



ISSN 2222-0631  
6' 2016

# ВІСНИК

Національного технічного університету  
«ХПІ»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**  
**«ХПІ»**

*Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*

№ 6 (1178) 2016

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2016

**Вісник Національного технічного університету «ХПІ».** Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2016. – № 6 (1178). – 155 с.

**Державне видання**

**Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України**

**КВ № 5256 від 2 липня 2001 року**

Мова статей – українська, російська .

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

**Координаційна рада:**

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);

К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);

А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. С. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. ДМИТРИСНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;

В. В. СПІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;

П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;

С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.; О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.; П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.;

В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.; Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

**Редакційна колегія серії:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

**Заст. відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

**Члени редколегії:** Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук,

проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.;

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;

О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.;

О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.

У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.

Видання індексується **Google Scholar**.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 3 від 8 квітня 2016 р.

Ministry of Education and Science of Ukraine  
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY  
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

**BULLETIN**  
**OF NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY**  
**“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”**

*Series: "Mathematical modeling in engineering and technologies"*

№ 6 (1178) 2016

Collected Works

Published since 1961

Kharkiv  
NTU "KhPI", 2016

**Bulletin of National Technical University "KhPI".** Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2016. – No. 6 (1178). – 155 p.

**State edition**

**Certificate of the State Committee for Information Policy of Ukraine  
KB № 5256, July 2, 2001**

Language: Ukrainian and Russian.

The Bulletin of the National Technical University “KhPI” is included in the List of Scientific Professional Editions of Ukraine, where the results of dissertations for the degree of doctor and candidate of sciences can be published approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 15, 2015. Decree No.1328 (Appendix No. 8) of 21.12.2015.

**Coordinating Board:**

L. L. Tovazhnyanskyy, Dr. Tech. Sci., Prof. (**chief**);  
K. O. Gorbunov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof. (**secretary**);  
A. P. Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, member NAS of Ukraine, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
E. E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A. V. Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
F. F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
A. I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V. D. Dmitrienko, Dr. Tech. Sci., Prof.; I. F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V. V. Epifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu. I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.;  
P. O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. B. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
S. I. Kondrashov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
G. V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. K. Morachkovsky, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V. I. Nikolaenko, PhD. His. Sci., Prof.; P. G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.;  
V. A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V. B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.; G. M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
Yu. V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

**Editorial Board of the Series:**

**Executive Editor:** V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.

**Deputy Executive Editor:** Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.

**Executive Secretary:** S. V. Duhopelnikov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof.

**Members of the Editorial Board:** Yu. V. Gandel, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;

A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.;

O. M. Shelkovyy, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof.

In April 2013 the Bulletin of National Technical University "KhPI" series "Mathematical modeling in engineering and technologies" was included in the **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.

The publication is indexed by **Google Scholar**.

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI".

Protocol number 3, April 8, 2016.

**П. М. АНДРЕНКО, Д. С. ПОГОРЕЛОВ, М. С. СВИНАРЕНКО**

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УНІВЕРСАЛЬНОГО СТЕНДА ДЛЯ ВИПРОБУВАНЬ ГІДРОАПАРАТІВ**

Наведено принципову гідравлічну схему універсального, енергоефективного стенда для випробувань гідроапаратів. Обґрунтовано діапазон зміни робочих параметрів гідроапаратів, що досліджуються, та вихідних параметрів стенда. Проведений вибір гідравлічних елементів та пристроїв для її реалізації. Розроблена повна математична модель цього стенда, яка разом з математичною моделлю гідроапарата дозволяє визначити робочі характеристики останнього. Розглянуто перспективи подальшого удосконалення схемної та елементної реалізації випробувального стенда з метою підвищення його енергоефективності.

**Ключові слова:** стенд, гідроапарат, робочі параметри, математична модель, робоча характеристика.

**Вступ.** Гідравлічні апарати знайшли широке застосування в сучасних об'ємних гідроагрегатах мехатронних систем технологічного обладнання, транспортних машин, іншому гідрофікованому обладнанні. Це обумовлено тим, що такі гідроагрегати мають високу довговічність, надійно захищені від перевантажень, забезпечують їм механічну жорсткість по відношенню до навантаження та високу позиційну точність реверсу. Вони значно спрощують автоматизацію виробничих процесів та підвищують якість машин, дозволяють суттєво зменшити їх вагу і габарити, надійно працюють у широкому діапазоні параметрів оточуючого середовища [1].

Сучасною тенденцією розвитку гідроапаратури є її мініатюризація (з'явилися гідроапарати з діаметром умовного проходу  $D_y = 2$  мм), розширення її номенклатури та покращення технічних параметрів, застосування апаратури ввертного монтажу і оригінальних гідроапаратів для забезпечення виконання заданих функцій. Найбільш інтенсивний розвиток отримали гідроапарати, які зв'язують електронні системи керування з виконавчими механізмами. А саме: дроселюючі гідророзподільники та апарати з пропорційним електричним керуванням, особливо з вбудованою системою контролю і керування, які випускаються провідними світовими фірмами – виробниками гідроапаратури Rexroth, Parker Hannifin, Moog і ін. [2]. Як відмічено в статті [3], стратегічним напрямом розвитку об'ємного гідроприводу і його компонентів є зменшення їх габаритів і металоємності при одночасному зростанні питомих потужностей. Однак слід зазначити, що вартість виготовлення об'ємного гідроприводу однакової потужності, з зростанням тиску знижується, але тільки до тиску 30...40 МПа.

Всі типи гідроапаратів, за виключенням логічних гідроклапанів та дроселюючих гідророзподільників, проходять контрольні випробування згідно з ДСТУ [4], а дроселюючі гідророзподільники за ДСТУ [5]. Ці випробування проводять на спеціальних стендах, при розробці і проектуванні яких необхідно забезпечити високу точність підтримування тиску чи витрати на вході в гідроапарат, енергоефективність, комфортні умови праці.

**Аналіз останніх досліджень.** Гідравлічні схеми та робочі параметри стендів для випробувань гідроапаратів, методики їх досліджень наведені в [4, 5]. Причому в [4] наведено велику кількість гідравлічних схем стендів для випробувань конкретного типу гідроапаратів, що при великій номенклатурі гідроапаратів потребує наявності великої кількості стендів. Крім того можливий діапазон зміни вихідних параметрів таких стендів обмежений номінальними робочими параметрами насоса. Сьогодні промисловими підприємствами випускається велика гама стендів для випробувань гідроапаратури. Так Гомельським РУП «ГСКТБ ГА» випускається лінійка таких стендів. Однак при тиску 32 МПа, який має стенд Г473, він забезпечує видаток тільки 22 л/хв., а стенд Г605 при видатку 320 л/хв., має тиск 17 МПа [6]. Всі випробувальні стенди РУП «ГСКТБ ГА» забезпечують випробування гідроапаратури з  $D_y$  6...30 мм. Таким чином вони не забезпечують дослідження сучасної гідроапаратури з  $D_y$ , меншим за 6 мм. Гідравлічні випробувальні стенді, що випускаються ПО «СТЕНДОВОЕ ОБОРУДОВАНИЕ» забезпечують потрібні параметри по видатку та тиску, але вони призначені для випробування насосів [7]. Застосування регульованого аксіально-поршневого насоса в гідравлічному стенді ООО «ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ» також не забезпечує потрібні параметри по видатку та тиску в стенді [8]. А видаток насоса стенда [9] обмежено 100 л/хв.

Математичному опису робочих процесів у гідросистемах стендів для випробувань присвячені статті [10, 11]. Однак в першій розглядається стенд з нерегульованим насосом, який не забезпечує економне споживання енергії, а в другій розглядається стенд для дослідження насосів. В статті [12] розглядається математична модель стенда для дослідження балонів. Наведені в статтях [10 – 12] математичні залежності можуть бути частково використані при побудові математичної моделі універсального стенда для випробування гідроапаратів. В роботі [13] підвищення енергоефективності стенда для випробування об'ємних гідравлічних машин досягається за рахунок застосування гідропневматичного акумулятора та переводу, в момент пуску, асинхронного електродвигуна насоса в режим генератора. Однак результати наведені в цій роботі можуть бути використані при випробуваннях об'ємних гідроапаратів.

Враховуючи вище вказане, на сьогодні, актуальним завданням є розробка гідравлічної схеми універсального стенда для випробувань гідроапаратів, який би відповідав максимальному заощадженню енергії, а також ви-



равлічних систем на окремі структурні елементи відкриває можливість проводити їх аналіз і синтез, базуючись на єдиних методологічних наукових концепціях. При її розробці приймали наступні припущення:

– гідророзподільники – ідеальні: їх перекриття нульове; радіальний зазор, перетоки робочої рідини і опір внутрішніх каналів настільки малий, що ними можна знехтувати;

– товщина стінок трубопроводів та каналів, яка визначена з умови їх міцності, достатньо велика; це дозволяє вважати, що їх діаметр не залежить від внутрішнього тиску. Корпуса гідроапаратів – абсолютно жорсткі, а їх пружні властивості враховуються приведеним модулем об'ємної пружності робочої рідини;

– довжина трубопроводів мала, а їх діаметр однаковий та у порівнянні з довжиною великий; це дозволяє знехтувати хвилювими процесами, що відбуваються в них. Нехтуємо також початковими ділянками трубопроводів, на яких відбувається формування профілів швидкостей;

– у гідравлічній системі станда відсутня кавітація –  $p_i(t) \geq p_{\text{пар}}$ ,  $p_{\text{пар}}$  – тиск насичених парів робочої рідини, а також відсутні резонанс, гідравлічний удар і виконується умова нерозривності робочої рідини. Швидкість звуку в робочій рідині, з урахуванням пружних властивостей трубопроводів, є сталою та значно більшою за швидкість руху в ній. Вважаємо робочу рідину *ньютонівською*, а її течію – ізотермічною;

– розглядаємо моделі у зосереджених параметрах.

Точність моделювання робочих процесів у гідравлічних пристроях і системах залежить від правильного визначення параметрів робочої рідини. При дослідженні таких процесів використовують диференціальні рівняння, до складу яких входять густина, в'язкість, модуль об'ємної пружності, які, в свою чергу, залежать від її температури. Зі збільшенням тиску та розширенням діапазону робочих температур гідросистем значимість параметрів робочої рідини зростає [15]. При моделюванні робочих процесів у гідросистемі станда приймаємо значення температури робочої рідини постійною – рівною її середньому значенню  $T_a = \text{const}$ .

Значний вплив на параметри робочої рідини має нерозчинене повітря, що міститься в ній. За даними роботи [16] встановлено, що бульбашки повітря рівномірно розподілені по усьому об'єму робочої рідини, а концентрація газоповітряної фази становить 1,4 ... 1,6 % та співпадає з даними концентрації нерозчиненого повітря у відкритих гідросистемах (1 ... 2 %) наведених в різних літературних джерелах, наприклад [17]. Таким чином далі розглядаємо *бульбашкову*, згідно класифікації [18], *течію рідини* у якій газова фаза у вигляді окремих бульбашок різної величини і форми рівномірно розподілена у середовищі рідини, яке є дисперсним. Для визначення характеристик двофазної рідини використовуємо аналітичні залежності з роботи [19].

Модуль пружності робочої рідини у гідросистемі з урахуванням матеріалу труб і їх конструктивних розмірів розраховують за залежністю [20]:

$$E_{\text{тр}}(t) = \frac{E_c(t)}{1 + [d_{\text{тр}} E_c(t)] / (\delta_{\text{тр}} E_{\text{тр}})}, \quad (1)$$

де  $E_{\text{тр}}(t)$  і  $E_c(t)$  – відповідно приведений модуль і модуль пружності робочої рідини з урахуванням її газомісткості;  $t$  – час;  $d_{\text{тр}}$  і  $\delta_{\text{тр}}$  – відповідно діаметр і товщина стінки труби;  $E_{\text{тр}}$  – модуль пружності матеріалу труби.

Розглянемо математичний опис кожного елемента окремо. Зазначимо, що на рис. 1 і далі літерами  $P$  і  $T$ , відповідно, позначено підвод і злив робочої рідини.

**Математична модель насоса.** У якості насоса нами був вибраний аксіально-поршневий насос з ручним регулюванням типу НАР-224/32, який забезпечує тиск 32 МПа і витрату в діапазоні від 0 до 280 л/хв., рис. 2.

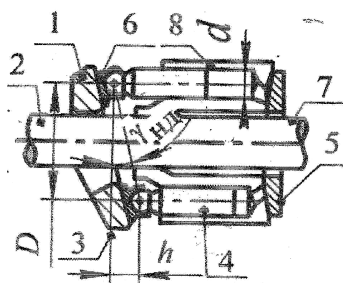


Рис. 2 – Аксіально-поршневий насос: 1 – похилий диск; 2, 7 – вал; 3 – положення похилого диску при нульовій подачі; 4 – поршень; 5 – розподільчий диск; 6 – підп'ятник; 8 – блок циліндрів.

Миттєва подача на виході з насоса визначається згідно рівняння [21]

$$q_n(t) = A_n r \omega \operatorname{tg} \gamma_{\text{НД}} \sum_{i=1}^{n_n} \sin \varphi_i, \quad (2)$$

де  $A_n$  – площа поршня;  $D$  – діаметр кола ротора, на якому розташовані центри поршнів;  $\omega$  – частота обертання вала насоса, рад/с;  $\gamma_{\text{НД}}$  – кут нахилу шайби;  $\varphi$  – кут оберту ротора від нейтрального положення,  $\varphi = \omega t$ ;  $n_n$  – кількість циліндрів, які з'єднані в поточний момент з порожнинами нагнітання.

Середня теоретична подача насоса визначається з рівняння [22]

$$q_{\text{сер.т.н}} = \frac{D A_n \operatorname{tg} \gamma_{\text{НД}} z n}{10^3}, \text{ л/хв.}, \quad (3)$$

де  $z$  – кількість поршнів ( $z = 20$ );  $n$  – кількість обертів ротора за хвилину;  $D$  використовується в см;  $A_n$  – в см<sup>2</sup>.

Зазначимо, що конструктивним виконанням аксіально-поршневого регулюемого насоса типу НАР 74 передбачено ручне регулювання подачі від нуля до номінальної, яке здійснюється шляхом зміни кута нахилу шайби  $\gamma_{\text{НД}}$ . Кое-

фіцієнт нерівномірності подачі насоса  $\delta_{\text{т.н}} = 5/z^2$ .



**Математична модель фільтра** (10/35/500 фірми Eaton Vickers) складається з двох рівнянь:  
– перепаду тиску [22]

$$\Delta p_{\phi} = p_n - p_1 = \frac{\mu_t q_1}{k_{\phi} A_{\phi}}, \quad (4)$$

де  $p_n$  і  $p_1$  – відповідно тиск на вході і виході фільтра;  $\mu_t$  – коефіцієнт динамічної в'язкості робочої рідини, 0,1 Па·с;  $k_{\phi}$  – коефіцієнт фільтра, який залежить від тонкості фільтрації робочої рідини і визначається з табл. 5.10 [22], л/см<sup>2</sup>;  $A_{\phi}$  – площа фільтра, см<sup>2</sup>;

– нерозривності

$$q_n = q_1. \quad (5)$$

де  $q_n$  і  $q_1$  – відповідно витрати на виході і вході фільтра.

**Математична модель запобіжного клапана непрямої дії.** Принцип дії запобіжного клапана непрямої дії,

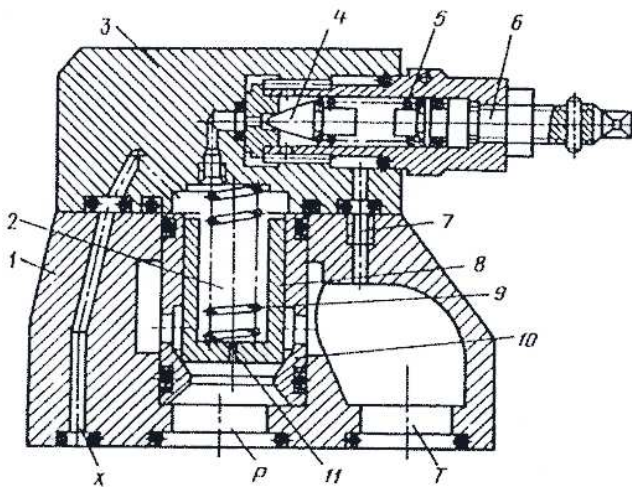


Рис. 3 – Запобіжний клапан МКПВ32/3С46:

1 – корпус; 2 – порожнина основного клапана; 3 – корпус керуючого клапана; 4 – ЗРЕ керуючого клапана 3; 5, 9 – пружини; 6 – гвинт; 7 – канал; 8 – ЗРЕ основного клапана; 10 – гільза; 11 – дросель в ЗРЕ 8; x – сигнал керування (розвантаження).

– руху ЗРЕ основного клапана 8

$$m_{п\ ЗРЕ\ 8} \ddot{x}_{ЗРЕ\ 8} = A_{ЗРЕ\ 8} [p_n - p_{пор\ 2}(t)] - F_{ЗРЕ\ 8\ гд}(t) - F_{ЗРЕ\ 8\ пр}(t) - F_{ЗРЕ\ 8\ тр}(t); \quad (6)$$

– витрати робочої рідини через основний клапан 8

$$q_{ЗРЕ\ 8}(t) = q_{ш\ ЗРЕ\ 8}(t) - q_{кер\ ЗРЕ\ 8}(t) + q_{ст\ ЗРЕ\ 8}(t); \quad (7)$$

– руху ЗРЕ керуючого клапана 4 (нехтуючи силою тертя)

$$m_{ЗРЕ\ 4} \ddot{x}_{ЗРЕ\ 4} = A_{ЗРЕ\ 4} [p_{пор\ 2}(t) - p_{зл}] - F_{ЗРЕ\ 4\ гд}(t) - F_{ЗРЕ\ 4\ пр}(t); \quad (8)$$

– витрати робочої рідини через керуючий клапан 3

$$q_{кер\ кл\ 3}(t) = A_{ЗРЕ\ 4} \dot{x}_{ЗРЕ\ 4} + q_{др\ 11}(t); \quad (9)$$

а також з обмеження переміщення ЗРЕ основного клапана і керуючого клапана:

$$0 < x_{ЗРЕ\ 8}(t) \leq x_{ЗРЕ\ 8\ max} \quad \text{і} \quad 0 < x_{ЗРЕ\ 4}(t) \leq x_{ЗРЕ\ 4\ max}, \quad (10)$$

де  $x_{ЗРЕ\ 8\ max}$  і  $x_{ЗРЕ\ 4\ max}$  – відповідно максимальне переміщення ЗРЕ основного і керуючого клапана.

У рівнянні (6)  $x_{ЗРЕ\ 8}$  – переміщення ЗРЕ основного клапана;  $A_{ЗРЕ\ 8} = \pi d_{ЗРЕ\ 8}^2 / 4$  – площа ЗРЕ основного клапана;  $d_{ЗРЕ\ 8}$  – діаметр ЗРЕ основного клапана;  $m_{п\ ЗРЕ\ 8}$  – приведена до ЗРЕ основного клапана маса всіх рухомих частин, яка визначається за залежністю

$$m_{п} = m_{зре} + m_{пр} / 3, \quad (11)$$

де  $m_{зре}$  – маса запірно-регулюючого елемента;  $m_{пр}$  – маса пружини;  $F_{ЗРЕ\ 8\ тр}(t)$ ,  $F_{ЗРЕ\ 8\ пр}(t)$  – сили тертя і пружини, які визначаються за залежностями:

$$F_{3PE8TP}(t) = F_{TP0}(t) \operatorname{sign} \dot{x}_{3PE} + F_{TPV}(t), \quad (12)$$

$F_{TP0}(t)$  і  $F_{TPV}(t)$  – сили сухого і рідинного тертя;  $\operatorname{sign} \dot{x}_{3PE}$  – функція Кронекера від  $\dot{x}_{3PE}$ ;

$$F_{3PE8TP}(t) = c_{TP} [x_{3PE}(t) + x_0], \quad (13)$$

$x_0$  – попередній підтиск пружини, який визначає початкову силу, що діє на ЗРЕ;  $c_{TP}$  – коефіцієнт жорсткості пружини;

гідродинамічна сила [14]

$$F_{3PE8ГД}(t) = -c_{ГД}(t)x_{3PE}(t) - k_{ин}(t) \frac{d}{dt} x_{3PE}(t), \quad (14)$$

$$c_{ГД}(t) = \mu_{нга} [\operatorname{Re}, x_{3PE}(t)] b_{вик} \Delta p_{ш}(t) \cos \theta_n; \quad (15)$$

$$k_{ин}(t) = \rho \Delta l \mu_{нга} [\operatorname{Re}, x_{3PE}(t)] b_{вик} \sqrt{|\Delta p_{ш}(t)|} / \rho, \quad (16)$$

$\mu_{нга} [\operatorname{Re}, x_{3PE}(t)]$  – коефіцієнт витрати гідроапарата залежно від числа Рейнольдса  $\operatorname{Re}$  і  $x_{3PE}(t)$ ;  $b_{вик}$  – сумарна ширина вікон клапана;  $\Delta p_{ш}(t)$  – перепад тиску у дроселюючій щілині клапана;  $\theta_n$  – кут нахилу вектора швидкості потоку робочої рідини до осі запірно-регулюючого елемента;  $\rho$  – густина робочої рідини;  $\Delta l$  – різниця відстаней між каналами підводу та відводу робочої рідини.

У рівняння витрати робочої рідини через основний клапан (7) входять:

– витрата через щілину основного клапана

$$q_{щ3PE8}(t) = \mu_{3PE8} (\operatorname{Re}, x_{3PE8}) \pi d_{3PE8} x_{3PE8}(t) \sin \alpha \sqrt{\frac{2}{\rho} [p_n(t) - p_{зл}]}, \quad (17)$$

де  $\mu_{3PE8} (\operatorname{Re}, x_{3PE8})$  – коефіцієнт витрати основного клапана;  $d_{3PE8}$  – діаметр ЗРЕ основного клапана;  $\alpha$  – кут сідла основного клапана;

– витрата через дросель  $II$

$$q_{др}(t) = \mu_{др} (\operatorname{Re}) A_{др} \sqrt{2[p_n(t) - p_{пор2}(t)]} / \rho, \quad (18)$$

де  $\mu_{др} (\operatorname{Re})$  – коефіцієнт витрати дроселя;  $A_{др}$  – площа дроселя  $II$ ;

– витрата стискування

$$q_{ст3PE8}(t) = \frac{W}{E_{TP}(t)} \frac{d p_n(t)}{dt}, \quad (19)$$

де  $W$  – об'єм робочої рідини в камерах клапана при середньому положенні ЗРЕ;  $p_n(t)$  – тиск у гідросистемі.

У рівнянні (8)  $m_{3PE4}$  – це маса ЗРЕ керуючого клапана;  $x_{3PE4}$  – переміщення ЗРЕ керуючого клапана;  $A_{3PE4} = \pi d_{3PE4}^2 / 4$  – площа перерізу ЗРЕ керуючого клапана;  $d_{3PE4}$  – діаметр ЗРЕ керуючого клапана;  $F_{3PE4TP}(t)$  і  $F_{3PE4ГД}(t)$  – відповідно, сили пружини і гідродинамічна для керуючого клапана, які визначаються за залежностями, аналогічним (13) і (14).

**Трубопроводи.** Зазначимо, що діаметр трубопроводу дорівнював максимальному діаметру умовного проходу гідроапарата, який досліджувався, тобто  $d_{yT} = 32$  мм. При розрахунку простого трубопроводу постійного перетину середні сумарні втрати тиску  $h_{сеп}^{\Sigma}$  знаходять з рівняння Бернуллі, вважаючи  $\alpha_1 = \alpha_2$  і скорочуючи швидкісні тиски [23]:

$$h_{сеп}^{\Sigma} = \Delta z + k q_{сеп}^m, \quad (20)$$

де  $\Delta z = z_2 - z_1$  – геометрична висота, на яку підіймається рідина в процесі руху по трубопроводу;  $q_{сеп}$  – середня витрата рідини через трубопровід;  $k$  – коефіцієнт;  $m$  – показник степеня.

Значення коефіцієнта  $k$  і показника степеня  $m$  залежать від режиму течії. Для ламінарного режиму течії у разі заміни місцевих опорів еквівалентними довжинами середні сумарні гідравлічні втрати становитимуть

$$h_{сеп}^{\Sigma} = \frac{128 v_t (l + l_{екв}) q_{сеп}}{\pi g d_T^4}.$$

Таким чином, для такої течії

$$k = (128 v_t (l + l_{екв}) / \pi g d_{yT}^4), \quad m = 1. \quad (21)$$

Для турбулентного режиму, виражаючи середню швидкість через середню витрату, маємо

$$h_{\text{сеп}}^{\Sigma} = \left( \Sigma \xi + \lambda_{\text{т}} \frac{l}{d_{\text{т}}} \right) \frac{16 q_{\text{сеп}}^2}{2 g \pi^2 d_{\text{т}}^4}.$$

Отже, для турбулентного режиму течії

$$k = \left( \Sigma \xi + \lambda_{\text{т}} \frac{l}{d_{\text{т}}} \right) \frac{8}{g \pi^2 d_{\text{т}}^4}, \quad m = 2. \tag{22}$$

В формулах (21) – (22) позначено:  $l$  і  $l_{\text{екв}}$  – відповідно довжина і еквівалентна місцевим опорам довжина трубопроводу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $d_{\text{т}}$  – діаметр трубопроводу;  $v_t$  – кінематична в'язкість робочої рідини;  $\Sigma \xi$  – сума коефіцієнтів місцевих втрат;  $\lambda_{\text{т}}$  – коефіцієнт місцевих втрат на тертя. Причому значення  $\Sigma \xi$  і  $\lambda_{\text{т}}$  визначають з довідникової літератури з гідравліки, наприклад [23].

**Математична модель зворотного клапана**, рис. 4. Він забезпечує вільний рух робочої рідини по трубопроводу тільки в одному вибраному напрямку. При зміні напрямку потоку робочої рідини клапан закривається і перепад тиску у припиняється.

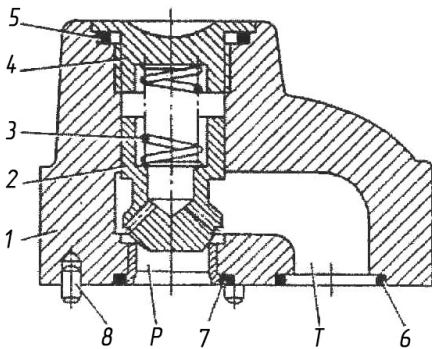


Рис. 4 – Схема зворотного клапана МКО 32/32:  
1 – корпус; 2 – клапан; 3 – пружина;  
4 – пробка; 5, 6, 7 – гумові ущільнюючі кільця; 8 – штифт.

Математична модель робочого процесу зворотного клапана описується такими рівняннями:

– витрати на його виході залежно від напрямку руху робочої рідини

$$q_{\text{звк}} = \begin{cases} 0, & \text{при зворотному русі;} \\ q_{\text{звк}}, & \text{при прямому русі,} \end{cases} \tag{23}$$

де  $q_{\text{звк}}$  – витрата через зворотний клапан, яка розраховується за залежністю (4.28), в яку підставляють значення перепаду тиску на зворотному клапані та його конструктивні параметри;

– переміщення ЗРЕ зворотного клапана

$$x_{\text{звк}} = \begin{cases} 0, & \text{при зворотному русі;} \\ x_{\text{звк max}}, & \text{при прямому русі,} \end{cases} \tag{24}$$

де  $x_{\text{звк}}$  і  $x_{\text{звк max}}$  – відповідно змінне і максимальне переміщення ЗРЕ зворотного клапана.

**Математична модель гідророзподільника**. Використовуємо гідророзподільники з електричним та ручним керуванням, тип керування на рис. 5 не показано. Застосовуємо гідророзподільники, виконані згідно 574 схеми: з ручним керуванням – 1Р<sub>н</sub>323ФВ та з електричним керуванням – 1Р323. При розрахунку гідророзподільника важливо визначити силу керування, яка переміщує його ЗРЕ з нейтрального положення у робоче. У загальному випадку ця сила визначається з нерівності

$$F_{\text{ГР кер}}(t) \geq m \ddot{x}_{\text{ГР зре}} + F_{\text{ГР пр } \Sigma}(t) + F_{\text{ГР гд}}(t) + F_{\text{ГР тр}}(t), \tag{25}$$

де  $m \ddot{x}_{\text{ГР зре}}$  – сила інерції;  $F_{\text{ГР пр } \Sigma}(t)$ ,  $F_{\text{ГР гд}}(t)$  і  $F_{\text{ГР тр}}(t)$  – відповідно сили пружин, визначається за формулою (16), гідродинамічна, визначається за формулою (17), і тертя, визначається за формулою (15).

Тобто сила, яку розвиває електромагніт гідророзподільника  $P1$ , повинна бути більшою за  $F_{\text{ГР кер}}(t)$ . При визначенні сили інерції треба мати на увазі, що час спрацювання сучасних гідророзподільників з електричним керуванням знаходиться у діапазоні від 0,01 до 0,2 с. Розрахунок витрати через гідророзподільник, за умови знаходження його ЗРЕ не в нульовому положенні (в нульовому положенні  $q_{\text{ГР}}(t) = 0$ ), проводиться за залежністю

$$q_{\text{ГР}}(t) = \mu_{\text{ГР}}(\text{Re}) A_{\text{ГР}} \sqrt{2 |\Delta p_{\text{вік}}(t)| / \rho}, \tag{26}$$

де  $\mu_{\text{ГР}}(\text{Re})$  – коефіцієнт витрати гідророзподільника;  $A_{\text{ГР}}$  – площа перерізу робочого вікна;  $\Delta p_{\text{вік}}(t)$  – перепад тиску на робочому вікні гідророзподільника.

**Математична модель гідропневмоакумулятора**. Розглядаємо гідропневмоакумулятор типу АР 300 Р 350

С 350 [24]. Запишемо його математичну модель частково використовуючи методику, наведену в роботі [25]. Вона складається з рівнянь та обмежень:

– зміни об'єму рідини, що надходить до гідропневмоакумулятора

$$W_{rGA}(t) = A_{nGA} y_{nGA}(t); \quad (27)$$

– рівноваги сил, що діють на поршень гідропневмоакумулятора

$$m_{npGA} \ddot{y}_{nGA} = A_{nGA} \Delta p_{nGA}(t) - k_{трnGA} \dot{y}_{nGA} - F_{трnGA0} \text{sign } \dot{y}_{nGA} - c_T y_{nGA}; \quad (28)$$

– рівняння стиску рідини в порожнині гідропневмоакумулятора

$$\frac{dp_{nGA}}{dt} = \frac{E_{np}(t)}{W_{mGA} + A_{nGA} y_{nGA}} q_{pGA}; \quad (29)$$

– обмеження переміщення поршня гідропневмоакумулятора

$$0 \leq y_{nGA} \leq y_{nGA \max}; \quad (30)$$

– зміни тиску газу в гідропневмоакумуляторі

$$\frac{dp_{rGA}}{dt} = \frac{dW_{rGA}}{dt} \frac{p_{rGA} + p_{ат}}{W_{rGA}} + \frac{p_{rGA}}{T_{rGA}} \frac{dT_{rGA}}{dt}. \quad (31)$$

В рівняннях (27) – (31) позначено:  $W_{rGA}$ ,  $W_{mGA}$  і  $W_{rGA}$  – об'єм та мертвий об'єм рідини і об'єм газу в порожнинах гідропневмоакумулятора, відповідно;  $A_{nGA}$ ,  $y_{nGA}$  і  $y_{nGA \max}$  – площа поршня гідропневмоакумулятора і його змінне та максимальне значення переміщення, відповідно;  $m_{npGA}$  – маса поршня гідропневмоакумулятора разом з приєднаною до неї рідиною, яку розраховують за залежністю

$$m_{npGA} = m_{nGA} + m_{np}, \quad (32)$$

де  $m_{nGA}$  – маса поршня гідропневмоакумулятора;  $m_{np}$  – приведена до поршня гідропневмоакумулятора маса рідини, яку розраховують з умови рівності кінетичної енергії за залежністю, наведеною у роботі [26], що представляли у вигляді

$$m_{np} = \frac{\rho y_{pGA} q_{pGA}^2}{A_{nGA} \dot{y}_{nGA}^2}, \quad (33)$$

$y_{pGA}$  – середня висота стовпа рідини у гідропневмоакумуляторі;  $\Delta p_{nGA}$  – зміна тиску в гідравлічній порожнині гідропневмоакумулятора;  $F_{трnGA0}$  і  $k_{трnGA}$  – відповідно сила тертя спокою в ущільненнях і коефіцієнт в'язкого тертя;  $q_{pGA}$  – витрата рідини, що надходить до гідропневмоакумулятора;  $p_{rGA}$  і  $p_{ат}$  – відповідно тиск в газовій порожнині гідропневмоакумулятора і атмосферний;  $T_{rGA}$  – температура газу в гідропневмоакумуляторі;  $c_T$  – коефіцієнт динамічної в'язкості газу, який визначається за формулою [27]

$$c_T = \frac{(p_{rGA} + p_{ат}) n A_{nGA}^2}{W_{rGA}}, \quad (34)$$

$n$  – показник термодинамічного процесу,  $n = 1, 3$ .

Наведені вище математичні моделі окремих елементів універсального стенда для випробувань гідроапаратів дозволяє скласти його математичну модель з урахуванням максимальної кількості факторів.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають, що перспективним напрямком подальшого удосконалення універсального стенда для випробувань гідроапаратів є підвищення його енергоефективності та зменшення собівартості, що може бути вирішено шляхом проведення комплексних аналітично-розрахункових досліджень гідравлічних систем стенда, побудованих за різними концепціями. А саме, порівняння з економічною ефективністю від застосування стенда, гідравлічна система якого містить насос з електродвигуном з частотним регулюванням подачі та гідроакумулятор, декілька насосів з постійною подачею та гідроакумулятор, насос з постійною подачею та гідроакумуляторну станцію.

**Висновки.** Таким чином, в даній статті обгрунтовано діапазон зміни робочих параметрів сучасних гідроапаратів. Розроблена гідравлічна система універсального, енергоефективного стенда для випробувань гідроапаратів різних типів у широкому діапазоні зміни їх конструкції та робочих параметрів. Проведений вибір гідравлічних елементів та пристроїв для її реалізації. Вперше отримана, з урахуванням максимальної кількості факторів, математична модель цього стенда, яка дозволяє визначити робочі характеристики гідроапаратів, скоротити час їх проектування.

**Список літератури:** 1. Кулешков Ю. В., Черновол М. И., Бевз О. В., Титов Ю. А. Шестеренные насосы с ассиметричной линией зацепления шестерен. Теория, конструкция и расчет. – Кировоград: «КОД», 2009 – 257 с. 2. Андренко П. Н., Лурье З. Я. Тенденции развития объемных гидроприводов // Промислова гідраліка і пневматика. – Вінниця: ВНАУ, 2013. – № 3 (41). – С. 3 – 12. 3. Фінкельштейн З. Л., Палюх А. П. Малогабаритные высокомоментные планетарные гидромоторы с плавающими спутниками // Промислова гідраліка і пневматика. – Вінниця: ВНАУ, 2013 – № 1 (39). – С. 16 – 20. 4. ДСТУ 3073-95. Гідроапаратура. Правила приймання і методи випробування. (ГОСТ 20245-95. Гідроапаратура. Правила приемки и методы испытаний. – М.: Изд-во стандартов. 1995. – 41 с.). 5. ДСТУ 28971-91. Гідропривід об'ємний. Сервоапарати. Методи випробування. (ГОСТ 28971-91. Гідропривод объемный. Сервоаппараты. Методы испытаний. – М.: Изд-во стандартов. 1991. – 19 с.). 6. Гидравлическое оборудование. Каталог РУП «ГСКТБ ГА» – Режим доступа: <http://www.gsktb.com>. – Дата обращения: 18 марта 2016. 7. Стенды для испытаний гидроагрегатов ПО «СТЕНДОВОЕ ОБОРУДОВАНИЕ». – Режим доступа: <http://data-stend.ru/stend/gidros>. – Дата обращения: 18 марта 2016. 8. ООО «ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ» – Режим доступа: <http://hydraulicsystem.ru-stend-regulirugushhej-gidroapparatury>. – Дата обращения: 18 марта 2016. 9. Стенд Уральского инженерингового центра. Режим доступа: <http://www.sheltec.ru/servostend>. – Дата обращения: 18 марта 2016. 10. Свинаренко М. С., П. М. Андренко Математична модель стенда для випробувань гідроапаратів // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 25. – С. 49 – 58. 11. Андренко П., Лебедев А. Математическая модель стенда для испытания насоса // MOTROL. – Люблин, 2011. – Т. 13 С. – С. 200 – 210. 12. Анодин А. М., Бодров В. В., Устюгов М. Н. Математическая модель стенда гидравлических испытаний баллонов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – Челябинск: ЮуРГУ, 2006. № 4 – С. 49 – 52. 13. Ульянов М. В. Повышение эффективности стенда испытаний объемных гидравлических машин вращательного действия: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.02.02 / Ульянов Михаил Валерьевич. – Ростов-на-Дону, 2012. – 19 с. 14. Попов Д. Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с. 15. Рабочие жидкости систем гидропривода: учеб. пособие / Трофимов В. А., Яхно О. М. / и др.]. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – 184 с. 16. Струтинський В. Б., Тіхенко В. М. Стохастичні процеси у гідроприводах верстатів: монографія. – Одеса: Астопрінт, 2009. – 456 с. 17. Свешников В. К. Станочные гидроприводы: справочник. – М.: Машиностроение, 1995. – 448 с. 18. Евтущенко А. А., Колісниченко Э. В., Сапожников С. В. Турбомашини для перекачивания газожидкостных смесей // Вісник СумДУ. – 2004. – № 13 (72). – С. 45 – 49. 19. Лурье З. Я., Федоренко И. М. Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металлургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости / MOTROL, 2012. – № 12 С. – С. 10 – 25. 20. Данилов Ю. А., Кирилловский Ю. Л., Колпак Ю. Г. Аппаратура объемных гидроприводов: Рабочие процессы и характеристики. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с. 21. Кононенко А. П. Об'ємні гідралічні машини гідроприводів. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. – 292 с. 22. Объемные гидравлические приводы / Башта Т. М., Зайченко И. З., Єрмаков В. В. [и др.]; под ред. Т. М. Башты. – М.: Машиностроение, 1968. – 628 с. 23. Гідраліка та гідропневмопротрої авіаційної техніки: навч. посібн. / В. П. Боچارов, М. М. Глазков, Г. Й. Зайончковський [та ін.]. К.: НАУ, 2011 – 472 с. 24. Гидроаккумуляторы серии AP CE(PED). – Режим доступа: <http://m-impex.com/UserFiles/F> – Дата обращения: 23 марта 2016. 25. Токаренко В. М., Терських В. З., Столяров А. Л. Гідропривод і гідрооборудування транспортних засобів: учеб. пособ. – К.: Лыбидь, 1991. – 232 с. 26. Навроцкий К. Л. Теория и проектирование гидро- и пневмоприводов: учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1991. – 384 с. 27. Пневматический упругий элемент с резинокордной оболочкой – Режим доступа: <http://lektcii.com/3-11262.html> – Дата обращения: 23 марта 2016.

**References:** 1. Kuleshkov, Yu. V., Chernovol, M. I., Bevz, O. V. and Titov Yu. V. *Shesterennyye nasosy s assymetrichnoy liniyey zatsepleniya shesteren. Teoriya, konstruktziya i raschet* [Gear pumps with asymmetrical coupling of gears. Theory, design and calculation]. Kirovograd, «KOD» Publ., 2009. 257 p. 2. Andrenko, P. N. and Lurye, Z. Ya. *Tendentsii razvitiya obyemnykh gidroprivodov* [Tendency of volume hydraulic valves development]. *Promyslova gidravlika i pnevmatyka* [Industrial Hydraulics and Pneumatics]. Vinnitsya: VNAU, 2013, no. 3 (41), pp. 3–12. 3. Finkelshsteyn, Z. L. and Palukh, A. P. *Malogabaritnyye vysokomomentnyye planetarnyye gidromotory s plavayushchimi satelлитami* [Compact high-torque planetary hydraulic motors with floating satellites]. *Promyslova gidravlika i pnevmatyka* [Industrial Hydraulics and Pneumatics]. Vinnitsya, VNAU, 2013, no. 1 (39), pp. 16–20. 4. *DSTU 3073-95. Gidroapparatura. Pravyla pryimannya i metody vyprobuvannya. (GOST 20245-95. Gidroapparatura. Pravila priyemki i metody ispytaniy.* [State Standard 20245-95. Hydraulics. Acceptance rules and test methods]. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1995, 41 p.). 5. *DSTU 28971-91. Gidroprivid ob'yemnyy. Servoaparaty. Metody vyprobuvannya. (GOST 28971-91. Gidroprivid obyemnyy. Servoapparaty. Metody ispytaniy.* [State Standard 28971-91. Volume hydraulic valve. Servoapparaty. Test methods]. Moscow, Izd-vo standartov Publ., 1991, 19 p.). 6. *Gidravlicheskiye oborudovaniye. Katalog RUP «GSKTB GA»* [Hydraulic equipment. Catalog RUP "GSKTB GA"]. Available at: <http://www.gsktb.com>. (accessed 18.03.2016). 7. *Stendy dlya ispytaniy gidroagregatov PO «STENDOVOYE OBOUDOVANIYE»*. [Testing benches for testing hydraulic valves "Bench equipment"]. Available at: <http://data-stend.ru/stend/gidros>. (accessed 18.03.2016). 8. *OOO «GIDRAVLICHESKIYE SISTEMY»* ["Hydraulic systems" Ltd]. Available at: <http://hydraulicsystem.ru-stend-regulirugushhej-gidroapparatury>. (accessed 18.03.2016). 9. *Stend Uralskogo inzheneringova tsentra.* [Bench of the Ural Engineering Center]. Available at: <http://www.sheltec.ru/servostend>. (accessed 18.03.2016). 10. Svinarenko, M. S. and Andrenko, P. M. *Matematychna model' stenda dlya vyprobuvannya gidroaparativ* [Mathematic model of hydraulic valve testing bench]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI", 2010, no. 25, pp. 49–58. 11. Andrenko, P. and Lebedev, A. *Matematicheskaya model' stenda dlya ispytaniya nasosa* [Mathematic model of pump testing bench]. MOTROL. Lublin, 2011, vol. 13 С, pp. 200–210. 12. Anodin, A. M., Bodrov, V. V. and Ustyugov, M. N. *Matematicheskaya model' stenda gidravlicheskiy ispytaniy ballonov* [Mathematic model of bench for hydraulic tanks testing]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Kompyuternyye tekhnologii, upravleniye, radioelektronika* [Bulletin of the SUSU. Ser.: Computer technologies, control, radioelectronics]. Chelyabinsk, YuurGU Publ., 2006, no. 4, pp. 49–52. 13. Uliantsev, M. V. *Povysheniye effektivnosti stenda ispytaniy obyemnykh gidravlicheskiy mashin vrashchatelnogo deystviya: avtoref. dis. kand. tekhn. nauk: 05.02.02* [Improving efficiency of bench for testing volume rotary hydraulic valves. Abstract of a thesis cand. eng. sci. deg. diss. 05.02.02]. Rostov-na-Donu, 2012, 19 p. 14. Popov, D. N. *Dinamika i regulirovaniye gidro- i pnevmosistem : uchebnik dlya vuzov* [Dynamics and control of hydraulic and pneumatic systems: textbook for institutes]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1987. 464 p. 15. Trofimov, V. A. and Yakhno, O. M. *Rabochiye zhidkosti sistem gidroprivoda: ucheb. posobiye* [Working fluid of hydraulic valve system: coursebook]. Kiev, NTUU "KPI" Publ., 2009. 184 p. 16. Strutynskyy, V. B. and Tikhenko, V. M. *Stokhastychni protsesy u gidroprivodakh verstativ : monografiya* [Stochastic processes in machine tool hydro drives: monograph]. Odesa, Astoprint Publ., 2009. 456 p. 17. Sveshnikov, V. K. *Stanochnyye gidroprivody : spravochnik* [Machine hydro drives: reference book]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1995. 448 p. 18. Evtushenko, A. A., Kolisnichenko, E. V. and Sapozhnikov, S. V. *Turbomashiny dlya perekachivaniya gazozhidkostnykh smesey* [Turbomachines for pumping gas-liquid mixtures]. *Visnik SumDU* [Bulletin of the SSU]. 2004, no. 13 (72), pp. 45–49. 19. Lur'ye, Z. Ya. and Fedorenko, I. M. *Issledovaniye rabocheho protsessa mekhatronnogo gidroagregata sistemy smazki metalurgicheskogo oborudovaniya s uchetom kharakteristik dvukhfaznoy zhidkosti* [Studying the workflow of metallurgical equipment lubrication system mechatronic hydro machine taking into account two-phase fluid]. MOTROL, 2012, no. 12 S, pp. 10–25. 20. Danilov, Yu. A., Kirillovskiy, Yu. L. and Kolpak, Yu. G. *Apparatura ob'yemnykh gidroprivodov: Rabochiye protsessy i kharakteristiki* [Volume hydro drive equipment: workflows and characteristics]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1990. 272 p. 21. Kononenko, A. P. *Ob'yemni gidravlichni mashyny gidroprivodiv* [Volume hydro machines of hydro drives]. Donetsk, DVNZ "DonNTU" Publ., 2011. 292 p. 22. Bashta, T. M., Zaychenko, I. Z. and Yermakov, V. V. *Obyemnyye gidravlicheskiye privody* [Volume hydro drives]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1968. 628 p. 23. Bocharov, V. P., Glazkov, M. M. and Zayonchkovskiy, G. Y. *Gidravlika ta gidropnevmoпротрої aviatsionoyi tekhniki : navch. posibn.* [Hydraulics and hydro pneumatic units in aircraft industry: coursebook]. Kiev, NAU Publ., 2011. 472 p. 24. *Gidroakkumulyatory seriyi AR SE(PED)*. [Hydraulic accumulator type AP CE(PED)]. Available at: <http://m-impex.com/UserFiles/F>. (accessed 23.03.2016). 25. Tokarenko, V. M., Terskiikh, V. Z. and Stolyarov, A. L. *Gidroprivid i gidrooborudovaniye transportnykh sredstv : ucheb. posob.* [Hydro drives and hydro equipment for vehicles: coursebook]. Kyiv, Lybid' Publ., 1991. 232 p. 26. Navrotsky, K. L. *Teoriya i proyektirovaniye gidro- i pnevmoprivodov : uchebnik dlya vuzov* [The-

ory and design of hydro/pneumatic drives: textbook for institutes]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1991. 384 p. 27. *Pnevmaticheskiy uprugiy element s rezinokordnoy obolochkoy* [Pneumatic elastic rubber cord covered element] – Available at: <http://lektsii.com/3-11262.html>. (accessed 23.03.2016).

Надійшла (received) 06.04.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Андренко Павло Миколайович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-61-28; e-mail: andrenko47@mail.ru.

**Андренко Павел Николаевич** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-61-28; e-mail: andrenko47@mail.ru.

**Andrenko Pavlo Mykolaevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-61-28; e-mail: andrenko47@mail.ru.

**Погорелов Денис Сергійович** – студент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 087-41-56; e-mail: denis.pogorelov@mail.ru.

**Погорелов Денис Сергеевич** – студент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (099) 087-41-56; e-mail: denis.pogorelov@mail.ru.

**Pogorelov Denis Sergeevich** – Student, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (099) 087-41-56; e-mail: denis.pogorelov@mail.ru.

**Свинаренко Максим Сергійович** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків; тел.: (096) 455-08-30; e-mail: m\_a\_k\_s\_i\_m@ua.fm.

**Свинаренко Максим Сергеевич** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, г. Харьков; тел.: (096) 455-08-30; e-mail: m\_a\_k\_s\_i\_m@ua.fm

**Svinarenko Maksim Sergeevich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National University of Civil Engineering and Architecture, Kharkov; tel.: (096) 455-08-30; e-mail: m\_a\_k\_s\_i\_m@ua.fm.

УДК 62-531.4

**О. П. ГУБАРЕВ, О. В. ЛЕВЧЕНКО, А. В. КОРЧОВНИЙ**

#### ДВОРІВНЕВА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ГІДРОПРИВОДУ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

Запропоновано дворівневу модель систем гідроприводу з паралельною структурою. Логічна складова моделі описує логічну взаємодію виконавчих пристроїв з урахуванням їх спрацювання в паралельних потоках. Функціональна складова визначає технологічні та експлуатаційні характеристики кожної операції, які є основою для визначення рівня енергоспоживання гідравлічної системи. Додатково розглянуто перспективи подальших досліджень в напрямку визначення та прогнозування енергоефективності системи.

**Ключові слова:** дворівнева модель, гідропривід, паралельна структура, енергоефективність.

**Вступ.** Основною задачею моделювання систем гідроприводу з паралельною структурою є розробка ефективних схем практичних систем з мінімальними енерговитратами в процесі експлуатації на основі прогнозування енергоспоживання за типом схемного рішення.

Розрахунок енерговитрат здійснюється за допомогою наступних характеристик:

- витрата робочої рідини системи;
- тиск робочої рідини системи;
- середня потужність системи за одиничний цикл;
- зміна середньоциклової потужності;
- споживана енергія системи.

Такий підхід дозволяє виконувати моделювання класу систем, що мають різні варіанти схем, фіксовані функції та кількість експлуатаційних дій, однакову послідовність їх виконання, розгалуження робочого циклу у вигляді паралельних гілок, які виконуються одночасно. У відповідності до структури системи виконавчий рівень є спільним для всіх представників класу по кількості виконавчих пристроїв, функціям та умовам експлуатації. Відмінними для них є схемні рішення та технічні засоби керуючого, логіко-інформаційного і енергетичного рівнів.

**Аналіз останніх досліджень.** Результуючі енергетичні характеристики гідравлічної системи залежать від гідравлічної схеми системи, від типу обладнання, яке використовується для реалізації цієї схеми, та від узгодженості параметрів приводів відповідно до експлуатаційного циклу роботи системи.

Розробка гідравлічних схем гідрофікованих машин і механізмів є однією з основних задач при їх проектуванні. Вирішення цієї задачі на сучасному етапі повинно передбачати проектування систем з підвищеними показниками енергетичної ефективності. Ця науково-технічна задача може бути вирішена шляхом розробки методик проектування, які базуються на прогнозуванні енергетичних витрат продовж часу експлуатації системи.

© О. П. Губарев, О. В. Левченко, А. В. Корчовний, 2016

Як показує аналіз літератури [1, 2], проектування гідроприводів у машинобудуванні проводиться за допомогою різних методик. Накопичено значний досвід і розроблена велика кількість типових гідравлічних схем для вирішення конкретних задач в промисловості. Гідравлічні системи сучасних машин, як правило, складаються з апаратів і агрегатів, які серійно випускаються спеціалізованими заводами. Це дозволяє спростити процес проектування, розробку гідравлічних систем і їх експлуатацію.

Досліджуючи питання підвищення ефективності роботи гідравлічних багатопривідних систем було виявлено, що найбільш вірогідним способом і перспективним напрямком підвищення ефективності є розробка оптимальної структури гідравлічної схеми та способу керування [3, 4].

В процесі розробки схеми гідравлічної системи, для одних і тих же вихідних умов може бути запропоновано декілька варіантів. Їх енергетичні характеристики будуть суттєво відрізнятися, що є наслідком використання різних методик та підходів до побудови схем. Як правило в процесі проектування створюється одна схема, а не розробляється і порівнюється декілька варіантів. Недоліком такого підходу є те, що неможливо оцінити вплив схемних рішень на ряд показників роботи системи, в тому числі й на рівень енергоспоживання.

Таким чином, підвищення енергетичної ефективності систем, в першу чергу, потребує прогнозування рівня енергоспоживання за типом обраного схемного рішення.

В загальному випадку рівень енергоспоживання за існуючими методиками визначається потужністю приводів, які входять до складу системи, та втратами, спричиненими гідравлічним опором, перетоками, стисненням робочої рідини [3]:

$$\sum_{i=1}^n N_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n N_{Ki}(t) + \sum_{i=1}^n N_{Bi}(t), \quad (1)$$

де  $N_z$  – затрачена потужність, Вт;  $N_K$  – корисна потужність, Вт;  $N_B$  – втрати потужності в гідравлічній частині системи, Вт;  $n$  – кількість приводів;  $t$  – час роботи привода, с.

Недоліком такого підходу є неврахування змін енергоспоживання в часі з моменту запуску системи та неврахування впливу роботи приводів один на одного, що є характерним безпосередньо для багатопривідних циклових систем об'ємного гідроприводу.

Більшість методик [5] базується на сталій траєкторії енергетичного потоку, тобто послідовності апаратів гідросистеми, через які проходить робоча рідина. Затрачена потужність втрачається на шляху до отримання корисної потужності під час електромеханічного перетворення (в електродвигуні), далі механо-гідравлічного перетворення (в насосі), транспортування робочої рідини (в клапанах і трубопроводах), гідромеханічного перетворення (в виконавчому пристрої); утворюючи, таким чином, енергетичний потік з розгалуженнями на втрати, розділеними по траєкторії свого руху.

**Постановка задачі.** В результаті виконаного аналізу методик визначення рівня енергоспоживання систем гідроприводів та розгляду процесу формування втрат енергії практичних систем виявлена необхідність розробки узагальненої моделі роботи системи з метою побудови схемних рішень з мінімальним рівнем енергоспоживання.

Для отримання вказаного результату необхідно проаналізувати методи визначення енергетичних втрат і приклади практичних систем гідроприводів та розробити узагальнену математичну модель, яка дозволить імітувати експлуатаційний цикл з урахуванням основних чинників втрат енергії і отримувати прогноз щодо енергетичної ефективності систем та порівнювати за рівнем енергоспоживання різні схемні рішення, запропонувати нову методику визначення енергетичної ефективності шляхом прогнозування енергетичних показників експлуатаційного циклу за типом схемного рішення.

**Математична модель.** Відповідно до результатів виконаного аналізу, використання властивості циклічності систем дозволяє прогнозувати певні їх характеристики на строк експлуатації технічного об'єкта, спираючись на показники одиничного циклу. Ці характеристики є інтегрованими для системи в цілому, а разом з вартістю устаткування та обслуговування системи є передумовою визначення ефективності системи за строк експлуатації. Моделювання роботи системи виконується за період строку експлуатації технічного об'єкта.

Модель, яка дозволить виконати оцінку схемних рішень має бути достатньо простою у використанні і потребувати мінімальних витрат часу. Робота розроблюваної системи складається з наперед відомих дій пристроїв, дворівнева модель системи спирається на параметри цих дій. За такою схемою функції приводів в моделі задекларовані відомими залежностями в часі чи в координаті руху. Шаблон декларованої залежності вміщуватиме:

- діапазон змін аргументу (A1, A2);
- початкове значення функції (A3);
- коефіцієнт змін функції (A4);
- коди аргументу та функції (A5, A6);
- бінарні параметри, які фіксують виконання дії та команду до дії (A7, A8).

Тобто, дія, в виконанні якої зайнято групу пристроїв (наприклад, розподільчий клапан, клапан тиску, циліндр, датчик положення), потребує 8 параметрів за декларативною схемою моделі, та більше 100 за типовою моделлю. Зауважимо, що параметри (A7, A8) виключають необхідність функцій, які узгоджують параметри при-

строїв на фізичному рівні, що додатково зменшує розмірність моделі на 20...25 %.

Таким чином застосування деклараційного опису дій та операцій, що їх виконує система, зменшує розмірність масиву вихідних даних приблизно в  $K_{дан} = 15 \dots 20$  разів. Відповідно кількість операцій процесу моделювання зменшується в

$$K_{опер} \approx (K_{дан})^2 \approx 225 \dots 400.$$

Враховуючи, що зміна масштабного виміру алгоритму на 2 порядки приводить до якісно нової системи, спрощення може бути ефективним.

Ядро дворівневої логіко-функціональної моделі багатопрівідної системи має три складові: деклараційний опис дій та операцій, які позначаємо як модель функцій системи  $E_{ск}$ , логічний опис взаємодії пристроїв, що забезпечує порядок їх виконання у експлуатаційному чи технологічному процесі  $\Phi_{ск}$ , інтегральне визначення прогнозованого енергоспоживання та ефективності за цикловими показниками та коефіцієнтами їх змін за термін експлуатації  $P_{ск}$ :

$$M_{лф} = \cup(\Phi_{ск}, E_{ск}, P_{ск}), \quad (2)$$

де  $M_{лф}$  – логіко-функціональна модель;  $\Phi_{ск}$  – логічна складова логіко-функціональної моделі;  $E_{ск}$  – функціональна складова логіко-функціональної моделі;  $P_{ск}$  – енергетична складова логіко-функціональної моделі.

Імітація роботи системи за схемами дворівневої логіко-функціональної моделі включає:

- моделювання окремих функцій (дій та операцій);
- об'єднання функцій в експлуатаційному чи технологічному циклі;
- розрахунок інтегральних показників роботи системи за цикл;
- розрахунок змін інтегральних характеристик протягом періоду;
- визначення показників ефективності схемного рішення.

При побудові структури моделі застосовано підхід «зверху донизу», тобто склад та устрій кожного нижнього рівня моделі будується як необхідний та достатній для забезпечення даними верхнього рівня моделі.

Визначення показників ефективності схемного рішення базується на енергетичних характеристиках системи, обладнання, та втрат, пов'язаних з експлуатацією ( $V_{техн}$ ,  $V_{обсл}$ ,  $V_E$ ), та результатах моделювання: продуктивністю, енерговитратами, витратами на модернізацію та обслуговування системи ( $P_p$ ,  $E_{зам}$ ,  $E_{кор}$ ,  $V_{мод}$ ).

Визначення інтегрованих циклових показників враховує:

- перелік складових функцій циклу;
- порядок виконання функцій в циклі;
- параметри корисної роботи за кожною функцією;
- параметри для перерахунку корисної роботи до характеристик енергетичного потоку ( $P(t)$ ,  $Q(t)$ );
- перерахункові залежності визначення спожитої енергії за типовим схемним рішенням;
- алгоритми розрахунку корисної та споживаної енергії для класу систем.

Порядок виконання функцій в циклі за технічним завданням формалізується до логічних виразів команд керування, складу комплексу пристроїв керування, характеристик пристроїв керування, характеристик пристроїв контролю за виконанням функцій.

Перелік складових функцій циклу задається в технічному завданні та доповнюється функціями пам'яті і зворотними функціями [2]. Відповідно до нього формується склад виконавчих пристроїв та приводів системи.

Параметри корисної роботи за функціями забезпечуються характеристиками виконавчих пристроїв, режимами їх роботи, типом обладнання.

Параметри розрахунку енергетичних характеристик за виконаною корисною роботою складаються з конструктивних параметрів та характеристик виконавчих пристроїв і допоміжного обладнання, включно з гідравлічними лініями енергопостачання (рукава високого тиску, трубопроводи).

Перерахункові залежності визначення спожитої енергії за типовим схемним рішенням будуються для бібліотеки систем класу та враховують коефіцієнти корисної дії, системні втрати потужності, кероване узгодження пристроїв-постачальників та пристроїв-користувачів енергії. Алгоритми розрахунку корисної та споживаної енергії базуються на відпрацьованні логічних виразів виконання функцій та енергопостачальних пристроїв за термін одиничного циклу.

Моделювання одиничного циклу здійснюється за логіко-функціональним принципом, а саме: взаємодія пристроїв та порядок виконання окремих операцій забезпечується логічною складовою моделі (складова  $\Phi_{СК} = \{\Phi\}_{2n}$ ), розрахунок кількісних показників кожної дії у рамках циклу виконується за функціональною складовою (складова  $E_{СК} = \{\Theta\}_{2n}$ ), з використанням попередніх відомостей про застосоване обладнання, навантаження та параметри руху, фізико-енергетичні і конструктивні показники, визначення енергоспоживання та ефективності (складова  $P_{СК}$ ) базується на результатах імітації дій системи (3):



$$M = ((\Phi \cup E), \Pi) = \left\{ \left( \begin{array}{l} Y_1 \leftarrow \Phi_1(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \\ Y_{\bar{1}} \leftarrow \Phi_{\bar{1}}(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \\ \dots \\ Y_m \leftarrow \Phi_m(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \\ Y_{\bar{m}} \leftarrow \Phi_{\bar{m}}(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \\ \dots \\ Y_n^* \leftarrow \Phi_n(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \\ Y_{\bar{n}}^* \leftarrow \Phi_{\bar{n}}(\{X_i, X_{\bar{i}}\}_{n_{\Phi M}}) \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{l} X_1 \leftarrow \Theta_1(Y_1, \{P_{1k}\}_{r_1}) \\ X_{\bar{1}} \leftarrow \Theta_{\bar{1}}(Y_{\bar{1}}, \{P_{\bar{1}k}\}_{r_{\bar{1}}}) \\ \dots \\ X_m \leftarrow \Theta_m(Y_m, \{P_{mk}\}_{r_m}) \\ X_{\bar{m}} \leftarrow \Theta_{\bar{m}}(Y_{\bar{m}}, \{P_{\bar{m}k}\}_{r_{\bar{m}}}) \\ \dots \\ X_n^* \leftarrow \Theta_n(Y_n, \{P_{nk}\}_{r_n}) \\ X_{\bar{n}}^* \leftarrow \Theta_{\bar{n}}(Y_{\bar{n}}, \{P_{\bar{n}k}\}_{r_{\bar{n}}}) \end{array} \right) \right\}, \quad (3)$$

де  $\{P_{1k}\}_{r_1} = \{s, q, M, F, t, v, \omega\}$  – набір параметрів, що визначають дію  $i$ -го привода; \* – позначення пристроїв енергетичного рівня;  $Pr$  – продуктивність роботи багатопривідної системи;  $B_{\text{мод}}$  – витрати на модернізацію системи;  $B_{\text{обсл}}$  – витрати на щоденне обслуговування експлуатаційного обладнання;  $B_{\text{техн}}$  – витрати, пов’язані з реалізацією експлуатаційного циклу;  $B_E$  – додаткові витрати, пов’язані з експлуатацією системи.

Виконання кожної дії в моделі позначається зміною логічних сигналів стану,

$$X_i = 1, X_{\bar{i}} = 0: A_{\bar{i}}^- \leq A_i(t) \leq A_i^+,$$

які використовуються для вироблення команд, що розпочинають моделювання наступних дій. Отримання кількісних значень фізичних показників здійснюється за декларованими функціями роботи пристроїв при виконанні корисної роботи. Функції обраховуються за лінійними залежностями, константами чи за табличними значеннями, що їх у розрахунках замінено поліномами. При розрахунках використано експлуатаційні показники дій:

- корисна робота  $i$ -го приводу в  $j$ -му такті  $A(j)i$ ;
- експлуатаційне навантаження  $F + (j)i$ ;
- швидкість  $V(j)i$ ;
- час виконання функції  $t(j)i$ ;
- коефіцієнт завантаження приводу.

У разі невизначеності параметрів використано середню потужність за такт  $i$ -го пристрою  $N(j)i$ , або функцію змін потужності у часі  $N(t)i$ .

Узгодження енергетичних показників на протязі дії, такту та циклу здійснюється за алгоритмом, що відображає варіант запропонованої схеми енергетичного рівня, та складу модулів виконавчого рівня [4, 5].

На першому кроці інтегровані показники системи визначаються для одиничного експлуатаційного циклу  $(c)$  у загальному вигляді  $D(c)$ . У тому числі корисні  $D^*(c)$  та витрачені  $D(c)$ . До них належать: час циклу  $t(c)$ , кількість тактів  $n(c)$ , енергія витрачена за один робочий цикл  $Ec$ , енергія корисна за один робочий цикл  $E^*(c)$ , кількість корисної роботи  $A^*(c)$ , об’єм виробленої продукції  $Pr(c)$ , середня подача рідини  $Q(c)$ , середня споживана  $N(c)$  та корисна  $N^*(c)$  потужність.

На другому кроці додаються коефіцієнти, що відображають зміни у часі експлуатації  $(t)$ . Коефіцієнти враховують втрати, пов’язані із зносом обладнання – коефіцієнт втрат від зносу обладнання споживчого рівня  $K(t)_{\text{спож}}$ , коефіцієнт втрат від зносу обладнання енергетичного рівня  $K(t)_{\text{енер}}$ , зміни властивостей рідини та інші фактори, аргументом яких є час використання системи або параметри (наприклад, кількість використаної рідини), що можуть бути вирахованими за показником часу роботи системи.

Для узагальненого показника за проміжок часу  $(t_1 \dots t_2)$  застосовано екстраполяційну залежність:

$$D(t_1, t_2) = D_{(c)} \cdot k_D \frac{t_2 - t_1}{t_{\text{од}}}, \quad (4)$$

де  $t_{\text{од}}$  – тривалість одиничного циклу;  $D(t_1, t_2)$  – інтегрований показник за інтервал часу роботи системи;  $D_{(c)}$  – інтегрований показник за час одиничного циклу;  $k_D$  – коефіцієнт змін показника  $D(t_1, t_2)$  у часі.

Коефіцієнт, у разі потреби, замінено функцією, наприклад, для врахування змін властивостей рідини.

На третьому кроці розраховуються прогнозовані значення інтегрованих показників за інтервал часу, рівний ресурсу апарату  $R_C$ , середньому ресурсу гідроапаратів системи  $R'_C$ , терміну експлуатації технічного об'єкта  $T_C$ :

$$K_{ef}(t_2 - t_1) = \Phi(K_{ef}(t_j), (t_2 - t_1)), (t_2 - t_1) \in \{R'_C, R_C, T_C\}. \quad (5)$$

Очікувані кількісні значення витрат та здобутків за час використання системи, є аргументами комплексного показника ефективності за час циклу  $K_{ef}(t_j)$  чи строку експлуатації  $K_{ef}(T_C)$ .

**Висновки.** Запропоновано дворівневу логіко-функціональну модель багатопривідних циклових систем гідроприводів з паралельною структурою, яка дозволяє прогнозувати енергетичну ефективність шляхом вибору схемного рішення з урахуванням енергетичних втрат системи за типом схемного рішення.

Запропоновано використання в якості критерію ефективності роботи гідросистеми комплексний коефіцієнт, який враховує початкові витрати на створення системи, витрати на експлуатацію за період рівний строку експлуатації системи та ресурс окремих пристроїв, які входять до складу гідроприводу.

**Список літератури:** 1. Тимофеев В. Н. Экономическая эффективность машин: основные факторы, резервы повышения, управление: монография. – Харьков, изд-во «Основа» при Харьковском государственном университете, 1990. – 156 с. 2. Яхно О. М., Пастушенко С. И. Повышение эффективности использования энергии в гидравлических механизмах сельскохозяйственных машин // Всеукраїнський науково-технічний журнал «Промислова гідравліка і пневматика». – 2004. – Вип. 3. – С. 92 – 98. 3. Левченко О. В. Підвищення ефективності роботи систем гідроприводів циклічної дії // В кн. : Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія: машинобудування. – 2012. – Вип. 65. – С. 125 – 130. 4. Левченко О. В. Особливості оцінки ефективності багатопривідної гідравлічної системи // Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Гірничо-електромеханічна». – 2012. – Вип. 2 (24). – С. 142 – 149. 5. Ebel F., von Terzi M. Festo Didactic. Mechatronics. : Festo Didactic GmbH&Co., D73770 Denkendorf, 2000. – 108 S.

**References:** 1. Timofeev, V. N. *Yekonomicheskaya yeffektivnost' mashin: osnovnye faktory, rezervy povysheniya, upravlenie: monografiya* [Economic efficiency of machines: main factors, reserves for improvement, management]. Kharkov, izd-vo "Osnova" pri Har'kovskom gosudarstvennom universitete Publ., 1990. 156 p. 2. Jahno, O. M. and Pastushenko, S. I. *Povyshenie yeffektivnosti ispol'zovaniya yenerгии v gidravlicheskiikh mekhanizмах sel'skokhozyaystvennykh mashin* [Improving energy efficiency in hydraulic mechanisms of agricultural machinery]. *Vseukrayins'kiy naukovotekhnichnyy zhurnal "Promyslova gidravlika i pnevmatyka"* [Ukrainian Scientific and Technical Journal «Industrial Hydraulics and Pneumatics»]. 2004, vol. 3, pp. 92–98. 3. Levchenko, O. V. *Pidvyshennya efektyvnosti roboty system gidroprivodiv tsyklichnoyi diyi* [Improving the efficiency of hydraulic cyclic systems]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu Ukrayiny "KPI". Seriya: mashynobuduvannya* [Bulletin of the National Technical University of Ukraine "KPI". Ser.: Mechanical Engineering]. 2012, vol. 65, pp. 125–130. 4. Levchenko, O. V. *Osoblyvosti otsinky efektyvnosti bagatopryvidnoyi gidravlichnoyi systemy* [The features of evaluating the efficiency of a multi-drive hydraulic system]. *Naukovi pratsi DonNTU. Seriya: "Girnycho-elektromekhanichna"* [Research Papers, DonNTU. Ser.: Mining and Electromechanics]. 2012, vol. 2 (24), pp. 142–149. 5. Ebel, F. and von Terzi, M. *Festo Didactic. Mechatronics.* : Festo Didactic GmbH&Co., D73770 Denkendorf, 2000. 108 p.

Надійшла (received) 07.04.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Губарев Олександр Павлович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (044) 454-96-14; e-mail: gubarev@ua.fm.

**Губарев Александр Павлович** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (044) 454-96-14; e-mail: gubarev@ua.fm.

**Gubarev Alexander Pavlovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: (044) 454-96-14; e-mail: gubarev@ua.fm.

**Левченко Олег Васильович** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (067) 765-18-99; e-mail: tudasuda@ua.fm.

**Левченко Олег Васильевич** – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (067) 765-18-99; e-mail: tudasuda@ua.fm.

**Levchenko Oleg Vasylovich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: (067) 765-18-99; e-mail: tudasuda@ua.fm.

**Корчовний Андрій Васильович** – магістрант, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (067) 187-72-11; e-mail: andru\_sokol@ukr.net.

**Корчовний Андрей Васильевич** – магістрант, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (067) 187-72-11; e-mail: andru\_sokol@ukr.net.

**Korchovniy Andriy Vasylovich** – magistrant, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: (067) 187-72-11; e-mail: andru\_sokol@ukr.net.

Ю. С. КОЗЬМИН, В. С. СУЗДАЛЬ

## РЕДУКЦИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ПРОЦЕССОМ ВЫРАЩИВАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Для управления процессом кристаллизации щелочно-галогидных кристаллов использован косвенный метод синтеза регуляторов низкого порядка и заданной структуры. Для получения робастного регулятора пониженного порядка применяется процедура сбалансированного отсечения. Подход основан на задаче управления по норме  $H_\infty$ . Такой подход уменьшает ошибку, которая обусловлена применением редуцированного регулятора. На конкретном примере показано, что не наблюдается заметного ухудшения робастных свойств при допустимом сохранении свойств системы в области высоких частот.

**Ключевые слова:** робастный ПИД регулятор, монокристаллы, многомерный процесс управления.

**Введение.** Крупногабаритные щелочногалогидные монокристаллы (ЩГК) выращивают *методом Чохральского* на установках типа «РОСТ». В системах управления кристаллизацией скорость роста косвенно оценивается по диаметру растущего монокристалла, который и стабилизируется в процессе выращивания. Диаметр растущего кристалла управляют, изменяя тепловые условия выращивания. Для оценки диаметра растущего кристалла применяют метод измерения падения уровня расплава в результате быстрого дискретного подъема кристалла из расплава на малую величину [1]. Объект управления (ОУ) – это динамическое звено, входом которого являются тепловые условия кристаллизации, а выходом – диаметр монокристалла. При этом необходимо особо подчеркнуть, что синтезируемые регуляторы для управления процессами выращивания должны быть реализуемыми, то есть они должны иметь пониженный порядок с фиксированной структурой [2, 3].

Существует большое количество работ, посвященных методам синтеза регуляторов пониженного порядка. Такие методы, следуя [4], можно разделить на два класса: *прямые*, в которых параметры вычисляются при помощи оптимизации или какой-либо другой процедуры, и *косвенные*, в которых либо сначала находится регулятор полного (высокого) порядка и затем он упрощается (например, редуцируется *методом сбалансированного отсечения*), либо сначала проводится редукция модели объекта управления, для нее синтезируется регулятор, и затем он применяется для исходного объекта. Процедура сбалансированного отсечения имеет много привлекательных свойств, но, в то же время, у нее есть один серьезный недостаток – эта процедура применяется для незамкнутой системы, то есть в процессе редукции никак не учитываются не только свойства регулятора (объекта управления), но и сам факт наличия регулятора (объекта управления). Известны подходы к редукции замкнутой системы, в которых ОУ сначала стабилизируется стандартным регулятором, и только затем к замкнутой системе применяется процедура сбалансированного отсечения [4, 5].

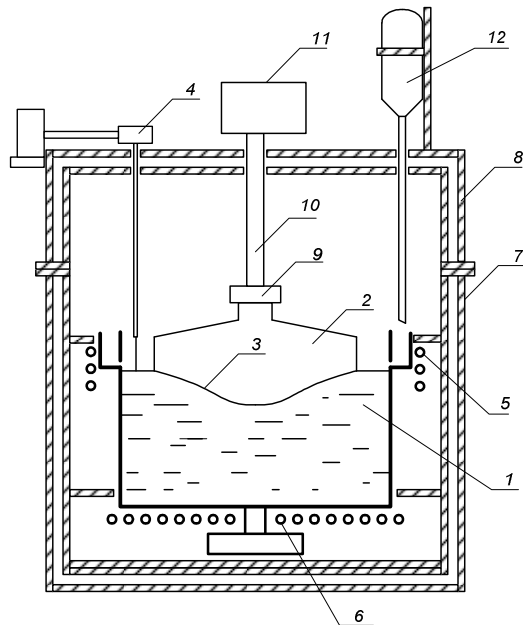


Рис. 1. – Схема ростовой установки: 1 – тигель с расплавом; 2 – растущий кристалл; 3 – фронт кристаллизации; 4 – датчик уровня (уровнемер) со щупом; 5 – боковой нагреватель; 6 – донный нагреватель; 7 – нижний охлаждаемый полукорпус; 8 – верхний охлаждаемый полукорпус; 9 – кристаллодержатель; 10 – штюк кристаллодержателя; 11 – редуктор системы вращения и вытягивания штюка кристаллодержателя; 12 – система подпитки расплава.

возмущения, связанные с изменением характера теплообмена в системе кристалл-расплав. Процесс кристаллизации крупногабаритных монокристаллов становится нестационарным. Исследования процесса кристаллизации ЩГК показывают, что задачу управления процессом выращивания можно свести к управлению объектом с неопределенностью. Проектируемая система управления должна обеспечивать приемлемое качество переходных процессов, необходимую точность и прямую чувствительность (*робастность*) к неопределенности модели объ-

**Постановка задачи.** В качестве объекта управления (ОУ) рассматривается установка типа «РОСТ» для выращивания крупногабаритных щелочно-галогидных (ЩГК) монокристаллов методом Чохральского (рис. 1). Монокристалл 2 вращается с некоторой угловой скоростью и вытягивается на затравку. В процессе роста монокристалла в тигле 1 автоматически поддерживают постоянный уровень расплава за счет подпитки сырьем из боковой кольцевой емкости. Сырье расплавляется боковым нагревателем 5.

**Задача  $H_\infty$  – оптимизации.** При выращивании крупногабаритных ЩГК с увеличением длины растущего образца возникают

екта управління. Следовательно, решение задачи высококачественного управления процессом кристаллизации ЩГК следует искать в классе робастных систем управления.

Для синтеза регуляторов систем управления выращиванием монокристаллов широко используются идеи робастного управления ( $H_\infty$  – оптимизации), в рамках которого проводится синтез робастных алгоритмов управления, учитывающих неопределенность в описании модели объекта управления  $G$  и действующих внешних возмущений.

Задачу  $H_\infty$  – оптимизации для нахождения робастного регулятора будем решать *методом смешанной чувствительности* [3]. Строго правильная рациональная передаточная матрица  $K$  робастного регулятора должна обеспечивать устойчивость замкнутой системы. В соответствии с *критерием Найквиста* для устойчивой системы график  $G(j\omega)K(j\omega)$  не должен проходить или охватывать точку  $(-1, j0)$ , то есть достаточным условием устойчивости системы является  $\|GK\|_\infty < 1$ . Будем считать, что это условие выполняется. Известно, что робастность по возмущениям и робастную стабилизацию в методе смешанной чувствительности можно выразить соотношением:

$$\left\| \begin{array}{c} (I + G_n K)^{-1} \\ (I + G_n K)^{-1} \Delta_a K \\ (I + G_n K)^{-1} G_n \Delta_m K \end{array} \right\|_\infty \leq 1, \quad (1)$$

где  $G_n$  – номинальный ОУ;  $\Delta_a = G - G_n$  – *аддитивная неопределенность*;  $\Delta_m = (G - G_n)/G_n$  – *мультипликативная неопределенность*;  $S = (I + G_n K)^{-1}$  – *функция чувствительности* или передаточная функция ошибки;  $H = (I + G_n K)^{-1} G_n K$  – передаточная функция замкнутой системы;  $R = (I + G_n K)^{-1} K$  – функция чувствительности управления.

Выбор регулятора  $K$  для выполнения всех трех требований в (1) при больших значениях  $\|\Delta_a\|_\infty$ ,  $\|\Delta_m\|_\infty$  может оказаться противоречивым. Поэтому при синтезе робастного регулятора используют подход, который базируется на частотных требованиях к системе, то есть необходимо рационально потребовать выполнение неравенств (1), каждого в своем частотном диапазоне. Первое неравенство должно работать в низкочастотной области (до частоты среза), а второе и третье неравенства – в окрестности частоты среза и правее ее. Для этого вводятся частотные весовые матрицы  $W_1, W_2, W_3$ , обеспечивающие такое частотное разделение. После задания весовых матриц существующая система расширяется так, что она включает в себя уравнения этих матриц как дополнительные фазовые координаты. Данная операция выполняется, например, командой  $[TSS] = \text{augf}(\text{sys}, W_1, W_2, W_3)$  из Robust Control Toolbox (RCT) MatLab, где  $\text{sys}$  – исходная система,  $TSS$  – расширенная система.

Таким образом, все требования к системе управления по ослаблению возмущений и обеспечению робастной устойчивости сводятся, на основании выражения (1), к следующему соотношению:

$$\|H_{y1u1}\|_\infty \leq 1, \quad (2)$$

где  $H_{y1u1} = [S W_1 R W_2 H W_3]^T$  – функция стоимости метода смешанной чувствительности.

Для решения задачи робастной оптимизации, удовлетворяющей условию (2), используем команду  $[\text{gamopt}, \text{sscp}, \text{sscl}] = \text{hinfort}(TSS, \gamma_a)$ . Здесь  $\text{sscp}$  – уравнение регулятора,  $\text{sscl}$  – уравнение расширенной системы с регулятором. Команда  $\text{hinfort}$  осуществляет  $\gamma$ – итерации, чтобы рассчитать оптимальный регулятор для нормы

$$\left\| \begin{array}{c} \gamma H_{y1u1}(\gamma_a) \\ H_{y1u1} \end{array} \right\|_\infty < 1,$$

где  $\gamma_a$  – индекс выходных каналов функции стоимости, которые умножаются на  $\gamma$ . По умолчанию умножаются все выходные каналы. Очевидно, чем больше  $\gamma$ , тем меньше  $\|H_{y1u1}\|_\infty$ , таким образом, искомым является максимальное значение  $\gamma_{\max}$ , при котором решение задачи существует.

Выбор весовых матриц  $W_1, W_2, W_3$  в (2) требует учета особенностей ОУ, таких как информации о диапазоне рабочих частот замкнутой системы, о степени подавления внешних возмущений, о наибольших прогнозах мультипликативных возмущений. Диагональная матрица устойчивых низкочастотных фильтров  $W_1$  выбирается из условия подавления низкочастотных возмущений. Немоделируемая динамика оценивается матрицей  $W_2$  в случае аддитивных отклонений  $\Delta_a$  от номинального объекта  $G_n$  и для случая мультипликативных возмущений  $\Delta_m$  – матрицей  $W_3$ . Из (1) видно, что мультипликативные возмущения «охватывают» и аддитивные, поэтому можно ограничиться только учетом всех возмущений матрицей  $W_3$ , то есть величина  $|W_3^{-1}|$  фактически является оценкой верхней грани-

цы немодулируемой динамики в высокочастотной области. Матрица  $W_2$  может использоваться для ограничения мощности управления, а также как параметр, настраиваемый для регулирования быстродействия. В некоторых случаях введение  $W_2$  необходимо для существования решения рассматриваемой задачи. При этом можно ограничиться простейшим выбором  $W_2 = \varepsilon I$ , где  $\varepsilon$  – малая величина,  $I$  – единичная матрица соответствующих размеров.

**Редукция методом  $H_\infty$  – сбалансированного отсечения.** Для получения робастного регулятора пониженного порядка объединим объект управления  $G$  со стандартным робастным регулятором, сбалансируем эту конфигурацию и применим процедуру сбалансированного отсечения [5]. Такой подход основан на нормализованной  $H_\infty$  задаче управления.

Эта задача описывается в пространстве состояний следующей системой уравнений:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw_1(t) + Bu(t), \quad y = Cx + w_2(t), \quad z_1(t) = Cx(t), \quad z_2(t) = u(t), \quad (3)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния;  $u \in R^m$  – вектор управления;  $y \in R^q$  – выходной вектор;  $w_1$  и  $w_2$  – белый гауссовский шум с нулевым средним значением.

В дальнейшем реализацию  $(A, B, C)$  в пространстве состояний размерности  $n$  будем всегда считать минимальной.

На рис. 2 показана структурная схема к задаче синтеза. Обозначим  $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$  и  $w = [w_1^T \ w_2^T]^T$ . Передаточная функция замкнутой системы от  $w$  к  $z$  будет иметь вид:

$$H(G, K) = \begin{bmatrix} (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1}GK \\ K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

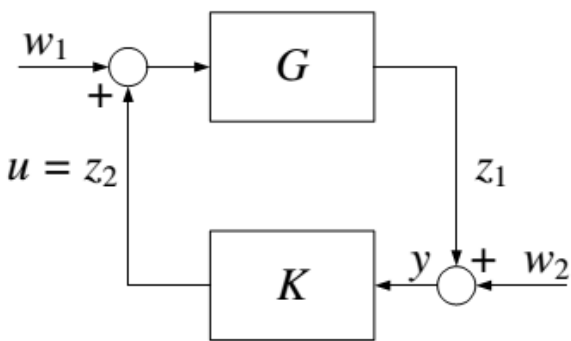


Рис. 2 – Структурная схема задачи синтеза.

В [4] приведен ряд основных определений, которые позволяют сформулировать задачу  $H_\infty$  сбалансированного отсечения замкнутой системы.

*Определение 1.* Регулятор  $K$  является  $(G, \gamma)$  – допустимым, если он стабилизирует  $G$  и если  $\|H(G, K)\|_\infty < \gamma$ .

*Определение 2.* Если  $K$  – это  $(G, \gamma)$  – допустимый регулятор, то тогда  $\|H(G, K)\|_\infty < \gamma$  называется  $(G, \gamma)$  – допустимой передаточной матрицей замкнутой цепи.

Решение нормализованной задачи  $H_\infty$  управления (нахождение нормализованного  $H_\infty$  регулятора) дает следующая теорема, доказательство которой приведено в [6].

**Теорема 1.** Пусть некоторое  $\gamma > \gamma_0$ . Тогда существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение  $X_\infty = X_\infty^T$  алгебраического уравнения Риккати для  $H_\infty$  управления

$$A^T X_\infty + X_\infty A - (1 - \gamma^{-2}) X_\infty B B^T X_\infty + C^T C = 0. \quad (5)$$

Кроме того, существует единственное положительно определенное стабилизирующее решение  $Y_\infty = Y_\infty^T$  алгебраического уравнения Риккати для  $H_\infty$  фильтрации

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - (1 - \gamma^{-2}) Y_\infty C^T C Y_\infty + B B^T = 0. \quad (6)$$

$(G, \gamma)$  – допустимый регулятор существует тогда и только тогда, когда существуют положительно определенные матрицы  $X_\infty$  и  $Y_\infty$ , которые удовлетворяют условию

$$\lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2. \quad (7)$$

Определим

$$Z_\infty = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1}. \quad (8)$$

Нормализованный  $H_\infty$  регулятор  $K_\infty = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix}$  имеет форму наблюдателя  $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$ , где

$$\hat{A} = (A - (1 - \gamma^{-2}) Y_\infty C^T C - B B^T X_\infty Y_\infty), \quad (9)$$

$$\hat{B} = Y_\infty C^T, \quad (10)$$

плюс обратная связь по состоянию  $u = -\hat{C}\hat{x}$ , где

$$\hat{C} = B^T X_\infty Z_\infty. \quad (11)$$

Квадратные корни из собственных значений матрицы  $X_\infty Y_\infty$  назовем  $H_\infty$  – характеристическими значениями  $\nu$  системы  $G$ . Лемма 1.10 из [4] позволяет формально определить  $H_\infty$  сбалансированную реализацию системы  $G$  через преобразование подобия, которое приводит матрицы  $X_\infty$  и  $Y_\infty$  к виду  $N = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$ .

Как было показано в работе [7], редуцированный ОУ и редуцированный  $H_\infty$  регулятор можно получить отсечением тех состояний  $H_\infty$  сбалансированной реализации, которые соответствуют малым значениям  $H_\infty$  – характеристических значений  $\nu$ .

Рассмотрим построение редуцированного  $H_\infty$  регулятора.

**Теорема 2.** Пусть реализация  $(A, B, C)$  в пространстве состояний является  $H_\infty$  сбалансированной для заданного  $\gamma > \gamma_0$ , имеет  $H_\infty$  сбалансированные значения  $\gamma > \nu_1 \geq \dots \geq \nu_n > 0$ , а матрица  $N = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)$  является стабилизирующим решением алгебраических уравнений Риккати для  $H_\infty$  управления и  $H_\infty$  фильтрации. Выберем  $r$  такое, что  $r < n$  и  $\nu_r > \nu_{r+1}$ , а затем разобьем матрицу  $N$  на блоки следующим образом

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix},$$

где  $N_1 = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_r)$  и  $N_2 = \text{diag}(\nu_{r+1}, \dots, \nu_n)$ . Пусть, в соответствии с теоремой 1, регулятор  $K_\infty$  является нормализованным  $H_\infty$  регулятором для объекта  $G$  и заданного  $\gamma$ . Матрицы нормализованного регулятора разобьем на блоки

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Тогда реализация  $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$  в пространстве состояний размерности  $r$  является редукцией нормализованного  $H_\infty$  регулятора, а ошибка, которая обусловлена применением редуцированного регулятора с исходным, не редуцированным ОУ, равна

$$\varepsilon \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \frac{\beta \nu_i}{\sqrt{1 + \beta^2 \nu_i^2}}, \quad (13)$$

где  $\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$ .

**Синтез регулятора.** Проведем синтез робастного регулятора в среде MatLAB. Данные для идентификации объекта управления получены в реальном масштабе времени при выращивании монокристалла NaI(Tl). Процесс выращивания рассматривался как двухмерный линейный стационарный объект управления с двумя входными величинами – температура основного  $Td$  и температура дополнительного нагревателя  $Tb$  и двумя выходами – диаметр кристалла  $Ds$  и температура подпиточного расплава  $Tr$ .

Матричная передаточная функция ОУ имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} W_{Ds}^{Td} & W_{Ds}^{Tb} \\ W_{Tr}^{Td} & W_{Tr}^{Tb} \end{bmatrix},$$

где  $W_{Ds}^{Td} = \frac{1.714s^2 + 2.786s + 1.906}{s^3 + 4.638s^2 + 1.914s + 0.056}$ ,  $W_{Tr}^{Td} = \frac{2.884s + 0.567}{s^2 + 2.785s + 0.519}$ ,  $W_{Ds}^{Tb} = \frac{6.103s^2 + 8.834s + 3.383}{s^3 + 4.638s^2 + 1.914s + 0.056}$ ,

$$W_{Tr}^{Tb} = \frac{-1.482s - 0.483}{s^2 + 2.785s + 0.519}.$$

Модель полностью управляема и наблюдаема. Требования к проектируемой системе управления: замкнутая система с регулятором в виде динамической обратной связи по измеряемому выходу  $y$  должна обеспечивать переходные процессы с перерегулированием не больше 20%, заданное время регулирования, иметь достаточный запас устойчивости.

Весовые функции по каждому входу выбраны следующим образом:

```
numw1=[1 6.5];denw1=[40000 0.15];tfw1=tf(numw1,denw1);
numw2=[1 0.75];denw2=[1500 0.08];tfw2=tf(numw2,denw2);
numw3=[10 0.95];denw3=[150 15];tfw3=tf(numw3,denw3);
numw4=[10 0.03];denw4=[10 16];tfw4=tf(numw4,denw4);
```

Весовые матрицы:

$$W1=[numw1;denw1;numw2;denw2];W2=[0.09;15;0.046;11];W3=[numw3;denw3;numw4;denw4];$$

Для решения задачи синтеза была использована команда `hinfort`. Результаты поиска оптимального решения: наилучшее значение  $\gamma_{\max} = 15.75$ . Регулятор *sscp* имеет 9-ый порядок. Номинальная замкнутая система с номинальным ОУ имеет 14-ый порядок.

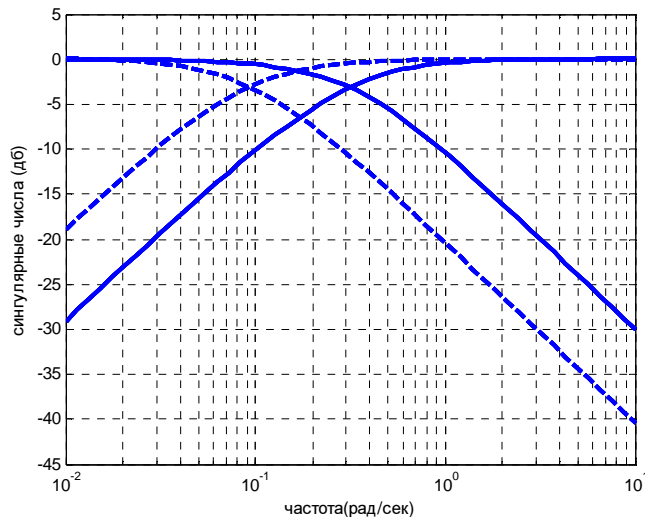


Рис. 3 – Сингулярные значения функции дополнительной чувствительности и функции чувствительности канала управления диаметром растущего кристалла замкнутой системы с регуляторами  $K_{\infty}$  (сплошные линии) и  $K_r$  (штриховые линии).

Методом сбалансированного отсечения, используя команды `balreal` и `modred`, редуцируем в разомкнутой системе регулятор *sscp* до 2-го порядка. Сравним номинальную замкнутую систему управления с системой с редуцированным регулятором 2-го порядка. Для этого сравним *ганкелевы нормы* разности этих систем. Ганкелева норма разности номинальной системы и системы с редуцированным регулятором 2-го порядка  $h_{\text{hankb}} = 0.5788$ .

Проведем редукцию замкнутой системы методом  $H_{\infty}$  – сбалансированного отсечения. Сбалансируем в пространстве состояний систему *sscpG* и найдем для нее стабилизирующее решение  $X_{\infty}$  алгебраического уравнения Риккати для  $H_{\infty}$  управления и стабилизирующее решение  $Y_{\infty}$  алгебраического уравнения Риккати для  $H_{\infty}$  фильтрации. Получаем  $\lambda_{\max}(X_{\infty}Y_{\infty}) = 0.5443$ . Отсюда наименьшее значение  $\gamma$ , для которого существует  $(G, \gamma)$  – допустимый регулятор,  $\gamma_0 = 0.296$ .

Выберем  $\gamma = 1.502$ .  $(G, \gamma)$  – допустимый регулятор существует, так как положительно определенные матрицы  $X_{\infty}$  и  $Y_{\infty}$  удовлетворяют условию (7).

Матрицы  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  нормализованного  $H_{\infty}$  регулятора  $K_{\infty}$  имеют 14-ый порядок. Выберем  $r = 7$ . Редуцированный  $H_{\infty}$  регулятор получим отсечением тех состояний  $H_{\infty}$  – сбалансированной реализации, которые соответствуют  $H_{\infty}$  – характеристическим значениям  $\nu_{r+1}, \dots, \nu_n$ . Тогда, согласно (12), реализация  $(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$  в пространстве состояний размерности  $r = 7$  и является редукцией нормализованного  $H_{\infty}$  регулятора. Получаем замкнутую систему 7-го порядка с реализуемым редуцированным регулятором  $K_r$  второго порядка. Ганкелева норма разности номинальной системы и системы с редуцированным в замкнутой системе регулятором 2-го порядка  $h_{\text{hankb}} = 0.5190$ .

На рис. 3 приведены функции дополнительной чувствительности и функции чувствительности канала управления диаметром растущего кристалла замкнутых систем с регуляторами  $K_{\infty}$  и  $K_r$ .

Анализ частотных характеристик замкнутой системы с регулятором  $K_r$  (рис. 3) показывает, что наблюдается некоторое ухудшение свойств системы в области высоких частот, но нет заметного ухудшения робастных свойств.

Графики переходных процессов в замкнутой системе с регуляторами  $K_{\infty}$  (сплошная линия) и  $K_r$  (штриховая линия), приведенные на рис. 4, показывают, что в системе с редуцированным регулятором увеличилась длительность переходного процесса (20 секунд – в номинальной системе) до 40 секунд, что вполне допустимо в системе управления диаметром крупногабаритных монокристаллов.

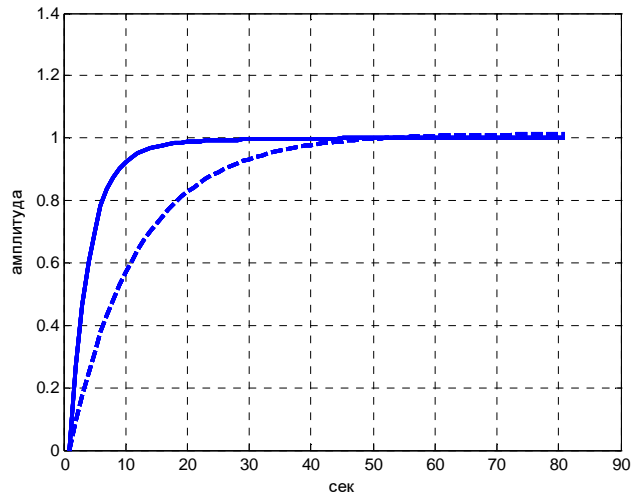


Рис. 4 – Переходная характеристика канала управления диаметром растущего кристалла замкнутой системы с регуляторами  $K_{\infty}$  (сплошная линия) и  $K_r$  (штриховая линия).

**Выводы.** Для управления процессом кристаллизации ЦГК использован косвенный метод синтеза регуляторов низкого порядка заданной структуры. Подход основан на нормализованной  $H_{\infty}$  задаче управления. При получении робастного регулятора пониженного порядка объект управления объединяется со стандартным робастным регулятором. Для этой конфигурации применяется процедура сбалансированного отсечения. Численные эксперименты показали, что подобный подход существенно уменьшает ошибку, обусловленную применением метода сбалансированного отсечения к разомкнутой системе.

**Список литературы:** 1. Горилецкий В. И., Гринева Б. В., Заславский Б. Г., и др. Рост кристаллов. – Харьков : АКТА. – 2002. – 535 с. 2. Суздаль В. С., Стадник П. Е., Герасимчук Л. И., Епифанов Ю. М. Сцинтилляционные монокристаллы: автоматизированное выращивание // Сер. Состояние и перспективы развития функциональных материалов для науки и техники. – Харьков : ИСМА. – 2009. – 260 с. 3. Суздаль В. С., Епифанов Ю. М. Оптимизация управления процессами выращивания сцинтилляционных монокристаллов // Сер. Состояние и перспективы развития функциональных материалов для науки и техники. – Харьков : «ИСМА». – 2015. – 111 с. 4. Бойченко А. П., Курдюков А. П., Тимин В. Н., и др. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами – Москва : ИПУ РАН, –2007. – Вып. 19. – С. 23 – 126. 5. Jonckheere E. A., Silverman L. M. A new set of invariants for linear systems – Application to reduced order compensator design // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 28. – 1983. – P. 953 – 964. 6. Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_{\infty}$  control problems // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 34. – 1989. – No. 8. – P. 831 – 847. 7. Mustafa D., Glover K. Controller reduction by  $H_{\infty}$  – balanced truncation // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 36. – 1991. – No. 6. – P. 668 – 682.

**References:** 1. Goriletskiy, V. I., Gorileckij, V. I., Grinev, B. V. and Zaslavskij, B. G. *Rost kristallov* [Crystal Growth]. Kharkov, AKTA Publ., 2002. 535 p. 2. Suzdal', V. S., Stadnik, P. E., Gerasimchuk, L. I. and Epifanov, Yu. M. Stsintillyatsionnye monokristally: avtomatizirovannoe vyrashhivanie [Scintillation monocrystal: automated growing]. Ser.: *Sostoyanie i perspektivy razvitiya funktsional'nykh materialov dlya nauki i tekhniki* [Ser.: State and prospects of development of functional materials for science and technology]. Kharkov, ISMA Publ., 2009. 260 p. 3. Suzdal', V. S. and Epifanov, Yu. M. Optimizatsiya upravleniya processami vyrashchivaniya stsintillyatsionnykh monokristallov [Optimization of scintillation crystal growth control]. Ser.: *Sostoyanie i perspektivy razvitiya funktsional'nykh materialov dlya nauki i tekhniki* [Ser.: State and prospects of development of functional materials for science and technology]. Kharkov, «ISMA» Publ., 2015. 111 p. 4. Boychenko, V. A., Kurdjukov, A. P. and Timin, V. N. Nekotorye metody sinteza reguljatorov ponizhennogo poryadka i zadannoy struktury [Several methods for synthesizing controller of lower order and given structure]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Management of large systems]. Moscow, IPU RAN Publ., 2007, no. 19, pp. 23–126. 5. Jonckheere, E. A. and Silverman, L. M. A new set of invariants for linear systems – Application to reduced order compensator design. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1983, Vol. 28, pp. 953–964. 6. Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_{\infty}$  control problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1989, Vol. 34, no. 8, pp. 831–847. 7. Mustafa, D. and Glover, K. Controller reduction by  $H_{\infty}$  – balanced truncation. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1991, Vol. 36, no. 6, pp. 668–682.

Поступила (received) 18.03.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Суздаль Віктор Семенович** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, ІСМА НАН України, провідний науковий співробітник лабораторії систем управління відділу технології вирощування монокристалів, м. Харків; тел.: (057) 341-01-45; e-mail: suzdal@isma.kharkov.ua.

**Суздаль Віктор Семёнович** – доктор технических наук, старший научный сотрудник, ИСМА НАН Украины, ведущий научный сотрудник лаборатории систем управления отдела технологии выращивания монокристаллов, г. Харьков; тел.: (057) 341-01-45; e-mail: suzdal@isma.kharkov.ua.

**Suzdal Victor Semenovich** – Doctor of Engineering Sciences, Senior Researcher, ISMA NAS of Ukraine, Leading Researcher of the Laboratory of Control Systems, Single Crystal Growth Technology Department, Kharkov; tel.: (057) 341-01-45; e-mail: suzdal@isma.kharkov.ua.



**Козьмін Юрій Семенович** – кандидат технічних наук, ІСМА НАН України, науковий співробітник лабораторії систем управління відділу технології вирощування монокристалів, м. Харків; тел.: (057) 341-01-45; e-mail: ukoz55@mail.ru.

**Козьмин Юрій Семёнович** – кандидат технических наук, ИСМА НАН Украины, научный сотрудник лаборатории систем управления отдела технологии выращивания монокристаллов, г. Харьков; тел.: (057) 341-01-45; e-mail: ukoz55@mail.ru.

**Kozmin Yuriy Semenovich** – Candidate of Engineering Sciences, ISMA NAS of Ukraine, Researcher of the Laboratory of Control Systems, Single Crystal Growth Technology Department, Kharkov, tel.: (057) 341-01-45; e-mail: ukoz55@mail.ru.

УДК 001.57

**В. О. КОНДРАТЕЦЬ, А. М. МАЦУЙ**

## ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ФОРМУВАННЯ ПОТОКУ ПУЛЬПИ У ПІСКОВОМУ ЖОЛОБІ ОДНОСПІРАЛЬНОГО КЛАСИФІКАТОРА

Представлені результати дослідження формування і руху потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. При співударянні пісків і води у пісковому жолобі створюється суміш з рівномірно розташованим твердим, яка не змінюється і в процесі руху пульпи. Змінна об'ємна продуктивність пісків класифікатора робить рух пульпи нерівномірним. За отриманими залежностями в певні моменти часу можливо визначити середню швидкість руху і висоту пульпи у пісковому жолобі, які однозначно характеризують умови формування потоку, дають можливість відтворення механізму взаємодії між масивами матеріалу та обґрунтування шляхів підвищення точності вимірювання технологічного параметра.

**Ключові слова:** спіральний класифікатор, піски, пісковий жолоб, пульпа, потік, швидкість, висота, витрата.

**Вступ.** Магнетитовий концентрат як продукт збагачення бідних залізних руд є основою сировини чорної металургії України, однак відрізняється підвищеною собівартістю в наслідок значних перевитрат електроенергії, куль і футеровки у першій стадії подрібнення – *класифікації*, які здійснюють здебільшого у кульових млинах і механічних односпіральних класифікаторах. Одним з важливих напрямів зменшення цих витрат, як вказано в [1], є автоматизація даних процесів. Недостатня вивченість процесів руху пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора стримує розробку ефективних засобів контролю об'ємної витрати рідкої суміші у відкритих потоках і, як наслідок, – автоматизацію технологічних процесів подрібнення вихідної руди у першій стадії, що призводить до значних економічних збитків. Зважаючи на те, що дана публікація спрямована на визначення одного з основних технологічних параметрів механічного спірального класифікатора – його піскової продуктивності, її тема є актуальною.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботі [2] вказується на важливість автоматизації перших стадій як подрібнення, так і збагачення. Поряд з цим акцентується увага на відсутності надійних засобів контролю необхідної точності або на значній їх вартості [3], на необхідності розробки інформаційних засобів [1], на важливості автоматичного вимірювання витрати продуктів [4]. В останній час все ширше починають застосовуватись алгоритмічні методи визначення параметрів у збагачувальних технологіях [5, 6], які дозволяють підвищити точність отриманої інформації при вимірюванні деяких параметрів навіть з великою похибкою. Для цього іноді виникає необхідність підвищувати точність вимірювання інших параметрів. У замкненому циклі подрібнення вихідної руди таким параметром є об'ємна витрата пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. У свій час були запропоновані способи визначення піскової продуктивності механічних спіральних класифікаторів [7, 8, 9], які удосконалювалися і зводилися до обчислення продуктивності за формулами з використанням великої кількості конструктивних і технологічних параметрів. Однак їх недоліком є велика кількість параметрів, які враховуються, і необхідний час їх введення і обчислення, що фактично створює запізнення. Перша спроба прямого вимірювання об'ємної витрати пульпи у пісковому жолобі відмічена в роботі [10]. Згодом були розроблені теоретичні положення даного методу [11], однак для створення діючих вимірювальних пристроїв, визначення умов забезпечення їх найвищої точності, враховуючи і формування хвильового руху пульпи, необхідно мати повну уяву про її рух. Рух пульпи у пісковому жолобі двоспірального класифікатора досліджувався в роботі [12], однак тут умови відрізняються від односпірального класифікатора і результати не можуть бути використані. Отже, ніхто не досліджував умови формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора.

**Постановка задачі.** Метою даної роботи є встановлення умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора шляхом дослідження взаємодії пісків з днищем транспортуючого засобу, руху пульпи у ньому, розробки математичних моделей процесу та його моделювання і аналізу результатів.

**Взаємодія пісків з пісковим жолобом.** Дослідження умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора проведемо на технологічному агрегаті 1КСН-30, вузол розвантаження пісків у якому спрощено показано на рис. 1. Висота  $h$  падіння пісків з трикутника  $BCD$  (рис. 1) дорівнює

$$h = BC = CD \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Враховуючи, що  $CD = 1,7$  м, висота падіння пісків  $h = 0,58$  м.

Можливо рахувати, що піски односпірального класифікатора містять твердого 88 %, а води – 12 % [13], що при густині твердого  $3300 \text{ кг/м}^3$  відповідає густині суміші  $2586 \text{ кг/м}^3$ . Тобто, піски спірального класифікатора достатньо густі і падають вони в пісковий жолоб з висоти  $h = 0,58$  м з силою:

$$F_{II} = mg, \quad (2)$$

$m$  – маса пісків;  $g$  – прискорення земного тяжіння.

Нормальна складова сили  $F_{II}$  (рис. 1) дорівнює

$$F_{II1} = mg \cos \alpha. \quad (3)$$

Силу  $F_{II1}$  можливо розглядати як до усього масиву пісків, так і стосовно окремої частинки твердого. При цьому швидкість руху окремої частинки твердого буде дорівнювати [14]

$$v_{II} = \sqrt{2gh}. \quad (4)$$

Допустимо, що піски складаються з сферичних частинок твердого однакового розміру. Лобовий опір руху тіла в середовищі буде [14] дорівнювати

$$F_{II} = C \frac{\rho_C S_{II} v_{II}^2}{2} = C \rho_C S_{II} v_{II}^2 / 2, \quad (5)$$

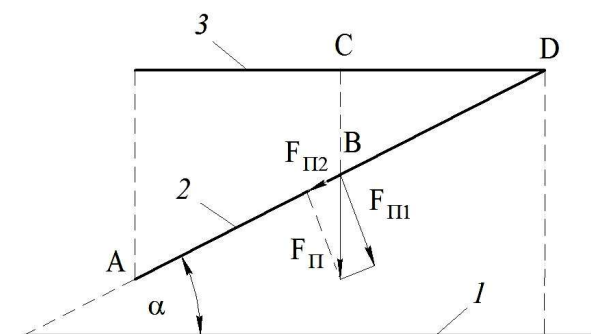


Рис. 1 – Спрощене подання вузла розвантаження пісків у односпіральному класифікаторі:

1 – горизонталь; 2 – пісковий жолоб; 3 – пісковий поріг.

$\rho_C$  – густина середовища;  $C$  – безрозмірна величина, яку називають коефіцієнтом лобового опору;  $S_{II}$  – площа найбільшого поперечного перерізу тіла;  $v_{II}$  – швидкість руху тіла (або середовища).

Коефіцієнт лобового опору для кулі  $C = 0,1 \dots 0,4$ . Автомобіль має  $C = 0,4$  [14]. Враховуючи, що тверде пісків має неправильну, складну форму, можливо з гострими кутами, коефіцієнт лобового опору для твердого пісків слід прийняти  $C = 0,4$ .

Піски механічного односпірального класифікатора можуть містити частинки твердого крупністю до 10 мм, розмір 5 мм може досягати 2,6 %, розмір 3 мм – 12 %, 2 мм – 14,9 %. Отже, можливо рахувати самим характерним розмір частинок твердого, що дорівнює 3 мм. Для даної крупності твердого зробимо розрахунки. Знайдемо і порівняємо між собою силу, яку розвиває частинка твердого розміром 3 мм при падінні з висоти  $h$ , і силу лобового опору проникненню її в середовище пісового продукту.

Для сферичних частинок залежність (2) прийме вигляд

$$F_{II} = \frac{\pi d_{II}^3 \rho_T g \cos \alpha}{6}, \quad (6)$$

$d_{II}$  – діаметр частинки твердого;  $\rho_T$  – густина твердого.

Сила лобового опору сферичної частинки

$$F_{II} = C \pi \rho_C d_{II}^2 v_{II}^2 / 8. \quad (7)$$

З врахуванням (4) залежність (7) подамо у вигляді

$$F_{II} = C \pi \rho_C d_{II}^2 gh / 4. \quad (8)$$

Якщо  $F_{II} = F_{II}$ , то досягаємо межі, коли частинка твердого вже не може увійти в середовище пісків. Тоді знайдемо цю умову, прирівнявши праві частини виразів (6) і (8). В результаті

$$\frac{d_{II} \rho_T \cos \alpha}{3} = \frac{C \rho_C h}{2}. \quad (9)$$

Для виконання умови проникнення частинки у піскове середовище повинна виконуватись умова

$$\frac{d_{II} \rho_T \cos \alpha}{3} > \frac{C \rho_C h}{2}. \quad (10)$$

З врахуванням конструктивних сталих  $h$  і  $\alpha$  вузла розвантаження пісків і прийнятих параметрів нерівність (10) не виконується, оскільки  $3,12 < 299,976$ ,  $\text{кг/м}^2$ .

При зіткненні пісків з дном пісового жолоба вони потрапляють у рідинне середовище, створене водою, що подається у пісковий жолоб механічного односпірального класифікатора. Під дією сили  $F_{II}$  (3), яка складає наближено 70 %  $F_{II}$ , вода протискується і потрапляє у товщу пісків, рівномірно розріджуючи їх. При

$Q_{ВЖ} = const = 24,3 \text{ м}^3/\text{год}$  густина пульпи може доходити до  $2100 \text{ кг}/\text{м}^3$  [15]. За цих умов права сторона нерівності (10) прийме значення  $243,6 \text{ кг}/\text{м}^2$ , що знову набагато більше  $3,12 \text{ кг}/\text{м}^2$ . Якщо розмір твердого зменшувати, то ліва частина (10) буде ще меншою. Отже, при співударянні пісків і дна піскового жолоба вони розріджуються і ні за яких умов розшарування пульпи не може здійснюватись. Пульпа буде мати рівномірний розподіл твердого у своєму об'ємі.

**Особливості руху пульпи у пісковому жолобі.** При падінні пісків у пісковий жолоб класифікатора створюється також сила  $F_{П2}$ , прикладена до рідкої суміші в момент дотику. Вона дорівнює  $F_{П2} = F_{П} \sin \alpha = 0,3228 F_{П}$ , яка значно менша нормальної складової сили, що притискує піски до дна піскового жолоба в момент удару, однак достатня для початку руху матеріалу вздовж нього.

Рух суміші води і твердого завжди є турбулентним [16]. Він характеризується тим, що біля стінок спочатку зберігається деякий шар рідини, яка рухається з малими швидкостями. Цей шар називають *ламінарною плівкою*. Її товщина справляє суттєвий вплив на розподіл швидкостей у потоці і відбувається це у поєднанні з шорсткістю стінок русла [17]. Основна маса рідин при турбулентному режимі руху характеризується більш рівномірним розподілом швидкостей. За абсолютним значенням швидкості більші, ніж при ламінарному русі. В цілому рух рідини супроводжується інтенсивним перемішуванням і пульсаціями швидкостей та тисків. Рух окремих частинок виявляється неупорядкованим, траєкторії часто мають вигляд вигадливих кривих. Це пояснюється тим, що при турбулентній течії поряд з основним поздовжнім пересуванням рідини вздовж русла мають місце поперечні переміщення та обертовий рух окремих об'ємів рідини.

Турбулентному потоку притаманні три статистичні характеристики. До перших статистичних характеристик відносять інтенсивності турбулентності в різних напрямках. Другою статистичною характеристикою є масштаб турбулентності, коли розрізняють *мілкомасштабну* і *крупномасштабну турбулентності*. Спектр турбулентності є третьою її характеристикою. Це функція розподілу кінетичної енергії пульсацій за частотами у часі [18]. У ламінарній плівці частотні (спектральні) характеристики переважно мають коливання більш низької частоти порівняно з коливаннями поза цим шаром. Так, у ламінарній плівці на пластині в поперечному перерізі, що відповідає числу Рейнольдса  $Re = 650000$ , переважне значення мають частоти до  $40 \dots 50$  Гц, при  $Re = 1600000$  – до  $20$  Гц, а поза цим шаром – наближено  $100$  Гц. Частка високих частот (близько  $1000$  Гц) зовсім незначна [18]. Під дією таких коливань відбувається інтенсивне перемішування рухомого середовища, його називають *турбулентним*. Воно супроводжується перемішуванням частинок твердого, які знаходяться у воді [18], забезпечуючи рівномірний склад як за крупністю твердого, так і за його вмістом.

**Математичні моделі.** Витрата пісків у точці розвантаження відрізняється нерівномірністю і циклічністю [19], що породжує нерівномірність руху пульпи і в пісковому жолобі. У гідравліці нерівномірний рух рідини розглядають у вигляді *бору*, *прибою*, *хвилювання* та *корабельних хвиль* [20], а також *гідравлічного стрибка* [16]. Вивчення процесів руху пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора показало, що вони не відповідають умовам перерахованих гідравлічних режимів і їх теорію застосувати не можливо. Враховуючи це, процеси руху пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора необхідно описувати окремим підходом.

В точці сходження пісків у пісковий жолоб механічного односпірального класифікатора зустрічаються два потоки – пісків з об'ємною витратою  $Q_{ВП}$  і води з об'ємною витратою  $Q_{ВЖ} = const = 24,3 \text{ м}^3/\text{год}$  [15], які створюють загальний потік пульпи з витратою  $Q_{ВПЖ}$ . Для даної точки можливо записати рівняння балансу об'ємної витрати в потоках пульпи, виразивши витрату рідкої суміші в пісковому жолобі залежністю

$$Q_{ВПЖ} = B \cdot h \cdot v_{CP}, \quad (11)$$

$B$  – ширина піскового жолоба;  $h$  – висота потоку;  $v_{CP}$  – середня швидкість руху пульпи.

Однак, враховуючи, що в (11) невідомі параметри  $h$  і  $v_{CP}$ , дану залежність реалізувати не можливо. Для таких гідравлічних систем більш доцільною є залежність [16]

$$Q_{ВПЖ} = \omega C \sqrt{Ri}, \quad (12)$$

$\omega$  – площа поперечного перерізу потоку пульпи;  $R$  – гідравлічний радіус;  $i$  – нахил піскового жолоба;  $C$  – коефіцієнт Шезі.

Для піскового жолоба класифікатора гідравлічний радіус можливо подати у вигляді

$$R = \frac{Bh}{B + 2h}. \quad (13)$$

Коефіцієнт Шезі також є функцією висоти потоку  $h$ . Отже, в (12) є лише одна невідома величина  $h$ , оскільки  $\omega$ ,  $C$  і  $R$  при вибраних конструктивних параметрах гідросистеми визначаються лише висотою потоку пульпи у пісковому жолобі.

З розглянутого видно, що змінний у часі потік пісків у гідравлічній системі автоматично компенсується варіюванням його висоти  $h$  у пісковому жолобі. Лише за цієї умови збережеться матеріальний баланс і неперервне транспортування матеріалу. Між змінною витратою пісків  $Q_{ВП}$  і висотою  $h$  пульпи можливо знайти зале-

жність, однак це зробити нелегко в наслідок складності математичного виразу, який містить параметр  $h$ . Цю складність можливо обійти, якщо в конкретні моменти часу знаходити сумарну витрату пісків і води в пісковий жолоб і підставляти це значення у вираз залежності середньої швидкості руху пульпи в пісковому жолобі від її витрати. Відповідно аналогічній залежності, що зв'язує висоту потоку і швидкість руху пульпи у пісковому жолобі визначаємо висоту  $h$ . Знаючи параметри  $v$  і  $h$  та тривалості подачі пісків можливо моделювати формування потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора.

Отримасмо залежності середньої швидкості руху пульпи у пісковому жолобі від її об'ємної витрати та висоти потоку від середньої швидкості переміщення пульпи.

Для умов рівномірного руху пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора отримано рівняння

$$v_{CP} = \frac{(23+1/n)Bh\sqrt{i}}{\left(\sqrt{Bh/(2h+B)} + 23n\right)(2h+B)}, \quad (14)$$

$n$  – шорсткість стінок піскового жолоба.

Виразимо висоту потоку  $h$  з рівняння (11) і підставимо її значення в (14). В результаті цього отримаємо

$$v_{CP} = \frac{(23+1/n)B\sqrt{i}Q_{VITJK}}{\left(\sqrt{BQ_{VITJK}/(2Q_{VITJK} + B^2v_{CP})} + 23n\right)(2Q_{VITJK} + B^2v_{CP})}. \quad (15)$$

Після ряду перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} & 23^2 n^2 B^6 v_{CP}^5 + B^4 (6 \cdot 23^2 n^2 - B) Q_{VITJK} v_{CP}^4 + \\ & + 2B^2 Q_{VITJK} \left\{ 6 \cdot 23^2 n^2 Q_{VITJK} - B [23(23+1/n) B^2 \sqrt{i} \cdot n + 2Q_{VITJK}] \right\} v_{CP}^3 + \\ & + 4Q_{VITJK}^2 \left[ (2 \cdot 23^2 n^2 - B) Q_{VITJK} - 46(23+1/n) B^3 \sqrt{i} \cdot n \right] v_{CP}^2 + \\ & + (23+1/n) B \sqrt{i} Q_{VITJK}^2 \left[ (23+1/n) B^3 \sqrt{i} - 184 Q_{VITJK} n \right] v_{CP} + \\ & + 2(23+1/n)^2 B^2 i Q_{VITJK}^3 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Рівняння (16) зв'язує середню швидкість руху пульпи в пісковому жолобі односпірального класифікатора з її витратою. В ньому середня швидкість руху пульпи визначається у м/с за відомою витратою у м<sup>3</sup>/с. У рівнянні (16) конструктивні сталі гідравлічної системи дорівнюють  $n = 0,025$ ,  $i = 0,3228$ ,  $B = 0,3$  м. З врахуванням конструктивних сталих рівняння (16) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} & 0.000241v_{CP}^5 + 0.013638Q_{VITJK}v_{CP}^4 + 0.108Q_{VITJK} [3.30625Q_{VITJK} - (0.926233 + Q_{VITJK})]v_{CP}^3 + \\ & + 4Q_{VITJK}^2 (0.36125Q_{VITJK} - 1.111484)v_{CP}^2 + 10.73898Q_{VITJK}^2 (0.9665082 - 4.6Q_{VITJK})v_{CP} + 115.30739Q_{VITJK}^3 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рівняння (17) дозволяє визначати середню швидкість потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора за відомою витратою суміші. Відповідно умові *Стодолі* щодо стійкості лінійних систем автоматичного регулювання розв'язок рівняння (17) має хоч би один додатний дійсний корінь або додатну дійсну частину комплексних спряжених коренів, оскільки знаки його коефіцієнтів відрізняються. При розв'язанні рівняння (17) на персональному комп'ютері в середовищі MathCAD 2000 Professional встановлено, що його розв'язок містить два комплексні спряжені корені, один від'ємний і два додатні дійсні різні корені. Розв'язок у вигляді комплексних спряжених коренів і від'ємного кореня у даній задачі не має фізичного змісту. Фізичний зміст задача матиме при певному додатному корені. Встановимо, який саме додатний корінь необхідно приймати до уваги.

Механічний односпіральний класифікатор має ширину близько 3,6 м. Тому можливо стверджувати, що пульпа в пісковому жолобі рухається на відстані 2,3 м. Враховуючи нахил піскового жолоба 34 %, висота пониження пульпи при транспортуванні її до завиткового живильника складає  $h = 0,782$  м. Визначимо швидкість вільного падіння пульпи на таку висоту. При вільному падінні тіл з нульовою початковою швидкістю, що відповідає умовам спірального класифікатора, висота (шлях) опусується залежністю [14]

$$h = gt^2 / 2, \quad (18)$$

$g$  – прискорення земного тяжіння;  $t$  – час падіння тіла.

Час падіння пісків на висоту  $h$  з (18) буде дорівнювати

$$t = \sqrt{2h/g} = 0,4, \text{ с}, \quad (19)$$

а швидкість в процесі вільного падіння тіла з нульовою початковою швидкістю визначається залежністю [14] і дорівнює

$$v = gt = 3.924, \text{ м/с}. \quad (20)$$

За результатами моделювання руху пісків у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора

без подачі додаткової води відповідно рівнянню (17) і витратам піскового матеріалу при розвантаженні встановлена максимальна швидкість серед більших значень додатних коренів, яка дорівнює 2,88 м/с, що практично не можливо у даній гідравлічній системі. При подачі додаткової води у пісковий жолоб швидкість руху пульпи ще збільшиться, а більше значення додатного кореня наблизиться до швидкості вільного падіння тіла. Тому при моделюванні слід приймати до уваги менше значення додатного кореня, отриманого при розв'язанні рівняння (17).

Залежність висоти потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора від середньої швидкості її руху отримаємо з рівняння (14). Виконавши ряд перетворень, рівняння (14) запишемо так:

$$\left\{ (23+1/n)B\sqrt{i} \left[ (23+1/n)B\sqrt{i} - 92nv_{CP} \right] + 2v_{CP}^2 (2 \cdot 23^2 n^2 - B) \right\} h^2 + Bv_{CP} \left[ 4 \cdot 23^2 n^2 v_{CP} - 46n(23+1/n)B\sqrt{i} - Bv_{CP} \right] h + 23^2 n^2 B^2 v_{CP}^2 = 0. \quad (21)$$

Підставимо в (21) значення прийнятих конструктивних параметрів  $B = 0,3\text{ м}$ ,  $n = 0,025$ ,  $i = 0,3228$  і отримаємо

$$(0.7225v_{CP}^2 - 24.6977v_{CP} + 115.30744)h^2 + v_{CP} (0.30675v_{CP} - 3.704654)h + 0.029756v_{CP}^2 = 0. \quad (22)$$

Дане рівняння за відомою середньою швидкістю руху пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора дозволяє знаходити її рівень у транспортному засобі. Воно має два кореня. Розв'язання рівняння (22) на персональному комп'ютері показало, що обидва корені додатні. При моделюванні необхідно брати одне конкретне значення.

Підставимо в рівняння (22) значення середньої швидкості руху пульпи  $v_{CP} = 1\text{ м/с}$ . В результаті отримаємо

$$91.33224h^2 - 3.397904h + 0.029756 = 0, \quad (23)$$

яке дає розв'язки  $h_1 = 0,0231\text{ м}$  і  $h_2 = 0,0141\text{ м}$ . Після підстановки у вихідне рівняння прийнятих значень конструктивних параметрів транспортного засобу і висоти потоку  $h_1 = 0,0231\text{ м}$  отримуємо середню швидкість руху пульпи у пісковому жолобі  $v_{CP} = 1\text{ м/с}$ . Підстановка  $h_2 = 0,0141\text{ м}$  дає значення середньої швидкості  $v_{CP} = 0,6666\text{ м/с}$ , що не відповідає умові задачі. Тому в процесі моделювання необхідно брати більші значення кореня рівняння (22).

**Результати моделювання та їх аналіз.** Використовуючи залежності (17) і (22) виконувалося моделювання умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. Рівняння (17) встановлює зв'язок між об'ємною витратою пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора і її середньою швидкістю. Тобто, рахуючи піски рухомими, визначаємо їх миттєву витрату у пісковий жолоб, а відповідно залежності (17) знаходимо середню швидкість рівномірного їх руху у приймальній пристрій завиткового живильника. За цими ж даними знаходимо відповідно (22) миттєве значення рівня пульпи у пісковому жолобі. Результати моделювання, виконані в діапазоні зміни витрати пісків за один цикл сходження у пісковий жолоб, приведені на рис. 2.

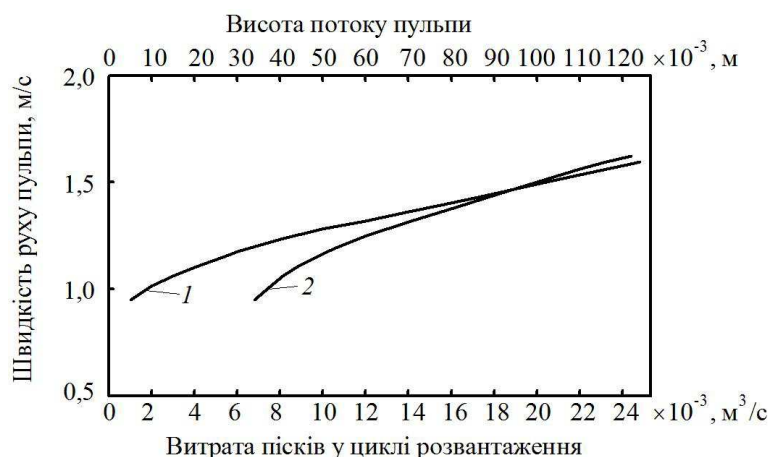


Рис. 2 – Результати моделювання руху пісків у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора при їх розвантаженні в межах одного циклу:

1 – залежність швидкості руху від витрати пісків; 2 – залежність висоти потоку пісків від швидкості.

З рис. 2 видно, що об'ємна витрата пісків за один цикл їх сходження у пісковий жолоб при повному навантаженні змінюється в достатньо широких межах. При цьому охоплюється широкий діапазон варіювання як середньої швидкості руху пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора, так і висоти її потоку. На підставі проведених досліджень з'являється можливість визначення миттєвих значень середньої швидкості руху пульпи і відповідних значень висоти потоку для будь-якого миттєвого значення об'ємної витрати пісків у пісковий жолоб механічного односпірального класифікатора. Це дозволяє отримувати основні показ-

ники потоку послідовно в часі за об'ємною витратою зійшовших пісків – об'ємну витрату пульпи у пісковому жолобі, миттєве значення середньої швидкості руху потоку та його висоти. Вони однозначно характеризують умови формування потоку рідини у пісковому жолобі механічного односпіралного класифікатора і дають можливість побудови механізму взаємодії між масивами пульпи в процесі її руху з тим, щоб найбільш ефективно сканувати її поверхню і найбільш точно визначати об'ємну витрату рідкої суміші.

**Висновки.** Встановлено, що при розвантаженні пісків механічного односпіралного класифікатора вода, яка подається у пісковий жолоб, ефективно проходить у пісковий продукт при співударянні пісків і дна піскового жолоба. При цьому тверде не розшаровується ні за крупністю, ні за концентрацією частинок. В процесі руху в наслідок турбулентності частинки твердого знаходяться в положенні рівномірного розташування у зваженому стані. Змінна об'ємна продуктивність пісків механічного спіралного класифікатора робить рух пульпи нерівномірним. Середню швидкість цього руху і висоту потоку у певні моменти часу можливо визначати за отриманими залежностями. Вони однозначно характеризують умови формування потоку, дають можливість відтворення механізму взаємодії між масивами пульпи та обґрунтування шляхів підвищення точності вимірювання технологічного параметра.

Проведені дослідження відкривають перспективу вивчення закономірностей формування потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпіралного класифікатора та підвищення точності вимірювання об'ємної витрати пульпи у даному процесі.

**Список літератури:** 1. Пивняк Г. Г., Вайсберг Л. А., Кириченко В. И. и др. Измельчение. Энергетика и технология. – М.: Изд. дом «Руда и Металлы», 2007. – 296 с. 2. Азарян А. А., Киреев Ю. Ю., Кучер В. Г. Автоматизация первой стадии измельчения, классификации и магнитной сепарации – реальный путь повышения эффективности обогащения железных руд // Вісник Криворізького національного університету: зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 36. – С. 276 – 280. 3. Купін А. І. Інтелектуальна ідентифікація та керування в умовах процесів збагачувальної технології. – Кривий Ріг: Видавництво КТУ, 2008. – 204 с. 4. Морозов В. В., Топчаев В. П., Улитенко К. Я. и др. Разработка и применение автоматизированных систем управления процессами обогащения полезных ископаемых. – М.: Издательский дом «Руда и Металлы», 2013. – 512 с. 5. Кондратець В. О., Сербул О. М. Ідентифікація співвідношення руда/вода на вході кульового млина // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузево машинобудування, автоматизація: зб. наук. праць КНТУ. – 2006. – Вип. 17. – С. 265 – 272. 6. Кондратець В. О., Мацуї А. М. Ідентифікація співвідношення руда/вода в процесі подрібнення пісків класифікатора // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – №3. – С. 8 – 12. 7. А.с. 1269838 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения производительности спирального классификатора по пескам / В. И. Дмитриев (СССР). – №3904014/22–03; заявл. 27.05.85; опубл. 15.11.86, Бюл. №42. 8. А.с. 1530258 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения производительности спирального классификатора по пескам / Е. Ф. Морозов (СССР). – №4385577/22–03; заявл. 29.02.88; опубл. 23.12.89, Бюл. №47. 9. А.с. 1659102 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ оперативного определения производительности спирального классификатора по пескам / В. И. Дмитриев (СССР). – №4645509/03; заявл. 19.12.88; опубл. 30.06.91, Бюл. №24. 10. А.с. 570398 СССР, МКИ В 03 В 13/04. Устройство для измерения циркулирующей загрузки / Ф. Н. Десярев, А. А. Мерзляков, В. А. Кондратец, Л. П. Байда, Н. В. Гончаров (СССР). – №1676560/03; заявл. 28.06.71; опубл. 30.08.77, Бюл. №32. 11. Кондратець В. О. Теоретичне дослідження сканування поверхні відкритих матеріальних потоків променями незмінної довжини // Вісник Криворізького національного університету: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 35. – С. 174 – 178. 12. Кондратець В. О., Мацуї А. М. Дослідження впливу піскового потоку на стан пульпи у завитковому живильнику // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузево машинобудування, автоматизація: зб. наук. праць КНТУ. – 2007. – №19. – С. 107 – 114. 13. Кондратець В. А. Исследование влагосодержания песков двухспиральных механических классификаторов в промышленных условиях // Вісник Криворізького національного університету: зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 36. – С. 168 – 172. 14. Кузмичев В. Е. Законы и формулы физики. – К.: Наукова думка, 1989. – 864 с. 15. Кондратець В. О., Сербул О. М. Теоретичне дослідження розрідження пісків односпіралного класифікатора джерелом з незмінною витратою води // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузево машинобудування, автоматизація: зб. наук. праць КНТУ. – 2013. – №26. – С. 173 – 180. 16. Чузаев Р. П. Гидравлика. – Л.: Энергия, 1971. – 552 с. 17. Дідур В. А., Савченко О. Д., Пастушенко С. І. и др. Гідравліка, сільськогосподарське водопостачання та гідропривод. – Запоріжжя: Прем'єр, 2005. – 464 с. 18. Лоїцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с. 19. Мацуї А. М. Математичне моделювання формування піскового тіла у міжвитковому просторі механічного спіралного класифікатора // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів: журнал. – 2015. – Том 7. – Вип. 4. – С. 9 – 17. 20. Триккер Р. Бор, прибой, волнение и корабельные волны / Р. Триккер. : [пер с англ. Г. Е. Левитиной]. – Л.: Гидрометеорологическое изд., 1969. – 286 с.

**References:** 1. Pivnyak, G. G., Vaisberg, L. A., Kirichenko, V. I. *Izmel'chenie. Energetika i tekhnologiya* [Grinding. Energy and technology]. Moscow, Izdatel'skii dom «Ruda i Metally», 2007. 296 p. 2. Azaryan, A. A., Kyrenko, Yu. Yu. and Kucher V. G. *Avtomatizatsiya pervoi stadii izmel'cheniya, klassifikatsii i magnitnoi separatsii – real'nyi put' povysheniya effektivnosti obogashcheniya zheleznykh rud* [Automation of the first grinding stage, classification and magnetic separation – a real way to improve the efficiency of iron ore enrichment]. *Visnyk Kryvoriz'kogo nacional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2014, no. 36, pp. 276–280. 3. Kupin, A. I. *Intelektual'na identyfikacija ta keruvannya v umovah procesiv zbagachuval'noyi tehnologii* [Intelligent identification and management process in terms of enrichment technology]. Kryvyi Rih, Vydavnytstvo KТУ, 2008. 204 p. 4. Morozov, V. V., Topchaev, V. P., Ulitenko, K. Ya. *Razrabotka i primenenie avtomatizirovannykh sistem upravleniya protsessami obogashcheniya poleznykh iskopayemykh* [Development and application of the automated control systems in mineral processing]. Moscow, Izdatel'skii dom «Ruda i Metally», 2013. 512 p. 5. Kondratec', V. O. and Serbul, O. M. *Identyfikaciya spivvidnoshennya ruda/voda na vkhodi kul'ovogo mlyna* [Identification of ore / water ratio at the entrance of a ball mill]. *Tekhnika v sil'skogospodars'komu vyrobnytctvi, galuzeve mashynobuduvannya, avtomatyzaciya: zb. nauk. prac' KNTU* [Equipment for agriculture, branch mechanical engineering, automation: digest of scientific papers of the KNTU]. Kirovograd, 2006, no. 17, pp. 265–272. 6. Kondratec', V. O. and Macuj, A. M. *Identyfikaciya spivvidnoshennya ruda/voda v procesi podribnennya piskiv klasyfikatora* [Identification of ore / water ratio in classifier sand grinding]. *Visnyk Vinnyc'kogo politekhnichnogo instytutu* [Bulletin of the Vinnitsa Polytechnic Institute]. Vinnitsa, 2009, no. 3, pp. 8–12. 7. Dmitriev, V. I. (SSSR). *Sposob opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of determining the productiveness of a spiral classifier on sand]. Patent SSSR, A.s. 1269838 SSSR, MKI V 03 V 13/00, no. 3904014/22–03, yayavl. 27.05.85, opubl. 15.11.86, Byul. no. 42. 8. Morozov, E. F. (SSSR). *Sposob opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of determining the productiveness of a spiral classifier on sand]. Patent SSSR, A.s. 1530258 SSSR, MKI V 03 V 13/00, no. 4385577/22–03, yayavl. 29.02.88, opubl. 23.12.89, Byul. no. 47. 9. Dmitriev, V. I. (SSSR). *Sposob operativnogo opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of operative determining the productiveness of a spiral classifier on sand]. Patent SSSR, A.s. 1659102 SSSR, MKI V 03 V 13/00, no. 4645509/03, yayavl. 19.12.88, opubl. 30.06.91, Byul. no. 24. 10. Degtyarev, F. N., Merzlyakov, A. A., Kondratets, V. A., Baida, L. P., and Goncharov, N. V. (SSSR). *Ustroystvo dlya izmereniya tsirkuliruyushchei nagruzki* [A device for measuring circulating load]. Patent SSSR, A.s. 570398 SSSR, MKI V 03 V 13/04, no. 1676560/03, yayavl. 28.06.71, opubl. 30.08.77, Byul. no. 32. 11. Kondratec', V. O. *Teoreticheskie doslidszhennya skanuvannya poverhni vidkrytykh material'nykh potokiv promenyamy nezminnoyi dozhynny* [The theoretical studies of scanning the surface of open material flow by rays of constant length]. *Visnyk Kryvoriz'kogo nacional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2013, no. 35, pp.

174–178. **12.** Kondratec', V. O. and Macuj, A. M. Doslidzhennya vplyvu piskovogo potoku na stan pul'py u zavytkovomu zhyvylynyku [The study of the influence of sand flow on the state of the pulp in a snail feeder]. *Tekhnika v sil'skogospodars'komu vyrobnytvi, galuzeve mashynobuduvannya, avtomatyzatsiya* : zb. nauk. prac' KNTU [Equipment for agriculture, branch mechanical engineering, automation: digest of scientific papers of the KNTU]. Kirovograd, 2007, no. 19, pp. 107–114. **13.** Kondratets, V. A. Issledovanie vlagosoderzhaniya peskov dvukhspral'nykh mekhanicheskikh klassifikatorov v promyshlennykh usloviyakh [The research of moisture content of double-spiral mechanical classifier sands in the industrial conditions]. *Visnyk Kryvoriz'kogo nacional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2014, no. 36, pp. 168–172. **14.** Kuzmichev, V. E. *Zakony i formuly fiziki* [The laws and formulas of physics]. Kyiv, Naukova dumka, 1989. 864 p. **15.** Kondratec', V. O. and Serbul, O. M. Teoretychne doslidzhennya rozridzhennya piskiv odnospral'nogo klasyfikatora dzherelom z nezminnoyu vytratoju vody [The theoretical study of liquefaction of single spiral classifier sand by source with constant water flow]. *Tekhnika v sil'skogospodars'komu vyrobnytvi, galuzeve mashynobuduvannya, avtomatyzatsiya* : zb. nauk. prac' KNTU [Equipment for agriculture, branch mechanical engineering, automation : digest of scientific papers of the KNTU]. Kirovograd, 2013, no. 26, pp. 173–180. **16.** Chugaev, R. R. *Gidravlika* [Hydraulics]. Leningrad, Energiya, 1971. 552 p. **17.** Didur, V. A., Savchenko, O. D., Pastushenko, S. I. and Movchan, S. I. *Gidravlika, sil'skogospodars'ke vodopostachannya ta gidropryvod* [Hydraulics, agricultural water supply and hydraulic drive]. Zaporozhye, Prem'jer, 2005. 464 p. **18.** Loitsyanskii, L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [The mechanics of fluid and gas]. Moscow, Nauka, 1987. 840 p. **19.** Macuj, A. M. Matematychno modelyuvannya formuvannya piskovogo tila u mizhvytkovomu prostori mekhanichnogo spiral'nogo klasyfikatora [Mathematic modeling of formation of sand body in mechanical space of spiral classifier]. *Avtomatyzacija tehnologichnyh i biznes-procesiv* [Automation of technical and business processes]. Odessa, 2015, vol. 7, issue 4, pp. 9–17. **20.** Trikker, R. *Bor, priboi, volnenie i korabel'nye volny* [Bore, surf, waving, and ship waves]. Leningrad, Gidrometeorologicheskoe izd., 1969. 286 p.

Надійшла (received) 25.02.2016

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Кондратець Василь Олександрович** – доктор технічних наук, професор, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

**Кондратець Василь Олександрович** – доктор технических наук, профессор, Кировоградский национальный технический университет, г. Кировоград; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

**Kondratets Vasilii Aleksandrovich** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kirovograd National Technical University, Kirovograd; tel.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

**Мацуй Анатолій Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград; тел.: (0522) 56-70-91; (050) 060-48-70; e-mail: matsuyan@mail.ru.

**Мацуй Анатолій Николаевич** – кандидат технических наук, доцент, Кировоградский национальный технический университет, г. Кировоград; тел.: (0522) 56-70-91; (050) 060-48-70; e-mail: matsuyan@mail.ru.

**Matsui Anatolii Nikolaevich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kirovograd National Technical University, Kirovograd; tel.: (0522) 56-70-91; (050) 060-48-70; e-mail: matsuyan@mail.ru.

УДК 621.43

**А. М. ЛЕВТЕРОВ, О. А. ЛЕВТЕРОВ, Л. И. ЛЕВТЕРОВА****ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛОЖНЫХ ЭФИРОВ ЖИРНЫХ КИСЛОТ БИОДИЗЕЛЬНЫХ ТОПЛИВ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ (ЧАСТЬ 1)**

Анализ научных публикаций позволил обусловить набор расчетных и экспериментальных выборок, которые дают возможность сформировать базу данных о термодинамических и термохимических свойствах сложных метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот, химически связанных в различных комбинациях в биодизельных топливах, производимых из растительных масел. Такая база данных позволит реализовать численное моделирование рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением, работающих как на чистом биодизельном топливе, так и на биоэфирных композициях.

**Ключевые слова:** биотоплива, эфиры жирных кислот, растительные масла, математическое моделирование, рабочий процесс, термодинамические свойства, термохимические свойства, полином.

**Введение.** В общем балансе моторных топлив производство топлива из биологического сырья к 2010 году составило всего 2,2 %, показывая, однако, устойчивую тенденцию роста и по разному распределяясь по континентам. Страны ЕС отдают предпочтение производству биодизельного топлива (47 % против 5,5 % производства биоэтанола), США и Бразилия вместе взятые – 87,6 % биоэтанола против 25 % производства биодизельного топлива [1].

Вовлечение альтернативных топлив (биоэтанол, биодизельное топливо) из биосырья в сферу использования на транспорте, как в чистом виде, так и в смеси с традиционным топливом сформировало определенный перечень требований на их теплофизические свойства.

Этанол – соединение с мало углеродными молекулами, низким молекулярным весом, с известными термодинамическими, термохимическими свойствами и кинетическим механизмом сгорания. Использование этанола в качестве добавки к бензину с точки зрения моделирования сгорания и эксплуатации двигателя проблем не вызывает. Численные исследования моторных свойств биоэтанола и его смесей с бензином проводились для разного типа двигателей [5, 6] и показали, что увеличение содержания спирта в топливной смеси от 30 % и выше сопровождается необходимостью вмешательства в систему управления двигателем.

© А. М. Левтеров, О. А. Левтеров, Л. И. Левтерова, 2016

Другое дело – биодизельное топливо, представляющее собой сложное химическое соединение метиловых или этиловых эфиров высших жирных кислот, полученное переработкой растительных и животных жиров. В странах потребления биодизельного топлива установлена сертификация его свойств. Первой по этому пути пошла Австрия, и сейчас в некоторых странах существуют свои сертификаты. Это оправдано, потому что производство топлива осуществляется разными методами, масштабами и из различного сырья. Свойства, определяющие качество топлива, разделяются на две группы: эксплуатационные моторные свойства и свойства, обусловленные химическим составом, чистотой сырья и полученного продукта. Этим объясняются разные сертификационные требования к свойствам биодизельного топлива стран Австрии, Чехии, Германии, Италии и США [2]. В разных странах биодизельные топлива именуют по-разному, чаще всего это FAME и PME (сложные метиловые эфиры рапсового и пальмового растительных масел) и FAEE (сложный этиловый эфир рапсового масла). Сложные этиловые эфиры используются весьма редко, так как их промышленное производство ограничено даже в Бразилии, где производится и используется в качестве топлива большое количество этилового спирта. Хотя биодизельное топливо на его основе имеет более совершенную степень распада, менее токсично, а следовательно, можно предположить и меньшую токсичность продуктов его сгорания, верх берут коммерческие соображения: для производства сложных этиловых эфиров требуется избыточно очень чистый этиловый спирт, к тому же накладывающий ограничения при отделении глицерина.

Следует отметить необыкновенное многообразие биодизельных топлив, и соответственно их свойств. Так, только FAME насчитывается 14 типов. Химические, физические и биологические свойства жиров определяются входящими в его состав триглицеридами, длиной цепи, количеством двойных связей, степенью ненасыщенности жирных кислот и их расположением. Каждая жирная кислота способна вносить свой вклад в формирование свойств конечного продукта. Так, высокое содержание насыщенных жирных кислот (миристиновой, пальмитиновой, стеариновой) в исходном сырье повышает температуру помутнения топлива, цетановое число, улучшает стабильность, а содержание полинасыщенных жирных кислот (линолевой, линоленовой) – дает обратный эффект.

Сравнение физико-химических свойств традиционного дизельного топлива и биодизельных топлив, полученных из различного растительного сырья, приведены в табл. 1 [3].

В лаборатории ИПМаш НАН Украины, проведена серия экспериментальных моторных стендовых исследований биодизельного топлива. На различных режимах работы получены и проанализированы характеристики двигателя, питаемого этим топливом, его токсические показатели. Затруднения возникли с численным прогнозированием характеристик двигателя на базовой математической модели рабочего цикла дизеля [4]. Моделирование рабочих процессов в ДВС самым тесным образом связано с расчетом процессов горения топлива, кинетической и равновесной его составляющих. Основой для реализации моделирования процессов сгорания являются данные о теплофизических и термодинамических свойствах индивидуальных веществ, представляющих топлива. К сожалению, необходимые сведения о высокотемпературных свойствах биодизельных топлив в газообразной фазе оказались или неизвестны, или недоступны в открытой печати.

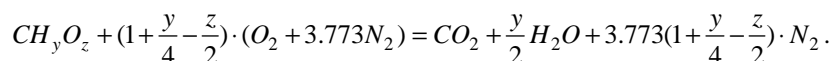
Вопросу исследования биодизельного топлива как моторного посвящено много разноплановых публикаций, но, как правило, в них речь идет об экспериментальных исследованиях характеристик поршневых двигателей, питаемых этим топливом [19 – 21]. Публикации о математическом моделировании рабочих процессов поршневых двигателей, работающих на биодизельном топливе, чаще ограничиваются сообщениями о результатах расчета с помощью стандартных программных комплексов, в частности различных модификаций KIVA, или простым тепловым расчетом, основанным на знании низшей теплоты сгорания и химической формулы топлива.

Таблица 1 – Свойства традиционного дизельного топлива и различных биодизельных топлив (сложных метиловых эфиров жирных кислот)

Название топлива	Свойства топлива						Содержание кислорода, %
	Низшая теплота сгорания, кДж/кг	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Йодное число (IV)	Цетановое число CN	Кинематическая вязкость, мм <sup>2</sup> /с		
					27°C	40°C	
DT (дизельное топливо)	43,35	815	–	47,0	4,3	–	0
SOME (подсолнечное масло)	40,579	878	110 – 143	37,1 – 51	10	4,22	10,89
CSOME (хлопковое)	40,580	874	90 – 140	41,8 – 51,2	11	4 – 6,1	10,49
SME (соевое)	39,760	872	117 – 143	38 – 46,2	11	4,08	10,92
WOME (фритюрное)	40,055	870		56			11,3
COME (кукурузное)	41,140	873 – 913	103 – 149	37,6	–	3,62	10,96
ROME (рапсовое)	41,550	857 – 914	94 – 120	37,6 – 54,4	–	4,6 – 6,7	10,9
JME (ятрофа)	38,450	880	109,5	50,0 – 54,0		4,75 – 5,65	

В [22] такой расчет по простой аналитической модели идет дальше с рассмотрением состава предельных продуктов сгорания на основе соотношения воздух/топливо и эмпирических формул условного молекулярного состава дизельного ( $C_{15,05}H_{27,94}$ ) и биодизельного ( $C_{19,03}H_{35,17}O_2$ , метиловый эфир рапсового масла) топлив. Для получения состава продуктов сгорания используется стехиометрическое соотношение





Эмиссия сажи, монооксидов азота, твердых частиц, столь важных для характеристик токсичности дизеля, не учитывается. По утверждению авторов публикации, данные о сгорании сложного эфира рапсового масла недоступны, поэтому сгорание газовой топливной смеси рассматривается при условии ее обеднения, обогащения и стехиометрии, для чего вводится специальный коэффициент

$$\lambda = \frac{(a/f)_{\text{действительное}}}{(a/f)_{\text{стехиометрическое}}},$$

где  $(a/f)$  – отношение воздух/топливо.

Рассмотрение кинетики горения биодизельного топлива в поршневых двигателях ограничивается рассмотрением эфиров жирных кислот с малой длиной цепи, до 5–7 атомов углерода, например, *метилбутаноата*  $C_5H_{10}O_2$ , для которого известен кинетический механизм окисления. Реакция окисления топлива представляется как реакция окисления «раздробленного» на составляющие главного топлива (например, метилового пальмитата  $C_{19}H_{34}O_2$  на компоненты  $C_7H_{16}$ ,  $C_5H_{10}O_2$  и  $C_7H_8O$ ), для которого рассчитывается с помощью модуля химической кинетики в приложениях горения «СНЕМКИН» конечный продукт окисления с учетом образования и сажи, и оксидов азота [23]. Детальный кинетический механизм сгорания в этой работе сводится к 363 реакциям с 88 разновидностями реагирующих веществ.

Модель выгорания топлива может быть задана известным *уравнением Аррениуса* вида

$$Rt = A_{fr} [fuel]^m [O_2]^n \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

которое отвечает доле выгоревшего топлива в пошаговом развитии процесса сгорания, а параметры,  $m$ ,  $n$ ,  $E$  и  $A_{fr}$ , соответствующие конкретному топливу, получают экспериментальными исследованиями и адаптируются к модели [24].

Обычно данные о теплофизических и термодинамических свойствах различных индивидуальных веществ представляются в виде таблиц или аппроксимирующих полиномов, которые обеспечиваются экспериментальными данными или вычисляются исходя из представления о молекулярном строении рассматриваемых сред методами статистической термодинамики или вычислительной квантовой химии. В инженерной практике термодинамические полиномы разного вида используются давно, с развитием вычислительной техники они стали просто незаменимы. Широко известны таблицы и полиномиальное их представление в работах [7–10]. Все названные источники в основном содержат сведения о неорганических соединениях. Данные об органических молекулах в газовой фазе ограничены в «ассортименте» и, как правило, соотносятся с температурой не выше 1500 К [11], чего недостаточно для расчетов процесса горения в камере сгорания поршневого двигателя, а экстраполяция результатов в область высоких температур приводит к очень большим погрешностям. Для моделирования процессов сгорания в поршневых двигателях необходимо и достаточно рассмотрение свойств топлива на интервале температур от (293–298) до 3000 К.

Таким образом, с учетом вышеизложенного можно сформулировать цель исследования: на базе доступной информации осуществить поиск данных о термодинамических и термохимических свойствах сложных эфиров жирных кислот, химически связанных в биодизельных топливах в различных комбинациях, и затем аппроксимировать полученные данные приближенными выражениями в функции температуры.

#### Формирование базы данных термодинамических и термохимических свойств биодизельных топлив.

При моделировании рабочих процессов поршневых двигателей используются основные термодинамические параметры – энтальпия ( $H_T$ ), температурная составляющая энтропии ( $S_T$ ), полная внутренняя энергия ( $U$ ), изохорная и изобарная теплоемкости ( $C_v, C_p$ ). Остановимся на известных соотношениях

$$H_T = H_{T1} + \int_{T1}^T C_p(T) dT; \quad (1)$$

$$S_T = S_{T1} + \int_{T1}^T C_p(T) d \ln T, \quad (2)$$

где  $H_{T1}$  и  $S_{T1}$  – произвольные величины, константы интегрирования.

Абсолютные значения ряда термодинамических свойств не могут быть определены ни теоретически, ни экспериментально. В таком случае для решения задач, связанных с теплофизическими и химическими процессами, достаточным является знание об изменении термодинамических свойств в химических реакциях или об изменении параметров состояния вещества с необходимым при этом установлением базового состояния вещества в качестве начала отсчета. За начало отсчета полных энтальпий обычно принимается стандартная энтальпия образования вещества (или тепловой эффект химической реакции) ( $\Delta H_{fr}^0$ ) при температуре 298,15 К.

Стандартная энтальпия образования используется в качестве базовой, и тогда выражение (1) принимает

вид [12]

$$H_T^0 = \Delta H_{fT}^0 + \int_{T_f}^T C_p(T) dT,$$

где  $T$  – температура, для которой рассчитывается энтальпия;  $C_p$  – изобарная удельная теплоемкость;  $T_f$  – начальная температура выбранной системы отсчета, при которой полная энтальпия равна химической энергии.

В качестве  $S_{T1}$  может быть использовано значение энтропии при стандартной температуре.

Таким образом, знание величин энтальпии образования, энтропии при стандартной температуре, изобарной теплоемкости на интервале температур до 3000 К для веществ, химически связанных в биодизельных топливах, позволит в конечном итоге аппроксимировать полученные данные традиционными полиномами.

Энтальпии образования большинства веществ оцениваются, как правило, в сложных экспериментах, интерпретация которых затруднена, поэтому для расчета стандартной энтальпии образования в газовой фазе широко используются эмпирические и полумпирические методы (*аддитивный метод групповых вкладов*) и неэмпирические методы квантовой химии [13 – 15]. В отличие от традиционного топлива биодизельное представляет собой многочисленные наборы химически связанных соединений сложных эфиров жирных кислот животного или растительного происхождения, насыщенных кислородом (до 10 – 11 %) с длинной цепью. Сырьем для производства являются растительные масла (рапсовое, соевое, подсолнечное, пальмовое и так далее) или жирные кислоты в свободном состоянии как побочный продукт пищевой рафинизации (дезодорации) масел. Эти органические соединения с большой молекулярной массой и содержанием до 63 атомов углерода характеризуются большой вязкостью, низкой текучестью и летучестью, меньшим давлением испарения, склонны к застыванию и гелеобразованию. Непосредственно для питания двигателя использоваться не могут в силу своих теплофизических свойств, перечисленных выше, и, кроме того, способствующих нагарообразованию, коксованию поршневых колец, нарушению процесса впрыскивания топлива, разжижению смазочного масла.

Биодизельные топлива синтезируются эстерификацией свободных жирных кислот или переэтерификацией глицеридов (триглицеридов, диглицеридов, моноглицеридов), смесь которых на 98 % определяет состав жиров, метиловым, этиловым или другим низкотемпературным спиртом в присутствии катализатора. Кроме смеси сложных эфиров жирных кислот, в конечном продукте переэтерификации присутствует глицерин и другие примеси.

На процесс переэтерификации, а, следовательно, и на качество и свойства биодизельного топлива влияют условия протекания реакции, мольное соотношение спирта и масла, тип и количество катализатора, продолжительность реакции, чистота реагентов. В конечном продукте (биодизельном топливе) в зависимости от сырья и процесса производства должно содержаться более 96 – 98 % эфиров, а содержание спирта, моно-, ди- и триглицеридов, общего глицерина, металлов  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Ca}^+$ ,  $\text{Mg}^+$ , йода, фосфора – в процентах по массе в соответствии с действующей сертификацией топлива.

Упрощенная схема реакции переэтерификации представлена на рис. 1, механизм реакции может меняться в зависимости от условий.

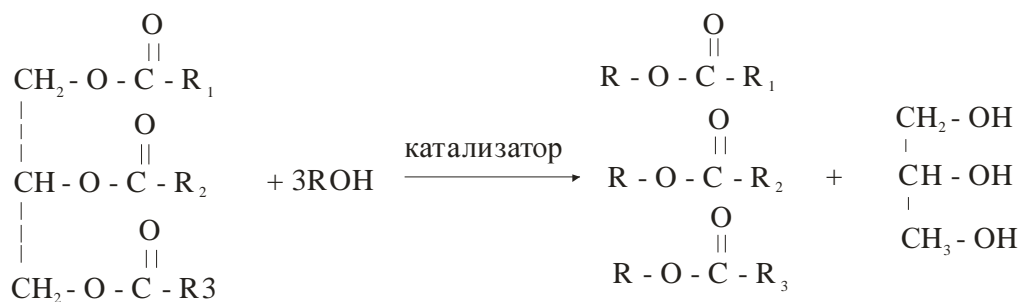


Рис. 1 – Упрощенная схема переэтерификации растительных масел.

Триглицерид + спирт  $\xrightarrow{\text{катализатор}}$  смесь сложных эфиров + глицерин;

$R$  – радикал низкотемпературного спирта;

$R_1, R_2, R_3$  – радикалы жирных кислот триглицеридов.

В биодизельные топлива входит различное количество сложных эфиров, с качественно различными свойствами, которые накладываются соответствующей жирной кислотой. Так, топливо, полученное из масла сои, содержит 12 сложных эфиров разных жирных кислот с содержанием атомов углерода от 8 до 24; из пальмового масла – 5 эфиров с содержанием углерода от 16 до 18 атомов, из рапсового масла – тех же 5 эфиров, но совершенно в другом процентном отношении [16 – 18], (табл. 2).

Таблица 2 – Средний состав жирных кислот некоторых растительных масел\*

Вид масла	Длина цепи, вид двойной связи и массовая доля жирной кислоты в %														
	C8	C10	C12	C14	C16	C16:1	C18	C18:1	C18:2	C18:3	C20:0	C20:1	C22:0	C22:1	C24:0
соевое	0,02			0,08	0,61		4,27	24,2	51,36	7,48	0,36	0,28	0,4	0,07	0,14
пальмовое					40,6		5,1	42,8	11,0	0,5					
рапсовое					4,2		1,2	56,8	21,7	15,7					

\*В обозначении жирных кислот (СХ:У) первые два индекса указывают на количество атомов углерода в цепи жирной кислоты, третий – на число двойных связей.

Анализ данных о свойствах сложных эфиров, полученных из доступных литературных источников в отечественной и зарубежной литературе, позволяет разделить требования к свойствам биодизельных топлив на три группы.

К первой группе относятся свойства, востребованные в процессе проектирования оборудования и собственно производства топлив. При решении задач синтеза биодизельного топлива и оптимизации его производства фигурируют фундаментальные теплофизические, термодинамические и термохимические свойства. Это — плотность в жидкой и газообразной фазах, давление испарения, теплоемкость в жидкой и газообразной фазах, теплота парообразования, стандартная энтальпия образования, составляющая энергии Гиббса, энтропия, а также критические и надкритические параметры. Прогнозирование свойств синтезируемых биодизельных топлив также сталкивается с отсутствием данных о свойствах большинства жирных кислот и их эфиров. В настоящее время значительный объем таких сведений накоплен разве что о физико-химических свойствах диметилвых эфиров дикарбоновых кислот.

Ко второй группе относятся свойства, которые характеризуют использование сложных эфиров непосредственно в двигателях (табл. 1). Недостатка в таких данных нет, наоборот, этому посвящено много работ, публикаций и исследований.

И наконец, к третьей группе относятся свойства сложных эфиров, характеризующие их в процессе сгорания, и с помощью которых обеспечивается возможность прогнозирования этого процесса методами математического моделирования. Интерес к подобным исследованиям, судя по публикациям, стал появляться в последние 10 – 12 лет. Однако, несмотря на научные достижения в вычислительных методах квантовой химии, позволяющих (в отличие от классических методов) без экспериментальных данных прогнозировать свойства равновесной фазы смесей на стадии производства биодизельного топлива, термохимические характеристики связанных соединений малодоступны или неизвестны, или неполны, порой сомнительны и противоречивы.

Обратимся к работам по исследованию и получению термохимических и термодинамических свойств биотоплив, касающихся как свойств совокупного продукта, так и его составляющих. Введением в термохимию сложных эфиров может служить работа [26], в которой приводится расчет свойств биотоплива, полученного из отходов целлюлозного сырья, с помощью групповых методов и с привлечением программного комплекса Gaussian 03. Для оценки параметров аддитивности применяется многофункциональный метод наименьших квадратов. Таким образом, получены энтальпии формирования в газовой и жидкой фазах и энтальпии испарения для алифатических сложных эфиров, а также различных простых триглицеридов при температуре 298 К.

При моделировании процесса производства биодизельного топлива основные свойства беспримесных его составляющих можно оценить, основываясь на структуре вещества, а затем с их помощью получить и другие свойства. В работе [27] используются несколько методов для прогнозирования основных свойств жирного ряда: точки кипения ( $T_b$ ), критических температур ( $T_c$ ), давления ( $p_c$ ), объема ( $V_c$ ), ацентрического фактора ( $\omega$ ), удельной теплоемкости ( $C_p^0$ ), составляющей энергии Гиббса ( $\Delta_f G^0$ ), энтальпии формирования ( $\Delta_f H^0$ ). Оценивается прогнозирующая возможность методов на базе экспериментальных данных. В результате сформированы основные свойства для 8 типов растительных масел 22 жирных кислот и сложных метиловых и этиловых эфиров этих жирных кислот, и значения стандартных энтальпий образования этих сложных эфиров – первые успешные результаты наших поисков (табл. 3).

Таблица 3 – Стандартная энтальпия образования сложных метиловых и этиловых эфиров ЖК некоторых растительных масел

	Стандартная энтальпия образования масел и сложных эфиров $\Delta_f H^0$ , кДж/(моль·К)							
	Наименование масла							
	Кокосовое	Пальмовое	Хлопковое	Кукурузное	Соевое	Подсолнечное	Рапсовое	Арахисовое
Масло	-1834,0	-1953,8	-1751,0	-1638,6	-1707,7	-1678,6	-1740,0	-1817,3
Сложный метиловый эфир	-663,4	-673,3	-605,7	-552,7	-591,2	-581,5	-602,0	-623,8
Сложный этиловый эфир	-654,2	-694,1	-626,5	-572,7	-612,1	-602,4	-622,8	-644,4

Значения стандартной теплоты образования для некоторых сложных метиловых эфиров жирных карбоновых кислот с содержанием атомов углерода в молекулярной цепи от семи до двадцати пяти приводятся в [28].

В работе [29] моделируются надкритические условия производства биодизельного топлива (FAME) на примере его производных реагентов. Моделирование осуществляется с использованием метода группового вклада, оцениваются значения точки кипения, плавления; критическое давление, температура и объем. Там же приводятся значения стандартной энтальпии испарения и формирования.

Большой массив данных удалось получить благодаря работе [30], где дается термодинамическая оценка свойств соединений в газообразном состоянии, связанных в биодизельном топливе. Представлены значения  $C_p$ ,  $\Delta H_{fT}^0$  и энтропии для глицерина ( $C_3H_8O_3$ ), некоторых кислот рапсового масла и ограниченного числа других эфиров в диапазоне температур 300 – 1400 К с интервалом в 100 градусов, а также при стандартной температуре. Интересна информация о затратах времени центрального процессора на расчет этих величин, оно значительно увеличивается с увеличением содержания углерода в молекуле рассматриваемого соединения.

Особой фундаментальностью отличаются работы [31, 32] по исследованию и определению термодинамических свойств газовой фазы сложных метиловых и этиловых эфиров целого ряда растительных масел. Посредством вычислений квантовой химии в соответствии с протоколом подходящих для этого промышленно предопределенных веществ в работах определены и представлены в диапазоне температур 300 – 5000 К стандартные энтальпии образования (298,15 К), удельные изобарные теплоемкости, энтропии. Эти результаты, как заявляют авторы, не имеют аналогов в опубликованной литературе и очень важны для моделирования химии сгорания и для получения важных потребительских свойств топлива: температуры воспламенения, скорости распространения взрыва, пределов воспламенения, периода задержки воспламенения, химической кинетики сгорания, видов загрязняющих веществ, скорости распространения пламени и так далее.

Систематизировав все приведенные в вышеперечисленных источниках сведения (табличные данные не приводятся из-за очень большого объема), создав необходимый пакет данных по  $C_p(T)$ ,  $S(T_{fT})$ ,  $S(T)$ ,  $\Delta H_{fT}^0$  для 22 сложных метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот, можно перейти к следующему этапу исследований, то есть к аналитическому представлению в функции температуры удельной изобарной теплоемкости, полных энтальпий и температурной составляющей энтропии.

Поскольку биодизельное топливо представляет собой набор из  $k$  химически связанных эфиров различных жирных кислот с массовой долей  $g_i$  каждого, то при заданной температуре  $T$  для аддитивного значения термодинамической величины, относящейся к топливу в целом, справедливо выражение

$$R(T) = \sum_{i=1}^k g_i r_i(T),$$

где  $R(T)$  – искомая термодинамическая величина ( $C_p(T)$  или  $S(T)$ , или  $\Delta H_{fT}^0$ ) для сложного эфира жирных кислот;  $r_i(T)$  – вычисленное значение искомой термодинамической величины ( $C_p(T)$ ,  $S(T)$ ,  $\Delta H_{fT}^0$ ) для  $i$ -го эфира жирной кислоты.

**Резюме.** Проведен информационный поиск данных о термодинамических и термодинамических свойствах биодизельных топлив и выполнен анализ полученных сведений. Обусловлен набор расчетных и экспериментальных выборок, который может стать основой для формирования базы данных сложных метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот, химически связанных в различных композициях в разнообразных видах биодизельных топлив. Создание такой базы связано с необходимостью численного моделирования рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением, работающих как на чистом биодизельном топливе, так и на бионефтяных композициях. Виды полиномов, аппроксимирующих термодинамические функции, и значения соответствующих коэффициентов полиномов – предмет исследований второй части статьи.

**Список литературы:** 1. Coyle William T. Global Biofuel Production and Food: Implications for Asia Pacific // PFSSO: Moving Beyond Market Volatility to Food Security, Taipei, 2011. – 32 p. 2. Meher L. C., Vidyasaagar D., Naik S. N. Technical aspects of biodiesel production by transesterification – a review // Renewable and sustainable energy reviews. – 2006. – Vol. 10 (3). – P. 248 – 268. 3. Palash S. M., et al. Impacts of biodiesel combustion on NO<sub>x</sub> emissions and their reduction approaches // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2013. – Vol. 23. – P. 473–490. 4. Левтеров А. М., Левтерова Л. И. Численное моделирование рабочего цикла дизеля с непосредственным впрыском. Прогнозирование эмиссии сажи и оксидов азота // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – № 5. – С. 141 – 154. 5. Левтеров А. М., Левтерова Л. И., Гладкова Н. Ю. Результаты численного исследования характеристик автомобильного двигателя, работающего на бензоэтаноле // Двигатели внутреннего сгорания. – 2013. – № 2. – С. 17 – 21. 6. Левтеров А. М., Левтерова Л. И., Гладкова Н. Ю., Мараховский В. П., Авраменко А. Н. Расчетно-экспериментальные исследования характеристик двигателя МемЗ-307.1 на бензоэтанольных смесях // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – Вып. 27. – С. 107 – 113. 7. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справ. изд. / Под ред. В.П. Глушко. – М. : Наука, 1971. – Т1. – 265 с. 8. Гуревич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание в 4-х томах. – М. : Наука, 1978 – 1982 г. 9. Краткий справочник физико-химических веществ / ред. А. А. Равдель, К. П. Мищенко. – Л. : Химия., 1974. – 200 с. 10. JANAF thermochemical tables. NSRDS-NB537 (2th edn) US National Bureau of Standards, 1971. – 929 p. 11. Reid R. C., Prausnitz J. M. The properties of gases and liquids. – New York : McGraw-Hill, 1988. – 741 p. 12. Буркат А. Термодинамические данные для расчета процессов горения // Химия горения / ред. У. Гарднера. – М. : Мир. – 1988. – С. 404 – 421. 13. Cohen N., Benson S. W. Estimation of heats of formation of organic compounds by additivity methods // Chemical Reviews. – 1993. – Vol. 93, № 7. – P. 2419 – 2438. 14. Cohen N. Revised group additivity val-

ues for enthalpies of formation (at 298 K) of carbon-hydrogen and carbon-hydrogen-oxygen compounds // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* – 1996. – Vol. 25, № 6. – P. 1411 – 1481. **15.** Curtiss L.A., et al. Gaussian-3 (G3) theory for molecules containing first and second-row atoms // *Journal of Chemical Physics.* – 1998. – Vol. 109, № 18. – P. 7764 – 7776. **16.** Yuan W., Hansen A. C., Zhang Q. Predicting the temperature dependent viscosity of biodiesel fuels // *Fuel.* – 2009. – № 88. – P. 1120 – 1126. **17.** Agarwal A. K. Biofuels (alcohols and biodiesel) applications as fuels for internal combustion engines // *Progress in Energy and Combustion Science.* – 2007. – № 33. – P. 233 – 271. **18.** Lee H. V., Yunus R., Juan J. C., Taufiq-Yap Y. H. Process optimization design for Jatropha-ased biodiesel production using response surface methodology // *Fuel Processing Technology.* – 2011. – №92. – P. 2420 – 2428. **19.** Keskin Ali, Metin Gürü, Duran Altıparmak, Kadir Aydın Using of cotton oil soapstock biodiesel–diesel fuel blends as an alternative diesel fuel // *Renewable Energy.* – 2008. – № 33. – P. 553 – 557. **20.** Марченко А. П., Прохоренко А. А., Осетров А. А., Смайлис В., Сенчила В. Сравнительная оценка эффективности применения растительных топлив в дизельном двигателе // *Двигатели внутреннего сгорания.* – 2004. – № 1. – С. 46 – 51. **21.** Кулманаков С. П. Биотоплива для дизелей: направления и основные результаты исследований // *Двигатели внутреннего сгорания.* – 2010. – №1. – С. 85 – 88. **22.** Chuepeng S., Komintarachat C. Thermodynamic Properties of Gas Generated by Rapeseed Methyl Ester–Air Combustion Under Fuel-Lean Conditions // *Kasetsart J. Nat. Sci.* – 2010. – № 44. – P. 308 – 317. **23.** Valeri I. G., Yang J. / Construction of combustion models for rapeseed methyl ester bio-diesel fuel for internal combustion engine applications // *Biotechnology Advances.* – 2009. – № 27(5). – P. 641 – 655. **24.** Yuan W., et al. Spray ignition and combustion modeling of biodiesel fuels for investigating NO<sub>x</sub> emissions // *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers.* – 2005. – Vol. 48. – №3. – P. 933 – 939. **25.** Lucie C., et al. Combustion chemical kinetics of biodiesel and related compounds (methyl and ethyl esters): Experiments and modeling – Advances and future refinements // *Progress in Energy and Combustion Science.* – 2013. – № 39. – P. 340 – 382. **26.** Verevkin S.P., et al. Thermochemical and Ab Initio Studies of Biodiesel Fuel Surrogates: 1,2,3-Propanetriol Triacetate, 1,2-Ethanediol Diacetate, and 1,2-Ethanediol Monoacetate // *Ind. Eng. Chem. Res.* – 2009. – № 48. – P. 7388 – 7399. **27.** Larissa P., Ceriani R., Guirardello R. Estimation of Physical Properties of Vegetable Oils and Biodiesel using Group Contribution Methods // *Chemical engineering transactions.* – 2013. – Vol. 32. – P. 535 – 540. **28.** Toscano G., Duca D. Renewable energy content of fatty acid methyl esters (FAME) and glycerol // *Journal of Agricultural Engineering.* – 2009. – Vol. 40. – №4. – P. 47 – 53. **29.** Glisic S., Skala D. The prediction of critical parameters for triolein, diolein, monoolein and methyl esters // 9th International Symposium on Supercritical Fluids, France. – 2009, May 18–19. – Режим доступа : <http://www.tf.ni.ac.rs/organizacija/nis/Rad%20sa%20naucnog%20skupa/The%20prediction%20of%20critical%20parameters%20for%20triolein,%20diolein.pdf> – Дата обращения : 14 марта 2016. **30.** Borghi D., Abreu C., Guirardello R. Thermochemical properties estimation for biodiesel related mixtures // 3-rd International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 2012, July 1–5. – Режим доступа : [https://www.researchgate.net/publication/269113994\\_Thermochemical\\_properties\\_estimation\\_for\\_biodiesel\\_related\\_mixtures](https://www.researchgate.net/publication/269113994_Thermochemical_properties_estimation_for_biodiesel_related_mixtures) – Дата обращения : 14 марта 2016. **31.** Osmont A., Catoire L., Gökalp I. Thermochemistry of Methyl and Ethyl Esters from Vegetable Oils // *International Journal of Chemical Kinetics.* – 2007. – Vol. 39. – №9. – P. 481 – 491. **32.** Osmont A., Catoire L., Gökalp I. Ab initio study of some radicals of fatty acids methyl esters // 3-rd European Combustion Meeting ECM, Greece, 2007. – P. 1 – 6.

**References:** 1. Coyle, William T. Global Biofuel Production and Food: Implications for Asia Pacific. *PFSO: Moving Beyond Market Volatility to Food Security*, December 1–2, 2011, Taipei, Available at: <http://www.pecc.org/resources/foodagriculture-1/1804-global-biofuel-production-and-food-implications-for-asia-pacific> (accessed 25.03.16). 2. Meher, L. C., Vidya, Sagar D. and Naik, S. N. Technical aspects of biodiesel production by transesterification – a review. *Renewable and sustainable energy reviews.* 2006, Vol. 10 (3), pp. 248–268. 3. Palash, S. M. Impacts of biodiesel combustion on NO<sub>x</sub> emissions and their reduction approaches. *Renewable and Sustainable Energy Reviews.* 2013, Vol. 23, pp. 473–490. 4. Levterov, A. M. and Levterova, L. I. Chislennoe modelirovanie rabocheho tsikla dizelya s neposredstvennyim vpryskom. Prognozirovanie emissii szahii i oksidov azota [Numerical simulation of direct injection diesel engine working cycle. Predicting soot and nitrogen oxide emissions]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnе modeljuvannja v tehnicі ta tehnologijah* [Bulletin of the NTU "KhPI". Ser.: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkov, 2013, no. 5, pp. 141–154. 5. Levterov, A. M., Levterova, L. I. and Gladkova, N. Y. Rezultaty chislennogo issledovaniya harakteristik avtomobil'nogo dvigatelya, rabotajuschego na benzoetanole [Results of numerical study of characteristics of automobile engine working on petrolethanol]. *Dvigateli vnutrennego sgoraniya* [Internal combustion engines]. Kharkov, 2013, no. 2, pp. 17–21. 6. Levterov, A. M. Levterova, L. I., Gladkova, N. Y., Marahovskiy, V. P. and Avramenko, A. N. Raschetno-eksperimental'nyie issledovaniya harakteristik dvigatelya MeMZ-307.1 engine running on gasoline ethanol mixtures]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnе modeljuvannja v tehnicі ta tehnologijah* [Bulletin of the NTU "KhPI". Ser.: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkov, 2012, Vol. 27, pp. 107–113. 7. Alemasov, V. E. and Dregalin, A. F. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svoystva produktov sgoraniya. Sprav. izd* [Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products. Ref. ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1971, vol. 1, 265 p. 8. Gurvich, L. V. *Termodinamicheskie svoystva individualnyh veschestv* [Thermodynamic properties of individual substances]. Spravochnoe izdanie v 4-h tomah [Reference edition in 4 volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1978–1982. 9. Ravdel, A. A. *Kratkiy spravochnik fiziko-himicheskikh veschestv* [A quick reference guide of physico-chemical agents]. Leningrad, Himiya Publ., 1974, 200 p. 10. Stull, D. R. and Prophet H. *JANAF thermochemical tables.* 2nd ed., NSRDS-NBS 37, 1971. 1141 p. 11. Reid, R. C., Prausnitz, J. M. and Sherwood, T. K. *The properties of gases and liquids.* New York: McGraw-Hill, 1988, 741 p. 12. Burkat, A. Termodinamicheskie dannye dlya rascheta protsessov goreniya [Thermodynamic data for the calculation of combustion processes]. *Himiya goreniya* [Chemistry of combustion]. Moscow, Mir Publ., 1988, pp. 404–421. 13. Cohen, N. and Benson, S. W. Estimation of heats of formation of organic compounds by additivity methods. *Chemical Reviews.* 1993, Vol. 93, no. 7, pp. 2419–2438. 14. Cohen, N. Revised group additivity values for enthalpies of formation (at 298 K) of carbon-hydrogen and carbon-hydrogen-oxygen compounds. *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 1996, Vol. 25, no. 6, pp. 1411–1481. 15. Curtiss, L. A. Gaussian-3 (G3) theory for molecules containing first and second-row atoms. *Journal of Chemical Physics.* 1998, Vol. 109, no. 18, pp. 7764–7776. 16. Yuan, W., Hansen, A. C. and Zhang, Q. Predicting the temperature dependent viscosity of biodiesel fuels. *Fuel.* 2009, no. 88, pp. 1120–1126. 17. Agarwal, A. K. Biofuels (alcohols and biodiesel) applications as fuels for internal combustion engines. *Progress in Energy and Combustion Science.* 2007, no. 33, pp. 233–271. 18. Lee, H. V., Yunus, R., Juan, J. C. and Taufiq-Yap, Y. H. Process optimization design for Jatropha-ased biodiesel production using response surface methodology. *Fuel Processing Technology.* 2011, no.92, pp. 2420–2428. 19. Keskin, Ali, Gürü, Metin, Altıparmak, Duran and Aydın, Kadir. Using of cotton oil soapstock biodiesel–diesel fuel blends as an alternative diesel fuel. *Renewable Energy.* 2008, no. 33, pp. 553–557. 20. Marchenko, A. P., Prohorenko, A. A., Osetrov, A. A., Smaylis, V. and Senchila, V. Sravnitel'naya otsenka effektivnosti primeneniya rastitel'nyh topliv v dizel'nom dvigatele [Comparative evaluation of efficiency of using vegetable oils for diesel engine]. *Dvigateli vnutrennego sgoraniya* [Internal combustion engines]. Kharkov, 2004, no. 1, pp.46–51. 21. Kulmanakov, S. P. Biotopliva dlya dizeley: napravleniya i osnovnyie rezultaty issledovaniya [Biofuels for diesel engines: the direction and the main research results]. *Dvigateli vnutrennego sgoraniya* [Internal combustion engines]. Kharkov, 2010, no. 1, pp. 85–88. 22. Chuepeng, S., and Komintarachat, C. Thermodynamic Properties of Gas Generated by Rapeseed Methyl Ester–Air Combustion Under Fuel-Lean Conditions. *Kasetsart J. Nat. Sci.* Thailand, 2010, no. 44, pp. 308–317. 23. Valeri, I. G. and Yang, J. Construction of combustion models for rapeseed methyl ester bio-diesel fuel for internal combustion engine applications. *Biotechnology Advances.* 2009, no. 27 (5), pp. 641–655. 24. Yuan, W. Spray ignition and combustion modeling of biodiesel fuels for investigating NO<sub>x</sub> emissions *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers.* 2005, Vol. 48, no.3, pp. 933–939. 25. Lucie, C. Combustion chemical kinetics of biodiesel and related compounds (methyl and ethyl esters): Experiments and modeling – Advances and future refinements. *Progress in Energy and Combustion Science.* 2013, no. 39, pp. 340–382. 26. Verevkin, S. P. Thermochemical and Ab Initio Studies of Biodiesel Fuel Surrogates: 1,2,3-Propanetriol Triacetate, 1,2-Ethanediol Diacetate, and 1,2-Ethanediol Monoacetate. *Ind. Eng. Chem. Res.* 2009, no. 48, pp. 7388–7399. 27. Larissa, P., Ceriani, R. and Guirardello, R. Estimation of Physical Properties of Vegetable Oils and Biodiesel using Group Contribution Methods. *Chemical engineering transactions.* 2013, Vol. 32, pp. 535–540. 28. Toscano, G. and Duca, D. Renewable energy content of fatty acid methyl esters (FAME) and glycerol. *Journal of Agricultural Engineering.* 2009, Vol. 40, no.4, pp. 47–53. 29. Glisic, S. and Skala, D. The prediction of critical parameters for triolein, diolein, monoolein and methyl esters. *International Symposium on Supercritical Fluids.* France, 2009, May, (Full text: Topic: Properties: P018 (6 pages) no. ISBN: 978-2-9511591-7-4). Available at:

<http://www.tf.ni.ac.rs/organizacija/nis/Rad%20sa%20naucnog%20skupa/The%20prediction%20of%20critical%20parameters%20for%20triolein.%20diols.pdf> (accessed 14.03.2016). **30.** Borghi, D., Abreu, C. and Guirardello, R. Thermochemical properties estimation for biodiesel related mixtures. *3-rd International Conference on Engineering Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, 2012, July 1–5. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/269113994\\_Thermochemical\\_properties\\_estimation\\_for\\_biodiesel\\_related\\_mixtures](https://www.researchgate.net/publication/269113994_Thermochemical_properties_estimation_for_biodiesel_related_mixtures). (accessed 14.03.2016). **31.** Osmont, A., Catoire, L. and Gökalp, I. Thermochemistry of Methyl and Ethyl Esters from Vegetable Oils. *International Journal of Chemical Kinetics*. 2007, Vol. 39, no. 9, pp. 481–491. **32.** Osmont, A., Catoire, L. and Gökalp, I. Ab initio study of some radicals of fatty acids methyl esters. *3-rd European Combustion Meeting ECM*, Greece, 2007, pp. 1–6.

Поступила (received) 01.04.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Левтеров Антон Михайлович** – канд. техн. наук, ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Антон Михайлович** – канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Levterov Anton Mikhailovich** – Candidate of Technical Sciences, IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Олександр Антонович** – канд. техн. наук, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Александр Антонович** – канд. техн. наук, Национальный университет гражданской защиты Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Levterov Alexander Antonovich** – Candidate of Technical Sciences, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Левтерова Людмила Іванівна** – ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Левтерова Людмила Ивановна** – ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

**Levterova Lyudmila Ivanovna** – IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppp@ipmach.kharkov.ua.

УДК 621.43

**А. М. ЛЕВТЕРОВ, О. А. ЛЕВТЕРОВ, Л. И. ЛЕВТЕРОВА**

#### ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СЛОЖНЫХ ЭФИРОВ ЖИРНЫХ КИСЛОТ БИОДИЗЕЛЬНЫХ ТОПЛИВ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ (ЧАСТЬ 2)

В результате аппроксимации дискретных табличных данных о термодинамических и термохимических свойствах двадцати двух метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот получены коэффициенты полиномов, описывающих основные термодинамические характеристики этих веществ в функции температуры на интервале 300 – 3000 К. Таким образом восполняется отсутствие сведений о термодинамических свойствах целого ряда биодизельных топлив, получаемых из различных растительных масел, которое затрудняет численное моделирование рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением.

**Ключевые слова:** биотоплива, эфиры жирных кислот, растительные масла, математическое моделирование, рабочий процесс, термодинамические свойства, термохимические свойства, полином.

**Введение.** Необходимым условием для расчета состава и свойств высокотемпературных смесей является наличие информации о термодинамических и термохимических свойствах индивидуальных веществ, входящих в состав топлива и продуктов сгорания. Реализация численных исследований рабочих процессов поршневых двигателей, работающих на альтернативных биодизельных топливах, в настоящее время затруднена в связи с отсутствием такой информации. Чтобы восполнить этот пробел, первая часть публикации (часть 1, см. статью в этом сборнике) была посвящена анализу информации о термодинамических и термохимических свойствах эфиров высших жирных кислот, химически связанных в биодизельных топливах, как то – стандартной энтальпии образования ( $\Delta H_{fT}^0$ ), энтропии при стандартной температуре ( $S_{fT}$ ), энтропии ( $S(T)$ ) и изобарной теплоемкости ( $C_p(T)$ ) в функции температуры.

Для большинства неорганических и некоторого ряда органических химических соединений созданы термодинамические базы данных в разных научных центрах (*Термоцентр им. В.П. Глушко, THERMO (NASA), THERMOCHEM, JANAF, CHEMKIN* и другие [1, 2, 3, 4, 5, 6]), которые все время пополняются. Данные по биодизельным топливам отсутствуют, во всяком случае, в открытой печати. В результате обработанной информации, изложенной во многих публикациях (часть 1), собраны сведения о свойствах сложных метиловых и этиловых эфиров 11 высших жирных кислот: лауриновой, тетрадекановой, пальмитиновой, пальмитолеиновой, маргариноновой, маргаринолеиновой (margaroleic acid), стеариновой, олеиновой, линолевой, линоленовой, арахидиновой.

© А. М. Левтеров, О. А. Левтеров, Л. И. Левтерова, 2016

Этого вполне достаточно, чтобы в дальнейших исследованиях рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением руководствоваться свойствами биодизельных топлив (БДТ), представляющих собой химически связанные соединения сложных метиловых (или этиловых) эфиров именно этих жирных кислот.

Количество масел, которые могут служить сырьем для БДТ, наиболее полно представлено в [7]. Свойства практически любого БДТ можно описать с помощью приобретенных сведений. Так, БДТ рапсового масла состоит на 5 % (весовых долей) из сложного метилового эфира пальмитиновой кислоты; 2,5% сложного метилового эфира стеариновой кислоты; 59 % сложного метилового эфира олеиновой кислоты; 21 % сложного метилового эфира линолевой кислоты; 9 % сложного метилового эфира линоленовой кислоты; 1 % сложного метилового эфира арахидиновой кислоты и 1,5 % сложных метиловых эфиров других кислот, а БДТ из соевого масла – это смесь сложных эфиров тех же самых жирных кислот, но в других пропорциях [8]. Таким образом, биодизельное топливо ( $B_k$ ), полученное из растительного масла  $k$ , можно представить как смесь сложных эфиров соответствующих жирных кислот  $n$ , выделенных из имеющихся данных об  $j$  сложных метиловых и этиловых эфирах  $E_i$

$$B_k = \sum_i^n \gamma_i \cdot E_i, \quad i = 1 \dots n \text{ из } j, \quad j = 22,$$

где  $\gamma_i$  – весовая доля сложного эфира  $i$  – той жирной кислоты в рассматриваемом биодизельном топливе.

**Цель и постановка задачи.** Выражения температурной зависимости реальных значений термодинамических функций имеют очень сложный вид и для реализации расчетов требуют большого количества справочных данных. Текущая задача состоит в том, чтобы выборку данных из таблиц 6 и 7 из [9] о свойствах сложных эфиров, полученных специалистами-термохимиками расчетными методами квантовой химии, наряду со специально разработанными приложениями для этих высокомолекулярных соединений в диапазоне температур от 300 до 5000 К, представить в виде приближенной аналитической зависимости. При этом в [9] отмечается, что погрешность получения результатов для энтальпии формирования меньше 1 Ккал/моль, а при определении теплоемкости наблюдается недооценка результата в диапазонах температур 300 – 500 К, а затем переоценка при 1000 К и 2000 К. Есть важное замечание, что для моделирования процессов сгорания отклонения в  $\pm 3$  Ккал/моль допустимы, но их влияние не может быть продемонстрировано, потому что на момент написания, как утверждается в [9], не существовало химической кинетической модели, способной описать процесс сгорания этих составов.

При моделировании процессов сгорания используются три фундаментальные термохимические функции  $H_T$ ,  $C_p(T)$ ,  $S_T$ . Если данные о них предлагаются в виде дискретных, табличных значений, их необходимо представить как непрерывную, аппроксимирующую функцию. Теория математической аппроксимации включает в себя методы получения приближенной зависимости *полиномами, сплайнами, отрезками ряда Фурье, полиномами по ортогональным многочленам, собственными функциями краевых задач*. Как правило, термодинамические функции представляются полиномами различного вида. Важно, насколько точно полином в целом описывает зависимость термодинамической величины от температуры. Экстраполяция полинома за пределы температурной области, в которой проводится аппроксимация, связана с увеличением погрешности и с возможным изменением характера зависимости. Величина погрешности и вид полинома зависят от методов подгонки полиномов под табличные данные. Это могут быть «сшитые» по интервалам температур полиномы, когда конец одного является началом второго с точным значением аппроксимируемой в этой точке величины, или взаимно перекрывающиеся опять же по характерным температурным точкам, или полиномы одновременной подгонки по всем аппроксимируемым термодинамическим величинам. К последним относятся *термодинамические полиномы NASA* [4] для интервала температур 300 – 5000 К. Широко распространены *термохимические таблицы JANAF* [5] с подгонкой на интервале 300 – 5000 К. Базы данных имеют свою структуру информации, единицы измерения, набор индивидуальных веществ, методы построения полиномов. Для сравнения ниже представлены некоторые приближенные выражения температурной зависимости энтальпии и изобарной теплоемкости:

$$C_p(T)/R = a_1 + a_2T + a_3 + T^2 + a_4T^3 + a_5T^4;$$

$$H = a_0 + \sum_{q=1}^7 a_q \cdot x^q, \quad \text{где } x = 0,001T;$$

$$H/RT = a_1 + \frac{a_2}{2}T + \frac{a_3}{3}T^2 + \frac{a_4}{4}T^3 + \frac{a_5}{5}T^4 + \frac{a_6}{T};$$

$$H = A_j + 10^{-4} \left[ -2a_{-2}x^{-1} + a_{-1} + a_2x + a_1x^2 + 2a_2x^3 + 3a_3x^4 \right], \quad \text{где } x = 10^{-4} \cdot T.$$

**Расчет коэффициентов аппроксимирующих полиномов.** Методы аппроксимации обычно основаны на минимизации суммы квадратов отклонений или минимизации суммы модулей отклонений фактического и приближенного значений. Если число заданных точек превышает число определяемых коэффициентов аппроксимации, чаще всего для аппроксимации используется *метод наименьших квадратов* (МНК), при котором среднеквадратичная ошибка минимальна [10].

Для приближенного представления дискретных значений термодинамических свойств сложных эфиров

жирных кислот введем непрерывную функцию  $\bar{f}(x)$  в виде линейной комбинации  $m$  базисных функций, выбор которых зависит от свойств той реальной функции  $f(x)$ , к которой принадлежат дискретные значения:

$$\bar{f}(x) = A_0\bar{f}_0(x) + A_1\bar{f}_1(x) + A_2\bar{f}_2(x) + \dots + A_m\bar{f}_m(x) = \sum_{k=0}^m A_k \cdot \bar{f}_k(x). \quad (1)$$

Каждому сложному эфиру в исходной таблице поставлено в соответствие  $n$  значений температуры (переменная  $x$ ),  $n$  фактических значений некой функции  $f(x_i)$ , которое обозначим как  $f_i$ , и вычисляемое приближенное значение непрерывной функции  $\bar{f}(x_i)$

$$\bar{f}(x_i) = A_0\bar{f}_0(x_i) + A_1\bar{f}_1(x_i) + A_2\bar{f}_2(x_i) + \dots + A_m\bar{f}_m(x_i).$$

Отклонение заданного и вычисляемого значений  $s_i = f_i - \bar{f}(x_i)$ , а затем сумму квадратов этих отклонений по всем значениям переменной получим в виде

$$S = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left[ f_i - \sum_{k=0}^m A_k \cdot \bar{f}_k(x_i) \right]^2. \quad (2)$$

Отклонения заданных значений от аппроксимирующей функции будут минимальны при  $S \rightarrow \min$ . В роли независимых переменных функционала  $S$  выступают коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ , а необходимым условием минимума является равенство нулю его частных производных первого порядка по независимым переменным  $A_k$ , то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A_0} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ A_0\bar{f}_0(x) + A_1\bar{f}_1(x) + A_2\bar{f}_2(x) + \dots + A_m\bar{f}_m(x) - f_i \right] \cdot \bar{f}_0(x_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial A_1} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ A_0\bar{f}_0(x) + A_1\bar{f}_1(x) + A_2\bar{f}_2(x) + \dots + A_m\bar{f}_m(x) - f_i \right] \cdot \bar{f}_1(x_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial A_2} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ A_0\bar{f}_0(x) + A_1\bar{f}_1(x) + A_2\bar{f}_2(x) + \dots + A_m\bar{f}_m(x) - f_i \right] \cdot \bar{f}_2(x_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial A_m} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[ A_0\bar{f}_0(x) + A_1\bar{f}_1(x) + A_2\bar{f}_2(x) + \dots + A_m\bar{f}_m(x) - f_i \right] \cdot \bar{f}_m(x_i) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Приведем запись полученной системы линейных алгебраических уравнений к одной из традиционных форм – скалярной

$$\begin{aligned} \Phi_{00}A_0 + \Phi_{10}A_1 + \Phi_{20}A_2 + \dots + \Phi_{m0}A_m &= B_0; \\ \Phi_{01}A_0 + \Phi_{11}A_1 + \Phi_{21}A_2 + \dots + \Phi_{m1}A_m &= B_1; \\ \Phi_{02}A_0 + \Phi_{12}A_1 + \Phi_{22}A_2 + \dots + \Phi_{m2}A_m &= B_2; \\ \Phi_{0m}A_0 + \Phi_{1m}A_1 + \Phi_{2m}A_2 + \dots + \Phi_{mm}A_m &= B_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Phi_{jk}$  – скалярное произведение базисных функций  $\sum_{i=1}^n \bar{f}_j(x_i) \cdot \bar{f}_k(x_i)$ ,  $B_j$  – скалярное произведение  $\sum_{i=1}^n \bar{f}_k(x_i) \cdot f_i$ ,  $i$  изменяется от 1 до  $n$ ,  $j$  от 0 до  $m$ ,  $k$  от 0 до  $m$  и фиксировано для каждого из  $(m+1)$ -го уравнения.

Матрица системы  $\Phi$  при неизвестных коэффициентах имеет размерность  $(m+1) \times (m+1)$ , симметрична и положительно определена, вектор – столбец искоемых коэффициентов  $A$  размерности  $(m+1)$ , вектор – столбец свободных членов  $B$  размерности  $(m+1)$ . В матричной форме запись системы уравнений (4) примет вид

$$\Phi \cdot A = B.$$

Решение системы уравнений (4), доставляющей минимум функционалу  $S$  (2), может быть осуществлено любым из известных методов: Гаусса, Гаусса-Жордана, Крамера. Полученные в результате решения неизвестные коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$  подставляются в уравнение (1), что конкретизирует приближенную функцию  $\bar{f}(x)$ .

Главная задача при построении полиномов – добиться необходимой (или заданной) точности воспроизведения термодинамической величины. Качество приближения может быть оценено величиной среднеквадратичного отклонения

$$\delta = \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{f}(x_i) - f_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений (4) оформлен в виде программного моду-



ля, позволяющего изменять как вид базисных функций, так и размерность системы и, кроме того, получать в графическом виде приближенную (аппроксимирующую) функцию.

Обратимся к конкретному осуществлению формирования таблицы неизвестных коэффициентов при базисных функциях для всех 22 сложных эфиров жирных кислот в соответствии с выборкой по изобарной теплоемкости  $C_p(T)$ . В случае необходимости возможно решение системы уравнений (4) и для дискретных значений энтропии. Выбор вида базисных функций сделан в пользу интерполяционных полиномов, согласуемых с [1], базовой моделью [11] и математической моделью рабочего процесса дизельного двигателя [12].

Представим приближенное выражение для изобарной теплоемкости  $C_p(T)$  в виде полинома шестой степени с введением масштабного коэффициента  $x = T \cdot 10^{-3}$ , тогда

$$C_p(T) = \bar{f}(x) = \sum_{k=0}^6 A_k \cdot x^k .$$

Решение системы уравнений (4) было осуществлено для всех 22 представленных выборок изобарной теплоемкости сложных метиловых и этиловых эфиров жирных кислот на интервале температур 300 – 3000 К, числовые значения коэффициентов обобщенных многочленов сведены в табл. 1. Среднеквадратичная погрешность, вычисленная по формуле (5), находится в пределах (0,18 ... 0,28).

Таблица 1 – Значения изобарной теплоемкости лауриновой кислоты [9]

Эфиры лауриновой кислоты		Температура, К									
		300	400	500	600	800	1000	1500	2000	2500	3000
$C_p(T)$ , кал/(моль·К)	метиловый эфир	72,6	93,7	113,2	129,8	155,7	174,6	202,9	217,0	224,6	229,1
	этиловый эфир	77,8	100,6	121,5	139,4	167,3	187,5	218,0	233,1	241,3	246,1

Простые соотношения, связывающие основные термодинамические функции, позволяют при наличии приближенной зависимости для одной термодинамической функции получить другие необходимые величины простым интегрированием. Если в качестве исходного полинома использован полином для изобарной теплоемкости  $C_{pT} = f(T)$ , то энтропия и энтальпия будут вычисляться по формулам

$$S_T = S_{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{f(T)}{T} \cdot dT ; \quad H_T = H_{T_0} + \int_{T_0}^T f(T) dT .$$

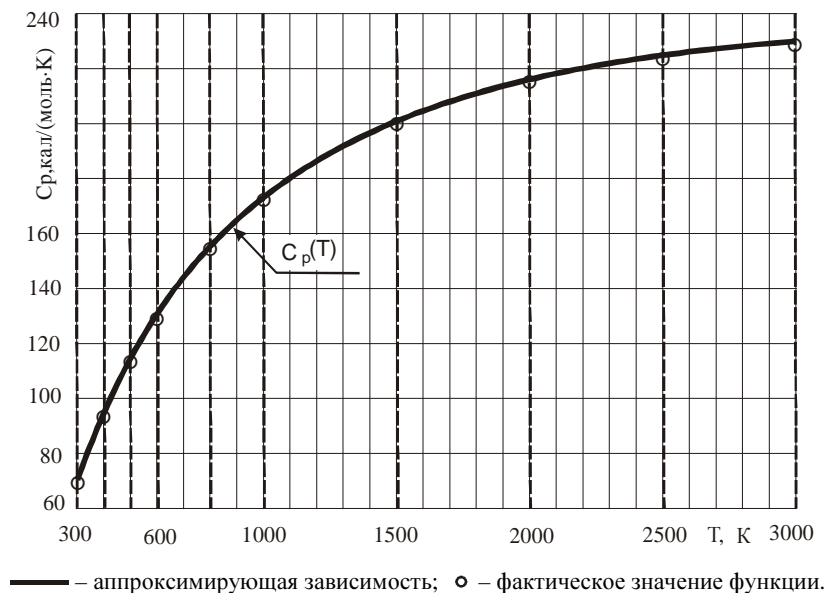


Рис. 1 – Аппроксимирующая зависимость изобарной теплоемкости сложного метилового эфира лауриновой кислоты в функции температуры.

Если в качестве исходного полинома использовать полином для энтропии  $S_T = F(T)$ , то энтальпия и удельная теплоемкость будут вычислены, соответственно, так:

$$H_T = H_{T_0} + \int_{T_0}^T \frac{dF(T)}{dT} \cdot dT ; \quad C_p = \frac{\partial H}{\partial T} .$$

Таблица 2 – Коэффициенты аппроксимирующих полиномов термодинамических свойств сложных эфиров жирных кислот, химически связанных в биодизельных топливах												
Кислота	Сложный эфир ЖК	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A1	A5	A6	AS
Лауриновая (dodecanoic)	МЭ	-12,0281727	333,3510645	-181,2845428	22,14647395	20,4807528	-8,9836275	1,0956974	-149	154		
Лауриновая I (dodecanoic)	ЭЭ	-13,9129482	362,9627254	-204,4801042	33,60366001	16,8132926	-8,2836827	1,0359495	-157,2	162,2		
Миристиновая (myristic)	МЭ	-14,8086899	383,9392449	-208,0245722	24,88663277	23,6446227	-10,2793781	1,2471187	-158,4	169,2		
Миристиновая I (myristic)	ЭЭ	-16,4751625	411,3922888	-224,5018176	27,43764336	25,5355416	-11,1998429	1,3654096	-166,6	177,3		
Пальмитиновая (palmitic)	МЭ	-18,1963148	438,0583092	-241,9302353	34,15491622	23,8995006	-10,9613267	1,3500085	-167,8	184,1		
Пальмитиновая I (palmitic)	ЭЭ	-19,1909553	461,4852519	-249,8500518	28,33372027	29,9237832	-12,8855769	1,5637127	-176	192,4		
Пальмитолеиновая I (palmitoleic)	МЭ	-17,9684319	437,4850317	-268,7616008	68,03511688	5,31711208	-6,0921317	0,8547654	-137,7	185,3		
Пальмитолеиновая (palmitoleic)	ЭЭ	-20,2365642	468,2748904	-291,8394274	76,62281266	4,48893994	-6,4315099	0,9266151	-145,8	193,6		
Маргариновая I (margaric)	МЭ	-18,7704783	458,0585754	-242,6662095	21,43284889	33,3511229	-13,7387058	1,647697	-172,6	191,6		
Маргариновая (margaric)	ЭЭ	-21,8866422	494,7038082	-280,8270121	48,04877102	21,8369619	-11,0379201	1,3890606	-180,7	199,9		
Маргаринолеиновая I Margaroleic	МЭ	-19,1306178	461,1492709	-276,4544551	61,16430147	12,4086296	-8,4365157	1,1253954	-142,5	194,2		
Маргаринолеиновая Margaroleic	ЭЭ	-21,6787694	494,1070562	-306,3198294	78,96407606	5,70985365	-7,0391722	1,0045667	-150,6	201,6		
Стеариновая (stearic) I	МЭ	-20,976832	488,6464897	-268,6702647	36,89507514	27,0633704	-12,2570773	1,5014298	-177,3	199,1		
Стеариновая (stearic)	ЭЭ	-22,9175603	518,192158	-290,6942919	45,91310918	25,2748221	-12,1730072	1,5144284	-185,4	207,5		
Олеиновая (oleic) I	МЭ	-20,1915457	484,9189309	-287,9126996	61,54800142	14,2554437	-9,1384861	1,2083908	-147,2	201,9		
Олеиновая (oleic)	ЭЭ	-22,7562209	517,2995525	-313,959433	73,21407442	11,5704626	-8,9030924	1,2113294	-155,3	209,6		
Линолевая (linoleic) I	МЭ	-20,1841655	484,0277849	-312,25453	91,51729525	-1,7323509	-5,0468189	0,799759	-116,1	199,5		
Линолевая (linoleic)	ЭЭ	-22,9613494	518,085176	-343,4767556	109,8220902	-8,3426729	-3,7405516	0,6932967	-124,9	205,3		
Линоленовая (linolenic) I	МЭ	-20,389294	484,8134085	-341,7718527	128,1253113	-21,6454865	0,1157219	0,2817264	-85,6	197,7		
Линоленовая (linolenic)	ЭЭ	-21,8769789	511,3532394	-356,3681876	128,9670483	-18,9988493	-0,9668515	0,4138196	-93,7	206,4		
Арахидиновая (arachidic) I	МЭ	-23,9997031	540,1258844	-295,7351295	38,07209354	31,9579576	-14,1952749	1,7331306	-186,7	214,1		
Арахидиновая (arachidic)	ЭЭ	-25,7083099	568,8596804	-317,6614323	48,96242252	28,2253239	-13,3969757	1,6565347	-194,8	222,4		

В качестве постоянных интегрирования принимаются стандартная энтальпия образования вещества ( $H_{T_0} = \Delta H_{fT}^0$ ) и энтропия при стандартной температуре ( $S_{T_0} = S_{fT}$ ). Значения этих величин дополняют табл. 2 с символами  $A_i$  и  $A_j$ . При отсутствии значений энтропии при стандартной температуре для некоторых сложных эфиров жирных кислот коэффициент  $A_j$  можно рассчитать по формуле

$$A_j = S_{T_1} - 10^{-3} A_i \ln x_i - 10^{-3} \sum_{i=2}^n \frac{i}{i-1} A_i x_i^{i-1} - 10.$$

При этом в качестве  $S_{T_1}$  и, соответственно, температуры  $T_1$  можно использовать любую табличную величину [1]. Очевидно, можно использовать и табличное значение энтропии при температуре 300 К (вместо 298,15 К). В этом случае отклонения не превысят допустимой погрешности аппроксимации, которая оговаривается в [9].

В статье приводится только часть исходной таблицы со значениями  $C_p(T)$  сложного метилового и сложного этилового эфиров лауриновой жирной кислоты, а график приближенной зависимости изобарной теплоемкости сложного метилового эфира лауриновой кислоты в функции температуры представлен на рис. 1

Реализация полученных результатов в математической модели [12] расчета рабочего процесса дизельного двигателя потребует изменений в программном модуле расчета теплофизических свойств топлива (биодизельного) и продуктов сгорания.

**Выводы.** Полученные коэффициенты приближенных функциональных зависимостей позволяют решить проблему отсутствия базы данных по термодинамическим свойствам значительного ряда альтернативных биодизельных топлив, производимых из различных растительных масел. При решении поставленной задачи аппроксимации выполнено обобщение накопленных данных об исследуемых веществах и о форме приближенной функции, которое опирается на существующую теоретическую базу и опыт использования аппроксимирующих зависимостей. Коэффициенты уравнения, приближенно описывающего зависимость изобарной теплоемкости от температуры на интервале 300 – 3000 К, теперь могут использоваться для реализации численных исследований рабочих процессов, протекающих в поршневых двигателях с самовоспламенением, работающих на биодизельном топливе и на бионефтяных композициях. Создан универсальный программный модуль, позволяющий вносить изменения в алгоритм при выборе базовых функций, исходного полинома и размерности исходных параметров.

**Список литературы:** 1. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справ. изд. / Под ред. В. П. Глушко. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 265 с. 2. Cordon S. A., Bride B. Computer program for complex chemical equilibrium compositions // Incident and reflected shocks and Chapman Jouguet detonations, NASA SP-273. – 1976. 3. Kee R. J., Rupley F. M., Miller J. A. The CHEMKIN Thermodynamic Data Base. SAND87-8215. – 1987. – 67 p. 4. Белов Г. В., Иорш В. С., Юнгман В. С. Моделирование равновесных состояний термодинамических систем с использованием IVTANTERMO для Windows // Теплофизика высоких температур. – 2000. – Т. 38. – № 2. – С. 191 – 196. 5. Burcat A. Third Millennium Ideal Gas and Condensed Phase Thermochemical Database for Combustion. Technion Aerospace Engineering (TAE) Report 867, January 2001, 127 p. 6. JANAF Thermochemical Tables, 2d ed. // NSRDS-NB-37, U.S. National Bureau, 1971. – 929 p. 7. Giakoumis Evangelos G. A statistical investigation of biodiesel physical and chemical properties, and their correlation with the degree of unsaturation // Renewable Energy. – 2013. – Vol. 50. – P. 858 – 878. 8. Yuan W., Hansen A. C., Zhang Q. Predicting the temperature dependent viscosity of biodiesel fuels // Fuel (elsevier). – 2009. – Vol. 88. – P. 1120 – 1126. 9. Osmont A., Catoire L., Gökalp I. Thermochemistry of Methyl and Ethyl Esters from Vegetable Oils // International Journal of Chemical Kinetics. – 2007. – Vol. 39. – №9. – P. 481 – 491. 10. Попов В. П. Основы теории цепи. – М.: Высшая школа, 1998. – 496 с. 11. Куценко А. С. Моделирование рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания на ЭВМ. – К.: Наук. Думка, 1988. – 100 с. 12. Левтеров А. М., Левтерова Л. И. Численное моделирование рабочего цикла дизеля с непосредственным впрыском. Прогнозирование эмиссии сажи и оксидов азота // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ "ХПІ", 2013. – № 5. – С. 141 – 154.

**References:** 1. Aлемасов, V. E. and Дрегалин, A. F. *Termodinamicheskie i teplofizicheskie svoystva produktov sgoraniya. Sprav. Izd.* [Thermodynamic and thermalphysic properties of the combustion products. Ref. ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1971, vol. 1, 265 p. 2. Cordon, S. A. and Bride, B. *Computer program for complex chemical equilibrium compositions. Incident and reflected shocks and Chapman Jouguet detonations*, NASA, SP-273. 1976. 3. Kee, R. J., Rupley, F. M. and Miller, J. A. *The CHEMKIN Thermodynamic Data Base*. SAND87-8215. – 1987. – 67 p. 4. Belov, G. V., Iorish, V. S. and Yungman, V. S. *Modelirovanie ravnovesnykh sostoyaniy termodinamicheskikh sistem s ispol'zovaniem IVTANTERMO dlya Windows* [Simulation of equilibrium states of thermodynamic systems using IVTANTERMO for Windows]. *Teplofizika vyisokikh temperatur* [Thermophysics of High Temperatures]. Moscow, Nauka Publ., 2000, vol. 38, no. 2, pp. 191–196. 5. Burcat, A. *Third Millennium Ideal Gas and Condensed Phase Thermochemical Database for Combustion. Technion Aerospace Engineering (TAE) Report 867*, January 2001, 127 p. 6. JANAF Stull, D. R. and Prophet H. *JANAF thermochemical tables*. 2nd ed., NSRDS-NBS 37, 1971. 1141 p. 7. Giakoumis, Evangelos G. A statistical investigation of biodiesel physical and chemical properties, and their correlation with the degree of unsaturation. *Renewable Energy*. 2013, Vol. 50, pp. 858–878. 8. Yuan, W., Hansen, A. C. and Zhang, Q. Predicting the temperature dependent viscosity of biodiesel fuels. *Fuel (Elsevier)*. 2009, Vol. 88, pp. 1120–1126. 9. Osmont, A., Catoire, L. and Gökalp, I. Thermochemistry of Methyl and Ethyl Esters from Vegetable Oils *International Journal of Chemical Kinetics*. 2007, Vol. 39, no. 9, pp. 481–491. 10. Popov, V. P. *Osnovy teorii tsepi*. [Fundamentals of circuit theory]. Moscow, Higher school Publ., 1998, 496 p. 11. Kutsenko, A. S. *Modelirovanie rabochih protsessov dvigateley vnutrennego sgoraniya na EVM* [Modelling of working processes of the internal combustion engine on a computer]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1988, 100 p. 12. Levterov, A. M. and Levterova, L. I. *Chislennoe modelirovanie rabochego tsikla dizelya s neposredstvennym vpryskom. Prognozirovanie emissii sazhi i oksidov azota* [Numerical simulation of direct injection diesel engine working cycle. Predicting soot and nitrogen oxide emissions]. *Visnyk NTU «KhPI». Ser.: Matematychnе modeljuvannja v tehnicі ta tehnologijah* [Bulletin of the NTU "KhPI". Ser.: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2013, no. 5, pp. 141–154.

Поступила (received) 03.04.2016

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Левтеров Антон Михайлович** – канд. техн. наук, ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Антон Михайлович** – канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Levterov Anton Mikhailovich** – Candidate of Technical Sciences, IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Олександр Антонович** – канд. техн. наук, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Левтеров Александр Антонович** – канд. техн. наук, Национальный университет гражданской защиты Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Levterov Alexander Antonovich** – Candidate of Technical Sciences, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Левтерова Людмила Іванівна** – ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Левтерова Людмила Ивановна** – ИПМаш НАН Украины, м. Харьков; тел.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

**Levterova Lyudmila Ivanovna** – IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (0572) 94-38-43; e-mail: dppr@ipmach.kharkov.ua.

УДК 519.6

**О. М. ЛИТВИН****ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ЗМІННИХ**

Пропонується для чисельної реалізації методу А.Н.Крилова підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї змінної використовувати розривні сплайни. Обговорюється також можливість його узагальнення на функції двох змінних для покращення діагнозу в комп'ютерній томографії з використанням проєкцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Пропонується в методі А.Н.Крилова підвищення точності наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних використовувати розривні сплайни.

**Ключові слова:** розривні функції, ряди Фур'є, покращення збіжності, метод виділення особливостей.

**Вступ.** Як відомо [1, п. 15, гл. 6], ряди Фур'є погано збігаються, деякі з них не є *абсолютно* та *рівномірно збіжними*. Зокрема, суми Фур'є не збігаються до функції в точках її розриву. В [2, стор. 516] описаний *метод академіка А. Н. Крилова* для покращення збіжності тригонометричних сум Фур'є розривних функцій для випадку, якщо її точки розриву першого роду відомі.

**Наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї змінної з використанням розривних сплайнів.**

Вважаємо, що функція  $f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  має розриви разом із своїми похідними до порядку  $1 \leq r \in \mathbb{N}$  в точках  $x_k$ ,  $k = \overline{1, m-1}$   $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$ :

$$f^{(s)}(x_k - 0) = f_{k-}^{(s)} \neq f_{k+}^{(s)} = f^{(s)}(x_k + 0), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad s = \overline{0, r} \quad f^{(s)}(x) = \frac{d^s f(x)}{dx^s}.$$

Введемо до розгляду розривний сплайн

$$Sp(x) = \begin{cases} \sum_{s=0}^r f^{(s)}(0)h_{1,0,0,1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s)}(x_1 - 0)h_{0,1,0,1,s}(x), & 0 \leq x < x_1; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s)}(x_k + 0)h_{1,k,k,k+1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s)}(x_{k+1} - 0)h_{0,k+1,k,k+1,s}(x), & x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s)}(x_{m-1} + 0)h_{1,m-1,m-1,m,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s)}(1 - 0)h_{0,m,m-1,m,s}(x), & x_{m-1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де  $h_{\ell, r_i, r_{i+1}, s}(x)$ ,  $\ell = i, i+1$  – поліноми степеня  $2r - 1$  з властивостями

$$h_{k,k,k+1,s}^{(p)}(x_{k+1}) = \delta_{p,s}, \quad h_{k+1,k,k+1,s}^{(p)}(x_k) = 0, \quad 0 \leq p, s \leq r; \quad h_{k,k,k+1,s}^{(p)}(x_{k+1}) = 0, \quad h_{k+1,k,k+1,s}^{(p)}(x_k) = \delta_{p,s}, \quad 0 \leq p, s \leq r.$$

**Теорема 1.** Сплайн  $Sp(x)$  на кожному інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, m-1}$  є оператором ермітової інтерполяції з властивостями

$$Sp^{(q)}(x_k + 0) = f^{(q)}(x_k + 0), \quad Sp^{(q)}(x_{k+1} - 0) = f^{(q)}(x_{k+1} - 0), \quad q = \overline{0, r}.$$

*Доведення.* Ці властивості можна встановити безпосередньою перевіркою.

Теорема 1 доведена.

**Теорема 2.** Функція  $R(x) = f(x) - Sp(x)$  має властивості  $R(x) \in C^r[0,1]$ ,  $R^{(s)}(x_k) = 0$ ,  $s = \overline{0, r}$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ .

*Доведення.* Розривний сплайн  $Sp(x)$  на кожному інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$  є поліномом степені  $2r - 1$ , який задовольняє властивості

$$Sp^{(q)}(x_k) = f^{(q)}(x_k + 0), \quad Sp^{(q)}(x_{k+1}) = f^{(q)}(x_{k+1} - 0), \quad q = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, m-1}$$

оскільки він є поліномом двоточкової інтерполяції Ерміта на цьому інтервалі. Тобто, сам сплайн на всьому інтервалі належить до класу  $C^r[0,1]$  і, таким чином, різниця між наближуваною функцією  $f(x)$  і цим сплайном  $R(x) = f(x) - Sp(x)$  буде задовольняти умові

$$\begin{aligned} R^{(q)}(x_k - 0) &= f^{(q)}(x_k - 0) - Sp^{(q)}(x_k + 0) = f^{(q)}(x_k - 0) - f^{(q)}(x_k - 0) = 0; \\ SR^{(q)}(x_k + 0) &= f^{(q)}(x_k + 0) - Sp^{(q)}(x_k + 0) = f^{(q)}(x_k + 0) - f^{(q)}(x_k + 0) = 0; \end{aligned} \quad k = \overline{1, m-1}, \quad q = \overline{0, r}.$$

Тобто теорема 2 доведена.

Пропонується розкласти функцію  $R(x)$  у вигляді суми Фур'є:

$$F_N(x) = \sum_{p=-N}^N c_p e^{i2\pi px}, \quad c_p = \int_0^1 R(x) e^{-i2\pi px} dx, \quad p = \overline{-n, n},$$

і наближувану функцію  $f(x)$  представляти у вигляді суми  $f(x) = Sp(x) + F_N(x)$ .

**Теорема 3.** Для похибки наближення функції  $R(x)$  сумою Фур'є  $F_N(x)$  справедлива нерівність

$$|R(x) - F_N(x)| = O(N^{-R-1}).$$

*Доведення.* Враховуючи, що  $R(x) \in C^r[0,1]$ , то при такому наближенні ми всі точки розриву включаємо в перший доданок  $Sp(x)$ , а для сум Фур'є  $F_N(x)$  порядок збіжності, як відомо [2], буде дорівнювати  $O\left(\frac{1}{N^{r+1}}\right)$ .

Теорема 3 доведена.

**Наближення сумами Фур'є розривних функцій двох змінних з використанням розривних сплайнів від двох змінних.** Описана вище чисельна реалізація методу академіка А. Н. Крилова може бути узагальнена також на випадок наближення розривних функцій двох та більше змінних. Вважаємо, що функція  $f(x, y)$ ,  $x, y \in [0,1]$  має розриви першого роду разом із своїми похідними  $f^{(s,0)}(x, y) = \partial^s f(x, y) / \partial x^s$   $0 \leq s \leq r$  до порядку  $r$  на системі вертикальних прямих

$$\begin{aligned} x = x_i, \quad i = \overline{1, m-1} \quad x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1: \quad f^{(s,0)}(x_i - 0, y) = f_{i-0}^{(s,0)} \neq f_{i+0}^{(s,0)}(y) = f_{i+0}^{(s,0)}(x_i + 0, y), \\ k = \overline{1, m-1}, \quad s = \overline{0, r} \end{aligned}$$

та розриви похідних  $f^{(0,p)}(x, y) = \partial^p f(x, y) / \partial y^p$   $0 \leq p \leq r$  до порядку  $r$  на системі горизонтальних прямих  $y = y_j$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ :  $y_0 = 0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1$ , тобто

$$f^{(0,p)}(x, y_j - 0) = f_{j-0}^{(0,p)}(x) \neq f_{j+0}^{(0,p)}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad p = \overline{0, r}.$$

Введемо до розгляду розривні сплайни  $S1(x, y)$ ,  $S2(x, y)$ ,  $S12(x, y)$ :

$$S1f(x, y) = S1(x, y) = \begin{cases} \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(0, y) h_{0,0,1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_1 - 0, y) h_{0,1,0,s}(x), & 0 \leq x < x_1; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_k + 0, y) h_{k,k,k+1,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_{k+1} - 0, y) h_{k+1,k,k+1,s}(x), & x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(x_{m-1} + 0, y) h_{m-1,m-1,m,s}(x) + \sum_{s=0}^r f^{(s,0)}(1 - 0, y) h_{m,m-1,m,s}(x), & x_{m-1} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$S2f(x, y) = S2(x, y) = \begin{cases} \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, 0)h1_{0,0,1,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_1 - 0)h0_{1,0,1,p}(y), & 0 \leq y < y_1; \\ \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_l + 0)h1_{l,l,1,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_{l+1} - 0)h0_{l+1,l,1,p}(y), & y_l \leq y < y_{l+1}, l = \overline{1, n-1}; \\ \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, y_{m-1} + 0)h1_{m-1,m-1,p}(y) + \sum_{p=0}^r f^{(0,p)}(x, 1 - 0)h0_{m,n-1,p}(y), & y_{m-1} \leq y \leq 1; \end{cases}$$

$$S12f(x, y) = (S1)S2f(x, y) = \begin{cases} \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(0, y)h1_{0,0,1,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_1 - 0, y)h0_{1,0,1,s}(x), & 0 \leq x < x_1; \\ \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_k + 0, y)h1_{k,k,k+1,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_{k+1} - 0, y)h0_{k+1,k,k+1,s}(x), & x_k \leq x < x_{k+1}, k = \overline{1, m-1}; \\ \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(x_{m-1} + 0, y)h1_{m-1,m-1,s}(x) + \sum_{s=0}^r S2^{(s,0)}(1 - 0, y)h0_{m,m-1,s}(x), & x_{m-1} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

де  $h1_{i,i,i+1,s}(x)$ ,  $h0_{i+1,i,i+1,s}(x)$ ,  $i = \overline{0, m-1}$  – поліноми степеня  $2r-1$  з властивостями

$$h1_{i,i,i+1,s}^{(p)}(x_k) = \delta_{i,k} \delta_{p,s}, \quad k = i, i+1; \quad p, s = \overline{0, r}, \quad h0_{i+1,i,i+1,s}^{(p)}(x_k) = \delta_{i+1,k} \delta_{p,s}, \quad k = i, i+1; \quad p, s = \overline{0, r}.$$

Аналогічно визначаються також базисні поліноми двоточної ермітової інтерполяції за змінною  $y$

$$h1_{j,j,j+1,q}(y), \quad h0_{j+1,j,j+1,q}(y), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad q = \overline{0, r}.$$

Введемо до розгляду оператор

$$Spf(x, y) = S1f(x, y) + S2f(x, y) - S12f(x, y)$$

**Теорема 4.** Функція  $Sp(x, y)$  на кожному прямокутнику  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}] \in [0, 1] \times [0, 1]$  має властивості

$$\begin{aligned} (Spf)^{(s,0)}(x_k + 0, y) &= f_{k+0}^{(s,0)}; \quad (Spf)^{(s,0)}(x_{k+1} - 0, y) = f_{k+1-0}^{(s,0)}(y), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad s = \overline{0, r}, \\ (Spf)^{(0,q)}(x, y_j + 0) &= f_{j-0}^{(0,q)}(x); \quad (Spf)^{(0,q)}(x, y_{j+1} - 0) = f_{j+1-0}^{(0,q)}(x, y_{j+1} - 0), \quad j = \overline{1, n-1}, \quad q = \overline{0, r}. \end{aligned}$$

Доведення цієї теореми випливає з того, що оператори  $Spf(x, y) = (S1 + S2 - S12)f(x, y)$ , за побудовою [5], є операторами поліноміальної інтерлінації ермітового типу з використанням даних на сторонах цього чотирикутника.

Теорема 4 доведена.

**Теорема 5.** Функція  $R(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y)$  має властивості

$$R(x, y) \in C^{r,r}[0, 1]^2, \quad R^{(s,0)}(x_i, y) = 0, \quad s = \overline{0, r}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad R^{(0,q)}(x, y_j) = 0, \quad q = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} R^{(s,0)}(x_i, y) &= f^{(s,0)}(x_i, y) - sp^{(s,0)}(x_i, y) = f^{(s,0)}(x_i \pm 0, y) - sp^{(s,0)}(x_i \pm 0, y), \quad s = \overline{0, r}, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ R^{(0,q)}(x, y_j) &= f^{(0,q)}(x, y_j) - sp^{(0,q)}(x, y_j) = f^{(0,q)}(x, y_j \pm 0) - sp^{(0,q)}(x, y_j \pm 0), \quad q = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Теорема 5 доведена.

Пропонується розкласти в суму Фур'є функцію  $R(x, y) = Rf(x, y)$ :

$$F_{N,N}f(x, y) = \sum_{p=-N}^N \sum_{q=-N}^N c_{p,q} e^{i2\pi(px+qy)}, \quad c_{p,q} = \iint_{0,0}^{1,1} Rf(x, y) e^{-i2\pi(px+qy)} dx dy, \quad p, q = \overline{-N, N}$$

і функцію  $f(x, y)$  наближувати у вигляді суми  $f(x, y) = Sp(x, y) + F_{N,N}(x, y)$ .

Враховуючи, що  $R(x, y) \in C^{r,r}[0, 1]^2$ , то при такому наближенні ми всі точки розриву включаємо в перший доданок  $Sp(x, y)$ , а для сум Фур'є  $F_{N,N}f(x, y)$  порядок збіжності буде, як відомо [2],  $O(1/N^{r+1})$ .

**Висновки.** Таким чином, запропонований підхід може розглядатися як автоматичне забезпечення збіжності ряду Фур'є до функції  $f(x, y)$  з відомими точками розриву. Для їх наближеного знаходження можна скористатися твердженнями робіт [3, 4]. Твердження цієї статті [5] планується покласти в основу нового методу розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії у вигляді розривного сплайну від двох змінних та суми Фур'є від функції, яка є різницею між наближуваною функцією та сплайном і належить до  $r, r \geq 1$  разів непере-

рвно диференційованих за кожною змінною функцій. При цьому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проєкцій, що надходять з комп'ютерного томографа.

**Список літератури:** 1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. – М. : Наука, 1974. – 655 с. 2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М. : Наука, 1966, – 656 с. 3. Литвин О. М., Першина Ю. І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122 – 131. 4. Литвин О. Н., Першина Ю. І., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – № 4. – 2014. – С. 126 – 134. 5. Литвин О. М., Литвин О. Г. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра // Тези конфер. ІСН. – 2016, ПУЕТ, Полтава 10 – 11.03.2016. 6. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – К. : Наукова думка, 2002. – 544 с.

**References:** 1. Smirnov, V. I. *Kurs vysshey matematiki. T. 2.* [Course in Higher Mathematics. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 655 p. 2. Fihngol'ts, G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3.* [Course in differential and integral calculus. Vol. 3]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 656 p. 3. Litvin, O. M. and Pershina, Yu. I. Nablyzhennya rozryvnoyi funktsiyi za dopomogoyu rozryvnyh splayniv [Approximating discontinuous functions by discontinuous splines]. *Matematychnе ta komp'yutерne modelyuvannya. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky: zб. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Ser.: Physical and Mathematical Sciences. Collected works]. Kam'yanets'-Podil's'kyiy, 2010, vol. 3, pp. 122–131. 4. Litvin, O. N., Pershina, Yu. I. and Sergienko, I. V. Vosstanovlenie razryivnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougol'nyie elementy) [Recovering discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements)]. *Kybernetika i sistemnyi analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134. 5. Litvin, O. M. and Litvin, O. G. Rekonstruktsiya zobrazhen' z vykorystanniam skinchennykh sum Fur'e ta Fejera [Recovering images using finite Fourier and Fejer sums]. *Tezy konfer. ISN*. Poltava, PUET Publ., 2016. 6. Litvin, O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Function interlineation and its applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 544 p

Надійшла (received) 06.04.2016

#### Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Литвин Олег Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Литвин Олег Николаевич** – доктор фізико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Litvin Oleg Nikolaevich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

УДК 519.6

**О. М. ЛИТВИН, О. О. ЛИТВИН, Ф. Ф. КОВАЛЬ, О. С. ЧОРНА**

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ВМІСТУ ДЕЯКОЇ СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН В КОРИ ЗА ДАНИМИ З КЕРНІВ СВЕРДЛОВИН МЕТОДОМ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянуто задачу про відновлення в кожній точці між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих) скінченної множини елементів періодичної таблиці або їх сполук лінійної щільності на заданій глибині. Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної таблиці, а лише  $n$  – вибраними елементами або їх сполуками. Запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами по заданій глибині. Наведений метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин між похилими свердловинами дозволяє будувати математичні моделі структури кори Землі з використанням всіх сполук кернів похилих свердловин, які призведуть до створення ефективних методів розвідки корисних копалин та розробки родовищ. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** математична модель, інтерлінація функцій, просторовий розподіл, керни свердловин.

**Вступ.** Математичне моделювання займає провідне місце в гірничо-економічному аналізі. Цей метод дає можливість вибирати оптимальні режими роботи гірничотехнічного устаткування, визначати найкращі параметри реконструкції тих, що діють, і будівництва нових гірничодобувних підприємств, вирішувати завдання комплексного розвитку гірничодобувних регіонів. Застосування теорії інтерлінації функцій 3-х змінних до розв'язання технічних задач таких, як відновлення в кожній точці  $(x, y, z)$  між заданою системою свердловин (прямих або похилих)

$$\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$$

скінченної множини елементів періодичної таблиці або їх сполук за даними матриці-функції за змінною  $z$ , де  $z$  – глибини свердловин,  $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}$ , та знаходження оцінки запасів корисних копалин на основі результатів свердловинного буріння має велике практичне значення на сьогоднішній день.

**Аналіз останніх досліджень.** Очевидними стали відсутність простих рішень цієї задачі моделювання, недостатність жорстких, нехай навіть розгорнутих, багаторівневих схем моделювання. У такій ситуації доцільніше виробити системний підхід – спробувати знайти і зафіксувати не каркас майбутньої моделі, а основні принципи її побудови, створити єдине середовище моделювання, здатне вмістити те цінне, що вже є або з'явиться в окремих технологічних моделях [1]. Загально відомим є метод розвідки корисних копалин, що ґрунтується на аналізі вмісту кернів свердловин, просвердлених в різних точках поверхні даного регіону. В роботі [2] запропоновано і досліджено загальний метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин на основі даних вмісту кернів вертикальних свердловин та інтерлінації функцій трьох змінних  $f(x, y, z)$  – невідомого розподілу корисних копалин в кожній точці  $(x, y, z)$ . У вказаних роботах істотно використовувалось припущення про те, що всі свердловини вертикальні. Випадок використання даних для побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин із кернів похилих свердловин у зазначеній монографії та інших джерелах в ній не досліджувалися.

Враховуючи викладене вище, актуальною є задача побудови матричної математичної моделі просторового розподілу фіксованої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методами інтерлінації функцій.

**Постановка задачі.** В даній роботі розглядається задача про відновлення в кожній точці  $(x, y, z)$  між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих)

$$\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$$

скінченної множини корисних копалин або їх сполук за даними  $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}$ ,  $n$  – кількість сполук лінійної щільності  $i$  – го елемента в  $k$  – ій свердловині на глибині  $z$ ,  $-H \leq z \leq 0$ . Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної таблиці, а лише  $n$  вибраними елементами.

**Математична модель.** Введемо позначення:

$$\rho(x, y, z) = [\rho_1(x, y, z) \dots \rho_n(x, y, z)]^T, \quad \gamma_{k,i}(z) = \rho_i(X_k(z), Y_k(z), z), \quad k = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\rho(x, y, z)$  – матриця-функція, що описує просторовий розподіл всієї сукупності досліджуваних нами корисних копалин, кожний стовпець має компоненти, які означають розподіл  $i$  – ої корисної копалини;  $\gamma_{k,i}(z)$  – розподіл  $i$  – ої корисної копалини в  $k$  – ій свердловині,

$$\gamma_{k,i}(z) = [\gamma_{k,1}(z) \dots \gamma_{k,n}(z)]^T,$$

$\rho_i(x, y, z), i = \overline{1, n}$  – щільність  $i$  – ої корисної копалини.

Введемо також до розгляду допоміжні функції  $H_k(x, y, z)$ , що розглянуті у працях [3 – 5].

Допоміжні функції  $H_k(x, y, z), k = \overline{1, M}$ , мають властивості  $H_k(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}, 1 \leq k, p \leq M$ .

Тоді математичною моделлю просторового розподілу сукупності  $a_n$  фіксованих корисних копалин між вибраною системою похилих свердловин будемо називати оператор

$$O\rho(x, y, z) = \sum_{k=1}^M H_k(x, y, z) \rho_k(z). \quad (1)$$

Введемо і дослідимо також оператори сплайн-інтерлінації матричної функції трьох змінних  $\rho(x, y, z)$  на системі похилих свердловин  $\Gamma_k = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$ .

Введемо  $M$  допоміжних функцій  $h_k(t) \in C[0, 1], k = \overline{1, M}$ , з властивостями  $h_k(0) = 0, h_k(1) = 1, k = \overline{1, M}$ , та оператори

$$O_\mu \rho(x, y, z) = \rho_{\mu_1}(z) h_{\mu_1} \left( \frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + \rho_{\mu_2}(z) h_{\mu_2} \left( \frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right) + \rho_{\mu_3}(z) h_{\mu_3} \left( \frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} \right), \\ (x, y, z) \in T_\mu \subset D, z \in [-H, 0].$$

**Теорема 1.** Оператор  $O_\mu \rho(x, y, z)$  має наступні властивості:

а) він є оператором інтерлінації функцій трьох змінних на системі кривих  $\Gamma_k$ , тобто дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції

$$O_\mu \rho(X_k(z), Y_k(z), z) = \gamma_k(z), \quad -H \leq z \leq 0, k = \overline{1, M};$$

б)  $\rho(x, y, z) \in C \left( \bigcup_{\mu} T_\mu \times [-H, 0] \right) \Rightarrow O_\mu \rho(x, y, z) \in C \left( \bigcup_{\mu} T_\mu \times [-H, 0] \right);$



в) якщо деякі (або всі) функції  $\rho_i(x, y, z)$ ,  $i = \overline{1, n}$  мають розв'язок в заданій системі точок  $z_k$ ,  $k = \overline{1, M}$ , то і  $O_\mu \rho(x, y, z)$  буде мати розв'язок.

*Доведення.* Інтерлінаційні властивості «а» впливають з наступної властивості детермінантів: детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Тому, якщо  $p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ , то

$$O_\mu \rho(x, y, z) = \rho_{\mu_1}(z) h_{\mu_1} \frac{\phi_{\mu_2, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(z)} + \rho_{\mu_2}(z) h_{\mu_2} \frac{\phi_{\mu_1, \mu_3}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_2, \mu_1, \mu_3}(z)} + \rho_{\mu_3}(z) h_{\mu_3} \frac{\phi_{\mu_1, \mu_2}(x, y, z)}{\Delta_{\mu_3, \mu_1, \mu_2}(z)} = \rho_\kappa(z), (x, y, z) \in T_\mu, z \in [-H, 0], p \in \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

Тут враховано, що

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) &= 1, \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) = 0, \varphi_{\mu_2, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) = 0, \\ \varphi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) &= 1, \varphi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) = 0, \varphi_{\mu_1, \mu_3}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) = 0, \\ \varphi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_3}(z), Y_{\mu_3}(z)) &= 1, \varphi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_1}(z), Y_{\mu_1}(z)) = 0, \varphi_{\mu_1, \mu_2}(X_{\mu_2}(z), Y_{\mu_2}(z)) = 0. \end{aligned}$$

Іншими словами, оператор  $O_M \rho(x, y, z)$  є оператором інтерлінації матричної функції, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих  $\Gamma_k$ , тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах по глибині  $z$ ,  $-H \leq z \leq 0$ , та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці  $(x, y, z)$  між свердловинами по глибині  $z$  [3].

Для доведення того, що

$$O_M \rho(x, y, z) \in C\left(\bigcup_{\mu} T_\mu \times [-H, 0]\right),$$

досить зазначити, що функції  $O_{p,q,r} \rho(x, y, z)$  та  $O_{p,q,r'} \rho(x, y, z)$  на спільній стороні обох трикутників, які розміщені на площині, зі свердловинами  $\Gamma_p(z)$  та  $\Gamma_q(z)$  мають однакові сліди. Тобто функція  $P(x, y, z) = O_M \rho(x, y, z)$  при переході від тригранної призми з ребрами  $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_r(z)$  до тригранної призми з ребрами  $\Gamma_p(z), \Gamma_q(z), \Gamma_{r'}(z)$  зберігає неперервність. Те, що для неперервних слідів  $\rho_p(z) \in C[-H, 0]$ ,  $p = \overline{1, m}$  функції  $P_\mu(x, y, z) = O_\mu \rho(x, y, z)$  теж будуть неперервними, впливає з формули для операторів  $O_\mu \rho(x, y, z)$  і відомої властивості неперервних функцій, а саме: сума неперервних матричних функцій є неперервною матричною функцією.

Теорема 1 доведена.

**Зауваження 1.** Зокрема, в якості  $h_k(t) \forall k = \overline{1, M}$  можна взяти  $t^r$ ,  $r = 1, 2$  і при цьому отриманий оператор  $O_M \rho(x, y, z)$  буде оператором інтерлінації матричної функції  $\rho(x, y, z)$ , який дозволяє між заданою системою свердловин відновлювати матричну функцію  $\rho(x, y, z)$  в кожній точці від  $(x, y, z)$ .

**Зауваження 2.** Якщо одна або всі компоненти матриці  $\rho(x, y, z)$  мають розриви першого роду на деяких глибинах, то оператор  $O_M \rho(x, y, z)$  буде представляти також розривну функцію від  $(x, y, z)$ .

Розглянемо для довільної функції  $\rho(x, y, z) \in C(R^3)$  інтерлінаційні оператори

$$O_{M,\lambda}(\rho; x, y, z) = \sum_{k=1}^M \rho_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x, y, z), \lambda \geq 1, M = 2, 3, \dots,$$

з глобальними допоміжними функціями

$$\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(x, y, z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda}, d_i(x, y, z) = \sqrt{(X_i(z) - x)^2 + (Y_i(z) - y)^2};$$

$$d_{i,k} = \sqrt{(X_i(z) - X_k(z))^2 + (Y_i(z) - Y_k(z))^2} \quad [4].$$

**Теорема 2.** Для кожної  $\rho(x, y, z) \in C(R^3)$  виконуються співвідношення

$$O_{M,\lambda}(\rho; x, y, z) \in C(R^3); O_{M,\lambda}(\rho; X_p(z), Y_p(z), z) = \gamma_p(z), p = \overline{1, M},$$

Тобто кожна компонента матриці  $\rho_i(x, y, z) \in C(R^3)$ .

Доведення. Дослідимо властивості допоміжних функцій  $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$ . Перш за все зазначимо, що знаменники  $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda$  у формулах для  $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$  – сталі величини і  $d_{i,k}^\lambda > 0 \forall i, k \in \{1, \dots, M\}, i \neq k, \lambda > 0$ , а чисельник

– невід'ємна функція  $\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(x, y, z)^\lambda \geq 0$ . Тому [4]

$$\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z) \geq 0 \forall k = \overline{1, M}; \lambda > 0.$$

Крім того,

$$\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \frac{d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_i(X_p(z), Y_p(z), z)^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, M},$$

оскільки

$$\frac{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,p}^\lambda}{\prod_{i=1, i \neq k}^M d_{i,k}^\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p = k; \\ 0, & \text{якщо } p = i, p \in \{1, 2, \dots, M\}, p \neq k. \end{cases}$$

Таким чином,  $\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{k,p}, k, p = \overline{1, M}$ . Враховуючи це, можна записати таку послідовність рівностей:

$$O_{M,\lambda}(\rho; X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(X_p(z), Y_p(z), z) = \sum_{k=1}^M \gamma_k(z) \delta_{k,p} = \gamma_p(z), p = \overline{1, M},$$

оскільки функції  $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$  – скалярні, а  $\rho_k(z) \ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$  – буде матричною функцією, отриманою множенням скалярної функції  $\ell_{M,k,\lambda}(x, y, z)$  на матричну функцію  $\rho_k(z)$ .

Теорема 2 доведена.

**Висновки.** Таким чином, у даній роботі розглянуто задачу про відновлення в кожній точці  $(x, y, z)$  між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих)  $\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \leq z \leq 0\}$  скінченної множини деякої сукупності корисних копалин або їх сполук за даними про розподіл всіх компонентів цієї матриці-функції в даній системі свердловин  $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}$ ,  $n$  – кількість елементів сполук лінійної щільності  $i$  – го елемента в  $k$  – й свердловині на глибині  $z$ ,  $-H \leq z \leq 0$ . На основі запропонованих матричних математичних моделей можуть бути створені нові ефективні методи розвідки корисних копалин та розробки родовищ.

**Список літератури:** 1. Барон Ю. Л. О проблеме технологического моделирования. Моделирование технологических процессов на угольных шахтах // Сборник докладов на научном семинаре. – Л.: Институт А.А. Скочинского. – 1993. С. 72 – 80. 2. Литвин О. М., Штепа Н. І., Лутвин О. О. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій. – К.: Наукова думка, 2011. – 228 с. 3. Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Журнал «Проблеми машиностроєння», Т. 16. Вип. 1. – Харків, 2013. – С. 61 – 68. 4. Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С. Математичне моделювання 3d розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Журнал «Проблеми машиностроєння», Т. 16. Вип. 4. – Харків, 2013. – С. 39 – 49. 5. Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С. Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Журнал «Проблеми машиностроєння», Т. 17. Вип. 2. – Харків, 2014. – С. 33 – 40.

**References:** 1. Baron, U. L. O probleme tekhnologicheskogo modelirovaniya. Modelirovanie tekhnologicheskikh protsessov na ugol'nykh shakhtakh [On an issue of technological simulation. Modeling of processes in coal mines]. *Sbornik dokladov na nauchnom ceminare*. Lyubertsy, Institut A. A. Skochinskogo Publ., 1993, pp. 72–80. 2. Lytvyn, O. M., Lytvyn, O. O. and Shtepa, N. I. Matematychnе modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn metodamy interlinatsiyi ta interflatatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of mineral distribution by methods of function interlineation and interflatation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2011. 228 p. 3. Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I., and Chorna, O. S. Matematychnе modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn mizh systemoyu neregulyarno rozmsichenykh pokhylykh sverdlvovyn metodamy splain-interlinatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of mineral distribution between system of irregularly placed inclined boreholes by method of spline-interlineation of functions]. *Zhurnal "Problemy mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2013, Vol. 16, no. 1, pp. 61–68. 4. Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I. and Chorna, O. S. Matematychnе modelyuvannya 3d rozpodilu korysnykh kopalyn mizh systemoyu neregulyarno rozmsichenykh pokhylykh sverdlvovyn metodamy global'noyi interlinatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of 3d distribution of minerals around a set of irregularly spaced oblique boreholes by global interlineation of functions]. *Zhurnal "Problemy mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2014, Vol. 16, no. 4, pp. 39–49. 5. Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I. and Chorna, O. S. Matematychnе modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn za dopomogoyu polinomial'nykh interlinantiv na systemi pokhylykh sverdlvovyn [Mathematical modeling of mineral distribution on a set of oblique boreholes using polynomial interlineations]. *Zhurnal "Problemy mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2014, Vol. 17, no. 2, pp. 33–40.

Надійшло (received) 06.10.2015

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Литвин Олег Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Литвин Олег Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Lytvyn Oleg Nikolaevich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Литвин Олег Олегович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

**Литвин Олег Олегович** – кандидат физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

**Lytvyn Oleg Olegovich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

**Коваль Федір Федорович** – доктор фізико-математичних наук, керівник ООО "Магістр ЛТД", ИМК, м. Харків; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

**Коваль Федор Федорович** – доктор физико-математических наук, руководитель ООО "Магистр ЛТД", ИМК, г. Харьков; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

**Koval Fedor Fedorovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Kharkov; tel.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

**Чорна Олена Сергіївна** – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

**Черная Елена Сергеевна** – ассистент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

**Chorna Olena Sergiivna** – assistant, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

УДК 519.6

**О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Г. В. КАРГАПОЛЬЦЕВА****ОЦІНКА ПОВНОЇ ПОХИБКИ КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧОЇ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ**

Отримано оцінку повної абсолютної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на взаємноперпендикулярних площинах наближено з заданою максимальною похибкою. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерфлетації, функція належить класу Ліпшица з додатковими умовами. На конкретному прикладі продемонстрована справедливості теорема про оцінку похибки методу заокруглення розв'язків.

**Ключові слова:** інтеграли від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, кубатурні формули, інтерфлетація, похибка методу, неусувна похибка, похибка заокруглення.

**Вступ.** Широке коло прикладних задач використовує засоби цифрової обробки багатовимірних сигналів. Це томографія, рентгенографія, телебачення, радіолокація, екологічний моніторинг та інші. Сфери застосування багатовимірних зображень обумовлюють необхідність використання при побудові та дослідженні математичних моделей різних типів задання інформації. Наприклад, інформація про функцію декількох змінних може задаватися не тільки значеннями функції в точках, а й її слідами на лініях, площинах, проєкціями.

В сучасних моделях цифрової обробки сигналів та зображень все частіше розглядаються кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, які саме і використовують нові інформаційні оператори. Однак не так багато досліджень, які присвячені отриманню оцінки повної похибки для таких кубатурних формул.

В даній роботі досліджується повна похибка кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, яка в своїй побудові використовує сліди функції на площинах.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням *операторів інтерлінації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій, двох змінних в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально обраних лініях. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням *операторів інтерфлетації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках,

висвітлена в роботах [9 – 15]. В [16] дисертантом доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетатії та оптимальним вибором взаємоперпендикулярних площин.

В усіх наведених роботах розглядаються квадратурні та кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних і досліджується тільки один вид похибки – похибка методу. Як правило, на практиці важлива не лише похибка методу, але і неусувна похибка, і похибка заокруглення. Тому дослідження повної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, зокрема яка в своїй побудові використовує сліди функції на площинах, є актуальною задачею.

**Постановка задачі.** Нехай функція трьох змінних  $f(x, y, z) \in C_{3,L,\tilde{L}}^2$ , тобто визначена на  $G = [0, 1]^3$ , задовольняє наступним умовам Літшиця:

$$\begin{aligned} |f(x_1, y, z) - f(x_2, y, z)| &\leq L|x_1 - x_2|, \quad |f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| \leq L|y_1 - y_2|, \\ |f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| &\leq L|z_1 - z_2|, \\ |f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_1, z_1) - f(x_1, y_2, z_1) - f(x_1, y_1, z_2) + \\ + f(x_2, y_2, z_1) + f(x_2, y_1, z_2) + f(x_1, y_2, z_2) - f(x_2, y_2, z_2)| &\leq \tilde{L}|x_1 - x_2||y_1 - y_2||z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її  $N = 3\ell$  слідами на системі взаємоперпендикулярних прямих  $x_k = k\Delta - \Delta/2$ ,  $y_j = j\Delta - \Delta/2$ ,  $z_s = s\Delta - \Delta/2$ ,  $k, j, s = \overline{1, \ell}$ ,  $\Delta = 1/\ell$ .

Для кубатурної формули

$$\Phi_1^3(f, \omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Of(x, y, z) \sin \omega x \sin \omega y \sin \omega z dx dy dz$$

наближеного обчислення

$$I_1^3(f, \omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega x \sin \omega y \sin \omega z dx dy dz$$

необхідно знайти оцінку повної абсолютної похибки. В якості оператора  $Of(x, y, z)$  розглядається інтерфлетант з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталіх сплайнів.

**Повна похибка кубатурної формули наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючої функції трьох змінних.** В роботі [15] отримана оцінка похибки наближення для кубатурної формули

$$\begin{aligned} \Phi_1^3(f, \omega) &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin \omega x dx \sin \omega y dy \sin \omega z dz + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin \omega y dy \sin \omega x dx \sin \omega z dz + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \sin \omega z dz \sin \omega x dx \sin \omega y dy - \\ &- \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j, z) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin \omega x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin \omega y dy \sin \omega z dz - \\ &- \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} f(x_k, y, z_s) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin \omega x dx \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \sin \omega z dz \sin \omega y dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y_j, z_s) \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin \omega y dy \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \sin \omega z dz \sin \omega x dx + \\
 & + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} f(x_k, y_j, z_s) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin \omega x dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin \omega y dy \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \sin \omega z dz .
 \end{aligned}$$

**Теорема 1. [15]** Нехай  $f(x, y, z) \in C_{3,L,\tilde{L}}^2$  та функція задана  $N = 3\ell$  слідами

$$f(x_k, y, z), 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, f(x, y_j, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, f(x, y, z_s), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

на системі взаємноперпендикулярних площин

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, y_j = j\Delta - \Delta/2, z_s = s\Delta - \Delta/2, k, j, s = \overline{1, \ell}, \Delta = 1/\ell$$

в області  $G = [0, 1]^3$ . Для кубатурної формули  $\Phi_1^3(f, \omega)$  обчислення  $I_1^3(f, \omega)$  справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$|I_1^3(f, \omega) - \Phi_1^3(f, \omega)| \leq \frac{\tilde{L}}{64} \frac{1}{\ell^3}.$$

**Теорема 2.** Нехай  $f(x, y, z) \in C_{3,L,\tilde{L}}^2$  та функція задана  $N = 3\ell$  слідами

$$f(x_k, y, z), 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, f(x, y_j, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, f(x, y, z_s), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

на системі взаємноперпендикулярних площин

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, y_j = j\Delta - \Delta/2, z_s = s\Delta - \Delta/2, k, j, s = \overline{1, \ell}, \Delta = 1/\ell$$

в області  $G = [0, 1]^3$ . Для кубатурної формули  $\Phi_1^3(f, \omega)$  обчислення  $I_1^3(f, \omega)$  справедлива наступна оцінка для неусувної похибки:

$$E_1 \leq \delta_x + \delta_y + \delta_z + \delta_{xy} + \delta_{xz} + \delta_{yz} + \delta_{xyz}.$$

*Доведення.* Оцінимо абсолютну неусувну похибку  $E_1$  в припущенні, що  $f(x, y, z)$  на площинах

$$x = x_k, k = \overline{1, \ell}, y = y_j, j = \overline{1, \ell}, z = z_s, s = \overline{1, \ell}$$

задана наближено з максимальною похибкою  $\delta_x, \delta_y$  та  $\delta_z$  відповідно:

$$\begin{aligned}
 |f(x_k, y, z) - \tilde{f}(x_k, y, z)| & \leq \delta_x, \quad k = \overline{1, \ell}, \quad |f(x, y_j, z) - \tilde{f}(x, y_j, z)| \leq \delta_y, \quad j = \overline{1, \ell}, \\
 |f(x, y, z_s) - \tilde{f}(x, y, z_s)| & \leq \delta_z, \quad s = \overline{1, \ell},
 \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned}
 |f(x_k, y_j, z) - \tilde{f}(x_k, y_j, z)| & \leq \delta_{xy}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad |f(x_k, y, z_s) - \tilde{f}(x_k, y, z_s)| \leq \delta_{xz}, \quad k, s = \overline{1, \ell}, \\
 |f(x, y_j, z_s) - \tilde{f}(x, y_j, z_s)| & \leq \delta_{yz}, \quad j, s = \overline{1, \ell}, \quad |f(x_k, y_j, z_s) - \tilde{f}(x_k, y_j, z_s)| \leq \delta_{xyz}, \quad k, j, s = \overline{1, \ell}.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 E_1 & = \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sin \frac{\omega \Delta (2k-1)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (f(x_k, y, z) - \tilde{f}(x_k, y, z)) \sin \omega y dy \sin \omega z dz + \right. \\
 & + \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \sin \frac{\omega \Delta (2j-1)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y_j, z) - \tilde{f}(x, y_j, z)) \sin \omega x dx \sin \omega z dz + \\
 & + \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sum_{s=1}^{\ell} \sin \frac{\omega \Delta (2s-1)}{2} \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y, z_s) - \tilde{f}(x, y, z_s)) \sin \omega x dx \sin \omega y dy - \\
 & - \frac{2}{\omega} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sin \frac{\omega \Delta (2k-1)}{2} \sin \frac{\omega \Delta (2j-1)}{2} \int_0^1 (f(x_k, y_j, z) - \tilde{f}(x_k, y_j, z)) \sin \omega z dz - \\
 & - \frac{2}{\omega} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sin \frac{\omega \Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \sin \frac{\omega \Delta (2k-1)}{2} \sin \frac{\omega \Delta (2s-1)}{2} \int_0^1 (f(x_k, y, z_s) - \tilde{f}(x_k, y, z_s)) \sin \omega y dy -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\omega} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\Delta}{2} \sin \frac{\omega\Delta}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \sin \frac{\omega\Delta(2j-1)}{2} \sin \frac{\omega\Delta(2s-1)}{2} \int_0^1 (f(x, y_j, z_s) - \tilde{f}(x, y_j, z_s)) \sin \omega y dy +$$

$$+\frac{8}{\omega^3} \sin^3 \frac{\omega\Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \sin \frac{\omega\Delta(2k-1)}{2} \sin \frac{\omega\Delta(2j-1)}{2} \sin \frac{\omega\Delta(2s-1)}{2} (f(x_k, y_j, z_s) - \tilde{f}(x_k, y_j, z_s)) \Big|.$$

Якщо  $n$  таке, що  $\left| \sin \frac{\omega\Delta}{2} \right| \leq \frac{\omega\Delta}{2}$ , то

$$E_1 \leq \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell \delta_x + \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell \delta_y + \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell \delta_z +$$

$$+\frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell^2 \delta_{xy} + \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell^2 \delta_{xz} + \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell^2 \delta_{yz} + \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \frac{2}{\omega} \frac{\omega\Delta}{2} \ell^3 \delta_{xyz} =$$

$$= \delta_x + \delta_y + \delta_z + \delta_{xy} + \delta_{xz} + \delta_{yz} + \delta_{xyz}.$$

Теорема 2 доведена.

Для знаходження оцінки похибки заокруглення для кубатурної формули  $\Phi_1^3(f, \omega)$  можна використати метод збіжності перших десяткових знаків (ЗПЗ) із різною довжиною мантиси [17]. Такі методи оцінки похибки заокруглення розв'язків задач обчислювальної математики в арифметиці з плаваючою комою, що базуються на основі порівняння розв'язків із змінною довжиною мантиси машинного числа, з'явилися з розповсюдженням в безкоштовному доступі бібліотеки програм GNU GMP [18], що реалізує стандарт IEEE 754 [19].

Нехай  $A$  – невідоме точне скінчене або нескінчене число,  $a$  – його відоме наближення з відомою похибкою  $\Delta: |A - a| \leq \Delta$ ,  $a_1$  – друге наближення, таке що  $a = a_1 + \alpha$ , де  $|\alpha| < |a|$  та  $|A - a_1| \leq \Delta + |\alpha|$ . Припустимо, що мантиса числа  $a$  має  $t$  десяткових знаків. Представимо числа  $a, a_1, \alpha$  у вигляді

$$a = \pm \mu \cdot 10^e = \pm \left( \sum_{i=1}^m s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e = a_1 + \alpha, \quad a_1 = \pm \left( \sum_{i=1}^t s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e, \quad \alpha = \alpha^t = \pm \left( \sum_{i=t+1}^m s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e,$$

$e$  – порядок числа,  $1 \leq t \leq m$ . Розбиття числа  $a$  на  $a_1$  і  $\alpha$  називається *відсіканням числа за мантисою*. Число  $\alpha$  називається *похибкою заокруглення числа  $a_1$* ,  $|\alpha|$  – *помилка відсікання числа  $a$* . Спосіб заокруглення числа відсіканням за мантисою називають *методом відкидання*. Значення числа  $t_0$ , яке гарантує досягнення точності  $\varepsilon_A$ , раціонально визначати з умови  $t_0 = \min t$ , якщо  $\Delta + |\alpha^t| \leq \varepsilon_A$ .

Розглянемо  $v$  значень функції

$$\varphi_j(u) = \pm \left( \sum_{i=1}^k s_i^j \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e, \quad j = \overline{1, v}, \quad v \geq 2, \quad k - \text{натуральне число або } k = \infty.$$

Говорять, що у функції  $\varphi_j(u)$  збігаються  $t$  перших знаків, якщо  $s_i^1 = s_i^2 = \dots = s_i^t$ ,  $i = \overline{1, t}$ .

Якщо

$$w(u) \in R^1, \quad w(u) = \pm \left( \sum_{i=1}^{\infty} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e = w^t(u) + h^t(u), \quad w^t(u) = \pm \left( \sum_{i=1}^t s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e, \quad h^t(u) = \pm \left( \sum_{i=t+1}^{\infty} s_i \cdot 10^{-i} \right) \cdot 10^e,$$

де  $w_m(u)$  – це обчислене  $w(u)$  при довжині мантиси  $m$ ,  $\Delta_m = w(u) - w_m(u)$ , то має місце теорема про оцінку похибки метода заокруглення розв'язків по збіжності  $t$  перших десяткових знаків.

**Теорема 3.** [17] (про оцінку похибки методу заокруглення розв'язків). Нехай  $h_m^t(u) = w_m(u) - w^t(u)$ ,  $|h_m^t(u)| < 1 \cdot 10^{e-t}$ ,  $|\Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$ . Для того, щоб розв'язки  $w(u)$  та  $w_m(u)$  мали  $t$  ЗПЗ, необхідно та достатньо, щоб  $0 \leq |h_m^t(u) - \Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$ , причому якщо  $h_m^t(u)$ ,  $\Delta_m$  мають різні знаки, то повинна виконуватися нерівність  $|h_m^t(u) - \Delta_m| < 1 \cdot 10^{e-t}$ , якщо однакові, – то нерівність  $|h_m^t(u)| \geq |\Delta_m|$ . Похибка розв'язків  $w^t(u)$  задовольняє умові  $|w^t(u) - w(u)| < 1 \cdot 10^{e-t}$ .

**Чисельний експеримент.** Покажемо справедливість теореми 3 і для більш широкого класу  $C_{3,L,\bar{L},\alpha}^2$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Розглянемо клас дійсних функцій трьох змінних, визначених на  $G = [0, 1]^3$  і таких, що задовольняють умові Гельдера по кожній змінній:

$$|f(x_1, y, z) - f(x_2, y, z)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha, \quad |f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| \leq L|y_1 - y_2|^\alpha,$$

$$|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|^\alpha,$$

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_1, z_1) - f(x_1, y_2, z_1) - f(x_1, y_1, z_2) + f(x_2, y_2, z_1) + f(x_2, y_1, z_2) + f(x_1, y_2, z_2) - f(x_2, y_2, z_2)| \leq \tilde{L}|x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\alpha |z_1 - z_2|^\alpha.$$

Вважаємо, що функція задана слідами на системі взаємоперпендикулярних площин  $f(x_k, y, z)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ ,  $f(x, y_j, z)$ ,  $j = \overline{1, \ell}$ ,  $f(x, y, z_s)$ ,  $s = \overline{1, \ell}$ .

Нехай

$$f(x, y, z) = \left( \arccos^2 \left( xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \right) - \arccos^2 x - \arccos^2 y \right) \arccos z,$$

$w = I_1^3(f, 4\pi)$ ,  $w_m = \Phi_{1m}^3(f, 4\pi)$ ,  $w^t = I_1^{3t}(f, 4\pi)$ ,  $h_m^t = w_m - w^t$ ,  $\Delta_m = w_m - w$ . Будемо вважати, що  $w = I_1^3(f, 4\pi) = -0.2335925334219 \cdot 10^{-2}$ .

Таблиця 1 – Обчислення  $I_1^3(f, 4\pi)$  за формулою  $\Phi_{1m}^3(f, 4\pi)$  при різних  $m$

$\ell$	$m$	$w_m = \Phi_{1m}^3(f, 4\pi)$	$ h_m^t  =  w_m - w^t $	$ \Delta_m  =  w_m - w $
16	10	<b>-0.23359254</b> · 10 <sup>-2</sup>	0.4 · 10 <sup>-9</sup>	0.06 · 10 <sup>-9</sup>
16	13	<b>-0.23359253546</b> · 10 <sup>-2</sup>	0.5 · 10 <sup>-10</sup>	0.2 · 10 <sup>-10</sup>
25	15	<b>-0.2335925337107</b> · 10 <sup>-2</sup>	0.7 · 10 <sup>-11</sup>	0.2 · 10 <sup>-11</sup>

В даному обчислювальному експерименті  $w$  – точне значення інтеграла, однак в якості  $w$  можна розглядати і наближено обчислені значення інтегралу при іншій довжині мантиси.

Як видно з табл. 1, числа  $t_i$  ЗПЗ для розв’язку  $w_{m_i} = \Phi_{1m_i}^3(f, 4\pi)$  рівні:  $t_1 = 7$ ,  $t_2 = 8$ ,  $t_3 = 9$ . Значення  $t_i$  ЗПЗ виділені жирним шрифтом. Для похибки розв’язку і похибки заокруглення справедливі оцінки:

$$\Delta_i = \left| I_1^3(f, 4\pi) - I_1^{3t_i}(f, 4\pi) \right| \leq 1 \cdot 10^{e-t_i},$$

$$\left| h_{m_i}^{t_i} \right| = \left| \Phi_{1m_i}^3(f, 4\pi) - I_1^{3t_i}(f, 4\pi) \right| \leq 1 \cdot 10^{e-t_i}.$$

**Перспективи подальших досліджень.** Наведений алгоритм дослідження повної похибки наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на системі взаємоперпендикулярних площин, може бути використаний не тільки для функцій з класу Ліпшиця, а й для диференційованих функцій. Крім того, аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на системі взаємоперпендикулярних ліній на різних класах функцій.

**Висновки.** На класі  $C_{3,L,\tilde{L}}^2$  отримано оцінку повної абсолютної похибки наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про  $f(x, y, z)$  задавалась слідами функції на системі взаємоперпендикулярних площин. Кубатурна формула використовувала в своїй побудові оператор інтерфлетант з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Особлива увага приділена дослідженню неусувної похибки. Оцінка для неусувної похибки знаходилася в припущенні, що значення функції задані її слідами на площинах наближено з максимальною точністю. Для знаходження оцінки похибки заокруглення використовувався метод збіжності перших десяткових знаків із різною довжиною мантиси.

**Список літератури:** 1. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур’є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28. 2. *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур’є функцій  $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$  з використанням інтерлінації : Сб. науч. труд. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения / Ин-т математики НАН Украины. – К., 1999. – С. 166 – 169. 3. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13. 4. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення 2D- коефіцієнтів Фур’є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29. 5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* 2D- коефіцієнти Фур’є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Тавричеський вестник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61. 6. *Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). –

Novosibirsk. – 2010. – Р. 90 – 96. **7.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23. **8.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72. **9.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3D- коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетатії // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50. **10.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетатії на класі диференційованих функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41. **11.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9. **12.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107. **13.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48. **14.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления 3D- интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217. **15.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення 3D- коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетатії // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113. **16.** Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106. **17.** Бирюков А. Г., Гриневич А. И. Метод оценки погрешностей округления решений задач вычислительной математики в арифметике с плавающей запятой, основанный на сравнении решений с изменяемой длиной мантиссы машинного числа // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5. – № 2. – С. 160 – 174. **18.** GNU GMP: Multiple precision arithmetic library. – Режим доступа :/ http://gmp1ib.org/. **19.** IEEE 754-2008: 754-2008 IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. – ISBN: 978-0-7381-5753-5.

**References:** **1.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Kubaturni formulu dlya obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvoh zminnykh z vykorystanniam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukraini. Matematika. Prirodovnavstvo. Tehnichni nauki*. [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no 1, pp. 23–28. **2.** Nechuyviter, O. P. Kubaturna formula obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy z vikoristanniam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions  $f(x, y) \in C_{2,L,L,M}^2$  using interlineation]. *Sb. nauch. trud. Nelineyniy kraeviy zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukraini. Publ., 1999, pp. 166–169. **3.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Optimal'na za porядkom tochnosti kubaturna formula obchislennya podviynih integraliv vid shvydkoostylyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal accuracy order cubature formula for computing double integrals of high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukraini. Matematika. Prirodovnavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, no. 6, pp. 9–13. **4.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchislennya 2D- koefitsientiv Fur'ye z vykorystanniam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2-D Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukraini. Matematika. Prirodovnavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29. **5.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. 2D- koefitsienty Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D Fourier coefficients on a class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61. **6.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010)* (June 15 – 18 2010). Novosibirsk, 2010, pp. 90–96. **7.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchislennya podviynikh integraliv vid shvydkoostylyuyuchykh funktsiy z vykoristanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23. **8.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchislennya podviynih integraliv z vikoristanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriyskiy visnik informatiki ta matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72. **9.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchislennya 3D- koefitsientiv Fur'ye na klasi diferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on a class of differentiable functions using spline-interfletation]. *Dop. NAN Ukraini. Matematika. Prirodovnavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50. **10.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy trokh zminnykh z vykoristanniam splayn-interfletatsiyi na klasi diferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using a spline-interfletation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukraini. Matematika. Prirodovnavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 8, pp. 36–41. **11.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Priblizhennoe vychislenie ostilliruyuschih integralov trekh peremennykh s ispolzovaniem interfletatsiyi funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interfletation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9. **12.** Lytvyn, O. M., Nechuyviter, O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostilliruyuschih funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of fast oscillating functions of three variables]. *Nauchnyye vedomosti BELGU. Ser. Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod State University. Series: mathematics and physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107. **13.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchislennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy trokh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48. **14.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3D- integralov ot bystroostylyuyuschih funktsiy s ispolzovaniem interfletatsiyi [Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D - integrals of fast oscillating functions using interfletation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217. **15.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Nablyzhene obchislennya 3D- koefitsientiv Fur'ye na klasi Gel'dera z vykoristanniam kuskovo-staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Gelder class of functions using piecewise spline-interfletation]. *Matematichni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113. **16.** Lytvyn, O. M. and Nechuyviter, O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostilliruyuschih funktsiy trekh peremennykh s ispolzovaniem lagranzhevoy polinomial'noyi interfletatsiyi [Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interfletation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106. **17.** Biryukov, A. G. and Grinevich, A. I. Metod otsenki pogreshnostey okrugleniya resheniy zadach vychislitel'noy matematiki v arifmetike s plavayushey zapoyatoy, osnovanniy na sravnenii resheniy s izmenyaemoy dlinoy mantissy mashinnogo chisla [A method for estimating rounding errors of the solutions for the problems of computational mathematics in floating-point arithmetic based on the comparison of solutions with the variable length of the mantissa of machine numbers]. *Trudyi MFTI* [Proceedings of Moscow Physical-Technical Institute]. 2013, vol. 5, no. 2, pp. 160–174. **18.** The GNU Multiple precision arithmetic library. Available at: <http://gmp1ib.org>. (accessed 20.02.2016). **19.** IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. Available at: <http://www.csee.umbc.edu/~tsimo1/CMSC455/IEEE-754-2008.pdf>. (accessed 20.02.2016).

Надійшло (received) 07.04.2016



## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Литвин Олег Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Литвин Олег Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Lytvyn Oleg Mykolayovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ\_mail@ukr.net.

**Нечуйвітер Олеся Петрівна** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Нечуйвітер Олеся Петровна** – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Nechuiviter Olesia Petrivna** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

**Каргапольцева Ганна Вікторівна** – асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

**Каргапольцева Анна Викторовна** – асистент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

**Kargapoltseva Ganna Viktorivna** – Asistant, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: kargapoltseva@ukr.net.

УДК 539.3

**Е. С. МАЛАХОВ, А. В. ВОРОПАЙ****ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН**

Рассматривается система из трех струн, контактирующих между собой в некоторых точках так, что перемещения в этих точках совпадают. Моделирование нестационарных колебаний струн осуществляется на основе волновых уравнений. Обратная задача сводится к решению системы трех интегральных уравнений Вольтера I-го рода, для которой осуществляется дискретизация. Блочная система линейных алгебраических уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова.

**Ключевые слова:** система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтера, идентификация сил.

**Введение и постановка задачи.** В работе [1] изложена постановка прямой задачи для нестационарных колебаний системы трех струн, и подробно описана методика её решения. В указанной работе на основе одномерных волновых уравнений определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Данная работа будет посвящена решению обратной задачи для исследуемой механической системы. В качестве примера при вычислениях исследуются нестационарные поперечные колебания системы канатов, моделируемых струнами, с параметрами, которые выбирались согласно [2]. Отметим, что в настоящей работе, как и в [1] предполагалось, что длины струн не меняются во времени, в случае моделирования продольных колебаний канатов и их систем можно использовать подход, аналогичный изложенному в монографии [3]. Рассматривается система из трех закрепленных струн, имеющих конечную длину. Как показано на рис. 1, несущую струну большей длины подкрепляют две другие струны, параллельные между собой, и меньшей длины для того, чтобы снизить нагрузку, которая приходится на несущую струну. К несущей струне приложена сосредоточенная нагрузка  $F(x, t) = P(t)\delta(x - x_3)$ , которая вызывает нестационарные колебания исследуемой системы, где  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака,  $x_3$  – точка приложения нагрузки. Точки пересечения третьей и первой струны обозначим  $x_1$ , третьей и второй –  $x_2$ , точки наблюдения –  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно. Отметим, что могут прикладываться несколько различных нагрузок в произвольных точках исследуемой системы. В этом случае метод решения задачи требует небольших изменений.

При решении *прямой задачи* причины, вызывающие колебания – *внешние возмущающие нагрузки*  $P_i(t)$ , известны, а необходимо найти следствия (их косвенное проявление), а именно изменение  $u(t)$  линейных перемещений точек струн во времени.

В случае *обратной задачи* известными являются перемещения одной из струн во времени  $u_s(t)$  в одной из ее точек, а необходимо по этим перемещениям найти изменение внешних возмущающих нагрузок (определить неизвестные силы по их косвенным проявлениям). При решении обратной задачи для системы струн кроме внешней возмущающей нагрузки необходимо также определить неизвестные силы контактного взаимодействия.

© Е. С. Малахов, А. В. Воропай, 2016

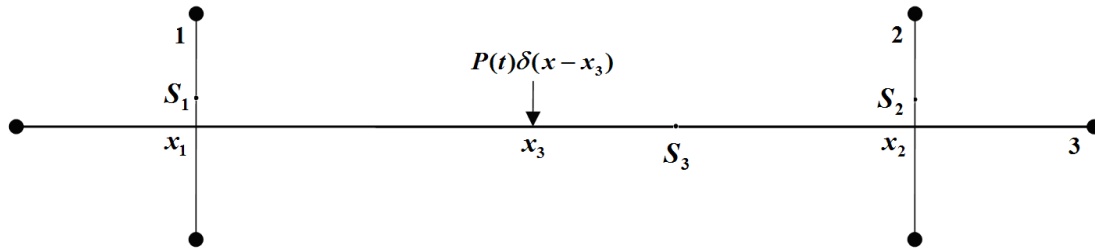


Рис. 1 – Исследуемая система струн.

**Прямая задача.** Для начала рассмотрим вспомогательную задачу о колебаниях одной струны под действием нескольких приложенных сосредоточенных нагрузок, которые обозначим

$$F_1(x,t), \dots, F_N(x,t), \text{ где } F_n(x,t) = R_n(t)\delta(x-x_n), \text{ } n \in [1, N].$$

Эти колебания описываются одномерным волновым уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^N F_n(x,t) \tag{1}$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{du(x,0)}{dt} = 0. \tag{2}$$

Как было показано в статье [1], при одной приложенной сосредоточенной нагрузке имеем следующее решение задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1}{\omega_k} \cdot \int_0^t R(\tau) \sin(\omega_k(t-\tau)) d\tau \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_1) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x). \tag{3}$$

В случае нескольких нагрузок, действующих на струну, можно обобщить формулу (3) следующей зависимостью:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x,t-\tau) \cdot R_i(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где

$$K_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_i}{\omega_{ik}} \cdot \sin(\omega_{ik}t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_i) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x).$$

Возвращаясь к задаче с тремя струнами, построим схему прямой задачи (рис. 2); при этом учтем влияние взаимодействия струн введение соответствующих реакций.

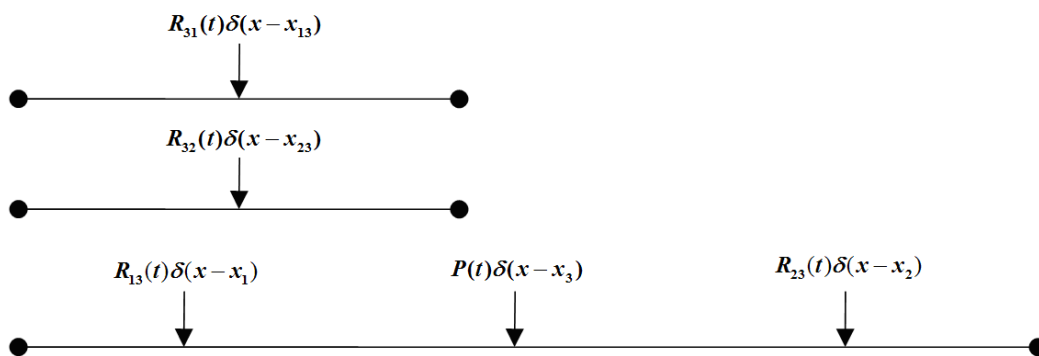


Рис. 2 – Струны под действием нагружения и контактных сил ( $R_{ij}$  – сила контакта  $i$ -ой и  $j$ -ой струн).

Выпишем систему уравнений, описывающую колебания системы струн, предварительно воспользовавшись условием антисимметричности контактных сил  $R_{ij} = -R_{ji}$  и обозначением  $R_i = (R_{13}(t) \ R_{23}(t) \ P(t))^T$ :

$$\begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_1} R_1(t)\delta(x-x_{13}); & a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_2} R_2(t)\delta(x-x_{23}); \\ a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_3} [R_1(t)\delta(x-x_1) + R_2(t)\delta(x-x_2) + R_3(t)\delta(x-x_3)], \end{cases} \tag{5}$$

где  $x_{13}$  – координата точки первой струны, в которой она контактирует с третьей;  $x_{23}$  – точка второй струны, в

которой она контактирует с третьей.

Система (5) дополняется нулевыми начальными и краевыми условиями вида (2), а так же кинематическими условиями контакта (равенствами перемещений в точках контакта):

$$u_1(x_{13}, t) = u_3(x_1, t), \quad u_2(x_{23}, t) = u_3(x_2, t). \tag{6}$$

На основе (4) можно выписать следующие соотношения для каждой из струн

$$u_1(x, t) = -\int_0^t K_{11}(x, t-\tau) \cdot R_1(\tau) d\tau; \quad u_2(x, t) = -\int_0^t K_{22}(x, t-\tau) \cdot R_2(\tau) d\tau; \quad u_3(x, t) = \sum_{n=1}^3 \int_0^t K_{3n}(x, t-\tau) \cdot R_n(\tau) d\tau, \tag{7}$$

где введены ядра

$$K_{in}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_i}{\omega_{ik}} \cdot \sin(\omega_{ik} t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_n) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x),$$

в которых  $i$  в записи для  $K_i$  – это номер струны, а индекс  $n$  соответствует номеру нагрузки  $R_n(t)$ , и обозначено  $C_i = 2/l_i \rho_i$ ,  $\omega_{ik} = a_i \cdot \lambda_{ik}$ ,  $\lambda_{ik} = \pi k / l_i$ .

Проводим *дискретизацию* и *обезразмеривание* интегральных операторов. Это можно сделать с помощью методов прямоугольников, трапеций, Симпсона и так далее. В данной задаче будет использоваться *метод частичного интегрирования*, который обеспечивает более высокую гладкость решения.

$$\int_0^t K(t-\tau) \cdot R(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^j R_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \sin(\omega_k(t_j - \tau)) d\tau = \sum_{i=1}^j R_i \cdot \frac{2}{\omega_k} \sin\left[\omega_k \cdot \left((j-i) + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t\right] \cdot \sin\left(\frac{\omega_k \cdot \Delta t}{2}\right),$$

где  $t_j = j \cdot \Delta t$  – дискретное время.

Неизвестные силы контактного взаимодействия будем определять из кинематических условий (6) и условия антисимметричности контактных сил, которые подставлялись в (7).

Таким образом, получена следующая система двух матричных уравнений для дискретных ядер:

$$-\mathbf{A1}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 = \mathbf{A3}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3; \quad -\mathbf{A2}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{A3}_{21} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3, \tag{8}$$

где матрица  $\mathbf{Ai}_{nm}$  соответствует дискретной форме  $\mathbf{Ki}_n(x_m, t_j)$ , то есть индекс  $n$  обозначает точку приложения силы,  $m$  – точку исследования, а  $i$  – номер струны.

Система (8) в матричном виде записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11} & \mathbf{A3}_{12} \\ \mathbf{A3}_{21} & \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3 \\ -\mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

При решении прямой задачи вектор  $\mathbf{R}_3$ , соответствующий силе  $P(t)$ , считается известным, поэтому слагаемые, содержащие вектор  $\mathbf{R}_3$ , помещены в правую часть. Система (9) приводится к традиционной компактной записи при помощи следующих обозначений:  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A3}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A3}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22}$ ,  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3$ ,  $\mathbf{B}_2 = -\mathbf{A3}_{23} \cdot \mathbf{R}_3$ . Таким образом, имеем матричное уравнение с неизвестными  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

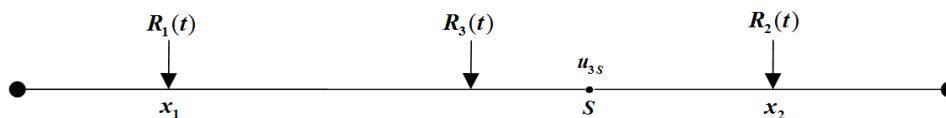


Рис. 3 – Третья струна под действием неизвестных нагрузок.

Система уравнений (10) является блочным матричным уравнением, которое можно решить при помощи обобщенных алгоритмов Гаусса или Крамера [5]. Стоит заметить, что (10) эквивалентно системе *интегральных уравнений Вольтерра* I-го рода, а, как известно, решение такой системы – это существенно *некорректная задача* [6], поэтому для решения применялся *регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова* [5]. При вычислениях с блочными матрицами производятся исключительно символьные операции, поэтому для систем более [5x5] рекомендуется использование алгоритма Гаусса в силу меньшего числа операций. В случае порядка меньшего [5x5] целесообразно использование *обобщенного алгоритма Крамера* в силу простоты символьного решения, а так же более удобного совместного использования регуляризирующего алгоритма Тихонова при обращении матриц. Таким образом, находим неизвестные контактные силы в следующей форме:

$$\mathbf{R}_1 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \quad \mathbf{R}_2 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_2, \tag{11}$$

где  $\Delta \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{vmatrix}$  – определители блочных матриц;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{c}$  – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [5].

По известным контактным силам вычисляются перемещения в произвольной точке любой из струн на основе соотношений (7).

**Обратная задача.** Допустим, что в качестве исходных данных при решении обратной задачи заданы перемещения в некоторой точке  $S$  третьей струны (рис. 3).

Колебания системы струн описываются соотношениями (4), которые в рассматриваемом случае будут являться интегральными уравнениями Вольтерра I-го рода относительно трех неизвестных  $R_i(t)$ . Для точки  $S$  можно записать

$$u_{3S}(t) = u_3(x_S, t) = \int_0^t K_{31}(x_S, t - \tau) \cdot R_1(\tau) d\tau + \int_0^t K_{32}(x_S, t - \tau) \cdot R_2(\tau) d\tau + \int_0^t K_{33}(x_S, t - \tau) \cdot R_3(\tau) d\tau, \quad (12)$$

В интегральное уравнение (12) входят 3 неизвестные силы. Дополним его двумя уравнениями для точек контакта первой и третьей, второй и третьей струн, что дает систему из трех уравнений с тремя неизвестными, которая в матричной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11} & \mathbf{A3}_{12} & \mathbf{A3}_{13} \\ \mathbf{A3}_{21} & \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22} & \mathbf{A3}_{23} \\ \mathbf{A3}_{1S} & \mathbf{A3}_{2S} & \mathbf{A3}_{3S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3S} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матричная система уравнений (13) в более простой форме имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{u}_{3S} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A1}_{11} + \mathbf{A3}_{11}, \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A3}_{12}, \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A3}_{13}, \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A3}_{21}, \mathbf{A}_{22} = \mathbf{A2}_{22} + \mathbf{A3}_{22}, \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A3}_{23}, \\ \mathbf{A}_{31} = \mathbf{A3}_{1S}, \mathbf{A}_{32} = \mathbf{A3}_{2S}, \mathbf{A}_{33} = \mathbf{A3}_{3S}.$$

Метод решения системы (14) аналогичен ранее изложенному при решении прямой задачи. В результате можно записать:

$$\mathbf{R}_i = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{c})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_i, \quad (15)$$

где  $\Delta \mathbf{A}$  – определитель блочной матрицы  $\mathbf{A}$ ;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{u}_{3S} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & 0 & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{u}_{3S} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & 0 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{u}_{3S} \end{vmatrix}$$

Эти соотношения можно обобщить на случай, если известны перемещения первой или второй струн – тогда в системе (13) будет меняться лишь вектор правых частей.

**Вычислительный эксперимент.** Исходные данные при расчетах принимались на основе [2] для реальных канатов. Для удобства анализа было принято, что все струны имели одинаковые свойства (канаты одинакового сечения), а механическая схема была симметричной. При решении обратной задачи в качестве исходных данных использовались числовые результаты, полученные при решении прямой задачи. По выражениям (11) определялись реакции  $\mathbf{R}_1(t)$  и  $\mathbf{R}_2(t)$ , а затем из матричного соотношения  $\mathbf{u}_{3S} = \mathbf{A3}_{1S} \mathbf{R}_1 + \mathbf{A3}_{2S} \mathbf{R}_2 + \mathbf{A3}_{3S} \mathbf{R}_3$  определялось перемещение точки третьей струны в дискретные моменты времени. Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами:  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 2$  м,  $l_3 = 40$  м – длины струн;  $d_{st_i} = 0.0052$  м – диаметр струн;  $\rho = 0.109$  кг/м – линейная плотность струн;  $a_i = 214$  м/с – скорость распространения волн в струне,  $x_1 = 0.2 \cdot l_3$ ,  $x_2 = 0.8 \cdot l_3$  – точки контакта. Параметры регуляризации выбирались согласно методике, изложенной в работе [7]; для прямой задачи  $\alpha = 10^{-19}$ , и  $\alpha = 10^{-24}$  – обратной.

Изменение силы  $P(t)$  во времени, которая действует по середине третьей струны, при решении прямой задачи предполагалось согласно функции Хевисайда:  $P(t) = q_0 \cdot H(t)$ , где  $q_0 = 10$  Н – интенсивность нагрузки. Исследовался промежуток времени  $T = 2$  с. Вместо бесконечных сумм в выражениях производился учет конечного числа членов ряда  $K = 50$ , для дискретизации по времени  $\Delta t = T / J = 0.004$ ,  $J = 500$ . Расчеты производились в среде MathCad.

На рис. 4 показаны изменения контактных сил во времени. Сплошная кривая соответствует реакции  $R_1$ , а точками показана реакция  $R_2$ .

В силу того, что реакции первой  $R_1$  и второй  $R_2$  струн на третью струну расположены симметрично, возмущающая сила приложена к середине третьей струны, а параметры первой и второй струн совпадают, то реакции должны равняться между собой, что демонстрирует рис. 4. Это совпадение подтверждает достоверность вычислений.

На рис. 5 изображены перемещения каждой из трех струн в точках наблюдения. Рис. 5, а показывает изменение перемещения первой струны в точке с координатой  $x_{1S} = 0.4 \cdot l_1$  и второй –  $x_{2S} = 0.4 \cdot l_2$ . Из-за того, что первая и вторая струны идентичны, их перемещения полностью совпадают. На рис. 5, б показаны перемещения третьей струны в точке с координатами  $x_{3S} = 0.6 \cdot l_3$  – сплошная кривая, на этом же графике точками показаны зашумленные значения перемещения, которые брались в качестве исходных данных для обратной задачи. Поскольку моделировались случайные зашумления, то шум накладывался согласно закону нормального распределения со средним квадратичным отклонением равным, 10 % от максимального незашумленного перемещения третьей струны.

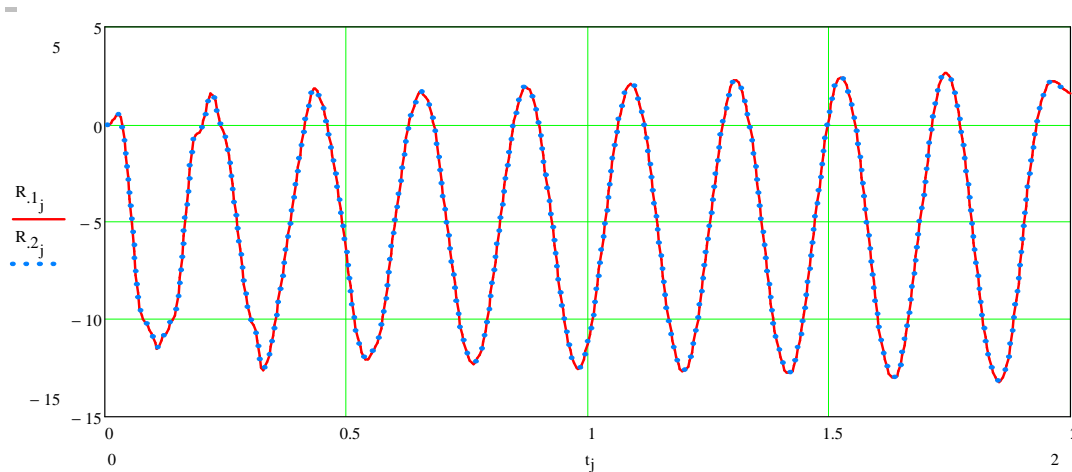


Рис. 4 – Значения контактных сил.

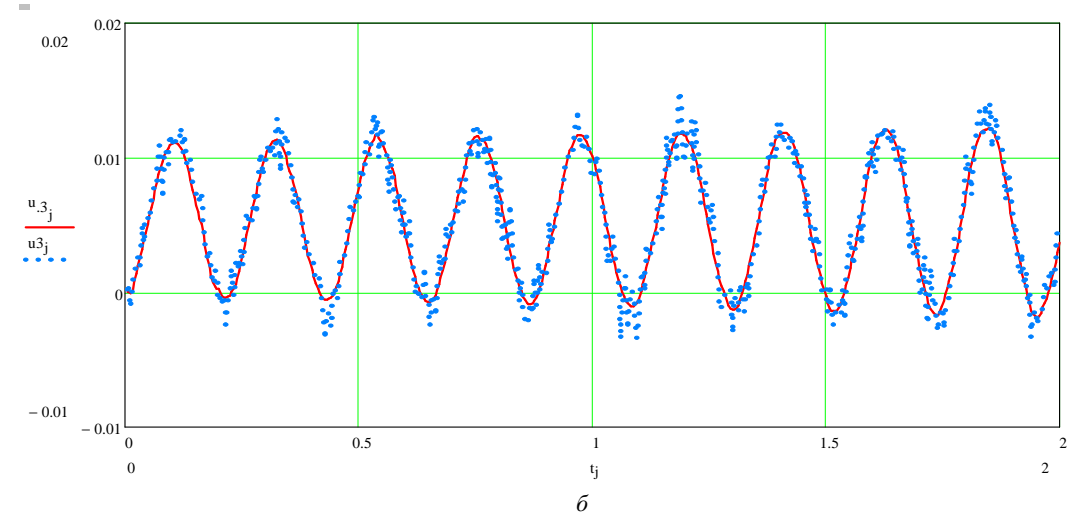
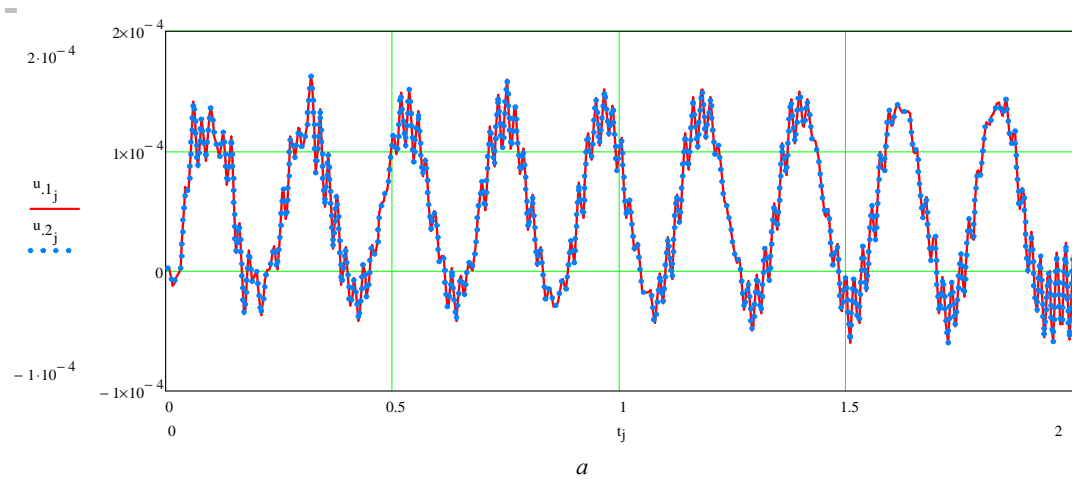


Рис. 5 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: а – перемещений 1 и 2 струн; б – перемещения 3 струны.

Исходными данными для обратной задачи (идентификации силы  $\mathbf{P}(t)$ ) являются числовые значения прогиба третьей струны в точке  $S_3$ , которые изображены на рис. 5, б. На рис. 6, а приведены для сравнения приложенная сила  $\mathbf{P}(t)$  (сплошная кривая) и восстановленная нагрузка  $\mathbf{R}_3(t)$ , соответствующая этой силе (показана точками). Для восстановленной контактной силы  $\mathbf{R}'_1$  на рис. 6, б идет сравнение с  $\mathbf{R}_1$ , полученной при решении прямой задачи (для второй реакции  $\mathbf{R}_2$  рисунок будет идентичным в силу симметрии).

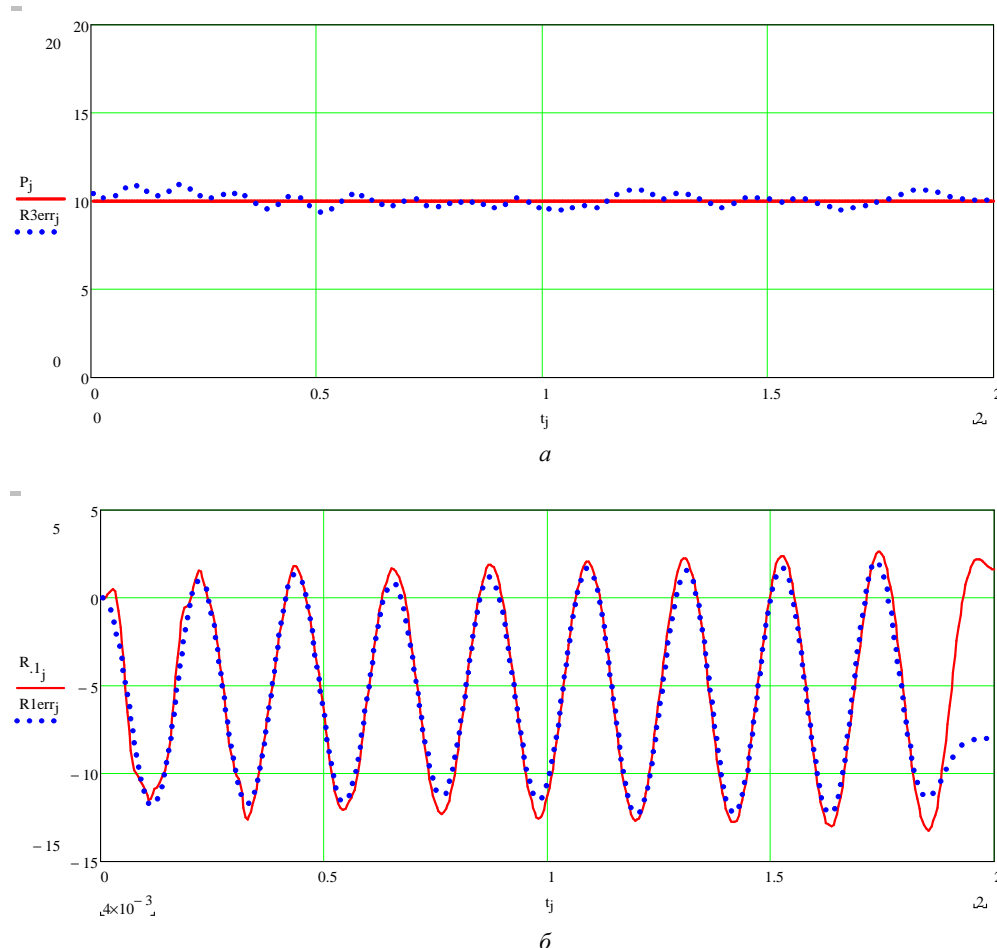


Рис. 6 – Сравнение заданных и идентифицированных нагрузок:  
а – возмущающей нагрузки; б – сил контактного взаимодействия.

Как видно из рис. 6, полученные при решении обратной задачи идентифицированные силы «хорошо» совпадают с исходными, с учетом того факта, что исходные данные для обратной задачи имели 10 % зашумление. Укажем, что отличие идентифицированной силы  $\mathbf{R}'_1$  от силы  $\mathbf{R}_1$  в конце исследуемого промежутка времени вызвано, по-видимому, накоплением погрешностей при решении блочной системы интегральных уравнений.

**Выводы.** В данной работе получено достаточно устойчивое решение обратной задачи для нестационарных колебаний системы, состоящей из трех струн. Приведены результаты расчетов, показывающие возможность идентификации неизвестного внешнего нагружения по известным перемещениям во времени точки, принадлежащей одной из струн (третьей), которые могут быть измерены экспериментально. Таким образом, появляется возможность косвенного измерения нестационарной силы по перемещениям одной из точек системы трех струн.

**Список литературы:** 1. Малахов Е. С. Прямая задача для нестационарных колебаний системы трех струн // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 67 – 71. 2. Ануриев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. – 8-е изд., перераб. и доп. // Под ред. И. Н. Жестковой. – М. : Машиностроение, 2001. – 920 с. 3. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику одномерных деформируемых тел переменной длины. – К. : Наукова думка, 1971. – 224 с. – Библиогр. : С. 218 – 224. 4. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1969. – 288 с. 5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 288 с. 6. Верлянь А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие. – Киев : Наукова думка, 1986. – 544 с. 7. Вороний А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкций // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 22 – 29.

**References:** 1. Malakhov, E. S. Pryamaya zadacha dlya nestatsionarnykh kolebaniy sistemy trekh strun [Direct problem of non-stationary oscillations of a three-string system]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 41 (1150), pp. 67–71. 2.

Anur'ev, V. I. *Spravochnik konstruktora-mashinostroitel'ya*. V 3 t. – 8-e izd. pererab. i dop. Ed. Zhestkova, I. N. [Handbook of designer-mechanician. In 3 vol. 8-th edn.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2001. 920 p. **3.** Goroshko, O. A. and Savin, G. N. *Vvedenie v mekhaniku odnomernykh deformiruemyykh tel peremennoy dliny* [Introduction to the mechanics of one-dimensional deformable bodies of variable length]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 224 p., Bibliogr. pp. 218–224. **4.** Aramanovich, I. G. and Levin, V. I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p. **5.** Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry Publ., 1986. 288 p. **6.** Verlan', A. F. and Sizikov, V. S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie* [Integral equations: methods, algorithms, programs: handbook]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1986. 544 p. **7.** Voropay, A. V. Regulariziruyushchiy algoritm A. N. Tikhonova v nekorrektnykh zadachakh nestatsionarnoy dinamiki uprugikh elementov konstruktsii [Tikhonov's regularization algorithm for ill-posed problems of elastic structural element nonstationary dynamics]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 41 (1150), pp. 22–29.

Поступила (received) 16.03.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Воропай Олексій Валерійович** – кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Воропай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Малахов Євген Сергійович** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

**Малахов Евгений Сергеевич** – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков, тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

**Malakhov Evgeniy Sergeevich** – postgraduate, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov, tel: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

УДК 519.25

**Т. О. МАРИНИЧ, Л. Д. НАЗАРЕНКО, К. В. ГЕЦ**

#### МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ СТРУКТУРНИМИ РОЗРИВАМИ

Проведено пошук оптимальної моделі для опису нестационарних часових рядів із адекватними статистичними характеристиками та якісними прогнозними властивостями. У якості інформаційної бази обрано щоденні статистичні дані міжбанківського валютного курсу гривні до долара США. Досліджено детерміністичні та стохастичні компоненти з метою визначення класу стаціонарності ряду. Перевірено доцільність проведення різних процедур згладжування та вирівнювання часових рядів із сезонністю, циклічністю та трендом. Для вихідних даних побудовано інтегровані моделі авторегресії – ковзного середнього (ARIMA), умовної гетероскедастичності (ARCH); проведено аналіз залишків та перевірено якість отриманих моделей. Досліджено умови застосування фіктивних змінних для усунення структурних розривів даних та проблем із залишками моделей. Виконано порівняльний аналіз якості прогнозів за побудованими моделями. Наведений алгоритм дозволив встановити оптимальну модель SARIMA, що включає сезонні параметри та фіктивні змінні структурного розриву.

**Ключові слова:** модель авторегресії, прогноз, стаціонарність, структурний розрив, фіктивна змінна, автокореляція, гетероскедастичність.

**Вступ.** Моделювання технічних, біологічних, економічних та інших процесів вимагає попереднього дослідження структури даних, природи стаціонарності, наявності аномальних спостережень. Особливістю економічних показників є наявність різнонаправлених трендів, сезонних та циклічних коливань, структурних розривів, що обумовлює їх нестационарність та спричинює автокореляцію, гетероскедастичність та відсутність нормального закону розподілу залишків моделей, побудованих за цими даними. Це унеможливило використання класичного статистичного апарату та актуалізує пошук методів та моделей, які дозволяють зменшити негативний вплив зазначених проблем для отримання більш якісних математичних моделей та достовірних прогнозів.

**Аналіз основних досягнень і літератури.** Сучасні методи прогнозування часових рядів базуються, переважно, на принципі історичного обумовлення майбутнього. При цьому постійного удосконалення набувають як методи тлумачення інформації, що представляє минулі події, так і способи їх екстраполяції на майбутнє. Широкого розповсюдження набуло параметричне моделювання, класичним прикладом якого є регресійний аналіз. Найбільш поширеними методами оцінки параметрів моделі залишаються метод найменших квадратів Гауса та метод максимальної правдоподібності. Підходи до специфікації параметричних моделей умовно можна поділити на структурні моделі, які базуються на системі рівнянь та обмежень на параметри, і спеціальні моделі «ad hoc», які не мають теоретичного обґрунтування [1].

© Т. О. Маринич, Л. Д. Назаренко, К. В. Гец, 2016

Так, після масового використання структурного підходу у макроекономічному моделюванні в 1950-х роках, у 1960-х рр. науковці почали активно досліджувати сезонні та циклічні характеристики часових рядів. У 1970 р. Бокс та Дженкінс систематизували результати цих робіт та запропонували комплексний підхід до моделювання і прогнозування часових рядів на підставі *авторегресійних моделей* та *моделей ковзного середнього* (ARMA / ARIMA). Дана методика набула популярності, оскільки була простішою за складні структурні моделі та дозволяла отримувати не менш якісні прогнози. Її програмна реалізація представлена в таких програмних економетричних пакетах, як EViews, Stata, Statistica, SPSS.

В рамках структурного підходу, починаючи з 1980-х років, успішно себе зарекомендували *динамічні лінійні та нелінійні Баєсовські моделі* із застосуванням *фільтра Кальмана* [1]. Фільтр Кальмана використовується також і в моделях ARIMA для усунення проблеми недостовірного оцінювання параметрів методом максимальної правдоподібності та визначення неспостережуваних компонент ряду [2].

**Мета та задачі дослідження.** Метою роботи є проведення порівняльного аналізу авторегресійних методів моделювання часових рядів та обґрунтування оптимальної за статистичними характеристиками та прогнозними якостями моделі, що описує дані валютного курсу. У дослідженні вирішуються задачі визначення основних компонент ряду, природи його стаціонарності, специфікації, параметризації, верифікації та апробації моделей; тестування *фіктивних змінних* з метою покращення їх якостей.

**Методи економетричного аналізу часових рядів.** Для стаціонарних часових рядів притаманна рівновага значень (стала дисперсія) біля середнього значення, яке є константою. На практиці це означає відсутність *тренду, сезонних коливань та систематичних змін дисперсії* [3, с. 26 – 30].

Для виявлення стаціонарності даних можна використовувати підхід побудови *автокорелограми* ряду, тобто графічного представлення автокореляційної функції (АКФ). У випадку стаціонарного ряду значення АКФ із зростанням лагу будуть сходиться до нуля. Крім того, вигляд корелограми характеризує процес наступним чином: поступове наближення АКФ до нуля властиве *процесам авторегресії*, а різкий перехід до нуля свідчить про *процес ковзного середнього*.

Також при дослідженні автокореляції ряду використовують підхід перевірки гіпотези про відсутність автокореляції до лагу  $k$  за допомогою  $Q$ -тесту *Льюнга-Бокса* [4, с. 256]. Для цього розраховується статистичне значення:

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{\rho^2}{T-j}, \quad (1)$$

де  $T$  – кількість спостережень;  $\rho^2$  – автокореляція  $j$ -го порядку;  $k$  – кількість лагів.

Одержане значення статистики порівнюється з теоретичним значенням  $\chi^2_{1-\alpha, m}$  – розподілу.

Іншим широко використовуваним методом перевірки стаціонарності даних є використання критеріїв, запропонованих у 1979 р. *У. Фулером* та *Д. Дікі* та його удосконалена форма *розширеного тесту Дікі-Фулера* (ADF) [3, с. 42 – 52]. Дана методика полягає у перевірці статистичної гіпотези про наявність одиничного кореня (за альтернативної гіпотези про наявність кореня, меншого від одиниці). Якщо  $t$  – статистика менша за критичні значення статистики ADF, то нульова гіпотеза відхиляється, що засвідчує стаціонарність ряду. У випадку наявності одиничних коєнів, ряд вважається інтегрованим  $k$ -го порядку  $I(k)$  та потребує диференціювання для приведення до стаціонарності. Умовою застосування даного тесту є *гомоскедастичність збурень*, тобто стала дисперсія випадкових збурень  $\varepsilon$  [4, с. 271].

Тест Дікі-Фулера застосовують для визначення належності ряду до DS чи TS класів [4, с. 268 – 270]. Клас TS характеризується тим, що такий ряд є стаціонарним відносно деякого детермінованого тренду, і для цих рядів необхідно виділяти трендову складову. Рядам класу DS властива наявність стохастичного тренду, тобто на відміну від TS-рядів, кожне відхилення рівною мірою впливає на всі наступні значення ряду. *Нульова гіпотеза* тесту Дікі-Фулера відповідає гіпотезі про належність ряду до DS-типу, відповідно *альтернативна гіпотеза* свідчить про те, що досліджуваний ряд є рядом типу TS, проте одночасно ряд може бути нестационарним (характеризуватись детермінованим трендом) або стаціонарним (характеризуватись відсутністю тренда). На вірогідність результатів тесту у даному випадку впливає специфікація моделі (включення у модель константи і (або) детермінованого тренду).

У випадку виявлення сезонності для оцінки стаціонарності даних та подальшої коректної побудови моделі необхідне її усунення або включення *фіктивних змінних* сезонності. Розповсюдженими методами згладжування є методи експоненційного та адаптивного згладжування, *адитивна та мультиплікативна моделі Холта-Вінтерса* [2].

При використанні методу експоненційного згладжування нове представлення ряду даних отримується за правилом:

$$S_t = y_t, \quad S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}, \quad t = \overline{2, T}, \quad (2)$$

де  $S_t$  – нове значення рівня ряду;  $y_t$  – вихідне значення рівняння ряду;  $\alpha$  – константа згладжування. Даний метод доцільніше всього застосовувати у випадку, коли дані мають пологий або горизонтальний тренд.



Метод адаптивного згладжування дозволяє змінювати константу згладжування у процесі обчислення, для чого використовується схема:

$$S_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_t. \tag{3}$$

Тут  $\alpha$  змінюється з часом за правилом:

$$\alpha_t = \left| \frac{E_t}{M_t} \right|, E_t = \beta(y_t - \hat{y}_t) + (1 - \beta)E_{t-1}, M_t = \beta|y_t - \hat{y}_t| + (1 - \beta)M_{t-1}, \beta \in (0; 1). \tag{4}$$

Більш розвиненою модифікацією експоненційного згладжування є адитивна модель Холта-Вінтерса, яка базується на використанні згладжених даних, трендової компоненти та індексу сезонності. Згладжування у такому випадку відбувається за схемою:

$$S_{t+p} = \alpha_t + b_t p + c_{t+p}, \tag{5}$$

де  $b_t$  – параметр тренду;  $p = 1, 2, \dots$  – кількість періодів прогнозу;  $c_t$  – параметр сезонності. Компоненти  $\alpha, b, c$  розраховуються за формулами:

$$\alpha_t = \alpha(y_t - c_{t-s}) + (1 - \alpha)(\alpha_{t-1} + b_{t-1}), b_t = \beta(\alpha_t - \alpha_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \tag{6}$$

$$c_t = \gamma(\gamma_t - \alpha_t) + (1 - \gamma)c_{t-s}, 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1.$$

Тут  $s$  – кількість циклів сезонності;  $\alpha, \beta, \gamma$  – параметри згладжування відповідно для рівня ряду, тренду та сезонності.

За наявності у спостереженнях двох повних циклів сезонності можливе згладжування шляхом побудови мультиплікативної моделі Холта-Вінтерса. У такого випадку використовується наступне правило:

$$S_{t+p} = (\alpha_t + b_t p)c_{t+p}. \tag{7}$$

Подальше моделювання на основі нестационарних даних вимагає їх зведення до стаціонарного вигляду. У випадку виявлення належності ряду до класу TS достатньо виділити тренд з даних. Якщо при перевірці даних за допомогою ADF-тесту було визначено належність ряду до типу DS, то проблему нестационарності можна вирішити використанням замість рівнів ряду *різниць i-go порядку*. У такому випадку для моделювання застосовується *авторегресійна інтегрована модель ковзного середнього* ARIMA (Auto Regressive Integrated Moving Average) [2], яка робить прогноз майбутніх значень часового ряду на підставі лінійної комбінації його попередніх значень та збурень (також відомих як *випадкові шоки* або *інновації*).

При цьому авторегресійний процес (AR) порядку  $p$  описується рівнянням вигляду:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \tag{8}$$

де  $Y_t$  – залежна змінна у момент часу  $t$ ;  $\varphi_p$  – коефіцієнти авторегресії;  $\varepsilon_t$  – помилка у момент часу  $t$  (*білий шум*) [2].

Рівняння ковзного середнього (MA) порядку  $q$  має вигляд:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q}, \tag{9}$$

де  $\omega_q$  – коефіцієнти MA;  $\mu$  – постійне середнє процесу.

Будь-яка стаціонарна модель AR ( $p$ ) може бути записана як MA ( $\infty$ ). Наприклад, виконуючи відповідні заміщення для AR(1), одержуємо модель MA ( $\infty$ ):

$$Y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = \varphi_1(\varphi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varphi_1^2(y_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) = \dots, \tag{10}$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots$$

Як було зазначено вище, нестационарний процес класу DS можна звести до стаціонарного, застосовуючи *оператор послідовних різниць*  $\Delta^d y_t$ . У такому випадку застосовується інтегрована авторегресійна модель ковзного середнього ARIMA ( $p, d, q$ ), де  $p$  – лаг моделі,  $d$  – порядок інтеграції та  $q$  – порядок ковзного середнього:

$$y'_t = c + \varphi_1 y'_{t-1} + \dots + \varphi_p y'_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t. \tag{11}$$

Сезонна модель трансформується у SARIMA із параметрами ( $p, d, q$ ), ( $P, D, Q$ ) $m$ , де  $m$  – кількість періодів у сезоні; будується із додаванням сезонних параметрів, які перемножуються із несезонними компонентами [2].

За наявності у даних гетероскедастичності доцільним стає використання *авторегресійних моделей умовної гетероскедастичності* ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) [5]. При побудові такої моделі для деякого часового ряду, який можна подати у вигляді  $y_t = u_t$ , використовується властивість умовної дисперсії

$$\sigma_t^2 : \tag{12}$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \delta \cdot u_{t-1}^2.$$

де  $u_t$  – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим середнім;  $\gamma, \delta$  задовольняють умові  $\sigma_t^2 > 0$  для всіх  $t$ .

Передумовою достовірного прогнозу є якість та адекватність отриманої моделі. При діагностиці моделі, зокрема, виконується перевірка залишків моделі на автокореляцію, нормальний закон розподілу та гетероскедастичність.

Для перевірки нормального закону розподілу залишків моделі застосовують, зокрема, критерій Жарка-Бера, який полягає у перевірці статистичної гіпотези про нормальний закон розподілу. На основі коефіцієнтів асиметрії та ексцесу розраховується статистичне значення критерію Жарка-Бера [4, с. 257]:

$$JB = [(T - k) / 6] \cdot (S^2 + (K - 3)^2 / 4). \quad (13)$$

Тут  $S$  – значення коефіцієнту асиметрії;  $K$  – значення коефіцієнту ексцесу;  $k$  – кількість параметрів моделі, що оцінюються. Статистика Жарка-Бера розподіляється у відповідності до розподілу  $\chi^2$ .

Одним з методів перевірки залишків моделі на гетероскедастичність є тест, запропонований у 1980 році Г. Уайтом [6] для перевірки статистичної гіпотези про відсутність гетероскедастичності за допомогою LM-статистики:

$$LM = nR^2, \quad (14)$$

де  $n$  – кількість спостережень;  $R^2$  – коефіцієнт детермінації допоміжної регресії. У випадку гомоскедастичності залишків моделі LM-статистика має асимптотичний розподіл  $\chi^2_{N-1}$ , де  $N$  – кількість параметрів допоміжної регресії.

Складовою визначення якості моделі є також розрахунок коефіцієнту детермінації  $R^2$ , стандартної похибки регресії, інформаційних критеріїв Акаїке і Шварца та статистики Дарбіна-Уотсона.

Для вибору моделі серед декількох альтернативних використовується інформаційний критерій, представлений у 1971 році Х. Акаїке [4]:

$$AIC = \ln(\varepsilon' \varepsilon / T) + 2(p + q) / T. \quad (15)$$

Проте для критерію Акаїке характерним є вибір на користь перепараметризованої моделі. Цю проблему частково усуває інформаційний критерій Шварца [4, с. 255]:

$$BIC = \ln(\varepsilon' \varepsilon / T) + (p + q) \ln T / T. \quad (16)$$

Для перевірки залишків моделі на автокореляцію будується корелограма залишків, інтерпретація якої аналогічна відповідному тесту для часового ряду. Ще одним критерієм для перевірки наявності автокореляції у відхиленнях  $\varepsilon$  побудованої моделі є значення DW-статистики Дж. Дарбіна та Дж. Уотса, яке розраховується за формулою (17) та порівнюється із верхнім та нижнім критичними значеннями  $d_1$  та  $d_2$ :

$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}. \quad (17)$$

**Інформаційна база дослідження.** У роботі вивчаються щоденні дані міжбанківського курсу гривні до долара США за період 19 лютого 2009 р. – 22 березня 2016 р. згідно офіційної статистики Національного банку України. Міжбанківський валютний ринок України представляють собою торговельне середовище, у якому здійснюється купівля-продаж безготівкової валюти комерційними банками України. Торги відбуваються у будні дні тижня у спеціальних торгових системах Reuters Dealing та UkrDealing.

**Результати чисельного моделювання.** Комп'ютерна реалізація побудованих алгоритмів здійснена засобами спеціалізованого економетричного пакету EViews 9.0. Графічний аналіз статистичних даних виявив декілька структурних розривів та значні коливання ряду. Дослідження часового ряду на наявність одиничного кореня за допомогою тесту Дікі-Фулера вказало на належність даних до класу DS інтегрованих першого порядку I(1). На підставі корелограми, яка описує автокореляційну (AC) та часткову автокореляційну (PAC) функції часового ряду, було визначено початковий склад параметрів моделі за вихідними даними. Спираючись на порівняльний аналіз інформаційних критеріїв якості моделей із різними параметрами авторегресії ( $p$ ), ковзного середнього ( $q$ ) та сезонних параметрів ( $sp$  та  $sq$ ) обрано модель із найменшими значеннями AIC та BIC – це сезонна модель авторегресії ковзного середнього SARIMA (11) із параметрами:  $d = 1$  (порядок диференціювання),  $p = 4$ ,  $q = 4$ ,  $sp = 1$ ,  $sq = 0$ . Незважаючи на значну кількість програмних можливостей EViews (Census X11, X12-ARIMA, Tramo/Seats) сезонного згладжування часових рядів, останні дослідження вказують на те, що подібна процедура загрожує втраті важливої інформації, що міститься в даних внаслідок невірної обрання фільтра згладжування або нестійких сезонних коливань [7]. Згладжування за різними підходами, описаними формулами (2) – (7) не дало очікуваного результату через нестійкість сезонних коливань. Тому перевага віддається моделям із використанням сезонних параметрів або сезонних фіктивних змінних.

На рис. 1 представлено графічне зображення розподілу залишків досліджуваної моделі.

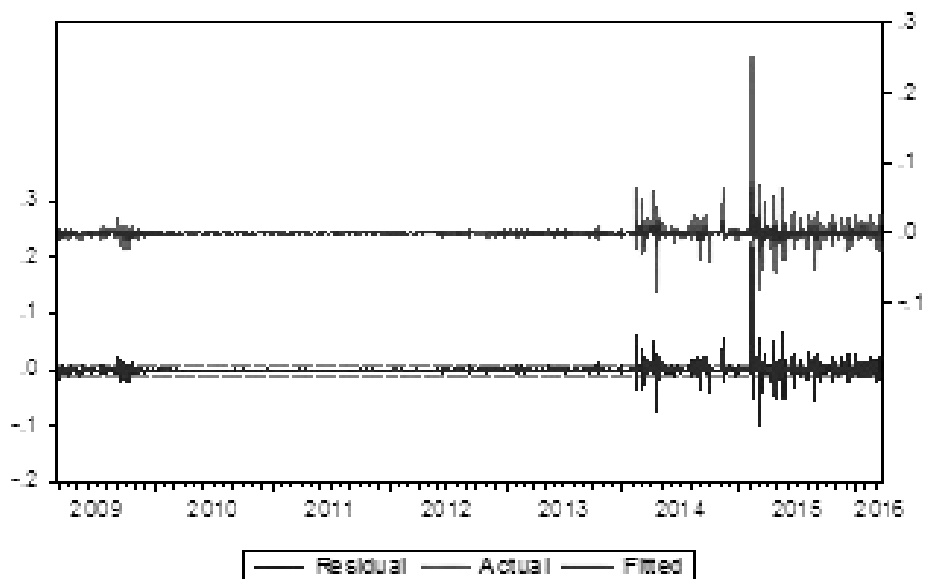


Рис. 1 – Залишки моделі SARIMA (1,4,4,1,0).

Суттєві коливання та зростання дисперсії залишків у 2014 р. та на початку 2015 р. обумовлені відомими суспільно-політичними, що спричинило значну девальвацію національної валюти та структурні розриви ряду між-банківського валютного курсу. Зазвичай, у таких випадках застосовують включення у модель бінарної фіктивної змінної, яка приймає значення 0 або 1 (в іншому варіанті – 1 та 1) в залежності від того, чи відбулась певна подія (економічний шок) чи ні. Такі фіктивні змінні пояснюють зовнішній якісний вплив на модель та будуються за правилом [2]:

$$D_t = \begin{cases} 0, & t < T; \\ 1, & t \geq T, \end{cases} \tag{18}$$

де  $T$  – момент часу, у який відбулось зовнішнє збурення.

Таблиця 1 – Характеристики якості отриманих авторегресійних моделей

Модель	Коефіцієнт детермінації $R^2$	Інформаційний критерій Акаїке	Інформаційний критерій Шварц	Критерій Дарбіна-Уотса	Автокореляція залишків	Нормальний розподіл залишків	Гетероскедастичність залишків
SARIMA	0,096956	- 6,315023	- 6,288071	1,996304	Наявна	Відсутній	Наявна
SARIMA з бінарною фіктивною змінною $D_t$	0,076892	- 6,284825	- 6,272841	1,990052	Наявна	Відсутній	Наявна
SARIMA з SB	0,507962	- 6,915100	- 6,906112	1,993548	Наявна	Відсутній	Наявна
SARIMA з SB та SB2	0,660385	- 7,284758	- 7,272774	1,992820	Наявна	Відсутній	Наявна
ARCH з SB	0,450910	- 8,563747	- 8,542822	2,168215	Наявна	Відсутній	Умовна
ARCH з SB та SB2	0,627141	- 9,125828	- 9,101914	1,647379	Наявна	Відсутній	Умовна

Включення бінарної фіктивної змінної привело до підвищення коефіцієнта детермінації моделі та покращення якості короткострокового прогнозу, проте залишило гетероскедастичність та відхилення від нормального розподілу залишків авторегресійної моделі (табл. 1). Крім того, при такому включенні можливе виникнення неоднозначності при отриманні прогнозних значень моделі. Деякі автори наполягають на необхідності побудови окремих моделей для періодів до і після структурного розриву [3, 4].

У роботі досліджено також інший підхід до моделювання нестационарних процесів із розривами, який базується на дискретно-неперервних авторегресійних моделях, дискретну складову яких формують трьохрівневі фіктивні змінні, які додаються ітераційним шляхом до повного усунення гетероскедастичності та автокореляції залишків [8]. Для обрахованих залишків моделі фіктивна змінна формується за правилом:

$$SB_{kt} = \begin{cases} +T^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} > \xi^{(k)}, \\ 0, & -\xi^{(k)} \leq \varepsilon_t^{(k)} \leq \xi^{(k)}, \\ -S^{(k)}, & \varepsilon_t^{(k)} < -\xi^{(k)}. \end{cases} \quad (19)$$

Тут  $\xi^k$  – точність наближення;  $T, S$  – кількість точок з даного проміжку, для яких виконуються нерівності;  $\varepsilon_t^{(k)}$  – залишки моделі;  $k$  – кількість кроків.

Результат включення у модель авторегресії фіктивної змінної  $SB$  та додатково фіктивної  $SB2$ , що усуває окремі структурні розриви наведено у табл. 1. Розподіл залишків моделі вказує на наявність гетероскедастичності, тому доцільно було також розглянути авторегресійні моделі умовної гетероскедастичності типу ARCH для даних рядів. Характеристики якості усіх побудованих моделей авторегресії наведено у табл. 1.

Найменші значення інформаційних критеріїв спостерігаються в авторегресійних моделях умовної гетероскедастичності, що має свідчити на користь оптимальності вибору відповідних моделей, проте, коефіцієнт детермінації  $R^2$  вищий у моделі типу ARIMA із включенням фіктивних змінних структурних розривів  $SB$  та  $SB2$ . Для обґрунтування вибору моделі наведемо також показники якості отриманих короткострокових прогнозів, отриманих за динамічним та статичним підходами. Характеристики якості прогнозів наведено у табл. 2 та 3.

Таблиця 2 – Характеристики якості динамічного прогнозу

	Середньоквадратична помилка (RMSE)	Середня абсолютна похибка (MAE)
SARIMA	0,100334	0,082409
SARIMA з $D_t$	0,075782	0,059866
SARIMA з $SB$	0,063534	0,054753
SARIMA з $SB$ та $SB2$	0,120394	0,102947
ARCH з $SB$	0,049278	0,042285
ARCH з $SB$ та $SB2$	0,627141	-9,125828

Таблиця 3 – Характеристики якості статичного прогнозу

	Середньоквадратична помилка (RMSE)	Середня абсолютна похибка (MAE)
SARIMA	0,039965	0,031569
SARIMA з $D_t$	0,040575	0,031719
SARIMA з $SB$	0,023345	0,019026
SARIMA з $SB$ та $SB2$	0,021650	0,017628
ARCH з $SB$	0,450910	-8,563747
ARCH з $SB$ та $SB2$	0,115456	0,095515

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів свідчить на користь вибору моделей SARIMA з  $D_t$  та SARIMA з  $SB$ , які мають найкращі прогностичні характеристики. При цьому перевага віддається моделі з дворівневою фіктивною змінною структурного розриву, яка відповідає характеру досліджуваного процесу ( $D_t$ ). Підхід з трьохрівневою фіктивною змінною покращує апроксимаційні характеристики моделі, проте проблеми автокореляції, гетероскедастичності та отримання нормального розподілу залишків усуває тільки в результаті ітераційного процесу, який породжує проблему надмірної параметризації моделі, пов'язаної з кількістю степенів свободи, що позначається на погіршенні якості динамічного прогнозу. Подальшого вивчення потребує розгляд векторних авторегресійних моделей та моделей корекції похибок, які враховують у побудові прогнозу не тільки історичні дані досліджуваного явища, а також інші пояснювальні фактори кількісного та якісного характеру (панельні дані).

**Список літератури:** 1. Fernandez-Villaverde J. The Econometrics of DSGE Models // NBER Working Paper. – 2009. – № 14677 – Режим доступу: <http://www.nber.org/papers/w14677.pdf>. – Дата звертання: 30.02.2016. 2. Hyndman R. J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice. – Otexts, 2013. – Режим доступу: <https://www.otexts.org/fpp>. – Дата звертання: 20.01.2016. 3. Harris R., Sollis R. Applied Time Series Modelling and Forecasting. – John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 313 p. 4. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – № 2. – С. 251–273. 5. Engle R. The use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics // Journal of Economic Perspectives. – 2001. – Vol. 15. – P. 157–186. 6. White H. A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity // Econometrika. – 1980. – № 48. – P. 817–838. 7. Hylleberg S. Seasonal Adjustment // Economics Working Papers: School of Economics and Management, University of Aarhus. – 2006. – № 4 – Режим доступу: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1147032](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1147032). – Дата звертання: 10.02.2016. 8. Назаренко О. М., Карпуша М. В. Ідентифікація параметрів задачі багатокритеріальної оптимізації інвестиційного портфеля // Вісник НТУ «ХПІ», 2012. – № 2. – С. 162–171. – Режим доступу: <http://vestnik.kpi.kharkov.ua>. – Дата звертання: 10.02.2016.

**References:** 1. Fernandez-Villaverde, J. The Econometrics of DSGE Models. *NBER Working Paper*. 2009, To 14677. Available at: <http://www.nber.org/papers/w14677.pdf>. (accessed 30.02.2016). 2. Hyndman, R. J. and Athanasopoulos, G. Forecasting: principles and practice. 2013. Available at: <https://www.otexts.org/fpp>. (accessed 20.01.2016). 3. Harris, R. and Sollis, R. *Applied Time Series Modelling and Forecasting*. John Wiley & Sons Ltd Publ., 2003. 313 p. 4. Kantorovich, G. G. Analiz vremennykh ryadov. [Time series analysis]. *Ekonomicheskii zhurnal VShE* [Econometric journal of Higher School]. 2002, no. 2, pp. 251–273. 5. Engle, R. The use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics. *J. of Econ. Persp.* 2001, no. 15, pp. 157–186. 6. White, H. A Heteroskedasticity – Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrika*. 1980, no. 48, pp. 817–838. 7. Hylleberg, S. Seasonal Adjustment. *Economics Working Papers*. 2006, no. 4, Available at: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1147032](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1147032). (accessed 10.02.2016). 8. Nazarenko, O. M. and Karpusha, M. Identifikatsiya parametriv zadachi bahatokriterial'noyi optimizatsiyi investytsiynoho portfelya. [Identification of the parameters of the problem of multicriteria optimization of the investment portfolio]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI", Ser. : math. model. in engin. and technol.]. 2012, no. 2, pp. 162–171. Available at: <http://vestnik.kpi.kharkov.ua> (accessed 10.02.2016).

Надійшло (received) 18.03.2016

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Маринич Тетяна Олександрівна** – кандидат економічних наук, Сумський державний університет, м. Суми, старший викладач кафедри моделювання складних систем; тел.: (066) 66-179-38; e-mail: darstep@ukr.net.

**Маринич Татьяна Александровна** – кандидат экономических наук, Сумский государственный университет, г. Сумы, старший преподаватель кафедры моделирования сложных систем; тел.: (066) 66-179-38; e-mail: darstep@ukr.net.

**Marynych Tetyana Olexandrivna** – Candidate of Economic Sciences (Ph. D.), Sumy State University, Sumy, Senior Lecturer at the Department of Complex Modeling; tel.: (066) 66-179-38; e-mail: darstep@ukr.net.

**Назаренко Людмила Дмитрівна** – старший викладач кафедри комп'ютерних наук, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

**Назаренко Людмила Дмитриевна** – старший преподаватель кафедры компьютерных наук, Сумский государственный университет, г. Сумы; тел.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

**Nazarenko Lyudmyla Dmytrivna** – Senior Lecturer at the Department of Computer Science, Sumy State University, Sumy; tel.: (099) 243-00-41; e-mail: nazarenkold@ukr.net.

**Гец Ксенія Віталіївна** – аспірант, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (095) 384-83-65; e-mail: kseniagets@gmail.com.

**Гец Ксения Витальевна** – аспирант, Сумский государственный университет, г. Сумы; тел.: (095) 384-83-65; e-mail: kseniagets@gmail.com

**Gets Ksenia Vitaliivna** – graduate student, Sumy State University, Sumy; tel.: (095) 384-83-65; e-mail: kseniagets@gmail.com.

УДК 621.382:62-1/-9(045)

**О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ, А. О. РЕШЕТНИК**

## ПРОГРАМУВАННЯ МУЛЬТИПЛЕКСОРНИХ МІКРО- ТА НАНОСХЕМ

Застосування великих інтегральних схем (ВІС) в цифрових мікро- і наноелектронних пристроях дозволяє істотно поліпшити їх експлуатаційні можливості, в першу чергу підвищити надійність і швидкодію, понизити споживану потужність і габаритні розміри. Проте розробка ВІС є тривалим і дорогим процесом, який економічно виправданий тільки при досить великому обсязі випуску готових виробів. Підвищення спеціалізації ІС при поліпшенні вказаних вище показників вступає в протиріччя з їх універсальністю, що розширює їх необхідну номенклатуру і зменшує обсяг випуску кожного окремого типоміналу. Останнє веде до подорожчання продукції. Усунути вказане протиріччя між спеціалізацією і універсальністю можна шляхом розробки ВІС, алгоритми роботи яких можуть бути змінені за бажанням розробника конкретної апаратури, тобто, шляхом створення логічних схем, що настраюються або програмуються. Запропоновані автоматизовані методи програмування мультиплексорних мікро- та наносхем для відтворення логічних функцій декількох аргументів. На сучасних комп'ютерних системах було реалізовано моделювання та верифікацію запропонованих пристроїв.

**Ключові слова:** мікро- та наносхеми з програмованими структурами, мультиплексор, автоматизоване проектування.

**Вступ.** Застосування великих інтегральних схем (ВІС) в цифрових мікро- і наноелектронних пристроях дозволяє істотно поліпшити їх експлуатаційні можливості, в першу чергу підвищити надійність і швидкодію, понизити споживану потужність і габаритні розміри. Проте розробка ВІС є тривалим і дорогим процесом, який економічно виправданий тільки при досить великому обсязі випуску готових виробів.

**Мета роботи.** Підвищення спеціалізації при поліпшенні вказаних вище показників завжди вступає в протиріччя з їх універсальністю, що розширює необхідну номенклатуру ВІС і зменшує обсяг випуску кожного окремого типоміналу. Останнє веде до подорожчання продукції.

Усунути вказане протиріччя між спеціалізацією і універсальністю можна шляхом розробки ВІС, алгоритми роботи яких можуть бути змінені користувачем шляхом створення програмованих логічних схем. Тут під програмуваністю розуміється не здатність реалізувати заданий алгоритм обробки вхідних кодів, змінюючи програму роботи, як це робить мікропроцесор, а можливість зміни внутрішньої структури ВІС так, щоб вона забезпечувала реалізацію заданих логічних функцій на апаратному рівні.

При виготовленні таких ВІС використовується єдиний технологічний процес, тому з точки зору виробника це універсальні вироби. Налаштування ж ВІС на заданий алгоритм роботи виконує безпосередньо користувач, з точки зору якого ця схема реалізує вузько спеціалізовані завдання. В результаті програмування в ВІС вносяться зворотні або незворотні зміни структури, які і приводять до набуття необхідних характеристик.

**Методи програмування мультиплексорів.** В якості мікро- та наносхем з програмованими структурами часто використовують мультиплексори, які окрім пристроїв комутації, можуть функціонувати як програмовані логічні елементи. Суть програмування мультиплексора полягає в тому, що його адресні входи використовуються як інформаційні і на них подаються аргументи відтворюваної функції, а інформаційні входи виконують роль програмованих.

При цьому на програмованих входах можуть формуватися сигнали або логічних констант, або деякі допоміжні функції.

Наприклад, реалізуємо на мультиплексорі (4→1) логічну функцію двох аргументів Виключне АБО (додавання по модулю 2 чи нерівнозначності) має вигляд:

$$f_{\oplus} = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0. \tag{1}$$

Використовуючи рівняння вихідної функції цього мультиплексори, отримаємо:

$$f = D_3(x_1 x_0) \vee D_2(x_1 \bar{x}_0) \vee D_1(\bar{x}_1 x_0) \vee D_0(\bar{x}_1 \bar{x}_0). \tag{2}$$

Порівнюючи між собою функції (1) і (2), запишемо функцію програмування мультиплексора у вигляді:

$$f_{np} = 0(x_1 x_0) \vee 1(x_1 \bar{x}_0) \vee 1(\bar{x}_1 x_0) \vee 0(\bar{x}_1 \bar{x}_0). \tag{3}$$

В результаті, реалізуємо цей алгоритм програмування у вигляді табл. 1 і схеми мультиплексора, побудованої на рис. 1.

Таблиця 1 – Таблиця програмування Логічної функції Виключне АБО

$x_1$	$x_0$	$f_{np}$	$D$
0	0	0	$D_0 = 0$
0	1	1	$D_1 = 1$
1	0	1	$D_2 = 1$
1	1	0	$D_3 = 0$

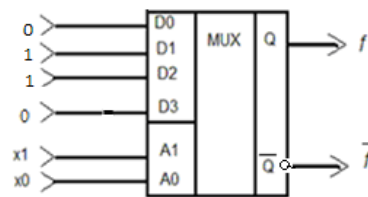


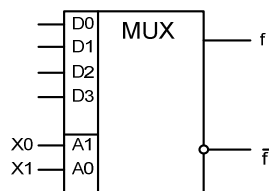
Рис. 1 – Реалізація логічної функції двох аргументів на мультиплексорі.

На мультиплексорі (4→1) можливе відтворення 16 функцій двох аргументів (табл. 2). Для цього на адресні входи  $A_1$  та  $A_0$  слід подавати бінарні аргументи  $x_1$  та  $x_0$ , а інформаційні  $D_3, \dots, D_0$  – програмувати логічними константами цих аргументів.

З розглянутого прикладу видно, що описаний метод обмежується реалізацією функцій чотирьох змінних, оскільки мультиплексори, що реально випускаються, мають не більше 16 інформаційних входів.

Таблиця 2 – Програмування 16 функцій двох аргументів на мультиплексорі (4→1)

$$f = D_3(x_1 x_0) \vee D_2(x_1 \bar{x}_0) \vee D_1(\bar{x}_1 x_0) \vee D_0(\bar{x}_1 \bar{x}_0).$$



$x_1$	$x_0$	$f$	$\bar{f}$
0	0	$D_0$	$\bar{D}_0$
0	1	$D_1$	$\bar{D}_1$
1	0	$D_2$	$\bar{D}_2$
1	1	$D_3$	$\bar{D}_3$

$X_1$	$X_0$	Нормальна диз'юнктивна форма				Логічна функція
№	$D_3$	$D_2$	$D_1$	$D_0$		
0	0	0	0	0	$f_0 = 0$	Активний лог.0
1	0	0	0	1	$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0$	АБО-НІ (стрілка Пірса)
2	0	0	1	0	$f_2 = \bar{x}_1 x_0 = x_0 \leftarrow x_1$	Заборона
3	0	0	1	1	$f_3 = \bar{x}_1 x_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \bar{x}_1(x_0 \vee \bar{x}_0) = \bar{x}_1$	Заперечення $x_1$
4	0	1	0	0	$f_4 = x_1 \bar{x}_0 = x_1 \leftarrow x_0$	Зворотна заборона
5	0	1	0	1	$f_5 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \bar{x}_0(x_1 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_0$	Заперечення $x_0$
6	0	1	1	0	$f_6 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0$	Виключне АБО (нерівнозначність)
7	0	1	1	1	$f_7 = x_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_0$	I-НІ (штрих Шеффера)
8	1	0	0	0	$f_8 = x_1 x_0$	I
9	1	0	0	1	$f_9 = x_1 x_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 = \overline{x_1 \oplus x_0}$	Виключне АБО-НІ (рівнозначність)
10	1	0	1	0	$f_{10} = x_1 x_0 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_0(x_1 \vee \bar{x}_1) = x_0$	Активний аргумент $x_0$

Продовження таблиці 2						
11	1	0	1	1	$f_{11} = x_1x_0 \vee \bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 = x_1 \vee x_0 = x_1 \rightarrow x_0$	Імплікація
12	1	1	0	0	$f_{12} = x_1x_0 \vee x_1\bar{x}_0 = x_1(x_0 \vee \bar{x}_0) = x_1$	Активний аргумент $x_1$
13	1	1	0	1	$f_{13} = x_1x_0 \vee \bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 = x_1 \vee \bar{x}_0 = x_0 \rightarrow x_1$	Зворотна імплікація
14	1	1	1	0	$f_{14} = x_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \bar{x}_1x_0 = x_0 \vee x_1$	АБО
15	1	1	1	1	$f_{15} = x_1x_0 \vee x_1x_0 \vee x_1x_0 \vee \bar{x}_1\bar{x}_0 = 1$	Активна логічна 1

На виходах мультиплексора запрограмовано по 8 функцій:

$f$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$\bar{f}$	$f_{15}$	$f_{14}$	$f_{13}$	$f_{12}$	$f_{11}$	$f_{10}$	$f_9$	$f_8$

При необхідності реалізації логічної функції великого числа вхідних змінних використовують структуру мультиплексорного дерева. Проте при невеликому числі аргументів цю задачу можна вирішити методом вибору сигналів налаштування не з множини  $\{1, 0\}$ , як це було зроблено вище, а з множини  $\{1, 0, x_i\}$ , де  $x_i$  – один з аргументів відтворюваної функції. В цьому випадку вдається на мультиплексорі без додаткових апаратних витрат реалізувати логічну функцію, число аргументів якої більше числа його адресних входів.

**Приклад моделювання.** Реалізуємо на мультиплексорних мікро- та наносхемах (4→1) логічну функцію мажоритарного вибору 2 з 3 аргументів. На виході мажоритарного елемента (МЕ) логічний сигнал співпадає з більшістю сигналів на непарній кількості входів [1]. На рис. 2 показано умовне позначення тривходового МЕ, а в табл. 3 побудована відповідна таблиця істинності.

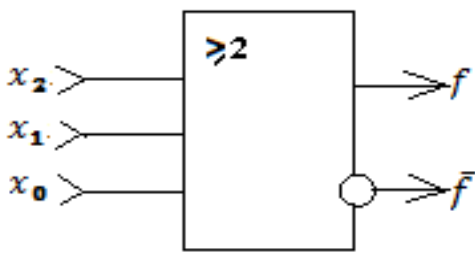


Рис. 2 – Тривходовий МЕ.

Таблиця 3 – Таблиця істинності МЕ

$x_2$	$x_1$	$x_0$	$f$	$\bar{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ) мажоритарної функції  $f$  отримують з її таблиці істинності:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1x_0. \tag{4}$$

Виконавши дужкові перетворення рівняння (4) шляхом триразового логічного додавання останнього доданку знаходять довершену форму мажоритарної функції наступного типу:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_2x_1(\bar{x}_0 \vee x_0) \vee x_2x_0(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1x_0(\bar{x}_2 \vee x_2) = x_2x_1 \vee x_2x_0 \vee x_1x_0. \tag{5}$$

Мажоритарна функція мінімальної форми (5) є найбільш поширеною в наноелектроніці. Інверсну мажоритарну функцію називають *міноритарною*:

$$\bar{f} = maj(x_2, x_1, x_0) = min(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0. \tag{6}$$

Якщо один з входів МЕ запрограмувати сигналом  $x_2 = 0$  чи  $x_2 = 1$ , то як видно з табл. 3, на прямому виході МЕ реалізуються логічні функції помноження  $I$  ( $f_I = x_1x_0$ ) чи додавання АБО ( $f_{АБО} = x_1 \vee x_0$ ).

Перетворимо повну мажоритарну функцію (4) для програмування мультиплексора (4→1) при використанні в якості адресних аргументів  $x_1$  і  $x_0$ . Виконаємо спрощені дужкові перетворення цієї функції:

$$f = maj(x_2, x_1, x_0) = x_1x_0(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_2x_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1x_0. \tag{7}$$

Порівнюючи вихідну функцію мультиплексора (2) з перетвореною МЕ (7), запишемо функцію програмування мультиплексора (4→1) для реалізації мажоритарної функції:

$$f_{np}(x_1, x_0) = 1(x_1x_0) \vee x_2(x_1\bar{x}_0) \vee x_2(\bar{x}_1x_0) \vee 0(\bar{x}_1\bar{x}_0). \tag{8}$$

Отже, згідно рівнянню (8) на інформаційні входи мультиплексора слід подавати наступні сигнали:

$$D_3 = 1, \quad D_2 = D_1 = x_2 \quad \text{та} \quad D_0 = 0.$$

Рішення (8) не є єдиною існуючим. На адресні входи мультиплексора можливо подавати довільні набори аргументів, наприклад,  $(x_2x_0)$  або  $(x_2x_1)$ , а на інформаційні входи  $D_3$ , – залишкові аргументи та логічні сигнали з

множини  $\{1,0\}$ . В першому випадку функція програмування матиме вигляд:

$$f_{np}(x_2, x_0) = 1(x_2 x_0) \vee x_1(\bar{x}_2 \bar{x}_0) \vee x_1(\bar{x}_2 x_0) \vee 0(\bar{x}_2 \bar{x}_0),$$

а в другому:

$$f_{np}(x_2, x_1) = 1(x_2 x_1) \vee x_0(x_2 \bar{x}_1) \vee x_0(x_2 x_1) \vee 0(\bar{x}_2 \bar{x}_1).$$

Таким чином, практичне програмування мажоритарної функції (3) на базі мультиплексорів (4→1) свідчить, що прилюбій комбінації адресних аргументів на виході реалізується однотипні функції програмування.

**Результати комп'ютерного моделювання.** На рис. 3 побудована функціональна схема запрограмованого мультиплексора в графічному редакторі системи автоматизованого проектування (САПР) MAX+PLUS II, яка є інтегрованим середовищем для розробки цифрових пристроїв на базі програмованих логічних схем (ПЛІС) фірми ALTERA [2]. Вона складається з восьми мікросхем: трьох інверторів NI, чотирьох тривходових логічних елементів I і одного чотиривходового логічного елемента АБО, має два адресних входи, чотири інформаційних і один комплементарний вихід.

Часовий аналіз вхідних і вихідних сигналів результатів програмування мажоритарної функції (8) наведений у вікні редактора діаграм на рис. 4. Він повністю відповідає таблиці істинності ME (табл. 3).

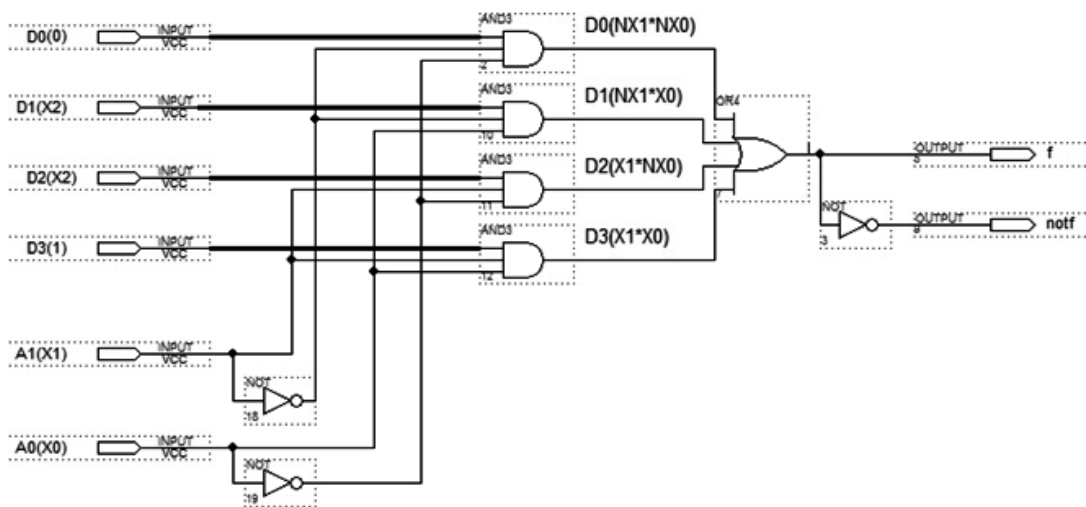


Рис. 3 – Мікросхема запрограмованого мультиплексора.

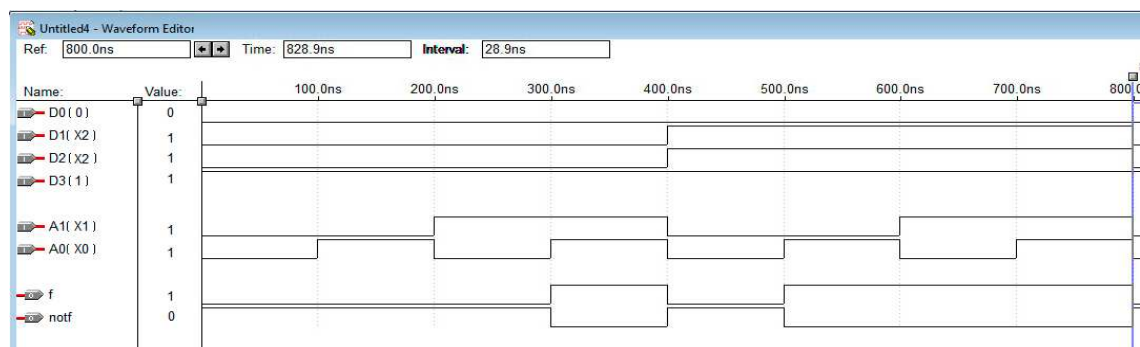


Рис. 4 – Часові діаграми запрограмованого мультиплексора.

Далі синтезуємо одноелектронну наносхему мультиплексора (4→1) на квантових коміркових автоматах (КА). Базова діелектрична комірка КА розміром (50×50) нм містить чотири напівпровідникові чи металеві квантові точки (острівці), які геометрично розміщені по куткам квадрату, як показано на рис. 5. Комірки використовуються для побудови нанопровідників, мажоритарних елементів, інверторів, запам'ятовуючих пристроїв, тощо [3].

Принцип дії КА, заснований на квантовому тунелюванні та кулонівській взаємодії електронів, дозволяє створювати пристрої, які можуть працювати як комутуючі транзистори, але з меншими розмірами та меншою споживаною потужністю. Однорідна архітектура КА може бути сформована за допомогою електронної літографії.

Кожна комірка може містити два надлишкові електрони, які в змозі тунелювати між квантовими точками. Коли потенціал діелектричних перетинків між точками високий, електрони будуть локалізовані та не зможуть тунелювати, а коли потенціал низький електрони зможуть вільно тунелювати. Кулонівське відштовхування між електронами примусить їх розташуватися на діаметрально протилежних кутках з двома можливими конфігура-



ціями (рис. 5). Ці два стабільні стани можуть бути представлені як поляризації комірок  $P = -1$  та  $P = +1$ . Рівень поляризації  $P = -1$  відповідає логічному нулю (рис. 5, а), а  $P = +1$  відповідає логічній одиниці (рис. 5, б). Якщо в масиві КА, отриманому після розміщення декількох комірок в ряд, змінити поляризацію першої комірки в визначений стан, то друга комірка прийме той же стан по *принципу найменшої енергії*. Далі по *принципу доміно* всі комірки масиву набудуть цей же рівень поляризації.



Рис. 5 – Базова комірка в двох можливих логічних станах.

Поляризація комірки  $P$  визначається співвідношеннями:

$$P = \frac{\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4} = \frac{(\rho_1 + \rho_3) - (\rho_2 + \rho_4)}{(\rho_1 + \rho_3) + (\rho_2 + \rho_4)}$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_3$ ,  $\rho_2$  і  $\rho_4$  – щільності зарядів електронів у діагонально розташованих квантових точках комірки.

Таким чином, бінарна інформація передається без руху зарядів. Тобто нема протікання струму між комірки. Це – основна причина, чому структури КА споживають надмірну кількість енергії  $\sim 10^{-22}$  Дж.

На рис. 6 приведена наносхема мультиплектора на 3 інверторах і 11 МЕ, яка запрограмована для реалізації мажоритарної функції (6).

На рис. 7, а побудована наносхема на КА запрограмованого мультиплектора (4→1), яка реалізує функцію мажоритарного вибору, а на рис. 7, б – часові діаграми, отримані в результаті моделювання на САПР QCA Designer [4]. Сигнали вихідної функції  $f$  повністю співпадають з табличними значеннями для МЕ (табл. 3).

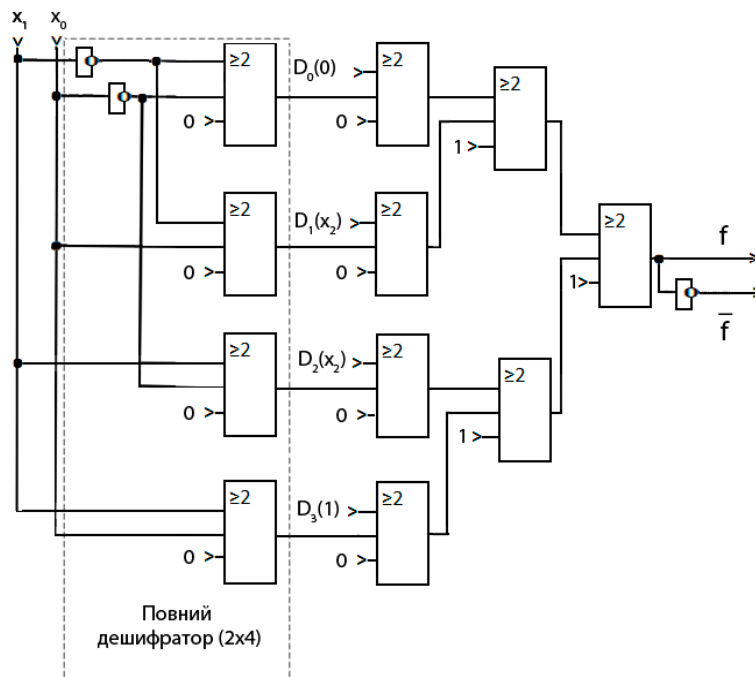


Рис. 6 – Наносхема запрограмованого мультиплектора.

Запрограмована таким чином наносхема мультиплектора (4→1) базується на 114 квантових коміркового автоматах, розмір яких складає  $(18 \times 18)$  нм, відстань між їх центрами дорівнює 20 нм, з чотирма квантовими островами діаметром по 5 нм. Загальна площа наносхеми мультиплектора дорівнює  $(454,8 \times 362,81)$  нм<sup>2</sup>  $\approx 0,16$  мкм<sup>2</sup>.

**Висновки.** В роботі розроблені мікро- та наносхеми запрограмованих мультиплекторів для реалізації логічних функцій. Програмування мультиплектора виконувалось за допомогою САПР MAX+PLUS II та САПР QCA Designer. Часові діаграми запрограмованих мультиплекторів в різних середовищах співпали з таблицею істинності.

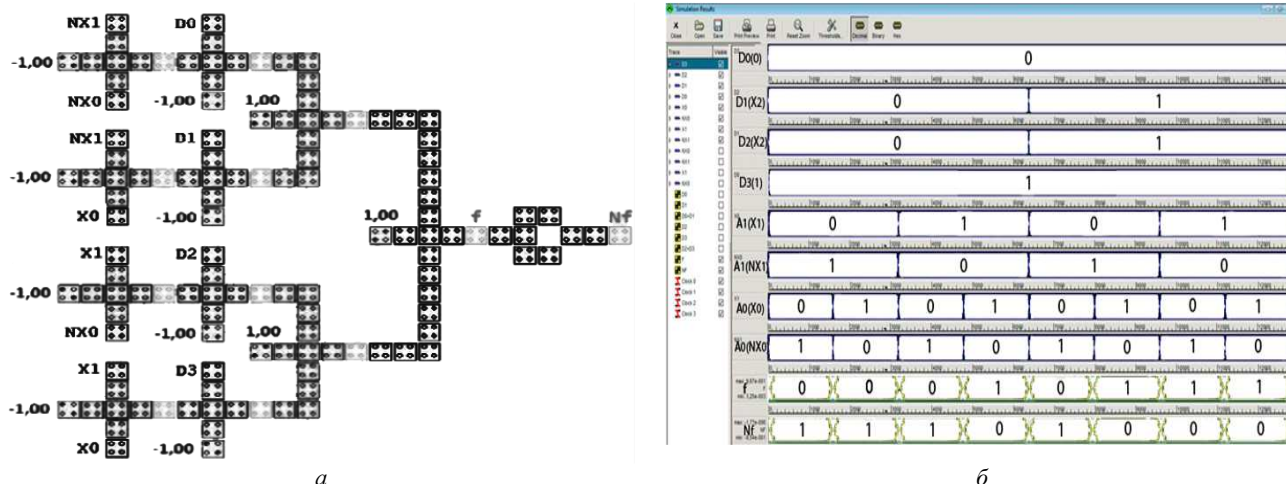


Рис. 7 – Наносхема мультиплексора: а – на квантових коміркових автоматах; б – її часові характеристики.

Термін "наноелектроніка" логічно пов'язаний з терміном "мікроелектроніка" і відображає перехід сучасної напівпровідникової електроніки від компонентів з характерним розміром в мікронній і субмікронній областях до комірок з розмірами в нанометровій області.

Принципово нова особливість наноелектроніки пов'язана з тим, що для елементів таких розмірів починають переважати квантові ефекти. З'являється нова номенклатура властивостей, відкриваються нові перспективи їх використання. Якщо при переході від мікро- до наноелектроніки квантові ефекти є паразитними, наприклад, роботі класичного транзистора при зменшенні розмірів починає заважати тунелювання носіїв заряду, то електроніка, яка використовує квантові ефекти, – це основа нової, так званої *наногетероструктурної електроніки*.

**Список літератури:** 1. Пакулов Н. И. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. – М. : Сов. радио – 1974, 194 с. 2. Штешенко В. Б. ПЛИС фирмы ALTERA: элементная база, система проектирования и языки описания аппаратуры. – М. : Изд. дом. «Додека – XXI», 2007. – 576 с. 3. Мельник О. С., Козаревич В. О., Пилипенко Р. І. Комп'ютерне проектування арифметичних нанопристроїв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014 – № 39 (1082). – С. 126 – 134. 4. Walus K. QCADesiner: A CAD Tool for an Emerging Nano-Technology / K. Walus // Micronet Annual Workshop. – Toronto, Canada, 2003, pp. 292 – 294.

**References:** 1. Pakulov, N. I. *Mazhoritarnyy printsip postroeniya nadyozhnykh uzlov i ustroystv TSVM* [Majority principle of constructing reliable nodes and DC devices]. Moscow, Sov. radio Publ., 1974. 174 p. 2. Steshenko, V. B. *PLIS firmy ALTERA: elementnaya baza, sistema proektirovaniya i yazyki opisaniya apparatury* [PLIS by ALTERA: circuit technology, design system, and hardware description language]. Moscow, Izd. dom. "Dodeka – XXI" Publ., 2007. 576 p. 3. Melnyk, O. S., Kozarevych, V. O. and Pylypenko, R. I. *Komp'yuternye proektyvannya aryfmetichnykh nanoprystroiyv* [Computer-aided design of arithmetic nanodevices]. *Visnyk NTU "KhPI" Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tekhnici ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014. no. 39 (1082), pp. 126–134. 4. Walus, K. *QCADesiner: A CAD Tool for an Emerging Nano-Technology*. Micronet Annual Workshop. Toronto, Canada, 2003, pp. 292–294.

Надійшла (received) 24.03.2015

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Мельник Олександр Степанович** – кандидат технічних наук, доцент, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел: (093) 994-52-51; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

**Мельник Александр Степанович** – кандидат технических наук, доцент, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (093) 994-52-51; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

**Melnyk Olexandr Stepanovych** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Aviation University, Kyiv; tel.: (093) 994-52-51; e-mail: melnyk.ols@gmail.com.

**Козаревич Вікторія Олександрівна** – асистент, Національний авіаційний університет, м. Київ; e-mail: st-viktoria@yandex.ru.

**Козаревич Виктория Александровна** – ассистент, Национальный авиационный университет, г. Киев; e-mail: st-viktoria@yandex.ru.

**Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna** – Assistant Professor, National Aviation University, Kyiv; e-mail: st-viktoria@yandex.ru.

**Решетник Анна Олександрівна** – студентка, Національний авіаційний університет, м. Київ; e-mail: reshetnik.1994@bk.ru.

**Решетник Анна Александровна** – студентка, Национальный авиационный университет, г. Киев; e-mail: reshetnik.1994@bk.ru.

**Reshetnyk Anna Oleksandrivna** – student, National Aviation University, Kyiv; e-mail: reshetnik.1994@bk.ru.

А. М. НАЗАРЕНКО

## МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН

Предлагаются хорошо обусловленные алгоритмы, основанные на методе энергетического моделирования дифракции упругих волн на конечных и периодических решётках и сводящиеся к решению сингулярных интегральных уравнений на замкнутых и разомкнутых контурах. Интегральные представления перемещений дифрагированного волнового поля строятся исходя из теоремы взаимности работ для двух различных состояний механической системы. Предложен эффективный метод выделения сингулярных ядер, который значительно ускоряет сходимость возникающих функциональных рядов в случае периодической системы неоднородностей. Численная реализация решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) проведена методами дискретных особенностей и механических квадратур.

**Ключевые слова:** метод энергетического моделирования, дифракция упругих волн, конечная и периодическая решётки, сингулярные интегральные уравнения, метод дискретных особенностей, метод механических квадратур.

**Введение.** Многие научные и технические проблемы связаны с исследованием волновых процессов в упругих телах. Присутствующие в телах дифракционные элементы являются не только концентраторами напряжений, но и широко используются как композитные материалы, рассеиватели волн различного происхождения. Поэтому моделирование динамических систем с усложнёнными свойствами приобретает особую актуальность. Такие задачи требуют привлечения сложного математического аппарата и разработки новых методов решения различных краевых задач динамики неоднородных сред. Особое значение здесь приобретают вычислительные методы, которые базируются на хорошо обусловленных алгоритмах и позволяют гибко перенастраивать систему в зависимости от изменения элементов конструкции.

Представленные в работе модели являются развитием широко известных методов СИУ решения дифракционных задач. Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн, предложенный в данной работе, показал свою эффективность при решении конкретных задач дифракции  $SH$ -,  $SV$ -, и  $P$ -волн, а также изгибных волн в тонких пластинках на жестких и упругих включениях, полостях и криволинейных дефектах типа трещин и жестких включений.

**Анализ существующих методов исследования.** Наибольшие математические и вычислительные трудности в задачах дифракции возникают, если длина возбуждающей волны соизмерима с характерными размерами препятствий. В этом случае длинно- и коротковолновые приближения [1] не применимы [2]. *Методы конечных разностей* [3], *конечных элементов* [4], *R-функций* [5] сталкиваются с трудностями в случае неоднородностей с усложненной формой границы; в бесконечных и полубесконечных областях здесь приходится вводить *вспомогательную границу*, что приводит к значительному увеличению вычислительных ресурсов (память, быстродействие). *Метод разделения переменных* и его обобщения [6, 7] не применимы в случае нескольких рассеивателей произвольного расположения; в полубесконечных средах трудности возникают в удовлетворении одновременно условий на прямой границе полуплоскости и на криволинейной границе препятствия, которые характеризуются различными системами координат. МГЭ эффективен, если граничные элементы однотипны [8], поэтому при усложнении формы границы этот метод становится эквивалентным *методу дискретных особенностей* (МДО), однако, в отличие от МДО, он не чувствует специфику ядер интегральных уравнений и не позволяет выделять сингулярные члены.

МДО и родственные методы, которые базируются на численной реализации интегральных уравнений с помощью интерполяционных полиномов, в последнее время показали высокую вычислительную эффективность, устойчивость и адекватность [9 – 11]. *Методы интегральных уравнений* понижают на единицу размерность краевой задачи, записанной в дифференциальной форме, обеспечивают единственность решения и выполнение *условий излучения на бесконечности*. Основная проблема, которая здесь возникает, заключается в построении интегральных представлений решений рассматриваемой краевой задачи.

При установившихся колебаниях в условиях плоской деформации используются подходы, основанные на построении интегральных представлений волновых потенциалов, которые удовлетворяют *уравнениям Гельмгольца*. Амплитуды перемещений и напряжений выражаются здесь через потенциалы с помощью операции дифференцирования по координатным переменным. В случае радиальных дефектов получил распространение *метод разрывных решений*, согласно которому строятся представления потенциалов плоской деформации в виде интегралов по контурам разрезов, содержащих комбинации фундаментальных решений [12]; плотностями этих потенциалов являются скачки амплитуд перемещений и напряжений на прямолинейных дефектах. В [13] использованы специальные интегральные представления потенциалов продольной и поперечной волн, которые содержат по три неизвестные плотности (всего 6 функций). Из свойств потенциалов вытекает, что 4 плотности выражаются через скачки перемещений и их производные по дуговой координате на контуре трещины-разреза, а оставшиеся две плотности выбираются так, чтобы в выражениях для перемещений и напряжений отсутствовала расходящаяся часть. В результате на контурах трещин получается система интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений. В [14] этот подход распространен на случай дифракции

плоской гармонической волны на упругом включении в бесконечной среде. Интегральные представления потенциалов в матрице и включении содержат по 4 плотности; далее реализуется идея, согласно которой расходящиеся члены в потенциальной и вихревой частях решения должны взаимно уничтожаться. В результате получены интегральные представления потенциалов с двумя неизвестными плотностями в матрице и включении. Удовлетворение граничных условий типа склейки на контуре упругого включения сводит краевую задачу к системе четырех СИУ.

Описанные подходы являются специфическими, требуют определенных навыков и большого объема предварительных вычислений для получения корректных интегральных представлений решений краевых задач. В [15, 16] предложен эффективный метод исследования дифракционных задач, основанный на построении интегральных представлений не для волновых потенциалов, а для перемещений, используя известную *теорему взаимности работ* для двух различных состояний механической системы. Использование этой теоремы определяет механическую интерпретацию плотностей интегральных представлений, которые являются скачками напряжений в случае дифракции плоских волн на криволинейных жестких включениях и скачками перемещений в случае криволинейных трещин-разрезов. В [17] теорема взаимности работ использована при дифракции изгибных волн на криволинейных дефектах в тонких пластинах, а в [18] она распространена на случай дифракции плоских гармонических волн на периодической системе криволинейных дефектов типа трещин и жестких включений.

В [19] указанный подход впервые использовался для исследования дифракции волн сдвига на полости и упругом включении произвольной формы в полупространстве, в [20] строятся интегральные представления амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля в случае упругих включений в рамках плоской деформации, а в [21] реализованы задачи дифракции плоских гармонических волн на периодических системах неоднородностей различных типов. В [22, 23] этот метод распространен на случай конечных решеток, составленных из однотипных объектов. Применение параллельных вычислений показало эффективность данного подхода к исследованию волновых полей перемещений и напряжений. Численные эксперименты свидетельствуют, что сходимость решений системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – дискретных аналогов возникающих СИУ практически не зависит от количества рассеивателей в решетке. Аналогичные выводы получены в [24], где рассчитывались решетки, составленные из трех эллиптических и ромбических отверстий в случае плоской деформации.

**Краткая характеристика метода энергетического моделирования.** В данной работе метод исследования дифракционных задач, основанный на построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля с помощью теоремы взаимности работ, будем называть *методом энергетического моделирования* (МЭМ) дифракции упругих волн. Его можно использовать в задачах стационарной теории упругости в случае решеток, в которых одновременно присутствуют неоднородности различных типов (полости, жесткие и упругие включения, криволинейные дефекты типа трещин и жестких включений). Основное преимущество МЭМ по сравнению с другими методами [12, 13, 25] заключается в том, что ядра построенных интегральных представлений допускают простую механическую интерпретацию: они представляют собой перемещения или напряжения вспомогательных фундаментальных состояний, которые обладают всеми желательными свойствами. Это обстоятельство обеспечивает сведение краевых задач к системам СИУ первого и второго рода. Для получения характерных сингулярностей предлагается метод выделения в явном виде перемещений вспомогательных фундаментальных состояний соответствующей статической задачи, что особенно важно в случае периодических решеток. Благодаря этому успешно решаются возникающие при исследовании периодических задач проблемы [26], поскольку такой подход не только обеспечивает эффективное сведение краевой задачи к системе СИУ, но и позволяет значительно ускорить сходимость присутствующих функциональных рядов.

**Постановка краевых задач.** В данной работе исследуются двумерные задачи дифракции стационарных упругих волн на совокупности замкнутых и разомкнутых неоднородностей (без общих точек) произвольной формы и произвольного расположения в изотропной среде (рис. 1).

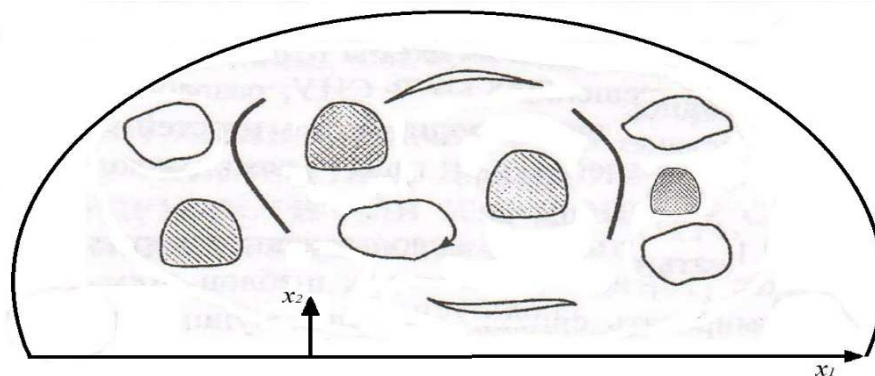


Рис. 1 – Система неоднородностей в упругой среде.

В качестве замкнутых неоднородностей выступали полости, упругие и жесткие подвижные включения, а в качестве разомкнутых неоднородностей рассматривались криволинейные дефекты двух типов: жесткие включения и трещины-разрезы. При постановке задачи использовались следующие сообщения.

1. В случае упругих включений на границе раздела двух сред моделировались условия типа склейки, которые предполагают непрерывность перемещений и напряжений при переходе через границу включения.

2. Если в упругой среде имеются полости, то они свободны от сил, и на их границе выполняются равенства нулю напряжений.

3. Граничные условия на контурах жестких включений вытекают из уравнений движения абсолютно жесткого тела. Фигурирующие здесь неизвестные постоянные характеризуют поступательное и вращательное движения включений и определяются из соответствующих дополнительных условий.

4. Берега трещин предполагаются свободными от сил; перемещения здесь претерпевают скачки, которые обращаются в нуль на концах разрезов.

В качестве возбуждающего воздействия рассматриваются монохроматические волны, излучающиеся из бесконечности, а также сосредоточенные гармонические источники заданной интенсивности (зависимость от времени  $t$  выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega$  – это частота колебаний).

Пусть  $L$  – это совокупность контуров (замкнутых и разомкнутых), изображенных на рис. 1. Положительное направление обхода выбиралось так, чтобы при движении вдоль  $L$  внешняя область (матрица) оставалась слева. В общем случае совокупность  $L$  включает следующие совокупности:

- $L^{(1)}$  – контуров упругих включений;
- $L^{(2)}$  – контуров полостей;
- $L^{(3)}$  – контуров жестких подвижных включений (замкнутых и разомкнутых);
- $L^{(4)}$  – контуров криволинейных трещин – разрезов.

При решении конкретной краевой задачи динамической теории упругости метод энергетического моделирования дифракции упругих волн заключается в построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля, автоматически удовлетворяющих уравнениям движения, условиям излучения на бесконечности и обеспечивающих желательные свойства решений на контурах неоднородностей. Все указанные требования можно выполнить, используя известную теорему взаимности работ:

*если есть два различных состояния механической системы, то работа сил второго состояния на перемещениях первого равна работе сил первого состояния на перемещениях второго.*

Применяя эту теорему, можно получать интегральные представления перемещений в случае разнообразных постановок задач дифракции упругих волн на различных неоднородностях.

Рассмотрим метод энергетического моделирования дифракции упругих волн на некоторых примерах.

**Дифракция стационарных изгибных волн на криволинейных дефектах в тонких пластинках.** В случае изгибных колебаний тонкой пластинки (в рамках модели Кирхгофа-Лява), ослабленной криволинейными дефектами типа жестких подвижных включений и трещин-разрезов, дифрагированное волновое поле, характеризующее прогиб пластинки, удовлетворяет дифференциальному уравнению [17]

$$\Delta^2 W^{(1)} - \gamma^4 W^{(1)} = 0, \quad \gamma^4 = \rho h \omega^2 / D. \tag{1}$$

Сформулируем граничные условия на контурах криволинейных дефектов.

1. Если  $L^{(3)}$  – совокупность жестких включений  $L_j, j = \overline{1, M}$ , то считаем, что каждое из них перемещается как абсолютно жесткое тело, и на  $L_j$  граничные условия имеют вид

$$\varphi_1^\pm = A_j, \quad \varphi_2^\pm = B_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{2}$$

Отметим, из (2) вытекает, что на контуре  $L_j$  будет выполняться соотношение:

$$W^\pm = C_j - A_j \xi - B_j \eta, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{3}$$

Для определения неизвестных постоянных  $A_j, B_j$  и  $C_j (j = \overline{1, M})$  на каждом контуре  $L_j, j = \overline{1, M}$  необходимо задать главный вектор  $F^{(j)}$  и главные моменты  $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}$  сил, действующих на включение  $L_j, j = \overline{1, M}$ .

2. Если  $L^{(4)}$  – совокупность трещин – разрезов  $L_j, j = \overline{1, K}$ , то считаем, что на берегах  $L$  заданы амплитуды самоуравновешенных изгибающего момента и обобщенной поперечной силы:

$$M_n^\pm = m(s), \quad N_n^\pm = m(s), \quad s \in L. \tag{4}$$

Взаимодействуя с дефектами, проходящая волна порождает сингулярное волновое поле вблизи дефектов. В результате кинематические и силовые величины, вообще говоря, претерпевают разрывы на  $L$ .

С помощью теоремы взаимности работ для амплитуд прогиба  $W^{(1)}(x_1, x_2)$  возмущенного волнового поля получено следующее интегральное представление

$$W^{(1)}(P) \int_{L^{(3)}} \left( \frac{F}{l} G + f_1(s) \varphi_s^G + f_2(s) \varphi_n^G \right) ds - \int_{L^{(4)}} (g_1(s) F_n^G + g_2(s) M_n^G) ds. \quad (5)$$

Здесь  $G(P, Q)$  – фундаментальное решение уравнения (1);  $\varphi_s^G$  и  $\varphi_n^G$  – соответствующие прогибу  $G$  углы поворота;  $F_n^G$  и  $M_n^G$  – интеграл (от 0 до  $s$ ) обобщенной поперечной силы  $N_n^G$  и изгибающий момент;  $F$  – главный вектор сил, действующих на жесткое включение совокупности  $L^{(3)}$  длины  $l$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что интегральные представления (2) обеспечивают необходимые скачки силовых и кинематических величин на  $L^{(3)}$  и  $L^{(4)}$ . На криволинейном жестком включении – скачки обобщенной поперечной силы  $N_n$  и изгибающего момента  $M_n$ :

$$f_1(s) = \int_0^s [N_n] ds - \frac{F}{l} s, \quad f_2(s) = [M_n], \quad (6)$$

а в случае криволинейной трещины – скачки углов поворота  $\varphi_s$  и  $\varphi_n$ :

$$g_1(s) = [\varphi_s], \quad g_2(s) = [\varphi_n]. \quad (7)$$

Для определения решения – прогиба  $G$  бесконечной пластинки в точке  $P(x_1, x_2)$  от действия гармонической распределенной поперечной нагрузки, сосредоточенной в точке  $Q(\xi, \eta)$ , рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $G$ . Из (1) получаем ( $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака)

$$\Delta^2 G - \gamma^4 G = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta). \quad (8)$$

Введем функции

$$G_1(P, Q) = \Delta G + \gamma^2 G, \quad G_2(P, Q) = \Delta G + \gamma^2 G. \quad (9)$$

Тогда из (8) вытекает, что  $G_1$  и  $G_2$  являются фундаментальными решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta G_1 - \gamma^2 G_1 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad \Delta G_2 - \gamma^2 G_2 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta) \quad (10)$$

и, следовательно,

$$G_1(P, Q) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(i\gamma r), \quad G_2(P, Q) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad (11)$$

$r = |z - \zeta|$ ,  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Если определены функции  $G_1$  и  $G_2$  (11), то из (9) можно найти функцию  $G$ . Имеем

$$G(P, Q) = \frac{1}{8i\gamma^2} (H_0^{(1)}(i\gamma r) - H_0^{(1)}(\gamma r)). \quad (12)$$

Здесь и далее  $H_m^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка [11].

Точечный источник возбуждает в неограниченной пластинке гармонические изгибные колебания, которые затухают на бесконечности. Это вытекает из условий излучения, которым удовлетворяет на бесконечности функция  $G$  (12):

$$G = O(1/\sqrt{r}), \quad \frac{\partial G}{\partial r} - i\gamma r = O(1/r\sqrt{r}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Теперь, выбирая совокупность контуров-разрезов  $L^{(3)}$  и  $L^{(4)}$ , можно моделировать тонкую пластинку с заданной системой дефектов и рассматривать дифракцию изгибной волны на выбранной системе контуров. Удовлетворение граничных условий (2) на контурах жестких включений и (4) на трещинах-разрезах (второе граничное условие интегрируется по дуговой координате  $s$ ) сводит поставленную краевую задачу к системе СИУ первого рода. Необходимые дополнительные условия для однозначной разрешимости этих уравнений (и определения неизвестных постоянных интегрирования на контурах трещин) вытекают из равенства нулю на каждом жестком включении главного вектора сил и главных моментов сил, действующих на этом включении, а в случае трещины предполагаем равенство нулю скачков прогиба в концах этой трещины.

**Дифракция стационарных волн сдвига на системе неоднородностей в полупространстве.** В условиях антиплоской деформации рассмотрим полупространство  $x_2 \geq 0$  с заземленной ( $A=1$ ) или свободной от сил ( $A=-1$ ) границей  $x_2=0$ , в случае неограниченного пространства принимаем  $A=0$ . Источники возбуждающего волнового поля полагаем заданными вне неоднородностей (область  $D_1$ ). В качестве такого источника может

быть излучающаяся из бесконечности гармоническая волна сдвига

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \quad \tau = const, \quad (14)$$

где  $\theta$  – угол между нормалью к фронту волны и осью  $Ox_1$ ,  $\gamma_1 = \omega / c_1$  – волновое число,  $c_1$  – скорость распространения волны сдвига в области  $D_1$ .

В случае периодической задачи рассматривается нормально падающая волна ( $\theta = 0$ ).

Тогда при взаимодействии с границей полупространства  $x_2 = 0$  возникает отраженная волна с амплитудой

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)}. \quad (15)$$

Возбуждающее волновое поле в матрице может быть также вызвано действием сосредоточенного в некоторой точке  $Q(x_q, y_q)$  гармонического источника, для которого положим

$$f = \tau \mu_1 \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q). \quad (16)$$

Тогда амплитуда падающей волны  $W_0$  удовлетворяет уравнению ( $\mu_1$  – модуль сдвига,  $\rho_1$  – плотность матрицы)

$$\Delta W_0 + \gamma_1^2 W_0 = -\tau \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q). \quad (17)$$

Здесь решение уравнения (17) будем задавать в виде

$$W_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q), \quad r_q = |z - z_q|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_q = x_q + iy_q. \quad (18)$$

Тогда отраженная от границы полупространства  $x_2 = 0$  волна имеет амплитуду

$$U_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q^*), \quad r_q^* = |z - \bar{z}_q|, \quad \bar{z}_q = x_q - iy_q. \quad (19)$$

При отсутствии неоднородностей общее волновое поле в полупространстве  $x_2 \geq 0$  равно

$$V_0 = W_0 - AU_0. \quad (20)$$

Сформулируем граничные условия на контурах неоднородностей.

1. В случае упругих включений, на контурах будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности амплитуд перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. В этом случае граничные условия на кривой  $L_j$  (рис. 1) таковы ( $n_0$  – положительная нормаль к  $L_j$ ):

$$W_1 + V_0 = W_2, \quad \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0}(W_1 + V_0) = \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0}. \quad (21)$$

Соотношения (21) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения к кривой  $L_j$  из области  $D_1$  или  $D_2$ .

2. В случае неподвижных включений на границе каждого включения будем требовать равенство нулю перемещения, то есть выполнения условия

$$W_1 + V_0 = 0. \quad (22)$$

3. Если цилиндр  $D_2^j$  перемещается как абсолютно жесткое тело, то на границе жесткого включения общее перемещение удовлетворяет следующему условию:

$$W_1 + V_0 = B_j \text{ на } L_j, \quad (23)$$

где  $B_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) – неизвестные комплексные постоянные.

В случае разомкнутого криволинейного жесткого включения  $L_j$  граничное условие также имеет вид (23).

Дополнительные условия, необходимые для определения неизвестных постоянных, фигурирующих в (23), вытекают из закона Ньютона, описывающего движение каждого включения как абсолютно жесткого тела. В случае замкнутых жестких включений уравнение движения включения  $D_2^j$  имеет вид ( $\rho_e$  – плотность,  $S_e^j$  – площадь  $j$ -го включения).

$$\mu_1 \int_{L_j} \frac{\partial}{\partial n_0}(W_1 + W_0) ds_0 = -\rho_e S_e^j \omega^2 B_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (24)$$

а в случае разомкнутого жесткого включения  $L_j$  будем требовать равенство нулю главного вектора сил, действующих на этом включении.

4. На контуре каждой полости граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} (W_1 + V_0) = 0. \quad (25)$$

Краевое условие (25) имеет место также на контуре криволинейной трещины разреза  $L_j$ .

В результате взаимодействия падающей и отраженной от границы полупространства волн с неоднородностями (постановка краевых задач предполагает рассмотрение как конечных, так и периодических решеток) возникает отраженное  $W_1$  и проходящее  $W_2$  внутрь упругих включений (в случае присутствия упругих волокон в полупространстве) волновые поля перемещений, которые удовлетворяют в соответствующих областях уравнениям Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \omega c_k, \quad c_k = \sqrt{\mu_k / \rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

Итак, решение *антиплоской задачи динамической теории упругости* о дифракции гармонической волны сдвига на конечной системе неоднородностей (рис. 1) сводится к решению уравнений Гельмгольца (26) с заданными краевыми условиями на границе неоднородностей. Отметим, что в области  $D_1$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным граничным условиям, неоднозначно. Единственность решения обеспечивается удовлетворением рассеянной волной  $W_1$  условий излучения на бесконечности.

При моделировании дифрагированного поля в полупространстве будем использовать *метод зеркальных отображений*, сущность которого применительно к некоторому криволинейному контуру отражена на рис. 2.

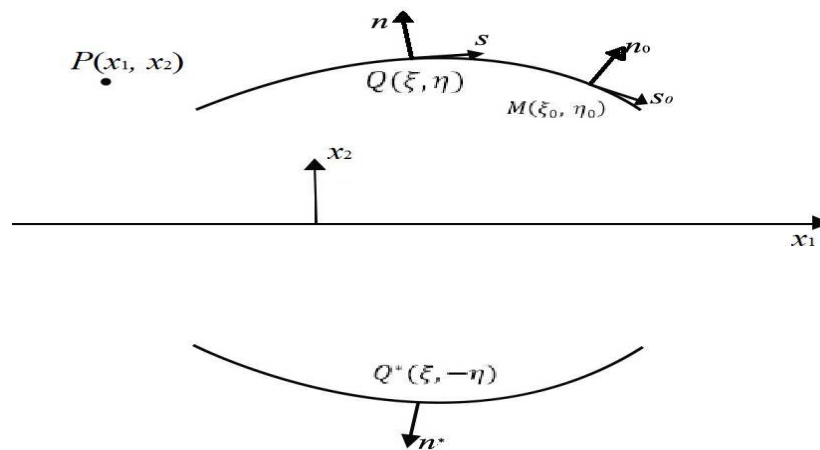


Рис. 2 – Метод зеркальных отображений в полупространстве.

Интегральные представления амплитуд перемещений  $W_1$  и  $W_2$  в матрице и внутри упругих включений (область  $D_2$ ), соответственно, запишем в виде

$$W_k(P) = \int_{L^1} f_k(s)(G_k(P, Q) - A\delta_{1k}G_k(P, Q^*))ds + \delta_{1k} \left( \int_{L^{(2,3)}} f(s)(G_1(P, Q) - AG_1(P, Q^*))ds - \int_{L^{(4)}} g(s) \left( \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}}(P, Q) - A \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}^*}(P, Q^*) \right) ds \right). \quad (27)$$

Здесь  $G_k(P, Q)$  – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (26) в соответствующей области ( $k = 1, 2$ ), что обеспечивает все желательные свойства функции  $W_k(P)$ .

Если рассматривается некоторая дифракционная краевая задача, то необходимо выбрать соответствующие интегральные представления амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля и выполнить сформулированные граничные условия на совокупности  $L$  выбранных контуров. В результате будут получены интегральные уравнения данной краевой задачи. Далее следует определить тип этих уравнений на каждом контуре совокупности  $L$  и присоединить к ним, в случае необходимости, дополнительные условия, с помощью которых должны быть получены единственные решения исследуемой задачи.

Решение возникающих краевых задач показывает, что каждому неподвижному и подвижному жесткому включению, а также каждой трещине, отвечает СИУ первого рода. Каждой полости соответствует *интегральное уравнение Фредгольма второго рода*, а в случае упругого включения получается система СИУ первого рода и уравнение Фредгольма второго рода.

В качестве примера рассмотрим дифракцию гармонической волны сдвига (14) при  $\theta = 0$  на периодической



системе замкнутых неоднородностей. Периодическую функцию источника в полупространстве будем представлять с учетом выделения главной особенности (логарифмической), которая соответствует статическому случаю ( $\omega = 0$ ). Имеем [11]:

$$G_k(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(z - \zeta)}{2d} \right| + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ f_l^k(x_2 - \eta) - \delta_{lk} A g_l^k(x_2 + \eta) \right\} \cos \alpha_l(x_1 - \xi),$$

$$f_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k |t|}}{2i\gamma_k} - \frac{|t|}{2}, \quad g_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k t}}{2i\gamma_k}, \quad f_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl}|t|}}{i\lambda_{kl}} + \frac{e^{-\alpha_l |t|}}{\alpha_l}, \quad g_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl} t}}{i\lambda_{kl}}, \quad l \neq 0,$$

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_l^2}, \quad \gamma_k > \alpha_l; \quad \lambda_{kl} = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma_k^2}, \quad \gamma_k < \alpha_l. \tag{28}$$

Если до выделения статического члена в точке  $P = Q$  функциональный ряд, соответствующий функции  $G_k$ , расходился (общий член ряда ведёт себя как  $1/l$ ), то фигурирующий в (28) ряд сходится равномерно и абсолютно: при  $P \neq Q$  в силу присутствия затухающих экспонент, а при  $P = Q$  общий член ряда ведет себя как  $1/l^3$ . Действительно, в случае  $P = Q$  при больших  $l$  имеем

$$\frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} - \alpha_l}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{-\gamma^2}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} (\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} + \alpha_l)} \approx -\frac{\gamma^2}{2\alpha_l^3}. \tag{29}$$

Итак, при  $P = Q$  периодическая функция источника уравнения Гельмгольца имеет логарифмическую особенность, соответствующую периодической функции источника уравнения Лапласа (случай  $\omega = 0$ ).

С целью исследования сходимости построенных алгоритмов рассматривалась периодическая система однородных эллиптических неоднородностей (рис. 3).

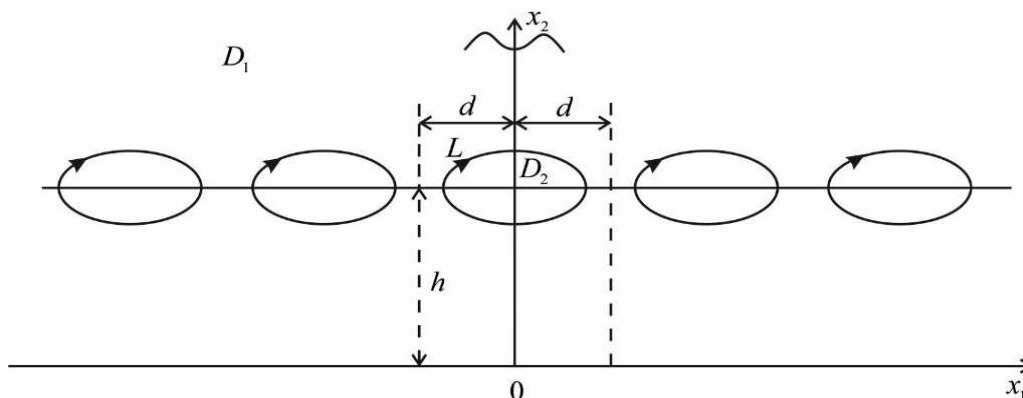


Рис. 3 – Периодическая система неоднородностей в полупространстве.

В ходе численной реализации на контурах эллипсов вычислялись безразмерные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  путем деления соответствующих напряжений на  $\tau\epsilon_1$ . Численная реализация проводилась методами дискретных особенностей и механических квадратур. Численные эксперименты показали, что оба метода имеют приблизительно одинаковую эффективность. Точность вычислений, которая проверялась сравнением результатов при различных значениях узлов коллокации  $N$ , достигается приблизительно при одном и том же  $N$ . Причем замена метода никак не отражается на потере вычислительных ресурсов (память, быстродействие).

Влияние границы полупространства на распределения напряжений на контуре центрального эллипса (с полуосями  $a$  и  $b$ ) в случае периодической решетки, иллюстрируется на рис. 4 – 5. Выбраны такие геометрические параметры:  $a/b = 2h$ ;  $h/b = 4$ . На всех рисунках кривая 1 соответствует заземленному полупространству ( $A = 1$ ); кривая 2 – полупространству с границей, свободной от сил ( $A = -1$ ); кривая 3 – неограниченной среде ( $A = 0$ ). Во всех случаях полагалось  $\gamma_1 d = 4,5$  и отсчет угла  $\beta$  осуществлялся от теневой точки (ближайшей к прямой  $x_2 = 0$ ).

На рис. 4 приведены графики сдвигового напряжения  $\sigma_n$  на контуре центрального эллиптического неподвижного и подвижного жесткого ( $\rho_e / \rho_1 = 2$ ) включений в случае решеток, составленных из соответствующих включений.

Расчеты показывают, что жесткость включения понижает значение напряжения  $\sigma_n$ , если сравнивать с соответствующим значением в случае неподвижного включения. Анализ кривых распределения свидетельствует о существенном влиянии границы полупространства на значения напряжения  $\sigma_n$ . Особенно это проявляется в случае решетки, составленной из жестких эллиптических включений (рис. 4, b).

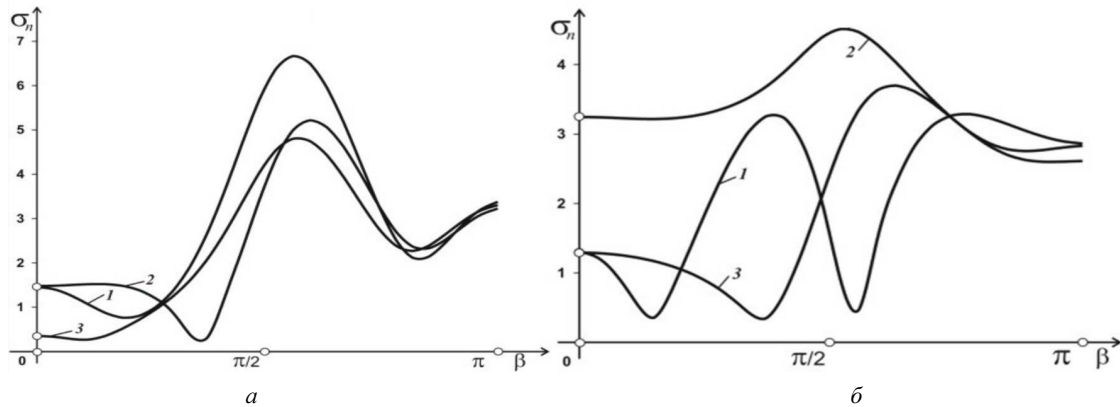


Рис. 4 – Напряжения  $\sigma_n$  на контуре в полупространстве: *a* – центрального неподвижного эллиптического включения; *б* – жесткого эллиптического включения.

На рис. 5 показаны кривые распределения сдвигового напряжения  $\sigma_s$  на границе центральной полости в случае периодической решетки, составленной из эллиптических полостей. Видно, что наиболее сильно напряжение  $\sigma_s$  проявляет себя в заземленном полупространстве. Как и в случае неограниченной среды ( $A = 0$ ), в полупространстве ( $A = \pm 1$ ) значения  $\sigma_s$  вблизи теневой и лобовой точек близки к нулю.

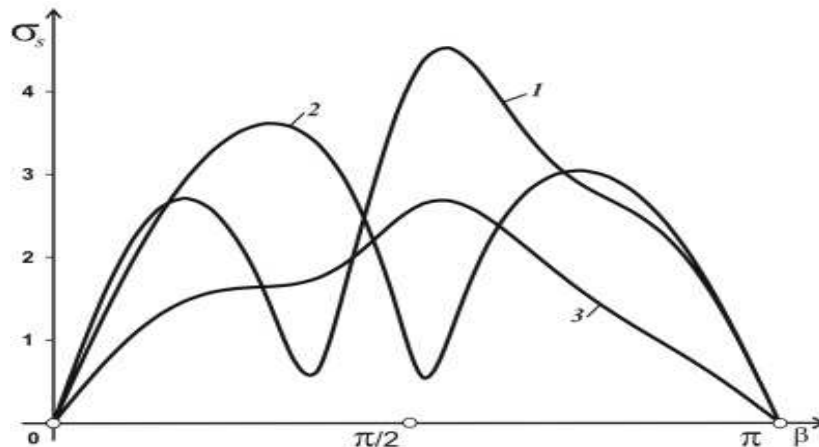


Рис. 5 – Распределение напряжения  $\sigma_s$  на контуре центрального эллиптического отверстия в полупространстве.

**Выводы.** В данной статье предложен новый метод энергетического моделирования дифракции упругих волн на неоднородностях различных типов, который основан на построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля с помощью теоремы взаимности работ. Возникающие краевые задачи сводятся к системе интегральных уравнений, которые в совокупности с дополнительными условиями реализуются численно методами дискретных особенностей и механических квадратур.

**Список литературы:** 1. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеивания волн (обзор) // Прикл. механика. – 1996. – Вып. 32. – № 12. – С. 3 – 27. 2. Крайцов Ю. А., Орлов Ю. И. О границах применимости метода геометрической оптики // Современные проблемы распространения и рассеивания волн. – 1979. – С. 76 – 195. 3. Гладкий А. В., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – К.: Наукова думка, 2001. – 453 с. 4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с. 5. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л., Сизова Н. Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика – 1996. – Вып. 349. – № 2. – С. 175 – 179. 6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 307 с. 7. Шульга Н. А., Колодий В. И. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой цилиндрической формы // Механика композитных материалов. – 1981. – №1. – С. 153 – 156. 8. Feng Y., Wang Y., Zhang Z. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface // Soil Dyn. Earthquake Eng. – 2003. – Vol. 23. – № 4. – P. 303 – 311. 9. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические методы двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – X.: АВВ МВСУ, 2012. – 544 с. 10. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. – К.: Наукова думка, 2002. – 343 с. 11. Назаренко А. М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений. – Сумы: СумДУ, 2015. – 220 с. 12. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов // Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 118 – 129. 13. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях и включениях в изотропной среде // Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119 – 127. 14. Фильштинский Л. А., Москаленко Е. И. Исследование упругих волновых полей в неограниченной изотропной среде с включениями // Теор. и прикл. механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 124 – 129. 15. Назаренко А. М., Фильштинский Л. А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация) // Механика твердого тела. – 1985. – № 4. – С. 95 – 102. 16. Назаренко А. М., Фильштинский Л. А. Взаимодействие упругих волн с криволинейной трещиной в полуплоскости // Теор. и прикл. механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 77 – 82. 17. Назаренко А. М., Острик В. И. Дифракция изгибных волн на криволинейной трещине и тонком включении в бесконечной пластинке // Проблемы машиностроения. – 1990. – Вып. 33. – С. 43 – 48. 18. Назаренко А. М. Моделирование взаимодействия гармонических P- и SV-с периодической сис-

темой криволинейных разрезов // Вестник ХНУ. – 2013. – Вып. 22. – № 1063. – С. 125 – 135. **19.** Назаренко А. М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – №11. – С. 90 – 94. **20.** Назаренко А. М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 54 – 60. **21.** Ложкин О. М., Назаренко О. М. Дифракция пружных хвиль на периодических системах цилиндрических порожнин та жорстких включень // Акустичний вісник. – 2006. – Вып. 9. – №4. – С. 35 – 42. **22.** Назаренко А. М., Панченко Б. Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной изотропной среде // Проблемы программирования. – 2010. – № 2 – 3. – С. 604 – 610. **23.** Панченко Б. Е., Назаренко А. М. Каркасный анализ предметной области : стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172 – 187. **24.** Панченко Б. Е., Сайко И. Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 5. – С. 120 – 127. **25.** Shibahara M., Taniuchi Y. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems // Bull JSME. – 1983. – Vol. 26. – № 222. – P. 2054 – 2059. **26.** Scarpetta E., Sumbatyan M. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 69. – № 2. – P. 179 – 188.

**References:** 1. Podil'chuk, Y. N. and Rubtsov, J. K. Primeneniye luchevykh metodov v zadachakh rasprostraneniya i rassevaniya voln (obzor) [The use of radiological methods in the problems of propagation and scattering of waves (review)]. *Prikladnaya mekhanika* [J. Appl. Mechanics]. 1996, vol. 32, no. 12, pp. 3–27. 2. Kravtsov, Y. A. and Orlov, Y. I. O granitsakh primenimosti metoda geometricheskoy optiki [Limits of applicability of geometrical optics method]. *Sovremennyye problemy rasprostraneniya i rassevaniya voln* [Modern problems of propagation and scattering of waves]. 1979, pp. 76–195. 3. Gladkiy, A. V., Sergienko, I. V. and Skopetsky, V. V. *Chislennno-analiticheskiye metody issledovaniya volnovykh protsessov* [Numerical and analytical methods of studying wave processes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2001. 453 p. 4. Zenkevich, O. and Morgan, K. *Konechnyye yelementy i approksimatsii* [Finite Elements and Approximation]. Moscow, Mir Publ., 1986. 318 p. 5. Gulyaev, Y. V., Kravchenko, V. F., Rvachev, V.L. and Sizova, N. D. Issledovaniye difraktsii uprugikh voln na platinakh, oslablennykh dvumya otverstiyami proizvol'noy formy [Investigation of diffraction of elastic waves on plates weakened by two holes of arbitrary shape]. *DAN Matematicheskaya fizika* [DAN. Mathematical Physics]. 1996, vol. 349, no. 2, pp. 175–179. 6. Guz', A. N., Kubenko, V. D. and Cherevko, M. A. *Difraktsiya uprugikh voln* [Diffraction of elastic waves]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 307 p. 7. Shul'ga, N. A. and Kolodiy, V. I. Difraktsiya voln sdviga na uprugom vkluchenii nekrugovoy tsilindricheskoy formy [Diffraction of shear waves on an elastic inclusion of non-circular cylindrical shape]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1981, no. 1, pp. 153–156. 8. Feng, Y., Wang, Y. and Zhang, Z. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface. *Soil Dyn. Earthquake Eng.* 2003, vol. 23, no. 4, pp. 303–311. 9. Gandel', Y. V. and Dushkin, V. D. *Matematicheskiye metody dvumernykh zadach difraktsii: singulyarnyye integral'nyye uravneniya i chislennyye metody diskretnykh osobennostey* [Mathematical methods of two-dimensional diffraction problems: singular integral equations and numerical methods of discrete singularities]. Kharkov, ABB MVSU Publ., 2012. 544 p. 10. Dovgiy, S. A. and Lifanov, I. K. *Metody resheniya integral'nykh uravneniy. Teoriya i prilozheniya* [Methods for solving integral equations. Theory and Applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 343 p. 11. Nazarenko, A. M. *Vychislitel'nyye metody v zadachakh difraktsii uprugikh voln na sistemakh neodnorodnostey na baze singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Computational methods in problems of diffraction of elastic waves on inhomogeneity systems based on singular integral equations]. Sumy, SumDU Publ., 2015. 220 p. 12. Popov, V. G. Vzaimodeystviye ploskikh uprugikh voln s sistemami radial'nykh defektov [Interaction of plane elastic waves with the systems of radial defects]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1999, no. 4, pp. 118–129. 13. Fil'shtinskiy, L. A. Difraktsiya uprugikh voln na treshhinakh, otverstiyakh i vklucheniyyakh v izotropnoy srede [Diffraction of elastic waves on cracks, holes and inclusions in isotropic medium]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1991, no. 4, pp. 119–127. 14. Fil'shtinskiy, L. A. and Moskalenko, E. I. Issledovaniye uprugikh volnovykh poley v neogranichennoy izotropnoy srede s vklucheniyyami [Study of elastic wave fields in an infinite isotropic medium with inclusions]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theor. and Appl. Mechanics]. 2007, vol. 43, pp. 124–129. 15. Nazarenko, A. M. and Fil'shtinskiy, L. A. Vzaimodeystviye voln napryazheniy s zhyestkimi vstavkami v poluprostranstve (ploskaya deformatsiya) [Interaction of stress waves with rigid insertions in a half space (plane deformation)]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1985, no. 4, pp. 95–102. 16. Nazarenko, A. M. and Fil'shtinskiy, L. A. Vzaimodeystviye uprugikh voln s krivolineynoy treshhinoy v poluploskosti [Interaction of elastic waves with a curvilinear crack in the half plane]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theor. and Appl. Mechanics]. 1988, vol. 19, pp. 77–82. 17. Nazarenko, A. M. and Ostriuk, V. I. Difraktsiya izgibnykh voln na krivolineynoy treshhine i tonkom vkluchenii v beskonечноy platinke [Diffraction of flexural waves on curved crack and thin inclusion in an infinite plate]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 1990, vol. 33, pp. 43–48. 18. Nazarenko, A. M. Modelirovaniye vzaimodeystviya garmonicheskikh P- i SV - s periodicheskoy sistemoy krivolineynykh razrezov [Modeling the interaction of harmonic P- and SV - with periodic system of curvilinear sections]. *Vestnik KhNU* [Bulletin of KhNU]. 2013, vol. 22, no. 1063, pp. 125–135. 19. Nazarenko, A. M. Difraktsiya voln sdviga na tsilindricheskikh vklucheniyyakh i polostyakh v uprugom poluprostranstve [Shear waves diffraction on cylindrical cavities and inclusions in an elastic half-space]. *Problemy prochnosti* [Structural robustness problems]. 1990, no. 11, pp. 90–94. 20. Nazarenko, A. M. Difraktsiya garmonicheskikh voln na tsilindricheskom uprugom vkluchenii v usloviyakh ploskoy deformatsii [Diffraction of harmonic waves on cylindrical elastic inclusion under plane strain]. *Dinamicheskiye sistemy* [Dynamical Systems]. 2005, vol. 19, pp. 54 – 60. 21. Lozhkin, O. M. and Nazarenko, O. M. Difraktsiya pruzhnykh khvyl' na periodichnykh sistemakh tsilindrichnykh porozhnyn ta zhorstkykh vkluchen' [Diffraction of elastic waves on periodic systems of cylindrical cavities and rigid inclusions]. *Akustichnyy visnyk* [Acoustic Bulletin]. 2006, vol. 9, no. 4, pp. 35–42. 22. Nazarenko, A. M. and Panchenko, B. E. Skhema parallel'nykh vychisleniy v zadachakh difraktsii voln sdviga na sisteme otverstiy v beskonечноy izotropnoy srede [A scheme of parallel computations in the problems of diffraction of shear waves on a cavity system in an infinite isotropic medium]. *Problemy programmirovaniya* [Problems of programming]. 2010, no. 2–3, pp. 604–610. 23. Panchenko, B. E. and Nazarenko, A. M. Karkasnyy analiz predmetnoy oblasti: statsionarnyye dinamicheskiye zadachi teorii uprugosti dlya izotropnykh sred s proizvol'nymi neodnorodnostyami [Frame domain analysis: stationary dynamic problems of elasticity theory for isotropic media with random inhomogeneities]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2013, no. 1, pp. 172–187. 24. Panchenko, B. E. and Sayko, I. N. Vysokotochnyye maksimal'nyye napryazheniya v zadache o vzaimodeystviy uprugikh voln s sistemoy tsilindricheskikh polostey v usloviyakh ploskoy deformatsii [Precision maximum stresses in the problem of the interaction of elastic waves with cylindrical cavity system under plane strain]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2015, no. 5, pp. 120–127. 25. Shibahara, M. and Taniuchi, Y. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems. *Bull JSME*. 1983, vol. 26, no. 222, pp. 2054–2059. 26. Scarpetta, E. and Sumbatyan, M. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2001, vol. 69, no. 2, pp. 179–188.

Поступила (received) 27.03.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Назаренко Олександр Максимович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

**Назаренко Александр Максимович** – кандидат физико-математических наук, доцент, Сумской государственной университет, г. Сумы; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

**Nazarenko Aleksandr Maksimovich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Sumy State University, Sumy; tel.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

Л. И. НЕФЕДОВ, М. В. ШЕВЧЕНКО

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТ РАЗМЕЩЕНИЯ УСТРОЙСТВ КОММУТАЦИИ, СБОРА И ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ СИНТЕЗЕ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА РЕГИОНАЛЬНОГО ГАЗОСНАБЖЕНИЯ

Рассматривается четырехуровневая структура системы мониторинга регионального газоснабжения и особенности ее топологического синтеза. Результаты разработки и исследований могут быть использованы при структурно-топологическом синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения, поскольку позволяют определить места размещения для устройств коммутации, сбора и передачи информации. Предложенные критерии и ограничения для реализации метода позволяют повысить эффективность принятия решений за счет снижения затрат на топологический синтез.

**Ключевые слова:** метод, топология, синтез, мониторинг, региональное газоснабжение.

**Введение.** В настоящий момент региональные системы газоснабжения отличаются большой рассредоточенностью, что позволяет их отнести к территориально – распределенным системам обслуживания. Соответственно, современные системы контроля, мониторинга и управления региональных систем газоснабжения также относятся к этому типу. Сейчас на первый план в проблематике газотранспортного комплекса выходят системы мониторинга, поскольку существующие системы автоматизированного контроля и управления устарели и не справляются со своими функциями в полной мере. Мониторинг сам по себе – это длительный процесс наблюдения за объектом, который включает в себя периодическое снятие интересующих параметров, их регистрацию, хранение и анализ [1, 2] и представляет собой комплекс мероприятий, который всегда растянут во времени и позволяет изучить свойства объекта в динамике, понять направления его развития, выявить скрытые проблемы. Другое определение говорит о том, что *мониторинг* – это постоянное наблюдение за каким-либо процессом с целью выявления его соответствия желаемому результату или первоначальным предположениям [3]. Можно утверждать, что системы мониторинга регионального газоснабжения в рамках газотранспортной системы Украины приобретают все большее значение.

**Анализ последних исследований.** Проблеме синтеза территориально распределенных систем обслуживания разной направленности посвящен ряд работ [4 – 6], и исследования продолжают проводиться. Все авторы сходятся на том, что в процессе синтеза следует выделить два основных этапа: структурно-топологической и параметрической синтез.

В связи с многоуровневостью структуры системы мониторинга регионального газоснабжения (СМРГ) является необходимость в определении мест возможного размещения средств сбора и передачи информации, а также определения топологий связей для присоединяемых средств измерений [7].

В работе [8] решается задача об оптимизация количества и местоположения распределительных центров транспортно-складской системы, которая также относится к территориально распределенным системам обслуживания, однако к совсем другому их типу [5].

Работа [9] посвящена решению однокритериальной минисуммной задаче размещения центра обслуживания, что не позволяет учесть все особенности структурно-топологического синтеза СМРГ [7], поскольку при решении этой задачи необходимо учитывать иерархичность системы.

Исследование [10] посвящено разработке модели определения мест возможного размещения коммутирующих устройств, однако для системы мониторинга они находятся на более высоком уровне иерархии, соответственно решение задачи будет иметь свои особенности, связанные с их территориальным размещением.

Учитывая сказанное выше, актуальной задачей является разработка метода определения мест возможного размещения устройств сбора и передачи информации и вариантов топологии при синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения.

**Постановка цели и задач.** Целью статьи является повышение эффективности функционирования системы мониторинга регионального газоснабжения за счёт разработки метода определения мест размещения устройств коммутации, сбора и передачи информации и вариантов топологии, что позволит учитывать особенность СМРГ как четырехуровневой структуры и обеспечит снижение затрат на топологический синтез при присоединении средств измерений.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать метод определения мест возможного размещения устройств сбора и передачи информации и вариантов топологии;
- выбрать основные критерии и ограничения;
- реализовать метод определения мест возможного размещения устройств сбора и передачи информации и вариантов топологии на конкретном примере.

**Описание метода.** Одним из параметров, который оптимизируется в задачах структурного синтеза, является

ся количество структурных элементов (СЭ), образующих СМРГ. Огибающая зависимости показателей эффективности или стоимости СМРГ являются, как правило, одноэкстремальной функцией на заданном интервале изменения количества СЭ, входящих в ее состав. Формально задача сводится к отысканию экстремума некоторой функции. Характерной чертой подобных задач является то, что трудоемкость определения значений функции в каждой из точек существенно различается [5]. Так, трудоемкость алгоритма направленного перебора локальных экстремумов функции цели пропорциональна числу мест возможного размещения устройств сбора и передачи информации (УСПИ) –  $I^*$  по  $m$ , где  $m$  – количество УСПИ. Максимум трудоемкости находится приблизительно при  $m = I^* / 2$ . Мощность современной вычислительной техники позволяет получать точные решения методом направленного перебора при  $I^* = 25 - 30$  и  $m = 5 - 8$ . Расчеты показывают, что оптимальное значение числа УСПИ  $m^0 \ll I^*$ , а для радиально-узловых структур  $m^0 \ll I^* / 2$ . Это делает неэффективным использование для поиска экстремума методов направленного перебора, что не исключают поиск на участке с пиковой трудоемкостью. Малоэффективно и использование последовательного анализа, который предполагает определение значений функции для  $m = 1, 2, \dots, m^0 + 1$ .

Для повышения эффективности алгоритмов, использующих метод направленного перебора, где предлагается предварительно оценивать количество СЭ. Оценки позволят сократить область поиска решений путем задания некоторого интервала поиска [5, 10].

Оценки первого рода определяют нижнюю и верхнюю границы количества УСПИ. В простейшем случае такие оценки отражают соотношение между суммарным весом обслуживаемых объектов и минимально или максимально допустимой мощностью УСПИ (узлов, устройств):

$$m_{\text{inf}} = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{e'} \right\rceil ; m_{\text{sup}} = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{e''} \right\rfloor, \quad (1)$$

где  $\lceil \cdot \rceil$ ,  $\lfloor \cdot \rfloor$  – соответственно операторы определения ближайшего целого, не менее заданного, и выделения целой части числа;  $e'$ ,  $e''$  – максимально и минимально допустимые мощности СЭ;  $e_i$  – вес  $i$ -го объекта.

Поиск экстремума на интервале  $[m_{\text{inf}}, m_{\text{sup}}]$  может осуществляться известными методами с учетом их трудоемкости. При решении задачи структурно-топологической оптимизации, если нет дополнительной информации о значении  $m^0$ , в качестве начального  $m_n$  целесообразно выбирать значения, которое находится внутри (в окрестностях середины) выделенного интервала. С ростом вычислительной сложности алгоритмов рациональное значение  $m_n$  будет смещаться к границам интервала. Если желанной целью является минимизация средней трудоемкости поиска  $m^0$ , то сдвиг будет осуществляться в направлении  $m_{\text{inf}}$ . При использовании алгоритмов размещения УСПИ высокой вычислительной сложности (комбинаторного типа) в качестве  $m_n$  целесообразно выбирать  $m_{\text{sup}}$ . Примером может служить алгоритм размещения, для которого трудоемкость определения оптимального значения функции при некотором значении  $m$  существенно превосходит суммарную трудоемкость определения значений функции во всех предыдущих точках  $m = m - 1, m - 2, \dots, m_{\text{inf}}$ . Если же целью является минимизация максимальной трудоемкости поиска  $m^0$  на выделенном интервале, то в качестве начального  $m_n$  стоит выбирать значения, при котором функция трудоемкости поиска решения достигает половины (с некоторой точностью) значения максимума. В этом случае  $m_n$  смещается в сторону  $m_{\text{sup}}$  тем больше, чем выше временная сложность используемого алгоритма. Предельное значение  $m_n$  при этом не превышает  $m_{\text{sup}} - 1$  [10].

Оценки второго рода позволяют получать с некоторой точностью оптимальное количество УСПИ. В основе схем вычисления таких оценок лежит процедура определения оптимальных подмножеств обслуживаемых абонентов. Оптимальность подмножеств здесь понимается в том смысле, что для заданного местоположения УСПИ относительно пунктов контроля, с установленными в них коммутирующими устройствами (КУ) (рис. 1) и обслуживаемых абонентов, удельная стоимость обслуживания выделенных подмножеств абонентов минимальна. Такие подмножества формируются отдельно для каждого места возможного размещения УСПИ.

Для решения задачи определения мест возможного размещения УСПИ введем следующие обозначения:

- подмножество точек возможного размещения УСПИ  $T\text{SI}Uch = \{T\text{SI}Uch_i\}$ , где  $i = \overline{1, i'}$ ,  $i'$  – номер точки сбора и передачи информации каждого из участков системы мониторинга;
- подмножество точек контроля, в которых проводятся измерения  $TKU\text{U}ch = \{TKU\text{U}ch_g\}$ ,  $g = \overline{1, g^n}$ ;  $g^n$  – номер точки контроля (ТК) на  $n$ -ом участке региональной системы газоснабжения;
- подмножество средств измерений, установленных в точках контроля  $SIU\text{ch} = \{SIU\text{ch}_s\}$ ,  $s^* = \overline{1, s^g}$ ;  $s^g$  – номер средства измерений (СИ), установленного в точке  $g$  на  $n$ -ом участке региональной системы газоснабжения;
- подмножество путей соединения средств измерений с УСПИ, а УСПИ с КУ

$$I^{gi} = \{k; k = \overline{1, k^{gi}}\}; \quad i \in TSIUch; \quad g \in TKUUch.$$

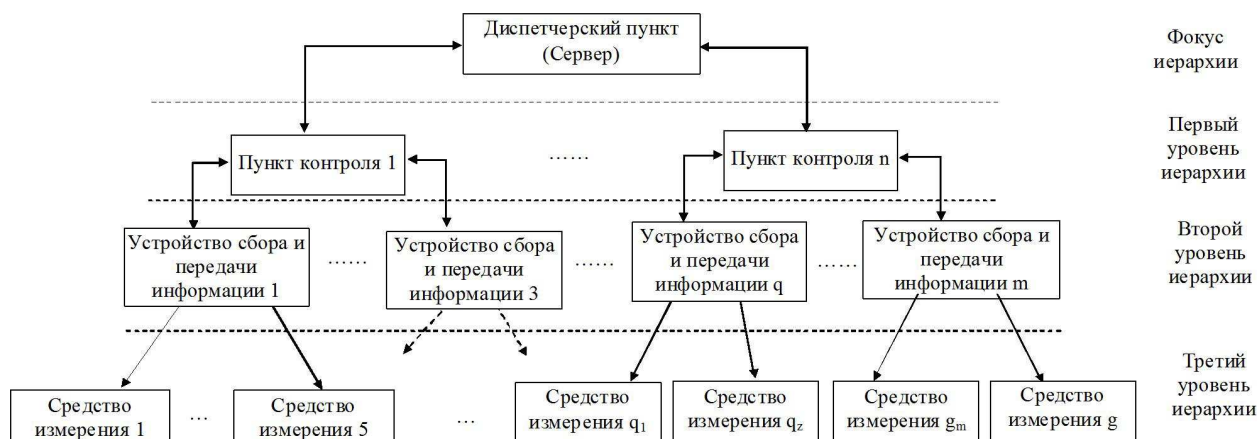


Рис. 1 – Иерархическая структура системы мониторинга.

При этом учитываем, что необходимо решать задачу на дискретной области решений, поскольку места установки средств измерений и точки контроля определены на этапе организации мониторинга [11].

Метод определения мест возможного размещения устройств сбора и передачи информации на фиксированном участке СМРГ может быть описан следующим образом.

1. В качестве начального значения количества УСПИ можно взять:

$$m_H = m_{inf} = \left\lceil \frac{s'+1}{r} \right\rceil, \tag{2}$$

где  $r$  – это количество портов УСПИ для подключения СИ.

2. В качестве конечного значения количества УСПИ можно взять

$$m_K = m_{sup} = \left\lfloor \frac{s'+1}{2} \right\rfloor. \tag{3}$$

3. Условно назначаем, что УСПИ устанавливается на месте одной из точек контроля (ТК) и для первой выбранной точки установки УСПИ рассчитываем величину

$$C_{m_H i} = \min \frac{C_i x_i + \sum_{s=1}^{s^g} \sum_{g=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} C_{s g i}^k y_{s g i}^k}{\sum_{s=1}^{s^g} \sum_{g=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} P_s y_{s g i}^k}, \tag{4}$$

где  $C_i$  – это интервальная оценка стоимости УСПИ, установленного в точке  $i$ ;  $x_i = 1$ , если в  $i$ -м пункте установлено УСПИ,  $x_i = 0$  в противном случае;  $C_{s g i}^k$  – интервальная оценка стоимости подключения  $s$ -го средства измерений, установленного в  $g$ -ой точке к УСПИ в  $i$ -ой точке, включая интервальные оценки стоимости линии связи по  $k$ -му пути;  $P_s$  – число измеряемых показателей  $s$ -м СИ,  $P_s = \overline{1, 4}$ ;  $y_{s g i}^k = 1$ , если рассматриваем соединение линией связи средств измерений в точке  $g$  с  $i$ -ой точкой  $k$ -м путем,  $y_{s g i}^k = 0$  в противном случае.

4. К УСПИ в  $i$ -й точке присоединяем ближайшего абонента с выбором кратчайшего пути соединения, затем следующего абонента с кратчайшим путем соединения, и так до тех пор, пока будет уменьшаться значение критерия (4). Минимальное значение критерия (4) определяет оптимальное подмножество абонентов и путей их соединения с УСПИ в точке  $i$  с учетом следующих ограничений:

– каждая линия связи должна быть обеспечена только одним вариантом пути соединения,

$$\sum_{k=1}^{k^{gi}} y_{s g i}^k = 1; \quad g = \overline{1, g^n}; \quad i = \overline{1, i'}; \tag{5}$$

– к каждому УСПИ должно быть присоединено не менее двух СИ и не более максимального количества портов УСПИ –  $r$ ,

$$2 \leq \sum_{s=1}^{s^g} \sum_{g=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} y_{s g i}^k \leq r; \quad i = \overline{1, i'}; \tag{6}$$

– каждое СИ в каждой точке контроля должно быть подключено только к одному УСПИ,

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} y_{gi}^k = 1; \quad g = \overline{1, i'}; \quad s = \overline{1, s^g}; \quad (7)$$

– длина каждой линии связи не должна превышать критической длины  $L_{KP}$ ,

$$L_{gi}^k x_{gi}^k < L_{KP}; \quad \forall y_{gi}^k = 1. \quad (8)$$

5. Затем из множества мест возможного размещения УСПИ изымается точка  $i$ , а также присоединенные к ней абоненты  $TKUUCH_g$ , то есть  $I^{II} = TSIUCH_i \setminus TKUUCH_g$ .

6. Затем определяется место размещения второго УСПИ на множестве  $I^{II}$  с выбором оптимального подмножества СИ и оптимальных путей их присоединения по критерию (4), и так делается до тех пор, пока не разместим УСПИ в  $m_H$  точках. Перебрав все соединения с  $i'$  по  $m_H$  выбирают вариант, дающий минимальное значение критерия:

$$C^0 = \min \sum_{i=1}^{i'} \left( \frac{C_i x_i + \sum_{s=1}^{s^g} \sum_{g=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} C_{sgi}^k y_{sgi}^k}{\sum_{s=1}^{s^g} \sum_{g=1}^{i'} \sum_{k=1}^{k^{gi}} P_s y_{sgi}^k} \right). \quad (9)$$

7. Затем проводится размещения УСПИ в  $m_H + 1$  точках, как описано выше. Это делается до тех пор, пока на каком-то шаге не получат увеличение критерия (9).

Тогда нужно вернуться к предыдущему варианту размещения УСПИ, но с количеством УСПИ на единицу меньше.

В результате решения этой задачи получаем:

– множество индексов размещения УСПИ  $I^{II} = \{i; i = \overline{1, i'}; \forall x_i = 1\}$ ;

– подмножества СИ в точках контроля, присоединяемых к каждому УСПИ

$$G_g^{SI} = \{g; g = \overline{1, g^n}; i = \overline{1, i'}; g \neq i; \forall y_{gi}^k = 1; s = \overline{1, s^g}\};$$

– пути соединения точек  $g$  и  $i$   $I^{gi} = \{k; k = \overline{1, k^{gi}}; i \in TSIUCH'; g \in TKUUCH_g^{SI}; g \neq i; \forall y_{gi}^k = 1\}$ .

Аналогично изложенному проводится размещение коммутирующих устройств в пунктах контроля на первом уровне приведенной на рис. 1 иерархии. Только здесь для размещения КУ необходимо учитывать интервальную оценку стоимости КУ, а также то, что все КУ присоединяются к серверу, который находится в фокусе иерархии.

**Результаты применения метода.** В качестве примера был рассмотрен и промоделирован участок региональной системы газоснабжения низкого давления (рис. 2), для которого был проведен синтез системы мониторинга и решалась задача о расположении УСПИ.

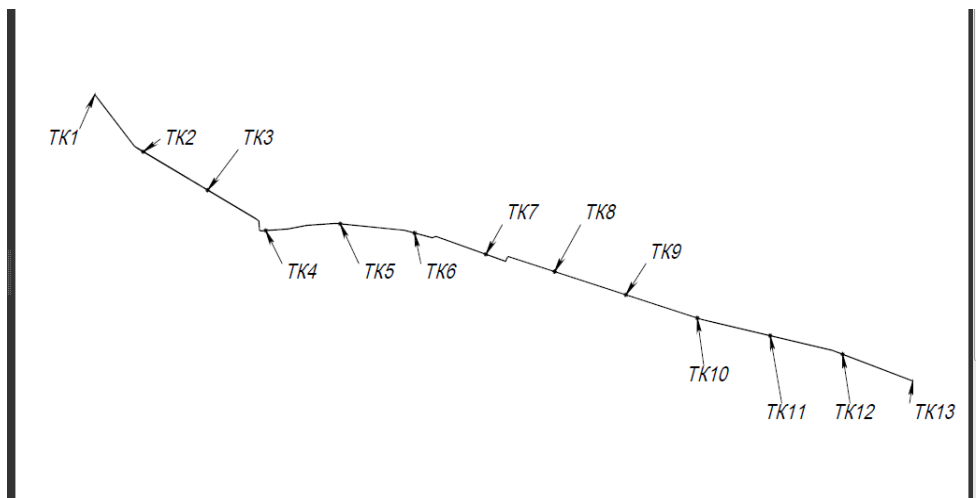


Рис. 2 – Пример участка региональной системы газоснабжения.

За счет использования представленного метода, критериев, ограничений и компьютерной технологии были

получены таблицы расстояний и определены места размещения и количество УСПИ для участка (табл. 1), где серым цветом выделен рациональный вариант количества УСПИ на участке (три), допустимые точки их размещения и списки подключаемых к ним средств измерений.

Таблица 1 – Сводная таблица расстояний для участка низкого давления

Количество УСПИ на участке низкого давления	Интервал допустимых точек установки УСПИ	Рациональные точки установки УСПИ	Суммарная длина линий связи, м
1	TK1-TK13	TK7	6931
2	1-ый вариант TK1-TK6; TK7-TK13	TK3, TK4+TK10	3467
	2-ой вариант TK1-TK7; TK8-TK13	TK4+TK10,TK11	3467
3	1-ый вариант TK1-TK4; TK5-TK8; TK9-TK13	TK2, TK3+TK6, TK7+TK11	2313
	2-ой вариант TK1-TK4; TK5-TK9; TK10-TK13	TK2, TK3+ TK7 + TK11,TK12	2313
	3-ий вариант TK1-TK5; TK6-TK9; TK10-TK13	TK3 +TK7, TK8+ TK11,TK12	2313

Для иллюстрации проведенных расчетов приведем графическую модель (рис. 3), на которой наглядно в виде графа показаны варианты места установки трех УСПИ на участке низкого давления.

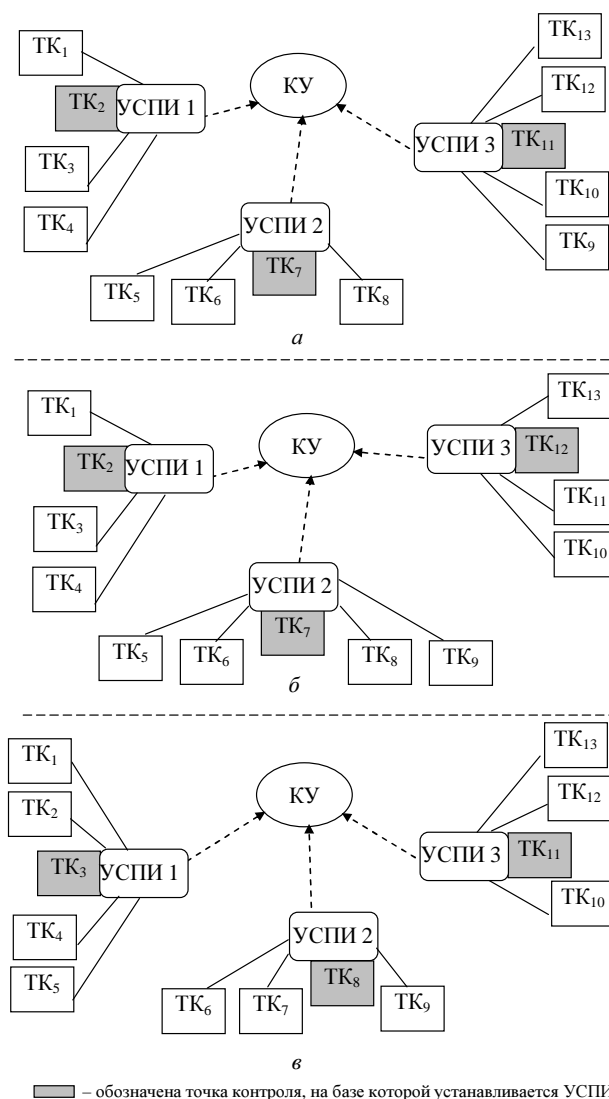


Рис. 3 – Графическое представление структурно-топологической организации СМРГ на участке низкого давления: а – 1-й вариант; б – 2-й вариант; в – 3-й вариант.



Поскольку расстояние между средствами измерений в одной точке контроля достаточно мало, при выборе места установки УСПИ рассматривалось расстояние от точки контроля до пункта с УСПИ, но с учетом ограничения (7). То есть средства измерений, которые находятся в одной точке контроля, не должны быть присоединены к разным пунктам  $i$ .

Стоимость самого УСПИ при использовании предложенного метода оценивать несколько сложно, и лицо, принимающее решения, оперирует, в этом случае, нечеткими исходными данными, поскольку ценовая политика привязана к курсу иностранной валюты, следовательно, возможны резкие изменения экономических условий. Однако для задач малой размерности (с количеством точек контроля до 8), когда затрачиваемое на решение время относительно мало, найденный результат действительно является оптимальным.

Для решения задач такого класса используют следующие методы: *метод направленного перебора* для задач небольшой размерности; *метод случайного поиска* для задач большой размерности. Для частных случаев, когда количество абонентов системы не превышает десяти, возможно использование *метода полного перебора*.

**Перспективы дальнейших исследований.** Авторы считают перспективными пути исследования, связанные с разработкой методов для синтеза СМРГ, должны быть направлены на применение и развитие модели приведенной в [10] для системы мониторинга регионального газоснабжения с учетом ее четырехуровневой структуры.

Следует также заметить, что разработанный метод, в отличие от существующих, позволяет учесть нечеткость исходных данных и получить оптимистическое и пессимистическое решения, а также и по критерию оптимизма-пессимизма Гурвица [1], и выбрать рациональный вариант в зависимости от конкретной ситуации.

**Выводы.** Таким образом, в данной работе предложен метод определения мест возможного размещения УСПИ и вариантов топологии присоединения средств измерений к УСПИ при синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения. На основе проведенных расчетов с использованием предложенного метода можно отметить, что при размещении трёх УСПИ на участке низкого давления протяженность линий связи была уменьшена на 33,3% по сравнению с размещением двух УСПИ, что позволяет снизить затраты на линии связи.

**Список литературы:** 1. Shevchenko M. V. The generalized model of organization and planning of regional gas supply monitoring // Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi. – 2015. – 3 (47). – P. 52 – 62. 2. Monitoring and Evaluation and Management Information Systems (MIS)/Module 4. – Режим доступа: \www/ URL: <http://www.pathfinder.org/publications-tools/pdfs/Strengthening-You-Organization-A-Series-of-Modules-and-Reference-Materials-for-NGO-and-CBO-Managers-and-Policy-Makers-Monitoring-and-Evaluation-and-MIS.pdf>. – Дата звертання: 24 березня 2016. 3. Фатхутдинов Р. А. Организация производства. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 672 с. 4. Биньковская А. Б. Информационное обеспечение синтеза компьютерной сети офисов транспортных систем // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – №1. – 2014. – С. 78–82. 5. Петров Э. Г., Пискалова В. П., Бескоровайный В. В. Территориально распределенные системы обслуживания. – К.: «Техніка», 1992. – 208 с. 6. Бескоровайный В. В. Синтез топологии территориально распределенных систем с кольцевыми структурами // Радиоелектроніка. Інформатика. Управління. – №1 (11). – 2004. – С. 50 – 54. 7. Неведов Л. И., Шевченко М. В., Кудырко О. Н. Модель структурно-топологического синтеза системы мониторинга качества добычи газа // Науковий журнал «ScienceRise». – 2014. – №2 (2). – С. 61 – 67. 8. Бескоровайный В. В., Имангулова З. А., Петрова А. И. Оптимизация количества и местоположения распределительных центров транспортно-складской системы // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – №5/3 (59). – 2012. – С. 24 – 28. 9. Розенберг И. Н. Однокритериальная минисуммная задача размещения центра обслуживания с лингвистическими переменными // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – №2 (31). – 2003. – С. 56 – 63. 10. Неведов Л. И., Шевченко М. В., Петренко Ю. А., Биньковська А. Б. Модель визначення місць розміщення комутуючих пристроїв та варіантів топології при синтезі КМ // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/2 (47). – С. 33 – 36. 11. Шевченко М. В. Частные модели организации мониторинга регионального газоснабжения // Технологический аудит и резервы производства. – 2015. – № 6/2 (26). – С. 40 – 46.

**References:** 1. Shevchenko, M. V. The generalized model of organization and planning of regional gas supply monitoring. *Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi*. 2015, no. 3 (47), pp. 52–62. 2. Module 4. Monitoring and Evaluation and Management Information Systems (MIS). Available at: <http://www.pathfinder.org/publications-tools/pdfs/Strengthening-You-Organization-A-Series-of-Modules-and-Reference-Materials-for-NGO-and-CBO-Managers-and-Policy-Makers-Monitoring-and-Evaluation-and-MIS.pdf>. (accessed 24.03.2016). 3. Fathutdinov, R. A. Organizatsiya proizvodstva [Organization of production]. Moscow, INFRA-M. Publ., 2002. 672 p. 4. Binkovskaya, A. B. Informatsionnoe obespechenie sinteza kompyuternoy seti ofisov transportnykh sistem [Information support of synthesis of transport systems office computer network]. *Informatsiyno-keruyuchi sistemi na zaliznichnomu transporti* [Information-control systems for railway transport]. 2014, no. 1, pp. 78–82. 5. Petrov, Je. G., Piskalova, V. P. and Beskorovajnyj, V. V. Territorial'no raspredelennye sistemy obsluzhivaniya [Territorially distributed service systems]. Kiev, "Tehnika" Publ., 1992. 208 p. 6. Beskorovajnyj, V. V. Sintez topologii territorial'no raspredelennykh sistem s kol'cevymi strukturami [Synthesis of topology of territorially distributed systems with ring structures]. *Radioelektronika. Informatika. Upravlinnja* [Radioelectronics. Informatics. Control]. 2004, no. 1 (11), pp. 50–54. 7. Nefedov, L. I., Shevchenko, M. V. and Kudyrko, O. N. Model' strukturo-topologicheskogo sinteza sistemy monitoringa kachestva dobychi gaza [Model of structural and topological synthesis of gas extraction quality monitoring system]. *International scientific Journal "ScienceRise"*. 2014, no. 2 (2), pp. 61–67. 8. Beskorovajnyj, V. V., Imangulova, Z. A., and Petrova, A. I. Optimizatsiya kolichstva i mestopolozheniya raspredelitel'nykh centrov transportno-skladskoj sistemy [Optimization of amount and location of distributive centers of transport-warehouse system] *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovykh tehnologij* [East European Journal of Advances Technologies]. 2012, no. 5/3 (59), pp. 24–28. 9. Rozenberg, I. N. Odnokriterial'naja minisummnaja zadacha razmeshheniya centra obsluzhivaniya s lingvisticheskimi peremennymi [One-criterion problem of sum minimization for placing service center with linguistic variables]. *Izvestiya Juzhnogo federal'nogo universiteta. Tehnicheskie nauki* [Communications of South Federal University. Engineering Sciences]. 2003, no. 2 (31), pp. 56–63. 10. Nefodov, L. I., Shevchenko, M. V., Petrenko, Ju. A. and Bin'kovsk'ka, A. B. Model' viznachennya mist'v rozmischennya komutuyuchikh pristroyiv ta variantiv topologiyi pry sintezi KM [Model of placing commutation devices and determining topology options in the synthesis of CN]. *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovykh tehnologij* [East European Journal of Advances Technologies]. 2010, no. 5/2 (47), pp. 33–36. 11. Shevchenko, M. V. Chastnye modeli organizacii monitoringa regional'nogo gazosnabzheniya [Local models of organizing regional gas supply monitoring]. *Tehnologicheskij audit i rezervy proizvodstva* [Technological audit and production reserves]. 2015, no. 6/2 (26), pp. 40–46.

Поступила (received) 03.04.2016

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Нефьодов Леонід Іванович** – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, зав. каф. АКІТ, м. Харків; тел.: (057) 738-77-92; e-mail: nefedovli@rambler.ru.

**Нефедов Леонид Иванович** – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, зав. каф. АКІТ, г. Харьков; тел.: (057) 738-77-92; e-mail: nefedovli@rambler.ru.

**Nefedov Leonid Ivanovich** – Doctor of Technical Science, Professor, Head of the Department of Automation and Computer-Integrated Technologies, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 738-77-92; e-mail: nefedovli@rambler.ru.

**Шевченко Марія Валеріївна** – Кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 738-77-92; e-mail: BECHA\_MV@mail.ru.

**Шевченко Мария Валерьевна** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (057) 738-77-92; e-mail: BECHA\_MV@mail.ru.

**Shevchenko Mariia Valer'evna** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 738-77-92; e-mail: BECHA\_MV@mail.ru.

УДК 629.429.3:621.313

**О. М. ПЕТРЕНКО, Б. Г. ЛЮБАРСЬКИЙ, М. Л. ГЛЄБОВА**

### АЛГОРИТМ СИНТЕЗУ ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ РУХОМ ЕЛЕКТРОРУХОМОГО СКЛАДУ НА ОСНОВІ РІШЕННЯ РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА-ЯКОБІ-БЕЛЛМАНА

У даній роботі розроблено алгоритм рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для задачі руху електрорухомого складу на ділянці шляху із заданим профілем і графіком руху, що дозволяє створити експертну систему управління рухом. Особливостями цього алгоритму є застосування штрафних функцій для опису обмежень, що накладаються графіком руху: досягнення потягом кінцевого пункту за заданий час руху, обмеження швидкості на ділянках шляху.

**Ключові слова:** експертні системи ведення транспортного засобу, алгоритм рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана, штрафні функції, опір руху, витрати енергії при русі електрорухомого складу.

**Вступ.** Для вирішення задачі оптимального руху нами пропонується будівництво експертної системи ведення електрорухомого складу (ЕРС) на ділянці шляху, яка дозволяє визначити оптимальний закон зміни режимів роботи рухомого складу на основі критерію витрати енергії при заданій середній швидкості руху.

На основі експертних систем ведення транспортного засобу на ділянці шляху при різних середніх швидкостях руху вибирається оптимальна середня швидкість руху на основі комплексного критерію ефективності, запропонованого і обґрунтованого в роботах [1 – 4].

**Аналіз останніх досліджень.** Теорія оптимального управління є в нашій дні галуззю науки, що розвивається не менш інтенсивно, ніж раніше. Оптимальне управління є потужним інструментом, який дає можливість вирішувати складні завдання управління, у тому числі й керування рухом РС на залізничному транспорті.

У роботах [5 – 9] автор стверджує, що хоча задачі у безперервній часовій області можуть бути вирішені за допомогою традиційних методів, таких як *метод Лагранжа* і *нелінійного програмування*, але, якщо проблеми, сформульовані в дискретній формі шляхом ділення часу (чи відстані) на кінцеве число інтервалів, моделі реального часу (чи простору) можливо використати в якості експертної системи управління рухом ЕРС. Для даного завдання, часова область розділена на кінцеве число інтервалів часу.

Загальною проблемою стохастичного управління є складність рішення і експоненціальна залежність зростання потреби у кількості пам'яті і обчислювального часу. Причина в тому, що стан об'єкту дослідження має бути представлений у вигляді дискретної області координат, що і призводить до експоненціального зростання кількості розрахункових точок, що вимагає експоненціально наростаючу кількість обчислень [6]. В цьому випадку *рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана*, а конкретніше – *зворотний підхід Беллмана*, дозволяє отримати рішення при прийнятній кількості обчислень. Зворотний підхід Беллмана є методом, який вирішує дискретне перетворення систем реального часу [8]. Оскільки вирішувана задача у своїй основі представляє завдання оптимального управління у безперервній часовій області, необхідно представити формулювання загальної задачі оптимального управління в реальному часі.

**Постановка завдання.** Розробити алгоритм синтезу експертної системи управління рухом електрорухомого складу на основі вирішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана.

**Основні дані, що використовуються при рішення задачі.** Основний принцип алгоритму полягає в побудові матриці, яка міститиме мінімальні витрати на шлях (у кінці шляху і часу) для кожної комбінації пройденого часу, пройденої відстані та поточної швидкості [10].

Після цього матриця ініціалізується і заповнюється у зворотному напрямі, вона стає основним інструментом, за допомогою якого буде отримана оптимальна послідовність управляючих входів і значень оптимальної швидкості. Процес, за допомогою якого це досягається, буде пояснений детально.

Окрім матриці витрат на шлях  $J^*$ , необхідно згенерувати і використати ще дві матриці того ж розміру. Це матриці *оптимального управління* і *оптимальної швидкості* на наступному часовому кроці. Ці дві матриці використовуються для того, щоб забезпечити аналіз результатів руху електрорухомого складу (ЕРС).

Для першої задачі, навіть якщо алгоритм працює швидко, немає необхідності його запускати кожного разу при рішенні задачі руху ЕРС, імітуючи роботу машиніста. Усі матриці, пов'язані з програмою, можуть бути побудовані заздалегідь, складаючи при цьому базу даних експертної системи. Процес простого зчитування матриць і обчислення оптимальної послідовності швидкостей відбувається набагато швидше і може бути оперативно використаний при моделюванні руху на кожному кроці інтегрування. Це можливо, тому що матриці, пов'язані з програмою, включають усі можливі стани (час, пройдений шлях і поточну швидкість), таким чином результати будуть достовірними для необхідного конкретного стану ЕРС, тоді як база даних експертної системи створена заздалегідь. Створені матриці відносяться до конкретної ділянки шляху між двома послідовними станціями з урахуванням заданого графіку руху.

Відносно другої мети, результати цього алгоритму навряд чи можливо представити у виді, простішому для сприйняття і розуміння, ніж вже наявний. Результатами роботи програми є швидкість, яку повинен мати потяг на кожному часовому кроці, від поточного часу до кінця шляху, а також управляючі дії, за допомогою яких це значення швидкості буде досягнуто.

Саме тому, що розмір матриць є настільки великим, зворотний розрахунок представляється єдиним способом реалізації програми, що забезпечує її виконання і отримання результатів за розумний час.

Як стверджує [11], кількість операцій, що знадобилися б у разі вибору прямого підходу, була б невинновдано великою, близько  $T \cdot V^T \cdot X$  (число значень часу  $T$ , значень швидкостей  $V$  і значень положення  $X$ ).

При зворотному підході, число необхідних операцій, що є кількістю розрахованих переходів, складе приблизно  $T \cdot X \cdot V^2$ . Зворотний підхід вимагає набагато меншої обчислювальної потужності, ніж прямий. Значна різниця у витратах обчислювальних ресурсів, необхідних для цих двох підходів, значно впливає на час розрахунків, що виконує програма, при кожному до неї зверненні.

*Побудова матриці оптимальних витрат на шлях ( $J^*$ ).* Ця матриця містить дані про мінімальні витрати, з якими потяг може досягти пункту призначення, враховуючи поточний стан, в якому знаходиться потяг (пройдений час, пройдений шлях і поточну швидкість).

Спосіб, по якому ця матриця була побудована, включає штрафи для неможливих або небажаних станів (таких, як ненульова швидкість при кінцевому часі та положенні). При ініціалізації матриці, бажаному кінцевому стану (коли кінцевому часу і положенню відповідає нульова швидкість) привласнюються нульові витрати на шлях, тоді як для усіх інших станів в кінцевому часовому зрізі призначається штраф; це гарантує, що в якості кінцевого стану буде обрано бажане. Таким чином, ініціалізація матриці фактично включає призначення витрат на її кінцевому часовому зрізі. Потім матриця заповнюється у зворотному напрямі згідно з процесом, який буде описаний нижче в цій публікації.

Крім того в цій матриці закладається обмеження швидкості руху на певних ділянках шляхом установки штрафів для усіх значень часу при тих швидкостях, що перевищують допустимі швидкості руху для певної ділянки шляху.

*Матриця оптимальної швидкості наступного часового кроку ( $V_{op}$ ).* Ця тривимірна матриця має ту ж розмірність, що і матриця ( $J^*$ ) оптимальних витрат на шлях. Для кожної комбінації пройденого часу, пройденої відстані та поточної швидкості, ця матриця містить оптимальне значення швидкості, яку повинен мати потяг після одного часового кроку. Матриця значень оптимальної швидкості наступного часового кроку виведена з матриці оптимальних витрат на шлях. Матриця  $V_{op}$  тієї ж розмірності, що і матриця  $J^*$ .

*Матриця оптимальних входів управління ( $U$ ).* Ця тривимірна матриця тієї ж розмірності, що і попередні, містить оптимальні входи управління для кожного елемента. Як і в попередніх матрицях, кожен елемент оптимальних входів управління відповідає конкретному пройденому часу, пройденої відстані і поточному значенню швидкості.

При розрахунку усіх можливих переходів від одного стану ЕРС в просторовій області  $J^*$ , для кожного з них розраховується необхідна сила тяги ЕРС. На підставі цієї сили і швидкостей руху на початку й наприкінці переходу визначається режим управління, що дозволяє реалізувати такий перехід. Оскільки результати розраховуються за допомогою деяких наближень, входи управління також визначаються наближено.

Розглянемо простий приклад вибігу.

У ідеальному випадку, коли вчислені усі можливі опори, тягове зусилля і витрата енергії під час вибігу потягу дорівнюватимуть нулю. У реальності, це значення близьке, але не дорівнює нулю. Зважаючи на викорис-

тані наближення і опори, не враховані в розрахунках, припускаємо, що режим вибігу має місце при тяговому зусиллі від 0 до 10 кН. Враховуючи усі прийняті допущення і ґрунтуючись на [10], обираємо режим руху – *вибіг*.

Отже, на підставі усіх вищевикладених фактів можна стверджувати, що матриця управління виводиться на основі матриці оптимальної швидкості для наступного часового кроку. Ця матриця має ту ж розмірність, що і попередні дві. Кожен її елемент містить оптимальну управляючу дію для кожного з можливих станів. Бажаний кінцевий стан (нульова швидкість) містить управляючу дію, що відповідає механічному гальмуванню.

Оптимальна траєкторія швидкості є одним з кінцевих масивів, що його повертає програма, який фактично дає оптимальну послідовність швидкості від поточного часового кроку (як визначено з вхідних значень) до кінцевого кроку часу, коли потяг прибуває до місця призначення з мінімальними витратами.

Цей масив розраховується процедурою в програмі, яка веде пошук по матриці  $V_{op}$ . Коли початкова точка зафіксована (задана користувачем), програма переходить до матриці  $V_{op}$  і перевіряє оптимальне значення швидкості для наступного часового кроку. Пройдена відстань буде вчислена з урахуванням значень швидкості на поточному часовому кроці. Після цього будуть отримано нове поєднання часу (яке буде наступним часовим кроком), відстані (яка була розрахована) і поточної швидкості (з матриці  $V_{op}$ ). Використовуючи ті ж кроки до остаточного часу  $T$ , розраховуватиметься оптимальна траєкторія швидкості.

*Оптимальна траєкторія управління* – це масив, який повертає траєкторію управляючих дій (входів) для кожного часового кроку до кінця поїздки, так само, як у разі оптимальної траєкторії швидкості. Він розраховується по тій же підпрограмі, що і оптимальна траєкторія швидкості, але при зчитуванні матриці  $U$ , яка містить оптимальні управляючі входи для кожної комбінації поточного часу, положення і швидкості. Точки, які будуть вибрані для остаточної траєкторії, розраховуються як описано вище (для наступного кроку швидкості), але в цьому випадку повертається значення, яке зберігається в матриці  $U$ , замість матриці  $V_{op}$ .

**Установка початкових умов і підготовка початкових даних при рішенні задачі.** Оскільки обчислення виконуються в зворотному порядку в часі, матриця ініціюється також у зворотному напрямі. Це означає, що першими мають бути заповнені ті елементи матриці, які належать до кінцевого зрізу часу.

Кінцевий зріз часу є матрицею  $X \times V$ , що містить усіх можливі комбінації значень швидкості і положення, які описують стан потягу в кінцевий момент часу  $T$ . Оскільки бажаний кінцевий стан відповідає триплет  $(T, X, 0)$ , в цьому стані значенню витрат на шлях буде присвоєний нуль.

Інші елементи, які належать до кінцевого часового зрізу, є або положенням, відмінним від кінцевого в кінцевий момент часу, або ненульовою швидкістю та (або) положенням в кінцевий момент часу.

Для станів, які містять ненульову швидкість для кінцевого часу і місця розташування, призначається великий штраф (на порядки більший значення споживання енергії в порівнянні зі значеннями, отриманими в результаті розрахунків), як і для випадків, коли потяг не зупиняється після закінчення ділянки шляху.

Для станів, що містять будь-які значення положення, відмінні від кінцевого ( $X$ ) в кінцевий час, також призначається штраф – потяг не досяг кінцевої станції вчасно.

Використання цього методу гарантує, що єдиною точкою, якій алгоритм віддасть перевагу на завершальному часовому відрізу, буде точка бажаного кінцевого стану  $(T, X, 0)$ . Також гарантується, що зворотний розрахунок буде запущений в потрібній точці. Це дійсно важливий крок в алгоритмі, потрібна багаторазова перевірка введених даних, щоб переконатися, що алгоритм розпочне роботу саме з цієї точки. Якщо буде вибрана інша точка замість бажаної, то увесь алгоритм поверне нездійсненні результати (потяг не зупиниться в кінцевій позиції, або не впишеться в обмеження за часом).

Бажаний кінцевий стан, якому зіставлені оптимальні витрати на шлях, прирівняні нулю. Усім іншим елементам кінцевого зрізу часу і кінцевого зрізу положення, були призначені штрафні значення. У кінцевий момент часу *або* в кінцевому положенні є тільки одна точка, яка повинна розглядатися, а саме та, в якій на кінцевий момент часу і в кінцевому положенні значення швидкості дорівнюватиме нулю.

Слід також відмітити, що штраф на ненульову швидкість у кінці шляху, призначається усім часовим сегментам і пов'язаний тільки з позицією, але не з часом. Обумовлена така вимога тим, що навіть якщо кінцева станція буде досягнута раніше, ніж передбачалося, в кінцевому положенні ( $X$ ) потяг *повинен* мати нульову швидкість, інакше він не зупиниться на станції. Навпаки, штраф за не досягнення місця призначення на кінцевий момент часу пов'язаний тільки з кінцевим станом, тому цей конкретний штраф ( $P2$ ) призначається тільки на кінцевому часовому зрізі тривимірної матриці.

Сенс введення штрафів полягає в потребі уникнути небажаних станів. Одним з небажаних станів є простоювання. Термін *простоювання* відповідає стану зупинки потягу посеред ділянки шляху. Цей стан може бути викликаний лише випадковими подіями, які не можуть бути розглянуті за допомогою алгоритму. Загалом, простоювання означає по-перше – марну трату часу, а по-друге – додаткові витрати енергії на повторний розгін з нульової швидкості. Що, як згадувалося в усіх подібних дослідженнях, є енерговитратною процедурою, якої слід уникати.

З причин, вказаних вище, на цьому етапі ініціалізації призначається штраф ( $P3$ ) для станів, які відповідають нульовій швидкості, за винятком станів початкового і кінцевого положення, в яких швидкість має бути нульовою, а також штрафи, що відповідають перевищенню швидкості, визначеної згідно графіку руху ЕРС.

**Синтез матриці оптимальних швидкостей і витрат енергії при русі ЕРС.** Для початкової точки переходу  $(t_s, x_s, v_s)$  (початковий час, положення і значення швидкості) і відповідно, кінцевої точки  $(t_f, x_f, v_f)$  переходу (кінцевий час, положення і значення швидкості) алгоритм розраховує ті переходи, які починаються в часовому зрізі  $T-1$  (один часовий крок до кінця) і приводять до кінцевого часового зрізу  $T$ .

Бажаний кінцевий стан настає при  $(t, x, v) = (T, X, 0)$ . Цей стан відповідає нульовим витратам на рух, так що алгоритм перших переходів розглядатиме цей стан, як оптимальну мету. Перевірка усіх елементів матриці відбувається з використанням трьох вкладених циклів. Оскільки алгоритм перевірки точок працює у зворотному напрямі по осі часу, а витрати остаточного часового зрізу вже задані, перший цикл пройде фіксований відрізок часу, починаючи з  $T-1$  і закінчуючи  $t=0$ .

Процес, який перевіряє усі переходи, починаючи з часового зрізу  $T-1$ , полягає в наступному.

Для розрахунку витрат на перехід необхідно обрати дві *унікальні точки* – початкову і кінцеву. Унікальна точка представлена унікальним набором  $(t, x, v)$ . Для першого кроку, де обчислюються переходи, що ведуть до кінцевого часу, початкові точки належать часовому зрізу  $T-1$ , а кінцеві точки відносяться до часового зрізу  $T$ . Для того, щоб перевірити усі елементи матриці, після циклу часу, описаного вище, додається другий цикл, що стосується значень положення. Цей другий цикл також працює у зворотному напрямі, цього разу по осі відстані, починаючи з кінцевої позиції  $x=X$  і закінчуючи початковою позицією  $x=0$ . Відразу після цього циклу запускається інший цикл, що цього разу стосується значень швидкості. Таким чином, будуть розглянуті усі можливі початкові точки для кожного  $t, x$  і  $v$ .

Що стосується переходів, що ведуть до кінцевого часу, безліч їх можливих вихідних точок описуються триплетом  $(T-1, x_s, v_s)$  для  $\forall x_s \in X, \forall v_s \in V$ . Після того, як вибрана початкова точка, розраховуємо переходи в усі можливі кінцеві точки. Після закінчення трьох циклів, які дають початкову точку, перевіряємо усі можливі кінцеві точки, просто додавши ще один цикл, який визначає усі можливі значення швидкостей в кінцевих точках, що дає можливість визначити усі можливі переходи з кожного елементу матриці.

Після знаходження початкової і кінцевої точок настає час для розрахунку витрат (енергії) для цього конкретного переходу.

Використовуючи значення початкового і кінцевого положення, початкової і кінцевої швидкості та значення часу для кроку, можна розрахувати силу тяги, яку повинен забезпечити потяг, щоб здійснити конкретний перехід. Необхідна сила тяги можливо визначити за методикою, наведеною в [1 – 4].

У алгоритм вводиться ще один одновимірний масив. Оскільки точка призначення кожного переходу визначається його координатою швидкості, можливі точки призначення з кожної точки матриці складуть таку ж множину, як і безліч різних значень швидкості. Оскільки  $\in V+1$  можливе значення швидкості у будь-який час, для кожної точки матриці витрат на рух існує  $V+1$  можливий перехід, і усі ці переходи мають бути розраховані. Новий масив, який вводиться тут, використовується тільки усередині циклів (локально) та пов'язаний з тією вихідною точкою матриці витрат на рух, яка кожного разу розглядається в даний момент. Він складається з 81 елементу. Кожен з цих елементів масиву містить суму енергії, необхідної для кожного з можливих переходів плюс витрати на рух до точки призначення, пов'язані із кожним з можливих переходів. Після того, як масив для цієї вихідної точки буде заповнений, оптимізація відбувається шляхом простого пошуку мінімального значення цього масиву. Це значення є оптимальними витратами енергії на рух з цієї точки до кінця лінії. Якщо витрата енергії, пов'язана з кожним з цих переходів, позначена як  $e(v_f)$ , тоді згаданий масив витрат визначається як

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f) + e(v_f), \quad v_f = 0, 1, 2, \dots, V. \quad (1)$$

У тому випадку, якщо перехід між двома точками не потрапляє всередину допустимого діапазону сил тяги, цьому конкретному переходу привласнюється істотно більше значення штрафних витрат енергії (штраф  $P4$ ) для сили тяги, що не реалізовується. В цьому випадку має місце:

$$e(v_f) = P4, \quad (2)$$

якщо  $v_f$  неможливо реалізувати. Тоді

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f) + P4. \quad (3)$$

Якщо даний перехід можливо здійснити на наступному кроці, слід перевірити режим, в якому знаходиться потяг у разі виникнення цього конкретного переходу. Режим визначається силою тяги, необхідної для переходу, а також початковим і кінцевим значенням швидкості на цьому переході. Потім, визначивши режим, пов'язаний з кожним переходом, можна вичислити витрати енергії на рух від початкової точки шляхом збільшення витрат переходу до значення витрат на рух до точки призначення.

Спосіб ідентифікації режиму і розрахунку витрат енергії засновано на положеннях, приведених в [9 – 11]. Розглянемо ці режими.

Згідно до роботи [9], оптимальна траєкторією руху може бути реалізована лише при застосуванні тільки одного з режимів роботи тягового приводу. Як відзначається в цій роботі, ґрунтуючись на досвіді ведення потягів, автори роблять висновки, що в якості основних режимів руху можна вибрати наступні:

- рух потягу з максимальною силою тяги (режим розгону);
- рух потягу з максимальною силою рекуперативного гальмування;
- режим вибігу;
- режим механічного гальмування;
- режим підтримки заданої швидкості руху.

Перший режим забезпечують найкращу підтримку заданого графіку руху потягу, проте характеризуються великими енергетичними витратами. Режим рекуперативного гальмування найбільш вигідний з точки зору економії енергії, проте, характеризується найбільшою інтенсивністю зниження швидкості. Крім того, застосування цього режиму неможливе на малих швидкостях руху через енергетичні обмеження ТД (неможливість створення необхідного рівня електрорушійної сили). Тому цей режим доповнюється на малих швидкостях механічним гальмуванням. Режим вибігу дозволяє здійснювати рух при відносно малих зниженнях швидкості без додаткових витрат енергії. Режим підтримки заданої швидкості здійснюється роботою тягового приводу в режимі тяги або гальмування з силою, що реалізується, рівній силі опору руху.

Проте останній режим може здійснюватися тяговим приводом ЕРС в умовах, що відрізняються від оптимальних для поточної швидкості руху. Тому в роботі в якості раціональних режимів роботи тягового приводу замість режиму підтримки заданої швидкості руху розглядається робота тягового приводу в режимі тяги і в режимі гальмування з максимальними значеннями ККД. Почергова робота приводу в цих режимах дозволить понизити витрати енергії при реалізації режиму підтримки заданої швидкості.

Для даного алгоритму рішення задачі Гамільтона-Якобі-Беллмана для руху ЕРС розглянемо реалізацію визначення витрат енергії та режимів руху.

**Режим вибігу.** Режим руху потягу впродовж переходу називається *вибігом* або *накатом*, коли тягова сила, необхідна для подолання переходу, складає від 0 до 10 кН. Це прийняте допущення описане вище. У ідеальному випадку накат здійснюється при силі тяги, необхідній для переходу, рівній нулю. Враховуючи прийняті припущення, в представленому алгоритмі сила тяги практично ніколи не дорівнюватиме нулю.

Коли потяг знаходиться в режимі вибігу, споживана енергія дорівнює нулю. Це означає, що всякий раз, коли перехід пройдений в режимі вибігу, витрати енергії на шлях, які мають бути присвоєні відповідному елементу локального масиву, є оптимальними витратами енергії на досягнення кінцевої точки цього конкретного переходу. Отже, коли режим переходу – вибіг, витрати, пов'язані з вихідною точкою обчислюються таким чином:

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f), \quad (4)$$

оскільки в цьому випадку

$$e(v_f) = 0. \quad (5)$$

**Режим розгону.** Потяг знаходиться в режимі прискорення, коли тягова сила, необхідна для переходу, складає від 10 кН до максимальної сили тяги, що реалізується двигунами.

Коли потяг знаходиться в режимі прискорення, то витратами енергії на рух, зіставленими з пов'язаним із ним елементом локального масиву, є витрати енергії в кінцевій точці плюс витрати на перехід. Таким чином, в цьому випадку витрати, пов'язані з вихідною точкою, отримують так:

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f) + e(v_f), \quad (6)$$

де, з  $e(v_f)$

$$e(v_f) = \frac{\text{sign}}{(\eta)^{\text{sign}}} \left( \frac{(1+\gamma)F_A + a_{rr} + b \cdot v_{avg} +}{+c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000}} \right) \cdot \frac{v_f + v_s}{2} \cdot tstep. \quad (7)$$

**Постійна швидкість.** Режим руху потягу з постійною швидкістю характеризується тим, що координата швидкості початкової точки дорівнює координаті швидкості точки кінцевої ( $v_s = v_f$ ).

Коли потяг знаходиться в режимі постійної швидкості, енергія розраховується точно так, як і в режимі прискорення, але оскільки швидкість постійна, сила прискорення дорівнює нулю, отже енергія витрачається тільки на подолання опору коченню – у випадку, що розглядається нами.

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f) + e(v_f), \quad (8)$$

де, в даному випадку

$$e(v_f) = \frac{\text{sign}}{(\eta)^{\text{sign}}} \left( \frac{a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 +}{+ \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000}} \right) * \frac{v_f + v_s}{2} * tstep \stackrel{v_f=v_s}{\Rightarrow}$$

$$e(v_f) = \frac{\text{sign}}{(\eta)^{\text{sign}}} \left( \frac{a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 +}{+ \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000}} \right) * v_f * tstep. \quad (9)$$

Значення  $sign$  визначається величиною сумарного опору руху

$$sign = \begin{cases} 1; & \text{якщо } a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000} \geq 1; \\ -1; & \text{якщо } a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000} < 1, \end{cases} \quad (10)$$

а значення ККД визначається максимальною для даного режиму руху величиною

$$\eta = MAX \eta(v_{avg}, F = a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000}). \quad (11)$$

**Режим гальмування.** ЕРС знаходиться в режимі гальмування, коли сила тяги, необхідна для переходу, є від'ємною. Більшість сучасних потягів мають можливість при певних обставинах рекуперувати енергію гальмування з поверненням її в мережу. Нами розглядаються два типи гальмування: рекуперативне і механічне.

**Рекуперативне гальмування.** Сучасний ЕРС з асинхронними ТД може рекуперувати енергію під час гальмування, поки швидкість перевищує 7 км/год. Це означає, що в представленому алгоритмі є дві умови для того, щоб прийняти режим рекуперативного гальмування на будь-якому переході:

- по-перше, тягове зусилля має бути від  $-F_k'$  до 0;
- по-друге, початкова та кінцева швидкість переходу мають бути не нижчі за 6 км/год.

Повернення енергії в мережу переводиться у від'ємне енергоспоживання, яке визначається за виразом (8) при  $v_{avg} > 6$  км/год.

**Механічне гальмування.** ЕРС перебуває в режимі механічного гальмування за умови, що сила тяги лежить в межах від  $-F_k'$  до 0 а середня швидкість переходу менша за 6 км/год.

При механічному гальмуванні потяг не економить, але і не споживає енергії. Тому під час механічного гальмування:

$$C(v_f) = J \cdot (t_f, x_f, v_f). \quad (12)$$

Після розрахунку усіх можливих переходів від одного елемента матриці, на наступному кроці алгоритму визначаємо оптимальний за критерієм мінімуму витрат енергії перехід, знаходячи мінімум в масиві  $C(v)$ :

$$C_{min} = MIN(C), \quad (13)$$

а також що відповідні цьому мінімуму швидкість у кінці переходу  $V_{op}$  і витрати енергії  $J^*$ , та режим роботи тягового приводу, необхідний для реалізації переходу  $U_{op}$ . Для формалізації задачі значення режиму роботи кодується згідно з виразом

$$U_{op} = \begin{cases} 1, & \text{режим розгону;} \\ 2, & a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000} \geq 1, \text{ режим постійної швидкості;} \\ 3, & a_{rr} + b \cdot v_{avg} + c \cdot v_{avg}^2 + \frac{c_{r0}}{R - c_{r1}} \cdot m + mg \frac{i}{1000} < 1, \text{ режим постійної швидкості;} \\ 4, & \text{вибіг;} \\ 5, & \text{рекуперативне гальмування;} \\ 6, & \text{механічне гальмування.} \end{cases} \quad (14)$$

Таким чином створюється експертна система, що включає базу даних – масиви оптимальних швидкостей руху  $V_{op}$ , режимів роботи ЕРС  $U_{op}$ .

Використовуючи розроблену експертну систему, рішення *тягової задачі* – отримання кривих руху реалізується шляхом інтегрування диференціальних рівнянь руху ЕРС, що наведені в [1]. Проте для їх вирішення потрібне визначення оптимальних значень ККД ЕРС, які, у свою чергу, залежать і від теплового стану ТД і його елементів.

**Перспективи подальших досліджень.** На основі розробленого алгоритму в подальшому планується розробити експертні системи для управління руху ЕРС на приміських, міжрегіональних та швидкісних ділянках шляху, а також провести аналіз роботи та теплового стану тягових асинхронних двигунів при різних системах охолодження та вентиляції.

**Висновки.** Таким чином, у даній роботі розроблено алгоритм рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для задачі руху ЕРС на ділянці шляху із заданим профілем і графіком руху, що дозволяє створити експертну систему управління рухом. Особливостями цього алгоритму є застосування штрафних функцій для опи-

су обмежень, що накладаються графіком руху, задля досягнення потягом кінцевого пункту за заданий час руху, обмеження швидкості на ділянках шляху, а також відсутності простоїв потягу в процесі руху. Єдиний підхід штрафних функцій застосований також для введення обмежень по зчепленню. Такий підхід дозволяє значно понизити витрати розрахункового часу і стандартизувати (спростити) процедури розрахунку витрат енергії.

**Список літератури:** 1. Любарський Б. Г. Теоретичні основи для вибору та оцінки перспективних систем електромеханічного перетворення енергії електрорухомого складу. – Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.22.09. – «Електро-транспорт». Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». – Харків, – 2014. – 368с. 2. Любарський Б. Г. Выбор типа тягового электромеханического преобразователя энергии для пригородного электропоезда // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова – Белгород: РИЦ БГТУ им. В.Г. Шухова, 2014. – № 3– С. 184 – 188 3. Lyubarskiy B. G. Selezionare il tipo di convertitore di energia di trazione elettrica per i treni elettrici interregionali // Italian Science Review, 2014. – 3 (12). – pp. 273 – 276. 4. Любарський Б. Г. Определение рационального угла наклона кузова скоростного электропоезда с тяговым приводом на основе реактивного индукторного двигателя с аксиальным магнитным потоком // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – 2014. – № 6 (1049). – С. 118 – 123. 5. Todorov, Emanuel. Optimal control theory. Bayesian brain: probabilistic approaches to neural coding (2006): pp. 269 – 298. 6. Kappen, Hilbert J. "Optimal control theory and the linear bellman equation." Inference and Learning in Dynamic Models (2011): – pp. 363 – 387. 7. Kanemoto, Yoshitsugu. Appendix IV: Optimal Control Theory. In: Kanemoto, Yoshitsugu. Theories of urban externalities. Vol. 6. North-Holland, (1980), p. 189. 8. Papageorgiou, M. Dynamic Programming (in Greek). Lecture Notes, Department of Production Engineering and Mangement, Technical University of Crete, Greece. (2010). 9. Мугиншеїн Л. А., Илютович А. У., Ябко И. А. Энергооптимальные методы управления движением поездов. – М. : Интекст, 2012. – 80с. Интекст, 2012. – 80с. 10. Panagiotis, Gkortzas Study on optimal trainmovement for minimum energy consumption. – Mälargalen University, School of Innovation, Design and Engineering, 2013. – 82 p. 11. Ma, Yi. Dynamic programming and the HJB equation. In *Optimal Control Lecture Notes*. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign Publ., 2008. pp. 121 – 150.

**References:** 1. Lyubarskiy, B. G. *Teoretichni osnovy dlya vyboru ta otsinky perspektyvnyh system elektromekhanichnogo peretvorenniya energiyi elektrorukhomogo skladu: dis. d-ra tekhn. nauk 05.22.09.* [The theoretical basis for the selection and evaluation of advanced systems of electromechanical energy conversion of electric rolling stock. Abstract of a thesis dr. eng. sci. diss.]. Kharkiv, 2014. 368 p. 2. Lyubarskiy, B. G. Vybor tipa tyagovogo elektromekhanicheskogo preobrazovatelya energiyi dlya prigorodnogo elektropoezda [Selecting the type of traction electromechanical energy converter for a suburban electric train]. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. V. G. Shuhova* [Bulletin of the V. G. Shukhov Belgorod State Technological University]. Belgorod, RITS BGTU im. V. G. Shuhova Publ., 2014, no. 3, pp. 184–188. 3. Lyubarskiy, B. G. Selezionare il tipo di convertitore di energia di trazione elettrica per i treni elettrici interregionali. *Italian Science Review*. 2014, no. 3 (12), pp. 273–276. 4. Lyubarskiy, B. G. Opredelenie ratsional'nogo ugla naklona kuzova skorostnogo elektropoezda s tyagovym privodom na osnovе reaktivnogo induktorного dvigatelya s aksial'nym magnitnym potokom [Determination of the rational angle of the body of a speed train with an electric traction drive based on the inductor jet engine with axial magnetic flux]. *Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute"]. 2014, no. 6 (1049). pp. 118–123. 5. Todorov, Emanuel. Optimal control theory. Bayesian brain: probabilistic approaches to neural coding. 2006, pp. 269–298. 6. Kappen, Hilbert J. Optimal control theory and the linear bellman equation. *Inference and Learning in Dynamic Models*. 2011, pp. 363–387. 7. Kanemoto, Yoshitsugu. Appendix IV: Optimal Control Theory. In: Kanemoto, Yoshitsugu. Theories of urban externalities. North-Holland Publ., 1980, vol. 6, 189 p. 8. Papageorgiou, M. Dynamic Programming (in Greek). Lecture Notes. Department of Production Engineering and Mangement. Technical University of Crete, Greece. 2010. 9. Muginsheyn, L. A., Ilyutovich, A. U. and Yabko, I. A. Energooptimal'nyie metody upravleniya dvizheniem poezdov [Methods of optimal energy for managing train traffic]. Moscow, Intekst Publ., 2012. 80 p. 10. Panagiotis, Gkortzas. *Study on optimal trainmovement for minimum energy consumption*. Mälargalen University, School of Innovation, Design and Engineering, 2013. 82 p. 11. Ma, Yi. Dynamic programming and the HJB equation. In *Optimal Control Lecture Notes*. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Illinois at Urbana-Champaign Publ., 2008. pp. 121–150.

Надійшла (received) 15.03.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Петренко Олександр Миколайович** – кандидат технічних наук, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: +30956882716; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

**Петренко Олександр Николаевич** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, г. Харьков; тел.: +30956882716; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

**Petrenko Oleksandr Mykolayovych** – Candidate of Technical Sciences, A. N. Beketov Kharkiv National University of Municipal Economy, Kharkov; тел.: +30956882716; e-mail: petersanya2007@mail.ru.

**Любарський Борис Григорович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.:+38679937569, e-mail: lboris19111972@mail.ru.

**Любарський Борис Григорьевич** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: +38679937569, e-mail: lboris19111972@mail.ru.

**Lyubarsky Boris Hryhorovych** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; тел.: +38679937569. lboris19111972@mail.ru.

**Глебова Марина Леонідівна** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: +30678635034; e-mail: lboris19111972@mail.ru.

**Глебова Марина Леонидовна** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, г. Харьков; тел.: +30678635034; e-mail: lboris19111972@mail.ru.

**Glebova Marina Leonidivna** – Candidate of Technical Sciences, Docent, A. N. Beketov Kharkiv National University of Municipal Economy, Kharkov; тел.: +30678635034; e-mail: lboris19111972@mail.ru.



Ю. А. ПЛАКСІЙ

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРЬОХЧАСТОТНОЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ КВАТЕРНІОННОЇ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА. ДРУГИЙ ТИП МОДЕЛІ

Запропонований новий тип неперервної моделі обертання твердого тіла, оснований на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одномоментно змінюються у часі. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Запропонована модель може бути застосована в якості еталонної для оцінювання похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

**Вступ і постановка задачі.** Розглядається алгоритмічний аспект забезпечення розв'язання задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних системах орієнтації* (БІСО). На теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації, орієнтованих на використання первинної інформації про обертання рухомого об'єкта на такті обчислень [1]. Оскільки в БІСО алгоритми визначення орієнтації виконують роль *аналітичної платформи*, дослідження похибок алгоритмів на етапі проектування БІСО і вибір найкращого алгоритма для конкретного об'єкта, що має здійснювати певні обертальні рухи, є актуальною практичною задачею.

Для оцінювання похибок алгоритмів визначення орієнтації зазвичай застосовують еталонні моделі обертання твердого тіла (дискретні і неперервні), які встановлюють зв'язок між кватерніоном орієнтації і *квазікоординатами* [2], що формуються на виході вимірювачів кутової швидкості на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ :

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}$  на осі зв'язаної системи координат.

Неперервні еталонні моделі забезпечують точний зв'язок між квазікоординатами (1) і кватерніоном орієнтації, оскільки при цьому результати моделювання не містять похибок від метода чисельного інтегрування рівнянь моделі, як це має місце у випадку *дискретних еталонних моделей* [3]. Широке застосування на практиці отримали неперервні еталонні моделі, основані на випадках точних розв'язків в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *кінчного руху* [4] та *регулярної прецесії* [5]). Модель регулярної прецесії також використовують для оптимізації алгоритмів [5]. Розширення класу неперервних еталонних моделей, відмінних від існуючих, є актуальною задачею точного аналізу алгоритмів.

Неперервна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятим аналітичним представленням кватерніона орієнтації моделі  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$ . Використання тригонометричних функцій (синусів і косинусів) кутів в представленні кватерніона автоматично забезпечує виконання умови його нормування  $\|\Lambda(t)\| = 1$ .

Проекції вектора кутової швидкості обертального руху, яким відповідає кватерніон орієнтації  $\Lambda(t)$ , знайдуться з оберненого кінематичного рівняння [2]:

$$\omega(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (2)$$

де  $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$ ,  $\tilde{\Lambda}(t) = (\lambda_0(t), -\lambda_1(t), -\lambda_2(t), -\lambda_3(t))^T$ ,  $\dot{\Lambda}(t) = d\Lambda(t)/dt$ .

Моделювання квазікоординат (1) відбувається за формулою:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де  $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt$ ,  $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt$ ,  $i = 1, 2, 3$  – компоненти вектора *позірною повороту*  $\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt$ ,

обчислені аналітично в моменти часу  $t_n$  і  $t_{n-1}$ .

Неперервні еталонні моделі обертання твердого тіла, відмінні від випадку регулярної прецесії, представлені в роботах [6, 7]. В роботі [8] запропоновано перший тип узагальненої трьохчастотної кінематичної моделі обертання твердого тіла. В даній роботі пропонується другий тип неперервної трьохчастотної моделі обертання твердого тіла, оснований на узагальненні тригонометричної кінематичної моделі, яка представлена в [3].

**Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі.** Задамо компоненти кватерніона орієнтації моделі обертання у загальному вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \lambda_1(t) = \eta \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t) - \xi \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \xi \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \lambda_3(t) = \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t),\end{aligned}\quad (4)$$

де  $\eta$ ,  $\xi$  – параметри, для яких має місце тотожність  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ ;  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$  – неперервні функції часу.

Для цього представлення кватерніона орієнтації у відповідності до формул (2) отримаємо, що проекції вектора модельної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= 0,5\dot{\varphi}(t) \sin(2\psi(t) + 2\phi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) + 0,5\dot{\varphi}(t) \sin(2\phi(t) - 2\psi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) - \\ &- \eta\dot{\phi}(t) \sin(2\psi(t)) \cos \varphi(t) - \xi\dot{\phi}(t) \sin(2\psi(t)) \sin \varphi(t) + 2\eta\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t)) \sin \varphi(t) - 2\xi\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t)) \cos \varphi(t) + \\ &+ 2\eta\dot{\phi}(t) \cos \varphi(t) + 2\xi\dot{\phi}(t) \sin \varphi(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\phi}(t) \sin(2\psi(t))(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)) + \dot{\phi}(t) \cos(2\psi(t)) \sin(2\phi(t))(\eta \cos \varphi(t) + \xi \sin \varphi(t)) + \\ &+ 2\dot{\psi}(t) \cos(2\phi(t))(\eta \cos \varphi(t) + \xi \sin \varphi(t)) - 2\dot{\phi}(t)(\eta \sin \varphi(t) - \xi \cos \varphi(t)); \\ \omega_3(t) &= 2\dot{\phi}(t)(\cos^2 \psi(t) \cos^2 \phi(t) + \sin^2 \psi(t) \sin^2 \phi(t)) - 2\dot{\psi}(t) \sin(2\phi(t)).\end{aligned}\quad (5)$$

Зауважимо що, на відміну від проекцій  $\omega_1(t)$  і  $\omega_2(t)$ , проекція  $\omega_3(t)$  не залежить від параметрів  $\eta$  і  $\xi$ .

Розглянемо кінематичну модель (4) в умовах, коли кути  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$  змінюються з часом лінійно, а саме:  $\varphi(t) = k_1 t$ ,  $\psi(t) = k_2 t$ ,  $\phi(t) = k_3 t$ . Маємо:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \lambda_1(t) = \eta \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) - \xi \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \xi \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t).\end{aligned}\quad (6)$$

За цих умов отримаємо у відповідності до (5) після нескладних перетворень проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= 0,25\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - \\ &- 0,25\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5\eta k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5\eta k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + \\ &+ \eta k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \eta k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2\xi k_3 \cos(k_1 t) + \xi k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\ &+ \xi k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2\xi k_3 \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= 0,25\eta k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\eta k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25\xi k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) + \\ &+ 0,25\eta k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5\eta k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5\eta k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) - \\ &- 0,25\xi k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5\xi k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5\xi k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + \\ &+ \eta k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \eta k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2\xi k_3 \sin(k_1 t) + \xi k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\ &+ \xi k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2\xi k_3 \cos(k_1 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t).\end{aligned}\quad (7)$$

Щоб отримати компоненти вектора позірного повороту  $\bar{\theta}(t)$ , проінтегруємо вирази для  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  на інтервалі  $[0, t]$ , в результаті маємо:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \\ &+ \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\xi k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_2)t) + \frac{0,5\eta k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) - \frac{0,5\eta k_1}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) - \\ &- \frac{0,25\xi k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,5\xi k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5\xi k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) - \\ &- \frac{\eta k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{\eta k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2\xi k_3}{k_1} \sin(k_1 t) + \frac{\xi k_2}{k_1 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_3)t) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) + \frac{2\xi k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1); \\
 \theta_2(t) = & - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25\eta k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\
 & - \frac{0,25\eta k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - \frac{0,25\eta k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \frac{0,5\eta k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5\eta k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) - \\
 & - \frac{0,25\xi k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5\xi k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) + \frac{0,5\xi k}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) + \\
 & + \frac{\eta k_2}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) + \frac{\eta k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) + \frac{2\xi k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1) - \\
 & - \frac{\xi k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{\xi k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2\xi k_3}{k_1} \sin(k_1 t); \\
 \theta_3(t) = & k_1 t + \frac{0,25k_1}{k_2 + k_3} \sin((2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,25k_1}{k_2 - k_3} \sin((2k_2 - 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_3} 2k_2 (\cos(2k_3 t) - 1). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Моделювання квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3) з використанням формул (8).

Отримаємо розрахункові формули компонент вектора позірнього повороту у випадку, коли  $\eta = 1$ ,  $\xi = 0$ . Відповідно до (6) компоненти модельного кватерніона при цьому мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\
 \lambda_2(t) &= \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t), \tag{9}
 \end{aligned}$$

а проєкції вектора кутової швидкості будуть такі:

$$\begin{aligned}
 \omega_1(t) &= 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
 & - 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2k_3 \cos(k_1 t) + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
 \omega_2(t) &= 0,25k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\
 & + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
 & + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
 \omega_3(t) &= k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Проєкції вектора позірнього повороту  $\bar{\theta}(t)$  знайдуться з формул (8) у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \theta_1(t) &= \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + \\
 & + \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5k_1}{2k_2 + k_1} (\cos((2k_2 + k_1)t) - 1) + \\
 & + \frac{0,5k_1}{2k_2 - k_1} (\cos((2k_2 - k_1)t) - 1) - \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_3)t) - 1) - \frac{k_2}{k_1 - 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_3)t) - 1) + \frac{2k_3}{k_1} \sin(k_1 t); \\
 \theta_2(t) &= - \frac{0,25k_1}{k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25k_1}{-k_1 + 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \\
 & - \frac{0,25k_1}{k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) - \frac{0,25k_1}{-k_1 - 2k_2 + 2k_3} (\cos((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 1) + \\
 & + \frac{0,5k_1}{k_1 - 2k_2} \sin((k_1 - 2k_2)t) - \frac{0,5k_1}{k_1 + 2k_2} \sin((k_1 + 2k_2)t) + \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} \sin((k_1 + 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_1 - 2k_3} \sin((k_1 - 2k_3)t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2k_3}{k_1} (\cos(k_1 t) - 1); \\
\theta_3(t) = & k_1 t + \frac{0,5k_1}{2k_2 + 2k_3} \sin((2k_2 + 2k_3)t) + \frac{0,5k_1}{2k_2 - 2k_3} \sin((2k_2 - 2k_3)t) + \frac{k_2}{k_3} (\cos(2k_3 t) - 1). \quad (11)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок представлення еталонної моделі при  $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$ . Отримаємо з (6) компоненти модельного кватерніона у вигляді:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) = & \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = -\sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \\
\lambda_2(t) = & \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t). \quad (12)
\end{aligned}$$

Для цієї кінематичної моделі проекції вектора абсолютної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) = & 0,25k_1 \sin((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((-k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \sin((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + \\
& + 0,25k_1 \sin((-k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((k_1 - 2k_2)t) - 0,5k_1 \cos((k_1 + 2k_2)t) + k_2 \cos((k_1 + 2k_3)t) + \\
& + k_2 \cos((k_1 - 2k_3)t) - 2k_3 \sin(k_1 t); \\
\omega_2(t) = & 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 - 2k_3)t) - 0,25k_1 \cos((k_1 + 2k_2 + 2k_3)t) + 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 - 2k_3)t) - \\
& - 0,25k_1 \cos((k_1 - 2k_2 + 2k_3)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 + k_1)t) - 0,5k_1 \sin((2k_2 - k_1)t) + k_2 \sin((k_1 + 2k_3)t) + \\
& + k_2 \sin((k_1 - 2k_3)t) + 2k_3 \cos(k_1 t); \\
\omega_3(t) = & k_1 + 0,5k_1 \cos((2k_2 + 2k_3)t) + 0,5k_1 \cos((2k_2 - 2k_3)t) - 2k_2 \sin(2k_3 t). \quad (13)
\end{aligned}$$

Якщо порівняти вирази (10) і (13) для проекцій векторів кутових швидкостей моделей, що відповідають кватерніонам орієнтації (9) і (12), то отримаємо, що друга проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (12) така сама, як перша проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (9), а перша проекція вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (12) відрізняється від другої проекції вектора кутової швидкості для кінематичної моделі (9) тільки знаком. Треті проекції векторів кутових швидкостей для обох кінематичних моделей однакові. Відповідні співвідношення мають місце і для компонент векторів позірних поворотів моделей.

Сукупність формул (8), (3) і (6), як і формул (11), (3), (9) задають *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  і такт обчислень  $\Delta t$ , отримаємо конкретну еталонну модель. Вибір параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  може бути оснований на результаті відповідних апроксимацій реального руху об'єкта.

**Чисельна реалізація узагальненої еталонної моделі.** Побудуємо еталонну модель на основі формул (11), (3), (9) для декількох значень параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  і такту обчислень  $\Delta t = 0,1$  с.

Для значень параметрів  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,005$  результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат  $\theta_{ni}^*$  від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 1 та рис. 2 відповідно. Залежності квазікоординат від часу мають періодичний характер. Як видно з рис.2, траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$  має такий же вигляд, як і траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ , також мають місце од-

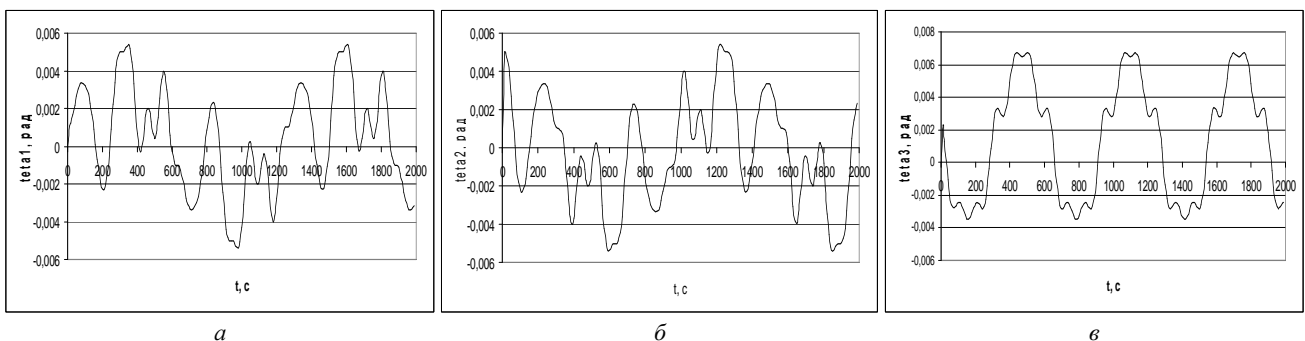


Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,005$ :

*a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

накові траєкторії  $\lambda_3(\lambda_1)$  і  $\lambda_3(\lambda_2)$ . Однак це ще не свідчить про те, що отримані в моделі залежності  $\lambda_1(t)$  і  $\lambda_2(t)$  однакові, оскільки траєкторія  $\lambda_2(\lambda_1)$  не представляє собою пряму лінію (бісектрису першої і третьої чверті), а має більш складну залежність (рис. 2, *з*). Кожна траєкторія має вісь симетрії.

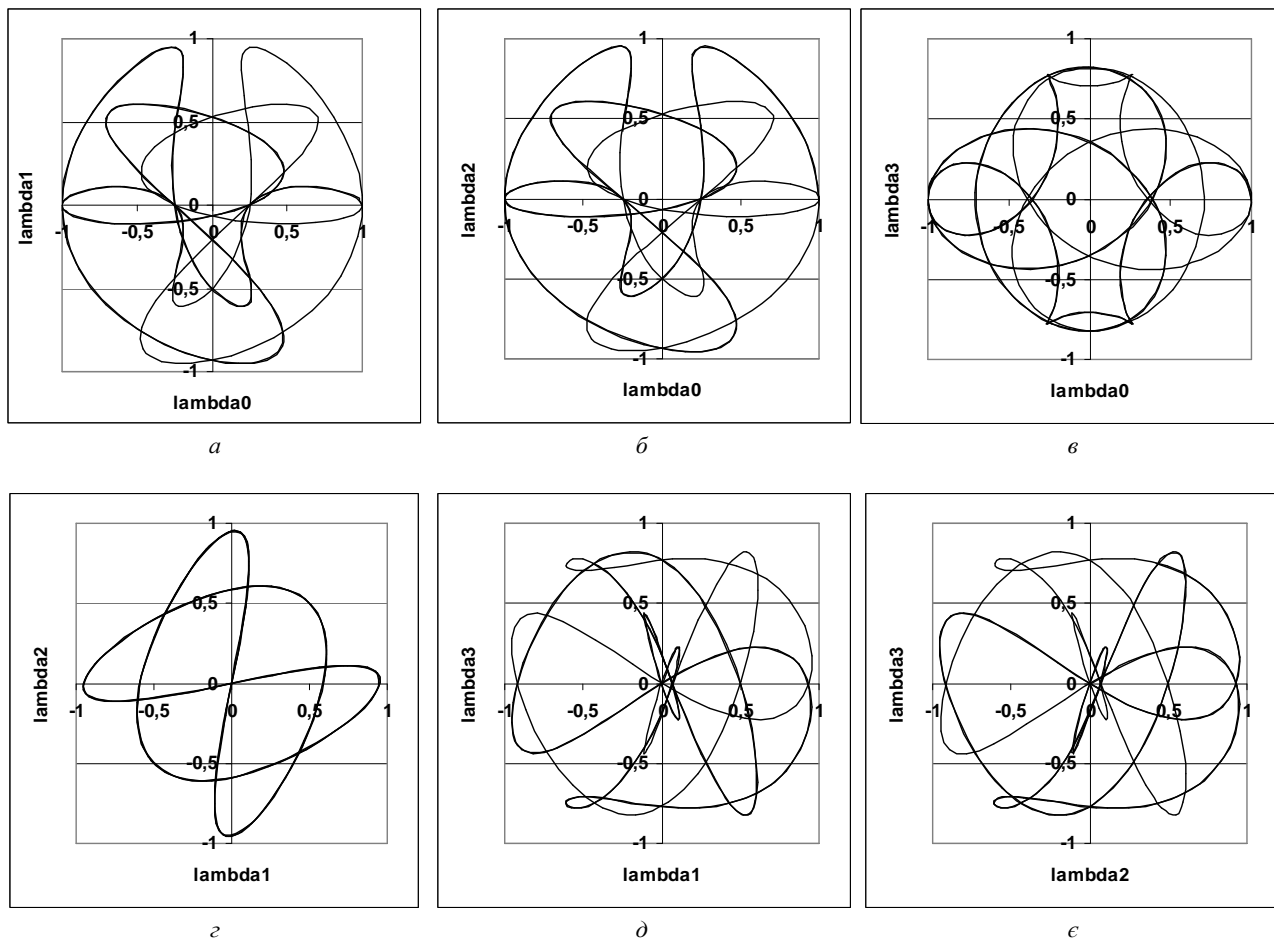


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,005$  :

$a - \lambda_1(\lambda_0)$ ;  $б - \lambda_2(\lambda_0)$ ;  $в - \lambda_3(\lambda_0)$ ;  $г - \lambda_2(\lambda_1)$ ;  $д - \lambda_3(\lambda_1)$ ;  $е - \lambda_3(\lambda_2)$ .

Залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,03$  на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3. Зауважимо, що аналогічний вигляд мають і залежності проєкцій модельної кутової швидкості від часу, бо в першому наближенні  $\theta_{ni}^* = \omega_i \Delta t$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку наведені на рис. 4. На відміну від попереднього випадку, всі отримані траєкторії мають різний вигляд. Характерно, що всі траєкторії окрім  $\lambda_3(\lambda_0)$  і  $\lambda_2(\lambda_1)$  є симетричними: траєкторії  $\lambda_1(\lambda_0)$  і  $\lambda_2(\lambda_0)$  симетричні відносно вертикальної осі, а траєкторії  $\lambda_3(\lambda_1)$  і  $\lambda_3(\lambda_2)$  – відносно горизонтальної осі.

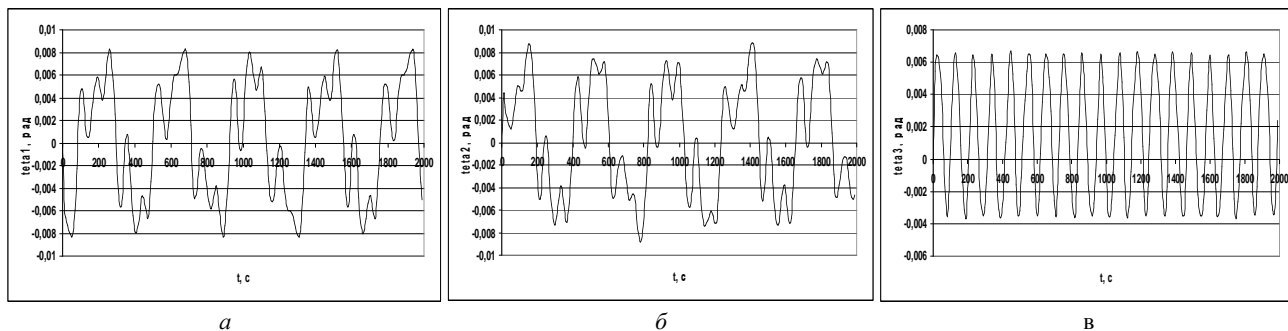


Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9)

при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,03$  :

$a$  – по першій осі;  $б$  – по другій осі;  $в$  – по третій осі.

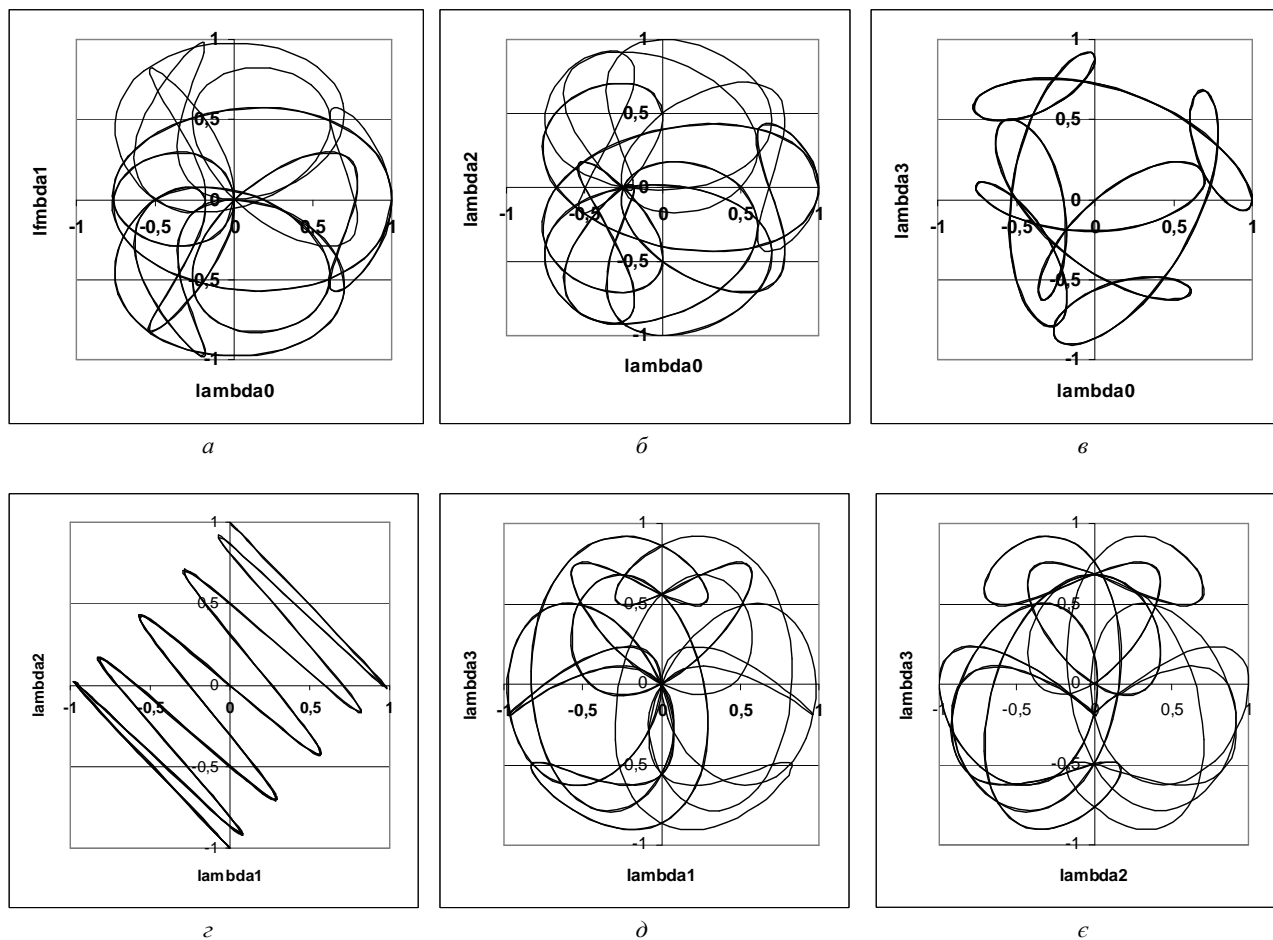


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,03$  :  
 $a - \lambda_1(\lambda_0)$ ;  $b - \lambda_2(\lambda_0)$ ;  $c - \lambda_3(\lambda_0)$ ;  $z - \lambda_2(\lambda_1)$ ;  $d - \lambda_3(\lambda_1)$ ;  $e - \lambda_3(\lambda_2)$ .

Представляють інтерес реалізації еталонних моделей при кратних значеннях параметрів. На рис. 5 представлені залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів  $k_1 = 0,048$ ,  $k_2 = 0,012$ ,  $k_3 = 0,012$  на інтервалі часу 2000 с. В даному випадку виконуються одночасно умови:  $k_2 = k_3$ ,  $k_1 = 2k_2 + 2k_3$ . На рис. 6 представлені отримані при цьому траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Всі траєкторії, окрім траєкторії  $\lambda_2(\lambda_1)$ , не мають симетрії. Як видно з рис. 6, траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$  має такий же вигляд, як і траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ , траєкторії  $\lambda_3(\lambda_1)$  і  $\lambda_3(\lambda_2)$  також однакові. Характер траєкторії  $\lambda_2(\lambda_1)$  на рис. 6, з свідчить про те, що залежності  $\lambda_1(t)$  і  $\lambda_2(t)$  для вказаних значень параметрів  $k_i$  ідентичні. На відміну від наведених вище реалізацій еталонної моделі (11), (3), (9) отримані траєкторії в цьому випадку мають *регулярний* характер.

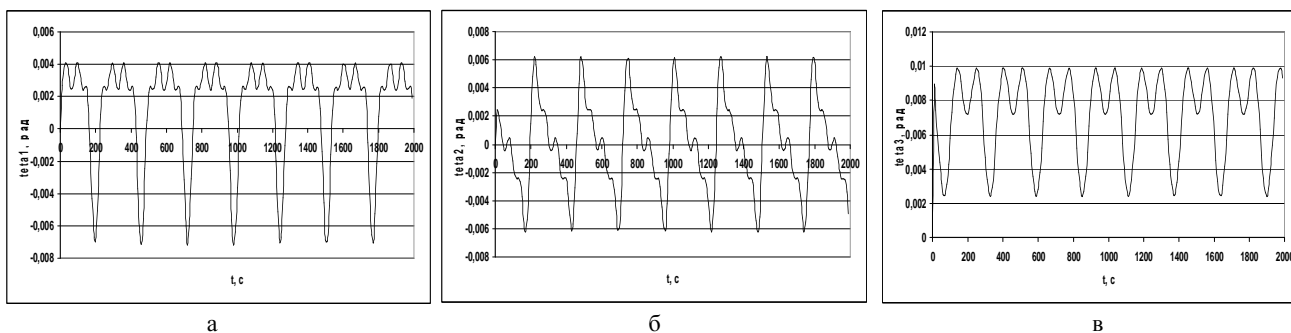


Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при  $k_1 = 0,048$ ,  $k_2 = 0,012$ ,  $k_3 = 0,012$  :  
 $a -$  по першій осі;  $b -$  по другій осі;  $v -$  по третій осі.

На рис. 7 представлені залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі (11), (3), (9) при значеннях параметрів  $k_1=0,005$ ,  $k_2=0,025$ ,  $k_3=0,025$  на інтервалі часу 2000 с. Для цього випадку має місце умова  $k_2 = k_3$ .

Траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведені на рис. 8. Як і в попередньому випадку, траєкторії  $\lambda_1(\lambda_0)$  і  $\lambda_2(\lambda_0)$  мають однаковий вигляд, траєкторії  $\lambda_3(\lambda_1)$  і  $\lambda_3(\lambda_2)$  також однакові. Характер траєкторії  $\lambda_2(\lambda_1)$  на рис. 8, з дозволяє зробити висновок, що залежності  $\lambda_1(t)$  і  $\lambda_2(t)$  для вказаних значень параметрів  $k_i$  ідентичні.

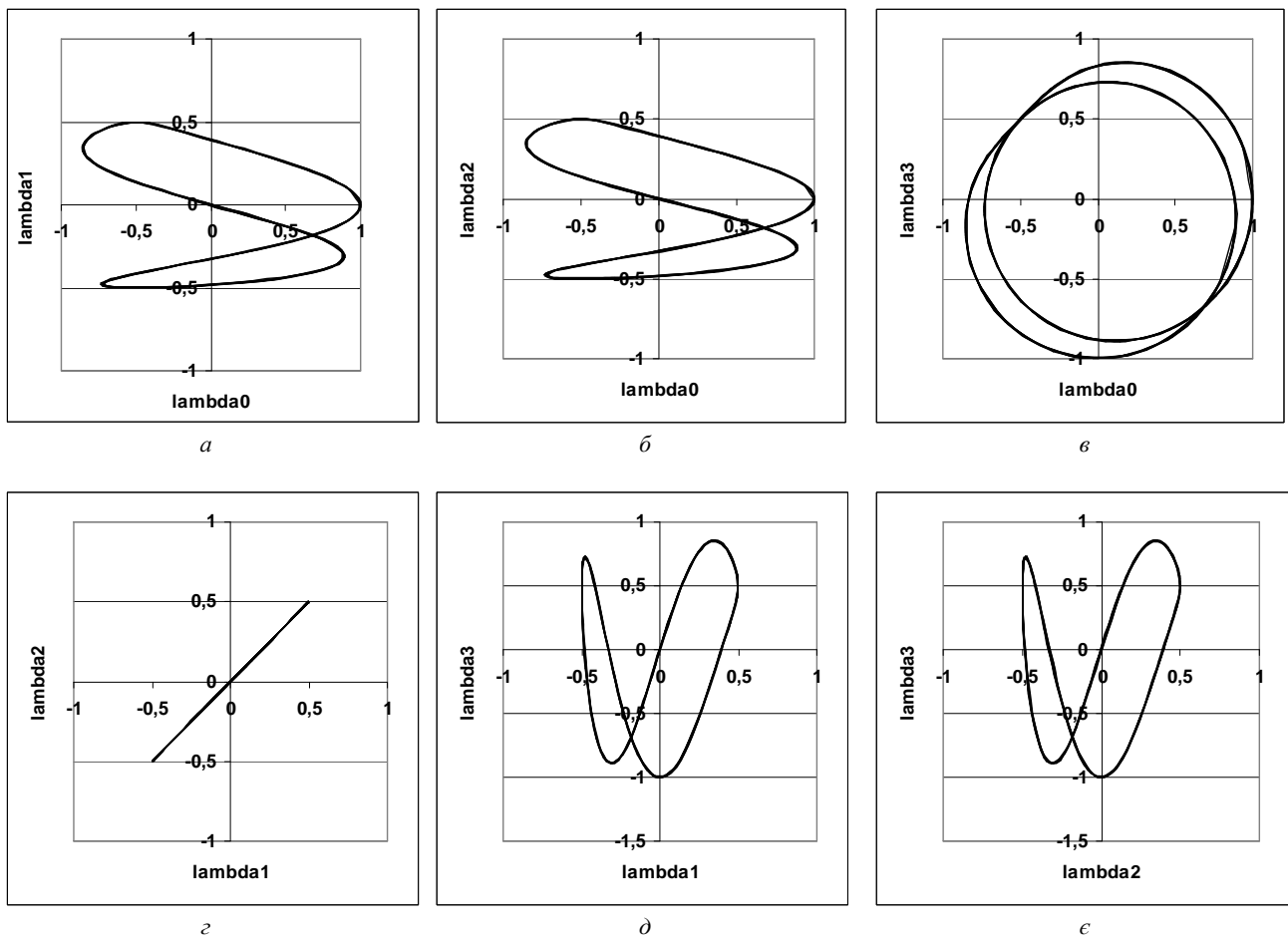


Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при  $k_1=0,048$ ,  $k_2=0,012$ ,  $k_3=0,012$ :  
 а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; з –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .

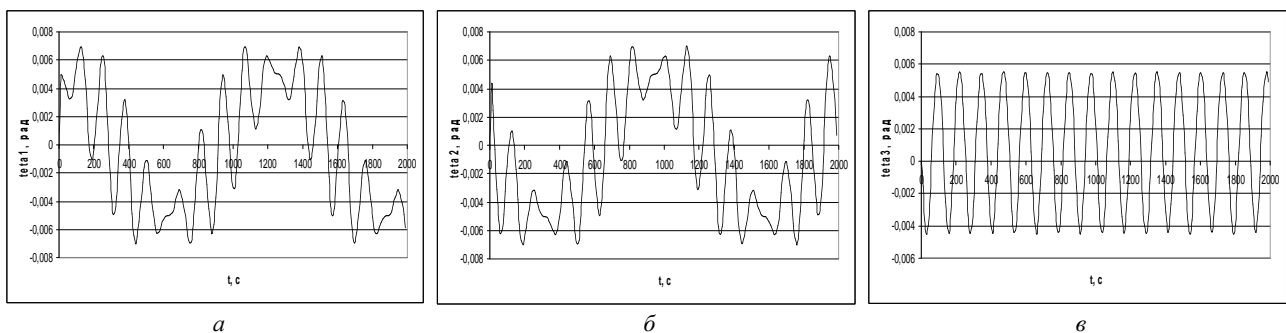


Рис. 7 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (11), (3), (9) при  $k_1=0,005$ ,  $k_2=0,025$ ,  $k_3=0,025$ :  
 а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

В роботі [6] описано результати реалізації еталонної моделі регулярної прецесії і наведено побудовані тра-

екторії  $\lambda_i(\lambda_0)$ ,  $i=1, 2, 3$  у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Порівняння результатів реалізації запропонованої узагальненої моделі обертання з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель суттєво відрізняється від моделі регулярної прецесії і охоплює інші, більш складні обертальні рухи твердого тіла.

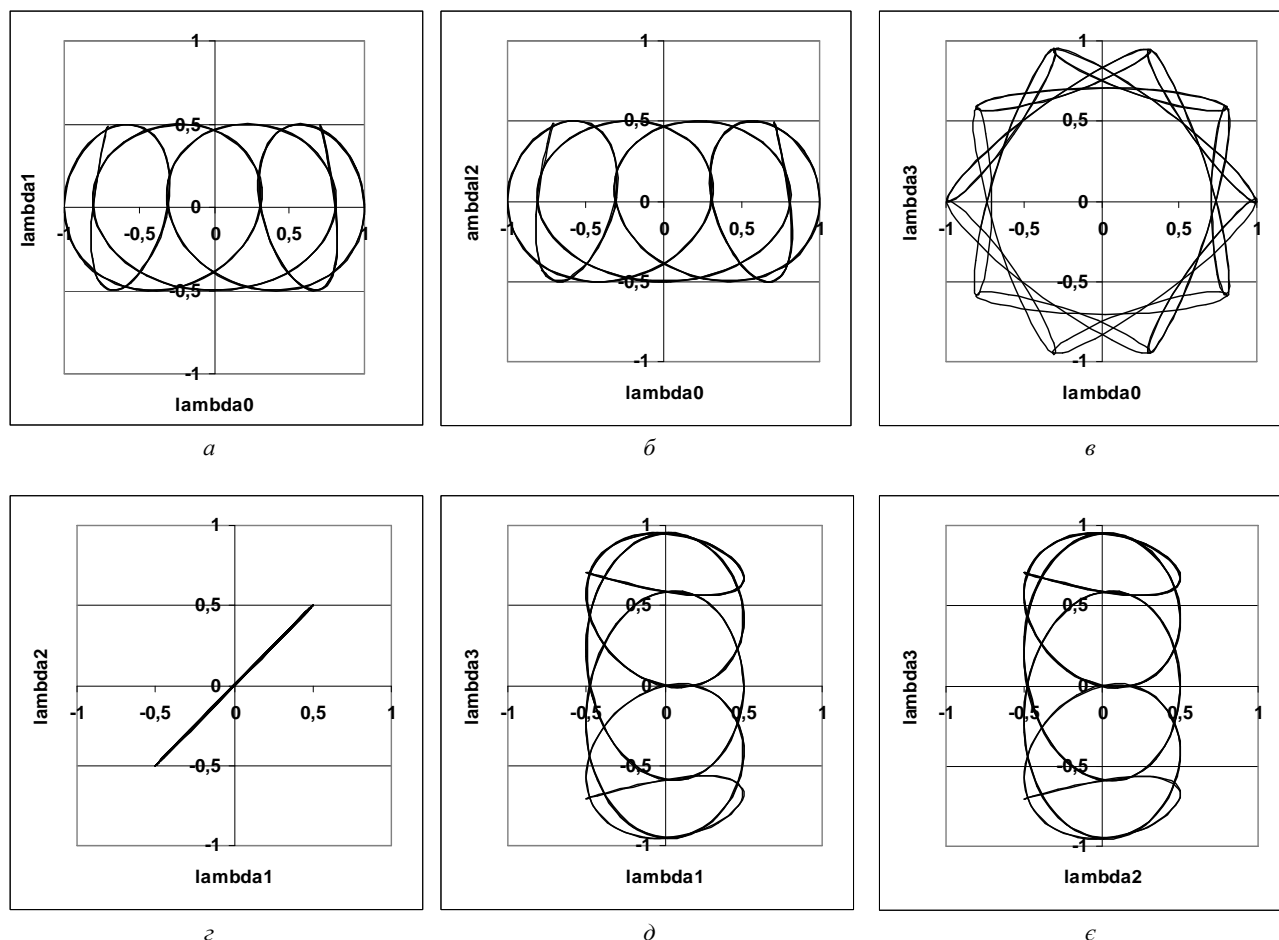


Рис. 8 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при  $k_1 = 0,005$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,025$  :

$a - \lambda_1(\lambda_0)$ ;  $b - \lambda_2(\lambda_0)$ ;  $c - \lambda_3(\lambda_0)$ ;  $d - \lambda_2(\lambda_1)$ ;  $e - \lambda_3(\lambda_1)$ ;  $f - \lambda_3(\lambda_2)$ .

**Висновки.** Запропонована узагальнена трьохчастотна неперервна модель обертання твердого тіла, яка основана на новому представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями кутів, що лінійно змінюються у часі. В результаті аналізу побудованих траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації показано, що при належному виборі параметрів моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Представлену еталонну модель обертання твердого тіла можна застосовувати для точного аналізу алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

**Список літератури:** 1. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электронприбор». – 2003. – С. 250 – 260. 2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с. 3. Кузнецов Ю. А., Олейник С. В., Деменков В. А., Плаксий Ю. А. Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // XVIII Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электронприбор». – 2010. – С. 114 – 116. 4. Ткаченко А. И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 5. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 6. Плаксий Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – №37 (1010). – С. 141 – 147. 7. Плаксий Ю. А. Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – №6 (1049). – С. 175 – 185. 8. Плаксий Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ». – 2015. – №41 (1150). – С. 111 – 119.

**References:** 1. Litmanovich, Yu. Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialakh Sankt-Peterburgskikh konferencyi za desyatiletie [Progress in developing Strapdown INS in the East and West in the materials of St. Petersburg conference in a decade]. X Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. konf. S.-Peterburg, CNII "Yelevatorpibor" Publ., 2003, pp. 250–260. 2. Branets, V. N. and Shmyglevskiy, I. P. Vvedeniye v teoriyu



*besplatformennykh inercial'nykh navigacionnykh system* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p. **3.** Kuznetsov, Yu. A., Oleynik, S. V., Demenkov, V. A. and Plakhsy, Yu. A. Primeneniye modeley vrashheniya dlya analiza pogreshnostey algoritmov besplatformennykh inercial'nykh sistem orientatsii podvizhnykh ob'ektov [Using rotation models for analyzing the errors of algorithms of strapdown inertial navigation systems of moving objects]. *XVII Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. Konf.* [XVII St. Petersburg International Conference] S.-Peterburg, CNII "Yeletropribor" Publ., 2010, pp. 114–116. **4.** Tkachenko, A. I. O primeneniі parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientatsii ob'ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in the algorithms of defining object orientation]. *Kibernet. i vychisl. tehn* [Cybernetics and Computing Technique]. Kyiv, 1970, vol. 5, pp. 20–22. **5.** Panov, A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchaye precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision quaternion calculation algorithms in the case of rigid body precession]. *Kibernet. i vychisl. tehn* [Cybernetics and Computing Technique]. Kyiv, 1987, vol. 73, pp. 3–9. **6.** Plakhsy, Yu. A. Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' precessiyogo typu obertannya tverdogo tela [A quaternion trigonometric precession reference model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147. **7.** Plakhsy, Yu. A. Tr'okhchastotni analitychni etalonnі modeli obertannya tverdogo tela [Three-frequency analytical reference model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 6 (1049), pp. 175–185. **8.** Plakhsy, Yu. A. Uzagal'nennya tr'okhchastotnoyi trygonometrychnoyi kvaternionnoyi modeli obertannya tverdogo tela. Pershyy typ modeli [Generalization of a three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, no.41 (1150), pp. 111–119.

Надійшла (received) 28.03.2016

## Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Плаксій Юрій Андрійович** – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy\_yu@gmail.com.

**Плаксій Юрій Андреевич** – кандидат технических наук, доцент, профессор НТУ «ХПИ», Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy\_yu@gmail.com.

**Plakhsy Yuriy Andriyovych** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor NTU "KhPI", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plakhsy\_yu@gmail.com.

УДК 631.37

**О. Ю. РЕБРОВ****РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ ПОТУЖНОСТІ І ККД МЕХАНІЧНОЇ ТРАНСМІСІЇ ПОВНОПРИВІДНОГО КОЛІСНОГО ТРАКТОРА**

Запропоновано метод визначення складових потоку потужності і ККД на прикладі трансмісії повнопривідного колісного сільськогосподарського трактора. Метод передбачає на основі попередньо розрахованих часток потужності в місці розгалуження потоку потужності від двигуна до ведучих мостів трактора визначити ККД трансмісії в режимах роботи при наявності і відсутності циркуляції потужності. Для практичних розрахунків також встановлений взаємозв'язок часток потужності в місці розгалуження потоку потужності з частками потужності безпосередньо на колесах ведучих мостів трактора.

**Ключові слова** потужність, потік потужності, приводи ведучих мостів трактора, трансмісія трактора.

**Вступ.** Удосконалення сільськогосподарських технологій нерозривно пов'язано з впровадженням інноваційних технологій в різних сферах сільськогосподарського виробництва. Аналіз та прогнозування перспектив підвищення ефективності тракторної техніки сільськогосподарського призначення мають тісний взаємозв'язок з таким класичним поняттям, як ККД. Обґрунтування заходів щодо підвищення ККД трактора не тільки як тягового, а й енергетичного засобу для сільськогосподарського виробництва, потребує детального розгляду складових потоків потужності від двигуна до ходової системи тракторів тягової концепції і складових, пов'язаних з передачею потужності в приводах активних органів сільськогосподарських знарядь тракторів тягово-енергетичної і енергетичної концепцій. Крім того, для забезпечення допустимого впливу на ґрунт передбачається застосування багатоопорних колісних рушіїв тракторів і активних приводних ходових систем сільськогосподарських знарядь.

Тому питання розподілу потоків потужності, насамперед, в приводах ведучих мостів трактора, а також в приводах сільськогосподарських знарядь є актуальним з точки зору пошуку резервів підвищення ефективності тракторної техніки.

**Аналіз останніх досліджень.** Проблематика тракторної енергетики, теорії трактора та шляхів розв'язання протиріч, що виникають при реалізації трактором тягової або тягово-енергетичної концепції технологічного процесу механічної обробки ґрунту, розглядається в роботах [1 – 4], де відмічається перспективність застосування активних приводів ходових систем і робочих органів сільськогосподарських знарядь з точки зору підвищення ККД технологічного процесу. Вирішення питання застосування активних приводів в машино-тракторних

агрегатах потребує підвищення потужності тракторних двигунів до рівня, який не може бути повною мірою реалізований тільки ходовою системою самого трактора. Зростання потужності призводить до підвищення енергонасиченості тракторів [5 – 6], що обумовлено поступовим переходом від тягової до тягово-енергетичної та енергетичної концепції розвитку трактора на майбутнє. Підвищення енергонасиченості сільськогосподарських тракторів потребує уточнення складових балансу потужності і ККД машино-тракторних агрегатів [7], особливо з урахуванням різних способів передачі потужності від двигуна трактора до сільськогосподарської машини [8].

**Постановка задачі.** Ефективність використання колісної тракторної техніки на енергоємних сільськогосподарських операціях в складі машино-тракторних агрегатів, особливо з приводними ґрунтообробними знаряддями, залежить від раціонального розподілу потоку потужності двигуна в приводах ходової системи і сільськогосподарського знаряддя. Це обумовлює задачу моделювання процесу розгалуження потоку потужності в приводах машино-тракторного агрегату для визначення загального ККД трактора в агрегаті з сільськогосподарським знаряддям. Тому метою даної роботи є розробка методу визначення складових потоку потужності і ККД на прикладі трансмісії повнопривідного колісного сільськогосподарського трактора.

**Розподіл потоків потужності і ККД механічної трансмісії повнопривідного колісного трактора.** Для повнопривідних тракторів, виконаних за схемою 4К4а або 4К4б, при розгалуженні потоку потужності в трансмісії до ведучих мостів, загальний ККД трансмісії за відсутності циркуляції потужності визначається виходячи з існуючих потоків потужності:

$$\eta_{\text{тр}} = \eta_{\text{тр}0} \cdot (\eta_{\text{тр}1} \cdot \lambda_1 + \eta_{\text{тр}2} \cdot \lambda_2), \quad (1)$$

де  $\eta_{\text{тр}0}$  – ККД ділянки трансмісії від двигуна до розгалуження потоків потужності в трансмісії трактора;  $\eta_{\text{тр}1}$ ,  $\eta_{\text{тр}2}$  – ККД ділянок трансмісії від розгалуження до передніх і задніх ведучих коліс, відповідно;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – частки потужності двигуна, які передаються до переднього і заднього ведучих мостів в місці розгалуження потоку потужності та визначаються зі співвідношень:

$$\lambda_1 = \frac{N_{e1}}{N_e}; \quad \lambda_2 = \frac{N_{e2}}{N_e}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad (2)$$

$N_e$  – ефективна потужність двигуна, що розподіляється при розгалуженні на складові  $N_{e1}$  і  $N_{e2}$  до переднього і заднього ведучих мостів, відповідно.

За відсутності циркуляції потужності потоки потужності протікають в трансмісії наступним чином (рис. 1, а). Ефективна потужність, що розвивається двигуном відповідно до його завантаження за потужністю  $\varepsilon_N$ , розподіляється по ведучим мостам у співвідношенні  $\lambda_1 / \lambda_2$  (при цьому частина потужності втрачається на тертя  $N_{\text{тр}1}$  і  $N_{\text{тр}2}$ ) та надходить до передніх і задніх ведучих коліс:  $N_{\text{к}1}$  і  $N_{\text{к}2}$ . В результаті буксування переднього  $\delta_1$  і заднього  $\delta_2$  мостів розвивається дотична сила тяги трактора, при цьому частина потужності втрачається (відбувається зниження швидкості руху) у вигляді складових  $N_{\delta_1}$  і  $N_{\delta_2}$ . Тому на остов трактора передається потужність  $N_{o1}$  і  $N_{o2}$ , яка є добутком дотичної сили тяги (як для потужності  $N_{\text{к}1}$  і  $N_{\text{к}2}$ ) та дійсної швидкості руху  $V$  (замість теоретичних швидкостей  $V_{\text{т}1}$  і  $V_{\text{т}2}$  у потужності  $N_{\text{к}1}$  і  $N_{\text{к}2}$ ). Далі частина потужності  $N_{o1}$  і  $N_{o2}$  витрачається на подолання опору перекошування трактора у вигляді складових  $N_{f1}$  і  $N_{f2}$ . В результаті всіх перерахованих втрат залишається корисна складова потужності, що характеризує досконалість трактора як тягового засобу, – це кривока потужність  $N_{\text{кр}}$ .

При малих дотичних силах тяги і великій кінематичній невідповідності окружних швидкостей ведучих коліс мостів трактора можлива циркуляція потужності. Причину виникнення циркуляції потужності зручно розглянути на прикладі трактора 4К4б, у якого шини, наприклад, передніх коліс більш навантажені і мають менший внутрішній тиск. За цих умов динамічний радіус задніх коліс може бути істотно більше передніх. Якщо привід ведучих мостів блокований, то виникають різні окружні швидкості в зоні контакту передніх і задніх коліс з опорною поверхнею, що викликає підвищене буксування моста, у якого окружна швидкість в зоні контакту більше, і юз коліс моста, який відстає і працює в гальмівному режимі по відношенню до випереджаючого моста.

В результаті описаного явища виникає циркуляція потужності в контурі: «пляма контакту випереджаючих коліс з ґрунтом – остов трактора – пляма контакту відстаючих коліс з ґрунтом – трансмісія – пляма контакту випереджаючих коліс з ґрунтом» (рис. 1, б). Циркуляція потужності супроводжується додатковими втратами потужності в трансмісії і ходовій системі та суттєво знижує ККД трансмісії і тяговий ККД трактора.

Умова виникнення циркуляції потужності в трансмісії трактора визначається із рівності дійсної швидкості руху переднього і заднього мостів:

$$V_{\text{т}1} \cdot (1 - \delta_1) = V_{\text{т}2} \cdot (1 - \delta_2). \quad (3)$$

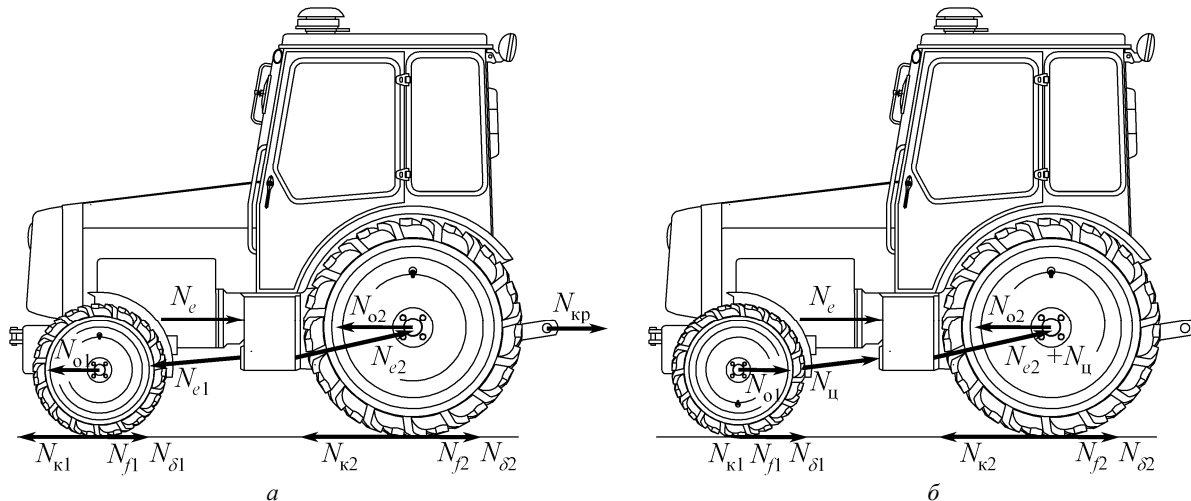


Рис. 1 – Схема потоків потужності для повнопривідного трактора:  
 а – за відсутності циркуляції потужності; б – з циркуляцією потужності.

З урахуванням передавальних чисел трансмісії від двигуна до ведучих коліс переднього  $u_1$  і заднього  $u_2$  мостів, а також їх динамічних радіусів  $r_{k1}$  і  $r_{k2}$ , визначається коефіцієнт кінематичної невідповідності  $k_n$  :

$$\frac{r_{k1}}{u_1} \cdot \frac{u_2}{r_{k2}} \cdot (1 - \delta_1) = (1 - \delta_2); k_n \cdot (1 - \delta_1) = (1 - \delta_2); k_n = \frac{r_{k1}}{u_1} \cdot \frac{u_2}{r_{k2}} = \frac{V_{T1}}{V_{T2}}. \quad (4)$$

Припустимо, що відстає передній міст, а забігає – задній. Ознакою циркуляції потужності буде негативна дотична сила тяги і юз моста, що відстає:

$$k_n < 1; \delta_1 < 0; \delta_2 < 1 - k_n. \quad (5)$$

Аналогічно отримуємо умову циркуляції потужності коли відстає задній і забігає передній міст:

$$k_n > 1; \delta_2 < 0; \delta_1 < 1 - 1/k_n. \quad (6)$$

З огляду на той факт, що коефіцієнт кінематичної невідповідності знаходиться в межах 0,95 – 1,05, тобто не більше ніж на 5% відрізняється в експлуатації від 1, отримуємо з (5) і (6), що циркуляція можлива при малому буксуванні (до 5%) моста, який забігає, при цьому відстаючий міст має негативне буксування (юз) в межах 1,5%.

При циркуляції потужності коли відстає передній міст:

$$\eta_{TP} = \eta_{TP0} \cdot \left( \frac{1}{\eta_{TP1}} \cdot \lambda_1 + \eta_{TP2} \cdot \lambda_2 \right); \lambda_1 < 0; \lambda_2 > 1; \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad (7)$$

а коли відстає задній міст:

$$\eta_{TP} = \eta_{TP0} \cdot \left( \eta_{TP1} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{\eta_{TP2}} \cdot \lambda_2 \right); \lambda_1 > 1; \lambda_2 < 0; \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (8)$$

На практиці при проведенні експериментальних і теоретичних досліджень не завжди зручно користуватися частками потужності  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , які повинні визначатися на розгалуженні потоків потужності в трансмісії. Експериментальним і розрахунковим шляхом простіше визначити частки потужності, підведеної до ведучих коліс трактора. Позначимо частки потужності, що підводиться до коліс переднього і заднього ведучих мостів,  $\lambda_{k1}$  і  $\lambda_{k2}$  :

$$\lambda_{k1} = \frac{N_{k1}}{N_{k1} + N_{k2}} = \frac{N_{k1}}{N_k}; \lambda_{k2} = \frac{N_{k2}}{N_{k2} + N_{k1}} = \frac{N_{k2}}{N_k}; \lambda_{k1} + \lambda_{k2} = 1. \quad (9)$$

Розглянемо схему потоків потужності без циркуляції для визначення часток  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , загального ККД трансмісії  $\eta_{TP}$  по відомим часткам потужності  $\lambda_{k1}$  і  $\lambda_{k2}$ , ККД ділянок трансмісії  $\eta_{TP0}$ ,  $\eta_{TP1}$  і  $\eta_{TP2}$  (рис. 2, а). Позначимо потужність  $N_{p0}$ , що розподіляється при розгалуженні в трансмісії на складові  $N_{p1}$  і  $N_{p2}$  до переднього і заднього ведучого моста відповідно:

$$N_{p0} = N_{p1} + N_{p2}; \lambda_1 = \frac{N_{p1}}{N_{p0}}; \lambda_2 = \frac{N_{p2}}{N_{p0}}; \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (10)$$

З урахуванням ККД ділянок приводів до ведучих мостів і (9) отримаємо:

$$N_{p1} = \frac{N_{k1}}{\eta_{TP1}} = \frac{N_k \cdot \lambda_{k1}}{\eta_{TP1}}; N_{p2} = \frac{N_{k2}}{\eta_{TP2}} = \frac{N_k \cdot \lambda_{k2}}{\eta_{TP2}}. \quad (11)$$

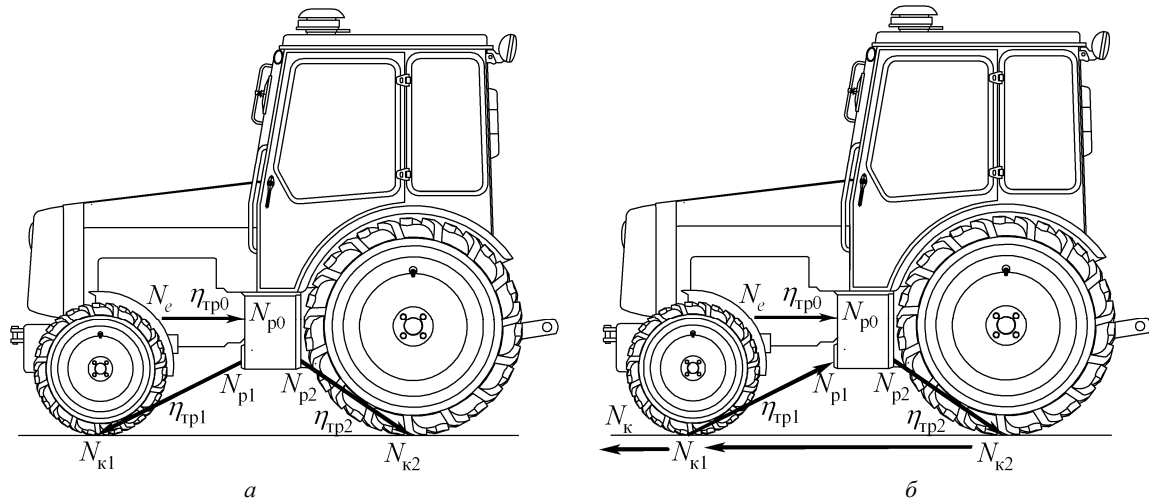


Рис. 2 – Схема для визначення ККД трансмісії:  
 а – за відсутності циркуляції потужності; б – з циркуляцією потужності.

З урахуванням (10):

$$\lambda_1 = \frac{N_k \cdot \lambda_{k1}}{N_{p0} \cdot \eta_{tp1}}; \lambda_2 = \frac{N_k \cdot \lambda_{k2}}{N_{p0} \cdot \eta_{tp2}}. \tag{12}$$

Взаємозв'язок між частками потужності при розгалуженні і на ведучих колесах при відповідних ККД ділянок приводів до ведучих мостів виглядає так:

$$\frac{\lambda_1 \cdot \eta_{tp1}}{\lambda_{k1}} = \frac{\lambda_2 \cdot \eta_{tp2}}{\lambda_{k2}}. \tag{13}$$

$$\lambda_1 = \frac{\eta_{tp2} \cdot \lambda_{k1}}{\eta_{tp2} \cdot \lambda_{k1} + \eta_{tp1} \cdot \lambda_{k2}}; \lambda_2 = \frac{\eta_{tp1} \cdot \lambda_{k2}}{\eta_{tp2} \cdot \lambda_{k1} + \eta_{tp1} \cdot \lambda_{k2}}. \tag{14}$$

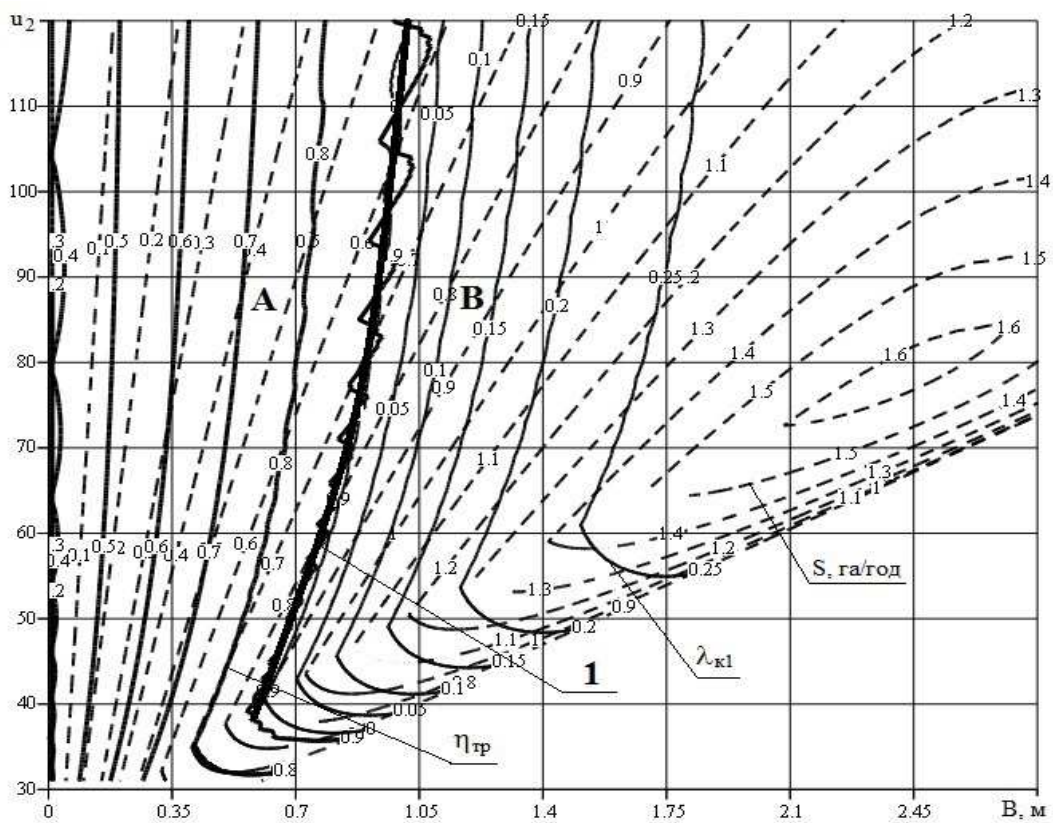


Рис. 3 – Розподіл потужності і ККД трансмісії трактора 4К4а в координатах «Ширина захвату плуга (В, м) – передавальне число трансмісії приводу заднього моста (u<sub>2</sub>)».

Загальний ККД трансмісії при роботі без циркуляції потужності з відомими часткам потужності  $\lambda_{к1}$  і  $\lambda_{к2}$ :

$$\eta_{тр} = \eta_{тр0} \cdot \left( \frac{\eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}{\eta_{тр2} \cdot \lambda_{к1} + \eta_{тр1} \cdot \lambda_{к2}} \right). \quad (15)$$

Для випадку циркуляції потужності, коли відстає передній міст (рис. 2, б), замість (11) отримуємо:

$$N_{p1} = N_{к1} \cdot \eta_{тр1}; \quad N_{p2} = \frac{N_{к2}}{\eta_{тр2}}. \quad (16)$$

З урахуванням (9):

$$N_{p1} = N_{к} \cdot \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1}; \quad N_{p2} = \frac{N_{к} \cdot \lambda_{к2}}{\eta_{тр2}}. \quad (17)$$

Взаємозв'язок між частками потужності при розгалуженні і на ведучих колесах при відповідних ККД ділянок приводів до ведучих мостів і циркуляції потужності описується рівняннями:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1}} = \frac{\lambda_2 \cdot \eta_{тр2}}{\lambda_{к2}}. \quad (18)$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{к2}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}. \quad (19)$$

Запишемо загальний ККД трансмісії при роботі з циркуляцією потужності з відомими часткам потужності  $\lambda_{к1}$  і  $\lambda_{к2}$ :

$$\eta_{тр} = \eta_{тр0} \cdot \left( \frac{\lambda_{к1} \cdot \eta_{тр2} + \lambda_{к2} \cdot \eta_{тр1}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}} \right) = \frac{\eta_{тр0} \cdot \eta_{тр2}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}. \quad (20)$$

Якщо відстає задній міст і відбувається циркуляція потужності, взаємозв'язок між частками потужності має вигляд:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{к2}}{\lambda_{к2} + \lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}. \quad (21)$$

Отримаємо загальний ККД трансмісії:

$$\eta_{тр} = \eta_{тр0} \cdot \left( \frac{\lambda_{к1} \cdot \eta_{тр1} + \lambda_{к2} \cdot \eta_{тр1}}{\lambda_{к1} + \lambda_{к2} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}} \right) = \frac{\eta_{тр0} \cdot \eta_{тр1}}{\lambda_{к1} + \lambda_{к2} \cdot \eta_{тр1} \cdot \eta_{тр2}}. \quad (22)$$

**Результати моделювання.** За викладеною методикою був визначений ККД ступінчастої механічної трансмісії трактора 4К4а масою 9200 кг з двигуном потужністю 128,36 кВт, шинами передніх коліс 380/85 R34, задніх – 480/80 R46, розподілом маси в статичному положенні: 40 % – на передній міст, 60 % – на задній, тиском повітря в передніх шинах – 0,12 МПа, задніх – 0,19 МПа. Розподіл потоку потужності по ведучим мостам трактора визначався з позицій отримання максимальної *чистої продуктивності* ( $S$ , га/год) при виконанні оранки. Частки потужності на ведучих мостах визначалися аналітично з використанням (3) – (6), а також методики розрахунку коефіцієнтів буксування. Аналіз показує, що поле можливих режимів роботи трактора в агрегаті з плугом розподіляється лінією **1** на дві області (рис. 3). В області **А** відбувається циркуляція потужності при агрегуванні плугами з шириною захвату 0,7 – 1,05 м, частка потужності  $\lambda_{к1} < 0$ , має місце юз передніх коліс трактора. В області **В** ведучими є обидва мости, частка потужності на колесах переднього моста  $\lambda_{к1}$  поступово зростає до значень 0,29 – 0,30 при максимальній продуктивності 1,60 – 1,63 га/год, ширині захвату плуга близько 2,45 м, передавальному числі трансмісії 78 – 79.

Слід зазначити, що ККД трансмісії в області **В** мало змінюється і близький до 0,9, а в області **А** суттєво знижується внаслідок циркуляції потужності.

**Перспективи подальших досліджень.** Розподіл потоку потужності в трансмісіях сучасних тракторів залежить, в першу чергу, від агрегування, типу сільськогосподарського знаряддя, типорозмірів та характеристик пневматичних шин і тиску повітря в них, типу приводів мостів і конструктивно закладеного коефіцієнта кінематичної невідповідності та інших факторів. Виникнення циркуляції потужності в механічних трансмісіях колісних тракторів може нівелюватися при коректуванні внутрішнього тиску повітря в шинах установкою відповідних систем регулювання, або використанні в приводах мостів механізмів, що забезпечують їх підключення при виході на режими роботи, коли немає умов виникнення циркуляції потужності. Виходячи з вищезазначеного, подальші дослідження впливу перелічених факторів, насамперед розподілу потоку потужності в трансмісії трак-

тора з метою підвищення ККД не тільки трансмісії, а й машино-тракторного агрегату в цілому, мають відповідний науково-практичний інтерес.

**Висновки.** Таким чином, наведена методика визначення параметрів розподілу потоків потужності і ККД механічної трансмісії повнопривідного трактора може використовуватись при пошуку і аналізі резервів підвищення ефективності машино-тракторних агрегатів на базі колісних тракторів. Найбільше поширення в тракторобудуванні знайшли трактори, виконані за класичною схемою 4К4а з колесами різного діаметру, для яких частка потоку потужності до переднього ведучого мосту в експлуатації може досягати 30 % на режимах максимальної продуктивності. Незважаючи на переважну роль заднього ведучого моста в формуванні сили тяги на гаку таких тракторів, ККД трансмісії на режимах роботи без циркуляції потужності змінюється несуттєво, близький до розрахункового значення відповідно до ККД окремих вузлів і практично не залежить від часток потужності в приводах ведучих мостів. При підвищенні частки потужності, що циркулює, ККД трансмісії суттєво знижується, але такі режими роботи спостерігаються лише при малих силах тяги на гаку і великому коефіцієнті кінематичної невідповідності. Загалом наведений в даній роботі підхід може бути використаний при обґрунтуванні способів передачі потужності від двигуна трактора до сільськогосподарської машини не тільки через ходову систему трактора, а й безпосередньо на робочі органи або ходову систему самого сільськогосподарського знаряддя, що бачиться перспективним з позицій підвищення ККД машино-тракторного агрегату в цілому.

**Список літератури:** 1. Лебедев А. Т. Некоторые проблемы теории трактора тягово-энергетической концепции // Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка. – Харків, 2012. – Вип. 124. – Т.2. – С. 5 – 15. 2. Лебедев А. Т. Тракторна енергетика: проблеми та їх розв'язання // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Автомобіле- і тракторобудування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – №9 (1118). – С. 9 – 16. 3. Лебедев А. Т., Кравчук В. І., Лебедев С. А. Тракторна енергетика: проблеми та рішення // Техніка і технології АПК. – 2014. – № 1 (1). – С. 6 – 11. 4. Лебедев А. Т. Научно-инновационные аспекты теории трактора // Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2015. – Вип. 156. – С. 272 – 281. 5. Шульяк М. Л. Методи використання надлишкової потужності двигуна енергонасиченого трактора // Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка. – Харків : ХНТУСГ, 2014. – Вип. 146. – С. 219 – 226. 6. Ребров А. Ю., Самородов В. Б., Кучков В. В. Определение рациональной энергонасыщенности пахотного МТА на базе колесного сельскохозяйственного трактора // Механіка та машинобудування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 1. – С. 136 – 140. 7. Ребров А. Ю. Мощностной баланс и КПД пахотного МТА при работе в тяговом режиме // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – № 20. – С. 67 – 72. 8. Подскребко М. Д. Определение коэффициента полезного действия пахотных агрегатов при различных способах передачи мощности от двигателя трактора к рабочей машине // Весті нацыянальнай акадэміі навук беларусі. Серыя аграрных навук. – 2007. – № 7. – С. 96 – 105.

**References:** 1. Lebedev, A. T. Nekotoryie problemy teorii traktora tyagovo-energeticheskoy kontseptsii [Some problems of the theory of tractor pull-energy concept]. *Visnyk HNTUSG im. P. Vasylenka* [Bulleting of the P. Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, 2012, no. 124, vol. 2, pp. 5–15. 2. Lebedev, A. T. Traktorna energetika: problemi ta yih rozv'yazannya [Tractor energetics: problems and their solutions]. *Visnyk NTU «HPI»*. Seriya: Avtomobile- i traktorobuduvannya [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Automobile and tractor engineering]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 9 (1118), pp. 9–16. 3. Lebedev, A. T., Kravchuk, V. I. and Lebedev, S. A. Traktorna energetyka: problemy ta rishennya [Tractor energetics: problems and solutions]. *Tehnika i tehnologiyi APK* [Technique and Technologies for Agro-Industrial Complex]. 2014, no. 1 (1), pp. 6–11. 4. Lebedev, A. T. Nauchno-innovatsionnye aspekty teorii traktora [Research and innovative aspects of the theory of tractor] *Visnyk HNTUSG im. P. Vasylenka* [Bulleting of the P. Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, 2015, no. 156, pp. 272–281. 5. Shulyak, M. L. Metody vykorystannya nadlyshkovoyi potuzhnosti dyvguna energonasychenogo traktora [Methods of using surplus power of high-power tractor engine] *Visnyk HNTUSG Im. P. Vasylenka* [Bulleting of the P. Vasylenko Kharkiv National Technical University of Agriculture]. Kharkiv, 2014, no. 146, pp. 219–226. 6. Rebrov, A. Yu., Samorodov, V. B. and Kuchkov, V. V. Opredelenie ratsional'noy energonasyshchennosti pakhotnogo MTA na baze kolesnogo sel'skokhozyaystvennogo traktora [Determining rational energy saturation of plowing tractor unit based on wheeled agricultural tractor] *Mehanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and mechanical engineering]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2011, no. 1, pp. 136–140. 7. Rebrov, A. Yu. Moschnostnoy balans i KPD pakhotnogo MTA pri rabote v tyagovom rezhime [Power balance and efficiency of plowing tractor unit operating in traction mode] *Visnyk natsional'nogo tekhichnogo universytetu «KhPI»* [Bulletin of the National Technical University «KhPI»]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2012, no. 20, pp. 67–72. 8. Podskrebko, M. D. Opredelenie koeffitsienta poleznogo deystviya pahotnykh agregatov pri razlichnykh sposobakh peredachi moschnosti ot dvigatelya traktora k rabochey mashine [Determining efficiency of plowing units for different methods of transferring power from tractor engine to working machine]. *Vesti natsiyanalnay akademii navuk belarusi. Seriya agrarnykh navuk* [Bulleting of National Academy of Science of Belorussia. Ser.: Agricultural Sciences]. 2007, no. 7, pp. 96–105.

Надійшла (received) 05.04.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Ребров Олексій Юрійович** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-66-35; e-mail: rebrov@kpi.kharkov.ua.

**Ребров Алексей Юрьевич** – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-66-35; e-mail: rebrov@kpi.kharkov.ua.

**Rebrov Oleksiy Yuriyovich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-66-35; e-mail: rebrov@kpi.kharkov.ua.

УДК 629.7.085.24

В. А. СЕРЕДА

**КОНЦЕПЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПАКТНЫХ НАЗЕМНЫХ ПУСКОВЫХ УСТРОЙСТВ  
ДЛЯ ЗАПУСКА БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Сформулирована проблематика ввода в полет с поверхности беспилотного летательного аппарата за счет внешней энергетика. Записана полезная функция, а также общие и частные управляющие параметры наземных пусковых устройств (НПУ). Приведены кинематические схемы НПУ различного типа, полученные в результате модернизации. Описана лежащая в основе метода оптимизации длины направляющей комплексно-сопряженная модель катапульт. Изложен принцип параметрического поиска закона распределения тягового усилия путем нормирования работы расширения в определенном интервале.

**Ключевые слова:** пусковое устройство, полезная функция, параметрическая оптимизация, характеристический критерий, управляемые параметры, комплексная модель.

**Введение.** Наземные пусковые устройства (НПУ, катапульты) являются безальтернативным средством ввода в полет беспилотных летательных аппаратов (БЛА) в классе комплексов безаэродромного базирования. Целью проектирования НПУ любого типа является получение наилучшего технического решения, которое может выражаться материальными, временными, энергетическими и пр. параметрами. Массогабаритные показатели НПУ существенным образом влияют на ТТХ комплекса в целом. Анализ проблемно ориентированной информации однозначно свидетельствует об отсутствии формализованных подходов к проектированию компактных наземных катапульт.

Ключевая роль в составе проектного инструментария принадлежит методам оптимизации динамических характеристик НПУ в условиях взаимодействия трансмиссии и привода. Быстропеременная специфика рабочего процесса требует отображения в соответствующей физико-математической модели нестационарных пространственно неоднородных явлений. Поэтому, в предложенной, далеко не приближенной постановке, задача определения наилучших динамических характеристик требует дальнейшего развития методов оптимизации.

**Постановка задачи оптимизации.** Существует широчайшее многообразие НПУ, базирующихся на различных физических принципах создания тягового усилия (механические, пиротехнические и пневматические). В данном исследовании ограничимся рассмотрением НПУ с расширительными машинами на холодном рабочем теле, обладающими наиболее высокими энергетическими показателями. Ограниченный объем запасенного рабочего тела (в баллоне) является причиной регрессии тягового усилия. Для достижения минимальной начальной скорости БЛА возникает необходимость наращивания длины направляющей.

Увеличение длины участка разгона в конечном итоге приводит к необходимости создания (двух- или трех-) многосекционных направляющих (например, ADLR-021 – «Adcom», MC2555LR – «Robonic», K12ИЗ – «Взлет») длиной свыше 20 ... 23 м. Такие конструкции имеют ряд существенных эксплуатационных недостатков, которые нивелируют достигнутый положительный эффект. Габаритные многосекционные направляющие обладают низкой мобильностью и требуют значительного времени приведения в работоспособное состояние.

Увеличение тягового усилия привода НПУ за счет повышения рабочего давления также неприемлемо, поскольку влечет за собой пропорциональный рост стартовой перегрузки. В конечном итоге стоимость наземной составляющей авиационного комплекса снижается, однако стоимость собственно БЛА возрастает в разы. В условиях массового применения БЛА, тем более в гражданском секторе, использование твердотельного бортового радиоэлектронного оборудования нерационально.

Таким образом, пневматические НПУ требуют разработки инструментария для оптимизации динамических характеристик. Под этим термином понимается такое проектирование, цель которого состоит в создании НПУ, выполняющего заданную полезную функцию и имеющего минимальную длину направляющей  $L \rightarrow x$ . Независимо от физического принципа создания тягового усилия, полезная функция НПУ сводится к приданию начальной скорости БЛА определенной массы при ограничении по стартовой перегрузке:

$$\bar{\Phi} = \{V_0, m_{БЛА}\}, n_x(x) < n_{x\text{ ПД}}, \forall x \in L, \quad (1)$$

где  $V_0$  – начальная скорость БЛА;  $m_{БЛА}$  – взлетная масса БЛА;  $n_{x\text{ ПД}}$  – предельно допустимая продольная стартовая перегрузка.

Для выполнения полезной функции привод НПУ должен совершить определенную работу по разгону БЛА вдоль направляющей. Исходя из определения работы  $A = FL$ , ее полностью определяет закон распределения тягового усилия НПУ  $F = f(x)$ . Таким образом, эквивалентным выражением качества объекта проектирования (целевой функцией), является совершение максимальной работы по разгону БЛА на участке направляющей  $A = m_{БЛА} n_x g L \rightarrow \max$ . Поэтому, в задаче проектирования компактных НПУ искомая функция известна и имеет весьма тривиальный вид – линейный закон распределения тягового усилия (эквивалентно  $n_x = \text{const}$ ).

В задаче оптимизации в качестве управляемых параметров, оказывающих максимальное влияние на целе-

вую функцию, не могут быть приняты общие характеристики НПУ, поскольку их влияние на закон распределения тягового усилия ограничивается 3%. Такими параметрами являются показатели рабочего тела  $\overline{P}_{PT}$  и запусаемого груза  $\overline{P}_{БЛА}$ :

$$\overline{P}_O = \{\overline{P}_{PT}, \overline{P}_{БЛА}\} = \{R, T_0, d_M, W_B, \theta, \alpha\}, \quad (2)$$

где  $R$  – газовая постоянная;  $T_0$  – начальная температура газа;  $d_M$  – диаметр магистрали подвода рабочего тела;  $W_B$  – объем баллона;  $\theta$  – угол пуска (наклона направляющей к горизонту);  $\alpha$  – угол атаки (установки БЛА на направляющей).

Заметного влияния на закон распределения тягового усилия можно добиться только глубокой модернизацией рабочего процесса катапульты (табл. 1), которая невозможна без внесения радикальных конструктивных изменений в облик устройства [1 – 6]. Поэтому в качестве управляемых параметров могут быть приняты только частные параметры НПУ, выражаемые функциями передаточного отношения (трансмиссии  $\overline{P}_T$ ) или органов газораспределения (привода  $\overline{P}_П$ ).

$$\overline{P}_Ч = \{\overline{P}_T, \overline{P}_П\} = \{y, \alpha_H, x_{1...3}, d, l, S_{1...4}\}, \quad (3)$$

где  $y$  – высота копира;  $\alpha_H$  – начальный угол наклона троса;  $x_{1...3}$  – координата окна подвода газа;  $d$  – диаметр окна сброса давления;  $l$  – расстояние между поршнями;  $S_{1...4}$  – площади секций телескопа.

Несмотря на универсальный подход к оптимальному проектированию, непосредственно постановка задачи носит персонифицированный характер применительно к конкретному типу трансмиссии или привода НПУ. В табл. 1 представлена структурная схема адаптации к заданным динамическим характеристикам катапультных устройств за счет модернизации трансмиссии или привода катапульты и соответствующие параметры, подвергающиеся поиску вследствие решения задачи оптимизации.

Одним из основных этапов решения задачи оптимизации является построение физико-математической модели (ФММ), которая описывает взаимосвязь внутрисистемных переменных. Предшественниками решалась задача исходя из квазистационарных представлений о физике процессов в расширительной машине. При этом используются представления о среднеинтегральных по крупным элементам объема проточной части цилиндра НПУ равновесных характеристиках и, исходя из этого, находились частные параметры трансмиссии  $\overline{P}_T$  или привода  $\overline{P}_П$ .

Правомочность такой модели далеко не бесспорна по причине больших погрешностей в определении энергетических характеристик. Предлагается метод оптимального проектирования НПУ, где в качестве расчетного инструментария используются континуальные неоднородные модели (рис. 1), описывающие нестационарное течение среды по тракту ИТМ системой дифференциальных уравнений в частных производных по времени и пространственным координатам, выражающие локальное проявление основных законов сохранения.

Модель течения в газодинамическом тракте расширительной машины НПУ описывается 7-ю уравнениями переноса, записанными в потоковом виде: 1 – массы в целом; 2 – концентрации свежего заряда; 3 – энтропии; 4 ... 6 – импульса; 7 – энергии. Потоковая, или дивергентная форма записи удобна для получения унифицированной формы представления всех уравнений:

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t} + \vec{\nabla} \overline{\Phi} = \sum_{n=1}^{M_M} \left( \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} \right)_{(n)} + \sum_{n=1}^{M_C} \overline{\Delta}_{(n)}, \quad (4)$$

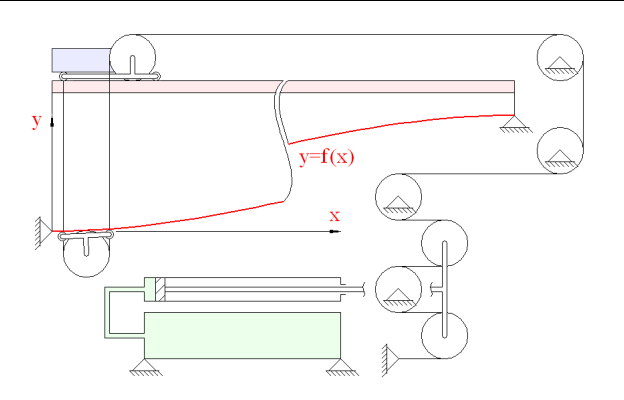
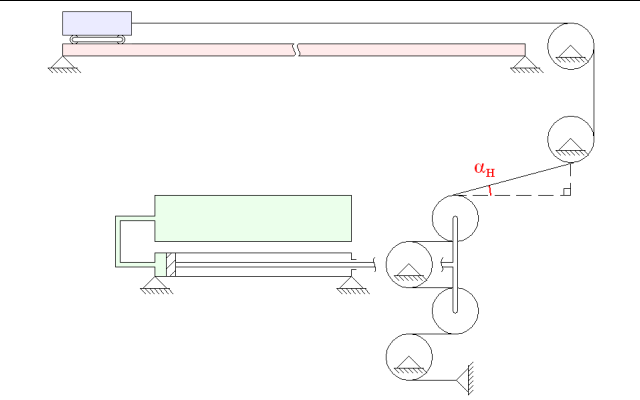
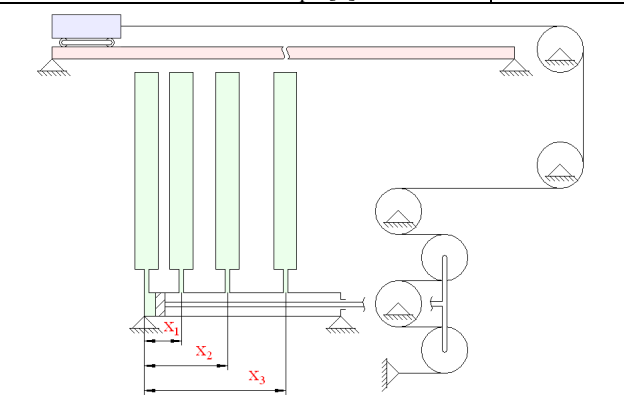
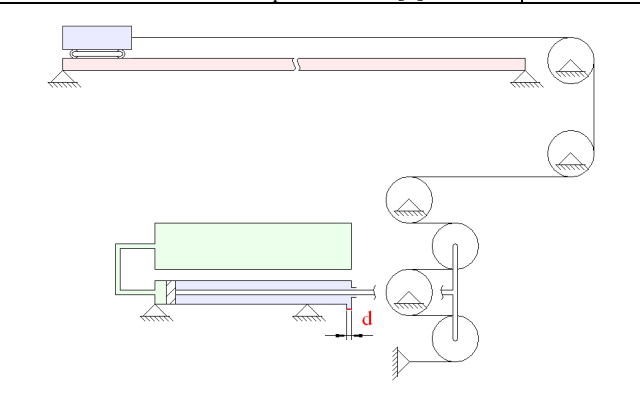
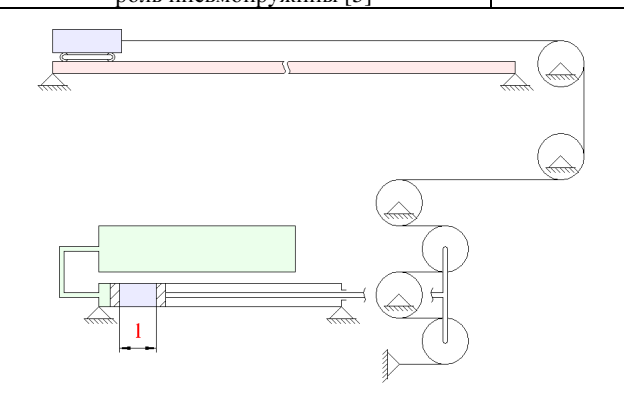
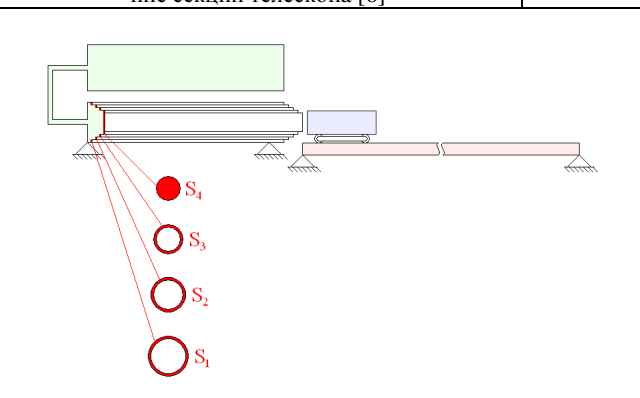
где  $\overline{F} = \rho \left\{ 1, \omega, S, w, \varepsilon^0 \right\}$  – обобщенные потоковые вектор-матрицы;  $\overline{\Phi} = \sum_{k=1}^3 \vec{i}_k \overline{\Phi}_k$  – вектор-матрица конвективных и волновых процессов;  $\overline{\Phi}_k = \overline{F} w_k + p(0, 0, 0, \delta_{1,k}, \delta_{2,k}, \delta_{3,k}, w_k)$  – проекции вектор-матрицы конвективных и волновых процессов на оси координат;  $\overline{\Delta}_{(n)} = \left\{ 0, \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}, \frac{\partial(\rho S)}{\partial t}, \vec{f}, \frac{\partial(\rho\varepsilon^0)}{\partial t} \right\}_{(n)}$  – вектор-матрица «свободных» источников-стоков (ИС);  $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$  – вектор скорости;  $\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$  – вектор напряженности поля массовых сил;  $f_1, f_2, f_3$  – проекции вектора напряженности;  $\rho$  – плотность;  $\varepsilon^0$  – внутренняя энергия по полным параметрам;  $M_M$  – общее число групп ИС, обусловленных субстанциональным переносом;  $M_C$  – общее число групп «свободных» ИС;  $\vec{i}_k$  – орты прямоугольной системы координат;  $k$  – индекс направления в пространстве;  $(...)_{(n)}$  – индексы групп особенностей.

В комплект условий однозначности решения векторно-матричного уравнения унифицированной модели течения входят начальные и граничные условия, термическое и калорическое уравнения состояния, соотношения интенсивности ИС. Для решения подсистемы уравнений (4) применяется конечно-разностная модифицированная для граничных ячеек расчетной подобласти схема С. К. Годунова на регулярной временной сетке. Факторы рабочего процесса различной физической природы отображаются аппаратом ИС массы, импульса и энергии



двух типов: субстанциональных и «свободных».

Таблица 1 – Функции передаточного отношения (трансмиссии) и органов газораспределения (привода) различных НПУ

НПУ с вариатором копирного типа [1]	$y = f(x)$	НПУ с вариатором полиспастного типа [2]	$\alpha_H$
			
НПУ с многоразовым подводом рабочего тела вдоль цилиндра [3]	$x_{1...3}$	НПУ с демпфирующей камерой, создающей заданный закон сопротивления [4]	$d$
			
НПУ с промежуточной камерой, играющей роль пневмопружины [5]	$l$	НПУ реализующая последовательное разложение секций телескопа [6]	$S_{1...4}$
			

Для отображения условий взаимодействия потока с трансмиссией в расчетной области задается система твердотельных масок, кинематика которых определяется решением уравнений динамики. Описание динамики подвижных элементов трансмиссии осуществляется на основании уравнения Лагранжа II рода. Удобство данного уравнения состоит в простой аппликации разнородных с точки зрения особенностей конструкции (табл. 1) и придания вследствие этого механической подмодели формальной однородности и простоты представления вне зависимости от физического принципа действия трансмиссии.

**Концепция проектирования компактных НПУ.** Одним из путей решения вариационной задачи, то есть задачи нахождения экстремали некоторого функционала при заданных граничных условиях, является сведение этой задачи к краевой для дифференциального уравнения Эйлера этого функционала. Возможность построения такого рода методов оптимизации на базе формального аппарата вариационного анализа ввиду многообразия форм рабочего процесса НПУ и соответствующих им систем уравнений, в общем случае – не линейных и выстроенных по принципу открытой архитектуры, не представляется сколько-нибудь реальным предприятием.

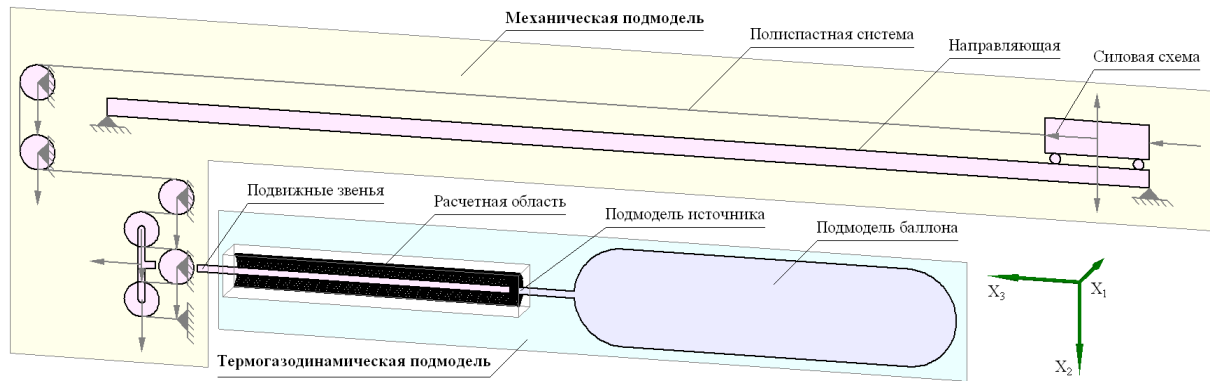


Рис. 1 – Структура комплексной физико-математической модели НПУ.

В связи с тем, что в данной постановке расчет ведется по готовому виду устройства, отпадает необходимость в поиске вариации функционала. Предлагается использование прямого одномерного дискретного метода условной параметрической оптимизации. Для определения уровня совершенства рабочего процесса НПУ при варьировании соответствующего параметра  $\bar{P}_T$  или  $\bar{P}_D$  применяется норма регрессии работы тепловой расширительной машины катапульты  $\|\bar{F}L\| = |\bar{F}|L$ .

При разгоне БЛА с постоянной продольной стартовой перегрузкой  $n_x = const$  должна совершаться фиксированная работа  $\bar{A}$ , с точностью до константы соответствующая постоянному тяговому усилию привода  $\bar{A} = \bar{F}L = const$ . Эти параметры характерны для идеального случая, но реальная конфигурация катапульты, не соответствующая постоянной перегрузке, даст отклонение от нормы средней суммарной работы  $A_ = F_L = var$ . Отсюда, норма неравновесного состояния работы расширительной машины НПУ имеет следующий вид:

$$\|(F_- - \bar{F})\Delta x\| = |F_- - \bar{F}|\Delta x, \quad (5)$$

где  $\Delta x$  – интервал нормирования;  $F_-$  – отклонение тягового усилия.

Подобно коэффициенту полноты индикаторной диаграммы поршневого двигателя внутреннего сгорания, который показывает степень соответствия реального двигателя идеальному, норма регрессии работы расширения привода НПУ может быть представлена в виде безразмерного критерия (аналога КПД) – коэффициента полноты циклограммы тяги (КПЦТ), на основании которого целесообразно проводить оценку рабочего процесса:

$$\kappa = \frac{A_-}{A}. \quad (6)$$

Наилучшими показателями компактности обладает катапульта, у которой значение управляемого параметра  $\bar{P}_q^*$  обеспечивает максимальное значение КПЦТ  $\kappa(\bar{P}_q^*)$  в области допустимых решений  $D \neq \emptyset$ . При этом множество допустимых решений  $\bar{P}_q \in D$  задается ограничениями типа неравенств по предельно допустимой стартовой перегрузке  $n_{x \text{ ПД}}$  и минимальной скорости ввода в полет БЛА  $V_{0 \text{ min}}$ :

$$\left\{ \kappa(\bar{P}_q^*) = \max_{\bar{P}_q \in D} \kappa(\bar{P}_q); n_x(x) \leq n_{x \text{ ПД}}, \forall x \in L; V_0(L) \geq V_{0 \text{ min}}. \right. \quad (7)$$

Наилучшее значение параметра ищется путем решения прямой задачи проектирования НПУ с последующей оценкой полноты совершенной работы по разгону БЛА. Диапазон изменения управляемого параметра трансмиссии  $\bar{P}_T$  или привода  $\bar{P}_D$  задается исходя из условий работоспособности образца, согласно которым значения не подлежат изменению по техническим требованиям. Шаг, с которым изменяется управляемый параметр, назначается исходя из располагаемых вычислительных мощностей и допустимых временных затрат. Структурная схема концепции проектирования компактных НПУ представлена на рис. 2.

Расчетный инструментариум реализован в виде авторского программного продукта на языке Visual Fortran, позволяющего синхронно отображать характеристики трансмиссии и привода (рис. 3). Процесс в цилиндре пневмопривода представлен в виде *цветовых карт* физических полей основных параметров (давления, температуры, скорости и др.), а состояние подвижных частей – графиками изменения характеристик в зависимости от положения БЛА на направляющей.

**Результаты расчетов.** Анализ рабочего процесса всех типов НПУ свидетельствует о существенном влиянии на динамику старта БЛА распространяющихся в расширительной машине слабых волн разряжения-сжатия. Картина волнового процесса, зарегистрированная в численном эксперименте (рис. 3), представляет собой сплошной шум, состоящий из колебаний относительно некоторой средней линии, характеризующей закономер-

ность изменения тягового усилия. Новизна и отличительные особенности предлагаемого подхода состоят в том, что на этапах параметризации расчет вариантов проводится с помощью ФММ, уровень проработки которой позволяет отобразить сильную нестационарность.

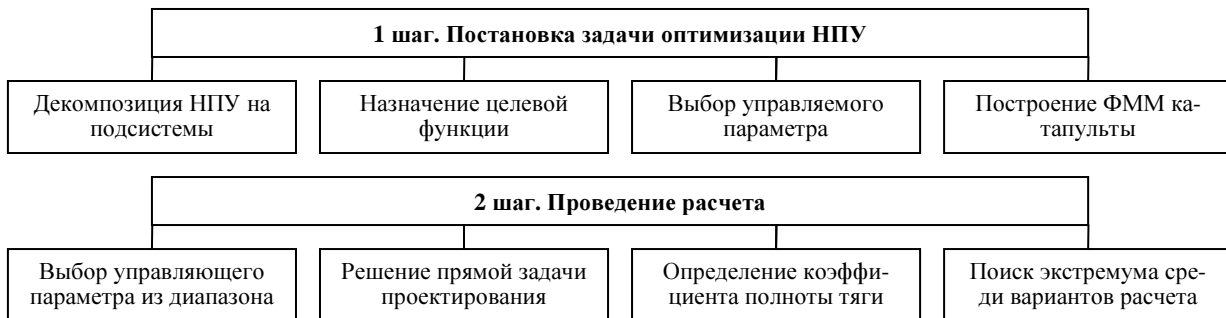


Рис. 2 – Структурная схема концепции проектирования компактных НПУ для запуска БЛА.

Результатом применения предлагаемого метода оптимизации стало достижение постоянного либо близкого к постоянному тягового усилия с полнотой совершения работы 89 ... 100 %, и, как следствие, сокращение длины направляющей на 10 ... 33 % по сравнению со штатной конфигурацией при гарантии достижения заданной скорости схода БЛА с направляющей. В конечном итоге, указанное повышение компактности позволяет размещать односекционное НПУ в разложенном состоянии на легком шасси (в кузове автомобиля, палубе катера и пр.) и, тем самым, повысить мобильность всего беспилотного комплекса.

Рассматриваемые варианты приводов в порядке убывания уровня совершенства выстроены в виде последовательности на основании оценки КПЦТ и процентного выражения сокращения длины направляющей по отношению к стандартной конфигурации (табл. 2). НПУ на основе вариатора полиспастного типа с изменяемым углом наклона троса является наименее ресурсоемким по причине использования стандартных комплектующих. Однако НПУ такого типа обеспечивает минимальный уровень совершенства динамических характеристик и позволяет сократить направляющую всего на 10 %.

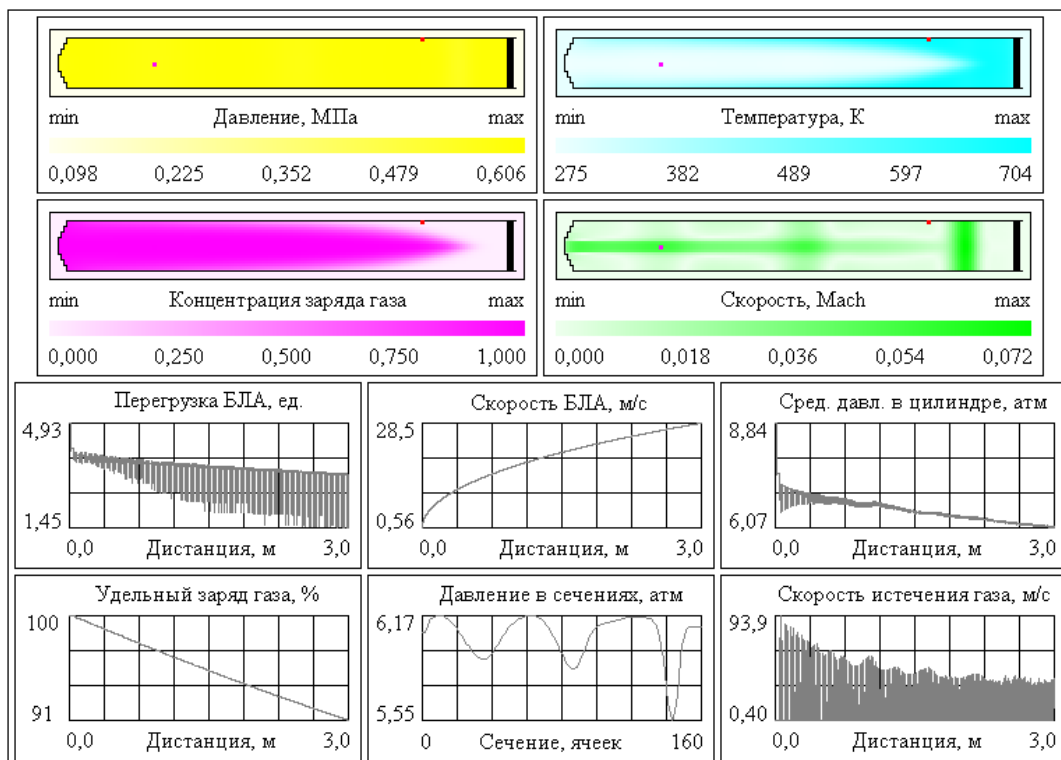


Рис. 3 – Фаза завершения рабочего цикла НПУ с пневмоприводом (временной срез 0,2025 с).

Оптимизация динамических характеристик НПУ с телескопическим приводом позволяет сократить дистанцию разгона на 33 % по сравнению со штатной конфигурацией. Это достигается значительными затратами: переделкой всей расширительной машины вследствие подбора рабочих площадей и оснащением механическими замками для последовательного разложения секций. Достичь максимального совершенства работы не удастся по причине реализации пилообразного изменения теплового усилия с КПЦТ 0,95 (табл. 2).

Таблиця 2 – Сравнение способа достижения оптимальных динамических характеристик

Уровень совершенства	Тип НПУ (особенности устройства трансмиссии или/и привода)	КПЦТ	Сокращение длины направляющей, %
1	Телескопический привод	0,95	33
2	Многоразовая подача газа вдоль цилиндра	0,89	13
3	Вариатор копирного типа	1,00	12
4	Пневматический демпфер	1,00	11
5	Цилиндр со свободным поршнем	0,98	11
6	Вариатор полиспастного типа	0,98	10

**Выводы.** Предложена концепция проектирования компактных НПУ для запуска БЛА, базирующаяся на нормировании тягового усилия привода тепловой расширительной машины и позволяющая сократить длину направляющей на 10 ... 33 % путем замены невыгодного регрессивного закона тяги постоянным.

На основании результатов опережающих численных исследований разработаны схемы организации рабочего процесса НПУ, которые в наибольшей степени удовлетворяют требованиям по обеспечению постоянства тягового усилия при сохранении заданных параметров старта летательного аппарата.

На основе культивируемого подхода получены диапазоны оптимальных параметров привода или трансмиссии катапульта различного типа. Концепция проектирования распространяется на обширный класс задач проектирования НПУ, содержащих в себе тепловую расширительную машину и механическую трансмиссию.

Решение задачи параметризации на основании континуальной нестационарной ФММ позволяет получить оптимальную длину направляющей НПУ с высокой точностью и уровнем приближения к реальному образцу, в чем заключается преимущество предлагаемой концепции по сравнению с существующими.

**Список литературы:** 1. Brain T. McGeer, Andreas H. von Flotow, Cory Roeseler Methods and apparatuses for launching unmanned aircraft, including releasably gripping aircraft during launch and breaking subsequent grip motion // United States Patent. Patent Number: US 7,165,745 B2. Date of Patent: Jan. 23, 2007. 2. Патент Украины на полезную модель № 68219. МКП В64F 1/100. Способ компенсации падения тягового усилия привода катапульта / Середя В. А.; заявитель и патентовладелец Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т». – У 2011 07117; заявл. 06.06.2011; опубл. 26.03.2012. Бюл. № 6. – 4 с.: илл. 3. Середя В. А. Оптимизация динамических характеристик наземной катапульта с многокаскадным пневмоприводом // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 5 (122). – С. 16 – 20. 4. Середя В. А. Настройка пневмопривода наземной катапульта на постоянный закон тягового усилия // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. С. П. Королева (Национальный исследовательский университет). – 2013. – № 2 (40). – С. 40 – 45. 5. Середя В. А. Пневматический привод наземной катапульта со свободным поршнем // Вестник МАИ. – 2014. – № 3, т. 21. – С. 36 – 43. 6. Патент Украины на полезную модель № 65105. МКП В64F 1/100. Способ регулирования тягового усилия привода катапульта / Амброжевич А. В., Середя В. А.; заявитель и патентовладелец Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т». – У 2011 05796; заявл. 10.05.2011; опубл. 25.11.2011. Бюл. № 22. – 3 с.: илл.

**References:** 1. Brain T. McGeer, Andreas H. von Flotow and Cory Roeseler. *Methods and apparatuses for launching unmanned aircraft, including releasably gripping aircraft during launch and breaking subsequent grip motion*. United States Patent, no. US 7,165,745 B2, Jan. 23, 2007. 2. Sereda, V. A. Sposob kompensatsii padeniya tyagovogo usiliya privoda katalup'ty [A method of compensating the catapult drive traction drop]. Patent UA, no. 68219. МКП В64F 1/100. Zayavitel' i patentovladelec Natc. aerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo "Khark. aviatic. in-t" [N. E. Zhukovsky National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute»]. U 2011 07117, zayavl. 06.06.2011, opubl. 26.03.2012, Byul. no. 6. 3. Sereda, V. A. Optimizatsiya dinamicheskikh kharakteristik nazemnoy katalup'ty s mnogokaskadnym pnevmoprivodom [Optimization of dynamic characteristics of ground catapult with multistage pneumatic drive]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*. 2015, no. 5 (122), pp. 16–20. 4. Sereda, V. A. Nastroyka pnevmoprivoda nazemnoy katalup'ty na postoyannyy zakon tyagovogo usiliya [Setting the ground pneumatic catapult to a constant law of traction force]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. S. P. Korolyova (Natsional'nyy issledova-tel'skiy universitet)* [Bulletin of the S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)]. Samara, 2013, no. 2 (40), pp. 40–45. 5. Sereda, V. A. Pnevmaticheskyy privod nazemnoy katalup'ty so svobodnym porshnem [Pneumatic drive of ground catapult with free piston]. *Vestnik MAI* [Bulletin of the Moscow Aviation Institute]. Moscow, 2014, no. 3, vol. 21, pp. 36–43. 6. Ambrozhevich, A. V. and Sereda, V. A. Sposob regulirovaniya tyagovogo usiliya privoda katalup'ty [A method of regulating the catapult drive traction force]. Patent UA, no. 65105. МКП В64F 1/100. Zayavitel' i patentovladelec Natc. aerokosm. un-t im. N. E. Zhukovskogo "Khark. aviatic. in-t" [N. E. Zhukovsky National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute»]. U 2011 05796, zayavl. 10.05.2011, opubl. 25.11.2011, Byul. no. 22.

Поступила (received) 16.03.2016

#### Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Середя Владислав Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри Конструкції і проектування ракетної техніки факультету Ракетно-космічної техніки Національного аерокосмічного університету ім. М. С. Жуковського «ХАІ», Харків; тел.: 738 – 44 – 01; e-mail: sereda\_vlad@ukr.net.

**Середя Владислав Александрович** – кандидат технических наук, доц. кафедры Конструкции и проектирования ракетной техники факультета Ракетно-космической техники Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков; тел.: 738 – 44 – 01; e-mail: sereda\_vlad@ukr.net.

**Sereda Vladislav Aleksandrovich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Construction and Design of Missile Technology, N. E. Zhukovski National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: 738 – 44 – 01; e-mail: sereda\_vlad@ukr.net.

УДК 519.6; 532.5

Д. И. ЧЕРНИЙ

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Рассмотрены вычислительные технологии для разрешения проблемы (метода дискретных вихрей), связанной с аппроксимацией непрерывных границ упорядоченной системой дискретных вихрей в задачах моделирования плоских нестационарных течений. Метод и алгоритм предназначены для вычисления непрерывных характеристик (определяемых через неоднозначные функции) в области их определения вплоть до ее границ, являющихся естественными линиями разрыва непрерывных характеристик. Предлагаемый метод и алгоритм преобразования системы дискретных особенностей универсальны для границ произвольной геометрии («ветвистые» контура, замкнутые контура). Результаты преобразований позволяют вычислять кинематические и динамические характеристики для отрывных течений, с учетом возникновения новых элементов границ в точках отрыва.

**Ключевые слова:** метод дискретных вихрей, метод дискретных особенностей, вычислительные технологии.

**Введение.** При рассмотрении процесса отрывного обтекания потоком тела сложной формы предполагается, что возникающие вихревые структуры состоят из складок вихревых поверхностей конечной толщины, которые, в свою очередь, состоят из *вихревых трубок* конечной толщины. Приближение вихревой трубки бесконечно тонкой *вихревой нитью* (линей) предполагает замену вихревой поверхности конечной толщины бесконечно тонкой вихревой поверхностью – *вихревой пеленой*, состоящей из бесконечно тонких вихревых нитей (линий). В силу сделанных допущений, начально-краевая задача для процесса обтекания с тонкими вихревыми слоями может быть сведена к системе совместных задач – краевой задаче для уравнения Лапласа в деформирующейся области (с условиями Неймана на одной части границ и с условием Дирихле на другой ее части) и задаче Коши (для определения измененной границ области).

Для решения вышеназванных задач используется *метод дискретных вихрей* (МДВ), который основывается на аппроксимации непрерывной вихревой пелены набором упорядоченных дискретных вихревых систем, состоящих из бесконечно тонких вихревых нитей (линий). Следует отметить, что, математическая модель течения, построенная на основе метода дискретных вихрей, только аппроксимирует вихревое течение циркуляционным течением. Кроме того, использование МДВ для математического моделирования плоского нестационарного течения в области с произвольной криволинейной и деформирующейся границей, осложняется проблемой невозможности прямого вычисления (даже по уже определенным параметрам системы дискретных вихрей, аппроксимирующих границу) искомых непрерывных характеристик (таких как потенциал течения, производная по времени от потенциала, нестационарное поле давления) во всей области течения, вплоть до ее границ. Для вычисления же вышеназванных характеристик требовалось решение дополнительных задач (с использованием уже определенных параметров системы дискретных вихрей), что связано со значительными трудностями и неудобствами [1 – 8].

Ниже, для плоского случая, представлены вычислительные технологии (методы и алгоритмы для моделей МДВ), основанные на преобразованиях дискретно-вихревых систем в системы дискретных особенностей, порожденных однозначными функциями [10, 11].

**Анализ проблемы.** При решении ряда задач удобно использовать аппарат теории функций комплексного переменного, с аналитическими по  $z$  функциями и интегральными представлениями, определенными на ограниченном (в общем случае незамкнутом) контуре  $L_{ab}$ . Предполагается, что заданным разбиением контур может быть представлен в виде суммы дуг

$$L_{ab} = \sum_{j=1}^M L_j = \sum_{j=1}^M L_{\omega_{j-1}\omega_j}.$$

В силу чего для интегрального представления с логарифмическим ядром справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln \left( 1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right) d\omega. \quad (1)$$

При заданном разбиении для всех точек  $z$ , отстоящих от контура  $L_{ab}$  на расстояние больше чем  $\rho_0$ , выполняется условие

$$\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1,$$

где  $\Delta = \max_j |L_{\omega_{j-1}\omega_j}|$  и справедлива оценка:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln \left( 1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \ln^2 \left( 1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right) + \left( \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

В силу чего [9] получаем равенство:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O\left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right), \quad (3)$$

где

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \text{ так, что } \Gamma_0 = \int_{\sum_j L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^M \Gamma_j. \quad (4)$$

Следует обратить внимание на интегральное представление с логарифмическим ядром в левой части (3), где подинтегральное выражение является многозначной функцией с точкой ветвления  $\omega \in L_{ab}$ . В правой части равенства представлена сумма комплексных логарифмов (погрешностью пренебрегаем). Равенство для любой точки  $z$  считается вполне определенным и имеет место при условии, что для многозначных функций  $\ln(z - \omega)$  выбрана ее ветвь и задан разрез, проходящий вдоль контура  $L_{ab}$ . Для выделения выбранной ветви форма разреза безразлична, но для выделения непрерывного (в области) значения функции удобно, чтобы разрез проходил вдоль моделируемого контура.

Однако, если для левой части равенства об этом можно условиться и считать разрыв проходящим вдоль контура  $L_{ab}$  (рис. 1, а), то для правой части система разрезов будет проходить по лучам (рис. 1, б), соединяющим точки  $\omega_{0j} \in L_{ab}$  с бесконечно удаленной точкой  $\infty$ .

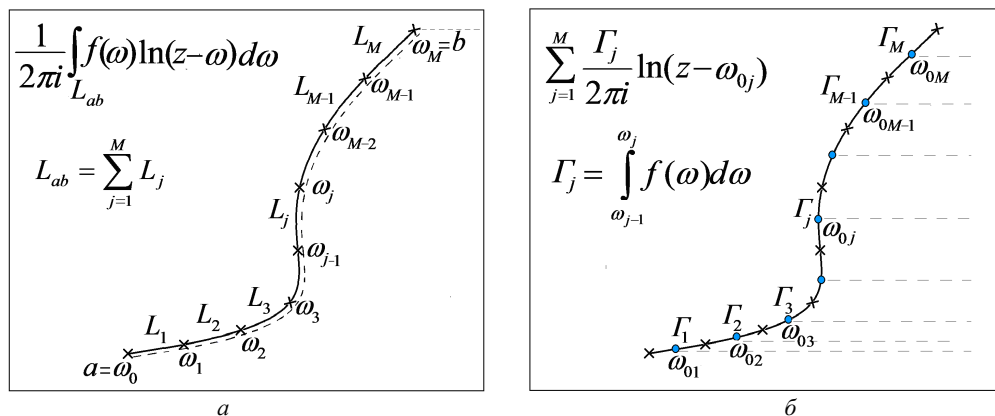


Рис. 1 – Линия (линии) разреза, выделяющие область однозначности для выражения (3): а – вдоль контура, для интегрального представления; б – по лучам, для дискретного представления.

На рис. 1 продемонстрирована основная проблемой метода дискретных вихрей – принципиальная невозможность построения непрерывной вне моделируемого (системой дискретных вихрей) контура характеристической функции, оставаясь, при этом, в терминологии метода дискретных вихрей (*вихреисточников*). Сохранить непрерывной в области выбранную ветвь многозначной функции возможно лишь (исключив обход вокруг точки ветвления) проведением разрезов плоскости вдоль контура (рис. 1, а), что невозможно в случае МДВ (рис. 1, б).

**Метод решения проблемы.** Если для интегрального представления (1) (имеющего смысл потенциала – характеристической функции) и можно условиться, что разрез в области совпадает с контуром, то при вычислении потенциала – характеристической функции в аддитивном представлении МДВ (3), рис. 1, б, направления разрезов уже единообразно (система лучей) для всей системы дискретных вихрей. В результате возникает система разрезов значений функции вне контура, которую невозможно устранить изменением числа дискретных вихрей. Однако, проблему разрывности значений функции вне контура можно разрешить. Для этого необходимо построение преобразования, позволяющего определять однозначную ветвь и положение единственного разреза в области, для многозначной функции, определенной на произвольном криволинейном контуре [5, 7].

**Преобразование для определения однозначной ветви и положения разреза многозначной функции (заданной на простом контуре).** Для упорядоченной системы дискретных вихрей (аппроксимирующих) интегральное представление (3) допустимо преобразование вида (5) – переход к представлению в виде системы вихревых пар [5, 7] и суммарного вихря:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}). \quad (5)$$

Считается (условно), что линия разреза (совпадающая с линией контура), выделяющая область однозначности для функции, порожденной системой вихревых пар (рис. 2, а), формируется из системы разрезов между вихревыми парами. Обеспечить выполнение данного условия возможно преобразованием [10, 11] (при использовании *теоремы Лагранжа о конечном приращении* [12]) системы вихревых пар и суммарного вихря:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1} + \omega_{0j+1} - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})}{\omega_{0j+1} - \omega_{0j}} \right) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) \quad (6)$$

к системе диполей и суммарного вихря

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (7)$$

или, иначе

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (8)$$

где

$$\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j}), \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k. \quad (9)$$

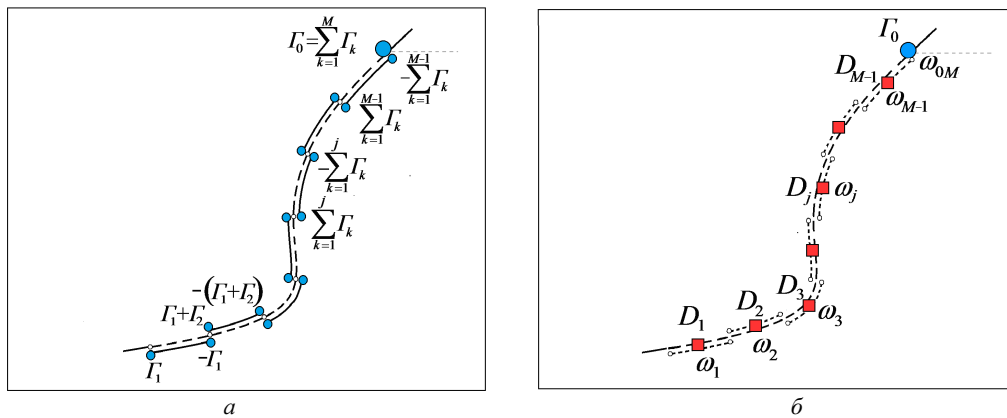


Рис. 2 – Линия разреза, выделяющая область однозначности для выражения (5), (6): а – для системы вихревых пар и суммарного вихря; б – для системы диполей и суммарного вихря.

Для аддитивного представления в виде суммы дискретных вихрей

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0j}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (10)$$

действительная часть имеет вид суммы многозначных функций с точками ветвления  $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}, \quad (11)$$

мнимая часть имеет вид суммы однозначных функций с логарифмическими особенностями в точках  $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$  (или логарифмической функцией от произведения с особенностями в тех же точках)

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{0.5} = \ln \left( \prod_{j=1}^M \left( (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{\frac{\Gamma_j}{4\pi}} \right). \quad (12)$$

Для той же функции, с аддитивным представлением в виде суммы диполей и логарифма

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (13)$$

действительная часть имеет вид суммы однозначных функций с особенностями (полусы) и одним многозначным арктангенсом, с точкой ветвления  $(x_{0M}, y_{0M})$  :

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0M}}{x - x_{0M}}; \quad (14)$$

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2 \right)^{0.5}. \quad (15)$$

**Преобразование для определения однозначной ветви и разреза многозначной функции (заданной на произвольном контуре).** Случай произвольного контура может быть сведен к системе связанных ветвистых контуров. Ветвистый контур отличается от предыдущего случая (простого контура) перенумерацией дискретных вихрей на контуре, в зависимости от индекса ветви.

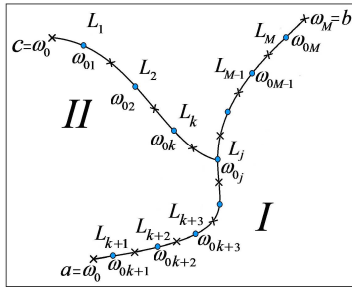


Рис. 3 – Разбиение ветвистого контура.

Ветви на ветвистом контуре, показанном на рис. 3, разделяются по уровням: I – первичный (основной) и II – вторичный. Изначально заданная нумерация вихрей на ветвистом контуре должна быть изменена в зависимости от индекса ветви, таким образом, чтоб вихрь в точке ветвления входил в число вихрей, как на основном, так и на вторичном контуре,

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}). \quad (16)$$

Перенумерация вихрей на ветвистом контуре (рис. 4) выполнена таким образом, чтоб узловой вихрь (в точке ветвления) входил в число вихрей на вторичном контуре. Число вихрей на каждой ветви определяется числами  $M_j, j = 1, 2$ . Причем, общее число вихрей

$$M = M_1 + M_2 - 1$$

(поскольку узловой вихрь считается дважды),

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^2). \quad (17)$$

В соответствии с рис. 5, преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви ветвистого контура имеет вид:

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^2}{2\pi i} \left( \ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2) \right) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (18)$$

Далее, на рис. 6 проиллюстрировано преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви ветвистого контура:

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)}{\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2} \right) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (19)$$

Или, иначе

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_{0j}^2)} + \frac{\Gamma_0^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2). \quad (20)$$

Причем, в силу того, что

$$\omega_j^2 = 0.5(\omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j}^2), \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и} \quad \Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2, \quad (21)$$

суммарный вихрь попадает в первое слагаемое правой части (22):

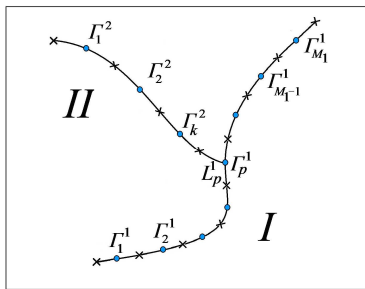


Рис. 4 – Перенумерация вихрей на ветвистом контуре.

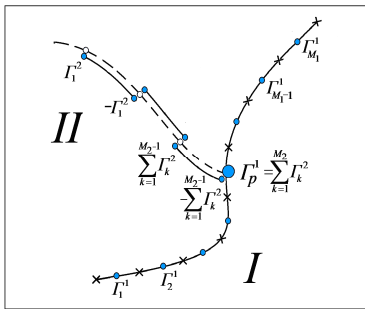


Рис. 5 – Преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви контура.

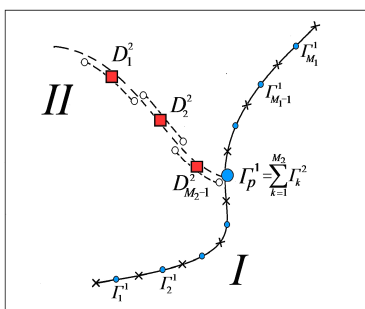


Рис. 6 – Преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви.



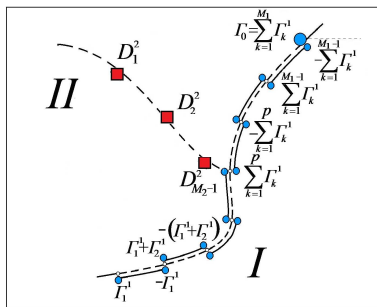


Рис. 7 – Преобразование от вихрей к вихревым парам на основной ветви.

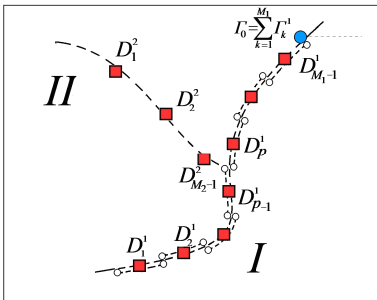


Рис. 8 – Преобразование от вихревых пар к диполям основной ветви.

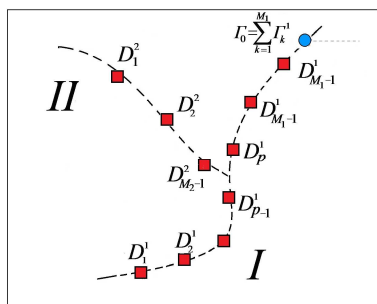


Рис. 9 – Распределение диполей и суммарного вихря.

вихря на ветвистом контуре (рис. 9) принимает вид:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z-\omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z-\omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)}, \quad (27)$$

где

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1, \quad D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p, \quad p=1,2, \quad (28)$$

а общее число диполей будет равно  $M_1 + M_2 - 2$ .

Для аддитивного представления (27) в форме суммы диполей и логарифма

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z-\omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z-\omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)} \quad (29)$$

действительная часть может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \text{Re } \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \sum_{k=1}^j \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(x - x_j^1) - (x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \text{arctg} \frac{y - y_{0M_1}^1}{x - x_{0M_1}^1} + \sum_{j=1}^{M_2-1} \sum_{k=1}^j \frac{\Gamma_k^2}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(x - x_j^2) - (x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (22)$$

Далее выполняются преобразования от вихрей к вихревым парам на основной ветви ветвистого контура (рис. 7):

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \sum_{k=1}^{M_1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}. \quad (23) \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования от вихревых пар к диполям основной ветви ветвистого контура проиллюстрированы на рис. 8:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)}{\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (24) \end{aligned}$$

они приводят к выражению для  $\Phi(z)$  в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\omega_j^1 = 0.5(\omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j}^1), \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и} \quad \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1. \quad (26)$$

Окончательно, представление в форме суммы диполей и суммарного

а мнимая часть – в виде:

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = - \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(x - x_j^1) + (y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0M_1}^1)^2 + (y - y_{0M_1}^1)^2 \right)^{0.5} - \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(x - x_j^2) + (y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right). \quad (31)$$

Разделение ветвей контура на основную и вторичную условно. Оно может быть выполнено и любым иным способом. Произвол в выборе ветвей на контуре, выборе начала и направления обхода контуров влияют только на численные значения распределенных диполей и положение суммарного вихря (от которого выполняется разрез). Замкнутость контура также не влияет на алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему диполей и суммарный вихрь, но выбор начала и конца контуров определяет положение линии разреза в области.

**Результаты использования построенных преобразований.** Для циркуляционного обтекания цилиндра известно [6] точное аналитическое решение, причём как для комплексного потенциала

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (32)$$

так и для комплексно сопряженной скорости

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \bar{V}_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi z i}. \quad (33)$$

Из графического представления полей потенциала (32) и скорости (33) видно (рис. 10, а, б, в), что поле скорости непрерывно, а поле потенциала, из-за логарифмического слагаемого, имеет линию разрыва при ненулевой циркуляции  $\Gamma$ . Линия разрыва соединяет бесконечно удаленную точку и центр цилиндра.

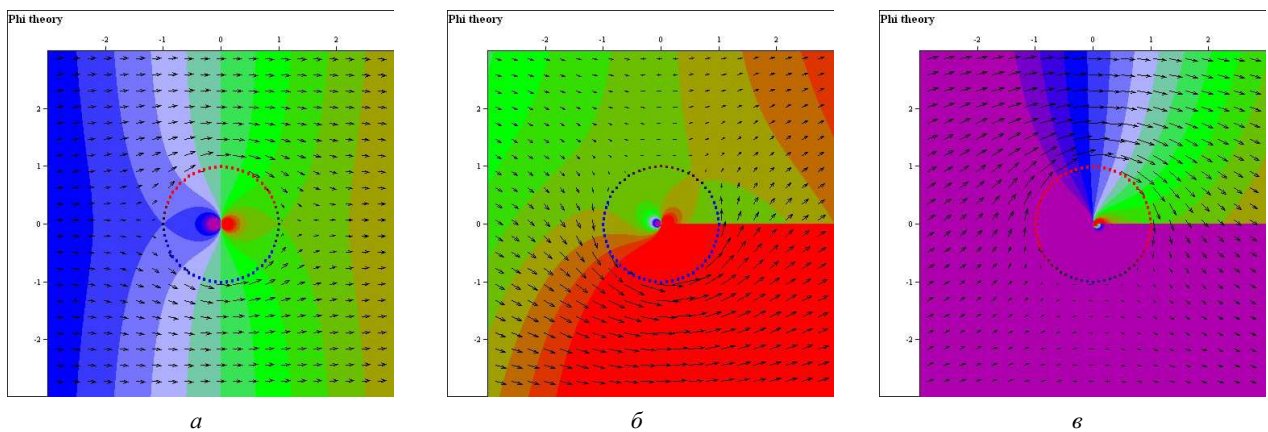


Рис. 10 – Изопотенциальные линии и поле скоростей для циркуляционного обтекания цилиндра по зависимостям (32), (33): а –  $\Gamma = 0$ ; б –  $\Gamma > 0$ ; в –  $\Gamma < 0$ .

Для описания циркуляционного обтекания цилиндра с помощью метода дискретных вихрей используются аддитивные представления для потенциала и скорости:

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_j); \quad (34)$$

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_j)}, \quad (35)$$

на основании которых поле скоростей корректно определяется (с точностью, зависящей от количества вихрей). Однако, при вычислении потенциала по (34) видно (рис. 11, а, б, в), что в правой части цилиндра появляется зона «тени» – полоса (разрывов функции) с шириной, равной диаметру цилиндра. Видно, что выражение (34) не обеспечивает корректного вычисления значений потенциала во всей области (вне границ), при любых значениях интенсивностей  $\Gamma_j$ .

Примечательно, что вышеназванная особенность не позволяет однозначно вычислять и поле давлений для нестационарного отрывного обтекания произвольных контуров [10]. Проблема возникает именно с вычислением неоднозначной логарифмической функции под знаком интеграла в точном аналитическом интегральном представлении

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega. \quad (36)$$

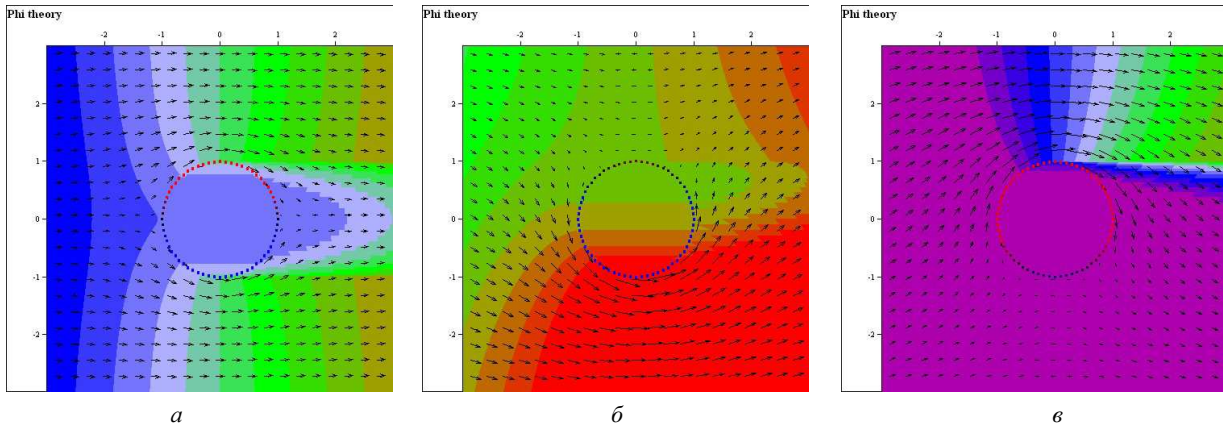


Рис. 11 – Циркуляционное обтекание цилиндра для вихревого представления (34), (35):

$$a - \sum_{j=1}^M \Gamma_j = 0; \quad б - \sum_{j=1}^M \Gamma_j > 0; \quad в - \sum_{j=1}^M \Gamma_j < 0.$$

Вышеозначенная проблема разрешается интегрированием по частям второго слагаемого в выражении (32). После интегрирования (36) по частям получаем аналог формулы (36), но не с логарифмическим ядром, а с ядром *типа Коши* под знаком интеграла:

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\left( \int_a^\omega f(\xi) d\xi \right)}{z - \omega} d\omega + \frac{\int_a^b f(\omega) d\omega}{2\pi i} \text{Ln}(z - b) \tag{37}$$

или, иначе

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma(\omega, a)}{z - \omega} d\omega + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \text{Ln}(z - b), \tag{38}$$

где

$$\Gamma(\omega, a) = F(\omega) - F(a) = \int_a^\omega f(\xi) d\xi, \tag{39}$$

$$\Gamma_0 = \Gamma(b, a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi. \tag{40}$$

Здесь логарифмическое слагаемое связано только с одной точкой *b*, от которой и проводится разрез до бесконечно удаленной точки.

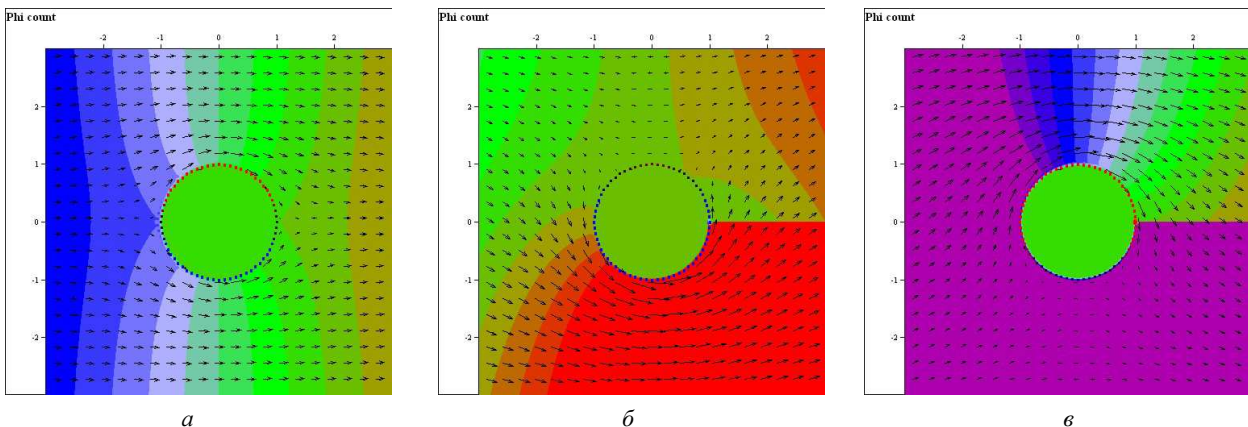


Рис. 12 – Циркуляционное обтекание цилиндра для дипольного представления (41) и вихревого представления (35):

$$a - \sum_{j=1}^M \Gamma_j = 0; \quad б - \sum_{j=1}^M \Gamma_j > 0; \quad в - \sum_{j=1}^M \Gamma_j < 0.$$

В силу выше изложенного, вместо (34), с учетом (37) и (13), целесообразно использовать дискретное представление

$$\Phi(z) = \bar{V}_\infty z + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \text{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (41)$$

где

$$\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j}), \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k. \quad (42)$$

Выражение (41) позволяет вычислять значения действительной части комплексного потенциала с единственной линией разрыва для любых замкнутых и разомкнутых контуров. Выбор начала и конца контура определяется только положением начальной точки  $a$  интегрирования по контуру  $L_{ab}$ . Линия разрыва соединяет точку конца контура с бесконечно удаленной точкой.

Из рис. 12 видно, что изолинии потенциала внутри области течения (вне цилиндра) совпадают с изолиниями на рис. 10.

**Выводы.** В работе представлен метод и алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему дискретных особенностей и суммарный вихрь. Полученные выражения позволяют вычислять непрерывные кинематические и динамические характеристики (изначально определяемые через неоднозначные функции, в терминах МДВ) в области течения вплоть до обтекаемых границ области, являющихся естественными линиями разрыва непрерывных характеристик.

**Список литературы:** 1. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Нисит М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 232 с. 2. Белоцерковский С. М., Нисит М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 351 с. 3. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, 2000. – 90 с. 4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с. 5. Довгий С. О., Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений. Теория та застосування. – Київ: Наукова думка, 2004. – 510 с. 6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Наука, 1987. – 688 с. 7. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с. 8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Из-во физ.-мат. лит.-ры, 1962. – 599 с. 9. Черний Д. И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // Обчислювальна та прикладна математика. – Київ: Київський університет. – 1997. – Вип. 2 (82). – С. 112 – 123. 10. Черний Д. И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон – 2007. – С. 315 – 318. 11. Черний Д. И. Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон – 2007. – С. 319 – 322. 12. Фиктэнгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 606 с.

**References:** 1. Belotserkovskiy, S. M., Kotovskiy, V. N., Nisht, M. I. and Fedorov, R. M. *Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallelnogo otrivnogo obtekaniya tel* [Mathematical modeling of plane-parallel separated flow around bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 232 p. 2. Belotserkovskiy, S. M. and Nisht, M. I. *Otrivnoye i bezotrivnoye obtekaniye tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'yu* [Separated and non-separated ideal fluid flow around thin wings]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p. 3. Gandel', Y. V. *Vvedeniye v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov* [Introduction to the methods of calculation of singular and hypersingular integrals]. Kharkov, Kharkov natsional'nyy universitet im. V. N. Karazina Publ., 2000. 90 p. 4. Gakhov, F. D. *Krayevyye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. 5. Dovgiy, S. O. and Lifanov, I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rinvnyan'. Teoriya ta zastosuvannya* [Method of singular integral equations. Theory and applications]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2004. 510 p. 6. Lavrent'ev, M. A. and Shabat, B. V. *Metody teorii funktsiyi kompleksnogo peremennogo: ucheb. posobiye dlya un-tov* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 688 p. 7. Lifanov, I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniiy i chislennyiy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Janus LLP Publ., 1995. 520 p. 8. Muskhelishvili, N. I. *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Izd-vo fiz.-mat. lit.-ry Publ., 1962. 599 p. 9. Cherniy, D. I. *Approksimatsiya resheniya nachal'no-kreyevoy zadachi s podvizhnymi granitsami* [Approximation of Solution of Initial-Boundary Problem with Moving Boundary]. *Obchyslyuval'na ta prykladna matematyka* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 1997, no. 2 (82), pp. 112–123. 10. Cherniy, D. I. *O problemakh opredeleniya lokal'nykh i integral'nykh kharakteristik pri reshenii nachal'no-krayevykh zadach s podvizhnymi granitsami* [On the problems of the definition of local and integral characteristics for solving initial value problems with moving boundaries]. *Trudy XIII Mezhdunarodnogo simpoziuma MDOZMF-2007* [Proceedings of the XIII International Symposium MDOZMF 2007]. Kharkov – Kherson Publ., 2007, pp. 315–318. 11. Cherniy, D. I. *Metod i algoritm vychisleniya polya davleniya pri ispol'zovanii MDO* [Method and algorithm for calculating pressure field using MDO]. *Trudy XIII Mezhdunarodnogo simpoziuma MDOZMF-2007* [Proceedings of the XIII International Symposium MDOZMF-2007]. Kharkov – Kherson Publ., 2007, pp. 319–322. 12. Fiktengol'ts, G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya T. 1* [Differential and integral calculus. Vol. 1]. Moscow, GIFML Publ., 1962. 606 p.

Поступила (received) 07.04.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Черний Дмитро Іванович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, кафедра обчислювальної математики, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: D\_Cherniy@ukr.net.

**Черний Дмитрій Іванович** – кандидат физико-математических наук, доцент, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики, кафедра вычислительной математики, г. Киев; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: D\_Cherniy@ukr.net.

**Cherniy Dmytro Ivanovych** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics, Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, tel.: (095) 830-72-87; e-mail: D\_Cherniy@ukr.net.

С. А. ШЕВЧЕНКО, С. А. ВАЛИВАХИН, А. Л. ГРИГОРЬЕВ, М. С. СТЕПАНОВ

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНЖЕТНЫХ УПЛОТНЕНИЙ ИЗ ФТОРОПЛАСТА ДЛЯ АГРЕГАТОВ ПНЕВМОАВТОМАТИКИ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

При использовании линейных дифференциальных уравнений упругой деформации тонкостенной цилиндрической оболочки переменной толщины исследовано напряженно-деформированное состояние фторопластовой манжеты с коническими боковыми поверхностями. Разработан расчетный метод для определения контактной силы между манжетой и цилиндрической поверхностью втулки или штока, который учитывает проникновение давления газа или смазки вглубь уплотняемого зазора, а также метод расчета контактной силы между манжетой и распорной пружиной, имеющей лепестковую форму. Предложены уточненные формулы для оценки силы трения в подвижных уплотнениях, которые предлагается использовать конструктору на стадии эскизного проектирования узла.

**Ключевые слова:** манжетное уплотнение, упругость манжеты, контактная задача, утечки газа, коэффициент трения фторопласта, лепестковая пружина, сухое и вязкое трение, сила трения в манжете.

**Введение и постановка задачи.** В публикации использованы и обобщены в форме соответствующих математических моделей результаты многолетних экспериментальных исследований, которые проводились в отделе агрегатов автоматики жидкостных ракетных двигателей ГП «КБ «Южное» им. М. К. Янгеля» (Днепропетровск).

Манжетное уплотнение конической формы из фторопласта используется во многих системах ракетно-космической техники (пневматических, гидравлических, криогенных, и др.), но условия их работы в разных системах имеют существенные различия. Поэтому, чтобы выйти на конкретные научные рекомендации, имеющие практическое значение, авторы ограничились применением этих устройств в агрегатах пневмоавтоматики.

На рис. 1 показана схема основного регулятора пневмосистемы многократного включения ЖРД [1], в котором используются три манжеты, уплотняющие высокое (10...34 МПа), среднее (3...10 МПа) и низкое (1...3 МПа) давление сжатого гелия. Манжеты имеют опорное кольцо (доньшко), а также скользящий и не скользящий ус (рис. 2); в данной конструкции скольжение происходит по наружному ус, и это манжеты внешнего уплотнения. В управляющем регуляторе этой же пневмосистемы (рис. 3) используется манжета внутреннего уплотнения (поз. 1) и манжета внешнего уплотнения (поз. 2).

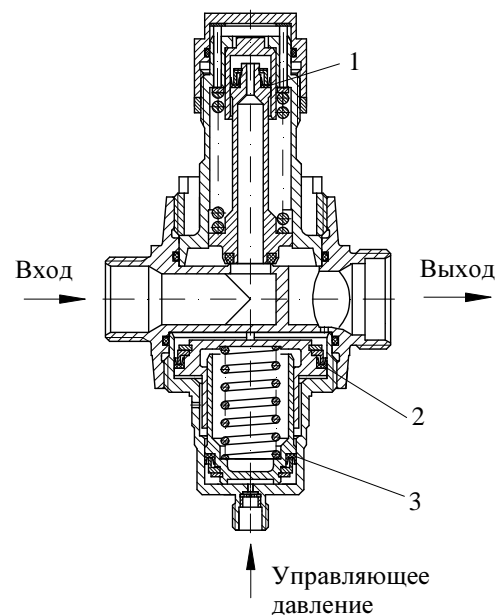
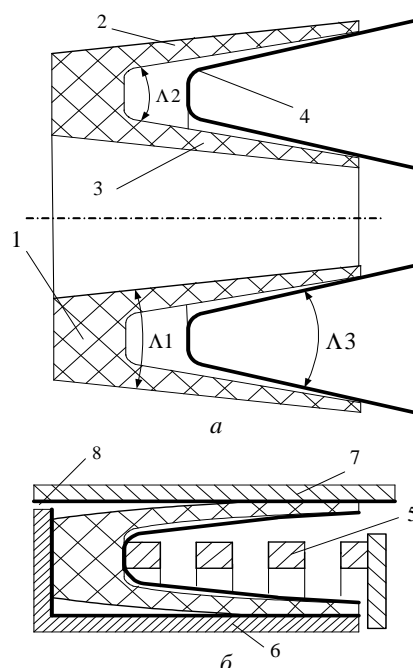


Рис. 1 – Регулятор с пневмоуправлением:  
1, 2, 3 – манжеты высокого, среднего и низкого давления.



В конструкцию уплотнения кроме манжеты, изготовленной из фторопласта-4, входит упругий элемент, прижимающий доньшко к опоре, а также (но не всегда) – распорная пружина лепестковой формы (рис. 4); эти детали изготавливаются из стали.

От силы  $F_{тр}$  трения между скользящим усом и втулкой (или штоком) зависят амплитуды колебаний клапанов и динамическая устойчивость системы в целом. Экспериментальному определению этой силы в КБЮ было посвящено несколько работ, и известная теория [2], в которой трение считается пропорциональным перепаду  $\Delta p_{уп}$  давлений газа на уплотнении, а также площади  $f_{ск}$  опорной поверхности скользящего уса манжеты и коэффициенту трения  $\zeta_{тр}$ , принимающему некоторое постоянное значение из диапазона 0.03...0.05, то есть

$$F_{тр} = \zeta_{тр} \cdot f_{ск} \cdot \Delta p_{уп}, \quad (1)$$

плохо согласуется с результатами этих испытаний.

Рис. 2 – Манжетное уплотнение: а – перед монтажом; б – после монтажа;  
1 – доньшко, 2 – скользящий ус; 3 – не скользящий ус; 4 – лепестковая пружина; 5 – упругий элемент; 6 – клапан или поршень; 7 – втулка; 8 – канал в полость низкого давления.

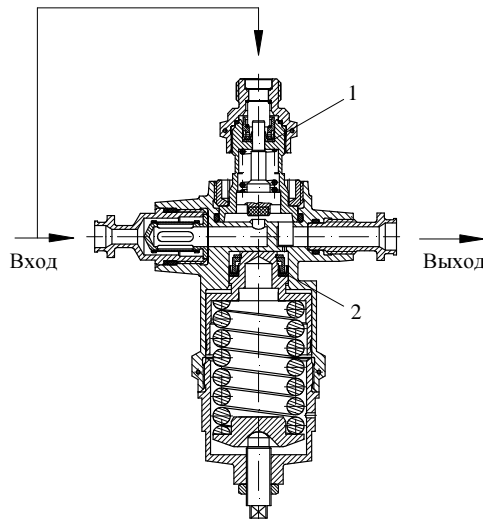


Рис. 3 – Управляющий регулятор с пружинной настройкой.

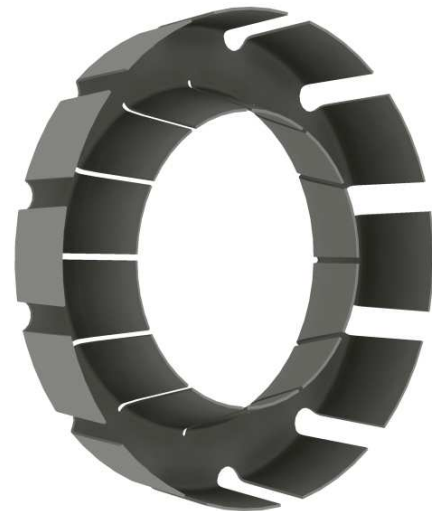


Рис.4 – Лепестковая пружина для манжеты малого диаметра.

**Целью данной работы** является уточнение формулы (1), используемой конструкторами при проектировании узла. Для достижения этой цели нужно было решить следующие задачи:

- разработать математическую модель статического (монтажного и рабочего) деформирования фторопластовой манжеты и метод расчета её напряженно-деформированного состояния (НДС);
- разработать математическую модель для анализа контактной задачи между фторопластовой манжетой и металлической втулкой (или штоком), а также метод расчета эффективного зазора и утечек газа через данное уплотнение;
- разработать метод расчета деформации лепестковой пружины и оказываемого ей распорного давления;
- сопоставить результаты моделирования с результатами экспериментального определения силы трения в уплотнении и получить формулы для расчета коэффициента трения в зависимости от величины уплотняемого давления и скорости скольжения уса фторопластовой манжеты.

Если судить по доступным литературным источникам, а также обзорам из диссертационных работ [3, 4], методы расчета НДС конической манжеты и лепестковой пружины, а также постановка и решение контактной задачи для фторопластового уплотнения, ранее не публиковались.

**Расчетные уравнения НДС манжеты.** Угол конусности внешней поверхности уса манжеты мал (обычно не превышает  $8^\circ$ ), поэтому в методе использованы линейные дифференциальные уравнения *тонкостенной цилиндрической оболочки* переменной толщины. Для динамической осесимметричной задачи они имели следующий вид [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \partial^2 u / \partial t^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\partial^2 u / \partial x^2 + (\nu/R) \cdot \partial w / \partial x) \\ \rho \cdot \partial^2 w / \partial t^2 = \frac{1}{2h} \cdot kz \cdot \frac{\partial}{\partial x} (E \cdot h \cdot (\partial w / \partial x + \beta)) - \frac{E}{2R(1-\nu^2)} \cdot (w/R + \nu \cdot \partial u / \partial x) - \frac{1}{h} \cdot p, \\ (\rho h^2 / 12) \cdot \partial^2 \beta / \partial t^2 = \frac{1}{1-\nu^2} \partial (E(h^2 / 12) \cdot \partial \beta / \partial x) / \partial x - E / 2 \cdot kz \cdot (\partial w / \partial x + \beta) \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $x$  – координата, идущая вдоль оси манжеты (рис. 5);  $u, w$  – перемещения сечения уса манжеты в осевом и радиальном направлениях;  $\beta$  – изгиб уса;  $h(x)$  – его толщина;  $R(x)$  – радиус срединной поверхности

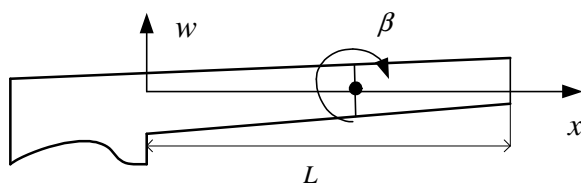


Рис. 5 – Деформации уса манжеты.

уса;  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность фторопласта – 4;  $p$  – внешнее давление, действующее на ус в радиальном направлении,

$$p = p_k + p_{z,3} \cdot (1 \pm 0.5 \cdot h/R) - p_{z,1} \cdot (1 \mp 0.5 \cdot h/R), \quad (3)$$

$p_k$  – контактное давление между усом и втулкой (оно передается через вершины выступов, которые занимают определенную долю контактной площади);  $p_{z,3}$  – давление газа в зазоре между усом и втулкой;  $p_{z,1}$  – известное

давление газа в полости перед манжетой (на ус оно действует в радиальном направлении из внутренней полости манжеты).

В правых частях уравнений (2) используются напряжения изгиба  $Q_\beta$ , сдвига  $Q_w$  и сжатия  $Q_y$ :

$$Q_\beta = [E/(1-v^2)](h/6) \cdot \partial\beta/\partial x; Q_w = E \cdot (\partial w/\partial x + \beta); Q_y = (E/(1-v^2)) \cdot (\partial u/\partial x + (v/R) \cdot w).$$

В равенстве (3) верхние знаки внутри скобок отвечают наружному усу, а нижние – внутреннему усу; эти скобки учитывают влияние толщины уса на силу давления газа.

В системе (2) используется коэффициент сдвига  $kz = 0.76 + 0.3 \cdot v$ ; для фторопласта, где коэффициент Пуассона близок к 0.4, коэффициент сдвига можно принять равным 1, что несколько упрощает дальнейшие выкладки.

Заметим, что давление  $p_{z,1}$  действует также и с торца уса, сжимая его в направлении доньшка. Но мы учтем это давление при формировании начальных условий, а в системе уравнений (2) этот фактор отсутствует.

Точкой начала контакта с опорой скользящий ус разбивается на 2 зоны – *контактную* и *свободную*.

В свободной зоне

$$p_k = 0; p_{z,3} = p_{z,2},$$

где  $p_{z,2}$  – это давление газа в полости за манжетой.

В контактной зоне давление  $p_{z,3}$  газа в зазоре переменное; оно, в первом приближении, находится при решении уравнения изотермического ламинарного течения газа по прецизионному зазору [1]:

$$\rho_{z,3}(x) \cdot dp_{z,3}(x)/dx = -\eta \cdot \rho_{z,3}(x) \cdot U_z(x) = const,$$

$\eta$  – коэффициент потерь, зависящий от плотности зазора, но, в этом приближении, не зависящий от координаты  $x$ ;  $U_z, \rho_{z,3}$  – скорость утечки и плотность газа в зазоре.

Поскольку при изотермическом течении газа плотность  $\rho_{z,3}$  пропорциональна давлению, то производная от квадрата давления газа по длине зазора является постоянной величиной.

Пусть зазор имеет длину  $Lz$  (эта величина определяется в итерационном алгоритме), тогда давление газа в зазоре изменяется по правилу

$$p_{z,3}(x) = \sqrt{p_{z,1}^2 + (p_{z,2}^2 - p_{z,1}^2) \cdot x/Lz}. \tag{4}$$

Как видим, в формулу (4) коэффициент потерь не входит, что существенно упрощает решение задачи и повышает *робастность* разработанного метода.

Теперь вернемся к системе уравнений (2) и, поскольку решается стационарная задача, обнулیم частные производные по времени. Заметим, что правая часть первого уравнения – это производная по координате  $x$  от осевого давления  $Q_y$ . Тогда из первого уравнения этой системы получим условие

$$u'_x + (v/R) \cdot w = [(1-v^2)/E] \cdot Q_y = 0,$$

поскольку давление газа на торец уса мы сейчас не учитываем. В результате приходим к условию

$$w/R + v \cdot \partial u/\partial x = [(1-v^2)/R] \cdot w$$

и, после исключения функции  $u(x)$  из второго уравнения системы (2) и сокращения всех членов этого уравнения на общий множитель  $(1-v^2)$ , получаем:

$$\begin{cases} h \cdot (w'' + \beta') + h' \cdot (w' + \beta) - (2h/R^2) \cdot w = (2/E) \cdot p; \\ [(1-v^2)/2] \cdot (w' + \beta) = (h^2/12) \cdot \beta'' + [(h \cdot h')/6] \cdot \beta'. \end{cases} \tag{5}$$

Производная  $h'$  отвечает изменению толщины уса по его длине; она от координаты  $x$  не зависит. Толщина  $h$  зависит от координаты  $x$  линейно:

$$h(x) = h_m + (tg(\Lambda 2/2) - tg(\Lambda 1/2)) \cdot (L - x),$$

где  $h_m$  – минимальная толщина уса;  $L$  – его длина;  $\Lambda 1, \Lambda 2$  – углы раскрытия внешней и внутренней поверхности уса (показаны на рис. 2).

Система уравнений (5), как и (2), записана для наружного уса. Эту же систему можно использовать для внутреннего уса, если одновременно поменять знак перед смещением  $w$ , изгибом  $\beta$  и давлением  $p$ :

$$\begin{cases} h \cdot (-w'' - \beta') + h' \cdot (-w' - \beta) - (2h/R^2) \cdot (-w) = (2/E) \cdot (-p); \\ [(1-v^2)/2] \cdot (-w' - \beta) = (h^2/12) \cdot (-\beta'') + [(h \cdot h')/6] \cdot (-\beta'). \end{cases}$$

Но теперь левую и правую части каждого из этих уравнений можно умножить одновременно на  $(-1)$ , и мы снова получим систему (5).

**Следовательно, система (5) описывает деформацию обоих усов манжеты.** Но при ее использовании нужно учитывать, что радиус кривизны  $R$  у наружного и внутреннего уса описывается разными формулами:

$$R_n(x) = 0.5 \cdot (DP - h(0)) - Y_{n,0} + tg((\Lambda 1 + \Lambda 2)/2) \cdot x, \quad R_g(x) = 0.5 \cdot (dP + h(0)) + Y_{g,0} - tg((\Lambda 1 + \Lambda 2)/2) \cdot x,$$

где  $DP, dP$  – диаметры втулки и штока;  $Y_{n,0}, Y_{g,0}$  – зазоры между наружным усом и втулкой или внутренним усом и штоком при  $x = 0$  (то есть, это максимальный зазор у основания уса).

Причем, если посадочные диаметры  $DP, dP$  невелики, то для внутреннего уплотнения слагаемое

$2h(-w)/R^2$ , которое в первом уравнении системы (5) отвечает упругой силе растяжения или сжатия при радиальной деформации  $w$ , оказывается в 5 и более раз выше (при той же толщине уса), чем для внешнего уплотнения. В этом состоит основная причина большого различия в силах трения для этих уплотнений.

**Краевая задача.** Таким образом, коэффициенты уравнений (5) описаны, и можно искать её решения. Если оценивать ситуацию формально, имеем систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} w'' = (2/E) \cdot p/h - (h'/h) \cdot (w' + \beta) + (2/R^2) \cdot w - \beta'; \\ \beta'' = [6(1-\nu^2)/h^2] \cdot (w' + \beta) - (2h'/h) \cdot \beta', \end{cases} \quad (6)$$

но в таком виде она интегрируется только для свободной зоны уса. Здесь система (6) содержит две неизвестные функции – радиальное смещение  $w(x)$  и изгиб  $\beta(x)$ , а давление  $p(x)$  известно.

Предположим, для поясняющего примера, что свободный участок занимает всю длину уса. Тогда система (6), имеющая 4-тый порядок, дополняется четырьмя условиями на краях уса:

- У доньшка манжеты должны выполняться условия защемления (то есть, совместного движения уса и доньшка).

В простейшем виде (если считать доньшко не деформируемым), условия защемления имеют вид:

$$w(0) = 0, \beta(0) = 0, \quad (7)$$

то есть, радиальное смещение и поворот сечения здесь отсутствуют.

- У свободного торца уса должны выполняться условия свободного опирания.

Здесь радиальное смещение определяет условие контакта уса и втулки (или штока)

$$w(L) = -wk(L), \quad (8)$$

где

$$wk(x) = \Delta w_M - tg((\Lambda_1 + \Lambda_2)/2) \cdot (L - x);$$

$\Delta w_M$  – радиальная деформация свободного конца манжеты после монтажа (она, в основном, определяется чертежными размерами деталей, но зависит от температуры фторопласта и величины уплотняемого давления).

Второе условие свободного опирания означает отсутствие изгибающего момента, или, что эквивалентно, выполнение равенства

$$\beta'(L) = 0. \quad (9)$$

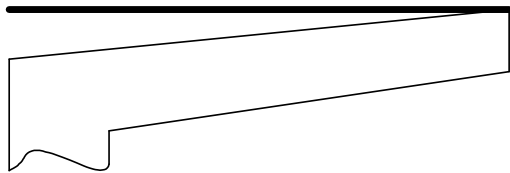


Рис. 6 – Толстый ус деформируется слабо и опирается по окружности.

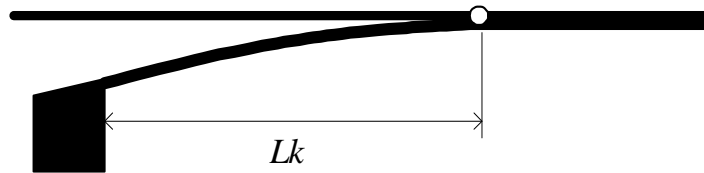


Рис. 7 – Тонкий ус имеет контактную зону цилиндрической формы.

Если бы ус имел большую толщину, то краевые условия (7) – (9) заставили бы его принять форму, показанную на рис. 6; здесь контактная зона вырождается в точку  $x = L$ . Но у манжеты усы тонкие, они гнутся, и контактная зона занимает интервал  $x \in (Lk, L)$  (рис. 7). Причем, поскольку сосредоточенные контактные силы и моменты сил мы не рассматриваем, то в точке стыка  $x = Lk$  должны выполняться условия гладкости:

$$w(Lk - 0) = w(Lk + 0), w'(Lk - 0) = w'(Lk + 0), \beta(Lk - 0) = \beta(Lk + 0), \beta'(Lk - 0) = \beta'(Lk + 0). \quad (10)$$

Для контактной зоны известно смещение  $w(x) \equiv -wk(x)$ , причем на стенке втулки

$$w'' \equiv 0, w' = -wk'(x) \equiv -w'_c = const, \text{ где } w'_c = tg((\Lambda_1 + \Lambda_2)/2).$$

Поэтому здесь изгиб  $\beta(x)$  и давление  $p(x)$  определяются как результат решения другой системы уравнений:

$$\begin{cases} (2/E) \cdot p = h' \cdot (\beta - w'_c) - (2h/R^2) \cdot w + \beta' \cdot h; \\ \beta'' = [6(1-\nu^2)/h^2] \cdot (\beta - w'_c) - (2h'/h) \cdot \beta', \end{cases} \quad (11)$$

причем второе уравнение

$$\beta'' = [6(1-\nu^2)/h^2] \cdot (\beta - w'_c) - (2h'/h) \cdot \beta' \quad (12)$$

определяет изменение угла изгиба уса вне зависимости от величины давления, и любое решение уравнения (12) в силу действия однородного условия (8) пропорционально одному из его решений, которое назовем опорным.

Найдем опорное решение  $\beta_o(x)$  уравнения (12), которое отвечает начальным условиям

$$\beta_o'(L) = 0, \beta_o(L) = 10^{-6};$$

оно показано на рис. 8.



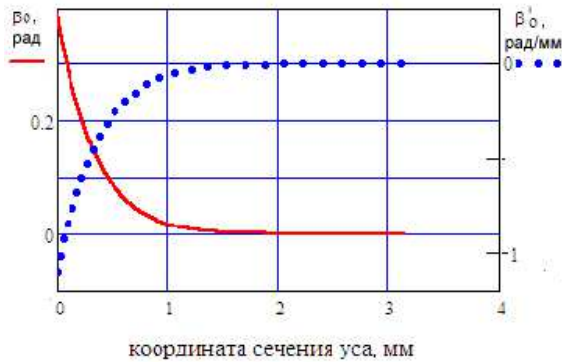


Рис. 8 – Графіки опорного рішення рівняння (12).

В этом и других случаях уравнения (или системы уравнений) НДС манжеты интегрируются численно по методу Эйлера с постоянным шагом по координате  $\Delta x \approx 1 \text{ мкм}$ .

Анализ решения показывает, что контактная зона, условно, разбивается на два участка – *изгибный*,  $x \in (Lk, Lp)$  и *плоский*,  $x \in (Lp, L)$ .

На изгибном участке напряжение изгиба  $Q_\beta$ , возникающее при повороте сечения относительно точки контакта, оказывает существенное значение на величину контактного давления, и пренебрегать им нельзя.

На плоском участке изгибающий момент мал, и (приближенно) выполняются тождества:

$$\beta - w'_c \equiv 0 \quad \text{и} \quad \beta' \equiv 0, \quad \beta'' \equiv 0.$$

В результате первое уравнение системы (11) упрощается и получает вид:

$$(2/E) \cdot p(x) = -(2h/R^2) \cdot w(x),$$

то есть суммарное радиальное давление определяется упругими силами растяжения (для внутреннего уплотнения) или сжатия (для внешнего уплотнения) кольцевого участка манжеты. Учитывая, что

$$p(x) = p_k(x) + p_{c,1}(x) - p_{c,3}(x),$$

а также зависимость (4), получаем формулу для контактного давления на плоском участке:

$$p_k(x) = -(Eh/R^2) \cdot w(x) - p_{c,1}(x) \cdot (1 \mp 0.5 \cdot h/R) + \sqrt{p_{c,1}^2 + (p_{c,2}^2 - p_{c,1}^2) \cdot (L-x)/(L-Lk)} \cdot (1 \pm 0.5 \cdot h/R).$$

Как показали расчеты, контактное давление к торцу уса убывает, но на всем плоском участке оно остается положительным (ус от опоры не отрывается), поэтому принятая расчетная схема является правильной.

Таким образом, уравнения (6) и (12) позволяют найти форму деформированного уса без определения поля контактных давлений. Проверим, что решаемая задача поставлена корректно.

Суммарный порядок дифференциальных уравнений равен 6, общее решение зависит от 6-ти констант. Еще одну константу дает координата  $Lk$  точки стыка участков. Следовательно, мы имеем 7-мь свободных констант.

Условие (8) при такой структуре решения выполняется автоматически. Краевые условия (7) и (9) включают 3 равенства; еще 4 равенства содержатся в условиях гладкости (10).

Получаем 7-мь уравнений для 7-ми неизвестных констант. Задача корректна.

Особого рассмотрения потребовал вопрос о минимальной величине зазора  $Y_{n,0}, Y_{g,0}$ . В разработанной модели учтена зависимость этих зазоров от торцевой силы давления газа:

- для мелкопрофильных манжет ( $L < H$ ; толщина доньшка 0.8 ... 1.0 мм; длина уса  $L = 3.0 \dots 3.2$  мм) –

$$Y_{n,0} = Y_n - v \cdot (1 - v^2) \cdot (0.5 \cdot H) \cdot p_{c,1} / E, \quad Y_{g,0} = Y_g - v \cdot (1 - v^2) \cdot (0.5 \cdot H) \cdot p_{c,1} / E,$$

- для крупнопрофильных манжет ( $L > H$ ; толщина доньшка 3 мм; длина уса  $L = 5$  мм) –

$$Y_{n,0} = Y_n - v \cdot (1 - v^2) \cdot (0.5 \cdot DP) \cdot p_{c,1} / E, \quad Y_{g,0} = Y_g + v \cdot (1 - v^2) \cdot (0.5 \cdot dP) \cdot p_{c,1} / E,$$

где  $Y_n, Y_g$  обозначает величину зазора в свободном состоянии (без давления газа);  $H = 0.5 \cdot (DP - dP) = 4$  мм.

Вместе с изменением зазоров под действием этой силы изменяются толщина и длина уса:

$$h(x, p_{c,1}) = h(x, 0) \cdot (1 + v \cdot (1 - v^2) \cdot p_{c,1} / E), \quad L(p_{c,1}) = L \cdot (1 - (1 - v^2) \cdot p_{c,1} / E).$$

Кроме того, учтено, что на величину зазора оказывает влияние температура, о чем подробно сказано далее.

**Алгоритмы расчета и примеры.** В программе расчета НДС манжеты используется внешний итерационный алгоритм определения точки стыка  $Lk$  и внутренний алгебраический (не итерационный) алгоритм определения начальных условий  $w'(0), \beta'(0)$  для расчета уса у доньшка манжеты.

Алгебраический алгоритм включает следующие действия. Точка стыка  $Lk$  задается во внешнем блоке. Для неё на промежутке  $x \in [0, Lk]$  выполняются три интегрирования системы (6) при следующих наборах начальных условий:

- 1)  $w(0), \beta(0), w'(0), \beta'(0) = 0$ ; 2)  $w(0), \beta(0), \beta'(0) = 0, w'(0) = 1$ ; 3)  $w(0), \beta(0), w'(0) = 0, \beta'(0) = 1$ ,

где первые два нулевых значения отвечают условию защемления, а третье и четвертое значения заранее не известны и выбираются указанным специальным образом искусственно.

Уравнения (6) линейные, поэтому  $w(Lk), w'(Lk)$  линейно зависят от начальных условий  $w'(0), \beta'(0)$ :

$$\begin{aligned} w(Lk) &= w_1(Lk) + (w_2(Lk) - w_1(Lk)) \cdot w'(0) + (w_3(Lk) - w_1(Lk)) \cdot \beta'(0); \\ w'(Lk) &= w'_1(Lk) + (w'_2(Lk) - w'_1(Lk)) \cdot w'(0) + (w'_3(Lk) - w'_1(Lk)) \cdot \beta'(0), \end{aligned} \tag{13}$$

где нижний индекс – это номер набора начальных условий.

Значения  $w(Lk)$ ,  $w'(Lk)$  известны, поэтому из системы (13) находим неизвестные  $w'(0)$ ,  $\beta'(0)$ .

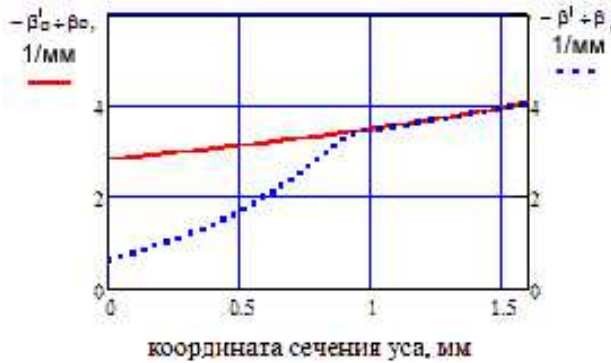


Рис. 9 – Определение точки стыка графиков.

В итерационной части алгоритма выбор длины  $Lk$  свободного участка манжеты подчинен выполнению условия

$$\beta'(Lk) / \beta(Lk) = \beta_o'(Lk) / \beta_o(Lk), \quad (14)$$

где  $\beta_o(x)$  – это опорное решение уравнения (12), показанное на рис. 8.

Графическое решение уравнения (14) показано на рис. 9. Аналитическое решение включает 2 этапа:

1. На интервале  $(0, L)$  равномерно размещаются 50 точек, и при сравнении значений левой и правой части (14) выполняется локализация корня  $Lk$ .

2. Уточнение значения корня выполняется при использовании известной процедуры дихотомии (деления отрезка пополам).

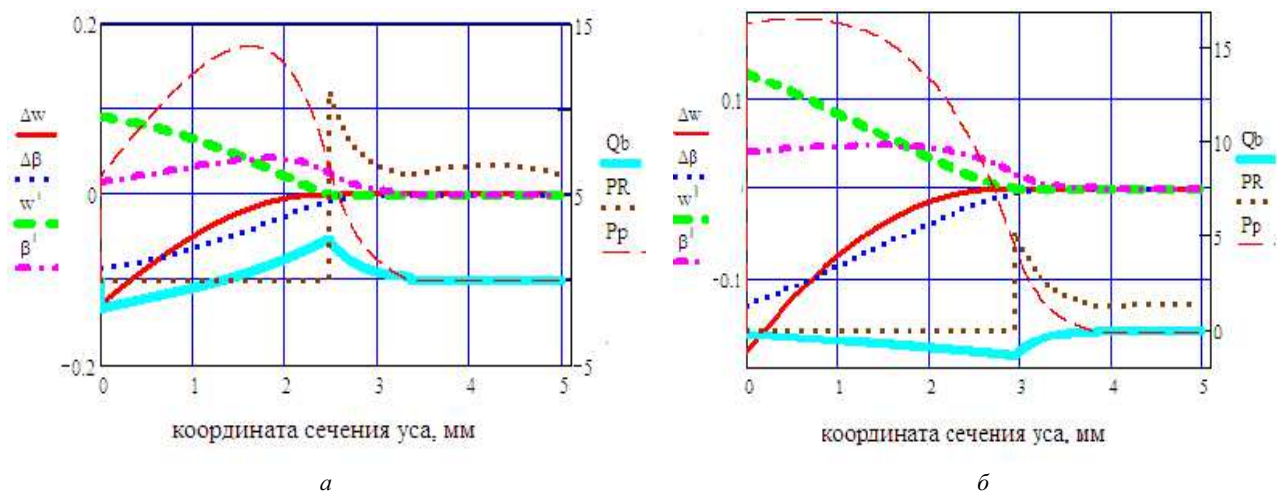


Рис. 10 – Монтажные деформации и напряжения в усах манжеты:

$a$  – внутренний ус, диаметр штока 8 мм;  $b$  – внешний ус, диаметр втулки 16 мм;

$\Delta w, w'$  – зазор и его производная;  $\Delta\beta = \beta - w'_c, \beta'$  – отклонение угла изгиба и его производная;

$Q_b, P_R, P_p$  – напряжение сдвига, прижимающее давление и растягивающее напряжение для внешней поверхности уса.

Через 20-ть шагов ширина интервала сократится в  $2^{20} \approx 10^6$  раз, и задачу нахождения длины свободного участка манжеты можно считать решенной. Теперь систему (6) (в упрощенной форме (11)) можно интегрировать дальше, продолжая решение на промежуток контактной зоны  $x \in (Lk, L)$ .

Заметим, что результирующая кривая на рис. 9 не имеет излома, то есть в точке стыка вторая производная угла изгиба  $\beta$  непрерывна. Но вторая производная осевого смещения  $w$  в этой точке разрывная, поскольку здесь происходит скачкообразное изменение контактного давления между втулкой и опорой.

В результате расчета мы получаем массивы и графики, отображающие форму деформации манжеты и суммарное прижимающее давление  $PR(x)$ , обеспечивающее такую форму деформации.

На рис. 10, 11 показаны примеры расчета по описанному алгоритму монтажных и рабочих деформаций и усилий для манжеты с параметрами  $dP = 8$  мм;  $DP = 16$  мм;  $L = 5$  мм. Контактное давление и напряжения указаны в МПа. Растягивающее напряжение на внешней поверхности уса рассчитывается по формуле:

$$P_p = Q_\beta - p.$$

Как видно из этих рисунков, для внешнего уплотнения основное контактное давление сосредоточено на относительно узком изгибном участке, где в этих и других случаях напрашивается заменить его сосредоточенной силой. Но мы этого делать не можем, поскольку тогда становится несостоятельным принятое предположение о постоянной величине коэффициента потерь  $\eta$ .

Для внутреннего уплотнения на рис. 10 контактное давление оказалось значительно больше (на плоском участке – в 10 раз), и суммарная сила почти в 2 раза больше. Фактор давления газа здесь не действует, следовательно, эта разница объясняется малой кривизной уса манжеты.

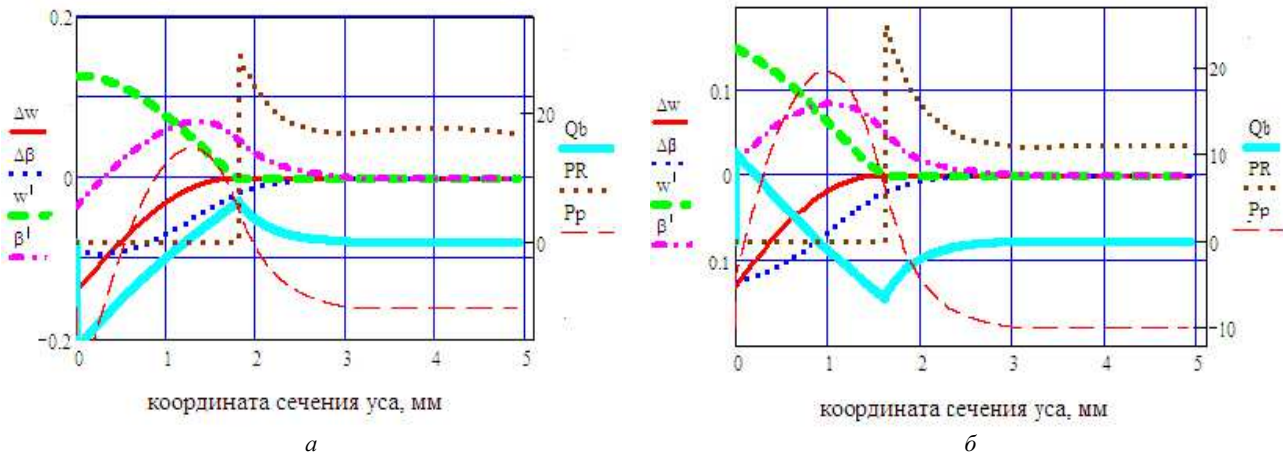


Рис. 11 – Рабочие деформации и напряжения в скользящем усе манжеты при уплотняемом давлении 10 МПа: а – внутреннее уплотнение, диаметр штока 8 мм; б – внешнее уплотнение, диаметр втулки 16 мм.

**Влияние температуры фторопласта.** В уточненной версии модели учтена зависимость физических свойств фторопласта-4 от температуры  $t, C$  (рис. 12), а именно:

- изменения модулей упругости при сжатии  $E_c$  и растяжении  $E_p$ , МПа,

$$E_c = 1080 - 15 \cdot t, \quad E_p = 725 - 10 \cdot t;$$

- изменение твердости по Бринеллю, МПа,

$$HB = \begin{cases} 40, & t < 20; \\ 40 \cdot (1 - (t - 20) / 60), & t \geq 20; \end{cases}$$

- изменение линейных размеров с коэффициентом

$$\alpha_{Fc} \approx 18 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град.}$$

Указанные коэффициенты взяты на сайте [6].

Усы фторопласта испытывают деформации сжатия и изгиба; сжатие рассчитывается при использовании модуля  $E_c$ ; при расчете изгиба на одной стороне уса наблюдается растяжение, а на другой – сжатие, поэтому здесь используется среднее значение модуля упругости

$$E = 0.5 \cdot (E_c + E_p).$$

Вследствие изменения модулей в рабочем диапазоне температур напряжения изгиба  $Q_\beta$ , сдвига  $Q_w$  и сжатия  $Q_y$  изменяются в 4 – 5 раз, что влечет изменение формы деформации уса и прижимающего давления  $PR$ .

Средний коэффициент  $\alpha_{Fc}$  линейного расширения фторопласта, полученный для рабочего диапазона температур по формуле

$$\alpha_{Fc} = \frac{1}{t - 25} \int_{25}^t \alpha(t) dt,$$

превышает коэффициент расширения алюминия или стали на порядок, и это приводит к заметному влиянию температуры на начальную величину зазора между основанием уса и поверхностью втулки или штока. Так, при увеличении температуры на 30 градусов для манжеты с уплотняющими диаметрами 16 мм и 8 мм (её характеристики показаны на рис. 10) зазор у внешнего уса уменьшается на 0.04 мм (то есть на 20%), а у внутреннего уса – увеличивается на 0.02 мм. Кроме того, пусть и не так существенно (на 0.016 мм), увеличивается длина уса.

**Расчет лепестковой пружины.** Лепестковая пружина, как и упругий элемент, разрез которого показан на рис. 2, поз. 5, обеспечивает защиту манжеты от несимметричных (и нерасчетных) форм деформации, которые возникают в случае прорыва значительных объемов газа в уплотняемый зазор. Кроме того, она способствует сохранению контакта усов манжеты с уплотняемыми поверхностями при низких давлениях перед манжетой и при высоких температурах фторопласта.

Фторопластовая манжета для этих форм оказывается мягкой и легко деформируемой, но относительно радиальной деформации, которую ей приходится испытывать при монтаже и правильной работе регулятора, она довольно жесткая. Невольно напрашивается аналогия с пластиковой бутылкой, наполненной газированной водой – если открыть крышку, то её жесткость уменьшится в десятки раз, а начальная форма может быть легко раз-

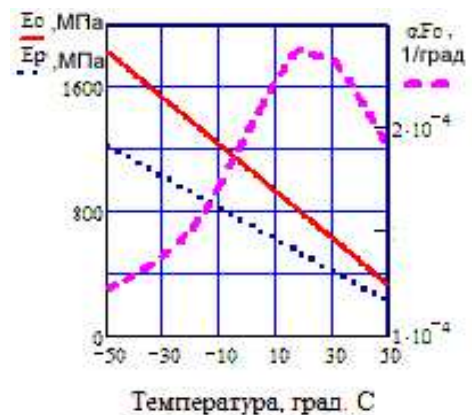


Рис. 12 – Модули упругости и средний коэффициент линейного расширения фторопласта-4.

рушена. У манжеты таких «крышек» две – со стороны полости низкого давления защитный барьер создает упругий элемент, а со стороны полости высокого давления – лепестковая пружина.

На свободном конце наружного уса давление в зазоре совпадает с уплотняемым давлением, при этом оно действует на больший периметр, что создает предпосылки для отрыва уса от поверхности втулки. Чтобы не допустить отрыва используют лепестковую пружину. Условие сохранения контакта имеет вид:

$$p_{c.1} \cdot (1 - \nu) < E \cdot \Delta R_M / R_M + p_{np} \cdot R_M / h_m, \quad (15)$$

где

$$\Delta R_M = \Delta w_M + \nu \cdot (1 - \nu^2) \cdot p_{c.1} / E, \quad R_M = 0.5 \cdot (DP - h_m)$$

– это максимальное смещение срединной поверхности уса при монтаже уплотнения (определяется чертежными размерами деталей, но зависит от температуры фторопласта) и максимальный радиус срединной поверхности уса манжеты, соответственно;  $p_{np}$  – давление, создаваемое лепестковой пружиной;  $h_m$  – минимальная толщина уса.

Для мелкопрофильных манжет коэффициент  $\nu$  в условии (15) нужно умножить на величину  $H / R_M$ .

Заметим, что в регуляторе, имеющем пневмопривод (рис. 1), все уплотнительные манжеты имеют близкие значения деформации  $\Delta R_M$  и толщины  $h_m$ , но величины  $R_M$  различаются в 2 – 4 раза. Первое слагаемое правой части (15) описывает действие упругих сил и по мере увеличения диаметра  $DP$  оно убывает. Для штока клапана регулятора (рис. 1) и его привода величина  $p_{c.1} \cdot DP^2 \approx const$ , поэтому уплотняемое давление  $p_{c.1}$  по мере увеличения диаметра  $DP$  убывает ещё быстрее. Получим формулы для расчета давления  $p_{np}$ .

Учтем, что толщина металлического листа, из которого вырезают заготовку для этой пружины (рис. 4), составляет  $h_{cm} = 0.1$  мм, а разница между углами  $\Lambda_3, \Lambda_2$  раскрытия лепестков и внутренней поверхности манжеты (рис. 2) превышает 20 градусов. Поэтому, при монтаже уплотнения лепестковая пружина испытывает пластические деформации, и её НДС описывается равенством

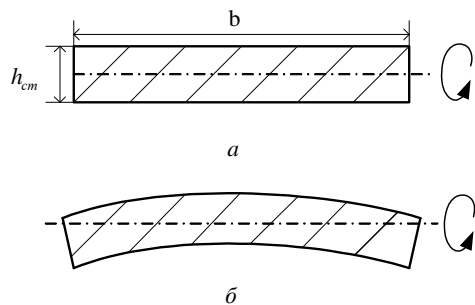


Рис. 13 – Формы поперечного сечения лепестка пружины: а – прямоугольная; б – изогнутая.

$$\frac{M_u}{W_u} = k_\sigma \cdot \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести;  $k_\sigma$  – коэффициент упрочнения, возникающий в процессе *изгибного заневоливания* лепестка;  $M_u$  – изгибающий момент;  $W_u$  – коэффициент сопротивления изгибу;

$$M_u = \int_{L1}^{L2} b \cdot p_{np}(x) \cdot x dx, \quad W_u = K_\phi \cdot b \cdot h_{cm}^2 / 6; \quad (16)$$

$b$  – ширина лепестка;  $L1 \approx 0.5 L, L2 = L$  – начало и конец контактной зоны;  $K_\phi$  – коэффициент формы сечения.

На коэффициент формы влияет технология изготовления лепестковой пружины. Если у своего основания лепестки подгибаются по прямой линии (рис. 13, а), то  $K_\phi = 1$ .

Если же они выгибаются по форме внутренней поверхности манжеты (рис. 13, б) и осевая линия их поперечного сечения имеет радиус кривизны  $R_{\tilde{n}0} \approx R_M - h_M$ , то, вычисляя интеграл для момента инерции сечения

$$I = \iint_S x^2 ds,$$

и, удерживая в полученном результате главные слагаемые, приходим к следующей приближенной формуле:

$$K_\phi = \left( 1 + (7/240) \cdot (b/h_{cm})^2 \cdot (b/R_{cm})^2 \right) / \left( 1 + (b/R_{cm})^2 / 12 \right).$$

Учтем, что  $2\pi \cdot R_{cm} / b \approx n_{лен}$ , где  $n_{лен}$  – это число лепестков, причем ширина лепестков для всех внешних уплотнений одного регулятора остается постоянной (она примерно равна длине лепестка  $L$ , рис. 14). Поэтому коэффициент формы зависит только от числа лепестков, а график для этой зависимости показан на рис. 15.

Как видим, для малых диаметров уплотнения форма поперечного сечения лепестка существенно влияет на изгибающий момент и, как следствие, на давление  $p_{np}$ , поэтому здесь целесообразно ужесточить требования к технологии изготовления пружины и, если возникла необходимость в её использовании, то *лепестки желательнее изготавливать изогнутыми*.

Чтобы из соотношений (16) получить величину контактного давления необходимо знать характер распре-



Рис. 14 – Лепестковая пружина для манжеты большого диаметра.

деления этого давления по участку контакта. Будем считать, что сечение лепестка имеет изогнутую форму. Известно, что твердость стали на два порядка выше твердости фторопласта, поэтому сближение контактирующих поверхностей происходит по линейному закону, на пятнах контакта давление совпадает с величиной  $HB$  для фторопласта, а площадь пятен контакта пропорциональна квадрату от величины сближения (о чем будет подробнее сказано в следующем пункте статьи). В результате получаем следующую зависимость:

$$p_{np}(x) = p_M \cdot [(x - L1)/(L2 - L1)]^3, \tag{17}$$

где  $p_M$  – это максимальное контактное давление, которое достигается на свободном конце манжеты.

Подстановка (17) в (16) приводит к искомому результату:

$$p_M = \Delta b \cdot K_\phi \cdot \sigma_T \cdot h_{cm}^2 / (L_{up} \cdot (3 \cdot L - 2 \cdot L_{up})),$$

где  $\Delta b \approx 0.9$  – относительная ширина лепестка;  $L_{up}$  – длина контактной зоны;

$$\Delta b = b \cdot n_{лен} / (2\pi R); \quad L_{up} = L2 - L1 \approx 0.5 \cdot L.$$

Оказалось, что для манжет малого диаметра 16 мм давление  $p_M$  составляет 0.4 ... 0.6 МПа, но по мере увеличения диаметра  $DP$  оно уменьшается пропорционально изменению коэффициента формы  $K_\phi$  (то есть, в 4 раза и более), однако второе слагаемое из правой части неравенства (15), как свидетельствует график функции  $y = K_\phi(n) \cdot n$  (рис. 15), при этом изменяется слабо. Следовательно, для манжет большого диаметра условие сохранения контакта между внешним усом и втулкой выполняется с запасом, который (вместе с модулем упругости  $E_c$ ) уменьшается при повышении температуры.

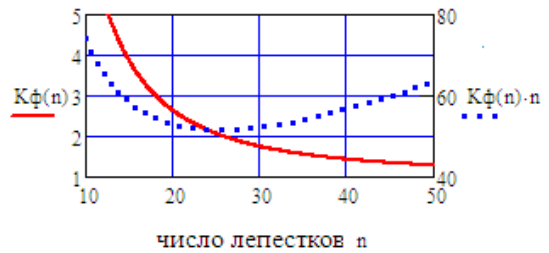


Рис. 15 – Зависимость коэффициента формы от числа лепестков пружины.

Но часто в лепестковой пружине нет необходимости, поскольку достаточно жесткости самих усов.

Исследование по экспериментальному определению давления  $p_M$  для манжеты  $DP = 46$  мм в КБЮ проводилось под руководством Ю. П. Просвирякова; лепестки пружины имели сечение прямоугольной формы (рис. 13, а). При температуре фторопласта 25° С получили давление  $p_M = 0.07$  МПа, что согласуется с формулами и теоретическими результатами этого пункта статьи.

**Расчет манжеты с учетом переменного коэффициента потерь.** В доработанной модели учтено, что фторопласт-4 имеет невысокую твердость  $HB = 35 - 40$  МПа, и для некоторых пневмосистем (напр., предназначенных для включения ЖРД) она сопоставима с уплотняемым давлением.

Если давление газа  $p_{г.1} \ll HB$  (например, в 5 – 10 раз), то площадь пятен контакта в зазоре между манжетой и втулкой (или штоком) невелика, и изменением этой площади по длине зазора можно пренебречь. Тогда коэффициент потерь  $\eta$  не зависит от координаты  $x$ , и квадрат давления газа в зазоре изменяется по линейному закону (4):

$$p_{г.3}^2(x) = p_{г.1}^2 + (p_{г.2}^2 - p_{г.1}^2) \cdot x / Lз.$$

Но если это не так, то вместе с падением давления газа в зазоре происходит заметное увеличение площади пятен контакта, которое в предыдущих расчетных уравнениях модели мы игнорировали.

Анализ опубликованных зависимостей коэффициента трения от нагрузки [6] показывает, что если давление, прижимающее манжету к втулке, меньше 2 МПа, то, по крайней мере, на части пятен контакта фторопласт остается твердым, а не пластичным. И это плохо сразу по двум причинам:

- затрудняется решение контактной задачи, которая становится неопределенной;
- трение покоя и движения увеличивается.

У исследуемых пневмосистем практически на всей длине уса прижимающее давление выше 2 МПа, и ситуация упрощается: можно считать, что на всех пятнах контактное давление равно  $HB$ , а там, где это условие приводит к противоречию (такой реакции опоры недостаточно), оно больше  $HB$ .

Опираясь на это соображение, относительную площадь  $\delta k$  пятен контакта с полированной поверхностью втулки можно (приближенно) найти из следующего соотношения:

$$p_{г.3} \cdot (1 - \delta k) + HB \cdot \delta k = p,$$

откуда

$$\delta k = (PR - p_g) / (HB - p_g), \tag{18}$$

где  $p_{г.3}(x)$  – давление газа в сечении  $x$  зазора;  $PR(x)$  – прижимающее давление, создаваемое уплотняемым газом, силой пружины и упругими силами (давление газа в зазоре и контактное давление в нем не учитывается).

Для внешнего уплотнения давление  $PR(x)$  в большей части зазора незначительно превышает давление  $p_{г.1}$ , и заметно увеличивается на упругом участке контактной зоны, его максимум  $PRM$  расположен в точке  $x = Lk$  стыка свободной и контактной зоны (рис. 11), то есть  $PRM = PR(Lk)$ .

Если давление  $PRM < HB$ , то на всем протяжении контактной зоны сохраняются зазоры между пятнами контакта [7], контакт манжеты и втулки не является плотным, и через зазор сочится газ.

Для этого случая, чтобы оценить поток газа через зазор, использована модель [8], представляющая шероховатую поверхность втулки (или штока) набором четырехугольных пирамид, высота которых (если не применяется специальная силиконовая смазка) равняется параметру шероховатости

$$Rz \approx 4Ra = 3.2 \text{ мкм};$$

после использования смазки эту величину следует уменьшить, по крайней мере, в 4... 5 раз.

Пирамиды формируются при хонинговании поверхности втулки (рис. 16), угол  $\gamma$  наклона борозд определяется отношением осевой и тангенциальной скорости при полировании:

$$\operatorname{tg} \gamma = V_{oc} / V_{танг},$$

по данным справочника [9]  $\gamma = 15 \dots 25$  град.

Поток газа течет по параллельным каналам винтовой формы, имеющим треугольное сечение; максимальная высота канала составляет

$$h = Rz \cdot \delta,$$

длина канала больше, чем длина оси втулки, в  $1/\sin \gamma$  раз, а максимальный (верхний) периметр поперечного сечения всех каналов

$$P = \pi \cdot D \cdot \delta(x) \cdot \sin \gamma,$$

где  $\delta = 1 - \sqrt{\delta k}$  – относительная высота зазора в

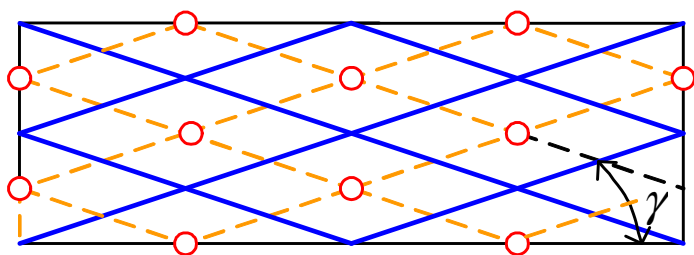


Рис. 16 – Развертка полированной поверхности втулки.

Точки – это вершины пирамид, начало контакта; сплошные линии – впадины; пунктирные линии – гребни.

сечении,  $\delta = \delta z / (Rz)$ ;  $\delta z$  – высота зазора;  $D$  – диаметр уплотнения.

В гидравлике для объемной скорости  $Q$  ламинарного течения жидкости через малый зазор используется формула Пуазейля [10]

$$Q = \pi \times D \times \delta z^3 \times \Delta p_{yn} / (12 \times \mu_2 \times L),$$

где  $D, L, \delta z$  – диаметр, длина и высота зазора;  $\Delta p_{yn}$  – перепад давления;  $\mu_2$  – кинематическая вязкость.

В нашем случае высота зазора переменная, и

$$Q(y) = \pi \cdot D \cdot \sin \gamma \cdot \delta z(y)^3 \cdot (dp_{2,3} / dx) \cdot \sin \gamma / (12 \cdot \mu_2),$$

где  $y$  – координата поперечного сечения потока.

Интегрируя обе части этого равенства по координате  $y$ , получаем:

$$Q = \pi \cdot D \cdot \sin^2 \gamma \cdot 0.25 \cdot \delta(x)^3 \cdot Rz^3 \cdot dp_{2,3} / dx / (12 \cdot \mu_2). \quad (19)$$

У газа, в отличие от жидкости, постоянным является расход массы, а не объемная скорость, поэтому обе части (19) умножим на плотность

$$\rho_{2,3} = p_{2,3} / (z \cdot R \cdot T_{2,3}),$$

где  $T_{2,3}$  – температура газа в зазоре;  $R$  – газовая постоянная;  $z(p, T)$  – коэффициент сжатия реального газа.

Заметим, что если в зазоре манжеты наблюдается значительный перепад давления, то у текущего по нему газа сохраняется не температура, а энтальпия, и здесь нужно использовать уравнение состояния реального газа, а также эффект Джоуля – Томсона [11].

Получаем дифференциальное уравнение для изменения давления газа в зазоре:

$$\dot{m} / (zRT_{2,3}) \cdot (12 \cdot \mu_2) / (\pi \cdot D \cdot \sin^2 \gamma \cdot 0.25 \cdot \delta(x)^3 \cdot Rz^3) = p_{2,3} \cdot dp_{2,3} / dx. \quad (20)$$

В этом материале мы ограничимся расчетом утечек для сжатого воздуха; поскольку при стендовых испытаниях гелий и др. рабочие тела, используемые в агрегатах пневмоавтоматики ракетного двигателя, заменяют воздухом. Тогда коэффициент  $z$  можно считать константой, равной 1, а зависимость температуры от давления можно учесть при использовании эффекта Джоуля – Томсона:

$$T_{2,3}(p_{2,3}) = T_{2,1} \cdot (1 + \alpha DT \cdot T_{2,1} \cdot \Delta T(p_{2,1}, p_{2,3}))^{-1},$$

где  $\alpha DT = 1.4 \cdot 10^{-4}$  – константа, используемая при аппроксимации табличных результатов из справочника [12],

$$\partial z / \partial T \approx (z(p, 300K) - z(p, 250K)) / 50 \approx 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot p \cdot (1 - (p/34) + 0.1 \cdot (p/34)^2),$$

$T_{2,1}$  – температура газа в полости уплотняемого давления;

$$\Delta T(P1, P2) = \frac{k-1}{k} \cdot (P1 - P2) \cdot \left[ 1 - \frac{(P1 + P2)/2}{34} + 0.1 \cdot \frac{(P1^2 + P2^2 + P1 \cdot P2)/3}{34^2} \right].$$

В результате уравнение (20) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{dp_{2,3}}{dx} = \frac{-CM \cdot \dot{m}}{p_{2,3} \cdot (1 + \alpha DT \cdot T_{2,1} \cdot \Delta T(p_{2,1}, p_{2,3})) \cdot \left(1 - \sqrt{(PR(x) - p_{2,3}) / (HB - p_{2,3})}\right)^3}, \quad (21)$$

где константа

$$CM = 48\mu_2 / (z(p_{2,1}, T_{2,1}) \cdot R \cdot T_{2,1} \cdot \pi D \cdot \sin^2 \gamma \cdot Rz^3),$$

а координата  $x \in [0, Lz]$  и отсчитывается в этом пункте статьи не от доньшка, а от свободного конца уса.

Давление газа, являющееся решением дифференциального уравнения первого порядка (21), удовлетворяет сразу двум краевым условиям

$$p_{2,3}(0) = p_{2,1}, \quad p_{2,3}(Lz) = p_{2,2},$$

что возможно только лишь за счет правильного выбора величины расхода  $\dot{m}$ .

В уточненной модели эта краевая задача решается в итерационном алгоритме *методом дихотомии*:

- назначаются широкие пределы возможного изменения  $\dot{m}$  – промежуток от 0 до 1.0 г/см<sup>3</sup>;
- для значения  $\dot{m} = 0.5$  г/см<sup>3</sup> уравнение (21) интегрируется методом Эйлера с начальным условием  $p_{2,3}(0) = p_{2,1}$ , в результате находим значение давления  $p_{2,3}(Lz)$ ;
- величину  $p_{2,3}(Lz)$  сравнивается с давлением  $p_{2,2}$ ; если  $p_{2,3}(Lz) < p_{2,2}$ , то расход газа выше необходимого, и промежуток локализации  $\dot{m}$  укорачивается до  $[0; 0.5]$ , иначе – он укорачивается до  $[0.5; 1.0]$ ;
- указанный алгоритм повторяется 30 раз, в результате чего промежуток локализации сокращается в  $2^{30} \approx 10^9$  раз, что позволяет определить расход  $\dot{m}$  с необходимой точностью.

Далее по массовому расходу газа  $\dot{m}$  определяем объёмную скорость утечек:

$$Q_{ym} = \dot{m} \cdot z(p_{2,2}, T_{2,3}(p_{2,2})) \cdot R \cdot T_{2,3}(p_{2,2}) / p_{2,2}. \quad (22)$$

Кроме того, мы получили массив значений функции  $p_{2,3}(x)$ , описывающей изменение давления газа в зазоре, и по формуле

$$Fk = \pi D \cdot \int_{Lk}^L (PR(x) - p_{2,3}(x) \cdot (1 - \delta k(x))) dx \quad (23)$$

определяем величину контактной силы  $Fk$ , возникающей между усом манжеты и втулкой (или штоком). При вычислении интеграл (23) заменяется соответствующей интегральной суммой.

Заметим, что в уравнение (21) значение  $Rz$  параметра шероховатости входит как составная часть комплекса  $\dot{m} / Rz^3$ ; но оно сильно влияет на величину утечек. Это означает, что после применения смазки величина силы  $Fk$  не изменяется, а величина утечек  $Q_{ym}$  снижается в 50 ... 100 и более раз, после чего она, в большинстве случаев, выходит за пределы чувствительности используемых методов её экспериментального определения.

**Корректировка модели для случая высоких контактных давлений.** Если уплотняемое давление достигает 20 МПа и более (а для внутренних уплотнений это происходит чаще, чем для внешних), то на изгибном участке получается давление  $PRM > HB$ , и формула (18) приводит к абсурдному результату – относительная площадь контактных пятен больше 1. Это означает, что формулу (18) здесь применять нельзя.

Заметим, что формула (18) и равенство

$$\delta = 1 - \sqrt{\delta k} \quad (24)$$

для относительной высоты зазора  $\delta$  являются приближенными, и с ростом контактного давления их погрешность возрастает. В [9] можно найти более точные зависимости, но, к сожалению, они были получены для конкретных технологий алмазного полирования, и применить их для исследуемого случая мы не можем.

Но это и не нужно делать. Максимальные утечки газа через зазор, которые представляют интерес, наблюдаются при низких контактных давлениях, где равенство (24) выполняется с достаточной точностью.

В доработанной модели реализовано следующее уточнение. Известно, что кроме винтовых каналов, описанных выше (их высота уменьшается с ростом контактного давления и при условии  $PR > HB$  становится равной 0), существуют *глубокие каналы*, параметры которых, в первом приближении, не зависят от контактного давления. В принятой модели эти каналы также считаются винтовыми и имеют в сечении треугольную форму. Высоту этих каналов подобрали из условия получения известного из экспериментов расхода газа. Если считать, что их число равняется числу основных каналов, то высота оказалась равна 0.1 мкм, но если их меньше, то размер каждого, естественно, должен быть крупнее. На общий результат влияют средние размеры и параметры.

Если в уплотнении использована силиконовая смазка типа ЦИАТИМ-221, то при условии  $PR > HB$  основные каналы утечки газа перекрываются фторопластом, а глубокие каналы заполнены смазкой. Кинематическая вязкость смазки превышает вязкость газа в  $10^6$  и более раз (точное значение этого отношения зависит от тем-

пературы), но и при этой высокой вязкости смазка пропускает уплотняемое давление внутрь зазора и (очень медленно) течёт по глубоким каналам в направлении полости низкого давления.

На рис. 17 приведены графики изменения температуры и давления газа в зазоре, полученные по разрабо-

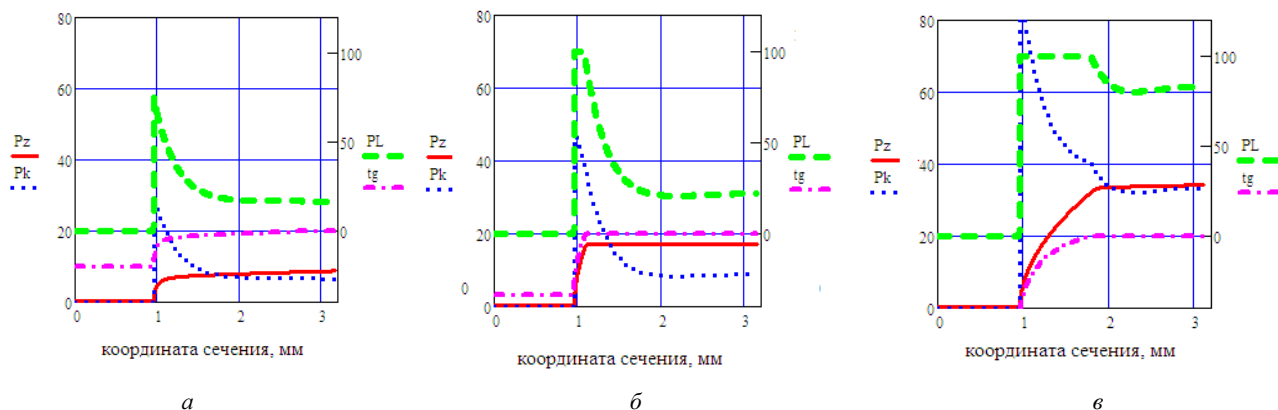


Рис. 17 – Результаты моделирования НДС внутреннего скользящего уса манжеты с параметрами  $dP = 38\text{ мм}$ ;  $DP = 46\text{ мм}$  при уплотняемом давлении: а – 8.5 МПа; б – 17 МПа; в – 34 МПа;

$P_z$  – давление газа в зазоре, МПа;  $P_k$  – контактное давление, МПа;  
 $PL$  – плотность зазора, %;  $t_g$  – температура газа в зазоре, °С.

танной методике расчета НДС усов манжеты без использования смазки. Переменная плотность зазора  $PL$  обозначает то же, что и параметр  $\delta k$ , вычисленный по формуле (18), но в процентах.

Видно, что по мере увеличения давления площадь основных каналов утечек газа сокращается; соответственно изменяется и форма кривой давления газа в зазоре. После использования смазки графики давлений и плотностей рис. 17, а, б не изменятся, а на рис. 17, в – изменятся незначительно, поскольку при течении в зазоре плотность и температура смазки остаются постоянными, а плотность и температура газа – не постоянные.

При высокой плотности зазора (как, напр., на рис. 17, в) давления  $p_{2,3}$  оказывают слабое влияние на величину интеграла (23), что повышает робастность метода расчета прижимающей силы  $F_k$ .

**Экспериментальные методы определения силы трения в манжете.** Разработанную теорию расчета применили к длинноусым манжетам, исследованным ранее. Эксперименты проводились на установке, упрощенная схема которой показана на рис. 18, для двух типов манжет – 004, имеющей диаметр внешнего уплотнения 30 мм, и 014, имеющей диаметр внутреннего уплотнения 8 мм. Указанные манжеты имели одинаковую длину усов 5 мм, толщину донышка 3 мм и ширину зазора между цилиндрическими поверхностями  $H = 4$  мм. Свободные концы усов этих манжет прижимались к опоре не лепестковой пружиной, а подпружиненными конусными шайбами (рис. 18); рабочее усилие цилиндрических пружин составляло около 100 Н.

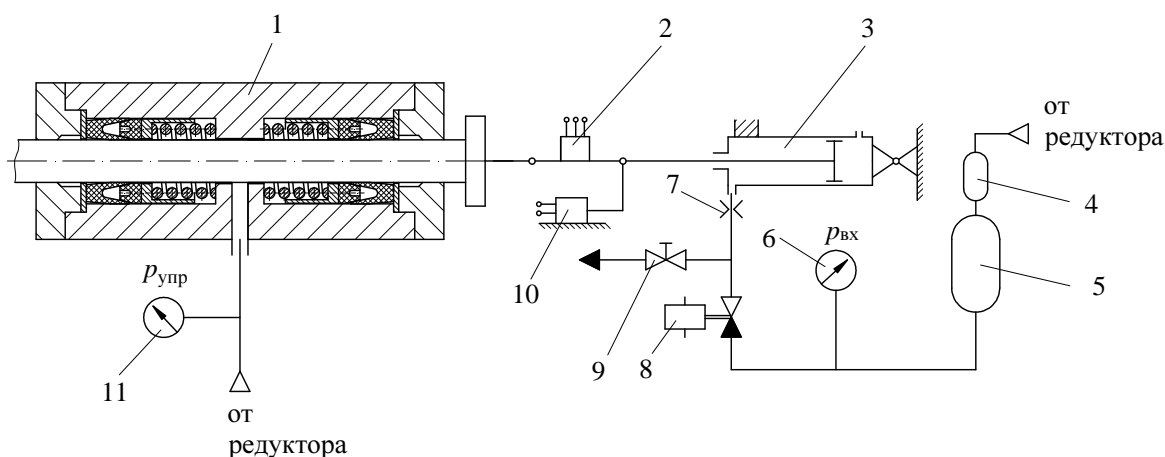


Рис. 18 – Схема экспериментальной установки для определения силы трения в манжетах:  
 1 – имитатор; 2 – тензотяга; 3 – гидроцилиндр; 4 – баллон со сжатым воздухом; 5 – гидроаккумулятор; 6, 11 – манометр;  
 7 – жиклер; 8 – электроклапан; 9 – вентиль дренажа; 10 – датчик перемещения.

Установка состояла из имитатора 1 и гидроцилиндра 3. Между поршнем гидроцилиндра и штоком имитатора шарнирно крепился датчик усилия (тензотяга) 2.

Имитатор и гидроцилиндр выставлялись по одной оси и жестко крепились на общем основании.

Испытываемые манжеты устанавливались в имитатор 1, в центральной части корпуса которого имелся



штуцер для подачи рабочего давления воздуха, прижимающего усы манжет к корпусу и штоку. Давление подавалось в полость, ограниченную двумя манжетами, благодаря чему исключалось действие давления на шток. Поэтому при движении штока непосредственно замерялась сила трения двух манжет.

Система замера силы включала тензотягу и тензостанцию УТС-12, соединенную напрямую с осциллографом.

Параллельно тензотяге к штоку поршня гидроцилиндра с помощью (гибкого вала) тросика был подсоединен датчик перемещения 8 потенциометрического типа.

При экспериментах применялась тензотяга разработки ГП «КБ «Южное». Чувствительным элементом этой тензотяги является упругое кольцо из конструкционной стали ШХ-15. На наружной и внутренней поверхности кольца приклеены тензодатчики. Величина силы трения определялась деформацией упругого кольца и пересчитывалась по имеющейся тарировочной зависимости.

В исходном состоянии шток имитатора вместе с поршнем гидроцилиндра 3 находился в крайнем левом положении, которое определялось упором штока в крышку корпуса имитатора. Тензотяга была полностью разгружена. Датчик хода занимал нулевое положение. Вентиль 9 закрыт. Объем гидроцилиндра и система трубопроводов до гидроаккумулятора залиты водой. Электроклапан 8 закрыт. Давление в ресивере равно давлению  $p_{вх}$ , манжеты нагружены давлением  $p_{упр}$ .

После открытия электроклапана 8 поршень гидроцилиндра перемещался вправо до упора. Давление  $p_{вх}$  назначалось так, чтобы режим истечения через жиклер 7 был кавитационным. За счет этого обеспечивалось постоянство скорости движения штока.

При движении штока показания датчиков усилия и хода регистрировались на осциллограф.

Манжеты 004 при определении характеристики последовательно нагружались избыточным давлением 0, 10; 20, 30, 50 и 100 кгс/см<sup>2</sup> манжеты 014 дополнительно нагружались давлением 150 и 200 кгс/см<sup>2</sup>. Было испытано 5 пар манжет каждого типа, результаты испытаний усреднялись.

Таблица 1 – Экспериментальные зависимости силы трения  $F_{тр}$ , кгс от скорости  $V$  скольжения уса манжеты

$V$ , см/с	1.0	2.0	3.1	4.5	6.6	8.6	10.8
Манжета 004	3.2	3.4	4.3	5.3	5.2	5.8	6.4
Манжета 014	4.4	4.9	5.3	5.5	5.6	5.9	6.3

по осциллограмме); по величине хода, замеренной на имитаторе и по времени движения штока; по тарировочным характеристикам жиклеров и по площади поршня гидроцилиндра. Из-за большой нелинейности датчика хода первый способ давал большую погрешность и поэтому не использовался (показания этого датчика определяли начало и конец движения штока). Два других способа определения скорости движения штока приводят к практически одинаковым результатам.

Методика испытаний позволила определить силы трения при движении с постоянной скоростью (табл. 1). Диапазон исследованных скоростей скольжения соответствовал рабочему диапазону скоростей клапана или поршня в агрегатах пневмоавтоматики ЖРД. В этих экспериментах для манжеты 004 входное давление поддерживалось равным 15 кгс/см<sup>2</sup>, а для манжеты 014 – 150 кгс/см<sup>2</sup>. Экспериментальные результаты, отвечающие другим значениям давления, будут представлены в этой статье далее.

Альтернативный метод экспериментального определения силы трения в манжетах регулятора использовался

Таблица 2 – Значения силы трения, определенные по гистерезисной кривой

$p_{вх}$ , кгс/см <sup>2</sup>	$F_{тр}$ , кгс	
	Экземпляр 1	Экземпляр 2
50	8,76	8,90
100	5,93	5,94
150	6,36	7,49
200	6,64	8,34
250	3,96	9,33
290	3,39	4,52

Таблица 3 – Пример разброса значений силы трения при  $p_{вх} = 170$  кгс/см<sup>2</sup>

№ испытания	Экземпляр 2
1	8,34
2	6,93
3	7,63
4	8,20
5	6,36
6	6,36

Скорость движения штока задавалась диаметром жиклера 7 на входе в гидроцилиндр и давлением воды перед жиклером. Фактическую скорость штока можно было определить тремя независимыми способами: по показаниям датчика хода и по времени движения штока (определялось по осциллограмме); по величине хода, замеренной на имитаторе и по времени движения штока; по тарировочным характеристикам жиклеров и по площади поршня гидроцилиндра. Из-за большой нелинейности датчика хода первый способ давал большую погрешность и поэтому не использовался (показания этого датчика определяли начало и конец движения штока). Два других способа определения скорости движения штока приводят к практически одинаковым результатам.

Методика испытаний позволила определить силы трения при движении с постоянной скоростью (табл. 1). Диапазон исследованных скоростей скольжения соответствовал рабочему диапазону скоростей клапана или поршня в агрегатах пневмоавтоматики ЖРД. В этих экспериментах для манжеты 004 входное давление поддерживалось равным 15 кгс/см<sup>2</sup>, а для манжеты 014 – 150 кгс/см<sup>2</sup>. Экспериментальные результаты, отвечающие другим значениям давления, будут представлены в этой статье далее.

Альтернативный метод экспериментального определения силы трения в манжетах регулятора использовался в КБЮ С. А. Валивахиным и С. А. Шевченко. Для определения суммарной силы трения  $F_{тр}$  в трех манжетных уплотнениях регулятора, показанного на рис. 1, проверяли его настройку по выходному давлению при понижении и при повышении давления на входе, то есть при прямом и обратном ходе клапана. Силу трения определяли по формуле:

$$F_{тр} = f_{чз} \cdot \Delta p / 2,$$

где  $\Delta p$  – разность показаний манометра, регистрирующего выходное давление, при одинаковых значениях входного давления, которое в одном случае очень медленно повышалось от 5 до 30 МПа, а в другом – столь же медленно понижалось от 30 МПа до 5 МПа, что обеспечивало прямой и обратный ход клапана;  $f_{чз}$  – площадь чувствительного элемента регулятора.

Метод базировался на предположении, что (по причине действия в регуляторе очень сильной обратной связи) при одинаковом входном давлении и подьёмы клапана одинаковы; это предположение существенно упростило метод, но внесло определенную погрешность. Такие исследования проводились на двух экземплярах регулятора; результаты приведены в табл. 2. Исследования выявили значительный разброс экспериментальных данных

(табл. 3), но набрать достаточную статистику, чтобы преодолеть этот недостаток метода, не удалось. Тем не менее, как видно из табл. 2, в области средних давлений с увеличением  $p_{вх}$  сила трения уменьшается. Этот вывод подтверждается подобными экспериментами с регуляторами другой конструкции и нуждается в объяснении.

### Экспериментальный метод определения утечек газа для манжетных уплотнений из фторопласта.

При изготовлении регуляторы давления газа ЖРД подвергаются 100 % - ному контролю на герметичность. Величина утечек через манжетное уплотнение определяется по следующей методике (рис. 19). Место уплотнения нагружается испытательным давлением воздуха  $p_{исп}$ . Величина утечек контролируется из полости низкого давления. Для этого к штуцеру, сообщенному с полостью низкого давления, подсоединяется резиновая трубка с внутренним диаметром 4 мм и длиной не более 600 мм. Другой конец трубки погружается в воду. Глубина погружения трубки в жидкость – не более 10 мм. После выдержки испытуемого узла под давлением не менее 3-х минут по количеству пузырьков, выделяемых из трубки, судят о герметичности. Этот метод обеспечивает чувствительность  $1,36 \cdot 10^{-3} \text{ см}^3/\text{с}$ . Испытываемый объект считается герметичным, если после выдержки под испытательным давлением утечки газа не наблюдаются в течение 3-х минут.

Определенное представление об уровне утечек газа в доведенных образцах уплотнений при использовании смазки дает табл. 4. Параметры манжеты: наружный уплотняемый диаметр  $DP = 24$  мм (скользящий ус),

внутренний –  $dp = 16$  мм; при проверке воздухом давлением  $66 \dots 68 \text{ кгс}/\text{см}^2$ . Испытания проводились в составе регулятора. В то же время, при экспериментальных исследованиях без использования смазки манжетных уплотнений с параметрами  $DP = 46$  мм,  $dp = 38$  мм (скользящий ус), которые проводились под руководством Ю. П. Просвирякова, максимальный уровень утечек достигал  $50 \text{ см}^3/\text{с}$ .

Таблица 4. – Утечки газа в манжете поршня управляющего регулятора

№ манжеты	Температура, °С	Утечки, $\text{см}^3/\text{с}$	Особые условия проверки
1	+ 20	0,00	–
2		0,00	
3		0,02	
1	+ 60	0,00	–
2		0,13	
3		0,11	
1	– 53	0,60	–
2		1,50	
3		0,10	
1	– 12	0,18	–
2		0,50	
3		0,03	
3	– 20	0,04	–
2	+ 20	0,14 (гелий) 0,13 (воздух)	после наработки ресурса
4	+ 28	0,10	–
5		0,00	
4	+ 28	0,05	после выдержки при +50°С ... +55°С
5		0,07	
4	– 15	0,01	–
5		0,20	
4	+ 28	0,00	после вибраций
5		0,03	

расчетная прижимающая сила, суммарная по всем пятнам контакта;  $F_{np}$  – усилие распорного конуса;  $Q_{ут}$  – утечки воздуха через скользящий ус манжеты, рассчитанные при отсутствии смазки (если использована силиконовая смазка, то эти значения нужно уменьшить в 100 ... 1000 раз); точка контакта  $Lk$  – это длина свободного участка уса; коэффициент трения  $f_{mp}$  и коэффициент использования силы давления  $f_p$  находится по формулам

$$f_{mp} = F_{mp} / Fk, \quad f_p = Fk / (\pi D \cdot L \cdot p_{ex} + F_{np}),$$

где  $D, L$  – диаметр уплотнения и полная длина уса.

Как видим, значения коэффициента трения совпали с числами, рекомендованными в [6], что подтверждает правоту использованной теории. Кроме того, в теории и в эксперименте практически совпали соотношения между силами трения для длинноусых манжет внешнего и внутреннего уплотнения. Дополнительное подтверждение было получено при анализе утечек воздуха через манжеты пневмосистемы запуска ЖРД. После того,

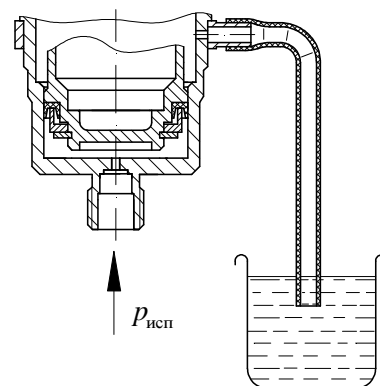


Рис. 19 – Испытание на герметичность.

использовались силиконовая смазка. Этот регулятор работает под высоким давлением 4 с.

Допустимый уровень утечек через манжетное уплотнение назначается с учетом длительности его работы под давлением.

**Апробация модели.** Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных для длинноусых манжет типа 004 и 014 приводятся в табл. 5, 6. Используются следующие обозначения:  $p_{вх}$  – уплотняемое избыточное давление воздуха;  $F_{mp}$  – экспериментальное значение силы трения;  $Fk$  –

расчетная прижимающая сила, суммарная по всем пятнам контакта;  $F_{np}$  – усилие распорного конуса;  $Q_{ут}$  – утечки воздуха через скользящий ус манжеты, рассчитанные при отсутствии смазки (если использована силиконовая смазка, то эти значения нужно уменьшить в 100 ... 1000 раз); точка контакта  $Lk$  – это длина свободного участка уса; коэффициент трения  $f_{mp}$  и коэффициент использования силы давления  $f_p$  находится по формулам

$$f_{mp} = F_{mp} / Fk, \quad f_p = Fk / (\pi D \cdot L \cdot p_{ex} + F_{np}),$$

где  $D, L$  – диаметр уплотнения и полная длина уса.

Как видим, значения коэффициента трения совпали с числами, рекомендованными в [6], что подтверждает правоту использованной теории. Кроме того, в теории и в эксперименте практически совпали соотношения между силами трения для длинноусых манжет внешнего и внутреннего уплотнения. Дополнительное подтверждение было получено при анализе утечек воздуха через манжеты пневмосистемы запуска ЖРД. После того,

как модель была настроена на известный объём утечек при условии  $t = -12^\circ\text{C}$ ,  $p_{\text{вх}} = 120 \text{ кгс/см}^2$ , в расчете получили правильное соотношение между утечками газа через уплотнения клапана для основного (рис. 1) и управляющего (рис. 2) регуляторов на другом режиме – при  $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_{\text{вх}} = 340 \text{ кгс/см}^2$ .

Таким образом, по вопросу достаточной для практики точности разработанного метода расчета манжет набирается необходимая доказательная база.

Таблица 5 – Результаты исследования НДС и силы трения для манжеты 004

$p_{\text{вх}}, \text{ кгс/см}^2$	0	10	20	30	50	70	100
$F_{\text{тр}}, \text{ кгс}$	1.2	2.4	2.9	3.1	3.7	4.6	6.4
$Fk, \text{ кгс}$	32.7	48.0	61.5	73.0	94.5	112.2	137.8
<b>Козф. трения <math>f_{\text{тр}}</math></b>	<b>0.037</b>	<b>0.050</b>	<b>0.047</b>	<b>0.043</b>	<b>0.039</b>	<b>0.041</b>	<b>0.046</b>
Козф. силы $f_p$	1.63	0.718	0.542	0.456	0.372	0.323	0.283
Утечки $Q_{\text{ум}}, \text{ см}^3/\text{с}$	0	4.8	14.4	27.0	55.9	85.1	116.3
Точка $Lk, \text{ мм}$	2.95	2.62	2.41	2.25	2.02	1.84	1.62

Таблица 6 – Результаты исследования НДС и силы трения для манжеты 014

$p_{\text{вх}}, \text{ кгс/см}^2$	0	10	20	30	50	70	100	150	200
$F_{\text{тр}}, \text{ кгс}$	1.0	1.4	2.2	2.6	3.5	3.9	4.3	5.2	6.7
$Fk, \text{ кгс}$	43.8	49.8	55.4	60.9	71.9	83.0	99.7	124.8	168.8
<b>Козф. трения <math>f_{\text{тр}}</math></b>	<b>0.023</b>	<b>0.028</b>	<b>0.040</b>	<b>0.043</b>	<b>0.049</b>	<b>0.047</b>	<b>0.043</b>	<b>0.042</b>	<b>0.040</b>
Козф. силы $f_p$	4.38	2.18	1.56	1.26	0.971	0.833	0.722	0.618	0.634
Утечки $Q_{\text{ум}}, \text{ см}^3/\text{с}$	0	1.0	3.1	5.9	12.2	17.7	21.4	7.2	0.7
Точка $Lk, \text{ мм}$	2.48	2.35	2.25	2.17	2.04	1.94	1.83	1.69	1.60

При экспериментах с длинноусыми манжетами был выявлен большой разброс экспериментальных данных, получаемых для разных манжет одного и того же типа. Чтобы выявить возможную причину, были проведены дополнительные расчеты, в которых толщину кончика уса уменьшили на 0.1 мм и крайние диаметры усов уменьшили на 0.2 мм, что отвечает полю допуска. Результаты приведены в табл. 7 и 8.

Таблица 7 – Результаты моделирования НДС манжеты 004, принято нижнее поле допусков для размеров усов

$p_{\text{вх}}, \text{ кгс/см}^2$	0	10	20	30	50	70	100
$Fk, \text{ кгс}$	17.6	31.4	43.1	53.9	73.3	90.3	111.4
$Q_{\text{ум}}, \text{ см}^3/\text{с}$	0	6.6	19.0	34.3	68.6	101.2	135.2

Таблица 8 – Результаты моделирования НДС манжеты 014, принято нижнее поле допусков для размеров усов

$p_{\text{вх}}, \text{ кгс/см}^2$	0	10	20	30	50	70	100	150	200
$Fk, \text{ кгс}$	15.6	20.0	24.1	28.3	36.5	44.5	56.8	71.7	94.3
$Q_{\text{ум}}, \text{ см}^3/\text{с}$	0	2.3	7.0	13.0	26.1	38.2	47.9	27.1	1.34

Сравнивая значения прижимающей силы, замечаем, что для манжеты 004 они в среднем уменьшились в 1.5 раза, а для манжеты 014 – почти в 2 раза. По-видимому, это и является главной причиной разброса значений силы трения, и чтобы от него избавиться, *нужно ужесточить допуск*.

Кроме допусков вклад в разброс значений силы трения вносит температура, но, как показали расчеты, он не столь велик (ср. табл. 9, 10 с табл. 5, 6, максимальное изменение прижимающей силы составляет около 30 %).

Расчетные значения утечек, приведенные в табл. 7 – 10, после использования смазки уменьшаются в сотни раз, но мы сохранили эту строку, чтобы лишний раз подчеркнуть тесную связь между интегральной плотностью зазора и суммарной величиной контактной силы, действующей в этом зазоре.

Таблица 9 – Результаты моделирования НДС манжеты 004, температура фторопласта уменьшена на 20 градусов

$p_{\text{вх}}, \text{ кгс/см}^2$	0	10	20	30	50	70	100
$Fk, \text{ кгс}$	30.7	45.4	59.4	69.2	89.6	106.7	126.1
$Q_{\text{ум}}, \text{ см}^3/\text{с}$	0	5.5	15.9	29.3	57.6	81.9	97.6

Таблица 10 – Результаты моделирования НДС манжеты 014, температура фторопласта уменьшена на 20 градусов

$p_{вх}$ , кгс/см <sup>2</sup>	0	10	20	30	50	70	100	150	200
$Fk$ , кгс	68.1	74.6	80.3	86.7	98.3	110.5	127.8	162.4	217.1
$Q_{ум}$ , см <sup>3</sup> /с	0	0.56	1.8	3.4	6.8	9.2	8.4	0.7	0.39

**Формула для расчета силы контактного давления.** Чтобы расчетным путем оценить величину силы трения и другие важные характеристики НДС манжеты нужно использовать описанную выше математическую модель и её программную реализацию – в этом состоит основная практическая рекомендация данной работы. Но на начальных этапах эскизного проектирования желательнее иметь аналитическую формулу вида (1), поэтому в данном и следующем пунктах статьи выполняются необходимые шаги в указанном направлении.

Если ус манжеты имеет малую кривизну, а уплотняемое давление велико (10 МПа и более), то

$$Fk \approx \pi D \cdot L \cdot f_p \cdot (p_{z,1} - p_{z,2}), \text{ где } f_p \approx 0.33, \quad (25)$$

и эти приближенные равенства являются следствием формулы (4), описывающей изменение давления газа в зазоре между манжетой и втулкой (или штоком), а также получили многочисленные подтверждения по результатам расчета манжет по описанной выше методике. В качестве примера можно сослаться на данные табл. 5.

Но при других условиях коэффициент  $f_p > 0.33$  и изменяется в широких пределах (см., например, данные из табл. 6), поскольку на величину контактной силы  $Fk$ , кроме давления газа, оказывают определенное влияние напряжения сдвига  $Q_c$  и изгиба  $Q_\beta$ , причем характер и величина этого влияния разные.

Чтобы не усложнять выкладки, производной  $h'$  в системе уравнений (11), а также отношением  $h/R$  в равенстве (3) будем пренебрегать. Тогда первое уравнение системы (11) можно переписать в следующем виде:

$$p_k = Ec \cdot (h \cdot (-w) / R^2) + E \cdot \beta' \cdot h / 2 + p_{z,1} - p_{z,3}.$$

Первые слагаемые правой части будем трактовать как *упругие давления – сдвиговое*  $p_c$  и *изгибное*  $p_\beta$ , где

$$p_c = Ec \cdot (h \cdot (-w) / R^2); \quad p_\beta = E \cdot \beta' \cdot h / 2,$$

то есть,

$$p_k = p_c + p_\beta + p_{z,1} - p_{z,3}. \quad (26)$$

Влияния упругих давлений видны на рис. 10, 11, 17. Изгибное давление  $p_\beta$  принимает заметные значения

Таблица 11 – Упругое давление сдвига  $p_{c,cp}$ , МПа и поправочные коэффициенты  $\zeta$  для формулы (29)

Диаметр $dP$ , мм	5	10	15	20	30	40	50
Давление $p_{c,cp}$ , МПа	15.7	4.12	1.87	1.06	0.47	0.27	0.17
Давление $p_{z,1}$ , МПа	Коэффициент $\zeta$						
10	0.85	0.79	0.77	0.77	0.76	0.76	0.76
20	1.15	0.96	0.89	0.85	0.84	0.84	0.85
30	1.27	1.45	1.28	1.20	1.13	1.11	1.11

вблизи точки контакта, а далее быстро убывает, и его вклад в общий результат невелик.

Заметим, что эти же характерные пики можно увидеть на экспериментальных кривых контактного давления между манжетой и втулкой диаметром 46 мм, которые были получены в КБЮ Ю. П. Просвираковым и А. П. Поповым. В своем исследовании мы, к сожалению, не можем опираться на многие другие результаты

этой интересной работы, поскольку в тех экспериментах все остальные испытания проводились после проверки на прочность давлением 70 МПа. В результате форма манжет подвергалась пластическому деформированию, часть материала вытекала в зазор, доньшко манжеты увеличивало свою ширину, и точка начала контакта манжеты с втулкой или штоком размещалась не на усе, а на доньшке. В данной публикации предполагается, что *после испытаний манжет их размеры и геометрия практически не отличаются от значений, заданных в чертеже*; то есть, для исследуемого уплотнения пластическая деформация и *псевдотекучесть* фторопласта малы, и ими можно пренебречь.

Сдвиговое давление  $p_c$  на контактном участке манжеты изменяется незначительно, и его среднее значение можно оценить формулой:

$$p_{c,cp} = Ec \cdot \left| D - D_{yc} \right| \cdot h_{cp} / (D \cdot (D \pm hcp)), \quad (27)$$

где  $D_{yc}$  – диаметр внешней поверхности манжеты на свободном конце уса (до радиальной деформации);  $h_{cp}$  – средняя толщина уса манжеты; знак *плюс* отвечает внутреннему усу, знак *минус* – наружному.

Заметим, что при расчете по формуле (27) целесообразно учесть продольное сжатие манжеты давлением  $p_{z,1}$ , а также влияние температуры фторопласта на модуль сжатия и линейные размеры детали.

При переходе в (26) к средним величинам учтем, что из равенства (25) следует

$$(p_{z,1} - p_{z,3})_{cp} \approx 0.3 \cdot (p_{z,1} - p_{z,2}), \text{ а } p_{\beta,cp} \approx 0.$$

В результате получаем

$$PK = p_{к.ср} \approx p_{с.ср} + 0.33 \cdot (p_{2.1} - p_{2.2}),$$

а после учета толщины манжеты и изменения её поперечного размера под действием уплотняемого давления,

$$PK = 0.33 \cdot (p_{2.1} - p_{2.2}) + p_{с.ср} \pm (2 - \nu) \cdot h_{ср} / D \cdot p_{2.1}, \tag{28}$$

где знак выбирается по тому же правилу, что указано выше.

Среднее контактное давление  $PK$  подставляем в формулу для расчета силы

$$Fk \approx \pi D \cdot L \cdot PK, \tag{29}$$

а также будем использовать далее в формуле для коэффициента трения.

Искомая формула (29) получена после ряда упрощений, в частности, она не учитывает влияние переменной плотности зазора и зависимость длины контактного участка уса от давления. Поэтому для проверки её точности было выполнено расчетное исследование при использовании разработанной модели НДС манжеты. Результаты исследования показаны в табл. 11. Коэффициент  $\zeta$  удовлетворяет условию

$$\zeta = Fk / (\pi D \cdot L \cdot PK),$$

то есть он исправляет неточность формулы (29). В ходе этого исследования моделировалось НДС внутреннего скользящего уса манжеты, имеющей длину уса  $L = 3.2$  мм, минимальную толщину уса 0.3 мм; толщину доннышка 0.8 мм. Уплотнительный диаметр  $dP$  изменялся в указанных пределах, а внешний уплотнительный диаметр вычислялся по формуле  $DP = dP + 2 \cdot H$ , где  $H = 4$  мм.

Как видим, для манжет среднего и большого диаметров формула (29) имеет приемлемую точность. Но при большой кривизне манжеты и высоком уплотняемом давлении для повышения точности рекомендуется использовать поправочный множитель из табл. 11.

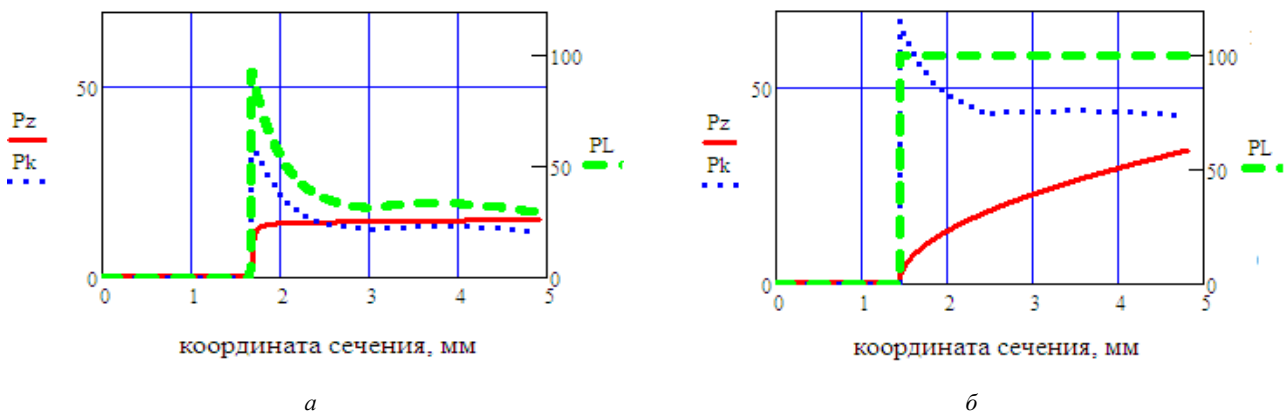


Рис. 20 – Давления в зазоре и плотность контакта для манжеты 014, диаметр внутреннего уплотнения 8 мм: а – уплотняемое давление 15 МПа; б – уплотняемое давление 34 МПа.

**Расчетная формула для коэффициента трения.** Трение создается в пятнах контакта, центры которых привязаны к имеющимся выступам на поверхности втулки или штока (вершинам 4-рех угольных пирамид, рис. 16), и при скольжении манжеты эти пятна перемещаются по её поверхности. Поэтому чем выше относительная площадь пятен, тем ниже коэффициент трения и тем меньше он зависит от скорости скольжения.

Распределения пятен контакта для манжет малого и среднего диаметров проиллюстрированы на рис. 20, 21.

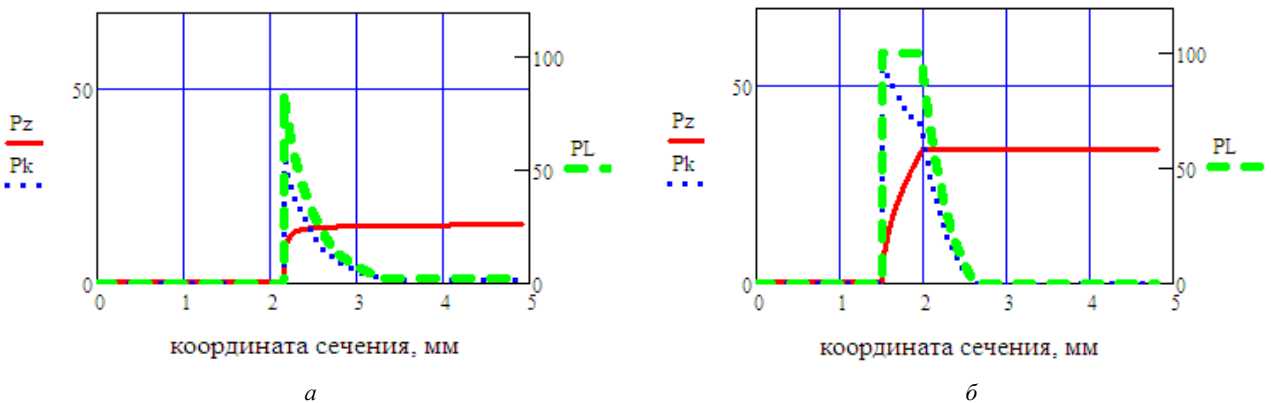


Рис. 21 – Давления в зазоре и плотность контакта для манжеты 004, диаметр внешнего уплотнения 30 мм: а – уплотняемое давление 15 МПа; б – уплотняемое давление 34 МПа.

Средняя площадь пятен контакта для рис. 20 а составляет 37.4 %; если вычислить этот процент от твердости  $HB = 40$  МПа, то мы получим *среднее эффективное контактное давление*  $p_{эф.ср}$ ; в этом примере оно практически совпало с уплотняемым давлением 15 МПа. Но при давлении 34 МПа (рис. 20, б) площадь пятен увеличивается до 98.6 %, а эффективное давление – до 38 МПа, и оказывается больше уплотняемого давления.

На рис. 21, а средняя площадь пятен контакта составляет 10.8 %, а среднее эффективное контактное давление – 4.3 МПа. На рис. 21, б средняя площадь пятен контакта 20.6 %, но она плохо характеризует среднее эффективное контактное давление, которое в этом случае следует вычислять только лишь по начальному отрезку длиной 1 мм, где мы получим  $p_{эф.ср} \approx 35$  МПа.

Представленные здесь, а также на рис. 17, примеры показывают, что коэффициент трения для разных участков контактной зоны принимает разные значения, и это учтено в методике расчета манжеты. А именно, вместо интеграла (23), вычисляющего суммарное значение силы контактного давления, используется интеграл

$$F_{mp} = \pi D \cdot L \cdot \int_{L_k}^L f_{mp}(p_k) \cdot p_k dx, \quad (30)$$

который дает суммарное значение для силы трения. Но, учитывая приближенный характер искомой зависимости, разрабатываемой для этапа эскизного проектирования манжеты, формула для коэффициента трения была записана в следующей легко запоминаемой форме:

$$f_{mp} = 0.05 - 0.025 \cdot [PK / HB].$$

**Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения.** При выводе формулы, учитывающей эту зависимость, учтено, что если  $PR(x) \geq HB$ , то пятна контакта покрывают всю поверхность манжеты, и эта зависимость вырождается. Следовательно, искомая формула может иметь вид:

$$f_{mp} = 0.05 - 0.025 \cdot [PK / HB] + \psi(V) \cdot (1 - [PK / HB]).$$

Про функцию  $\psi(V)$ , опираясь на данные табл. 1, а также сайта [6], известно следующее:

- $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(0.1) = 0.047$  – при низком контактном давлении;
- $0.6 \cdot \psi(0.1) = 0.017$  – при давлении  $PK = 15$  МПа;
- зависимость значений функции от значений аргумента линейная.

Система этих условий противоречива, но, понимая приближенный характер обработанных экспериментальных данных, можно найти приемлемый компромисс:

$$\psi(V) = 0.4 \cdot V,$$

где скорость скольжения  $V$  имеет физическую размерность м/с.

В результате пришли к несложной зависимости:

$$f_{mp} = 0.05 - 0.025 \cdot [PK / HB] + 0.04 \cdot (1 - [PK / HB]) \cdot V / V_*, \quad (31)$$

которую рекомендуется использовать на этапе эскизного проектирования манжеты при значениях

$$PK < HB, \quad V < V_* = 0.1 \text{ м/с}.$$

С учетом этой зависимости получаем формулу для силы трения скольжения:

$$F_{mp} = F_{mp,0} + \Delta F_{mp} \cdot (V / V_*),$$

где

$$F_{mp,0} = 0.05 \cdot \pi D \cdot L \cdot (1 - 0.5 \cdot [PK / HB]) \cdot PK; \quad \Delta F_{mp} = 0.04 \cdot \pi D \cdot L \cdot (1 - [PK / HB]) \cdot PK. \quad (32)$$

Заметим, что на дальнейших этапах проектирования исследуется динамика регулятора, и здесь нужно использовать уточненную зависимость для силы трения скольжения. В результате формулы (32) принимают вид:

$$F_{\delta, \delta, 0} = 0.05 \cdot \pi D \cdot L \cdot \int_{L_k}^L (1 - 0.5 \cdot p_k / HB) \cdot p_k dx; \quad \Delta F_{\delta, \delta} = 0.04 \cdot \pi D \cdot L \cdot \int_{L_k}^L (1 - p_k / HB) \cdot p_k dx,$$

где указанные интегралы вычисляются после определения параметров НДС манжеты для некоторого (характерного для этого узла) значения уплотняемого давления.

**Коэффициенты трения покоя и начала движения.** При расчете манжеты клапана основного регулятора пневмосистемы запуска ЖРД (рис. 1) трение покоя можно не учитывать. Перед началом его подъема открывается пневмоклапан, и в камеру управления заходит газ под высоким давлением, превышающим остаточное давление. Это увеличенное давление воздействует на манжету и заметно сжимает её в осевом направлении. Для справки – повышение давления на 10 МПа уменьшает высоту манжеты на 0.05 мм. Осевая деформация манжеты приводит к разрыву сил сцепления между манжетой и втулкой и к скольжению усов относительно втулки, что сопровождается переходом части фторопласта на трущейся поверхности манжеты из кристаллической фазы

в аморфную. К моменту начала подъёма клапана обратный переход произойти не успевае (на это нужно время, измеряемое секундами). Следовательно, *трение покоя для этой манжеты преодолевается уже до начала подъёма клапана*, и при моделировании динамики регулятора его можно не учитывать.

Отчасти это утверждение справедливо и для управляющего регулятора (рис. 3), который длительное время находится в ждущем режиме, но затем, за короткое время, обеспечивает включения и выключения нескольких систем-потребителей, так что трущаяся поверхность его манжеты не успевае кристаллизоваться. Но при срабатывании потребителей с номерами  $j = 1, 2$ , которые на циклограмме идут первыми, наблюдается резкий провал управляющего давления  $p_{упр}$ , вызванный, в том числе, необходимостью преодолевать трение покоя (рис. 22). Электропневмоклапаны (ЭПК), отмеченные на рис. 22, установлены за управляющим регулятором и открывают доступ газа к соответствующей системе, которой они управляют.

В имитаторе работы манжетного уплотнения, схема которого показана на рис. 18, давление воздуха, уплотняемое этими манжетами, было постоянным, поэтому в экспериментах трение покоя присутствовало. Коэффициент трения покоя, если он необходим для расчета клапана, рекомендуется определять по формуле:

$$f_{mp} = 0.08 - 0.04 \cdot [PK / HB],$$

что примерно в 1.6 раза выше, чем для трения скольжения с малой скоростью (то есть, при страгивании).

В справочной литературе по фторопласту, в частности на сайте [6], указывается, что

- коэффициент трения покоя равен коэффициенту трения начала движения и
- при контактном давлении  $10 \dots 20 \text{ кгс/см}^2$  в диапазоне скоростей скольжения  $V = 0 \dots 4 \text{ см/сек}$  коэффициент трения не зависит от скорости.

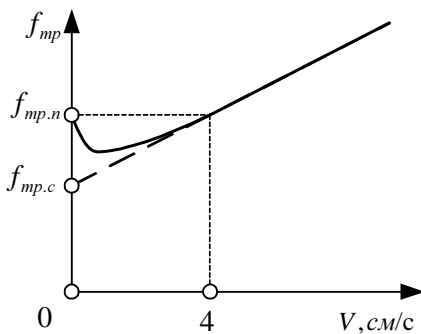


Рис. 23 – Характер зависимости коэффициента трения фторопласта-4 от скорости скольжения.

*трения движения, которая наблюдается при скорости 4 см/с. Следовательно, значение силы трения мало изменяется в указанном диапазоне скоростей (рис. 23), что в цитированных источниках трактуется как сохранение величины коэффициента трения.*

**Выводы.**

1. Разработаны математическая модель и методика расчета статических деформаций и напряжений в усах фторопластовой манжеты с коническими боковыми поверхностями, используемой для уплотнения клапана и поршней регулятора давления газа ракетного двигателя.
2. Поставлена и решена одномерная задача аэроупругости, возникающая при анализе контакта между фторопластовой манжетой и цилиндрической стенкой из металла, на основе чего разработан метод расчета эффективного зазора и утечек газа через данное уплотнение.
3. Исследованы теоретические закономерности упругопластической деформации лепестков распорной пружины и разработан метод расчета давления, оказываемого этими лепестками на стенку фторопластовой манжеты.
4. Разработаны методы экспериментального исследования силы трения в манжетах (на существующих и на специально разработанных пневматических стендах) и описаны новые результаты, уточняющие известные зависимости трения от уплотняемого давления и скорости скольжения фторопласта.
5. Описана методология комплексного стендового исследования и проанализированы результаты контроля плотности зазора в манжетных уплотнениях агрегатов пневмоавтоматики ракетного двигателя.
6. Выполнено сравнение экспериментальных данных и результатов расчета силы трения, максимального

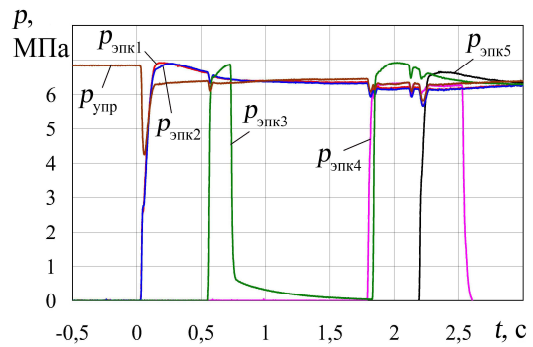


Рис. 22 – Давления газа в линии управления пневмосистемы запуска ЖРД:  $p_{упр}$  – на выходе из управляющего регулятора;  $p_{эпк j}$  – на выходе из  $j$ -го ЭПК.

Как видим, первое утверждение в выполненном экспериментальном исследовании на имитаторе не подтвердилось: трение покоя превышает трение начала движения в 1.6 и более раз.

Проверим второе утверждение.

В табл. 1 приведены значения силы трения в манжете 004 при давлении  $15 \text{ кгс/см}^2$ . Интерполируя данные табл. 5 и табл. 1, выясняем, что началу движения отвечает значение силы трения  $2.8 \text{ кгс}$ , а скорости  $4 \text{ см/с}$  – сила  $4.9 \text{ кгс}$ . Следовательно, при увеличении скорости от 0 до  $4 \text{ см/с}$  сила трения возрастает примерно в 1.6 ... 1.8 раза.

Учтем, что коэффициент трения покоя  $f_{mp,n}$  примерно в 1.6 ... 2 раза выше коэффициента трения  $f_{mp,c}$  начала движения, и что снижение этого значения происходит не скачком, а непрерывно, поскольку при очень медленном скольжении процесс обратной кристаллизации аморфной фазы успевае существенно уменьшить её объём.

Получаем, что *сила трения покоя приблизительно равна силе трения движения, которая наблюдается при скорости 4 см/с. Следовательно, значение силы трения мало изменяется в указанном диапазоне скоростей (рис. 23), что в цитированных источниках трактуется как сохранение величины коэффициента трения.*

распорного давления лепестковой пружины и величины утечек газа через зазоры манжетного уплотнения, которое подтвердило достаточную для практики точность разработанных математических моделей.

7. Получены уточненные формулы для расчета силы трения и коэффициента трения в зависимости от величины уплотняемого давления и скорости скольжения уса манжеты. В этих формулах используются упругие и пластические характеристики фторопласта – модуль Юнга и твердость по Бринеллю.

**Список литературы.** 1. Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – №7(124). – С. 100 – 110. 2. Абрамов Е. И., Колесниченко К. А., Маслов В. Т. Элементы гидропривода. (Справочник). – К. : Техніка, 1977. – 320 с. 3. Тарасов В. А. Обеспечение заданных характеристик надежности затворов трубопроводной арматуры. – Дис... канд. техн. наук. – Братск, 2009. – 143 с. 4. Илюхин В. Н. Динамика регуляторов давления газораспределительных станций. – Дис... канд. техн. наук. – Самара, 2006. – 144 с. 5. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В. и др. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков, 2004. – 391 с. 6. Фторопласт-4/PTFE и известные композиции из фторопласта-4. – Инженерный справочник tehtab.ru. – Электронный ресурс. 7. Горохов Д. Б. Контактное взаимодействие фронтальных шероховатых поверхностей деталей машин. – Дис... канд. техн. наук. – Братск, 2005. – 145 с. 8. Roth A., Inbar A. An analysis of the vacuum sealing process between turned surfaces // *Vacuum*. 1968. Vol. 18, No. 6. P. 306 – 317. 9. Рыжов Э. В., Сагарда А. А., Ильицкий В. Б. и др. Качество поверхности при алмазно-абразивной обработке. – К. : Наукова думка, 1979. – 241 с. 10. Кондаков Л. А., Голубев А. И., Гордеев В. В. и др. Уплотнение и уплотнительная техника : Справочник. – М. : Машиностроение, 1994. – 448 с. 11. Присяжков В. Ф., Галась М. И., Логвиненко А. И., Мосейко В. А. Определение параметров газа при опорожнении емкости с учетом сжимаемости и сопротивления магистрали // *Проблемы высокотемпературной техники*. – Сб. науч. тр. ДГУ, Днепрпетровск, 1981. – С. 86 – 94. 12. Сычев В. В., Вассерман А. А., Козлов А. Д. и др. Термодинамические свойства воздуха. – М. : Издательство стандартов, 1978. – 276 с.

**References:** 1. Shevchenko, S. A., Grigoriev, A. L. and Stepanov, M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchetе teploobmena gaza so stenkami polostey i utocnenniі sil, deystvuyushikh na klapanы regulyatorov [Modelling an LRE pneumatic starting system taking into account the heat exchange between gas and cavity walls and specifying the forces acting on the regulator valves]. *Aviacionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aviation and Space Technique and Technologies]. Kharkov, 2015, no. 7 (124), pp. 100–110. 2. Abramov, E. I., Kolesnichenko, K. A. and Maslov, V. T. *Yelementy gidroprivoda. (Spravochnik)* [Elements of hydraulic drive. (Reference book)]. Kyiv, Tehnika Publ., 1977. 320 p. 3. Tarasov, V. A. *Obespechenie zadannykh harakteristik nadezhnosti zatvorov truboprovodnoy armatury: dis. kand. tehn. nauk.* [Providing given reliability features of pipeline valve gates. Abstract of a thesis candidate eng. sci. diss.]. Bratsk, 2009. 143 p. 4. Iljukhin, V. N. *Dinamika regulyatorov davleniya gazoraspredeletel'nykh stanciy: dis. kand. tehn. nauk.* [Dynamics of pressure regulators of gas-distribution stations. Abstract of a thesis candidate eng. sci. diss.]. Samara, 2006. 144 p. 5. Yanyutin, E. G., Yanchevskiy, I. V., Voropay, A. V. and Sharapata, A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya yelementov konstruktsiyi* [The problems of pulse deformation of structural components]. Kharkov, 2004. 391 p. 6. Inzhenernyy spravochnik [Engineering reference book]. "Ftoroplast-4/PTFE i izvestnye kompozitsii iz ftoroplasta-4" [Fluoroplastic-4/PTFE and known fluoroplastic-4 compositions]. Available at: <http://tehtab.ru/Guide/GuideMaterials/SealsAndHermetics/Sealsftoroplast4/ftoroplast4>. (accessed 01.03.2016). 7. Gorokhov, D. B. *Kontaktnoe vzaimodeystviye frontal'nykh sherokhovatykh poverkhnostey detaley mashin: dis. kand. tehn. nauk.* [Contact interaction of frontal rough shape surfaces of machine parts. Abstract of a thesis candidate eng. sci. diss.]. Bratsk, 2005. 145 p. 8. Roth, A. and Inbar, A. An analysis of the vacuum sealing process between turned surfaces. *Vacuum*. 1968, Vol. 18, no. 6, pp. 306–317. 9. Ryzhov, Ye. V., Sagarda, A. A., Il'itskiy, V. B. and Cepovezkiy, I. H. *Kachestvo poverkhnosti pri almazno-abrazivnoy obrabotke* [Surface quality in diamond-abrasive machining]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1979. 241p. 10. Kondakov, L. A., Golubev, A. I. and Gordeev, V. V. *Uplotnenie i uplotnitel'naya tekhnika: Spravochnik* [Sealing and seal technology. Reference book]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994. 448 p. 11. Prisyazkov, V. F., Galas', M. I., Logvinenko, A. I. and Moseyko, V. A. *Opredeleeniye parametrov gaza pri oporozhnenii emkosti s uchetom szhimaemosti i soprotivleniya magistrali* [Determining gas parameters during container discharge taking into account line compressibility and resistance]. *Problemy vysokotemperaturnoy tekhniki* [Problems of high-temperature equipment]. Dnepropetrovsk, DGU Publ., 1981, pp. 86–94. 12. Sychev, V. V., Vasserman, A. A. and Kozlov, A. D. *Termodinamicheskie svoystva vozdukha* [Thermodynamic properties of air]. Moscow, Izdatel'stvo standartov Publ., 1978. 276 p.

Поступила (received) 05.03.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Шевченко Сергій Андрійович** – провідний інженер-конструктор Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ, Україна; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Шевченко Сергій Андреевич** – ведучий інженер-конструктор Государственного предприятия «Конструкторское бюро «Южное» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ, Україна; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Shevchenko Sergey Andreevich** – Leading Engineer, Yuzhnoye State Design Office, Dnipropetrovsk, Ukraine; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Валивахін Сергій Опанасович** – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ, Україна; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Валивахин Сергей Афанасиевич** – канд. техн. наук, ведучий научний співробітник Государственного предприятия «Конструкторское бюро «Южное» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ, Україна; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Valivakhin Sergey Afanasievich** – Candidate of Engineering Sciences, Leading Research Scientist, Yuzhnoye State Design Office, Dnipropetrovsk, Ukraine; e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Григор'єв Олександр Львович** – проф., д-р техн. наук, професор НТУ «Харківський політехнічний інститут», Україна; тел.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Григорьев Александр Львович** – проф., д-р техн. наук, профессор НТУ «Харьковский политехнический институт», Україна; тел.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Grigoriev Aleksandr L'vovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Ukraine; tel.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Степанов Михайло Сергійович** – проф., д-р техн. наук, декан НТУ «Харківський політехнічний інститут», Україна; тел.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Степанов Михаил Сергеевич** – проф., д-р техн. наук, декан НТУ «Харьковский политехнический институт», Україна; тел.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Stepanov Mikhail Sergeevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Ukraine; tel.: +380577076035; e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.



## ЗМІСТ

<i>Андренко П. М., Погорєлов Д. С., Свиначенко М. С.</i> Математична модель універсального стенда для випробувань гідроапаратів .....	5
<i>Губарев О. П., Левченко О. В., Корчовний А. В.</i> Дворівнева модель системи гідроприводу з паралельною структурою .....	13
<i>Козьмин Ю. С., Суздаль В. С.</i> Редукция замкнутой системы управления многомерным процессом выращивания монокристаллов .....	18
<i>Кондратець В. О., Мацуй А. М.</i> Дослідження умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпі- рального класифікатора .....	24
<i>Левтеров А. М., Левтеров А. А., Левтерова Л. И.</i> Формирование базы данных термодинамических свойств сложных эфиров жирных кислот биодизельных топлив в газовой фазе (часть 1) .....	30
<i>Левтеров А. М., Левтеров А. А., Левтерова Л. И.</i> Формирование базы данных термодинамических свойств сложных эфиров жирных кислот биодизельных топлив в газовой фазе (часть 2) .....	37
<i>Литвин О. М.</i> Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних .....	43
<i>Литвин О. М., Литвин О. О., Коваль Ф. Ф., Чорна О. С.</i> Математична модель просторового розподілу вмі- сту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерлінації функцій ...	46
<i>Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., Каргапольцева Г. В.</i> Оцінка повної похибки кубатурної формули набли- женого обчислення інтеграла від швидкоосцилюючої функції трьох змінних .....	50
<i>Малахов Е. С., Воронай А. В.</i> Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн .....	56
<i>Маринич Т. О., Назаренко Л. Д., Гец К. В.</i> Моделювання нестационарних процесів із структурними розри- вами .....	62
<i>Мельник О. С., Козаревич В. О., Решетник А. О.</i> Програмування мультиплексорних мікро- та наносхем .....	68
<i>Назаренко А. М.</i> Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн .....	74
<i>Нефедов Л. И., Шевченко М. В.</i> Метод определения мест размещения устройств коммутации, сбора и пере- дачи информации при синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения .....	83
<i>Петренко О. М., Любарський Б. Г., Глебова М. Л.</i> Алгоритм синтезу експертної системи управління рухом електрорухомого складу на основі рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана .....	89
<i>Плаксий Ю. А.</i> Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого ті- ла. Другий тип моделі .....	96
<i>Ребров О. Ю.</i> Розподіл потоків потужності і ККД механічної трансмісії повнопривідного колісного трак- тора .....	104
<i>Середа В. А.</i> Концепция проектирования компактных наземных пусковых устройств для запуска беспилот- ных летательных аппаратов .....	110
<i>Черний Д. И.</i> Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей .....	116
<i>Шевченко С. А., Валивахин С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С.</i> Математическая модель манжетных уп- лотнений из фторопласта для агрегатов пневмоавтоматики ракетных двигателей .....	124
Реферати .....	146
Рефераты .....	148
Abstracts .....	151

## CONTENTS

<i>Andrenko P. M., Pogorelov D. S., Svinarenko M. S.</i> Mathematical model of universal bench for hydraulic valves testing .....	5
<i>Gubarev O. P., Levchenko O. V., Korchovniy A. V.</i> Two-level model of a hydraulic system with parallel structure .....	13
<i>Kozmin Yu. S., Suzdal V. S.</i> Reduction of closed-loop control system for multivariable process of growing single crystals .....	18
<i>Kondratets V. A., Matsui A. N.</i> The study of the conditions of formation of pulp flow in the sand chute of a single-spiral classifier .....	24
<i>Levterov A. M., Levterov A. A., Levterova L. I.</i> Forming database of thermodynamic properties of fatty acid esters of biodiesel fuel in the gas phase (part 1) .....	30
<i>Levterov A. M., Levterov A. A., Levterova L. I.</i> Forming database of thermodynamic properties of fatty acid esters of biodiesel fuel in the gas phase (part 2) .....	37
<i>Lytvyn O. M.</i> Method for increasing accuracy of expanding discontinuous functions of one variable in Fourier series .....	43
<i>Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Koval F. F., Chorna O. S.</i> Mathematical model of spatial distribution of a set of minerals in the crust using borehole core data by function interlineation method .....	46
<i>Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P., Kargapolitseva G. V.</i> An estimate for total absolute error of cubature formula of approximate calculation of the integral of high oscillating functions of three variables .....	50
<i>Malakhov E. S., Voropay A. V.</i> The inverse problem for non-stationary vibrations of a string system .....	56
<i>Marynych T. O., Nazarenko L. D., Gets K. V.</i> Modeling of nonstationary processes with structural breaks .....	62
<i>Melnyk O. S., Kozarevych V. O., Reshetnik A. O.</i> Programming of multiplexing micro- and nanocircuits .....	68
<i>Nazarenko A. M.</i> Method of energy modeling of diffraction of elastic waves .....	74
<i>Nefedov L. I., Shevchenko M. V.</i> A method of determining the location of switching devices and devices for collecting and transmitting information when synthesizing a regional gas supply monitoring system .....	83
<i>Petrenko O. M., Lyubarskii B. G., Glebova M. L.</i> An algorithm for synthesizing an expert electric rolling stock traffic control system on the basis of solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation .....	89
<i>Plaksiy Yu. A.</i> Generalization of a three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation. Second type of model .....	96
<i>Rebrov O. Yu.</i> Distribution of power flows and efficiency of four-wheel drive tractor mechanical transmission .....	104
<i>Sereda V. A.</i> The concept of designing compact ground launching devices for launching unmanned aerial vehicles ...	110
<i>Cherniy D. I.</i> Computing technologies of the discrete vortices method .....	116
<i>Shevchenko S. A., Valivakhin S. A., Grigoriev A. L., Stepanov M. S.</i> Mathematical model of PTFE seals for hydraulics units of rocket engines .....	124
Abstracts (ukr.) .....	146
Abstracts (rus.) .....	148
Abstracts (eng.) .....	151

## РЕФЕРАТИ

УДК 621.226

**Математична модель універсального стенда для випробувань гідроапаратів / П. М. Андриченко, Д. С. Погорілов, М. С. Свириченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 5 – 13. Бібліогр.: 27 назв. – ISSN 2222-0631.**

Наведено принципову гідравлічну схему універсального, енергоефективного стенда для випробувань гідроапаратів. Обґрунтовано діапазон зміни робочих параметрів гідроапаратів, що досліджуються, та вихідних параметрів стенда. Проведений вибір гідравлічних елементів та пристроїв для її реалізації. Розроблена повна математична модель цього стенда, яка разом з математичною моделлю гідроапарата дозволяє визначити робочі характеристики останнього. Розглянуто перспективи подальшого удосконалення схемної та елементної реалізації випробувального стенда з метою підвищення його енергоефективності.

**Ключові слова:** стенд, гідроапарат, робочі параметри, математична модель, робоча характеристика.

УДК 62-531.4

**Дворівнева модель системи гідроприводу з паралельною структурою / О. П. Губарев, О. В. Левченко, А. В. Корчовий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 13 – 17. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано дворівневу модель систем гідроприводу з паралельною структурою. Логічна складова моделі описує логічну взаємодію виконавчих пристроїв з урахуванням їх спрацювання в паралельних потоках. Функціональна складова визначає технологічні та експлуатаційні характеристики кожної операції, які є основою для визначення рівня енергоспоживання гідравлічної системи. Додатково розглянуто перспективи подальших досліджень в напрямку визначення та прогнозування енергоефективності системи.

**Ключові слова:** дворівнева модель, гідропривід, паралельна структура, енергоефективність.

УДК 621.3.078.3

**Редукція замкнутої системи управління багатовимірним процесом вирощування монокристалів / Ю. С. Козьмін, В. С. Суздаль // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 18 – 24. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Для управління процесом кристалізації лужно-галогенних кристалів використаний непрямий метод синтезу регуляторів низького порядку і заданої структури. Для отримання робастного регулятора зниженого порядку застосовується процедура збалансованого відсікання. Підхід базується на задачі управління по нормі  $H_{\infty}$ . Такий підхід зменшує похибку, яка обумовлена застосуванням редукованого регулятора. На конкретному прикладі показано, що не спостерігається помітного погіршення робастних властивостей при допустимому збереженні властивостей системи в області високих частот.

**Ключові слова:** робастний ПД регулятор, монокристал, багатовимірний процес.

УДК 001.57

**Дослідження умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора / В. О. Кондратець, А. М. Мацуй // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 24 – 30. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.**

Представлені результати дослідження формування і руху потоку пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. При співударянні пісків і води у пісковому жолобі створюється суміш з рівномірно розташованим твердим, яка не змінюється і в процесі руху пульпи. Змінна об'ємна продуктивність пісків класифікатора робить рух пульпи нерівномірним. За отриманими залежностями в певні моменти часу можливо визначити середню швидкість руху і висоту пульпи у пісковому жолобі, які однозначно характеризують умови формування потоку, дають можливість відтворення механізму взаємодії між масивами матеріалу та обґрунтування шляхів підвищення точності вимірювання технологічного параметра.

**Ключові слова:** спіральний класифікатор, піски, пісковий жолоб, пульпа, потік, швидкість, висота, витрата.

УДК 621.43

**Формування бази даних термодинамічних властивостей складних ефірів жирних кислот біодизельних палив в газовій фазі (частина 1) / А. М. Левтеров, О. А. Левтеров, Л. І. Левтерова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 30 – 37. Бібліогр.: 32 назв. – ISSN 2222-0631.**

Аналіз наукових публікацій дозволив обумовити набір розрахункових експериментальних вибірок, які надають можливість сформувати базу даних про термодинамічні та термохімічні властивості складних метилових і етилових ефірів вищих жирних кислот, хімічно пов'язаних в різноманітних комбінаціях в біодизельних паливах, вироблених з рослинних олій. Така база даних дозволить реалізувати чисельне моделювання робочих процесів поршневого двигунів з самозайманням, що працюють як на суто біодизельному паливі, так і на біофавтових композиціях.

**Ключові слова:** біопалива, ефіри жирних кислот, рослинні олії, математичне моделювання, робочий процес, термодинамічні властивості, термохімічні властивості, поліном.

УДК 621.43

**Формування бази даних термодинамічних властивостей складних ефірів жирних кислот біодизельних палив в газовій фазі (частина 2) / А. М. Левтеров, О. А. Левтеров, Л. І. Левтерова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 37 – 43. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

За підсумком апроксимації дискретних табличних даних про термодинамічні та термохімічні властивості двадцяти двох метилових та етилових ефірів вищих жирних кислот отримані коефіцієнти поліномів, що описують основні термодинамічні характеристики цих речовин в функції температури на інтервалі 300 – 3000 К. Таким чином надолужується відсутність відомостей про термодинамічні властивості цілої низки біодизельних палив, що виробляються з різних рослинних олій, яка ускладнює чисельне моделювання робочих процесів поршневого двигунів з самозайманням.

**Ключові слова:** біопалива, ефіри жирних кислот, рослинні олії, математичне моделювання, робочий процес, термодинамічні властивості, термохімічні властивості, поліном.

УДК 519.6

**Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних / О. М. Литвин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 43 – 46. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Пропонується для чисельної реалізації метода А.Н.Крилова підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї змінної використовувати розривні сплайни. Обговорюється також можливість його узагальнення на функції двох змінних для покращення діагнозу в комп'ютерній томографії з використанням проєкцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Пропонується в методі А.Н.Крилова підвищення точності наближення сумами Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних використовувати розривні сплайни.

**Ключові слова:** розривні функції, ряди Фур'є, покращення збіжності, метод виділення особливостей.

УДК 519.6

**Математична модель просторового розподілу вмісту деякої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методом інтерпліації функцій / О. М. Литвин, О. О. Литвин, Ф. Ф. Коваль, О. С. Чорна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 46 – 50. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто задачу про відновлення в кожній точці між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих) скінченної множини елементів періодичної таблиці або їх сполук лінійної щільності на заданій глибині. Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної

таблиці, а лише  $n$  – вибраними елементами або їх сполуками. Запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами по заданій глибині. Наведений метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин між похилими свердловинами дозволяє будувати математичні моделі структури кори Землі з використанням всіх сполук ядерних похилих свердловин, які призведуть до створення ефективних методів розвідки корисних копалин та розробки родовищ. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** математична модель, інтерлінація функцій, просторовий розподіл, ядра свердловин.

УДК 519.6

**Оцінка повної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючої функції трьох змінних / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвігер, Г. В. Каргапольцева // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 50 – 56. Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2222-0631.**

Отримано оцінку повної абсолютної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на взаємноперпендикулярних площинах наближено з заданою максимальною похибкою. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерфлетатції, функція належить класу Ліпшица з додатковими умовами. На конкретному прикладі продемонстровано справедливість теореми про оцінку похибки методу заокруглення розв'язків.

**Ключові слова:** інтеграл від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, кубатурні формули, інтерфлетатція, похибка методу, неусузна похибка, похибка заокруглення.

УДК 539.3

**Обернена задача для нестационарных колебаний системы струн / Є. С. Малахов, О. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 56 – 62. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглядається система з трьох струн, що контактують між собою в деяких точках так, що переміщення в цих точках співпадають. Моделювання нестационарних коливань струн здійснюється на основі хвильових рівнянь. Обернена задача зводиться до вирішення системи трьох інтегральних рівнянь Вольтера I-го роду, для якої здійснюється дискретизація. Блочна система лінійних алгебраїчних рівнянь вирішується з використанням узагальненого алгоритму Крамера і регуляризованого алгоритму Тихонова.

**Ключові слова:** система струн, нестационарне навантаження, хвильове рівняння, регуляризований алгоритм, інтегральне рівняння Вольтера, ідентифікація сил.

УДК 519.25

**Моделювання нестационарних процесів із структурними розривами / Т. О. Маринич, Л. Д. Назаренко, К. В. Гец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 62 – 68. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Проведено пошук оптимальної моделі для опису нестационарних часових рядів із адекватними статистичними характеристиками та якісними прогнозними властивостями. У якості інформаційної бази обрано шоденні статистичні дані міжбанківського валютного курсу гривні до долара США. Досліджено детерміністичні та стохастичні компоненти з метою визначення класу стаціонарності ряду. Перевірено доцільність проведення різних процедур згладжування та вирівнювання часових рядів із сезонністю, циклічністю та трендом. Для вихідних даних побудовано інтегровані моделі авторегресії – ковзного середнього (ARIMA), умовної гетероскедастичності (ARCH); проведено аналіз залишків та перевірено якість отриманих моделей. Досліджено умови застосування фіктивних змінних для усунення структурних розривів даних та проблем із залишками моделей. Виконано порівняльний аналіз якості прогнозів за побудованими моделями. Наведений алгоритм дозволив встановити оптимальну модель SARIMA, що включає сезонні параметри та фіктивні змінні структурного розриву.

**Ключові слова:** модель авторегресії, прогноз, стаціонарність, структурний розрив, фіктивна змінна, автокореляція, гетероскедастичність.

УДК 621.382:62-1/9(045)

**Програмування мультиплексорних мікро- та наносхем / О. С. Мельник, В. О. Козаревич, А. О. Решетник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 68 – 74. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.**

Застосування великих інтегральних схем (ВІС) в цифрових мікро- і наноелектронних пристроях дозволяє істотно поліпшити їх експлуатаційні можливості, в першу чергу підвищити надійність і швидкодію, понизити споживану потужність і габаритні розміри. Проте розробка ВІС є тривалим і дорогим процесом, який економічно виправданий тільки при досить великому обсязі випуску готових виробів. Підвищення спеціалізації ІС при поліпшенні вказаних вище показників вступає в протиріччя з їх універсальністю, що розширює їх необхідну номенклатуру і зменшує обсяг випуску кожного окремого типоміналу. Останнє веде до подорожчання продукції. Усунути вказане протиріччя між спеціалізацією і універсальністю можна шляхом розробки ВІС, алгоритми роботи яких можуть бути змінені за бажанням розробника конкретної апаратури, тобто, шляхом створення логічних схем, що настроюються або програмуються. Запропоновані автоматизовані методи програмування мультиплексорних мікро- та наносхем для відтворення логічних функцій декількох аргументів. На сучасних комп'ютерних системах було реалізовано моделювання та верифікацію запропонованих пристроїв.

**Ключові слова:** мікро- та наносхеми з програмованими структурами, мультиплексор, автоматизоване проектування.

УДК 519.64, 539.3

**Метод енергетичного моделювання дифракції пружних хвиль / О. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 74 – 82. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.**

Пропонуються добре обумовлені алгоритми, засновані на методі енергетичного моделювання дифракції пружних хвиль на кінцевих і періодичних ґратах і зводяться до рішення сингулярних інтегральних рівнянь на замкнутих і розімкнутих контурах. Інтегральні уявлення переміщень дифрагованого хвильового поля будуються виходячи з теореми взаємності робіт для двох різних особистих станів механічної системи. Запропоновано ефективний метод виділення сингулярних ядер, який значно прискорює збіжність виникаючих функціональних рядів в разі періодичної системи неоднорідностей. Чисельна реалізація рішення сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) проведена методами дискретних особливостей та механічних квадратур.

**Ключові слова:** метод енергетичного моделювання, дифракція пружних хвиль, кінцева і періодична решітки, сингулярні інтегральні рівняння, метод дискретних особливостей, метод механічних квадратур.

УДК 656.56/681.5:004.78

**Метод визначення місць розміщення пристроїв комутації, збору та передачі інформації при синтезі системи моніторингу регіонального газопостачання / Л. І. Нефьодов, М. В. Шевченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 83 – 89. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглядається чотирирівнева структура системи моніторингу регіонального газопостачання та особливості її топологічного синтезу. Результати розробки та досліджень можуть бути використані при структурно-топологічному синтезі системи моніторингу регіонального газопостачання, оскільки дозволяють визначити місця розміщення для пристроїв комутації, збору та передачі інформації. Запропоновані критерії та обмеження для реалізації методу дозволяють підвищити ефективність прийняття рішень за рахунок зниження витрат на топологічний синтез.

**Ключові слова:** метод, топологія, синтез, моніторинг, регіональне газопостачання.

УДК 629.429.3:621.313

**Алгоритм синтезу експертної системи управління рухом електрорухомого складу на основі рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана / О. М. Петренко, Б. Г. Любарський, М. Л. Глебова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 89 – 95. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

У даній роботі розроблено алгоритм рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана для задачі руху електрорухомого складу на ділянці

шляху із заданим профілем і графіком руху, що дозволяє створити експертну систему управління рухом. Особливостями цього алгоритму є застосування штрафних функцій для опису обмежень, що накладаються графіком руху: досягнення потягом кінцевого пункту за заданий час руху, обмеження швидкості на ділянках шляху.

**Ключові слова:** експертні системи ведення транспортного засобу, алгоритм рішення рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана, штрафні функції, опір руху, витрати енергії при русі електрорухомого складу.

УДК 629.7.05

**Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі / Ю. А. Плаксії // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 96 – 104. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропонований новий тип неперервної моделі обертання твердого тіла, оснований на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одночасно змінюються у часі. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Запропонована модель може бути застосована в якості еталонної для оцінювання похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

УДК 631.37

**Розподіл потоків потужності і ККД механічної трансмісії повнопривідного колісного трактора / О. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 104 – 109. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропонований метод визначення складових потоку потужності і ККД на прикладі трансмісії повнопривідного колісного сільськогосподарського трактора. Метод передбачає на основі попередньо розрахованих часток потужності в місці розгалуження потоку потужності від двигуна до ведучих мостів трактора визначити ККД трансмісії в режимах роботи при наявності і відсутності циркуляції потужності. Для практичних розрахунків також встановлений взаємозв'язок часток потужності в місці розгалуження потоку потужності з частками потужності безпосередньо на колесах ведучих мостів трактора.

**Ключові слова:** потужність, потік потужності, приводи ведучих мостів трактора, трансмісія трактора.

УДК 629.7.085.24

**Концепція проектування компактних наземних пускових пристроїв для запуску безпілотних літальних апаратів / В. О. Серета // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 110 – 115. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Сформульовано проблематику введення в політ з поверхні безпілотного літального апарату за рахунок зовнішньої енергетики. Записана корисна функція, а також загальні та приватні управляючі параметри наземних пускових пристроїв (НПУ). Наведено кінематичні схеми НПУ різноманітного типу, що отримані в результаті модернізації. Описано комплексно-сполучена модель катапульт, що становить основу методу оптимізації. Викладено принцип параметричного пошуку закону розподілення тягового зусилля шляхом нормування роботи розширення в певному інтервалі.

**Ключові слова:** пусковий пристрій, корисна функція, параметрична оптимізація, характеристичний критерій, керуючі параметри, комплексна модель.

УДК 519.6; 532.5

**Обчислювальні технології для методу дискретних вихорів / Д. І. Черній // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 116 – 123. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто обчислювальні технології, які пов'язані із проблемою апроксимації неперервних границь впорядкованою системою дискретних вихорів в задачах моделювання плоских нестационарних течій. Метод та алгоритм призначено для обчислень неперервних характеристик (багатозначних функцій) в області їх визначення, майже до границі області, яка є лінією розриву її неперервних значень. Пропонований метод і алгоритм перетворення системи дискретних особливостей універсальні для границь довільної геометрії («гіллясті» контури, замкнуті контури). Результати перетворень дозволяють обчислювати кінематичні і динамічні характеристики для відривних течій, з урахуванням виникнення нових елементів границь в точках відриву.

**Ключові слова:** метод дискретних вихорів, метод дискретних особливостей, обчислювальні технології.

УДК 621.646.42; 621.05; 621.454.2

**Математична модель манжетних ущільнень із фторопласта для агрегатів пневмоавтоматики ракетних двигунів / С. А. Шевченко, С. О. Валівихін, О. Л. Григор'єв, М. С. Степанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 124 – 143. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

При використанні лінійних диференціальних рівнянь пружної деформації тонкостінної циліндричної оболонки змінної товщини досліджено пружно-деформований стан фторопластової манжети із кінцевими боковими поверхнями. Розроблено розрахунковий метод для визначення контактної сили між манжетою та циліндричною поверхнею втулки або штока, котрий враховує проникнення тиску газу або масла углиб зазору, що ущільнюється, а також метод розрахунку контактної сили між манжетою та пружиною, що має пелюсткову форму. Запропоновані уточнені формули для оцінювання сили тертя у рухомих ущільненнях, які пропонується використати конструктору на стадії ескізного проектування вузла.

**Ключові слова:** манжетне ущільнення, пружність манжети, контактна задача, витоки газу, коефіцієнт тертя фторопласту, пелюсткова пружина, сухе та в'язке тертя, сила тертя у манжеті.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 621.226

**Математическая модель универсального стенда для испытаний гидроаппаратов / П. Н. Андренко, Д. С. Погорелов, М. С. Свищенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 5 – 13. Бібліогр.: 27 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведена принципиальная гидравлическая схема универсального, энергоэффективного стенда для испытаний гидроаппаратов. Обоснован диапазон изменения рабочих параметров исследуемых гидроаппаратов и выходных параметров стенда. Проведен выбор гидравлических элементов и устройств для ее реализации. Разработана полная математическая модель данного стенда, которая вместе с математической моделью гидроаппарата позволяет определить рабочие характеристики последнего. Рассмотрены перспективы дальнейшего усовершенствования схемной и элементной реализации испытательного стенда с целью повышения его энергоэффективности.

**Ключевые слова:** стенд, гидроаппарат, рабочие параметры, математическая модель, рабочая характеристика.

УДК 62-531.4

**Двухуровневая модель системы гидропривода с параллельной структурой / А. П. Губарев, О. В. Левченко, А. В. Корчовный // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 13 – 17. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложена двухуровневая модель систем гидропривода с параллельной структурой. Логическая составляющая модели описывает логическое взаимодействие исполнительных устройств с учетом их срабатывания в параллельных потоках. Функциональная составляющая определяет технологические и эксплуатационные характеристики каждой операции, которые являются основой для определения уровня

енергопотребления гидравлической системы. Дополнительно рассмотрены перспективы дальнейших исследований в направлении определения и прогнозирования энергоэффективности системы.

**Ключевые слова:** двухуровневая модель, гидропривод, параллельная структура, энергоэффективность.

УДК 621.3.078.3

**Редукция замкнутой системы управления многомерным процессом выращивания монокристаллов / Ю. С. Козьмин, В. С. Суздаль // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 18 – 24. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Для управления процессом кристаллизации щелочно-галогидных кристаллов использован косвенный метод синтеза регуляторов низкого порядка и заданной структуры. Для получения робастного регулятора пониженного порядка применяется процедура сбалансированного отсечения. Подход основан на задаче управления по норме  $H_\infty$ . Такой подход уменьшает ошибку, которая обусловлена применением редуцированного регулятора. На конкретном примере показано, что не наблюдается заметного ухудшения робастных свойств при допустимом сохранении свойств системы в области высоких частот.

**Ключевые слова:** робастный ПИД регулятор, монокристаллы, многомерный процесс управления.

УДК 001.57

**Исследование условий формирования потока пульпы в песковом желобе односпирального классификатора / В. А. Кондратец, А. Н. Мауї // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 24 – 30. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.**

Представлены результаты исследований формирования и движения потока пульпы в песковом желобе механического односпирального классификатора. По полученным зависимостям в определенные моменты времени возможно определять среднюю скорость движения и высоту пульпы в песковом желобе, которые однозначно характеризуют условия формирования потока, дают возможность восстановления механизма взаимодействия между массивами материала и обоснования путей повышения точности измерения технологического параметра.

**Ключевые слова:** спиральный классификатор, пески, песковый желоб, пульпа, поток, скорость, высота, расход.

УДК 621.43

**Формирование базы данных термодинамических свойств сложных эфиров жирных кислот биодизельных топлив в газовой фазе (часть 1) / А. М. Левтеров, А. А. Левтеров, Л. И. Левтерова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 30 – 37. Бібліогр.: 32 назв. – ISSN 2222-0631.**

Анализ научных публикаций позволил обусловить набор расчетных и экспериментальных выборок, которые дают возможность сформировать базу данных о термодинамических и термохимических свойствах сложных метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот, химически связанных в различных комбинациях в биодизельных топливах, производимых из растительных масел. Такая база данных позволит реализовать численное моделирование рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением, работающих как на чистом биодизельном топливе, так и на биогазопетных композициях.

**Ключевые слова:** биотоплива, эфиры жирных кислот, растительные масла, математическое моделирование, рабочий процесс, термодинамические свойства, термохимические свойства, полином.

УДК 621.43

**Формирование базы данных термодинамических свойств сложных эфиров жирных кислот биодизельных топлив в газовой фазе (часть 2) / А. М. Левтеров, А. А. Левтеров, Л. И. Левтерова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 37 – 43. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

В результате аппроксимации дискретных табличных данных о термодинамических и термохимических свойствах двадцати двух метиловых и этиловых эфиров высших жирных кислот получены коэффициенты полиномов, описывающих основные термодинамические характеристики этих веществ в функции температуры на интервале 300 – 3000 К. Таким образом восполняется отсутствие сведений о термодинамических свойствах целого ряда биодизельных топлив, получаемых из различных растительных масел, которое затрудняет численное моделирование рабочих процессов поршневых двигателей с самовоспламенением.

**Ключевые слова:** биотоплива, эфиры жирных кислот, растительные масла, математическое моделирование, рабочий процесс, термодинамические свойства, термохимические свойства, полином.

УДК 519.6

**Повышение точности разложения в ряд Фурье разрывных функций одной и двух переменных / О. Н. Литвин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 43 – 46. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

В данной работе предлагается для численной реализации метода А.Н. Крылова повышение точности разложения в ряд Фурье разрывных функций одной переменной использовать разрывные сплайны. Обговаривается также возможность его обобщения на функции двух переменных для улучшения диагноза в компьютерной томографии с использованием проекций, которые получены с компьютерного томографа. Предлагается в методе А.Н.Крылова для повышения точности приближения суммами Фурье разрывных функций одной и двух переменных использовать разрывные сплайны.

**Ключевые слова:** разрывные функции, ряды Фурье, улучшение сходимости, метод выделения особенностей.

УДК 519.6

**Математическая модель пространственного распределения содержания некоторой совокупности полезных ископаемых в коре по данным из кернов скважин методом интерлинации функций / О. Н. Литвин, О. О. Литвин, Ф. Ф. Коваль, Е. С. Чёрная // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 46 – 50. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрена задача о восстановлении в каждой точке между заданной системой скважин (вообще говоря, наклонных) конечного множества элементов периодической таблицы или их соединений линейной плотности на заданной глубине. То есть, мы ограничиваемся не всеми элементами периодической таблицы, а лишь  $n$  – выбранными элементами или их соединениями. Предложен метод построения интерлинационного оператора матричных функций, каждая компонента которой зависит от трех переменных на системе кривых, то есть совпадает с приближённой матричной функцией во всех скважинах на заданной глубине, и позволяет вычислять значение этой матричной функции в каждой точке между скважинами по заданной глубине. Приведенный метод построения математических моделей пространственного распределения полезных ископаемых между наклонными скважинами позволяет строить математические модели структуры коры Земли с использованием всех соединений кернов наклонных скважин, которые приведут к созданию эффективных методов разведки полезных ископаемых и разработки месторождений. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** математическая модель, интерлинация функций, пространственное распределение, керны скважин.

УДК 519.6

**Оценка полной погрешности кубатурной формулы приближенного вычисления интеграла от быстроосциллирующей функции трех переменных / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, Г. В. Каргапольцева // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 50 – 56. Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2222-0631.**

Получена оценка полной абсолютной погрешности кубатурной формулы приближенного вычисления интеграла от быстроосциллирующих функций трех переменных в случае, когда информация о функции задается её следами на взаимно-перпендикулярных плоскостях приближенно с заданной максимальной погрешностью. Кубатурная формула строится с использованием оператора интерфлетации, функция принадлежит классу Липшица с дополнительными условиями. На конкретном примере продемонстрирована справедливость теоремы об оценке погрешности метода округления решений.

**Ключевые слова:** интегралы от быстроосциллирующих функций трех переменных, кубатурные формулы, интерфлетация, погрешность метода, неустраиваемая погрешность, погрешность округления.

УДК 539.3

**Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн / Е. С. Малахов, А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 56 – 62. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассматривается система из трех струн, контактирующих между собой в некоторых точках так, что перемещения в этих точках совпадают. Моделирование нестационарных колебаний струн осуществляется на основе волновых уравнений. Обратная задача сводится к решению системы трех интегральных уравнений Вольтера I-го рода, для которой осуществляется дискретизация. Блочная система линейных алгебраических уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова.

**Ключевые слова:** система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтера, идентификация сил.

УДК 519.25

**Моделирование нестационарных процессов со структурными разрывами / Т. А. Маринич, Л. Д. Назаренко, К. В. Гец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 62 – 68. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Проведен поиск оптимальной модели для описания нестационарных временных рядов с адекватными статистическими характеристиками и высокими прогнозными качествами. В качестве информационной базы выбрано ежедневные статистические данные межбанковского валютного курса гривны к доллару США. Исследовано детерминистические и стохастические компоненты с целью определения класса стационарности ряда. Проверена целесообразность проведения различных процедур сглаживания и выравнивания временных рядов, содержащих сезонность, цикличность и тренд. Для исходных данных построено интегрированные модели авторегрессии – скользящего среднего (ARIMA), условной гетероскедастичности (ARCH); проведен анализ остатков и диагностика адекватности полученных моделей. Изучены условия использования фиктивных переменных для устранения структурных разрывов данных и проблем с остатками моделей. Проведено сравнительный анализ качества прогнозов построенных моделей. Приведенный алгоритм позволил установить оптимальную модель SARIMA, которая включает сезонные параметры и фиктивные переменные структурного разрыва.

**Ключевые слова:** модель авторегрессии, прогноз, стационарность, структурный разрыв, фиктивная переменная, автокорреляция, гетероскедастичность.

УДК 621.382:62-1/9(045)

**Программирование мультиплексорных микро- и наносхем / А. С. Мельник, В. А. Козаревич, А. А. Решетник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 68 – 74. Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2222-0631.**

Применение больших интегральных схем (БИС) цифровых микро- и нанoeлектронных устройствах позволяет существенно улучшить их эксплуатационные возможности, в первую очередь повысить надежность и быстродействие, снизить потребляемую мощность и габаритные размеры. Однако разработка БИС является длительным и дорогостоящим процессом, который экономически оправдан только при достаточно большом объеме выпуска готовых изделий. Повышение специализации ИС при улучшении указанных выше показателей вступает в противоречие с их универсальностью, что расширяет их необходимую номенклатуру и уменьшает объем выпуска каждого отдельного типоминимала. Последнее ведет к удорожанию продукции. Устранение противоречий между специализацией и универсальностью достигается путем разработки мультиплексорных БИС, необходимые алгоритмы работы которых программируются разработчиком электронной аппаратуры. Предложены автоматизированные методы программирования мультиплексорных микро- и наносхем для воспроизведения логических функций нескольких аргументов. На современных компьютерных системах были реализованы моделирование и верификация предложенных устройств.

**Ключевые слова:** микро- и наносхемы с программируемыми структурами, мультиплексор, автоматизированное проектирование.

УДК 519, 64, 539.3

**Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн / А. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 74 – 82. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предлагаются хорошо обусловленные алгоритмы, основанные на методе энергетического моделирования дифракции упругих волн на конечных и периодических решётках и сводящиеся к решению сингулярных интегральных уравнений на замкнутых и разомкнутых контурах. Интегральные представления перемещений дифрагированного волнового поля строятся исходя из теоремы взаимности работ для двух различных состояний механической системы. Предложен эффективный метод выделения сингулярных ядер, который значительно ускоряет сходимость возникающих функциональных рядов в случае периодической системы неоднородностей. Численная реализация решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) проведена методами дискретных особенностей и механических квадратур.

**Ключевые слова:** метод энергетического моделирования, дифракция упругих волн, конечная и периодическая решётки, сингулярные интегральные уравнения, метод дискретных особенностей, метод механических квадратур.

УДК 656.56/681.5:004.78

**Метод определения мест размещения устройств коммутации, сбора и передачи информации при синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения / Л. И. Нефедов, М. В. Шевченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 83 – 89. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассматривается четырехуровневая структура системы мониторинга регионального газоснабжения и особенности ее топологического синтеза. Результаты разработки и исследования могут быть использованы при структурно-топологическом синтезе системы мониторинга регионального газоснабжения, поскольку позволяют определить места размещения для устройств коммутации, сбора и передачи информации. Предложенные критерии и ограничения для реализации метода позволяют повысить эффективность принятия решений за счет снижения затрат на топологический синтез.

**Ключевые слова:** метод, топология, синтез, мониторинг, региональное газоснабжение.

УДК 629.429.3:621.313

**Алгоритм синтеза экспертной системы управления движением электроподвижного состава на основе решения уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана / А. Н. Петренко, Б. Г. Любарский, М. Л. Глебова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 89 – 95. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

В данной работе разработан алгоритм решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для задачи движения электроподвижного состава на участке пути с заданным профилем и графику движения, который позволяет создать экспертную систему управления движением. Особенностями этого алгоритма является применение штрафных функций для описания ограничений, накладываемых графиком движения: достижения поездом конечного пункта за заданное время движения, ограничение скорости на участках пути.

**Ключевые слова:** экспертные системы ведения транспортного средства, алгоритм решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, штрафные функции, сопоставление движению, затраты энергии при движении электроподвижного состава.

УДК 629.7.05

**Обобщение трехчастотной тригонометрической кватернионной модели вращения твердого тела. Второй тип модели / Ю. А. Пляксий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 96 – 104. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложена новая непрерывная модель вращения твердого тела, основанная на обобщенном представлении модельного кватерниона ориентации в функциях углов, одновременно линейно изменяющихся во времени. Построены аналитические зависимости для квазиординат на такте вычислений параметров ориентации и компонент кватерниона, соответствующих таким вращательным движениям. Для нескольких наборов параметров получены реализации модели. Результаты представлены в форме зависимостей квазиординат от времени и траекторий в конфигурационном пространстве для параметров ориентации. Показано, что новая модель описывает вращение твердого тела, отличное от случая регулярной прецессии. Модель может быть использована в качестве эталонной для получения оценок погрешностей алгоритмов определения ориентации в беслатформенных системах.

**Ключевые слова:** кватернион, ориентация, эталонная модель, квазиординаты, траектории в конфигурационном пространстве.

УДК 631.37

**Распределение потоков мощности и КПД механической трансмиссии полноприводного колесного трактора / А. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 104 – 109. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложен метод определения составляющих потока мощности и КПД на примере трансмиссии полноприводного колесного сельскохозяйственного трактора. Метод предполагает на основе предварительно рассчитанных долей мощности в месте разветвления потока мощности от двигателя к ведущим мостам трактора определить КПД трансмиссии в режимах работы при наличии и отсутствии циркуляции мощности. Для практических расчетов также установлена взаимосвязь долей мощности в месте разветвления потока мощности с долями мощности непосредственно на колесах ведущих мостов трактора.

**Ключевые слова:** мощность, поток мощности, приводы ведущих мостов трактора, трансмиссия трактора.

УДК 629.7.085.24

**Концепция проектирования компактных наземных пусковых устройств для запуска беспилотных летательных аппаратов / В. А. Серда // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 110 – 115. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Сформулирована проблематика ввода в полет с поверхности беспилотного летательного аппарата за счет внешней энергетики. Записана полезная функция, а также общие и частные управляющие параметры наземных пусковых устройств (НПУ). Приведены кинематические схемы НПУ различного типа, полученные в результате модернизации. Описана лежащая в основе метода оптимизации длины направляющей комплексно-сопряженная модель катапульт. Изложен принцип параметрического поиска закона распределения тягового усилия путем нормирования работы расширения в определенном интервале.

**Ключевые слова:** пусковое устройство, полезная функция, параметрическая оптимизация, характеристический критерий, управляющие параметры, комплексная модель.

УДК 519.6; 532.5

**Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей / Д. И. Черный // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 116 – 123. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрены вычислительные технологии для разрешения проблемы (метода дискретных вихрей), связанной с аппроксимацией непрерывных границ упорядоченной системой дискретных вихрей в задачах моделирования плоских нестационарных течений. Метод и алгоритм предназначены для вычисления непрерывных характеристик (определяемых через неоднозначные функции) в области их определения вплоть до ее границ, являющихся естественными линиями разрыва непрерывных характеристик. Предлагаемый метод и алгоритм преобразования системы дискретных особенностей универсальны для границ произвольной геометрии («ветвистые» контура, замкнутые контура). Результаты преобразований позволяют вычислять кинематические и динамические характеристики для отрывных течений, с учетом возникновения новых элементов границ в точках отрыва.

**Ключевые слова:** метод дискретных вихрей, метод дискретных особенностей, вычислительные технологии.

УДК 519.6

**Математическая модель манжетных уплотнений из фторопласта для агрегатов пневмоавтоматики ракетных двигателей / С. А. Шевченко, С. А. Валивахин, А. Л. Григорьев, М. С. Степанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 124 – 143. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

При использовании линейных дифференциальных уравнений упругой деформации тонкостенной цилиндрической оболочки переменной толщины исследовано статическое напряженно-деформированное состояние фторопластовой манжеты с коническими боковыми поверхностями, применяемой для уплотнения клапана и поршней регулятора давления газа ракетного двигателя. Поставлена и решена одномерная задача аэроупругости, возникающая при анализе контакта между фторопластовой манжетой и цилиндрической стенкой из металла, на основе чего разработан метод расчета эффективного зазора и утечек газа через данное уплотнение. Разработан новый расчетный метод для определения контактной силы между манжетой и цилиндрической поверхностью втулки или штока, который учитывает проникновение давления газа или смазки вглубь уплотняемого зазора. Исследованы теоретические закономерности упругопластической деформации лепестков распорной пружины и разработан метод расчета давления, оказываемого лепестками на стенку фторопластовой манжеты. Описаны методы экспериментального исследования трения и утечек газа в манжетах, а также результаты испытаний, уточняющие известные зависимости трения от уплотняемого давления и скорости скольжения фторопласта. Предложены новые формулы для оценки силы трения в подвижных уплотнениях, которые предлагается использовать конструктору на стадии эскизного проектирования узла. В этих формулах учитываются упругие и пластические характеристики фторопласта – модуль Юнга и твердость по Бринеллю.

**Ключевые слова:** манжетное уплотнение, упругость манжеты, контактная задача, утечки газа, коэффициент трения фторопласта, лепестковая пружина, сухое и вязкое трение, сила трения в манжете.

## ABSTRAKTS

UDC 621.226

**Mathematical model of universal bench for hydraulic valves testing / P. M. Andrenko, D. S. Pogorelov, M. S. Svinarenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 5 – 13. Bibliog.: 27 titles. – ISSN 2222-0631.**

A principle hydraulic scheme of a universal, energy-efficient bench for testing hydraulic machines is presented. The characteristic features of the bench are an adjustable axial piston pump and a piston hydropneumatic accumulator. The range of the design and operation parameters of hydraulic machines is determined by the evolution tendencies of the hydraulic machines produced by the world's leading manufactures of hydraulic equipment. The output parameters of the universal bench for testing hydraulic machines are defined by the maximum values of the operation parameters of the investigated apparatus. The choice of the conduit diameter is explained. The hydraulic units and devices for building the bench are selected. The assumptions made while developing the bench mathematical model are justified. An explicit mathematical model of the bench is developed taking into account the maximum number of factors. This model combined with the mathematical model of a hydraulic machine allows to determine the hydraulic machine operation characteristics at the hydraulic machine design stage. The prospects of further improvement of the bench scheme and units with the view of increasing its energy efficiency are discussed.

**Key words:** bench, hydraulic valve, operating parameters, mathematical model, performance criteria.

UDC 62-531.4

**Two-level model of a hydraulic system with parallel structure / O. P. Gubarev, O. V. Levchenko, A. V. Korzhovnyy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 13 – 17. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.**

A two-level model of hydraulic drive systems with parallel structure is presented. The logical component of the model describes the logical interaction of the actuators in accordance with their operation in parallel streams. The logic component is a set of control commands for each operation, which is presented as a combination of signal states and logic functions. The functional component defines technological and operational characteristics of each operation, which are the basis for determining the level of energy consumption of the hydraulic system. This methodology allows simulating hydraulic systems with a large number of actuators in a fairly short period of time. The received power characteristics of the system can be used in designing new hydraulic machines and in upgrading existing hydraulic systems. The main features of the functional component are the force applied and the speed of the forward and reverse action of each operation. Also, this approach can be used to predict changes of energy system consumption taking into account such factors as deterioration of the equipment, a change in the cost of electric energy, lifetime, etc. In addition, the prospects for further research in the direction of identifying and forecasting system efficiency are considered.

**Key words:** two-level model, hydraulic drive system, parallel structure, energy efficiency.



UDC 621.3.078.3

**Reduction of closed-loop control system for multivariable process of growing single crystals / Yu. S. Kozmin, V. S. Suzdal //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 18 – 24. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

When growing large-size single alkali halide crystals, with increasing length of the growing sample, one experiences disturbances connected with qualitative change of the character of heat exchange in the crystal-melt system. The crystallization of large single crystals becomes non-stationary. The study of crystallization process shows that the task of managing the growth process can be reduced to the management of an object with uncertainty. The designed control system should provide acceptable quality of transient processes and required accuracy. Therefore, the solution of the problem of quality management of crystallization process should be sought in the class of robust control systems.

An indirect method for synthesizing the controllers of low order and given structure is used to control the crystallization process. A balanced truncation procedure is applied to obtain the robust reduced-order controller. The approach is based on the task of managing by norm. This approach reduces the error due to the application of the reduced controller. An example provided shows that there is no significant deterioration of the robust properties for permissible conservation of the system properties at high frequencies.

**Key words:** PID Tuning, Robust Control, Single Crystal, Multivariable Processes.

UDC 001.57

**The study of the conditions of formation of pulp flow in the sand chute of a single-spiral classifier / V. A. Kondratets, A. N. Matsui //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 24 – 30. Bibliog.: 20 titles. – ISSN 2222-0631.

The results of studying the formation and dynamics of pulp flow in the sand chute of a mechanical single-spiral classifier are presented. Upon the impact of sand and water a mixture of evenly spaced firm is formed in the sand chute that does not change during the motion of the pulp. The variable volumetric efficiency of the classifier sands makes the pulp movement uneven. The variable in time sand flow in the hydraulic system is automatically compensated by varying its height in the sand chute. Only under this condition the material balance and the continuous transporting of the material persist. There exist mathematical dependences between the variable sand costs, average speed and pulp height. Using the dependences obtained at some point in time it is possible to determine the average speed and the height of pulp in the sand chute, which characterize uniquely the conditions of formation of the flow, allow restoring the mechanism of interaction between the batches of the material and studying the ways to improve the accuracy of measurement of the process variable.

**Key words:** spiral classifier, sands, sand chute, pulp, flow, velocity, height, cost.

UDC 621.43

**Forming database of thermodynamic properties of fatty acid esters of biodiesel fuel in the gas phase (part 1) / A. M. Levterov, A. A. Levterov, L. I. Levterova //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 30 – 37. Bibliog.: 32 titles. – ISSN 2222-0631.

The share of alternative fuels from biological raw materials (ethanol, the biodiesel) in the balance of motor fuels increases constantly. A set of data on thermodynamic and thermal properties of these fuels is required for a comprehensive research of the working processes of piston engines. The properties of ethanol are well known and have been successfully used in experimental and numerical researches. The physical and chemical properties of biodiesel are studied and known, so there are no obstacles for experimental research of biodiesel-fired engines. These questions have been the subject of many scientific articles. Difficulties arise in the numerical simulation of workflows that require data on the thermodynamic characteristics of the high-temperature components of this fuel. The known thermodynamic databases do not contain such information. Therefore, the description of the combustion process has been maximally simplified. Biodiesel is an organic substance which consists of a chemically bound complex methyl and ethyl esters of higher fatty acids of different vegetable oils or animal fats. The presented research has been devoted to collecting and analyzing information about the thermodynamic and thermochemical properties of higher fatty acid esters, which are part of the biodiesel, available in the literature. This applies to isobaric heat capacity, enthalpy and entropy in the temperature range 300 – 3000 K. As a result of the research a sample for twenty two methyl and ethyl esters of eleven higher fatty acids has been compiled. These data make it possible to present the results in the form of polynomial dependences of thermodynamic functions for biodiesel obtained from a variety of vegetable oils.

**Key words:** biofuels, fatty acid esters, vegetable oils, mathematical modeling, working process, thermodynamic properties, thermochemical properties, polynomial.

UDC 621.43

**Forming database of thermodynamic properties of fatty acid esters of biodiesel fuel in the gas phase (part 2) / A. M. Levterov, A. A. Levterov, L. I. Levterova //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 37 – 43. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Numerical researches of the working processes of piston engines with self-igniting fuel mixture working on biodiesel have been hampered by the lack of information on the thermodynamic characteristics of the high-temperature components of this fuel. In the second part of the paper we complete the task of forming the database of thermodynamic characteristics of twenty two complex methyl and ethyl esters of eleven higher fatty acids chemically bound in the biodiesel in various combinations. The combinations of the fuel esters depend on the type of vegetable oil from which the biodiesel is obtained, and the mass fraction of each constituent ester. The aim is to derive an approximate analytic dependence on the temperature of the main thermodynamic values (such as isobaric heat capacity, enthalpy and entropy in the temperature range 300 – 3000) for a number of biodiesel fuels. The discrete data are approximated by the least-squares procedure implemented by a universal software module. A polynomial of the 7th degree is used as an initial polynomial for isobaric heat capacity. Other thermodynamic functions (enthalpy, entropy) can be obtained by simple integration on the basis of the relations that link the thermodynamic functions. Standard enthalpy of the substances and the entropy at standard temperature are taken as constants of integration. Approximation coefficients and integration constants are tabulated.

**Key words:** biofuels, fatty acid esters, vegetable oils, mathematical modeling, working process, thermodynamic properties, thermochemical properties, polynomial.

UDC 519.6

**Method for increasing accuracy of expanding discontinuous functions of one variable in Fourier series / O. M. Lytvyn //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 43 – 46. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

In this paper we propose using discontinuous splines for numerical implementation of the A.N. Krylov method of improving the accuracy of expanding discontinuous functions of one variable in Fourier series. The possibility of its generalization to a function of two variables to improve diagnosis using computed tomography projections obtained by computer tomograph is discussed. We propose using discontinuous splines for improving the accuracy of approximation of functions of one and two variables by Fourier sums in the Krylov's method.

**Key words:** discontinuous functions, Fourier series, improving convergence, method of identifying singularities.

UDC 519.6

**Mathematical model of spatial distribution of a set of minerals in the crust using borehole core data by function interlineation method / O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, F. F. Koval, O. S. Chorna //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 46 – 50. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

The problem of recovering a finite set of elements of the periodic table or their combinations distributed with linear density at a given depth at each point between a given set of oblique boreholes is studied. We do not consider all the elements of the periodic table but restrict ourselves to a set of  $n$  chosen elements and their combinations. A method for constructing a matrix function interlineation operator is proposed. Each component of the interlineation matrix function depends on three variables on a system of curves. The interlineation matrix function coincides with the approximated matrix function at the given depth in each of the boreholes and allows to determine the approximated matrix function values at the given depth at each point between the boreholes. The method of constructing mathematical models of spatial distribution of the minerals between the oblique boreholes proposed in the paper allows creating mathematical models of the Earth crust using all mineral compositions present in the cores of the oblique boreholes which will contribute to the development of efficient methods of mineral prospecting and mining. The prospects of further research are also discussed.

**Key words:** mathematical model, interlineation functions, spatial distribution, borehole cores.

UDC 519.6

**An estimate for total absolute error of cubature formula of approximate calculation of the integral of high oscillating functions of three variables / O. M. Lytvyn, O. P. Nechuiviter, G. V. Kargapoltseva // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 50 – 56. Bibliog.: 19 titles. – ISSN 2222-0631.**

The article is dedicated to the improvement of mathematical models of digital signal processing and imaging by the example of constructing cubature formulas of approximate calculation of integrals of high oscillating functions of three variables. The feature of the proposed cubature formulas is using the input information about the function as a set of traces of the function on planes or a set of traces of the function on lines or as a set of values of the function at points. The theory of interlineation and interflotation of functions is the most effective in this case. An estimate for the total absolute error of cubature formula of approximate calculation of the integral of high oscillating functions of three variables is obtained in the case when the information about the function is given by its traces on perpendicular planes approximately with a set maximum error. A cubature formula is constructed using the interflotation operator, the function belongs to the Lipschitz class with the additional conditions. A specific example demonstrates validity of the theorem about estimating the error of the method of solution rounding.

**Key words:** integrals of high oscillating functions of three variables, cubature formula, interflotation, the error of the method, irreducible error, the error of rounding.

UDC 539.3

**The inverse problem for non-stationary vibrations of a string system / E. S. Malakhov, A. V. Voropay // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 56 – 62. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.**

Non-stationary transverse vibrations of a system of ropes, which are simulated by strings, are studied. A system of three strings is considered. It is supposed that each string contacts the other string at a single point. String displacements are identical at these contact points. The displacements of the points of the strings are described by a system of three one-dimensional wave equations. The inverse problem is reduced to solving a system of the first kind Volterra integral equations. A system of linear algebraic equations for the unknown contact forces is obtained as a result of discretization. The Cramer generalized algorithm and the Tikhonov regularization algorithm are used for solving the block matrix equation. The unknown external load is identified by the known noisy displacement of a point of the third string in time. A computational example, graphs of string displacements and forces are given.

**Key words:** system of strings, transient load, the wave equation, regularization algorithm, Volterra integral equation, identification of forces.

UDC 519.25

**Modeling of nonstationary processes with structural breaks / T. O. Marynych, L. D. Nazarenko, K. V. Gets // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 62 – 68. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.**

The paper deals with creating an optimal model of non-stationary time series with adequate static features and high prediction options. The daily statistic data on the hryvnia to US dollar interbank exchange rate form the information basis of the model. The deterministic and stochastic components are studied to determine the type of the series stationarity. The expediency of smoothing and leveling time series with seasonality, cyclic recurrence, and trend is tested. Autoregressive integrated moving average (ARIMA) and autoregressive conditional heteroscedasticity (ARCH) models are developed for the initial data. The model residues are analyzed and model adequacy is tested. The conditions for using dummy variables for eliminating the data structural breaks and model residue problems are studied. The algorithm proposed allows determining the SARIMA optimal model, which includes the seasonality parameters and the structural break dummy variables.

**Key words:** autoregression model, forecast, stationary process, structural break, dummy variable, autocorrelation, heteroscedasticity.

UDC 621.382:62-1/-9(045)

**Programming of multiplexing micro- and nanocircuits / O. S. Melnyk, V. O. Kozarevych, A. O. Reshetnik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 68 – 74. Bibliog.: 4 titles. – ISSN 2222-0631.**

The increasing specialization of large-scale integrated circuits (LSI) with improved performance and reliability is always at odds with their versatility, which expands the required range and reduces the amount of release of each individual topology. Elimination of contradictions between specialization and versatility is achieved through the development of multiplexing LSI, which necessary algorithms are programmed by the developer of electronic equipment. The use of LSI in digital micro- and nanoelectronic devices can significantly improve their operational capabilities, primarily to improve reliability and performance, reduce power consumption and overall dimensions. However, the development of LSI is a lengthy and costly process, which is economically justified only if the volume of finished products is sufficiently large. Increasing specialization of IP while improving the above indicators is always in conflict with their versatility, which expands the required range and reduces the amount of production of each individual part type. The latter leads to an increase in the production cost. Automated methods for programming multiplexing micro- and nanocircuits to produce logical functions of multiple arguments are presented. The proposed devices have been simulated and verified using modern computer systems.

**Key words:** micro- and nanocircuits with programmable structures, multiplexer, computer-aided design.

UDC 519, 64, 539.3

**Method of energy modeling of diffraction of elastic waves / A. M. Nazarenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 74 – 82. Bibliog.: 26 titles. – ISSN 2222-0631.**

Well-conditioned algorithms based on the method of energy modeling of diffraction of elastic waves on finite and periodic grids and reduced to solving singular integral equations on closed and open contours are presented. Integral representations of the diffracted field displacements are derived using the reciprocal work theorem for two different states of the mechanical system. An efficient method for distinguishing singular kernels that allows to accelerate significantly the convergence of the function series in the case of periodic nonhomogeneity system is proposed. The singular integral equations are solved numerically by the methods of discrete singularities and mechanical quadratures.

**Key words:** method of energy modeling, diffraction of elastic waves, finite and periodic grid, singular integral equations, method of discrete singularities, method of mechanical quadratures.

UDC 656.56/681.5:004.78

**A method of determining the location of switching devices and devices for collecting and transmitting information when synthesizing a regional gas supply monitoring system / L. I. Nefedov, M. V. Shevchenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 83 – 89. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.**

The article is devoted to solving one of the problems of regional gas monitoring system synthesis. The structure of the regional gas monitoring system is hierarchical. On the lower level of the hierarchy are the measurement tools that allow you to monitor performance. On the second level of the hierarchy are devices to collect and transmit information, and collect data from the measuring instruments. At the third level, there are devices that provide switching and support for communication protocols.

When performing structural-topological synthesis of a hierarchical system, determining the locations of information collection and transmission devices and switching devices is one of the primary subtasks. In addition, it is necessary to determine the list of measuring devices that will connect to each of the devices collecting and transmitting information and the lists of information collection and transmission devices to be connected to the switching device. A method to solve these subtasks that allows taking into account the vagueness of the source data by using interval estimates and choosing a rational option depending on the specific situation is proposed in the article.

The proposed method allows improving the efficiency of the regional gas monitoring system by considering the regional gas monitoring system as a multilevel structure. The cost of the topological synthesis when connecting measuring instruments can also be reduced.

**Key words:** method, topology, synthesis, monitoring, regional gas supply.

UDC 629.429.3:621.313

**An algorithm for synthesizing an expert electric rolling stock traffic control system on the basis of solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation / O. M. Petrenko, B. G. Lyubarskii, M. L. Glebova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 89 – 95. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.**

To solve the problem of optimal motion an expert system of conducting an electric rolling stock on a track section is created. The system allows to determine the best modes of the variation of the rolling stock motion on the basis of the criterion of energy consumption for a given average speed. An optimal average speed is selected based on the expert systems of reference vehicle on a section of the route at different average speeds and an integrated efficiency criterion. In this paper, an algorithm for solving the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the problem of motion of an electric rolling stock on a track section with a given profile and motion graphics is developed, which allows to create an expert traffic control system. The feature of this algorithm is the use of penalty functions to describe the restrictions imposed by the timetable, namely, the predetermined time for reaching the destination point by the train, the speed limit on the road sections, as well as the lack of downtime during the train motion. A unified penalty function approach is also used for imposing restrictions on the clutch. This approach allows to reduce significantly the computing time and standardize (simplify) the energy cost calculations.

**Key words:** expert systems of conducting vehicle, an algorithm for solving the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, penalty function, movement resistance, energy costs when driving electric rolling stock.

UDC 629.7.05

**Generalization of a three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation. Second type of model / Yu. A. Plaksiy //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 96 – 104. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

A new continuous rigid body rotation model based on a general representation of a model quaternion of orientation in functions of the angles simultaneously linearly changing in time is proposed. Analytical dependences for the quasicordinates at a step of calculations of the parameters of orientation and the components of the quaternion corresponding to such rotations are constructed. The model is numerically implemented for several sets of the parameters. The results obtained are presented in the form of dependences of quasicordinates on time and trajectories in the configuration space for the orientation parameters. It is shown that the new model describes the rotation of a rigid body other than the case of regular precession. The model can be used as a reference model for estimating the errors of orientation algorithms in strapdown inertial navigation systems.

**Key words:** quaternion, orientation, reference model, quasicordinates, trajectories in configuration space.

UDC 631.37

**Distribution of power flows and efficiency of four-wheel drive tractor mechanical transmission / O. Yu. Rebrov //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 104 – 109. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

The article presents a method for determining the components of the power flow and efficiency on the example of the transmission of an all-wheel drive farm tractor. The method involves determining the efficiency of the transmission in the modes with and without power circulation using the pre-calculated fractions of power at the point of the power flow branching from the engine to the drive axles of the tractor. For practical calculations the interrelation of the power fraction at the branching point of the power flow with the power fraction on the tractor drive axles is determined. The approach presented in this paper can be used to justify the methods of transmuted the power from the tractor engine to the agricultural machine not only through the tractor chassis system, but also directly to the working bodies or chassis system of the implement, which seems to be perspective from the standpoint of increasing the efficiency of the machine-tractor unit as a whole.

**Key words:** power, power flow, tractor axle drives, tractor transmission.

UDC 629.7.085.24

**The concept of designing compact ground launching devices for launching unmanned aerial vehicles / V. A. Sereda //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 110 – 115. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

The problems of launching an unmanned aerial vehicle (UAV) from the surface using external energy are formulated. The general shortcoming of modern ground launching devices (GLD) is a significant length of the UAV acceleration. Using intensive methods for improving dynamic performance of GLDs is ineffective. The goal is to develop the methods of optimization of dynamic characteristics of GLDs. To this end a useful function, as well as general and specific control parameters of ground catapults are derived. Cinematic schemes for GLD of different types, obtained by modernizing the timing drive or transmission gear ratio are presented. We describe the complex conjugate model of pneumatic catapult underlying the optimization method family. The principle of parametric determination of the law of distribution of traction by normalizing the expansion work in a certain range is discussed. The software for implementing the optimization algorithm using machine methods is proposed. The capacities of the design tools are presented in the form of a phase cut of a pneumatic GLD calculation domain. The comparative analysis of the results of optimization of different types of catapults obtained by modernizing their transmission or drive is carried out.

**Key words:** launching device, useful function, parameter optimization, characteristic criteria, control parameters, complex model.

UDC 519.6; 532.5

**Computing technologies of the discrete vortices method / D. I. Cherniy //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 116 – 123. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Computing technologies for approximating continuous boundaries by an ordered system of discrete vortices in the problems of modeling fluid transient flows using discrete vortices method is considered. The method and algorithm developed allow computing continuous characteristics determined by multivalued functions in their domains up to the boundaries, which are the natural separation lines of the continuous characteristics. The method and algorithm for transforming discrete singularities proposed in the paper can be applied for the boundaries of arbitrary geometry, e.g. branching contours or closed loops. The relations obtained allow computing kinematic and dynamic characteristics for separated flows taking into account the new boundary segments arising at the separation points.

**Key words:** method of discrete vortices method of discrete singularities, computing technology.

UDC 519.6

**Mathematical model of PTFE seals for hydraulics units of rocket engines / S. A. Shevchenko, S. A. Valivakhin, A. L. Grigoriev, M. S. Stepanov //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2016. – №6 (1178). – pp. 124 – 143. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

The stress-strained state of a PTFE lip seal with conic side surfaces applied to seal the valve and piston of a rocket engine gas pressure regulator is studied using linear differential equations of elastic deformations of a thin cylindrical shell. The one-dimensional aero elasticity problem arising in the analysis of PTFE lip seal and metal cylindrical wall contact is set and solved. Based on the problem a method for computing the effective clearance and gas leakage through the seal is developed. A new computing method for determining the contact force between the lip seal and the cylindrical surface of the sleeve or rod taking into account the penetration of gas pressure or lubrication inside the sealed gap is proposed. The theoretical laws of elastic-plastic deformation of fingers of a finger spring are studied; the method for calculating the pressure of the fingers on the wall of the PTFE lip seal is developed. The methods of experimental study of friction and gas leakage through a seal as well as the test results specifying the known dependencies of friction on the sealing pressure and sliding speed of PTFE are presented. New formulas for estimating the friction force in a flexible seal, which can be used at the stage of unit conceptual design, are proposed. The formulas take into account the elastic and plastic properties of PTFE, namely, the Young's modulus and the Brinell hardness number.

**Key words:** sealing ring, sealing ring elasticity, contact problem, gas leakage, PTFE friction coefficient, finger spring, dry and viscous friction, the friction force in the cuff.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»**

**Збірник наукових праць**

Серія:  
Математичне моделювання  
в техніці та технологіях

№ 6 (1178) 2016

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,  
Технічний редактор С. Д. Нижник  
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».  
Кафедра вищої математики.  
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;  
e-mail: [kpi\\_mmtt@mail.ru](mailto:kpi_mmtt@mail.ru); [kpi.mmtt@gmail.com](mailto:kpi.mmtt@gmail.com)  
Сайт: [vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt](http://vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt)

Обл.-вид № 14 – 16.

Підп. до друку 12.04.2016 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк. 8,75.  
Тираж 300 пр. (1-й завод 1 – 100) Зам. № 164928. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію  
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вил Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»

Ідент. код юридичної особи: 38093808  
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42