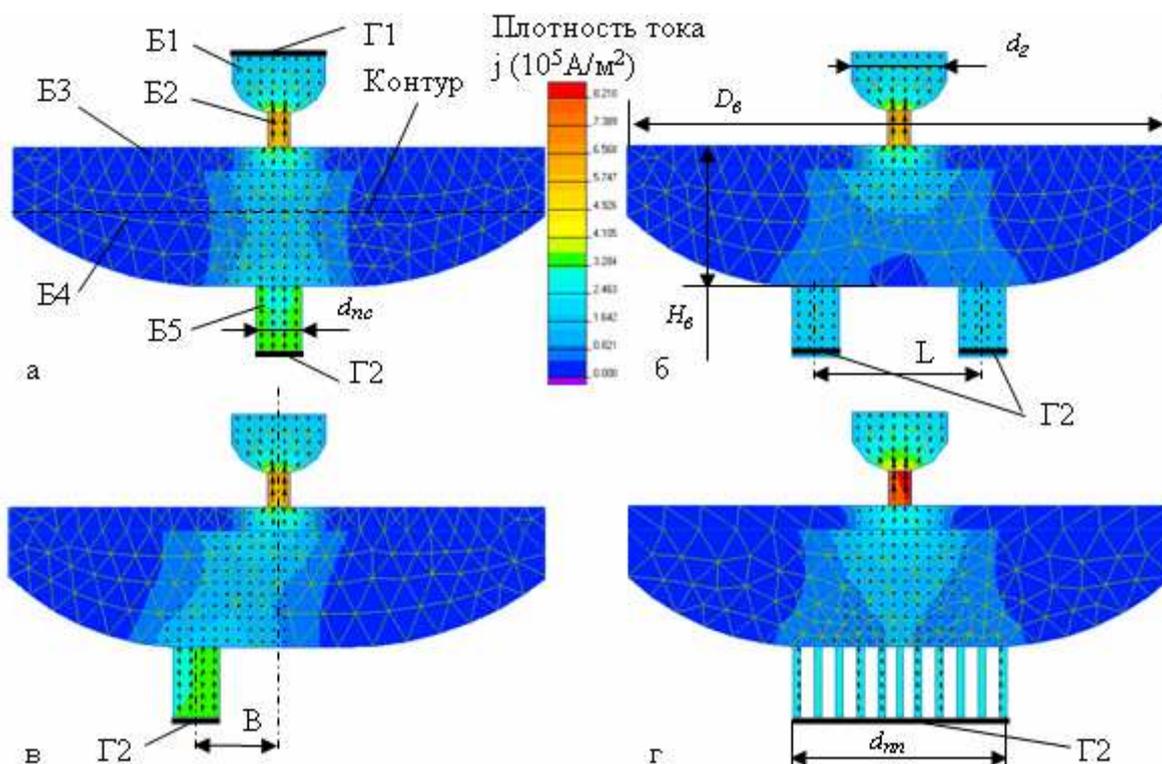


Рис. 2 – Поле плотности электрического тока в 12-тонной ДСПИТ со стандартной ванной: а – осесимметричный ПЭ стержневого типа; б – два ПЭ стержневого типа; в – смещенный ПЭ стержневого типа; г – ПЭ пластинчатого типа. Остальные обозначения – в табл. 1.

На рис. 4 представлены зависимости плотности тока от радиальной координаты на середине глубины стандартной (I) и «глубокой» (II) ванны для вариантов ПЭ а, б, в, г.

Оценка мощности перемешивания ванны при ЭВТ по (4) в зависимости от геометрических соотношений ванны и ПЭ приведены на рис. 5 для вариантов ПЭ а, б, в, г. Интегральные показатели, характеризующие ЭВТ

для рассматриваемых вариантов при их реализации (с учетом накладываемых ограничений на L, B, d_{mn}) для достижения максимальной мощности перемешивания, приведены в табл. 2.

Согласно приведенным данным максимальная плотность тока наблюдается в дуге, катодном пятне и ПЭ (рис. 2, 3). Оценка силы тока во вторичной цепи ДСППТ приводит к величине 4 – 6 кА, что соответствует практике и свидетельствует о достаточно корректном задании электропроводности сред в расчетных блоках (табл. 1). Распределение плотности тока в ванне при осесимметричном расположении ПЭ (рис. 2, а, 2 з, 3 а, 3 з.) близко к нормальному (рис. 4-1а, 4-1а, 4-1г, 4-1г) и согласуется с данными [10]. При симметричной установке второго электрода стержневого типа (рис. 2, б, 3, б) на кривой плотности тока появляются два максимума по осям ПЭ (рис. 4-1б, 4-1б). Смещение продольной оси ПЭ относительно оси симметрии ванны (рис. 2, в, 3, в) искажает картину нормального распределения и увеличивает плотность тока в ванне (рис. 4-1в, 4-1в).

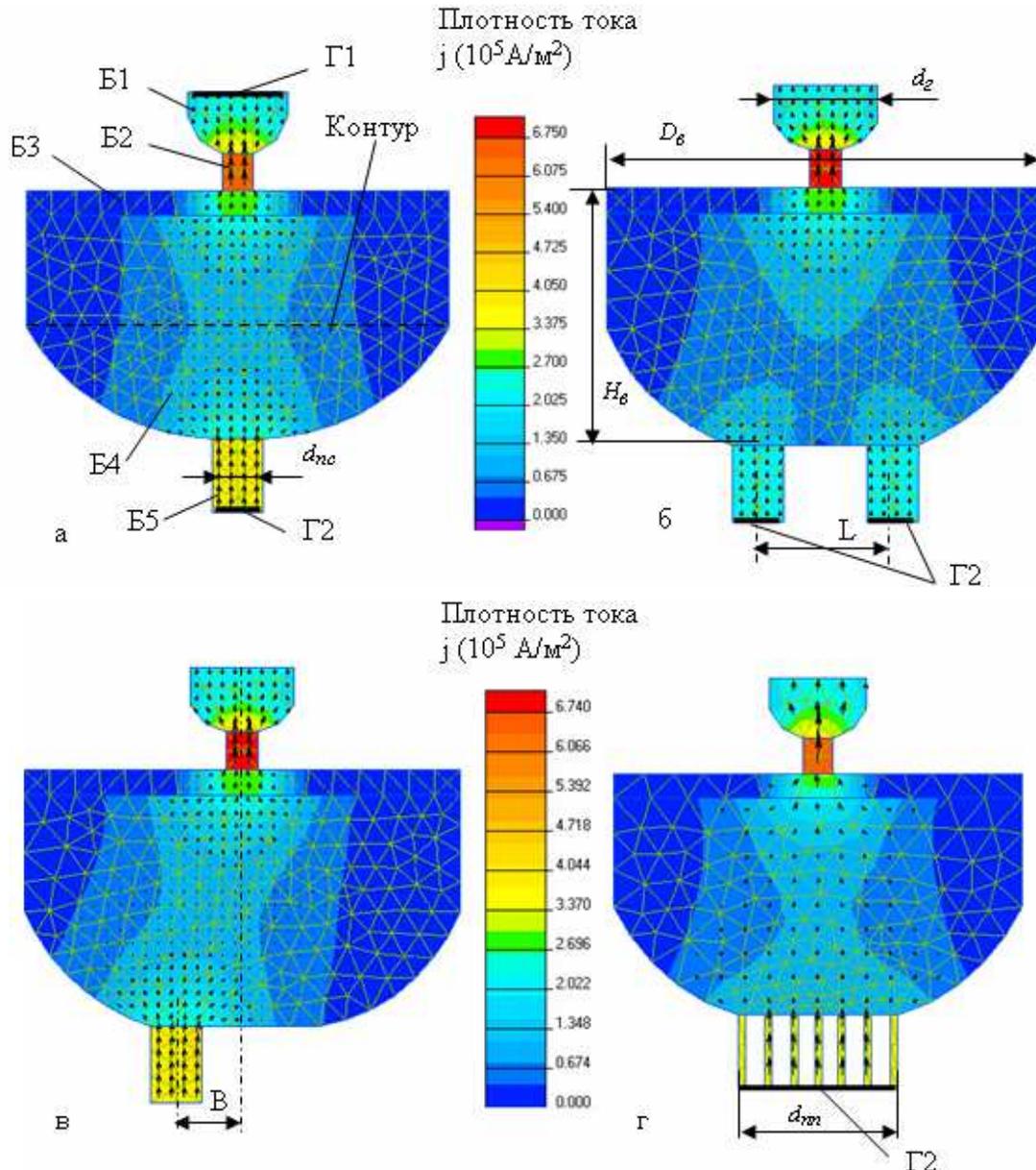


Рис. 3 – Поле плотности электрического тока в 12-тонной ДСППТ с «глубокой» ванной: а – осесимметричный ПЭ стержневого типа; б – два ПЭ стержневого типа; в – смещенный ПЭ стержневого типа; з – ПЭ пластинчатого типа. Остальные обозначения – в табл. 1.

Расчетные значения характерной скорости ЭВТ от 0,27 до 0,86 м/с (табл. 2) согласуются с данными численного и физического моделирования [10 – 13]. Мощность перемешивания при ЭВТ, оцененная для рассмотренных вариантов геометрии системы ванна – ПЭ, находится в пределах от 11 для базового варианта ПЭ в стандартной ванне до 105 Вт/т при смещенном ПЭ в «глубокой» ванне (табл. 2). По порядку величины данный показатель соответствует мощности пневматического перемешивания при продувке сталеплавильной ванны инертным газом через донную пористую пробку [21].

При переходе от стандартной ванны (рис. 2) к «глубокой» (рис. 3) все параметры ЭВТ: активный относительный объем ванны, ОЭМС, характерная скорость течения и мощность перемешивания существенно возрас-

тают для данного варианта ПЭ (табл. 2, рис. 5). Так, показатель роста $N_{ЭВТ}$ для вариантов ПЭ составляет: $a - 8,4$ раза, $b - 2,9$ раза, $в - 1,25$ раза, $г - 3,5$ раза. При существенном смещении ПЭ стержневого типа от оси симметрии печи (рис. 2, $в, 3, в$) роль глубины ванны в развитии ЭВТ уменьшается ввиду роста межэлектродного расстояния как фактора, определяющего основные характеристики ЭВТ. Однако при этом следует ожидать усиление негативного воздействия ЭВТ на футеровку вследствие приближения ПЭ к стенам ванны.

ПЭ стержневого типа в большинстве случаев обеспечивают более высокую мощность перемешивания при ЭВТ, особенно в «глубокой» ванне, чем ПЭ пластинчатого типа. Исключение составляет базовый вариант расположения ПЭ в стандартной ванне, который менее эффективен ПЭ пластинчатого типа (рис. 5, табл. 2).

Характер влияния установки второго ПЭ и смещения ПЭ стержневого типа соответствуют данным [11]. При установке двух ПЭ стержневого типа в стандартной ванне (рис. 2, б), в сравнении с базовым вариантом (рис. 2, а) существенно возрастают активный объем, и мощность перемешивания (до 3 раз), несмотря на некоторое снижение плотности тока в ванне и характерной скорости ЭВТ (рис. 4-1б, табл. 2). Смещение ПЭ в стандартной ванне представляется более эффективным, чем установка второго электрода и позволяет увеличить мощность перемешивания более чем в 8 раз в сравнении с базовым вариантом (табл. 2) за счет более высокой плотности тока в ванне (рис. 4-1в) и увеличения расстояния между ПЭ и катодом. В «глубокой» ванне преимущества схемы с двумя ПЭ и со смещенным ПЭ практически нивелируется, а наименее затратный базовый вариант расположения ПЭ обеспечивает весьма высокие результаты за счет оптимального соотношения ОЭМС, плотности тока и характерной скорости ЭВТ (табл. 2).

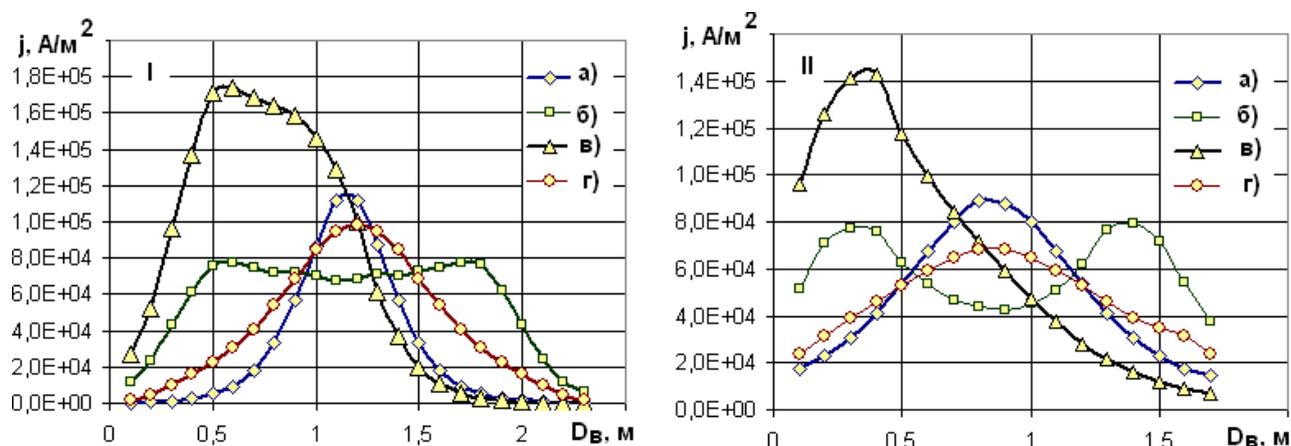


Рис. 4 – Распределение плотности тока j по диаметру ванны $D_в$ на середине глубины в стандартной (I) и «глубокой» (II) ванне. Варианты ПЭ а, б, в, г соответствуют рис. 2, рис. 3.

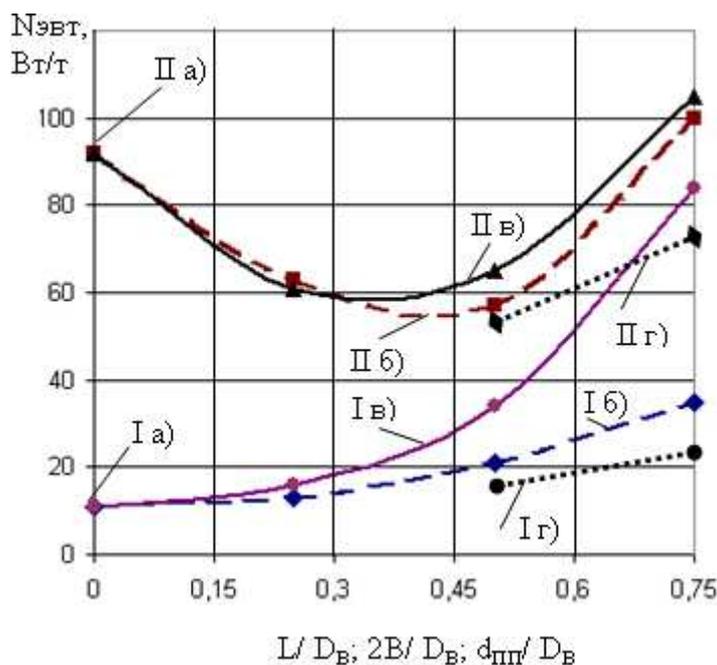


Рис. 5. Зависимость мощности перемешивания ЭВТ $N_{ЭВТ}$ в 12-тонной ДСППТ со стандартной (индекс I) и «глубокой» (индекс II) ванный от относительных параметров геометрии: шага между ПЭ стержневого типа $L/D_в$, смещения ПЭ стержневого типа $2B/D_в$ и диаметра ПЭ пластинчатого типа $d_{ПП}/D_в$. Варианты ПЭ а, б, в, г соответствуют рис. 2, рис. 3.

Продолжительность усреднения (τ_{mix} , с) жидкой стали по температуре и химическому составу (с точностью 5 % от теоретического значения, принятой в промышленности) связана с мощностью перемешивания (N , Вт/т) эмпирической зависимостью вида [22]:

$$\tau_{mix} = k \cdot N^{-0,4}, \quad (9)$$

где k – коэффициент, равный 800 для агрегата типа ковш-печь.

Таблица 2 – Расчетные средние показатели ЭВТ в ванне 12-тонной ДСППТ

Показатель, размерность.	В стандартной ванне для вариантов ПЭ (рис. 2).				В «глубокой» ванне для вариантов ПЭ (рис. 3).			
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
Плотность тока в ванне, кА/м ²	79	52	121	67	61	56	99	47
Относительный активный объем ванны, %	10,2	84,1	29,7	28,6	60,6	99,3	63,4	100
Объемная электромагнитная сила, Н	208	1472	1592	643	1391	2468	1460	1622
Характерная скорость ЭВТ в ванне, м/с	0,63	0,27	0,64	0,48	0,82	0,49	0,86	0,57
Мощность перемешивания, Вт/т	11	35	84	22	92	100	105	77

Основываясь на данных численного моделирования, в ДСППТ с «глубокой» ванной мощность перемешивания, в среднем, для рассмотренных вариантов ПЭ увеличивается в 4 раза в сравнении со стандартной ванной. При этом, согласно (9), следует ожидать сокращение периода доводки стали, которая лимитируется процессами усреднения ванны по температуре и химическому составу, в 1,7 раза. Учитывая долю данного периода в общей длительности плавки в среднем 25 %, сокращение времени плавки составит около 9 %, а экономия электроэнергии, при ее среднем удельном расходе в дуговых печах малой вместимости 850 кВтч/т, ожидается около 77 кВтч/т.

Выводы. Оценка мощности перемешивания при ЭВТ в ДСППТ малой вместимости по результатам численного моделирования растекания электрического тока в ванне позволяет обоснованно подходить к выбору геометрии ванны, типа и расположения ПЭ.

При переходе от стандартной ванны к «глубокой» в 12-тонной ДСППТ появляется возможность снижения продолжительности плавки и, соответственно, удельного расхода электроэнергии на 9 % за счет увеличения мощности перемешивания ЭВТ. В печи с «глубокой» ванной можно ограничиться установкой одного ПЭ стержневого типа по оси симметрии, что позволит дополнительно уменьшить затраты на ПЭ, потери тепла с охлаждающей водой и минимизировать локальный износ футеровки.

Если реализация «глубокой» ванны затруднена конструктивными ограничениями, для повышения энергоэффективности ДСППТ, работающей по классической технологии, целесообразно установить один ПЭ стержневого типа, смещенный от оси симметрии печи на определенное расстояние, которое является компромиссным решением с учетом локального износа футеровки.

ПЭ пластинчатого типа в ДСППТ малой вместимости, работающей по классической технологии без оставления «болота», менее энергоэффективен, чем ПЭ стержневого типа.

Список литературы

1. Lupi S. Fundamentals of Electroheat : Electrical Technologies for Process Heating // © Springer International Publishing Switzerland. – 2017. – 620 p.
2. Toulouevski Yu. N., Zinurov I. Y. Innovation in Electric Arc Furnaces. Scientific Basis for Selection. – Berlin : Springer-Verlag, 2010. – 258 p.
3. Малиновский В. С., Власова И. Б., Малиновский В. Д. Технично-економічні результати промислового освоєння дугових печей постійного тока нового покоління // Черная металлургия : Бюллетень ЦНТИ (РФ). – 2010. – № 2. – С. 26 – 40.
4. Тищенко П. И., Тищенко А. П., Тимошенко С. Н., Фридман М. А. Подовый электрод дуговой печи постоянного тока // Металлургическая и горнорудная промышленность (Украина). – 2012. – № 7. – С. 282 – 284.
5. Лопухов Г. А. Подовый электрод дуговой сталеплавильной печи постоянного тока конструкции фирмы «Danieli» // Электрометаллургия (РФ). – 2004. – № 6. – С. 48 – 51.
6. SIMETAL EAF – solutions for electric arc furnaces. – Режим доступа : <http://www.congnhe-sx.com/upload/files/SIMETAL-EAF-en.pdf>. – дата звертання : 01 серпня 2017.
7. Adachi T. The jumbo size 420-ton EAF at Tokyo Steel, Japan // MPT International. – 2012. – No. 2. – pp. 54 – 62.
8. Timoshenko S. N. Computer modeling bath geometry to improve energy efficiency of electric arc furnace // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Днепропетровск, 2016. – Вып. 3 (104). – С. 33 – 39.
9. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. – Рига : Зинатне, 1985. – 315 с.
10. Ramirez M. Modeling of a DC Electric Arc Furnace—Mixing in the Bath // ISIJ International. – 2001. – vol. 41. – No. 10. – pp. 1146 – 1155.
11. Ячиков И. М., Портнова И. В. Характер электровихревого течения металла в ванне дуговой печи постоянного тока // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований (РФ). – 2015. – № 6. – С. 422 – 426.
12. Казак О. В., Семко А. Н. Электровихревые течения в дуговых печах постоянного тока. – Донецк : Ноулидж, 2013. – 134 с.
13. Kazak O. Modeling of vortex flows in direct current electric arc furnace with different bottom electrode positions // Metallurgical and Materials Transactions B. – 2013. – vol. 44. – No. 5. – pp. 1243 – 1250.
14. Моделирование электромагнитных, тепловых и упругих полей методом конечных элементов. Версия 6.3. Руководство пользователя. – Санкт-Петербург, ООО «Тор», ELCUT®. – Режим доступа : <https://elcut.ru/demo/manual.pdf>. – Дата звертання : 01 вересня 2017.
15. Properties and characteristics of graphite. – © Poco Graphite Inc., 2015. 42p. – Режим доступа : <https://www.entegris.com/content/dam/web/resources/manuals-and-guides/manual-properties-and-characteristics-of-graphite-109441.pdf>. – Дата звертання : 01 серпня 2017.
16. Panoiu M., Panoiu C., Sora I. Modeling of three phase electric arc furnace // Acta Electrotehnica (Romania). – Vol. 48. – No. 2. – 2007. – pp. 124 – 132.

17. Jones R., Reynolds Q., Curr T., Sager D. Some myths about DC arc furnaces // Journal of Southern African Institute of Mining and Metallurgy. – Johannesburg, March 2011. – pp. 15 – 31. – Режим доступу : <http://www.mintek.co.za/Pyromet/Files/2011Jones1.pdf>. – Дата звертання : 03 серпня 2017.
18. Sorek A., Popielska-Ostrowska P., Niesler M. Research of electrical conductivity of synthetic powders // Archives of Materials Science and Engineering (Poland). – 2012. – vol. 57. – Issue 2. – pp. 53 – 56.
19. Van Zytveld J. Electrical resistivity of liquid transition metals // Journal de physique (USA). – 1980. – vol. 41. – No. 8. – pp. 503 – 506.
20. Шшишков М. М. Марочник сталей і сплавів. Справочник. – Донецк : Юго-Восток, 2002. – 456 с.
21. Ghosh A. Secondary Steelmaking. Principles and Applications. – Boca Raton – London – New York – Washington DC : CRC Press, 2000. – 344 p.
22. Nakanishi K., Fujii T., Szekely J. Possible relationship between energy dissipation and agitation in steel processing operations // Ironmaking & Steelmaking. – 1975. – No. 3. – pp. 193 – 194.

References (transliterated)

1. Lupi S. *Fundamentals of Electroheat : Electrical Technologies for Process Heating*. © Springer International Publishing Switzerland, 2017. 620 p.
2. Toulouevski Yu. N., Zinurov I. Y. *Innovation in Electric Arc Furnaces. Scientific Basis for Selection*. Berlin, Springer-Verlag Publ., 2010. 258 p.
3. Malinovskiy V. S., Vlasova I. B., Malinovskiy V. D. Tekhniko-ekonomicheskiye rezul'taty promyshlennogo osvoyeniya dugovykh pechey postoyannogo toka novogo pokoleniya [Technical and economic results of industrial development of new generation DC arc furnaces]. *Chernaya metallurgiya : Byulleten' TSNTI (Russia)* [Ferrous Metallurgy: Bulletin of the CSTI (Russia)]. 2010, no. 2, pp. 26–40.
4. Tishchenko P. I., Tishchenko A. P., Timoshenko S. N., Fridman M. A. Podovyy elektrod dugovoy pechi postoyannogo toka [Bottom electrode of DC arc furnace]. *Metallurgicheskaya i gornorudnaya promyshlennost' (Ukraina)* [Metallurgy and mining industry (Ukraine)]. 2012, no. 7, pp. 282–284.
5. Lopukhov G. A. Podovyy elektrod dugovoy staleplavil'noy pechi postoyannogo toka konstruktzii firmy "Danieli" [Bottom electrode of DC steel arc furnace by "Danieli" Company]. *Elektrometallurgiya (Russia)* [Electric metallurgy (Russia)]. 2004, no. 6, pp. 48–51.
6. SIMETAL EAF – solutions for electric arc furnaces. Available at: <http://www.congnge-sx.com/upload/files/SIMETAL-EAF-en.pdf>. (accessed 01.08. 2017)
7. Adachi T. The jumbo size 420-ton EAF at Tokyo Steel, Japan. *MPT International*. 2012, no. 2, pp. 54–62.
8. Timoshenko S. N. Computer modeling bath geometry to improve energy efficiency of electric arc furnace. *Sistemnye tekhnologii. Regional'nyy mezhdunarodnyy sbornik nauchnykh rabot* [System Technologies. Regional interuniversity collection of scientific works]. Dnipropetrovsk, Issue 3 (104), 2016, pp. 33–39.
9. Boyarevich V. V., Freyberg Y. Z., Shilova Ye. I., Shcherbinin E. V. Elektrovikhrevyye techeniya [Electro-vortex flows]. Riga, Zinatne Publ., 1985. 315 p.
10. Ramirez M. Modeling of a DC Electric Arc Furnace—Mixing in the Bath. *ISIJ International*. 2001, vol. 41, no. 10, pp. 1146–1155.
11. Yachikov I. M., Portnova I. V. Kharakter elektrovikhrevogo techeniya metalla v vanne dugovoy pechi postoyannogo toka [The nature of the vortex flow of metal in the bath of a DC arc furnace]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy (Russia)* [International journal of applied and fundamental research (Russia)]. 2015, no. 6, pp. 422–426.
12. Kazak O. V., Semko A. N. Elektrovikhrevyye techeniya v dugovykh pechakh postoyannogo toka [Electro-vortex flows in DC arc furnaces]. Donetsk, Noulidzh Publ., 2013. 134 p.
13. Kazak O. Modeling of vortex flows in direct current electric arc furnace with different bottom electrode positions. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 2013, vol. 44, no. 5, pp. 1243–1250.
14. Modeling of electromagnetic, thermal and elastic fields by the finite element method. Version 6.3. User guide. St. Petersburg, LLC "Tor" Publ., ELCUT®. Available at: <https://elcut.ru/demo/manual.pdf>. (accessed 01. 09. 2017)
15. *Properties and characteristics of graphite*. © Poco Graphite Inc. Publ., 2015. 42p. Available at: <https://www.entegris.com/content/dam/web/resources/manuals-and-guides/manual-properties-and-characteristics-of-graphite-109441.pdf>. (accessed 01. 08. 2017)
16. Panoiu M., Panoiu C., Sora I. Modeling of three phase electric arc furnace. *Acta Electrotehnica (Romania)*. 2007, vol. 48, no. 2, pp. 124–132.
17. Jones R., Reynolds Q., Curr T., Sager D. Some myths about DC arc furnaces. *Journal of Southern African Institute of Mining and Metallurgy*. Johannesburg, March 2011, pp. 15–31. Available at: <http://www.mintek.co.za/Pyromet/Files/2011Jones1.pdf>. (accessed 03. 08. 2017)
18. Sorek A., Popielska-Ostrowska P., Niesler M. Research of electrical conductivity of synthetic powders. *Archives of Materials Science and Engineering (Poland)*. 2012, vol. 57, Issue 2, pp. 53–56.
19. Van Zytveld J. Electrical resistivity of liquid transition metals. *Journal de physique (USA)*. 1980, vol. 41, no. 8, pp. 503–506.
20. Shishkov M. M. *Marochnik staley i splavov. Spravochnik* [Steels and alloys. Reference book]. Donetsk, Yugo-Vostok Publ., 2002. 456 p.
21. Ghosh A. *Secondary Steelmaking. Principles and Applications*. Boca Raton – London – New York – Washington DC, CRC Press Publ., 2000. 344 p.
22. Nakanishi K., Fujii T., Szekely J. Possible relationship between energy dissipation and agitation in steel processing operations. *Ironmaking & Steelmaking*. 1975, no. 3, pp. 193–194.

Поступила (received) 06.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання геометрії сталеплавильної ванни та подового електроду дугової печі постійного струму з метою підвищення її енергоефективності / С. М. Тимошенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 116 – 124. Бібліогр.: 22 назви. – ISSN 2222-0631.

Моделирование геометрии сталеплавильной ванны и подового электрода дуговой печи постоянного тока с целью повышения ее энергоэффективности / С. Н. Тимошенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 116 – 124. Бібліогр.: 22 назви. – ISSN 2222-0631.

Modeling geometry of steelmaking bath and bottom electrode of DC arc furnace aimed at increasing its energy efficiency / S. M. Timoshenko // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 116 – 124. Bibliog.: 22 titles. – ISSN 2222-0631.

Тимошенко Сергій Миколайович – кандидат технічних наук, докторант, Донецький національний технічний університет, м. Покровськ; тел.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

Тимошенко Сергей Николаевич – кандидат технических наук, докторант, Донецкий национальный технический университет, г. Покровск; тел.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

Timoshenko Sergii Mykolaevich – Candidate of Engineering Sciences, doctoral student, Donetsk National Technical University, Pokrovsk; tel.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

УДК 519.85; 519.7

Н. Є. ХАЦЬКО

СУЧАСНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОМПЕНСАЦІЇ ПОХИБОК ІНЕРЦІАЛЬНИХ ДАТЧИКІВ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКСПЕРИМЕНТАХ ПО КАЛІБРУВАННЮ

Розглядаються методи калібрування інерційних датчиків і математичні моделі компенсації їх помилок, що дозволяють ідентифікувати оцінки параметрів цих моделей при проведенні натурних експериментів з калібрування. Огляд проводиться за матеріалами останніх десяти років. Аналіз літератури привів до виділення універсальної математичної моделі, що використовується в більшості експериментів. Також виділені типові фактори, які зазвичай враховуються в побудові моделей і розробці планів експериментів. Отримані результати в подальшому можуть бути корисними для вибору доступного і припустимого методу калібрування окремого інерціального модуля.

Ключові слова: калібрування інерціального датчика, математична модель компенсації похибок, зсув нуля.

Рассматриваются некоторые математические модели, применяемые в последнее десятилетие для калибровки инерциальных датчиков. Внимание к математическим моделям компенсации ошибок датчиков вызвано широким применением метода алгоритмической компенсации погрешностей инерциальной системы во время ее функционирования. В статье определены несколько основных математических моделей для ошибок гироскопов и акселерометров. Анализ литературы позволил выявить факторы, на которые нужно обращать внимание при разработке математических моделей для датчиков, работающих на разных физических принципах, также привел к выделению универсальной математической модели, используемой в большинстве экспериментов. Полученные выводы могут быть использованы в дальнейшем при выборе доступного метода калибровки для отдельного инерциального модуля.

Ключевые слова: калибровка инерциального датчика, математическая модель компенсации ошибок, смещение нуля, несоосность осей датчика.

In this paper some of the mathematical models applied for calibration of inertial sensors in the last decade are considered. The attention that has been received by the mathematical models of sensor errors is mainly due to the wide application of the method of algorithmic compensation of errors in the inertial system during its operation. As a whole, calibration is limited to estimating the key errors: scale factor, offset and misalignment of the sensor axes. In the paper several basic mathematical error models of gyroscopes and accelerometers are defined. The analysis of the literature made it possible to determine the factors that must be taken into account when developing mathematical models for sensors operating on different physical principles, and also led to the identification of a universal mathematical model used in the most experiments. The main result of this review is the understanding that individual calibration of sensors, even without using precision stands, can significantly increase the accuracy of the inertial unit and is an indispensable stage of operation, especially for mass production sensors. The obtained conclusions can be used in the future when choosing an available calibration method for an individual inertial module.

Key words: calibration of the inertial sensor, mathematical model of error compensation, zero drift, sensor axes misalignments.

Вступ. Попри наявність супутникової навігації традиційне інерціальне обчислення широко використовується для отримання навігаційних параметрів рухомих об'єктів. Сталості використання сприяє те, що метод є автономним і завжди здатен з деякими припущеннями забезпечити оцінку місця розташування. Відомі недоліки цього методу, такі як потреба в налаштуванні перед кожним сеансом експлуатації та накопичування похибки системи з часом. Якщо накопичена похибка стає занадто великою, її можна скорегувати за допомогою зовнішніх допоміжних засобів, тим самим, повернутися до початкової точності роботи системи. Але, за природою числення, похибки знову будуть зростати з тією ж швидкістю, яка залежить від точності інерціальних датчиків системи – *гіроскопів* та *акселерометрів*. Якщо придушити похибки кожного окремого датчика інерційної системи, то процес накопичення помилки всієї системи сповільниться і точність її роботи підвищиться.

Серед сучасних методів підвищення точності інерціальних вимірів, разом з розвитком технології виробництва датчиків, широко застосовуються методи алгоритмічної компенсації похибок на основі математичних моделей вимірів. Такий підхід дозволяє підвищити точність роботи інерціальних датчиків без великих додаткових витрат. Відомим напрямком є алгоритмічна корекція первісної інформації з використанням фіксованих оцінок похибок датчиків та інерціального модуля в цілому. У цих методах на перший план висувається відповідність математичної моделі похибок реальним, а не теоретичним, вимірам фізичних явищ, та алгоритмам калібрування, тобто планам або послідовностям певних дій у калібрувальному експерименті для оцінки параметрів математичної моделі.

Слід зазначити, що сучасною світовою тенденцією є здешевлення виробництва та експлуатації інерційних систем. Цьому сприяє розвиток технології виробництва датчиків на мікро-електро-механічних системах (МЕМС). Вони відрізняються малими масо-габаритними характеристиками, малою вартістю і порівняно невисокою точністю вимірювань. Точність інерціальних МЕМС-датчиків пропорційна їх вартості, і дешеві датчики

мають низьку точність. Але деякі сучасні досить дорогі МЕМС-акселерометри зрівнялися по точності з механічними акселерометрами навігаційного класу точності. А точність окремих серійних МЕМС-гіроскопів наближається до точності волоконно-оптичних гіроскопів, що в даний час використовуються в аерокосмонавтиці, де досі використовувались тільки вимірювачі прецизійної точності.

Якщо говорити про більш широку область використання інерціальних датчиків, то це безсумніву малі безпілотні літальні апарати (БПЛА), де як раз МЕМС-датчики дозволили використовувати алгоритми безплатформної інерціальної навігаційної системи (БІНС) для управління їх польотом. При роботі з БПЛА часто виникає суперечлива ситуація, в якій порівняно дешеві навігаційні системи використовуються на порівняно дешевих літальних апаратах, проте їх польотні завдання часто вимагають високої точності польоту і збереження заданої траєкторії руху, що неможливо при наявній точності БІНС на МЕМС-датчиках. За умов сучасної тенденції до здешевлення інерціальних модулів та масовості їх випуску, появи нових типів датчиків виникає необхідність у розробці методів калібрування з використанням нових математичних моделей компенсації похибок гіроскопів та акселерометрів. У зв'язку з цим, українські вчені здійснюють відповідні дослідження [1] та адаптують теперішні методи калібрування до атестації «грубих» датчиків на лабораторному обладнанні низької точності.

Постановка задачі. Виходячи зі сказаного, завдання даного дослідження полягає в розгляді відомих математичних моделей похибок інерціальних датчиків з тематичних наукових інформаційних джерел. Під час вивчення матеріалів передбачається виявити найбільш поширені складові похибки інерціальних датчиків. Також, для подальшої коректної розробки моделей, необхідно приділити увагу фізичним умовам проведення експериментів і планам їх проведення.

Основні напрямки підвищення точності інерціальних вимірів. Точність інерціальної навігації залежить від декількох факторів: використаних алгоритмів обчислень (*методичні похибки*), точності інерціальних датчиків, з яких складається модуль (*інструментальні похибки*), а також ефективності алгоритмічної компенсації похибок датчиків, тобто від математичної моделі похибок, яка має як найкраще відтворювати вплив похибок.

Загалом, опубліковані методи підвищення точності можна умовно розділити на два великі напрямки:

- технологічні та конструктивні методи;
- алгоритмічні методи.

В рамках першого напрямку досліджується фізична природа виникнення спотворень вимірів для знаходження технологічних і конструктивних методів їх зменшення. Для поліпшення умов функціонування чутливих елементів при розробці і виготовленні інерціальних блоків ізолюються сторонні фізичні явища [2 – 7], оптимізуються габаритні характеристики чутливих елементів [8], вибираються способи раціонального геометричного розташування осей чутливості датчиків в просторі інерціального модуля [9, 10], і тому подібне. При дотриманні чинних технологій виробництва подальше підвищення характеристик точності датчиків можливе лише із застосуванням алгоритмічної компенсації вимірів, тому методи другої групи часто дозволяють значно поліпшити результати.

Впровадження даних методів неможливе без математичної моделі вимірів, що містить ідентифіковані похибки. В залежності від конструкції і технології виробництва датчиків похибки мають різну природу. Для кожного типу датчиків розробляється модель компенсації похибок, де враховуються всі відомі на цей час специфічні для даного типу джерела похибок вимірювань. Наприклад, модель для похибок роторного гіроскопа в [11] налічує 6 параметрів, властивих тільки наведеним авторами конструкції датчика. В [12] модель дрейфів електростатичних гіроскопів враховує нерівножорсткість карданів підвісу, напругу зсуву на електродах і так далі, що тягне ускладнення математичної моделі і ускладнює процес калібрування. У математичну модель вимірювань хвильового твердотілого гіроскопа [13] включені складові, що враховують малу анізотропію в'язкопружних властивостей конструкційного матеріалу і вектор узагальнених сил, що здійснюють рух резонатора.

Математичні моделі для похибок. Розробка математичної моделі є необхідним етапом в створенні методів алгоритмічної компенсації вимірювань. Деякі загальні математичні моделі інерціальних вимірювань закріплені в міжнародних стандартах [14 – 16]. На практиці часто використовується узагальнена модель компенсації похибок датчиків, незалежно від їх фізичної природи, яка має вигляд

$$X^{6IM} = (1 + \delta M) \cdot (A^{-1} X^* + \delta X + \xi), \quad (1)$$

де X^* – еталонне значення величини в базисній системі координат; δX – зсув нуля датчика, під яким розуміється величина вихідного сигналу при нульовому вимірюваному параметрі; δM – похибка масштабного коефіцієнта (МК), тобто похибка крутості вихідної характеристики датчика; A – матриця, яка складена з кутових параметрів неспіввісності осей чутливості датчиків з осями віртуальної ортогональної системи координат, що приймається як базисна; ξ – випадкова складова вимірювань; X^{6IM} – значення, що виміряне датчиком.

В роботі [17] опублікована узагальнена модель для представлення похибки МЕМС-датчиків у вигляді:

$$e = e_0 + \Delta K / K_0 + e_n(x) + e_\delta + n(t) + e_{\phi},$$

де x – вимірювана величина (для МЕМС-гіроскопів це складова кутової швидкості, а для МЕМС-акселерометрів це складова лінійного прискорення); e_0 – зсув нуля; $\Delta K / K_0$ – відносна похибка МК; $e_n(x)$ – складова, обумовлена нелінійністю характеристики; e_δ – динамічна похибка; $n(t)$ – шум; e_{ϕ} – ціла сукупність складових

додаткових похибок, обумовлених факторами впливу (температурою, вібрацією, магнітним полем і таке інше). Таке адитивне уявлення є зручним для першого наближення показників точності, але в ньому змішані вихідні причини появи тих чи інших складових похибок і типові особливості їх прояву.

Процес розробки моделей, що відображають фізичну суть вимірювань окремих типів датчиків, може бути складним. Особливо важко відтворити фізичну модель датчиків оптичного типу [18]. В цьому випадку використовують феноменологічну модель (1) і експериментально визначають її параметри в процесі калібрування. Похибки датчиків і, особливо, характер їх зміни досліджуються і ідентифікуються в різних умовах, відповідно запланованим умовам експлуатації. Датчики різного типу чутливі до різного набору факторів. Так, в [19 – 23] аналізується дія температурних змін; в [24, 25] розглядається вплив на датчики постійного магнітного поля; а в [26, 27] аналізується вплив вібрації. Виявлені під час експериментів фактори параметризуються і вводяться в математичну модель (1), таким чином відбувається вдосконалення її структури.

Після формування структури моделі розробляють план калібрувального експерименту, і починають процес власне калібрування, завданням якого є параметризація складових моделі та виявлення характеру їх зміни. Відповідно до [28], *калібрування* – це операція, яка за певних умов, в першу чергу, встановлює відповідність між вимірними значеннями й еталонними, вказує похибки вимірювань і, другим кроком, використовує цю інформацію для отримання уточнених результатів вимірів. Другий крок має визначальне значення для підвищення точності інерціального модуля в цілому.

Розглянемо наведені в літературі математичні моделі похибок акселерометричних датчиків.

Класичний стендовий метод калібрування прецизійних акселерометрів, які використовують для системи управління апарату "Союз-ТМА", описано в [29, 30]. Блок складається з 6 акселерометрів, вісі чутливості яких розташовані на утворювальних конуса. Для кожного з датчиків визначаються: зміщення нуля і випадкове відхилення зміщення нуля від середнього значення, МК і його нелінійність, кути нахилу осі чутливості кожного вимірювального каналу до площини перпендикулярної осі конуса. Особливістю методу є використання прямих вимірів фізичного інваріанта сили тяжіння та даних про положення оптичної голівки, на яку кріпитися блок акселерометрів. В результаті визначаються параметри моделі (1).

Другим, вже традиційним методом з використанням прямих вимірів, є, так званий, скалярний спосіб калібрування блоку акселерометрів [31 – 33]. Головна особливість цього методу полягає в застосуванні в якості еталону замість векторної величини – скалярної, а саме квадрата модуля вектору \bar{g} . Вихідний сигнал блоку акселерометрів представлено моделлю:

$$W_j = M_j \cdot (E_{0j} + V_j + E_{1j}V_j + E_{2j}V_j^2)$$

де $j = X, Y, Z$ – вісі системи координат (СК); W_j – вихідний сигнал j -го приладу; M_j – номінальна величина МК j -го приладу; V_j – проекція вимірюваного вектора на j -у вісь системи XYZ , що близька до ортогональної; $E_{(0,1,2)j}$ – коефіцієнти розкладання за ступенями вхідного сигналу, зокрема, E_{0j} – зсув нуля. Шуканий квадрат модуля вектору вимірів дорівнює сумі квадратів складових вектору \bar{W} , а похибка виміру прискорення сили тяжіння отримана як нормована різниця квадратів вимірної та еталонної величин:

$$\delta g = \frac{W_X^2 + W_Y^2 + W_Z^2 - g_X^2 - g_Y^2 - g_Z^2}{2 \cdot |\bar{g}|},$$

де g_j , $j = X, Y, Z$ – істинна відома величина вимірюваного вектора.

План проведення калібрувального експерименту в цьому методі вимагає особливої послідовності поворотів вимірювального модуля: блок обертається навколо кожної з номінальних осей координат тріади по 8 разів на 45° зі свого початкового положення. Процес калібрування має ітераційний характер і припиняється після досягнення деякого рівня точності оцінок.

Особливістю наступного методу калібрування є використання уклінно-поворотного столу з обмеженнями по куту нахилу 90° . За допомогою методу з [34] відбувається уточнення коефіцієнтів моделей похибок інерціальних датчиків, отриманих раніше. Калібрування блоку акселерометрів проводиться по прямим вимірам вектору \bar{g} і спирається на лінійну модель похибок однієї осі чутливості без урахування теплової моделі:

$$W = \frac{W_0}{1 + K_W} - dW, \quad (2)$$

де W_0 – покази акселерометра; W – проекція уявного прискорення на вісь чутливості акселерометра; K_W – стала похибка масштабного коефіцієнта; dW – сталий зсув нуля.

У порівнянні з (2), враховується проекція вектору на вісь чутливості акселерометра за виразом $W = \bar{g} \cdot \bar{a}$, де $\bar{a} = (a_X, a_Y, a_Z)^T$ – одиничний вектор визначення вісі чутливості акселерометра.

План експерименту містить дві схеми: перша – вісі чутливості акселерометрів колінеарні осям приладової системи координат; друга – головна діагональ тригранника блоку акселерометрів збігається з вертикальною віссю приладової СК. Кожна схема припускає установку блока в 4 положення з поворотами на 90° .

Калібрування блоку гіроскопів також залежить від очікуваної точності датчиків. Прецизійні датчики проходять калібрування в індивідуальному порядку, що дає можливість зафіксувати характеристики точності конкретного гіроскопа. Так у [35] калібрування трикомпонентного лазерного гіроскопа проводиться по прямим вимірам компонент кутової швидкості Землі на прецизійному одновісному поворотному столі. Приріст кута повороту навколо осі чутливості i -го датчика у момент спостереження t має вигляд:

$$\Delta\varphi_i(t) = k_i(n_i(t) - n_i(t - \Delta t)) + (\omega_i^0 + \delta\omega_i)\Delta t,$$

де Δt – такт знімання інформації; $i = 1, 2, 3$ – номер вісі чутливості; k_i – масштабний коефіцієнт i -й вісі чутливості; ω_i^0 – стала компонента зсуву нуля; $\delta\omega_i$ – випадкова компонента; n_i – поточне значення буфера реверсивного лічильника імпульсів.

В результаті калібрування визначаються: масштабний коефіцієнт k_i , стала компонента зсуву нуля ω_i^0 , елементи матриці неортогональності a_{ij} для кожної вісі чутливості.

Зазвичай процес калібрувальних випробувань дорого коштує і є тривалим, тому останнім часом з'явилися методи калібрування, що не вимагають наявності прецизійних стендів. Поширеним способом калібрування зміщення нуля гіроскопів є калібрування за допомогою реверсу. Так у [36] калібрування нуля приладів проводиться на нерухомій основі з реверсом вимірювальних осей на 180° в площині горизонту. В цьому методі застосовується *фільтр Калмана* та *метод найменших квадратів* для оцінки МК, зсуву нуля датчиків та несоосності осей, що приведені в моделі (1).

Ще одна модель застосована в [37] і описує дрейф нуля гіроскопа та має 9 складових:

$$\omega = \omega_0 + \omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z + \omega_{xy} n_x n_y + \omega_{xz} n_x n_z + \omega_{yz} n_y n_z + \omega_{yy} n_y^2 + \omega_{zz} n_z^2,$$

де ω – загальний дрейф нуля гіроскопа; ω_0 – незалежна від перенавантаження складова; $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_{xy}, \omega_{xz}, \omega_{yz}, \omega_{yy}, \omega_{zz}$ – коефіцієнти при ступенях розкладання перевантаження; n_x, n_y, n_z – відомі проекції одиничного вектору перевантаження на вісі, зв'язані з гіроскопом.

Цікаві більш складні залежності, що враховують одночасно два і більш факторів впливу. В [38] модель нульового сигналу гіроскопа враховує температуру, перевантаження і лінійний дрейф:

$$\omega = \omega_{0c} + \omega_{0t}(t) + \omega_{0w}(w) + \omega_{0T}(T) + \omega_\xi(t),$$

де ω_{0c} – постійний сигнал; ω_{0t} – дрейф гіроскопа в часі; ω_{0w} – складова, що виникає в наслідок залежності нульового сигналу від постійного прискорення; ω_{0T} – температурна складова; ω_ξ – випадкова складова (шум вихідного сигналу).

Висновки. Проведене дослідження наведених у літературі методів калібрування і математичних моделей похибок інерціальних датчиків дозволяє стверджувати, що для отримання надійних і вірогідних відомостей про характеристики точності датчиків стосовно їх використання для вирішення різних прикладних задач необхідно проведення комплексних калібрувальних випробувань.

Для розробки коректної математичної моделі похибок обраного датчика потрібно орієнтуватися на міжнародні стандарти ІЕЕЕ, але з урахуванням фізичної природи датчика. Найбільш широке поширення отримали наступні показники точності: зсув нуля або постійна складова, масштабний коефіцієнт або коефіцієнт перетворення, нелінійність, шум, прогресуючий повільний дрейф нуля.

Під час складання планів калібрувальних експериментів необхідно звернути увагу на діапазон зміни у часі кожного виду похибки або її розкид, на мінливість показника від пуску до пуску (від включення до включення), на зміну значень параметрів під час інтенсивних дій або після них (наприклад, після удару). Також розробник методу має стежити за рівнем залишкової похибки після введення поправок на систематичні складові за результатами калібрування, та знайти засіб удосконалити математичну модель для більшого корегування вимірів.

Для повноти визначення всього переліку похибок під час розробки калібрувального експерименту також потрібно враховувати, що для різних умов роботи датчика може бути потрібно застосовувати різні математичні моделі. Види фізичних умов бувають наступні: робота датчика на нерухомій основі; робота з відомим сталим значенням вимірювального інваріанта (сила тяжіння, обертання зі заданою кутовою швидкістю, тощо); робота на вібраційному стенді, ударному стенді; вплив акустичних дій, зміна температури, вплив електромагнітного поля. Цей список, як і попередні, може бути подовжено. Зокрема, список можливих впливів, на які може реагувати датчик, залежить від використаного для створення датчика фізичного явища.

Нові моделі з'являються разом зі створенням нових типів датчиків, з появою нового лабораторного устаткування, з виявленням неврахованих факторів впливу у вже наявних моделях та з необхідністю подальшого підвищення точності вимірів. Таким чином, огляд математичних моделей компенсації похибок інерціальних датчиків, що супроводжують процес калібрування, може бути подовжено.

Список літератури

1. Хацько Н. Е., Успенский В. Б. Разработка и экспериментальная проверка методики паспортизации микроакселерометра // Вісник НТУ «ХПІ». – 2009. – № 10. – С. 188 – 194.
2. Некрасов Я. А., Моисеев Н. В., Беляев Я. В. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микро-

- механического гироскопа // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 2 (93). – С. 56 – 67.
3. Евстифеев М. И., Елисеев Д. П. Оптимизация конструкции подвижного электрода микромеханического гироскопа RR – типа // Гироскопия и навигация. – 2017. – № 2 (97). – С. 66 – 76.
 4. Денисов Р. А., Маслов А. А., Маслов Д. А. Влияние опорного напряжения электромагнитных датчиков управления на дрейф волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 1 (92). – С. 60 – 71.
 5. Барулина М. А., Джашишов В. Э., Панкратов В. М. Математическая модель микромеханического акселерометра с учетом температурных воздействий, термоупругого напряженно-деформированного состояния и динамических эффектов // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1. – С. 55 – 71.
 6. Лысова О. М., Нестеренко Т. Г., Плотникова И. В. Анализ технологических погрешностей микромеханического гироскопа // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 24 – 26.
 7. Беляева Т. А., Некрасов Я. А., Беляев Я. В., Багаева С. В. Подавление квадратурной помехи в микромеханическом гироскопе RR – типа с помощью электродов, расположенных над зубцовой зоной // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1 (60). – С. 82 – 94.
 8. Федоров А. Е., Рекунов Д. А. Компенсация инструментальных погрешностей трехкомпонентного лазерного гироскопа моноблочной структуры // Материалы XVI Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – С. 42 – 47.
 9. Ковтун Д. А., Микаэлян С. В. Улучшение точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем с пространственно распределенным набором датчиков // Синергия Наук. – 2017. – № 12. – С. 754 – 767.
 10. Расповов В. Я., Матвеев В. В., Алалуев Р. В. Бортовые информационно-управляющие системы на микромеханических чувствительных элементах для беспилотных летательных аппаратов различного назначения // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 45 – 53.
 11. Биндер Я. И., Падерина Т. В. Калибровка датчиков угловой скорости с механическим носителем вектора кинетического момента в составе бесплатформенных инерциальных измерительных модулей // Гироскопия и навигация. – 2003. – № 3. – С. 3 – 16.
 12. Емельянцева Г. И., Ландау Б. Е., Левин С. Л., Романенко С. Г. Об уточнении модели дрейфов электростатических гироскопов бескарданной инерциальной системы ориентации и о методике их калибровки на стенде и в условиях орбитального космического аппарата // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1 (60). – С. 42 – 54.
 13. Мартыненко Ю. Г., Меркурьев И. В., Подалков В. В. Калибровка параметров малой вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа по результатам стендовых испытаний // Материалы XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2010. – С. 32 – 39.
 14. IEEE Std. 836-2009, IEEE Recommended Practice for Precision Centrifuge Testing of Linear Accelerometers. – 2009. 152 p.
 15. Gaitan M., Lightman K., Takacs M. MEMS Testing Standards: A Path to Continued Innovation. – Pittsburgh : MEMS Industry Group, 2011. – 154p.
 16. IEEE Std 1554-2005. IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis, 2013. 145 p.
 17. Челпанов И. Б., Козлов Д. П., Кочетков А. В. Построение комплексной системы организации калибровки микромеханических датчиков // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2016. – Т. 8. – №1. doi: 10.15862/21TVN116 – Режим доступа : <http://naukovedenie.ru/PDF-21TVN116.pdf>. – Дата звернення : 15 вересня 2017.
 18. Jiang R., Yang G., Zou R., Wang J., Li J. Accurate Compensation of Attitude Angle Error in a Dual-Axis Rotation Inertial Navigation System // Sensors. – 2017. – № 17 (3). – С. 615 – 632. doi: 10.3390/s17030615.
 19. Козлов А. В., Тарыгин И. Е., Голован А. А. Калибровка инерциальных измерительных блоков на грубых одноосных стендах: оценка коэффициентов зависимости от производной температуры // Материалы XXIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – С. 56 – 61.
 20. Возний В. В., Апостолов В. О. Вплив температури на динаміку коріоловського вібраційного гіроскопа // Матеріали VIII міжнародна науково-технічна конференція : Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки. – Київ : НТТУ «КПІ», 2011. – Ч. 1. – С. 48 – 50.
 21. Джашишов В. Э., Панкратов В. М. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. – 404 с.
 22. Ding J., Zhang J., Huang W., Chen S. Laser Gyro Temperature Compensation Using Modified RBFNN // Sensors. – 2014. – № 14 (10). – С. 18711 – 18727. doi: 10.3390/s141018711.
 23. Хацько Н. Е., Успенский В. Б., Кузнецов Ю. А. Исследование температурной зависимости дрейфа ВОГ // Радиоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2012. – № 2 (27). – С. 152 – 156.
 24. Буравлев А. С., Егоров Д. А., Лисицин Л. Г. Волоконно-оптические гироскопы в условиях постоянного магнитного поля // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 3 (62). – С. 59 – 63.
 25. Антонов М. В., Матвеева В. А. Модель погрешности волоконно-оптического гироскопа при воздействии тепловых и магнитных полей // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия : Приборостроение. – 2014. – № 3 (96). – С. 73 – 80.
 26. Liu N., Su Z., Li Q., Fu M., Liu H., Fan J. Characterization of the Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro // Sensors. – 2013. – № 13 (8). – С. 10123 – 10150. doi: 10.3390/s130810123.
 27. Румянцев Г. Н., Лобусов Е. С. Особенности функционирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем в условиях виброобстановки // Труды ФГУП НПО ЦАП. Системы и приборы управления. – 2015. – № 4. – С. 5 – 15.
 28. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). 3rd edition. JCGM, 2012. – 127 p.
 29. Бранец В. Н., Калихман Л. Я., Полушкин А. В. Измеритель вектора кажущегося линейного ускорения – прибор БИЛУ КХ69-042 для СУ спускаемого аппарата «Союз-ТМА» // Материалы XIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2006. – С. 253 – 263.
 30. Бранец В. Н., Дибров Д. Н., Рыжков В. С. Методика аттестации блока измерения линейного ускорения с неортогональной ориентацией осей чувствительности шести кварцевых маятниковых акселерометров и методика аттестации рабочих мест для контроля блока акселерометров // Материалы XIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2006. – С. 226 – 232.
 31. Болотин Ю. В., Деревянкин А. В., Матасов А. И. Итерационная схема калибровки акселерометров при помощи гарантирующего подхода // Механика твердого тела. – М. : Известия РАН, 2008. – № 4. – С. 48 – 61.
 32. Измайлов Е. А., Лене С. Н., Молчанов А. В., Поликовский Е. Ф. Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 145 – 154.
 33. Корюкин М. С. Пат. 2477864 Российская Федерация. Способ калибровки инерциального измерительного модуля по каналу акселерометров. – 2011.
 34. Лакоза С. Л., Мелешко В. В. Скалярная калибровка акселерометров низкой и средней точности // Радиооптика. – 2015. – № 1. – С. 9 – 28. doi: 10.7463/rdopt.0115.0779996.

35. Калихман Д. М., Калихман Л. Я., Садомцев Ю. В. Универсальный стенд с цифровой системой управления для контроля измерителей угловой скорости различного принципа действия // Материалы XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. – СПб. : ГИЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2010. – С. 147 – 154.
36. Jorgensen M. J., Pascagnan D., Poulsen N. K., Larsen M. B. IMU calibration and validation in a factory, remove on land at sea // IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. – 2014. – С. 1384 – 1391. doi: 10.1109/PLANS.2014.6851514.
37. Егоров Ю. Г. Патент 2121134 Российская Федерация. Способ калибровки гироскопов. – 1998.
38. Головатий А. О. Моделювання впливу коливань кутової швидкості і температури на динамічні характеристики мікромеханічного гіроскопа камерного типу // Вісник НУ "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2008. – № 629. – С. 58 – 65.

References (transliterated)

1. Khats'ko N. E., Uspenskiy V. B. Razrabotka i eksperimental'naya proverka metodiki pasportizatsii mikroakselometra [Development and experimental verification of methodology of certification of micro accelerometer]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU «KhPI»]. 2009, no. 10, pp. 188–194.
2. Nekrasov Ya. A., Moiseev N. V., Belyaev Ya. V. Vliyanie postupatel'nykh vibratsiy, udarov i akusticheskikh pomekh na kharakteristiki mikromekhanicheskogo giroskopa [The effect of translational vibrations, shocks and acoustic noise on the characteristics of a micromechanical gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2016, no. 2 (93), pp. 56–67.
3. Evstifeev M. I., Eliseev D. P. Optimizatsiya konstruktсии podvizhnogo elektroda mikromekhanicheskogo giroskopa RR – tipa [Optimization of the construction of a movable electrode of a RR type micromechanical gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2017, no. 2 (97), pp. 66–76.
4. Denisov R. A., Maslov A. A., Maslov D. A. Vliyanie opornogo napryazheniya elektromagnitnykh datchikov upravleniya na dreyf volnovogo tverdotel'nogo giroskopa [The influence of the reference voltage of electromagnetic control sensors on the drift of the wave solid-state gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2016, no. (92), pp. 60–71.
5. Barulina M. A., Dzhashitov V. E., Pankratov V. M. Matematicheskaya model' mikromekhanicheskogo akselerometra s uchedom temperaturnykh vozdeystviy, termouprugogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i dinamicheskikh effektov [Mathematical model of micromechanical accelerometer with allowance for temperature effects, thermoelastic stress-strain state and dynamic effects]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1, pp. 55–71.
6. Lysova O. M., Nesterenko T. G., Plotnikova I. V. Analiz tekhnologicheskikh pogreshnostey mikromekhanicheskogo giroskopa [Analysis of technological errors of a micromechanical gyroscope]. *XV Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 24 – 26.
7. Belyaeva T. A., Nekrasov Ya. A., Belyaev Ya. V., Bagaeva S. V. Podavlenie kvadraturnoy pomekhi v mikromekhanicheskom giroskope RR – tipa s pomoschyu elektrodov, raspolozhennykh nad zubtsovoy zonoj [Suppression of quadrature interference in an RR type micromechanical gyroscope by means of electrodes located above the tooth zone]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1 (60), pp. 82–94.
8. Fedorov A. E., Rekunov D. A. Kompensatsiya instrumental'nykh pogreshnostey trekhkomponentnogo lazernogo giroskopa monoblochnoy strukturyi [Compensation of instrumental errors of a three-component laser gyroscope of a monoblock structure]. *Materialy XVI Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2009, pp. 42–47.
9. Kovtun D. A., Mikaelyan S. V. Uluchshenie tochnosti besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem s prostranstvenno raspredelennym naborom datchikov [Improving the accuracy of the freeform inertial navigation systems by a spatially distributed set of sensors]. *Sinergiya Nauk* [Synergy of Sciences]. 2017, no. 12, pp. 754–767.
10. Raspopov V. Ya., Matveev V. V., Alaluev R. V. Bortovye informatsionno-upravlyayushchie sistemy na mikromekhanicheskikh chuvstvitel'nykh elementakh dlya bespilotnykh letatel'nykh apparatov razlichnogo naznacheniya. [Onboard information-control systems on micromechanical sensors for unmanned aerial vehicles for various purposes]. *Sbornik materialov yubileynoy XV Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 45–53.
11. Binder Ya. I., Paderina T. V. Kalibrovka datchikov uglovoj skorosti s mekhanicheskim nositelem vektora kineticheskogo momenta v sostave besplatformennykh inertsiyal'nykh izmeritel'nykh modulej [Calibration of angular velocity sensors with a mechanical carrier of the angular momentum vector which are parts of inertial measuring modules]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2003, no. 3, pp. 3–16.
12. Emel'yantsev G. I., Landau B. E., Levin S. L., Romanenko S. G. Ob utochnenii modeli dreyfov elektrosticheskikh giroskopov beskardannoy inertsiyal'noy sistemy orientatsii i o metodike ikh kalibrovki na stende i v usloviyakh orbital'nogo kosmicheskogo apparata [On the refinement of the model of the drifts of electrostatic gyroscopes of a non-carded inertial orientation system and on the method of their calibration on the bench and in the conditions of the orbital spacecraft]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1 (60), pp. 42–54.
13. Martynenko Yu. G., Merkur'ev I. V., Podalkov V. V. Kalibrovka parametrov maloy vyzkouprugoy anizotropii rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskopa po rezul'tatam stendovykh ispytaniy [Calibration of parameters of a small viscoelastic anisotropy of a resonator of a wave solid-state gyroscope according to the results of bench tests]. *Materialy XVII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2010, pp. 32–39.
14. IEEE Std. 836-2009, IEEE Recommended Practice for Precision Centrifuge Testing of Linear Accelerometers. 2009, 152 p.
15. Gaitan M., Lightman K., Takacs M. *MEMS Testing Standards: A Path to Continued Innovation*. Pittsburgh, MEMS Industry Group Publ., 2011. 154 p.
16. IEEE Std 1554-2005. IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis, 2013. 145 p.
17. Chelpanov I. B., Kozlov D. P., Kochetkov A. V. Postroenie kompleksnoy sistemy organizatsii kalibrovki mikromekhanicheskikh datchikov [Construction of an integrated system for organizing the calibration of micromechanical sensors]. *Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE»* [Internet-Journal "NAUKOVEDENIE"]. 2016, vol. 8, no. 1. Available at : <http://naukovedenie.ru/PDF/21TVN116.pdf>. doi: 10.15862/21TVN116. (accessed 15.09.2017)
18. Jiang R, Yang G, Zou R, Wang J, Li J. Accurate Compensation of Attitude Angle Error in a Dual-Axis Rotation Inertial Navigation System. *Sensors*. 2017, no. 17 (3), pp. 615–632. doi: 10.3390/s17030615.
19. Kozlov A. V., Tarygin I. E., Golovan A. A. Kalibrovka inertsiyal'nykh izmeritel'nykh blokov na grubykh odnoosnykh standakh: otsenka koeffitsientov zavisimosti ot proizvodnoy temperatury [Calibration of inertial measuring units on coarse uniaxial stands: estimation of coefficients of dependence on the derivative temperature]. *Materialy XXIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [23th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2016, pp. 56–61.
20. Voznyy V. V., Apostolyuk V. O. Vplyv temperatury na dynamiku koriolisovogo vibratsiynogo giroskopa [Influence of the temperature on the

- dynamics of coriolis vibration gyroscope]. *Materialy VIII mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiyi : girotehnologii, navigatsiya, keruvannya rukhom ta konstruyuvannya aviatsiyno-kosmichnoyi tekhniki* [Materials of the VIII international n.t. conference: Gyrotechnology, navigation, traffic management and design of aviation and space technology]. Kyiv, NTU «KhPI» Publ., 2011, vol. 1, pp. 48 – 50.
21. Dzhashitov V. E., Pankratov V. M. *Datchiki, pribory i sistemy aviakosmicheskogo i morskogo priborostroeniya v usloviyakh teplovykh vozdeystviy* [Sensors, instruments and systems for aerospace and marine instrumentation in conditions of thermal]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2005. 404 p.
 22. Ding J., Zhang J., Huang W., Chen S. Laser Gyro Temperature Compensation Using Modified RBFNN. *Sensors*. 2014, no. 14 (10), pp. 18711–18727. doi: 10.3390/s141018711.
 23. Khats'ko N. E., Uspenskiy V. B., Kuznetsov Yu. A. Issledovanie temperaturnoy zavisimosti dreyfa VOG [Investigation of the temperature dependence of the drift of FOG]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnya* [Radioelectronics, informatics, control]. Zaporizhzhia, ZNTU Publ., 2012, no. 2 (27), pp. 152–156.
 24. Buravlev A. S., Egorov D. A., Lisitsin L. G. Volokonno-opticheskie giroskopy v usloviyakh postoyannogo magnitnogo polya [Fiber Optic Gyroscopes in a Constant Magnetic Field]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 3 (62), pp. 59–63.
 25. Antonov M. V., Matveeva V. A. Model' pogreshnosti volokonno-opticheskogo giroskopa pri vozdeystvii teplovykh i magnitnykh poley [Model of the error of a fiber-optic gyroscope under the influence of thermal and magnetic fields]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya : Priborostroenie* [Bulletin of the N. Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrumentation]. 2014, no. 3 (96), pp. 73–80.
 26. Liu N., Su Z., Li Q., Fu M., Liu H., Fan J. Characterization of the Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro. *Sensors*. 2013, no. 13 (8), pp. 10123–10150. doi: 10.3390/s130810123.
 27. Rumyantsev G. N., Lobusov E. S. Osobennosti funktsionirovaniya besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem v usloviyakh vibroobstanovki [Features of the functioning of free-of-charge inertial navigation systems in vibration conditions]. *Trudy FGUP NPTsAP. Sistemy i pribory upravleniya* [Works of Academic Pilygin Center. Systems and control devices]. 2015, no. 4, pp. 5–15.
 28. *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*. 3rd edition. JCGM, 2012. 127 p.
 29. Branets V. N., Kalikhman L. Ya., Polushkin A. V. Izmeritel' vektora kazhushchegosya lineynogo uskoreniya – pribor BILU KH69-042 dlya SU spuskaemogo apparata «Soyuz-TMA» [The meter of the apparent linear acceleration vector – the BILU KX69-042 device for the Soyuz-TMA space capsule]. *Materialy XIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XIII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2006, pp. 253–263.
 30. Branets V. N., Dibrov D. N., Ryzhkov V. S. Metodika attestatsii bloka izmereniya lineynogo uskoreniya s neortogonal'noy orientatsiyei osey chuvstvitel'nosti shesti kvartsevykh mayatnikovyykh akselerometrov i metodika attestatsii rabochikh mest dlya kontrolya bloka akselerometrov [The method of attestation of the linear acceleration measuring unit with non-orthogonal orientation of the sensitivity axes of six quartz pendulum accelerometers and the technique of attestation of the workplaces for the accelerometer unit control]. *Materialy XIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XIII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2006, pp. 226–232.
 31. Bolotin Yu. V., Derevyankin A. V., Matasov A. I. Iteratsionnaya skhema kalibrovki akselerometrov pri pomoschi garantiruyushchego podkhoda [Iterative Scheme for Accelerometer Calibration by a Guarantee Approach]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of solid]. Moscow, Izvestiya RAN Publ., 2008, no. 4, pp. 48–61.
 32. Izmaylov E. A., Lepe S. N., Molchanov A. V., Polikovskiy E. F. Skalyarnyy sposob kalibrovki i balansirovki besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem [Scalar method of calibration and balancing of free-of-charge inertial navigation systems]. *Materialy XV Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XV St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 145–154.
 33. Koryukin M. S. *Sposob kalibrovki inertsiyal'nogo izmeritel'nogo modulya po kanalu akselerometrov* [Method of calibration of the inertial measuring module along the accelerometer channel]. Patent RF, no. 2477864, 2011.
 34. Lakoza S. L., Meleshko V. V. Skalyarnaya kalibrovka akselerometrov nizkoy i sredney tochnosti [Scalar calibration of low and medium accuracy accelerometers]. *Radiooptika* [Radiooptics]. 2015, no. 1, pp. 9–28. doi: 10.7463/rdopt.0115.0779996.
 35. Kalikhman D. M., Kalikhman L. Ya., Sadomtsev Yu. V. Universal'nyy stend s tsifrovoy sistemoy upravleniya dlya kontrolya izmeriteley uglovy skorosti razlichnogo printsipa deystviya [Universal stand with digital control system for monitoring angular velocity meters with different principle of operation]. *Materialy XVII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam. Sbornik materialov* [Proceedings of the XVII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2010, pp. 147–154.
 36. Jorgensen M. J., Paccagnan D., Poulsen N. K., Larsen M. B. IMU calibration and validation in a factory, remove on land at sea. *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*. 2014, pp. 1384–1391. doi: 10.1109/PLANS.2014.6851514.
 37. Egorov Yu. G. *Sposob kalibrovki giroskopov* [Method of calibration of gyroscopes]. Patent RF, no. 2121134, 1998.
 38. Golovatyy A. O. Modelyuvannya vplyvu kolyvan' kutovoyi shvydkosti i temperatury na dynamichni kharakterystyky mikromekhanichnogo giroskopa kamertonnoho typu [Modelling the influence of the angular velocity fluctuations and the temperature on the dynamical characteristics of a chamber type micro mechanical gyroscope]. *Visnyk NU "Lviv's'ka politekhnika": Komp'yuterni nauky ta informatsiyni tekhnologii* [Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic": Computer sciences and Information Technologies]. Lviv, NU "Lviv's'ka politekhnika" Publ., 2008, no. 629, pp. 58–65.

Надійшла (received) 26.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Сучасні математичні моделі компенсації похибок інерціальних датчиків для застосування в експериментах по калібруванню / Н. Є. Хацько // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 124 – 131. Бібліогр.: 38 назв. – ISSN 2222-0631.

Современные математические модели компенсации ошибок инерциальных датчиков, применяющиеся при их калибровке / Н. Е. Хацько // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 124 – 131. Бібліогр.: 38 назв. – ISSN 2222-0631.

Modern mathematical models of error compensation for inertial sensor used in their calibration / N. E. Khatsko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 124 – 131. Bibliogr.: 38 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хацько Наталія Євгенівна – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

Хацько Наталья Евгеньевна – кандидат технических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

Khatsko Natalia Evgenievna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

УДК 539.3

Е. Г. ЯНЮТИН, Н. И. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ**ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ШЛЕМИЛЬХА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ**

На основі теорії рядів Шльомільха та операційного числення запропоновано підхід до аналізу нестационарних коливань мембрани, викликаних кінематичними збуреннями. Він дозволяє знайти коефіцієнти в відповідних розвиненнях шуканих функцій, що описують коливання мембран у випадку вісесиметричних кінематичних навантажень. Зазначений підхід використовує інтегральне перетворення Лапласа у часі в процесі пошуку згаданих коефіцієнтів. Наведені приклади визначення поведінки мембрани в результаті різних початкових умов, які приєднані до рівняння нормальних (по відношенню до площини мембрани) переміщень точок на мембрані.

Ключові слова: мембрана, коливання, ряди Шльомільха, операційне числення.

На основе теории рядов Шлемильха и операционного исчисления предложен подход к анализу нестационарных колебаний мембраны, вызванных кинематическими возмущениями. Он позволяет определить коэффициенты в соответствующих разложениях искомым функций, которые описывают колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических нагружений. Указанный подход использует интегральное преобразование Лапласа во времени в процессе поиска упомянутых коэффициентов. Приведены примеры определения поведения мембраны в результате различных начальных условий, которые присоединены к уравнению нормальных (по отношению к плоскости мембраны) перемещений точек на мембране.

Ключевые слова: мембрана, колебания, ряды Шлемильха, операционное исчисление.

Based on the Schlömilch series theory and operational calculus an approach to the analysis of non-stationary vibrations of a membrane caused by kinematic perturbations is proposed. It allows to determine the coefficients in the corresponding expansions of the unknown functions, which describe the vibrations of the membrane in the case of axisymmetric kinematic loadings. This approach uses the integral Laplace transformations in time in the process of searching for the mentioned coefficients. Examples of determining the behavior of the membrane as a result of various initial conditions that are attached to the equation of normal (with respect to the plane of the membrane) displacements of points on the membrane are given.

Key words: membrane, vibrations, Schlömilch series, operational calculus.

Введение и краткое описание рядов Шлемильха. Задачи об осесимметричных колебаниях круглых в плане мембран, пластин и пологих сферических оболочек исследованы очень хорошо. Имеется набор способов решения прямых задач для таких объектов и так называемых обратных задач. Описание этих задач отражено, например, в монографиях [1, 2] и многочисленных статьях. Для решения задач такого рода, как правило, применяется теория рядов Фурье – Бесселя и Дини. В случае рассмотрения пластин и пологих сферических оболочек можно вводить дополнительные (неизвестные) нагрузки, обеспечивающие удовлетворение полного набора граничных условий на их торцах. При решении задачи о колебаниях неограниченной мембраны используется в [3] метод интегральных преобразований (Лапласа и Ханкеля).

К теории рядов Фурье – Бесселя примыкает теория рядов Шлемильха вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx)$, у которых x – вещественная переменная, аргумент у бесселевых функций пропорционален номеру членов, величины a_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) – числовые коэффициенты. Свойства рядов Шлемильха описаны, например, в [4].

Автор работы [4] Г. Н. Ватсон пишет: "Ряды этого типа были впервые исследованы Шлемильхом. Для физика они не имеют такого значения, как ряды Фурье – Бесселя, хотя как показал Релей (ссылка на соответствующую работу 1911 года), они естественно возникают при исследовании периодического поперечного колебания двумерной мембраны, если это колебание складывается из бесконечного множества одинаковых одномерных поперечных колебаний, равномерно распределенных по обоим направлениям мембраны".

Укажем, что в настоящем исследовании предпринята попытка анализа нестационарных колебаний в полярной системе координат для области мембраны в случае ее осесимметричных колебаний, причем исследование основывается на использовании разложений искомым функций в ряды Шлемильха.

В работе [4] изложена основная теорема рядов Шлемильха, суть которой содержится в следующем. Функция $\varphi(x)$, которая задана при $0 \leq x \leq \pi$, допускает разложение в ряд

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx), \tag{1}$$

где $a_0 = 2\varphi(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} u \varphi'(u \sin \varphi) d\varphi du$; $a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} u \varphi'(u \sin \varphi) \cos mu d\varphi du$.

При этом требуется, чтобы $\varphi'(x)$ была непрерывна и имела ограниченное полное изменение при $0 \leq x \leq \pi$.

Коэффициенты в формуле (1) можно записать в виде

$$a_0 = 2\varphi(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi du;$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos mu \int_0^1 \frac{\varphi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi du. \tag{2}$$

Постановка задачи. Рассматриваем нестационарные осесимметричные колебания неограниченной мембраны, а точнее – ее части, ограниченной окружностью с радиусом R_0 . Исследование будем осуществлять в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром указанной окружности.

Осесимметричные колебания мембраны описываются уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \tag{3}$$

где u – перемещения точки мембраны в поперечном направлении по отношению к плоскости мембраны (эта функция зависит от двух переменных r и t); r – размерная переменная в полярной системе координат; t – размерное время; a – скорость распространения волн колебаний ($a = \sqrt{T/\rho}$); T – поверхностное натяжение мембраны; ρ – поверхностная плотность материала мембраны; $\Delta(\)$ – оператор Лапласа, который в полярной

системе координат для осесимметричного случая имеет вид $\Delta(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\)}{\partial r}$.

Введем безразмерные переменные $x = \pi r/R_0$, $\tau = bt$, где $b = a\pi/R_0$.

Уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

К одномерному уравнению (4) присоединим начальные условия – значения перемещений и скоростей точек мембраны в момент времени $\tau = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$:

$$u(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial \tau} = F(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ являются заданными функциями, удовлетворяющими условиям возможности их разложения в ряды Шлемильха по переменной x . Указанная теорема для рядов Шлемильха гарантирует единственность разложения функций на интервале $0 \leq x \leq \pi$. Для значений $x > \pi$ разложения функций в ряды Шлемильха на основе формул (1) – (3), в принципе, не определены [4], хотя соответствующие ряды на этом интервале могут быть сходящимися. Поэтому необходимо более подробно описать область применения намечаемых к получению решений.

Заметим также, что, если функции, которые входят в (5), не удовлетворяют условиям основной теоремы теории рядов Шлемильха, то возможны серьезные осложнения при построении решений задачи, определяемой соотношениями (4), (5).

Пусть x^* – некоторая точка на мембране, причем $x^* \in (0, \pi)$. Поскольку в случае моделирования на основе уравнения (4) колебательный процесс распространяется с конечной скоростью (уравнение (4) гиперболично), и неизвестно какие функции будут формироваться рядами Шлемильха при $x > \pi$, то намечаемое решение, соответствующее выбранной точке x^* , должно быть справедливым лишь для моментов времени, удовлетворяющих условиям $0 \leq \tau \leq \pi - x^*$. Если, например, волновой процесс колебаний распространяется от некоторой области, прилегающей к началу системы координат ($x = 0$), вдоль мембраны, то решение будет справедливым для всех точек мембраны $0 \leq x < \pi$. В точке $x = \pi$ может начать формироваться условно отраженная волна колебаний, которая будет распространяться к началу координат. Эта волна колебаний порождается начальными условиями неизвестного вида, которые отвечают рядам Шлемильха при $x > \pi$. Решение в этом случае считаем не корректным.

Способ решения задачи. Решение уравнения (4) будем записывать в виде

$$u(x, \tau) = \frac{b_0(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\tau) J_0(mx). \quad (6)$$

Начальные условия (5), как это уже отмечалось, являются заданными при $0 \leq x \leq \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0^f}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^f J_0(mx); \quad F(x) = \frac{a_0^F}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^F J_0(mx). \quad (7)$$

Подчеркнем, что в (7) разложение в ряды Шлемильха функций $f(x)$ и $F(x)$ формально уже произведено, то есть в (7) a_0^f , a_0^F , a_m^f , a_m^F предполагаются заданными числами.

Осуществляется подстановка разложения (6) в уравнение (4).

В результате несложных преобразований с учетом формы уравнения Бесселя для функции $J_0(x)$, а именно $-y'' + 1/x \cdot y' + y = 0$, получим

$$\frac{\ddot{b}_0(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [\ddot{b}_m(\tau) + m^2 b_m(\tau)] J_0(mx) = 0. \quad (8)$$

Соотношение (8) для неизвестных величин $b_m(\tau)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) будет удовлетворяться, если принять, что

$$\ddot{b}_0(\tau) = 0; \quad \ddot{b}_m(\tau) + m^2 b_m(\tau) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Уравнения (9) представляют собой несвязанную систему уравнений для величины $b_m(\tau)$.

Получить решения уравнений для функций времени $b_m(\tau)$ элементарно, если принять, что

$$b_0(0) = a_0^f; \quad \dot{b}_0(0) = a_0^F; \quad b_m(0) = a_m^f; \quad \dot{b}_m(0) = a_m^F. \quad (10)$$

Правые части у всех выражений (10) суть коэффициенты разложений, входящих в (7).

Построить решение уравнений (9) с начальными условиями (10) можно с использованием преобразования Лапласа [6] или каким-либо другим способом. Будем предполагать, что $B_m^L(s) \rightarrow b_m(\tau)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). С использованием стандартных правил операционного исчисления можно записать на основе уравнений (9), что

$$B_0^L(s) = \frac{a_0^f}{s} + \frac{a_0^F}{s^2}; \quad B_m^L(s) = \frac{sa_m^f}{s^2 + m^2} + \frac{a_m^F}{s^2 + m^2}. \quad (11)$$

В пространстве оригиналов соотношения (11) запишутся следующим образом:

$$b_0(\tau) = a_0^f H(\tau) + a_0^F \tau; \quad b_m(\tau) = a_m^f \cos(m\tau) + a_m^F \sin(m\tau)/m, \quad (12)$$

где $\tau \geq 0$, $H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда.

Далее рассмотрим несколько примеров.

Пример первый. Пусть функция $F(x) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq \pi$. Функция $f(x)$, входящая в начальные условия, должна быть функцией, у которой $f'(x)$ непрерывна. Будем для простоты предполагать, что $f(x) = \text{const} = u_0$, где u_0 – величина, имеющая размерность длины ($[u_0] = \text{м}$). Легко увидеть, что на основе (2) $a_0^F = a_m^F = 0$. Величины $a_m^f = 0$, если $m = 1, 2, 3, \dots$, а $a_0^f = 2u_0$. Следовательно $b_0(\tau) = 2u_0 H(\tau)$. Значит $u(x, \tau) = u_0 H(\tau)$. Указанное относится, в принципе, также для $0 \leq x \leq \pi$. Однако, полученный результат, по-видимому, справедлив и для всех положительных значений x , в том числе и при $x > \pi$ ($r > R_0$).

Пример второй. Пусть функция $F(x) \equiv 0$ (в начальный момент времени в области мембраны $0 \leq x \leq \pi$ нормальные скорости точек отсутствуют). А функция $f(x)$ есть функция, у которой непрерывна первая производная при $0 \leq x \leq \pi$. В этом случае $a_0^F = a_m^F = 0$, а величины a_m^f ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) вычисляются по формулам (2).

Примем, что $f(x) = u_0 x$, где $[u_0] = \text{м}$ при $0 \leq x \leq \pi$. Формулы (2) могут быть записаны в более простом виде

$$a_0^f = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\pi} u \int_0^1 \frac{d\xi du}{\sqrt{1-\xi^2}}; \quad a_m^f = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos mu \int_0^1 \frac{d\xi du}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (13)$$

Легко понять, что величина a_0^f , вычисленная на основе первой формулы из (13), будет равна $u_0 \pi^2/2$, то есть $a_0^f = u_0 \pi^2/2$.

Интеграл в (13) по переменной u вычисляется с помощью интегрирования по частям. Подробнее

$$a_m^f = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos mudu \arcsin \xi \Big|_0^1 = u_0 \int_0^{\pi} u \cos mudu.$$

В результате выполнения операции интегрирования получим

$$u(x, \tau) = \frac{\pi^2}{4} u_0 + u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} ((-1)^m - 1) \cos m \tau J_0(mx). \quad (14)$$

Приведенную формулу (14) можно рассматривать как окончательную для вычисления перемещений точек мембраны с переменными x, τ .

В работе [7] приводятся формулы для сумм следующих тригонометрических рядов:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m \tau}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi \tau}{2} + \frac{\tau^2}{4}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi; \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m \tau}{m^2} (-1)^{m-1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\tau^2}{4}, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi. \quad (15)$$

На основе формул (14), (15) можно получить, что

$$u(0, \tau) = u_0 \frac{\pi}{2} \tau. \quad (16)$$

В точке, отвечающей началу системы координат, наблюдается равномерное перемещение во времени со скоростью $\partial u(0, \tau) / \partial \tau = u_0 \cdot \pi / 2$. Укажем, что здесь размерность скорости точки не равна м/с, поскольку переменная τ , по которой вычисляется первая производная от перемещения, безразмерная. Полученный результат можно проверить следующим образом. Примем, что в уравнении (4) $0 \leq x < +\infty$. Рассмотрим это уравнение в пространстве – *трансформант по Ханкелю* [8]. Примем, что

$$u^H(\lambda, \tau) = \int_0^{\infty} x u(x, \tau) J_0(\lambda x) dx. \quad (17)$$

Уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 u^H(\lambda, \tau)}{d\tau^2} + \lambda^2 u^H(\lambda, \tau) = 0. \quad (18)$$

К приведенному уравнению (18) необходимо присоединить два соотношения, вытекающие из условий (5), а именно

$$u^H(\lambda, 0) = f^H(\lambda); \quad \frac{du^H(\lambda, 0)}{d\tau} = F^H(x). \quad (19)$$

В конкретном случае при $f(x) = u_0 x, F(x) = 0$ будем иметь

$$u^H(\lambda, 0) = u_0 \int_0^{\infty} x^2 J_0(\lambda x) dx; \quad \frac{du^H(\lambda, 0)}{d\tau} = 0. \quad (20)$$

В работе [7] приводится значение следующего интеграла

$$\int_0^{\infty} x^\mu J_\nu(ax) dx = 2^\mu a^{-\mu-1} \frac{\Gamma(1/2 + 1/2 \cdot \nu + 1/2 \cdot \mu)}{\Gamma(1/2 + 1/2 \cdot \nu - 1/2 \cdot \mu)}, \quad (21)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция аргумента z .

В рассматриваемом случае ($\mu = 2, \nu = 0$) для величины $u^H(\lambda, \tau)$ из уравнения (18) и найденного выражения (21) получается формула такого вида:

$$u^H(\lambda, \tau) = -\frac{u_0}{\lambda^3} \cos(\lambda \tau). \quad (22)$$

Укажем, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [3].

Если учесть, что для $\frac{du^H(\lambda, \tau)}{d\tau}$ выражение будет таким:

$$\frac{du^H(\lambda, \tau)}{d\tau} = \frac{u_0 \sin(\lambda \tau)}{\lambda^2}, \quad (23)$$

то можно воспользоваться формулой из работы [7]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda \tau)}{\lambda} J_0(\lambda x) d\lambda = \begin{cases} \arcsin(x/\tau), & x \geq \tau; \\ \pi/2, & \tau \geq x. \end{cases} \quad (24)$$

Поскольку в точке $x=0$ всегда $\tau \geq x$, то на основе соотношения (23) и формулы (24) после выполнения *обратного преобразования Ханкеля* будем иметь

$$\frac{\partial u(0, \tau)}{\partial \tau} = u_0 \frac{\pi}{2}, \quad (25)$$

что полностью совпадает с приведенным ранее выражением скорости точки на мембране в начале системы координат.

Решение уравнения (4) с учетом соответствующих начальных условий, полученное на основе применения интегрального преобразования Ханкеля и справедливое для $0 \leq x < +\infty$ является верным для мембраны неограниченных размеров. Решение (14), которое получено для $0 \leq x \leq \pi$, справедливо лишь для области мембраны, которая ограничена окружностью радиуса R_0 с центром в точке $x = 0$. Однако, поскольку величина R_0 может быть любой, то решение $\partial u(0, \tau) / \partial \tau = u_0 \pi / 2$ также справедливо для всех значений R_0 . Поэтому можно утверждать, что сравниваемые решения полностью совпадают в точке $x = 0$ для всех значений времени из двух рассматриваемых диапазонов ($0 \leq \tau < +\infty$ и $0 \leq \tau \leq \pi$).

Пример третий. Пусть функция $f(x) = 0$, а функция $F(x) = V_0 [H(x) - H(x - x_0)]$, где $0 < x_0 < \pi$. Величина V_0 имеет размерность м/с. Понятно, что $a_0^f = 0$, $a_m^f = 0$ согласно формул для коэффициентов рядов Шлемильха. При определении величин a_0^F , a_m^F в этом случае сталкиваемся с более сложной ситуацией. Проблема состоит в том, что функция $F'(x)$ не удовлетворяет условиям основной теоремы. Функция $F'(x)$ относится даже к классу обобщенных функций.

Легко проверить, что в случае задания $F(x)$ в виде ступенчатой функции, коэффициенты a_0^F , a_m^F будут комплексными числами с ненулевой мнимой частью. Задача построения решения уравнения (4) с помощью использования разложений Шлемильха для варианта ступенчатой функции $F(x)$ (или $f(x)$) является невыполнимой. В принципе, если ограничиться приближенным решением (даже для $x \in (0, \pi)$), то можно вместо заданной функции $F(x)$ рассматриваемого типа использовать некоторую несколько "подправленную" функцию $F_\varepsilon(x)$, которая бы уже удовлетворяла основной теореме разложения. Описанную ситуацию, по-видимому, следует относить к *особой* (типа *некорректной*). Специально заниматься здесь такой ситуацией не будем. Укажем только, что естественно в ней рассмотреть последовательность функций, удовлетворяющих условию основной теоремы о существовании разложений функций в ряды Шлемильха и сходящихся к заданной функции $F(x)$. Описание выбора такой последовательности можно найти, например, в [9].

Выводы. Для уравнения гиперболического типа, описывающего нестационарные колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических возмущений, разработан подход, который можно относить к численно-аналитическим, и служащий для анализа динамического поведения мембраны. Способ использует прием разложения искомым функций в ряды Шлемильха, которые являются родственными по отношению к рядам Фурье – Бесселя. Способ использует формулы для определения коэффициентов разложений, а также опирается на операционное исчисление. На основе свойств распространения возмущений при их моделировании уравнениями гиперболического типа указывается область применения получаемых решений в рядах Шлемильха по вещественной пространственной переменной. Получаемые коэффициенты в разложениях являются функциями времени. Представлены (сравнительно) простые примеры решения задач для динамики мембраны с заданными начальными условиями.

Подход, который описан, является нестандартным, поскольку использует разложение функций Шлемильха в задачах математической физики, мало применяющихся в моделировании физических задач.

Представляет интерес развитие подхода к решению задач для уравнений с заданной правой частью, а также для динамических объектов типа пластин и пологих сферических оболочек, а также строго выпуклых пологих тонкостенных куполов.

Список литературы

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарпата А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Пикунин В. П., Похожаев С. И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М. : МЦНМО, 2004. – 208 с.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1949. – 799 с.
5. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
6. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 305 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
8. Жислин Г. М. Интегральные преобразования в задачах математической физики. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.
9. Доля П. Г. Математические методы компьютерной томографии. Дополнение 1. Введение в теорию обобщенных функций. – Харьков : Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2012. – 57 с.

References (transliterated)

1. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1970. 736 p.
2. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruktсий. Monografiya* [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Khar'kov, KHNA DU Publ., 2004. 392 p.
3. Pikulin V. P., Pokhozhaev S. I. *Prakticheskiy kurs po uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Practical course in equations of mathematical physics]. Moscow, MTSNMO Publ., 2004. 208 p.

4. Watson G. N. *Teoriya besselevykh funktsiy* [Theory of Bessel functions]. Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1949. 799 p.
5. Aramanovich I. G., Levin V. I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.
6. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti : Uchebnoe posobie, 2-e izd., pe-rerab. i dop.* [Functions of complex variable. Operational calculus. Stability theory: training manual, 2nd ed.]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1981. 305 p.
7. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 1100 p.
8. Zhislin G. M. *Integral'nye preobrazovaniya v zadakh matematicheskoy fiziki. Ehlektronnoye uchebno-metodicheskoye posobie* [Integral transforms in the problems of mathematical physics. Electronic teaching and methodological manual]. Nizhniy Novgorod, Nizhegorodskiy gosuniver-sitet Publ., 2012. 80 p.
9. Dolya P. G. *Matematicheskie metody komp'yuternoy tomografii. Dopolnenie 1. Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy* [Mathematical methods of computer tomography. Complement 1. Introduction to the theory of generalized functions]. Kharkov, Khar'kovskiy natsional'nyy univer-sitet imeni V.N. Karazina Publ., 2012. 57 p.

Поступила (received) 26.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Застосування розвинень функцій в ряди Шльомільха для аналізу нестационарних коливань мембрани / Є. Г. Янютин, Н. І. Воропай, П. А. Єгоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 131 – 136. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Применение разложений функций в ряды Шлемильха для анализа нестационарных колебаний мембраны / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 131 – 136. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

The application of expansions of functions into Schlömilch series for the analysis of nonstationary oscillations of a membrane / Ye. G. Yanyutin, N. I. Voropay, P. A. Yegorov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 131 – 136. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Янютин Євген Григорович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Янютин Евгений Григорьевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Yanyutin Yevgen Grigorovich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Воропай Наталія Ігорівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних систем, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Воропай Наталья Игоревна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеця, г. Харьков; тел.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Voropay Natalya Igorivna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkov, tel.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavlo Anatoliyovich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

ЗМІСТ

<i>Андреев Ю. М.</i> Аналитическое компьютерное построение первых интегралов уравнений движения дискретных механических систем.....	5
<i>Андренко П. Н., Лебедев А. Ю., Григорьев А. Л.</i> Динамический анализ торцевых уплотнений ротора лабиринтно-винтового насоса.....	12
<i>Батыгин Ю. В., Чаплыгин Е. А., Шиндерук С. А., Сабокарь О. С.</i> Резонанс во вторичном контуре трансформатора Тесла при возбуждении гармоническим напряжением.....	21
<i>Воропай А. В.</i> Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагрузжений.....	27
<i>Григорьев А. Л., Дериенко А. И.</i> Расчёт вынужденных колебаний пружины при асимметрии граничных условий и учете факторов нелинейности.....	39
<i>Завьялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойский Ю. А., Варенко В. Д.</i> К вопросу численного прогнозирования амплитуд низкочастотных пульсаций давления в обратимой гидромашине.....	51
<i>Кальченко Б. І., Кожушко А. П., Кісельов А. Р.</i> Оцінка плавності руху самохідної машини при впливі нерівностей поверхні.....	56
<i>Карпик А. А.</i> Моделирование потока в межлопаточном канале компрессора с учетом вращения рабочего колеса для определения аэродинамических сил.....	64
<i>Кропачек О. Ю.</i> Корреляционно-спектральная модель контроля автокогерентности термодинамических процессов.....	70
<i>Мягка Ю. О., Беляньска О. Р., Волошин М. Д.</i> Дослідження механо-хімічної обробки активного мулу з перспективою його подальшої утилізації.....	75
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Про рух математичного маятника.....	81
<i>Ольшанський В. П., Ольшанський С. В.</i> Про вільні коливання осцилятора з кубічно нелінійною силовою характеристикою.....	86
<i>Петухов В. М., Аксёнова Н. А.</i> Кинематическая модель движения колёсной пары после схода с рельс.....	92
<i>Ревлюк И. С.</i> Континуальные модели синфазного течения силиконового масла по кольцевым каналам демпферов крутильных колебаний вала дизеля.....	97
<i>Сыровацкий А. Н.</i> О восстановлении возмущения колебаний точечных масс по спектру.....	111
<i>Тимошенко С. Н.</i> Моделирование геометрии сталеплавильной ванны и подового электрода дуговой печи постоянного тока с целью повышения ее энергоэффективности.....	116
<i>Хацько Н. Є.</i> Сучасні математичні моделі компенсації похибок інерціальних датчиків для застосування в експериментах по калібруванню.....	124
<i>Янютин Е. Г., Воропай Н. И., Егоров П. А.</i> Применение разложений функций в ряды Шлемилха для анализа нестационарных колебаний мембраны.....	131

CONTENTS

Andreev Yu. M. Analytical computer construction of the first integrals of the equations of motion of discrete mechanical systems.....	5
Andrenko P. N., Lebedev A. Ju., Grigoriev A. L. Dynamic analysis of the mechanical seals of the rotor of the labyrinth screw pump.....	12
Batygin Yu. V., Chaplygin E. O., Shynderuk S. O., Sabokar O. S. Resonance in the secondary circuit of the Tesla transformer excited by the harmonic voltage	21
Voropay A. V. Action of finite system of arbitrary loads on rectangular plate	27
Grigoriev A. L., Deriyenko A. I. Calculation of forced oscillations of a spring with asymmetric boundary conditions taking into account the nonlinearity factors	39
Zavialov P. S., Kukhtenkov Yu. M., Podvoisky Yu. A., Varenko V. D. On the numerical prediction of amplitudes of low-frequency pressure pulsations in a reversible hydraulic machine	51
Kalchenko B. I., Kozhushko A. P., Kiselev A. R. Evaluation of smoothness of motion of self-propelled machine when exposed to surface irregularities	56
Karpik A. A. Simulation of the flow in the compressor blade channel taking into account the rotation of the runner for the estimation of aerodynamic forces.....	64
Kropachek O. Yu. Correlation-spectral model for controlling auto-coherence of thermodynamic processes.....	70
Miahka Yu. O., Belianska A. R., Voloshin N. D. Study of mechanical and chemical treatment of activated sludge with the prospect of its subsequent utilization	75
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. On the motion of mathematical pendulum.....	81
Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. On free oscillations of oscillator with cubic nonlinear power characteristic.....	86
Petukhov V. M., Aksenova N. A. Kinematic model of wheel pair motion after its derailment.....	92
Reveliuk I. S. Continuous models of in-phase flow of silicone oil along annular channels of torsional vibration dampers of the diesel shaft.....	97
Syrovatsky A. N. On restoring point mass oscillation perturbations by spectrum	111
Timoshenko S. M. Modeling geometry of steelmaking bath and bottom electrode of DC arc furnace aimed at increasing its energy efficiency	116
Khatsko N. E. Modern mathematical models of error compensation for inertial sensor used in their calibration	124
Yanyutin Y. G., Voropay N. I., Yegorov P. A. The application of expansions of functions into Schlömilch series for the analysis of nonstationary oscillations of a membrane.....	131

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»**

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 30 (1252) 2017

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;
e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид № 40 – 17.

Підп. до друку 20.12.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк.
8,75. Тираж 300 пр. (1-й завод 1 – 100) Зам. № 180596. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»

Ідент. код юридичної особи: 38093808

61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ.

Вісник Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях

- Внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.;
- У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**;
- Видання індексується **Google Scholar**;
- Додані до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний об'єм статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний об'єм** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може перевершувати 3-ох осіб. В номері збірника не може міститися більше 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані версії журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронний варіант відразу ж після опублікування стає доступний на сайтах: Серії Вісника, Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та бібліотеці національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt/>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Тел. +38-057-707-60-35