

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

## **ВІСНИК**

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

*Серія: Динаміка і міцність машин*

№ 26 (1198) 2016

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2016

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».**  
Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2016. – № 26  
(1198). – 138 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська, англійська.

*Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).*

#### **Координаційна рада:**

**Голова:** Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

**Секретар:** К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц.;

А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;

В. В. ЄПІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;

П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;

В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.;

О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.; В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.;

П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.; В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.;

М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.;

Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.;

М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

#### **Редакційна колегія серії:**

**Відповідальний редактор:** О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** А. Г. АНДРЕЄВ, канд. техн. наук, доц.

К. В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, проф.; Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.;

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. ВОРОБІЙОВ, д-р техн. наук, проф.;

А. П. ЗИНЬКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.; Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.;

Г. І. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. МІХЛІН, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

К. НАУМЕНКО, д-р техн. наук, проф., Магдебург, Німеччина;

М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

*У 2013 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

*У 2014 р. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», серія «Динаміка і міцність машин», включений у індекс **Копернікус**; індекс **ICV (Index Copernicus Value)**: 63.25, режим доступу: <http://journals.indexcopernicus.com/+++++++,p24783013,3.html>*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 7 від 23 вересня 2016 р.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCES OF UKRAINE  
National technical university  
"Kharkiv polytechnic institute"

**BULLETIN**  
**OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY**  
**" KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE"**

*Series: Dynamics and Strength of Machines*

№ 26 (1198) 2016

Collected Works

The publication was founded in 1961

Kharkiv  
NTU "KhPI", 2016

**Bulletin of the National technical university "Kharkiv polytechnic institute".** Collected Works. Series: Dynamics and Strength of Machines. – Kharkiv: NTU "KhPI". – 2016. – № 26 (1198). – 138 p.

State edition

Certificate of State Committee of Ukraine for Information Policy

KB № 5256 from July, 2, 2001

The collection is published on Ukrainian, Russian and English.

*The Bulletin of the National Technical University "Kharkiv polytechnic institute" is put on "The List of Scientific Professional Editions of Ukraine that publish the data of theses for the degree of candidate of sciences and the degree of doctor" approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 2015. Order No 1328 (Supplement No 8) of 21.12.2015.*

#### **Coordinating Board:**

L. L. Tovazhnyansky, Dr. Tech. Sci., Prof. (chief);  
K.A. Gorbunov, PhD. Tech.Sci., Assistant Prof. (secretary);  
A. P.Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, member NAS of Ukraine, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
Ye.Ye. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A.V. Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
F.F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M.D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
A.I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V.D. Dmitrienko, Dr. Tech. Sci.; Prof.; I.F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V.V. Yepifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu.I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.;  
P.O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.V. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
V.I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; G.V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
O.K. Morachkovskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.I. Nikolaenko, PhD. Hist. Sci., Prof.;  
P.G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.; V.A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
M.I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V.B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
G.M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.; Yu.V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
M.A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

#### **Editorial Board:**

O.K. Morachkovskij, Dr. Tech. Sci., Prof. (editor);  
A.G. Andreev, PhD. Tech.Sci., Assistant Prof. (secretary);  
K.V. Avramov, Dr. Tech. Sci., Prof.; E.E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
D.V. Breslavskij, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ju.S. Vorobjev, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
A.P. Zin'kovskij, Dr. Tech. Sci., Prof.; L.V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
G.I. L'vov, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ju.V. Mihlin, Dr. Tech. Sci., Prof.;  
K. Naumenko, Prof. Dr.-Ing. habil., Magdeburg, Germany; N.A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

*In 2013 Bulletin of the National Technical University "Kharkiv polytechnic institute" series "Dynamics and Strength of Machines" included in the directory database of periodicals "Uirich's Periodicals Directory" (New Jersey, USA).*

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI"

Protocol number 7 September, 23, 2016



**ШЕВЧЕНКО ЮРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ**  
(08.07.1926 - 07.03.2016)

видатний вчений-механік, завідувач відділу Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, член Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, премії ім. О.М. Динника та ім. М.К. Янгеля, академік НАН України.

З 1961 р. працював в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Завідувач відділу термопластичності (1972 р.), професор кафедри опору матеріалів Київського національного університету будівництва та архітектури (1973 - 2003 р.). Ю.М. Шевченко заснував та очолив українську школу термопластичності, основною спрямованістю якої є розробка відповідних теорій та методів розрахунку на міцність і довговічність елементів машинобудівних конструкцій, що працюють в умовах високих температур. Під керівництвом Юрія Миколайовича виконано великий цикл експериментальних досліджень з перевірки основних гіпотез і постулатів, покладених в основу розробленої теорії. Запропоновані вченим та його учнями методи розв'язання широкого класу задач термов'язкопластичності з урахуванням історії наванта-

ження та внутрішньої геометрії траєкторій деформування дають можливість детально дослідити міцність та працездатність конструктивних елементів енергетичного устаткування та виробів нової техніки, які в процесі експлуатації знаходяться в умовах силового і теплового навантаження.

Ю.М. Шевченко був членом редакційної колегії міжнародного наукового журналу «Прикладная механика» (з 1976 р.), членом Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки (з 1993 р.), членом редакційної ради міжнародного наукового журналу «Вісник НТУ «ХП». Динаміка та міцність машин» (з 1972 р.).

Ю.М. Шевченко опублікував 15 монографій та понад 240 наукових робіт, підготував 10 докторів і 29 кандидатів наук.



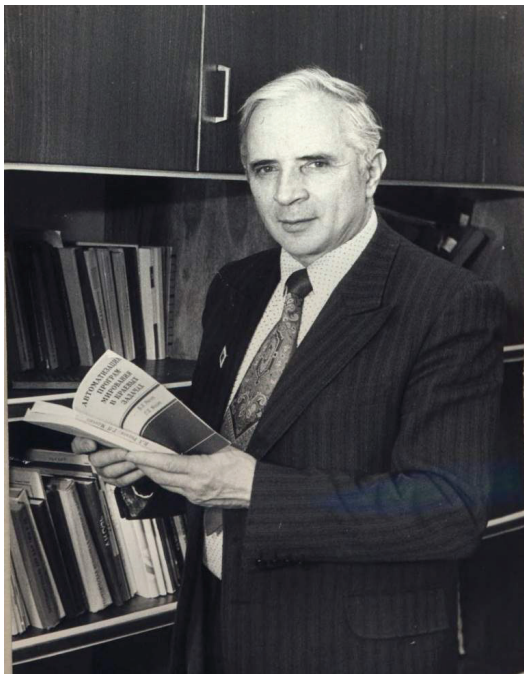
УДК 539.3

**Т. И. ШЕЙКО, Л. В. КУРПА, Е. О. БЕЗДЕТКО, А. А. ОСЕТРОВ****К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА НАН УКРАИНЫ  
ВЛАДИМИРА ЛОГВИНОВИЧА РВАЧЕВА**

Статья посвящена 90-летию со дня рождения выдающегося украинского ученого в области математики, механики и кибернетики, академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева. В статье описан жизненный и творческий путь В.Л. Рвачева. Выделены основные результаты научной деятельности В.Л.Рвачева, позволившие сделать существенный рывок в области аналитической идентификации геометрических объектов и решения краевых задач математической физики. Приведены некоторые высказывания В.Л.Рвачева, взятые из его дневников. Представлено краткое описание результатов, полученных В.Л.Рвачевым в последние годы, связанные с построением неархимедовых исчислений и их возможными приложениями в физике дальнего космоса. Представлен список основных публикаций В.Л. Рвачева.

**Ключевые слова:** академик В.Л. Рвачев, 90-летие со дня рождения, теория R-функций, биография.

21-го октября 2016 года исполняется 90 лет со дня рождения академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева.



Владимир Логвинович Рвачев – известный украинский ученый в области математики, механики и кибернетики, академик Национальной академии наук Украины, лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор, доктор физико-математических наук, крупный организатор науки, создатель всемирно признанной научной школы по методу R-функций. Он относится к плеяде выдающихся ученых двадцатого века. Его имя вошло во многие энциклопедические справочники. А главным научным открытием, прославившим Рвачева В.Л., как великого Ученого, является созданная им теория R-функций с ее многочисленными приложениями.

В.Л. Рвачев родился 21 октября 1926 г. в г. Чигирине Черкасской области в семье учителей. Отец – Рвачев Логвин Федорович преподавал дисцип-

October 21, 2016 is the 90th anniversary of the academician of National Academy of Sciences of Ukraine Vladimir L. Rvachev.

Vladimir L. Rvachev is an outstanding Ukrainian scientist in the field of mathematics, mechanics and cybernetics; Academician of the National Academy of Sciences (NAS) of Ukraine; Ukrainian State Prize Winner in Science and Technology; Honoured Worker in Science and Technology of Ukraine; Professor; Philosophy Doctor in the field of Physics and Mathematics; major organizer of scientific activities; and the founder of the new world renown scientific school in the method of R-functions. He belongs to the outstanding scientists of the twentieth century. His name is in many encyclopaedic reference books. A major scientific discovery of V. Rvachev is creating the theory of R-functions with its numerous applications.

V. Rvachev was born on October 21, 1926 in the family of teachers in Chyhyryn, Cherkassky region, Ukraine. His father Logvin Fedorovich was a teacher in the humanities subjects. He was an active participant of the revolutions in 1905-1917. The mother of V. Rvachev - Ksenia A. Rvacheva (Chernomordik) taught mathematics. Influenced by mother all five children (Vladimir was the youngest) got education in Physics and Mathematics. Three of them got their Phil. Dr. degree in Physics and Mathematics. Sister of V. Rvachev – Catherine Yuschenko (Rvacheva) became the first programmer in Ukraine, internationally famous scientist and mathematician, specialist in the software field. She was elected to the members of the NAS of Ukraine and also became a member of the International Academy of Computer Sciences and Systems.

In 1937 V. Rvachev's parents were subjected to repressions. His father died in confinement, and the mother was released in 1940. In 1956 V. Rvachev's parents were exonerated.

In the beginning of the Great Patriotic War, the whole family of V.L.Rvachev was evacuated first to village Arkhangel'skoye, Voronezh region. Later they moved to Tashkent where V. Rvachev, after graduating from the secondary school, worked as a turner's apprentice at the Tashsel'mash Fabric. In 1943, he started his study at Kharkiv Institute of Railway Transport Engineers, but in 1944 he was drafted to the Navy.

After being demobilised in 1947, V. Rvachev joined the

лины гуманитарного цикла. Он был активным участником революций 1905-1917 гг. Мать – Рвачева (Черномордик) Ксения Алексеевна преподавала математику. Под ее влиянием все пятеро детей (Владимир – самый младший) избрали в образовании физико-математическое направление. Трое из них стали докторами физико-математических наук. Родная сестра Владимира Логвиновича – Екатерина Ющенко (Рвачева) впоследствии стала первой программисткой в Украине, всемирно известным научным-математиком, специалистом в области программного обеспечения. Она была избрана член-корреспондентом НАН Украины и действительным членом Международной академии компьютерных наук и систем.

В 1937 г. родители В.Л. Рвачева были репрессированы. Отец умер в заключении, а мать в 1940 г. освободили. В 1956 г. родители В.Л. Рвачева были реабилитированы.

С началом Великой Отечественной войны семья Рвачевых эвакуировалась в село Архангельское Воронежской области, а затем в Ташкент, где В.Л. Рвачев после окончания средней школы работал учеником токаря на заводе «Ташсельмаш». В 1943 г. он поступил в Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта, а в 1944 г. был призван на действительную службу в Военно-морской флот.

В 1947 г. после демобилизации В.Л. Рвачев поступил на физико-математический факультет Львовского университета. Среди его учителей были известные ученые – академики М.Я. Леонов, Г.И. Савин, Я.Б. Лопатинский, В.И. Моссаковский, В.В. Панасюк, и др. Будучи студентом, В.Л. Рвачев активно участвовал в общественной жизни университета, был стипендиатом и в эти же годы начал активно заниматься современными научными проблемами под руководством известного механика того времени М.Я. Леонова.

В 1952 г. В.Л. Рвачев с отличием окончил Львовский университет и был направлен на преподавательскую работу в одно из воинских учебных заведений Военно-Морского Флота в г. Пушкино Ленинградской области. В период с 1952 по 1955 гг. он активно работает над научными проблемами в области механики, предложил решения ряда задач о действии штампа на упругое полупространство. Эти решения легли в основу его кандидатской диссертации, которую он успешно защитил в 1955г. в Львовском университете.

В этом же году после демобилизации В.Л. Рвачев избирается заведующим кафедрой высшей математики в Бердянском педагогическом институте. Здесь, занимаясь научно-преподавательской деятельностью, он активно интересуется вычислительной техникой и приближенными методами решения краевых задач математической физики. По инициативе В.Л. Рвачева и при его непосредственном участии в Бердянском педагогическом институте создается вычислительный центр.

В 1960 г. в Институте проблем механики АН СССР В.Л. Рвачев защищает докторскую диссертацию, посвященную пространственным контактным задачам теории упругости. Его оппонентами были член-корреспондент НАН Украины И.Я. Штаерман,

faculty of Physics and Mathematics at Lvov University. Among his lecturers were famous scientists-academicians: M. Leonov, V. Mossakovsky, G. Savin, Ja. Lopatinsky, V. Panasjuk and others. When he was a student, V. Rvachev was involved in the University social activities; he was granted a Stalin scholarship, and became engaged in scientific activities under the guidance of M. Leonov who was well known in the field of Mechanics.

In 1952 V. Rvachev graduated with honours from Lvov University and was assigned to teach at one of the military schools of the Navy in Pushkin, Leningrad region. In 1952-1955 he was actively working on scientific problems in the field of mechanics. He proposed solutions of some problems about the action of a stamp on an elastic half-space. These solutions were the basis of his doctoral dissertation, which he successfully defended in 1955 at Lvov University.



The first scientific progeny by V. Rvachev. Laboratory of Technical Cybernetics, Berdyansk, 1961. The first one on the right-hand side in the middle row is V. Rvachev

At the same time V. Rvachev was elected as the Head of the Chair of High Mathematics at Berdiansk Pedagogical Institute. He was involved in scientific and tutorial work, and got an interest in computer engineering and approximate methods of solving boundary problems in mathematical physics. By the initiative of V. Rvachev a computing centre was set up at Berdiansk Pedagogical Institute.

In 1960 V. Rvachev defended his Doctoral thesis dedicated to 3D contact problems in the theory of elasticity at the Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences (AS) of the USSR. His opponents were I.Ya. Shtaerman, Correspondent-Member of the NAS of Ukraine; M.Ya. Leonov, Academician of AS of Kyrgyz, and Professor D.I. Sherman. They estimated his work positively. Especially they noted the results related to his first, intuitively obtained equations of complex geometric objects.



академик Киргизской АН М.Я. Леонов и профессор Д.И. Шерман, которые кроме положительной оценки работы особо отметили результаты, относящиеся к его первым, интуитивно полученным уравнениям сложных геометрических объектов.

В 35 лет В.Л. Рвачеву было присвоено ученое звание профессора. Основным научным направлением в 1952-1962 гг. было решение пространственных задач теории упругости. В результате этих исследований В.Л. Рвачев получил точные решения следующих задач: пространственной контактной задачи о штампе, имеющем форму бесконечной полосы, лежащей на упругом полупространстве, при произвольной нагрузке; задачи о клинообразном штампе, исследовал также характер напряжений под штампом полигональной формы в плане.

Становление В.Л. Рвачева как ученого совпало с периодом бурного развития кибернетики и вычислительной техники в стране. Будучи уже признанным специалистом в области механики, он существенно расширил круг своих интересов, рассматривая краевые задачи механики с общих позиций теории информатики. Его внимание привлекла проблема учета геометрической информации, характерная для широкого класса задач оптимизации и математической физики, решаемых приближенными методами с помощью ЭВМ. Математическая теория R-функций (функций В.Л. Рвачева) возникла на стыке классических методов прикладной математики, современных методов кибернетики и математической логики. Основы теории R-функций были заложены В.Л. Рвачевым в 1963 г. Впервые понятие R-функций было введено В.Л. Рвачевым в связи с возникшей необходимостью составлять уравнения сложных locusов для построения приближенных решений некоторых пространственных контактных задач теории упругости. Решающей в этом направлении стала его работа «До розв'язку однієї задачі теорії потенціалу», в которой сформулирована задача о построении уравнений семейства поверхностей.

Проблема построения уравнений границ сложных геометрических объектов восходит еще к Декарту и известна в литературе как обратная задача аналитической геометрии: задан геометрический объект, требуется написать его уравнение. Например, написать уравнение границы квадрата, или усеченного конуса с цилиндрическим отверстием, зубчатого колеса и т.д. При этом функция, описывающая уравнение границы объекта, должна иметь вид единого аналитического выражения. С помощью теории R-функций обратная задача аналитической геометрии была решена. И этот результат является одним из главных и фундаментальных результатов, полученных В.Л. Рвачевым. В первых работах по теории R-функций уже был определен достаточно широкий круг возможных ее приложений: оптимальное размещение геометрических объектов, распознавание образов, математическое программирование, конструктивные средства теории функций и особенно решение краевых задач математической физики в областях сложной геометрической формы.

Нельзя не сказать несколько о слов о происхождении названия этой теории. Дело в том, что буква «R» отображает не только первую букву фамилии автора, открывшего новый класс функций. В это назва-

V. Rvachev was awarded the academic status of Professor when he was 35 years old. The key scientific area of his research in 1952-1962 was solving 3D problems in the theory of elasticity. As a result of this research, V. Rvachev obtained exact solutions of the following problems: 3D contact problem for a stamp having the shape of an infinite strip supported in an elastic semi-space under an arbitrary load; the problem of a wedge-shaped stamp, and research in the features of stress under a polygon-shaped in plan stamp.

V. Rvachev's formation as a scientist coincided with the period of rapid development of cybernetics and computer engineering in the country. Being an acknowledged expert in the field of mechanics, he significantly extended the scope of his interests by considering boundary problems in mechanics against the general background of the theory of information science. He focused his attention on the problem of accounting for geometric information common for a wide class of optimisation and mathematical physics problems solved by approximate computational methods. The mathematical theory of the R-functions (V. Rvachev's functions) appeared at the interface of classical methods in applied mathematics, and modern methods in cybernetics and mathematical logic. The fundamentals of the theory of the R-functions were laid down by V. Rvachev in 1963. The concept of the R-functions was introduced by V. Rvachev due to the perceived need of the complicated loci equations construction for form of approximate solutions of some spatial contact problems of the theory of elasticity. The key work in this field was the paper «On Solving One Potential Theory Problem» where he formulated the problem of creating equations for the family of surfaces.

Historically, this problem of complex domains equation construction can be traced back to Descartes, and in the literature it is known as the inverse analytical geometry problem: for a given geometric object, one has to write its equation. For instance, one should write an equation of a square or a truncated cone with a cylindrical hole, a gear wheel, or others. Wherein the function describing a boundary of an object should have a form of a unique analytical expression. With the help of the R-functions theory, the inverse problem in analytical geometry was solved. This is the main and fundamental result that was obtained by V. Rvachev on the basis of the R-functions theory. In his first scientific works in the field of the R-functions theory, V. Rvachev defined a fairly wide range of its applications: optimal allocation of geometric objects; pattern recognition; mathematical programming; constructive theory of functions, and especially, solving of boundary value problems in mathematical physics in domains of complex geometrical form.

A few words about the origin of the name of the new theory. The letter 'R' is not only the first letter of the surname of the author, who has discovered a new class of functions, but there is a deeper meaning. A short explanation by V. Rvachev, in which he tells the story of the origin of the letter 'R' is given below:

*"First of all, I would like to justify myself in relation to the letter «R» in the name of the method. Its appearance is not my fault. In 1960 I lived in Berdyansk and I*

ние вложен более глубокий смысл. И нам сейчас хочется привести рассказ (объяснение) самого В.Л.Рвачева, в котором он рассказывает об истории происхождения буквы «R».

*«Прежде всего, хочу оправдаться в отношении буквы «R» в названии метода. Она появилась не по моей вине. В 1960 г. я жил в Бердянске, а докторскую диссертацию защитил в Москве в Институте механики АН СССР. Одним из моих оппонентов был Илья Яковлевич Штаерман. Он похвалил мою работу, но сказал, что наиболее интересным представляется материал, содержащийся в приложении (три страницы) и использованный в одной из глав диссертации, где были построены уравнения прямоугольника, треугольника и некоторых других простеньких геометрических объектов. Я не придавал особенного значения этим результатам, но после слов Ильи Яковлевича начал думать в этом направлении и полученные в итоге результаты в черновом виде послал моей сестре Екатерине Логвиновне Юценко в Киев. Она была исторически первой программисткой в нашем полушарии и участвовала в нелегальном создании первой в СССР вычислительной машины под руководством академика Лебедева. Я забыл и думать об этих результатах, как вдруг получил из ДАН СССР отписку с моей статьей, где с удивлением увидел термин «R-функции». Сестра сама оформила мои черновые материалы в виде этой статьи. Я тут же позвонил сестре и возмущился появлению буквы «R», на что услышал ответ: «Много ты о себе, мой братик, воображаешь. Это – в честь нашего отца (погибшего в ГУЛАГе)». Пришлось мне смириться, и теперь, когда я читаю в статье «функции Рвачева», то мне даже теплеет на душе.»*

В 1963 г. В.Л. Рвачев переехал в г. Харьков, где возглавил кафедру вычислительной математики Харьковского института горного машиностроения, автоматики и вычислительной техники, а впоследствии, после преобразования института, он стал первым ректором Харьковского института радиоэлектроники. С 1963 года и до последних дней Владимир Логвинович Рвачев жил и работал в г. Харькове. Его преподавательская деятельность проходила в трех высших учебных заведениях города: Харьковский Национальный университет радиоэлектроники, Харьковский Национальный университет «ХПИ», Харьковский аэрокосмический университет «ХАИ». Но основным местом его работы, начиная с 1970 года и до последних дней, был академический Институт Проблем Машиностроения им.А.Н.Подгорного НАН Украины. Здесь он руководил отделом прикладной математики и вычислительных методов.

В 1969-1970 гг. он заведовал кафедрой прикладной математики (в то время кафедра теоретической и математической физики) в НТУ «ХПИ», а позже Владимир Логвинович работал по совместительству в должности профессора этой же кафедры.

Будучи механиком В.Л. Рвачев серьезно занимался приложениями теории R-функций для решения задач механики деформируемого твердого тела. Он обратил внимание, что в течение длительного времени

*defended my doctoral dissertation in Moscow at the Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR. One of my opponents Ilya Y. Shtaerman praised my work, but said that the most interesting is actually the part in the appendix (three pages) and the chapter of thesis where it was used. This was the chapter about constructing the equations for the rectangle, triangle and other basic geometric objects. I did not put much importance to those results, but after talking to I. Shtaerman, I worked more in that direction and obtained some new results, which I sent later as a draft to my sister Catherine Yuschenko. She was historically the first programmer in this hemisphere, and under supervision of Academician Lebedev she participated in the illegal developing of the first computer in the USSR. Later I forgot thinking about those results, which I sent to her, and was very surprised to receive the prints of my article from the Academy of Science. I was even more surprised to see the term «R-function». My sister arranged it – she published my draft-results as an article. I immediately called her and asked about the letter «R» - as an answer I heard: "You think too much about yourself, my dear brother. Letter 'R' is in honor of our father (who died in the Gulag)." I had to give up and let the term 'R-functions' stay. Since that whenever I read in the articles "Rvachev's functions" or "R-functions", I think of my father and it warms my heart."*

In 1963 V. Rvachev moved to Kharkov where he became Head of the Department of Computational Mathematics at Kharkov Mining Machine-Building, Automatics and Computer Engineering Institute. Later on, after the Institute was reorganized, he became the first Rector of Kharkov Institute of Radio Electronics. From that moment V. Rvachev stayed in Kharkov. He was teaching in three Universities: Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov National University "KhPI" and Kharkov Aerospace University "KhAI".

In 1969-1970 V. Rvachev was the head of the Department of Applied Mathematics (at the time it was the Department of Theoretical and Mathematical Physics) in National Technical University "KhPI". Later he worked as a part-time professor at the same department. Since 1970 he was the head of the Chair of Applied Mathematics and Computational Methods at the A.Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine.

Being an expert in mechanics V. Rvachev worked seriously towards applications of the theory of the R-functions, in particular to solve problems of solid mechanics. He noticed that, during a long time application of classical variational methods was restrained by absence of constructive tools for building of coordinate functions series in explicit form. Such functions must exactly fulfil with the given boundary conditions for complex-shape domains and the property of completeness must be satisfied.

Many scientists were considering this problem as not solvable for the complex geometric domains. Thus, J. Ortega and V. Reinboldt wrote on this issue: «Though, formally, Ritz's method applies to 2D variational problems and higher-dimensionality problems, one faces a serious practical challenge involving building suitable basis functions for common domains». With the help of

применение классических вариационных методов сдерживалось отсутствием конструктивных средств для построения последовательностей координатных функций. Такие функции должны точно удовлетворять заданным краевым условиям и обладать свойством полноты.

Для областей сложной геометрической формы эта проблема многим ученым казалась практически неразрешимой. Так, Дж. Ортега и В. Рейнболдт по этому поводу писали: «Хотя формально метод Ритца распространяется на двумерные вариационные задачи и задачи более высокой размерности, здесь имеется серьезная практическая трудность, состоящая в построении подходящих базисных функций для общих областей». В.Л. Рвачев с помощью конструктивного аппарата теории R-функций разработал единый подход к проблеме построения координатных последовательностей для основных вариационных и проекционных методов. При этом речь идет не просто об однородной задаче Дирихле, а о краевых условиях самых различных типов для областей практически произвольной формы. Им были предложены специальные дифференциальные операторы, которые на границе области совпадали с производными по нормали и касательной и имели смысл внутри области. Такие операторы позволяли выполнять продолжение граничных условий во внутрь области.

Предложенный метод построения систем базисных функций для областей сложной формы и различных видов граничных условий – это второе уникальное и очень важное открытие, сделанное Владимиром Логвиновичем. Таким образом, было положено начало методу R-функций (RFM), который позволил добиться значительных успехов в решении ряда прикладных задач теории упругости, изгиба и колебаний тонких пластин и оболочек, электродинамики, теплофизики, метрологии и др.

Поиск эффективной организации численного решения краевых задач математической физики привел В.Л. Рвачева к созданию новой технологии программирования, реализованной в виде систем семейства ПОЛЕ. В 1970г. под его руководством в отделе прикладной математики и вычислительных методов Института проблем машиностроения НАН Украины начинаются работы по созданию первых версий системы ПОЛЕ. Главную роль при этом сыграла конструктивная универсальность метода R-функций, который был положен в основу данных систем. Предметной областью систем ПОЛЕ является реализация прямых методов решения краевых задач, описываемых уравнениями (или их системами) с частными производными. Пользователи специализированных систем серии ПОЛЕ указывают формулировку задачи, исходные данные, требуемую форму выдачи результатов на проблемно-ориентированном языке высокого уровня, который максимально приближен к языку математического описания поставленной задачи и алгоритму ее решения. По этому заданию система ПОЛЕ создает вычислительную схему, а затем автоматически синтезирует рабочую программу решения поставленной задачи. Заложенные в языковых средствах возможно-

the constructive tool of the R-functions theory, V. Rvachev developed a unique approach to the problem of coordinate sequences building for the basic variational and projection methods. This can be done not only for the uniform Dirichlet's problem, but for the boundary conditions of various types for arbitrary shaped domains. V. Rvachev proposed to use special differential operators, which coincided with the derivatives along the normal and tangent to the boundary and had sense within the domain. Such operators allowed to carry out the continuation of the boundary conditions inside the domain.

The proposed method of construction of systems of basic functions for the complex shaped domains and different types of boundary conditions is the second unique and very important discovery, made by V. Rvachev. This was the beginning of the R-functions method (RFM), which allowed to solve a number of applied problems in the theory of elasticity; flexing and vibration of thin plates; electrodynamics; heat physics, etc.

In order to optimize the procedure of numerical solution of various boundary problems in mathematical physics, V. Rvachev thought of creating a new software, which he called POLYE. In 1970 the development of the first version of POLYE under his supervision was started in the Department of Applied Mathematics and Computational Methods at the Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine. The basis for this new software is the constructive and universal method of the R-functions. POLYE proposes direct methods for solving boundary problems, which are described by systems of partial differential equations. In order to use POLYE a user should define the problem, initial values and the required format of the output results presented in a high-level problem-oriented language, which is as close as possible to the language of the mathematical description of the stated problem and its solution algorithm. Based on the input parameters POLYE creates a computational scheme and afterwards automatically produces the execution program to solve the stated problem. The possibilities of specifying algebraised solution structures embedded in the language tools allow to change the form of the object efficiently and within one algorithm, by just changing its parameters. It is also possible to employ both known exact solutions and approximate solutions obtained earlier. The experience of working with problem-oriented languages and POLYE has shown that they dramatically simplify and speed up the most involved stages of the computational experiment: programming and debugging of the modules, and analysis of the obtained results. Thus, already in 1980s POLYE became a key software for numerical experiments while solving applied problems. Using POLYE implies less technical and programming work for mathematicians and engineers. Nowadays, when computational technology is developing rather fast, numerous software packages were developed for solving boundary problems, such as: ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, PLASTRAN, MATLAB, MAPLE, etc. Most of them are using Finite Element Method (FEM), while POLYE is based on the numerical-analytical method of the R-functions. POLYE and POLERL were among the first computational software packages and are still being used with great success.

сти задания структур решения позволяют, работая с параметрами, эффективно и мобильно в рамках одного алгоритма существенно изменять форму объекта, а также учитывать особенности поведения искомого решения. Опыт применения проблемно-ориентированных языков и специализированных систем серии ПОЛЕ показывает, что они значительно упрощают и ускоряют наиболее трудные этапы вычислительного эксперимента: программирование и отладку модулей, анализ полученных результатов. Еще в 80-е годы прошлого столетия системы ПОЛЕ стали инструментальной базой проведения численных экспериментов и решения практических задач, освобождающей математиков и инженеров от процесса программирования. В настоящее время, когда вычислительная техника и информационные технологии развиваются с огромной скоростью, созданы многочисленные системы, позволяющие автоматизировать процесс решения краевых задач: ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, PLASTRAN, MATLAB, MAPPLE и другие. Большинство из известных пакетов используют метод конечных элементов (МКЭ). Однако системы серии ПОЛЕ, POLE-RL, базирующиеся на численно-аналитическом методе R-функций были в числе первых интеллектуальных систем подобного типа и успешно используются до сегодняшнего дня.

В 1972 г. В.Л. Рвачев избирается член-корреспондентом, а в 1978 г. – действительным членом НАН Украины.



60-летний юбилей академика В.Л. Рвачева

В.Л. Рвачев как ученый отличался умением видеть широту приложения сфер результатов своих фундаментальных исследований. На базе теории R-функций выполнен ряд разработок, внедренных в народное хозяйство. Появились самостоятельные направления, развиваемые учениками и последователями В.Л. Рвачева. Одно из таких направлений – теория геометрического проектирования, включающая задачи оптимального раскроя промышленных материалов на заготовки сложной формы и размещения пространственных объектов, задачи трассировки с одновременной компоновкой оборудования в областях сложной формы. Сюда же относятся задачи оптимизации различных технических систем по геометрическим и физическим параметрам. Метод R-функций явился также

In 1972 V. Rvachev was elected Correspondent-Member of the NAS of Ukraine. Later in 1978 he became an Academician of the NAS of Ukraine.

As a scientist, V. Rvachev was distinguished by his capability to find application areas for the results of his basic research. A number of projects, based on the R-functions theory, have been implemented in the national economy. Independent research areas have emerged, which were being developed by the followers of V. Rvachev. As an example, one of such new research direction is the theory of geometrical design, where problem of optimal cutting of industrial materials into complex-shaped pieces and allocation of 3D objects arise, next to the routing problem with simultaneous layout of equipment in complex-shaped domains. It was also applied to the optimisation problems for various engineering systems based on their geometric and physical parameters. The R-functions method also appeared to be an efficient tool in the theory of pattern recognition.



V. Rvachev's report in the NAS of Ukraine. The second one on the left-hand side in a presidium is a president of the NAS of Ukraine, Paton B.E.

Further development of the RFM allowed to generalize and implement the Lagrange-Taylor-Hermite formulas in functional space. Furthermore it was possible to find the new class of functions which are finite and infinitely differentiable. They are called atomic functions and play an important role in the development of the approximation theory and in the numerical methods for solving boundary problems in mathematical physics.



Triumphal procession of R-functions, 1985

эффективным инструментарием в теории распознавания образов.

Дальнейшее развитие метода R-функций позволило обобщить и конструктивно реализовать в функциональных пространствах широко применяемые формулы Лагранжа-Тейлора-Эрмита, найти новый класс финитных, бесконечное число раз дифференцируемых функций, так называемых атомарных функций, имеющих важное значение для развития теории аппроксимации и методов решения краевых задач математической физики.

В 1989 г. В.Л. Рвачев предложил новое алгебраически изоморфное классическому исчисление, названное неархимедовым, так как в нем аксиома Архимеда, сформулированная для отрезков, на которой базируется весь классический математический аппарат, была заменена аксиомой о существовании наибольшего числа. Были также начаты работы по приложениям неархимедовых исчислений в физике дальнего космоса и сделаны первые нетривиальные выводы том, что смещения спектров неподвижных объектов в красную сторону не является следствием расширения Вселенной, а идея о ее рождении в результате большого взрыва миллиарды лет назад сомнительна. Новые идеи В.Л. Рвачева были подхвачены его учениками в Украине и учеными-физиками Индии. Так в 2000 г. вышла в американском журнале «Foundations of physics» совместная статья В.Л. Рвачева и К. Авинаша (Индия), в которой неархимедовы исчисления нашли новые приложения, в частности в теории гравитации.

Научные исследования В.Л. Рвачева отражены в сотнях работ, в том числе семнадцать монографий и ряде авторских свидетельств. Особое место среди них занимают три монографии В.Л. Рвачева, определяющие этапы и перспективы развития теории R-функций и ее приложений.

Так, в 1967 г. вышла книга «Геометрические приложения алгебры логики», в которой изложены методы аналитического задания сложных геометрических объектов. В ней описывается аппарат R-функций, с помощью которого можно составлять уравнения сложных локусов, а также их семейств. Рассмотрены также некоторые приложения R-функций к задачам оптимального планирования, оптимального раскроя, к краевым задачам математической физики. В этой работе, явившейся первой попыткой систематического освещения вопросов, связанных с R-функциями и их приложениями, удачно сформулированы почти все основные направления их дальнейшего развития.

В 1974 г. была издана монография В.Л. Рвачева «Методы алгебры логики в математической физике», отмеченная премией им. А.Н. Динника АН УССР. Эта книга вследствие систематического изложения теории R-функций и ее применения в области краевых задач математической физики почти десять лет была основой исследований и практической деятельности многих математиков – вычислителей, инженеров и научных сотрудников, работающих в области теории упругости, радиофизики, аэро- и гидродинамики, теории пластин, оболочек, электродинамики и теории фильтрации.

В вышедшей в 1982 г. монографии ученого

In 1989 V. Rvachev proposed a new numerical approach, which is algebraically isomorphous to the classical one. It is called non-Archimedean numerical calculus, as the Archimede's axiom, which is the basis for the entire classical mathematical approach, was replaced by the axiom of the greatest number existence. This new approach was also applied to the problems of space physics. Interestingly, it was concluded that shifts of the spectrum to the red side are not the results of expansion of the Universe, and thus the concept of the Big Bang billions of years ago is dubious. New ideas of V. Rvachev were further investigated by his students in Ukraine and by physicists in India. In 2000 the American journal «Foundations of Physics» published the joint paper by V. Rvachev and K. Avinash (India), in which non-Archimedean numerical calculus approach was applied to the theory of gravity.

The results of V. Rvachev's scientific research have been published in hundreds of papers, including 17 monographs and several Author's Certificates for inventions. Three V. Rvachev's monographs are of the key significance. They defined the stages and perspectives of development of the R-functions theory and its applications.

The book «Geometrical Applications of the Algebra of Logic» was published in 1967. It contains the methods of analytical statement of complex geometrical objects. It also describes all the details of the R-functions which can be used to generate equations of complex loci, as well as their families, including given parameters. Several applications of the R-functions to problems in optimal planning, optimal cutting, and boundary problems in mathematical physics are discussed. This work was the first attempt to systematically expound issues related to the R-functions and their applications, clearly stated almost all the key lines of their further development.

The monograph «Methods of the Algebra of Logic in Mathematical Physics» was published in 1974 and awarded the A. Dynnuk Prize of the AS of Ukraine. Due to a systematic recitation of the R-functions theory and its application in the field of boundary problems in mathematical physics, this book became a basis for research and practical activities of many computational mathematicians, engineers and research staff working in the field of the theory of elasticity, radio physics, aero and fluid dynamics, the theory of plates and shells, electrodynamics, and the theory of filtration.

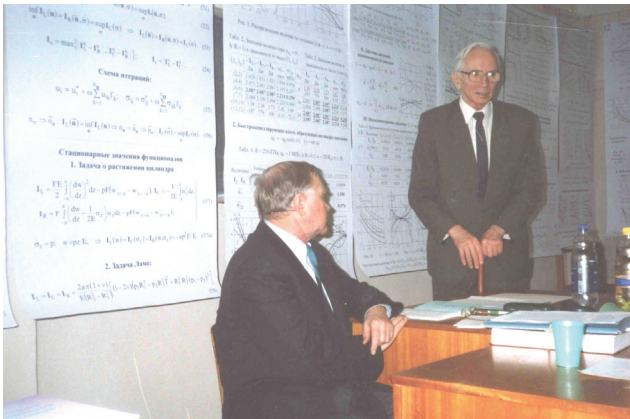
The monograph «Theory of R-functions and Some Applications» was published in 1982. It gave an exposition of the key results obtained over about 20 years of development of the R-functions theory; pointed to certain features of implementing RFM for applied problems, as well as posed challenging issues. In the theoretical aspect, this book is a unique source of information on the R-functions theory and RFM.

V. Rvachev paid a lot of attention to the training of scientists. He was Honorary Doctor of the Kharkov State Polytechnic University, Kharkov Technical University of Radio Electronics, and the Wisconsin University (Madison), U.S.A.

He has created a scientific school, with more than 70 candidates and 20 doctors of sciences. Among the progeny

«Теория R-функций и некоторые ее приложения», в которой изложены основные результаты, полученные почти за двадцатилетний период развития теории R-функций, отмечаются некоторые специфические особенности реализации RFM в прикладных задачах, а также поставлены вопросы, носящие проблемный характер. В теоретическом аспекте эта книга до сегодняшнего дня является уникальным источником информации по теории R-функций и RFM.

В.Л. Рвачев уделял большое внимание подготовке кадров. Он являлся почетным доктором Харьковского государственного политехнического университета, Харьковского технического университета радиоэлектроники, Бердянского педагогического университета, Висконсинского университета (Madison) США.



Заключительное слово председателя специализированного ученого совета в ИПМаш НАН Украины В.Л.Рвачева

Им создана научная школа, насчитывающая более 70 кандидатов и 20 докторов наук. Среди учеников Владимира Логвиновича имеются член-корреспонденты НАН Украины (Стоян Ю.Г. и Божко А.Е.), заслуженный деятель науки Российской Федерации (Кравченко В.Ф.), лауреаты Государственной премии Украины в области науки и техники (Ю.Г. Стоян, В.С. Проценко, Г.П. Манько, Т.И. Шейко, Н.С. Синекоп, А.П. Слесаренко), лауреат премий В.М. Глушкова и Остроградского (О.Н. Литвин). Многие ученики Владимира Логвиновича возглавляют или возглавляли кафедры в вузах города Харькова и других городах Украины (Б.Н. Борисенко, В.П. Бузько, В.Н. Вержиковский, И.В. Гончарюк, В.Д. Кожухов, Л.В. Курпа, Л.Н. Куценко, О.Н. Литвин, В.С. Проценко, Н.С. Синекоп, И.Б. Сироджа, В.П. Федько, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко, Т.И. Шейко, Л.И. Шкляр, А.В. Шматко и др.).

В.Л. Рвачев выполнял большую научно-общественную работу: на протяжении ряда лет являлся членом секции Комитета по Государственным премиям Украины, членом Национальных комитетов Украины и России по теоретической и прикладной механике, председателем Харьковской секции Научного совета НАН Украины по проблеме «Кибернетика», научным руководителем ряда всеукраинских научных семинаров, председателем специализированного ученого совета и членом ряда научных и научно-

of Vladimir Rvachev are corresponding members of the NAS of Ukraine (Yu. Stoyan and A. Bozhko), honored scientist of the Russian Federation (V. Kravchenko), prizewinners of the State Prize of Ukraine in Science and Technology (Yu. Stoyan, V. Protsenko, G. Manko, T. Sheiko, N. Sinekop, A. Slesarenko), prizewinner of V. Glushkov and Ostrogradskii Prize (O. Litvin). Many students of Vladimir Rvachev head or headed departments in the universities of the city of Kharkov and other cities of Ukraine (B. Borisenko, V. Buzko, V. Verzhikovskiy, I. Goncharyuk, V. Kozhuhov, L. Kurpa, L. Kutsenko, O. Litvin, V. Protsenko, N. Sinekop, I. Sirodzha, V. Fedko, Yu. Shabanov-Kushnarenko, T. Sheiko, L. Shklyarov, A. Shmatko et al.).

V. Rvachev was involved in important scientific and public activities. For several years he was a member of the Section of the Committee for State Prizes of Ukraine; member of National Committees of Ukraine and Russia in Theoretical and Applied Mechanics; Chairman of the Kharkov Section of the Scientific Council of the AS of Ukraine for Cybernetics; Scientific Head of several ukrainian-wide seminars; Chairman of the Special Scientific Council; member of several Scientific and Scientific-Engineering Councils; and member of the Editorial Boards of leading scientific-engineering journals and proceedings.



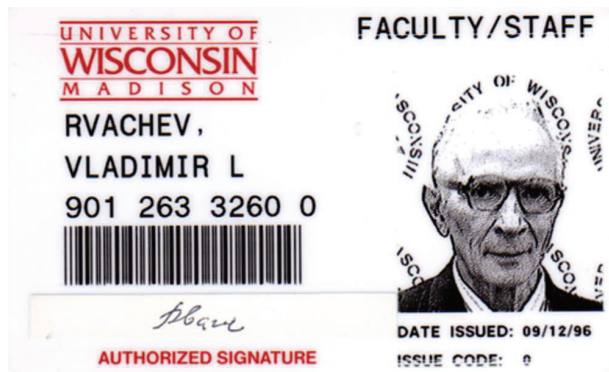
V. Rvachev in USA together with his follower T.I. Sheyko and his nephew M.A. Rvachev



V. Rvachev at the Department of Applied Mathematics, NTU «KhPI» together with his followers L.V. Kurpa and E.S. Arhipova

Since 1994 V. Rvachev was involved in activities within the framework of the Agreement on Scientific Cooperation between Ukraine and the U.S.A. Several

технических советов, членом редколлегии ведущих научно-технических журналов и сборников.



Електронне удостоверение В.Л. Рвачева во время пребывания в США, 1996 г.

С 1994 г. В.Л. Рвачев проводил активную работу в рамках договора о научном сотрудничестве между Украиной и США. Ряд работ выполнен совместно с Висконсинским университетом (Madison) по грантам NATO Linkage grant PST.CLG.976192, HTECH. LG 941352 (NATO), DMI-9522806 National Science Foundation USA, DMII-9502728 USA CAREER. Он являлся членом американских научных обществ ASME, IEEE, AMS.

Работы В.Л. Рвачева были поддержаны также грантами INTAS 97-31854 и International Soros Science Education Program of International Research Foundation grant SPU 071055.

Сотни научных работ и 17 монографий В.Л. Рвачева подтверждают значимость этого Ученого в области математики и механики. Многогранная плодотворная научная и научно-педагогическая деятельность В.Л. Рвачева отмечена правительственными наградами, в том числе орденами Трудового Красного Знамени, Дружбы народов, «Знак Почета», Ярослава Мудрого и медалями. В 1980 г. за создание, развитие и внедрение в народное хозяйство теории R-функций В.Л. Рвачеву (руководителю работы) и его ученикам была присуждена Государственная премия Украины в области науки и техники. В 1997 г. В.Л. Рвачеву присваивают звание Заслуженного деятеля науки и техники Украины.

В 2004 году в Харькове была проведена I-ая международная конференция по нелинейной динамике «NONLINEAR DYNFMICS», на которой присутствовали ученые из России, США, Канады, Италии, Польши, Узбекистана, Великобритании, Кореи и других стран. Владимир Логвинович выступил перед участниками конференции с приветственной речью на хорошем английском языке.

С Владимиром Логвиновичем всегда было очень интересно не только как с Ученым, но и как очень образованным и мудрым человеком. У него было чему научиться. Хочется привести некоторые мысли из его мемуаров, которые будут полезными молодым и перспективным ученым.

*«Без самокритики в науке делать нечего. Человеку самоуверенному любая собственная мысль кажется гениальной, и он всеми силами пытается аргументировать ее безупречность. Между тем, крат-*

projects were executed jointly with the Wisconsin University (Madison) under support of NATO grants, viz. Linkage grant PST.CLG.976192, HTECH. LG 941352 (NATO), DMI-9522806 National Science Foundation USA, DMII-9502728 USA CAREER. He was a member of the American Scientific Societies ASME, IEEE, and AMS.

The research of V. Rvachev was also supported by grants INTAS 97-31854 and the International Soros Science Educational Program of International Research Foundation grant SPU 071055.

V. Rvachev is the author of hundreds of scientific papers and 17 monographs in Mathematics and Mechanics. His scientific and pedagogical activities were appreciated by the government.



V. Rvachev was awarded the Order of Labour Red Banner; Peoples' Friendship, «Badge of Honour», Prince Yaroslav the Wise of V degree, and medals. In 1980, V. Rvachev (Project Manager) and his followers were awarded the State Prize of Ukraine in the Field of Science and Technology for creating, developing and implementing the R-functions theory in the national economy. In 1997, V. Rvachev was awarded the title of Honoured Worker in Science and Technology of Ukraine.

The 1st International conference on nonlinear dynamics "NONLINEAR DYNFMICS" was held in Kharkov in 2004. It was attended by scientists from Russia, USA, Canada, Italy, Poland, Uzbekistan, the UK, Korea and other countries. Vladimir Rvachev held a welcoming speech at the from of the conference participants with good command of English.

It was always very interesting to deal with Vladimir Rvachev not only as a scientist but also as a very educated and wise man. He had a lot for us to learn. We would like to share some ideas of his memoirs, which will be useful to young and promising scientists.

чайший путь к доказательству этой безупречности, если таковая имеется – искать ее опровержение. Это творческая истина (назовем ее И № 2), неизвестная только салажатам от науки. Об истине И № 1 – которая в генетическом коде, скажу позже, дело деликатное. И № 2 в этом коде, скорее всего, нет, формируется она в процессе образования и воспитания. Впрочем, эти, как и многие другие, уставные истины, относятся не только к науке, но и к любой другой деятельности. Сталин говорил: «Если в критике есть 5% правды, то к ней надо прислушаться». По моим наблюдениям, люди, в большинстве своем, поступают наоборот: если заметят в критике хоть каплю неправды, отбрасывают ее целиком. Особенно это заметно в отношениях между поколениями. В этом, наверное, и состоит классическая проблема «отцов и детей».

Владимир Логвинович очень любил поэзию, огромное количество стихотворений знал наизусть. Часто приводил цитаты из произведений А.С. Пушкина, Т.Г. Шевченко, В.В. Маяковского и многих других поэтов. Интересно было в его дневниках прочесть некоторые из стихотворений, которые были записаны им в далекие годы во время службы на флоте:

О. Берггольц  
*Свирепый враг стоит у стен,  
 Остервенело в город рвется,  
 Грозит бедой ... Но между тем  
 Балтфлот смеется....*  
*И вот посмотрим мы, – когда  
 К Берлину будем приближаться,  
 Сумеют ли Они тогда  
 Хотя б над чем-нибудь смеяться ?*  
*Мы твердо знаем: Победим!  
 Все превозможем, что придется  
 И грозно над врагом своим  
 Балтфлот Смеется!*

В его дневниках были выписаны стихотворения, которым Он следовал в своей жизни. Например, одно из них:

*Живи по совести и чести,  
 Служи без подлости и лести,  
 И от Отчизны до конца,  
 Не отворачивай лица!*

А вот эти слова Л. Ошанина он очень часто повторял:

*Забота у нас простая,  
 Забота наша такая,  
 Жила бы страна родная,  
 И нету других забот*

А вот это – одно из последних стихотворений, записанное в дневнике Владимира Логвиновича (2005г.)

*Простите за смелость и мрачность. Вы ведь  
 всегда прощаете...*

*Перед глазами – жизни кадры вновь и вновь.  
 Для оптимизма нет уже причины.  
 Мне вечным холодом и льдом сковало кровь.  
 От страха жить и от предчувствия кончины.  
 Кружимся в карусели среди невежд,*



Participants of I-th International Conference "Nonlinear Dynamics" NTU "KPI", 2004

*"Without self-criticism you cannot do anything in science. For a self-confident person any of his ideas seem brilliant, and he would try to argue its perfection. Meanwhile, the shortest path to the proof of integrity is only one. This is to look for its denial. This is a creative truth (let's call it truth # 2), which is unknown only to people out of science. About the truth #1 - which is in the genetic code, I will say later, it's a delicate matter. Most probably the truth#2 is not in the genetic code, but it is being formed later, as a part of education and upbringing. These two items which I mentioned can be related not only to science but to any other field. Stalin said: "If there is 5% of the truth in the criticism, then it is worthwhile to listen to it." What I typically observe, is inverse: if there is any false in the criticism, it is being rejected. Especially it happens often in the relationship between generations. This explains perhaps the classic problem of "fathers and sons".*

Vladimir Rvachev was very fond of poetry, a great number of poems he knew by heart. Often he quoted from the works of Alexander Pushkin, Taras Shevchenko, Vladimir Mayakovsky and many other poets. It was interesting to read in his diaries some of the poems which have been written down by him in early years when he was serving in the Navy.

In his diaries the poems were written, which he followed in his life. One of them is below:

*Live by conscience and honor,  
 Serve without baseness and flattery,  
 And from the Motherland to the end,  
 Do not turn away your face!*

Or he often repeated these words of L. Oshanin:

*Our concern is simple,  
 Our concern is that  
 Of needing' long life for our motherland  
 And haven't other concerns*

Here is one of the last poem, which was in Vladimir Rvachev's diary (2005)

*Forgive me for the courage and gloom. You always  
 forgive ...*



*Не видя выхода из черного тумана.  
Вам не служит рабом у призрачных надежд,  
Не поклоняться больше идолам обмана.  
А так хотелось жить, смеяться, петь,  
Не покоряйтесь равнодушию, не надо!!!  
Желаю Вам, сей ВОДЕВИЛЬЧИК досмотреть,  
Что нам устроили предатели из ада.*

26 апреля 2005 года Владимира Логвиновича не стало. Ученики и все те, кто знал Владимира Логвиновича, хранят светлую память о нем.

Идеи, заложенные академиком Владимиром Логвиновичем Рвачевым его известной теорией, продолжают развиваться сегодня и широко применяются в различных областях механики, физики, математического моделирования. Написаны монографии учениками В.Ф. Кравченко, Л.В. Курпа, К.В. Максименко-Шейко, защищены докторские (К.В. Максименко-Шейко, В.М. Колодяжный) и кандидатские диссертации (Г.Н. Пильгун, Г.Н. Тимченко, О.С. Мазур, Н.А. Будников, Е.И. Любичская, А.А. Осетров, Ю.С. Семерич, И.А. Баранов., О.Ю. Лисина, Д.О. Лисин и др.), посвященные дальнейшему развитию теории R-функций. Опубликовано большое количество статей, в которых RFM применяется к решению новых классов задач, в том числе и нелинейных, сделаны доклады на многих международных конференциях.

В 2006 году в Харькове была проведена международная конференция, посвященная 80-летию В.Л.Рвачева, на которой выступили с докладами не только ученики Владимира Логвиновича, но и многие украинские ученые, и ученые из зарубежных стран: России, Италии, Польши, Сербии и др.

В 2007, 2010, 2013 гг. были проведены 2-я, 3-я и 4-я международные конференции по нелинейной динамике «NONLINEAR DYNAMICS», организованные кафедрой прикладной математики и инженерно-физическим факультетом НТУ «ХПИ», на которых были представлены доклады ученых из многих стран, а также доклады, посвященные приложению RFM к решению нелинейных задач динамики пластин и оболочек.



Директор ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины академик, НАН Украины Мацевитый Ю.М. открывает конференцию «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященную 80-летию со дня рождения В.Л. Рвачева

*Before the eyes - life footage again and again.  
I have no reason for optimism  
My blood was chained by eternal cold and ice  
From fear to live and from a premonition of death.  
We lace in the carousel among the ignorant,  
Seeing no way out of the black fog.  
You will not be a slave to illusory hopes,  
Do not worship to idols of deception.  
And so I wanted to live, to laugh, to sing,  
Not to conquer indifference, do not !!!  
I wish you, this VAUDEVILLE to watch to the end  
That the traitors from hell made for us.*

V. Rvachev died on April 26, 2005. The disciples and all those who knew Vladimir L. Rvachev, keep the bright memory of him.

The ideas embodied by famous theory of V. Rvachev continue to evolve nowadays. They are widely applied in various fields of mechanics, physics and mathematical modeling. Followers of V. Rvachev have written new monographs. Doctoral (K. Maksimenko-Sheyko) and PhD theses (G. Pilgun, G. Timchenko, O. Mazur, N. Budnikov, E. Lyubitskaya, A. Osetrov) devoted to the further development of the R-functions theory were submitted. Many articles were published in known international journals. Presentations devoted new applications of RFM including nonlinear problems have been made in international conferences.

In 2006, an International conference dedicated to the 80th anniversary of V. Rvachev was held in Kharkov. Not only students of V. Rvachev presented their work, but also many Ukrainian and foreign scientists (from Russia, Italy, Poland, Serbia, etc.) participated in the conference.



Participants of the conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Mechanics" dedicated to the 80th anniversary of the birth of V. Rvachev, the A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems (IPMach) NAS, 2006

In 2007, 2010, 2013 the 2nd, 3rd and 4th international conference on nonlinear dynamics "NONLINEAR DYNAMICS" were held. These conferences were organized by the Department of Applied Mathematics and Engineering Physics Faculty of NTU "KhPI". Reports of the scientists from many countries were presented. Here ap-

В сентябре 2016 года будет проведена 5-я международная конференция «NONLINEAR DYNAMICS», посвященная 90-летию со дня рождения Рвачева Владимира Логвиновича. В рамках этой конференции будет работать Мини-симпозиум «The R-FUNCTIONS THEORY, IT'S DEVELOPMENT and RECENT APPLICATIONS», на котором будут обсуждены новые результаты, полученные с помощью теории R-функций за последние пять лет. Сформулированы новые проблемы, которые необходимо решить для дальнейшего развития RFM!

Владимир Логвинович Рвачев отдал все силы развитию фундаментальной науки на Украине. Он был и остается ярким примером не только для своих учеников, но и многих ученых, знавших его лично, которые были восхищены его талантом, эрудицией, образованностью, человеческими качествами. Хотелось бы, чтобы память об этом выдающемся Человеке, Ученом, который относится к когорте тех уникальных людей, о которых говорят «Се человек много званых, мало избранных» сохранилась навсегда.

В заключении авторам этой статьи хотелось бы привести стихи Кожухова Валерия Дмитриевича, написанные после ухода из жизни Владимира Логвиновича Рвачева.

Учитель наш, слышу глас я в ночи,  
В душе моей тихо Ваш голос звучит,  
И помню все Ваши заветы я:  
« Не Боги горшки обжигают, друзья  
Коль будешь ты сильно над книжкой потеть,  
Коль будешь душою идеей гореть,  
Коль будет та книга сниться ночами,  
Которую днем мы с трудом разбирали,  
То сможешь проблему, задачу решить.  
Все будет ОК, так устроена жизнь.  
Лишь думай о деле, добытом трудом,  
А слава, успех, все придет, все потом»  
Спасибо, Учитель, мы вместе всегда,  
Сегодня и завтра, и живы пока.  
У всех нас одна лишь прямая дорога,  
И все мы R-рычим пред алтарем R-Бога!

applications of RFM to the solution of nonlinear dynamics problems of plates and shells were discussed.

In September 2016 the 5th International Conference "NONLINEAR DYNAMICS" will be held in Kharkov. This time it will be dedicated to the 90th anniversary of V. Rvachev. As part of this conference there will be a mini-symposium «The R-FUNCTIONS THEORY, IT'S DEVELOPMENT and RECENT APPLICATIONS», in which the new results in the field of the R-functions theory will be presented. The new challenges in the further development of RFM will be discussed at the conference.

Vladimir L. Rvachev gave all his energy to the development of fundamental science in Ukraine. He was and will always be a great example not only for his students but also for many scientists who knew him personally, who were delighted with his talent, erudition, education and human qualities. It would be great if the memory of this remarkable person, who belongs to the cohort of those unique people about which it is said "Behold the man many are called, few are chosen" is preserved forever.

In conclusion, the authors of this article would like to quote verses Kozhukhov Valery, written after the death of Vladimir L. Rvachev.

Our Teacher, I hear the voice in the night,  
Your voice silently sounds in my heart  
And I remember all your precepts :  
"No gods pots, friends  
If you will drop your sweat on a book,  
If your soul will burn with idea,  
If the book will appear in your dreams at night,  
Which we barely understood last day,  
Then you can solve the problem and task,  
Everything will be OK, because that's the way of life  
Just think of the deal produced by work,  
As for fame and success, everything  
Will come at a later time"  
Thank you, Teacher, we are always together,  
Today and tomorrow, and while we are alive  
We all have only one straight road,  
And we all R-growl before the altar of R-God!

#### Литература о жизни и деятельности В.Л. Рвачева:

1. Рвачов Володимир Логвинович // Учені вузів УРСР. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1968. – 361 с.
2. Матвійчук О. Ланцюгова реакція добра / О. Матвійчук // Україна. – 1970. – 15 квіт.
3. Єнішов В. Школа професора / В. Єнішов, А. Раков, О. Литвин // Рад. освіта. – 1970. – 18 лип.
4. Лемешев К. Одержимість: Рассказы об ученых / К. Лемешев // Красное знамя. – 1976. – 10 нояб.
5. Підгорний А.М. Рвачов Володимир Логвинович / А.М. Підгорний // Вісн. АН УРСР. – 1976. – № 7. – С. 85-86.
6. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука. – 1976. – 493 с. (о В.Л. Рвачеве – С. 205, 273, 291, 300, 340).
7. Бородин А.И. Рвачев Владимир Логвинович / А.И. Бородин, А.С. Бугай // Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1976. – 442 с.
8. Бородин А.И. Рвачев Владимир Логвинович / А.И. Бородин, А.С. Бугай // Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 422 с.
9. Рвачев Владимир Логвинович // История Академии наук Украинской ССР. – К.: Наук. думка. – 1979. – 281 с.
10. Рвачов Володимир Логвинович // Академія наук Української РСР: Персон. склад. – К.: Наук. думка. – 1979. – 87 с.
11. Тонкаль В.Е. Академия наук Украинской ССР / В.Е. Тонкаль, В.М. Пельх, Б.С. Стогний. – К.: Наук. думка, 1979. – 445 с.
12. Петренко В. Типова незвичайність: Партії вірні бійці / В. Петренко // Прапор комунізму. – 1980. – 23 бер.
13. Тонкаль В.Ю. Академія наук Української РСР / В.Ю. Тонкаль, В.М. Пельх, Б.С. Стогний. – К.: Наук. думка, 1980. – 433 с.
14. Бридун Л. Мовою математики: Виробництву і науковому потенціалу – найвищу віддачу / Л. Бридун // Вечір. Харків. – 1981. – 21 жовт.

15. Гущина Ю. Эти универсальные функции: В лаборатории ученых / Ю. Гущина // Красное знамя. – 1981. – 21 февр.
16. Підгорний А.М. Вагомий вклад у розвиток прикладної математики / А.М. Підгорний // Вісн. АН УРСР. – 1981. – № 5. – С. 90–92.
17. Створюють програмуєчі системи // Соц. Харківщина. – 1981. – 19 квіт. – портр.
18. Маквецов Е.Н. Дискретные модели приборов: Б-ка приборостроения / Е.Н. Маквецов, А.М. Тартаковский // Машиностроение, 1982. – 137 с. (О математическом методе, предложенном В.Л. Рвачевым, с. 130, 135).
19. Тонкаль В.Е. Академия наук Украинской ССР / В.Е. Тонкаль, В.М. Пельх, Б.С. Стогний // Наук. думка, 1983. – 348 с. (О В.Л. Рвачеве, с. 170).
20. Академия наук Украинской ССР. – К.: Наук. думка, 1982. – 349 с.
21. Боголюбов А.Н. Математики, механики: Биограф. справ. / А.Н. Боголюбов. – К.: Наук. думка, 1983. – 638 с. (Краткие биографические данные, перечень научных направлений, которым посвящены работы В.Л. Рвачева, с.405–406).
22. Рвачев Владимир Логвинович // Укр. сов. энцикл. – 1983. – Т. 9. – С. 200: портр. (То же укр. – 2-е изд. – С. 295: портр.).
23. Лемешев К. Збурювачі спокою: Розповіді про вчених / К. Лемешев // Вечір. Харків. – 1984. – 15 жовт.
24. Тонкаль В.Е. Академия наук Украинской ССР / В.Е. Тонкаль, В.М. Пельх, Б.С. Стогний. – К.: Наук. думка, 1986. – 384 с. (О В.Л. Рвачеве, с. 190).
25. Академия наук Украинской ССР, 1985 / Редкол.: Б.Е. Патон (отв. ред.) и др. – К.: Наук. думка, 1986. – 383 с. (О В.Л. Рвачеве, с. 190, 361).
26. Высокая награда // Известия. – 1986. – 21 окт.
27. 60-річчя академіка АН УРСР В.Л. Рвачова // Вісн. АН УРСР. – 1986. – № 10. – С. 101: портр.
28. Бородин А.И. Рвачев Владимир Логвинович Выдающиеся математики: Биограф. слов.-справ. / А.И. Бородин, А.С. Бугай // Рад. шк., 1987. – 438 с.
29. Рвачов Володимир Логвинович // Укр. рад. енцикл. словн. – 1987. – Т. 3. – С. 75: портр.
30. Харьковский политехнический: Ученые и педагоги / Ю. Т. Костенко, В. В. Морозов, В. И. Николаенко и др. – Х.: Прапор, 1999. – 352 с.
31. Бушин М. І. Рвачов Володимир Логвинович / М. І. Бушин // Бушин М. І., Лазуренко В. М. Черкаський край в особах. 1941-2001: Чигиринщина. – Черкаси. ЦНТЕІ, 2003. – С. 167–171.
32. Морачковский О. К. Инфиз: очерки истории творчества / О. К. Морачковский. – Х.: Энерго Клуб Украины, 2005. – 372 с.
33. Владимир Логвинович Рвачев / Ред. Ю. М. Мацевитого. – Х.: Ин-т пробл. машиностроения, 2006. – 68 с. – (Биобиблиография ученых Украины).
34. Академік національної академії наук України Володимир Логвинович Рвачов (до 80-річчя з дня народження). // Машинознавство, 2006. – № 9-10 (111-112), С. 55.
35. Владимир Логвинович Рвачев. Се человек. Много званых – Мало избранных / Ред. Л. В. Курпы. – Х.: Новое слово, 2006. – 80 с.
36. Кафедра прикладной математики НТУ «ХПИ». К 75-летию со дня рождения В. Л. Рвачева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://users.kpi.kharkov.ua/apm/all/rva75ru.htm>.
37. Курпа Л. Талантливо, ново и современно. Памяти академика В. Л. Рвачева / Л. Курпа // Політехнік. – 2006. – 25 квіт.
38. Курпа Л. Ученый, Учитель, Человек / Л. Курпа // Політехнік. – 2006. – 23 жовт.
39. Кравченко В. Памяти Владимира Логвиновича Рвачева (1926-2005) / В. Кравченко // Успехи современной радиоэлектроники, 2006. – № 8.
40. Кравченко В. Владимир Логвинович Рвачев (К 85-летию со дня рождения) / В. Кравченко // Электромагнитные волны и электронные системы, 2011. – № 9. – С. 4-6.
41. Онуфрієнко О. Г. Наукова спадщина українського математика Володимира Рвачова / О. Г. Онуфрієнко // Збірник наукових праць: Педагогічні науки / М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Бердянськ: БДПУ, 2011. – № 3. – С. 202–207.
42. Сукач Г. Когда нужна книга оказывается в нужное время в нужном месте / Г. Сукач // Город. – 2011. – 13 янв. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://gorod-online.net/nuwspoln.php?nuws=204&number=192>.
43. Гутник М. Місце української технічної еліти у поступі світової науки (на прикладі наукового доробку В. Рвачова) / М. Гутник // Українознавчий альманах, 2013. – вип. 14 – С. 184–186. – Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка.
44. Баранов М. Антология выдающихся достижений в науке и технике. Часть 30: Портрет харьковского математика, механика и кибернетика Владимира Логвиновича Рвачева. / М. Баранов // Электротехника и электромеханика, 2016. – № 1.

**Bibliography (transliterated):** 1. Rvachov Volodymyr Lohvynovych. Ucheni vuziv URSR. Kyiv: Vyd-vo Kyiv. un-tu, 1968. 361 p. 2. Matvijchuk O. Lancyuhova reakciya dobra. Ukrayina. 1970. 15 April. 3. Yepishov V., Rakov A., Lytvyn O. Shkola professora. Rad. osvita. 1970. 18 July. 4. Lemeshev K. Oderzhimost': Rasskazy ob uchenyh. Krasnoe znamya. 1976. 10 November. 5. Pidhornyj A.M. Rvachov Volodymyr Lohvynovych. Visn. AN URSR. 1976, No 7, p. 85-86. 6. Razvitie teorii kontaknyh zadach v SSSR. Pod red. L.A. Galina. Moscow: Nauka. 1976, 493 p. (o V.L. Rvacheve. pp. 205, 273, 291, 300, 340). 7. Borodin A.I., Bugaj A.S. Rvachev Vladimir Logvinovich. Biograficheskij slovar' deyatelej v oblasti matematiki. Kyiv: Rad. shk., 1976, 442 p. 8. Borodin A.I., Bugaj A.S. Rvachev Vladimir Logvinovich. Biograficheskij slovar' deyatelej v oblasti matematiki. Kyiv: Rad. shk.,

1979, 422 p. 9. Rvachev Vladimir Logvinovich. Istoriya Akademii nauk Ukrainkoj SSR. Kyiv: Nauk. dumka, 1979, 281 p. 10. Rvachov Volodimir Logvinovich. Akademiya nauk Ukrayins'koyi RSR: Person. sklad. Kyiv: Nauk. dumka, 1979, 87 p. 11. Tonkal' V.E., Pelyh V.M., Stognij B.S. Akademiya nauk Ukrainkoj SSR. Kyiv: Nauk. dumka, 1979, 445 p. 12. Petrenko V. Typova nezvyčajnist': Partiyi vimi bijci. Prapor komunizmu, 1980, 23 March. 13. Tonkal' V.Yu., Pelykh V.M., Stohnij B.S. Akademiya nauk Ukrayins'koyi RSR. Kyiv: Nauk. dumka, 1980, 433 p. 14. Brydun L. Movoyu matematyky: Vyrobnictvu i naukovomu potencialu – najvyshchu viddachu. Vechir. Kharkiv. 1981, 21 October. 15. Guschina Yu. Eti universal'nye funkci: V laboratorii uchenyh. Krasnoe znamya. 1981. 21 February. 16. Pidhornyj A.M. Vahomyj vklad u rozvytok prykladnoyi matematyky. Visn. AN URSR. 1981, No 5, p. 90–

92. 17. Stvoryuyut' prohramuyuchi systemy. Soc. Kharkivshchyna. 1981, 19 April. portr. 18. Makvecov E.N., Tartakovskij A.M. Diskretnye modeli priborov: B-ka priborostroeniya. Mashinostroenie, 1982, 137 p. (O matematicheskom metode, predlozhenom V.L. Rvachevym, s. 130, 135). 19. Tonkal' V.E., Pelyh V.M., Stognij B.S. Akademiya nauk Ukrainskoj SSR. Nauk. dumka, 1983, 348 p. (O V.L. Rvacheve, p. 170). 20. Akademiya nauk Ukrainskoj SSR. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 349 p. 21. Bogolyubov A.N. Matematiki, mehaniki: Biogr. sprav. Kyiv: Nauk. dumka, 1983, 638 p. (Kratkie biograficheskie dannye, perechen' nauchnyh napravlenij, kotorym posvyaschenu raboty V.L. Rvacheva, p. 405–406). 22. Rvachev Vladimir Logvinovich. Ukr. sov. encikl. 1983, vol. 9, p. 200: portr. (To zhe ukr. 2-e izd. p. 295: portr.) 23. Lemeshev K. Zboryuvachi spokoju: Rozpovidi pro vchenykh. Vechir. Kharkiv. 1984, 15 October. 24. Tonkal' V.E., Pelyh V.M., Stognij B.S. Akademiya nauk Ukrainskoj SSR. Kyiv: Nauk. dumka, 1986, 384 p. (O V.L. Rvacheve, p. 190). 25. Akademiya nauk Ukrainskoj SSR, 1985. Redkol.: B.E. Paton (otv. red.) i dr. Kyiv: Nauk. dumka, 1986, 383 p. (O V.L. Rvacheve, p. 190, 361). 26. Vysokaya nagrada. Izvestiya. 1986. 21 October. 27. 60-richchya akademika AN URSS V.L. Rvachova. Visn. AN URSS. 1986, No 10, p. 101: portr. 28. Borodin A.I., Bugaj A.S. Rvachev Vladimir Logvinovich Vydayuschiesya matematiki: Biogr. slov.-sprav. Rad. shk., 1987, 438 p. 29. Rvachov Volodymyr Lohvynovych. Ukr. rad. encykl. slovn. 1987, vol. 3, p. 75: portr. 30. Har'kovskij politehnicheskij: Uchenye i pedagogi. Yu. T. Kostenko, V. V. Morozov, V. I. Nikolaenko i dr. Kharkiv: Prapor, 1999, 352 p. 31. Bushyn M. I. Rvachov Volodymyr Lohvynovych. Bushyn M. I., Lazurenko V. M. Cherkas'kyj kraj v osobakh. 1941-2001: Chyhyrynshchyna. Cherkasy. CNTEL, 2003. p. 167–171. 32. Morachkovskij O. K. Infiz: ocherki istorii tvorchestva. Kharkiv: Energo Klub Ukrainy, 2005, 372 p. 33. Vladimir Logvinovich Rvachev. Red. Yu. M.

Macevitogo. Kharkiv: In-t probl. mashinostroeniya, 2006, 68 p. (Bibliografiya uchenyh Ukrainy). 34. Akademik nacional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny Volodymyr Lohvynovych Rvachov (do 80-richchya z dnya narodzhennya). Mashynoznavstvo, 2006, No 9-10 (111-112), p. 55. 35. Vladimir Logvinovich Rvachev. Se chelovek. Mnogo zvanyh – Malo izbrannyh. Red. L. V. Kurpy. Kharkiv: Novoe slovo, 2006, 80 p. 36. Kafedra prikladnoj matematiki NTU "HPI". K 75-letiyu so dnya rozhdeniya V. L. Rvacheva [Elektronnij resurs]. Rezhim dostupu: <http://users.kpi.kharkov.ua/apm/all/rva75ru.htm>. 37. Kurpa L. Talantlivo, novo i srovenno. Pamyati akademika V. L. Rvacheva. Politehnik, 2006, 25 April. 38. Kurpa L. Uchenyj, Uchitel', Chelovek. Politehnik. 2006, 23 October. 39. Kravchenko V. Pamyati Vladimira Logvinovicha Rvacheva (1926-2005). Uspehi sovremennoj radioelektroniki, 2006, No 8. 40. Kravchenko V. Vladimir Logvinovich Rvachev (K 85-letiyu so dnya rozhdeniya). Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy, 2011, No 9. p. 4-6. 41. Onufriyenko O. H. Naukova spadshchyna ukrayins'koho matematyka Volodymyra Rvachova. Zbirnyk naukovykh prac': Pedagogichni nauky. M-vo osvity i nauky Ukrayiny, Berdyan. derzh. ped. un-t. Berdyans'k: BDP, 2011, No 3, p. 202–207. 42. Sukach G. Kogda nuzhnaya kniga okazyvaetsya v nuzhnoe vremya v nuzhnom meste. Gorod. 2011, 13 January. [Elektronnij resurs]. Rezhim dostupu: <http://gorod-online.net/nuwspoln.php?nuws=204&number=192>. 43. Hutnyk M. Misce ukrayins'koyi tekhnichnoyi elity u postupi svitovoyi nauky (na prykladi naukovoho dorobku V. Rvachova). Ukrayinoznavchij al'manakh, 2013. vol. 14. p. 184–186. Kyivskiy nac. un-t im. T. Shevchenka. 44. Baranov M. Antologiya vydayuschiesya dostizhenij v nauke i tehnikе. Chast' 30: Portret har'kovskogo matematika, mehanika i kibernetika Vladimira Logvinovicha Rvacheva. Elektrotehnika i elektromehhanika, 2016, No 1.

### Основные публикации Рвачева В.Л.:

#### Монографії

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачев. – К.: Техніка, 1967. – 212 с. – Библиогр.: С. 207–209.
2. Литвин О.М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О.М.Литвин, В.Л.Рвачов. – К.: Nauk. dumka, 1973. – 123 с. – Библиогр.: С. 112–122.
3. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы / В.Л.Рвачев, Л.В.Курпа, Н.Г.Склепус, Л.А.Учишвили. – К.: Nauk. dumka, 1973. – 121 с. – Библиогр.: С. 120.
4. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике / В.Л. Рвачев. – К.: Nauk. dumka, 1974. – 259 с. – Библиогр.: С. 251–257.
5. Рвачев В.Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В.Л.Рвачев, А.П.Слесаренко. – К.: Nauk. dumka, 1976. – 287 с. – Библиогр.: С. 279–285.
6. Рвачев В.Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В.Л.Рвачев, В.С.Проценко. – К.: Nauk. dumka, 1977. – 235 с. – Библиогр.: С. 227–232.
7. Рвачев В.Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В.Л.Рвачев, А.П.Слесаренко. – К.: Nauk. dumka, 1978. – 140 с.
8. Рвачев В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л.Рвачев, В.А.Рвачев. – К.: Nauk. dumka, 1979. – 196 с. – Библиогр.: С. 189–192.
9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Nauk. dumka, 1982. – 552 с. – Библиогр.: С. 535–543.
10. Рвачев В.Л. Автоматизация программирования в краевых задачах / В.Л.Рвачев, Г.П.Манько. – К.: Nauk. dumka, 1983. – 230 с. – Библиогр.: С. 223–227.
11. Рвачев В.Л. R-функции в задачах теории пластин / В.Л.Рвачев, Л.В.Курпа. – К.: Nauk. dumka, 1987. – 175 с. – Библиогр.: с. 171–175.
12. Рвачев В.Л. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов / В.Л.Рвачев, А.Н.Шевченко. – К.: Техніка, 1988. – 198 с.
13. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон. – К.: Nauk. dumka, 1990. – 216 с.
14. Кравченко В.Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев. – М.: Физматлит, 2006. – 520 с.
15. Рвачев В.Л. Элементы дискретного анализа и теории R-функций: Учеб. пособие / В.Л. Рвачев. – Х.: Изд-во Харьк. политехн. ин-та, 1972. – 169 с.
16. Рвачев В.Л. Кручение стержней сложного профиля: Учеб. пособие / В.Л.Рвачев, И.В.Гончарюк. – Харьков: Изд-во

Харьк. политехн. ин-та, 1973. – 104 с.

*Основные статьи Рвачева В.Л.*

17. Савін Г.М. Про порушення сумісності деформацій в контактних задачах теорії пружності / Г.М.Савін, В.Л.Рвачов // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 3. – С. 354–357.
18. Рвачев В.Л. О классе функций, удобных для аналитического описания геометрических образов / В.Л.Рвачев, Е.Л.Ющенко // Кибернетика и техника вычислений. – Киев: Наук. думка, 1964. – С. 18–31.
19. Рвачев В.Л. О применении метода Бубнова-Галеркина к решению краевых задач для областей сложной формы / В.Л.Рвачев, Л.И.Шкляр // Дифференц. уравнения. – 1965. – 1, № 11. – С. 1537–1543.
20. Волков А.П. О решении одной краевой задачи методом R-функций / А.П.Волков, В.Ф.Кравченко, Г.П.Манько, В.Л.Рвачев // Дифференц. уравнения. – 1967. – 3, № 9. – С. 1602–1605.
21. Литвин О.М. Про одну квадратурну формулу / О.М.Литвин, В.Л.Рвачов // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 11. – С. 1016–1018.
22. Рвачев В.Л. Об одном методе решения задачи изгиба пластинки, защемленной по контуру / В.Л.Рвачев, Л.А.Учшвили // Прикл. механика. – 1968. – 4, вып. 4. – С. 123–128.
23. Рвачов В.Л. Розрахунок вільно опертих пластинок методом R-функцій / В.Л.Рвачов, Л.О.Учшвили // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 10. – С. 935–937.
24. Клименко В.Г. О полноте по энергии систем координатных функций, строящихся по методу R-функций / В.Г.Клименко, В.Л.Рвачев // Дифференц. уравнения. – 1969. – 5, № 9. – С. 1724–1726.
25. Рвачов В.Л. Про повноту координатних послідовностей для задачі Неймана, побудованих методом R-функцій / В.Л.Рвачов, А.Й.Стрельченко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 3. – С. 222–225.
26. Рвачов В.Л. Власні коливання пластин складної форми / В.Л.Рвачов, Л.В.Ракова // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 5. – С. 445–458.
27. Рвачев В.Л. К вопросу о построении координатных последовательностей / В.Л. Рвачев // Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, № 6. – С. 1034–1047.
28. Проценко В.С. Об одном подходе к решению смешанной задачи теории упругости / В.С.Проценко, В.Л.Рвачев // Прикл. механика. – 1970. – 6, вып. 9. – С. 90–94.
29. Рвачов В.Л. Про структуру розв'язку контактної задачі з нахиленим штампом / В.Л.Рвачов, В.С.Проценко // Доп. АН УРСР. – 1970. – № 11. – С. 1023–1026.
30. Рвачев В.Л. Расчет собственных форм и частот поперечных колебаний пластинки сложной формы / В.Л.Рвачев, Л.В.Ракова // Прикл. механика. – 1970. – 6, вып. 4. – С. 80–85.
31. Рвачов В.Л. Про застосування методу R-функцій для розв'язування стаціонарних задач теплопровідності та електродинаміки / В.Л.Рвачов, В.К.Ярмолюк // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 11. – С. 1003–1005.
32. Рвачов В.Л. Про застосування методу R-функцій для розв'язання мішаних крайових задач із неоднорідними граничними умовами / В.Л.Рвачов, В.К.Ярмолюк, В.П.Кравченко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 11. – С. 984–987.
33. Рвачев В.Л. О представлении многочленов финитными функциями / В.Л.Рвачев, В.А.Рвачев // Мат. физика. – 1972. – Вып. 11. – С. 126–129.
34. Анікеєнко О.М. Про формулу розкладу в околі кута / О.М.Анікеєнко, О.М.Литвин, В.Л.Рвачов, М.О.Сафоноов // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 2. – С. 99–100.
35. Литвин О.М. Розклад N-реалізованих функцій в околі кусково-гладкої лінії / О.М.Литвин, В.Л.Рвачов // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 5. – С. 423–425.
36. Рвачов В.Л. До побудови структури розв'язку для однієї нелінійної крайової задачі тепловипромінюючого тіла складної форми / В.Л.Рвачов, А.П.Слесаренко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 1. – С. 77–80.
37. Рвачов В.Л. Про наближення функцією  $ur(x)$  / В.Л.Рвачов, В.О.Рвачов // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 6. – С. 507–508.
38. Рвачов В.Л. Про розв'язання стаціонарних нелінійних крайових задач теплопровідності / В.Л.Рвачов, А.П.Слесаренко, М.О.Сафоноов // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 11. – С. 1015–1021.
39. Рвачев В.Л. О применении  $ur(x)$  в методе конечных элементов / В.Л.Рвачев, В.А.Рвачев // Мат. физика. – 1975. – Вып. 17. – С. 170–175.
40. Рвачев В.Л. Некоторые новые конструктивные средства метода R-функций / В.Л.Рвачев, Ф.Ф.Коваль, Г.П.Манько // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 8. – С. 691–694.
41. Рвачев В.Л. О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа / В.Л.Рвачев, О.Н.Бобылева // Укр. мат. журн. – 1978. – 30, № 6. – С. 768–778.
42. Рвачев В.Л. Обобщенная формула Тейлора разностного типа / В.Л.Рвачев, О.Н.Бобылева // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 1. – С. 26–30.
43. Рвачев В.Л. Формулы свертки в методе R-функций и их применение к построению структур решений краевых задач / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекоп // Докл. АН СССР. – 1980. – 225, № 1. – С. 80–83.
44. Калиниченко В.И. Двойственные методы в задачах нестационарной теплопроводности / В.И.Калиниченко, В.Л.Рвачев, А.И.Ропавка. – Х.: 1981. – 20 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 172).
45. Рвачев В.Л. О построении нормализованных уравнений геометрических объектов трансляционного типа / В.Л.Рвачев, М.В.Бойко // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1981. – № 2. – С. 32–35.
46. Рвачев В.Л. Построение структурных формул, симметричных и антисимметричных относительно пространственных групп преобразований / В.Л.Рвачев, М.В.Бойко // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1981. – № 7. – С. 16–19.
47. Рвачев В.Л. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для ортотропного тела методом R-функций / В.Л.Рвачев, Н.И.Синекоп // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1981. – № 10. – С. 61–64.
48. Рвачев В.Л. Структуры решений некоторых задач теории упругости для правильного n-угольника, нагруженного сосредоточенными силами / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекоп, Л.С.Эриванцева // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1982. – № 9. – С. 33–36.
49. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах теории малых упругопластических деформаций / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекоп, Л.К.Кравченко // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1983. – № 1. – С. 49–53.

50. Рвачев В.Л. Структуры решений задач теории пластин со смешанными граничными условиями / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 9. – С. 34–37.
51. Рвачев В.Л. Структуры решений задачи о колебаниях в аксиально-симметричных резонаторах / В.Л.Рвачев, В.В.Веретельник // Докл. АН СССР. – 1983. – 273, № 5. – С. 1109–1111.
52. Рвачев В.Л. Исследования упругопластического напряженного состояния тел вращения конечной длины / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, Л.К.Кравченко // Проблемы прочности. – 1984. – № 5. – С. 94–97.
53. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах о нестационарных колебаниях пластин / В.Л.Рвачев, Л.В. Курна, А.Н.Шевченко // Пробл. прочности. – 1984. – № 6. – С. 22–25.
54. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах расчета полей для тел, физические характеристики которых имеют разрывы первого рода / В.Л.Рвачев, Т.И.Шейко // Прикл. математика и механика. – 1984. – 48, вып. 5. – С. 873–877.
55. Рвачев В.Л. Плоская задача теории упругости для ортотропного тела конечных размеров / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, Н.И.Синекон // Прикл. механика. – 1984. – 20, вып. 4. – С. 40–49.
56. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах об изгибе анизотропных пластин / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна // Докл. АН СССР. – 1985. – 280, № 2. – С. 314–317.
57. Рвачев В.Л. Структура решения для задач теории пластин со смешанными условиями закрепления / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна, Е.А.Федотова // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 21. – С. 57–62.
58. Rvachev V.L. The R-functions approach and software for the analysis of physical and mechanical fields / V.L.Rvachev, G.P.Manko, A.N.Shevchenko // Software for discrete manufacturing. – Paris, 1985. – P. 197–213.
59. Рвачев В.Л. Осесимметричная задача теории упругости для неоднородного цилиндра / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, Л.К.Кравченко // Прикл. механика. – 1986. – 22, вып. 1. – С. 18–23.
60. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах нелинейного деформирования пластин / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна, Х.Ф.Насриддинов // Прикл. механика. – 1987. – 23, вып. 9. – С. 73–78.
61. Рвачев В.Л. Расчет неоднородного цилиндра с жестким включением / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, Л.К.Кравченко // Математические методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 72–78.
62. Рвачев В.Л. Расчет упругих пластин при комбинированном нагружении / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна, А.Н.Шевченко // Прикл. механика. – 1987. – 23, вып. 3. – С. 57–61.
63. Рвачев В.Л. Решение задач устойчивости пластин методом R-функций / В.Л.Рвачев, Л.В.Курна // Проблемы прочности. – 1987. – № 6. – С. 100–103.
64. Рвачев В.Л. Метод R-функций в динамических задачах теории упругости / В.Л.Рвачев, Л.С.Лобанова, Н.С.Синекон // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1988. – № 5. – С. 35–38.
65. Рвачев В.Л. Релятивистский взгляд на развитие конструктивных средств математики / В.Л. Рвачев. – Х.: 1990. – 47 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 337).
66. Афанасьев В.А. Восстановление изображений с помощью деконвекционных окон, построенных на основе атомарных функций / В.А.Афанасьев, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев, В.Л.Рвачев // Докл. АН СССР. – 1991. – 321, № 5. – С. 938–941.
67. Рвачев В.Л. Метод R-функций в контактных задачах термоупругости для тел конечных размеров / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, И.П.Молотков // Докл. АН СССР. – 1991. – 321, № 4. – С. 721–725.
68. Рвачев В.Л. Неархимедова арифметика и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности // Докл. АН СССР. – 1991. – 316, № 4. – С. 884–889.
69. Рвачев В.Л. Об одном методе вычислений преобразований Фурье и Хартли в конечной цифровой вычислительной системе / В.Л.Рвачев, А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев // Докл. АН СССР. – 1991. – 320, № 2. – С. 577–580.
70. Рвачев В.Л. Об одном теоретико-числовом методе БПФ в кольце Ферма / В.Л.Рвачев, А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев // Докл. АН СССР. – 1991. – 320, № 2. – С. 303–306.
71. Горшков А.С. Применение атомарных функций для цифровых фильтров / А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев, В.Л.Рвачев // Докл. АН СССР. – 1991. – 321, № 4. – С. 697–700.
72. Горшков А.С. Применение атомарных функций для синтеза цифрового дифференциатора / А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев, В.Л.Рвачев // Докл. АН СССР. – 1991. – 319, № 2. – С. 347–351.
73. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе «Поле-3» / В.Л.Рвачев, И.Г.Суворова, Т.И.Шейко // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – № 33. – С. 95–99.
74. Рвачев В.Л. Релятивистское и другие неархимедовы исчисления. – Харьков, 1992. – 47 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; № 356).
75. Rvachev V.L. Intelligent software tools for the simulation of physico-mechanical fields / V.L.Rvachev, A.N.Shevchenko // Pattern and Image Analysis. – 1992. – 2, № 2. – P. 45–49.
76. Рвачев В.Л. Неархимедова геометрия и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности / В.Л. Рвачев // Вычисл. технологии: Тр. шк.-семинара по комплексам программ мат. физики, Ростов н.-Д. 1990 г. – Новосибирск: Ин-т вычисл. технологий СО АН России, 1992. – 1, № 2. – Ч. 2. – С. 273–281.
77. Кравченко В.Ф. Об одном методе расчета преобразования электромагнитных волн в тепловые поля на примере прямоугольного волновода / В.Ф.Кравченко, Н.И.Кравченко, В.Л.Рвачев // Докл. АН России. – 1992. – 326, № 1. – С. 63–67.
78. Афанасьев В.А. Оптимальные финитные окна для восстановления изображений / В.А.Афанасьев, В.Ф.Кравченко, В.А.Рвачев, В.Л.Рвачев // Докл. АН России. – 1992. – 322, № 3. – С. 498–500.
79. Рвачев В.Л. Релятивистский анализ и его применение к решению некоторых нелинейных задач // Докл. АН России. – 1992. – 326, № 4. – С. 637–641.
80. Рвачев В.Л. Структура решения контактных задач термоупругости / В.Л.Рвачев, Н.С.Синекон, И.П.Молотков // Докл. АН Украины. Сер.А. – 1992. – № 6. – С. 25–29.
81. Кравченко Н.И. Об одном методе расчета колебаний в электрических модуляторах на примере полукоаксиального резонатора с одноосным кристаллом / Н.И.Кравченко, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев // Докл. АН России. – 1993. – № 1. – С. 36–39.
82. Rvachev V.L. The red displacement of the spectrums of the immovable for cosmos objects (result of the non-Archimedean calculus) / V.L. Rvachev // Prepr. / Ukr. Nat. Acad. of Sci., Ins. for Problems in Machinery; № 337. – Kharkiv, 1994. – 20 p.
83. Горшков А.С. Атомарные экспоненциальные функции / А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев // Докл. АН Рос-

сии. – 1994. – **336**, № 3. – С. 309–311.

**84.** Горшков А.С. Атомарные гармонические функции и обобщенный алгоритм БПФ / А.С.Горшков, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев // Докл. АН России. – 1994. – **336**, № 4. – С. 462–465.

**85.** Гуляев Ю.В. Исследование дифракции упругих волн на конусе / Ю.В.Гуляев, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. АН России. – 1995. – **343**, № 3. – С. 315–318.

**86.** Рвачев В.Л. Исчисления с наибольшим числом / В.Л.Рвачев, А.Н.Шевченко, Т.И.Шейко // Кибернетика и систем. анализ. – 1995. – № 3. – С. 71–86.

**87.** Гуляев Ю.В. Метод R-функций в исследовании дифракции упругих волн на жестком включении произвольной формы / Ю.В.Гуляев, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. АН России. – 1995. – **344**, № 4. – С. 457–459.

**88.** Рвачев В.Л. От специальной теории относительности к математике без аксиомы Архимеда и обратно / В.Л.Рвачев // Радиотехника. – 1995. – № 2,6 (Электромагнитные волны № 1, 2). – С. 58–70.

**89.** Rvachev V.L. R-functions in boundary value problems in mechanics / V.L.Rvachev, T.I.Sheiko // Appl. Mech. Rev. – 1995. – **48**, № 4. – P. 151–188.

**90.** Rvachev V.L. The variational-structural method for problems of an elasto-plastic bending of arbitrary-shape plates / V.L.Rvachev, L.V.Kurpa, A.V.Arkipov // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – P. 60–62.

**91.** Rvachev V.L. The variational-structural method for problems of bending flexible shallow shells with a complex boundary of the domain / V.L.Rvachev, L.V.Kurpa, A.Y.Bolotina // Доп. НАН України. – 1995. – № 6. – P. 63–65.

**92.** Рвачев В.Л. Комбинируемые неархимедовы Исчисления и взгляд на теоретическую физику с их позиции / В.Л.Рвачев, С.Ю.Еременко. – Х.: 1996. – 38 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; № 393).

**93.** Гуляев Ю.В. Апостериорные оценки погрешности структурных решений пространственных задач математической физики / Ю.В.Гуляев, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. АН России. – 1996. – **346**, № 4. – С. 445–458.

**94.** Гуляев Ю.В. Дифференциально-разностный метод и теория R-функций в пространственных задачах математической физики / Ю.В.Гуляев, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. АН России. – 1996. – **347**, № 5. – С. 618–621.

**95.** Рвачев В.Л. Исследование термонапряженного состояния лопатки авиационных двигателей / В.Л.Рвачев, А.Н.Шевченко, Н.Д.Сизова // Прикл. механика. – 1996. – **32**, вып. 4. – С. 32–36.

**96.** Веретельник В.В. R-функции в задачах моделирования процесса затвердевания металла в формах сложной геометрии / В.В.Веретельник, В.Л.Рвачев, А.Н.Шевченко и др. // Зарубеж. радиоэлектроника. – 1996. – № 8. – С. 38–49.

**97.** Рвачов В.Л. Розрахунок багатощарових пологих оболонок структурним методом / В.Л.Рвачов, С.М.Скелус, О.М.Скелус // Доп. НАН України. – 1996. – № 4. – С. 53–56.

**98.** Rvachev V.L. Implicit function modeling of solidification in metal castings / V.L.Rvachev, T.I.Sheiko, V.Shapiro, J.J.Uiker // Trans. ASME. – 1997. – **119**. – P. 466–473.

**99.** Рвачев В.Л. Математическое моделирование температурных полей при затвердевании металла в формах сложного профиля / В.Л.Рвачев, А.Н.Шевченко, Т.И.Шейко и др. // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 1. – С. 59–65.

**100.** Еременко С.Ю. Комбинируемые неархимедовы Исчисления и новые модели релятивистской механики / С.Ю.Еременко, В.Ф.Кравченко, В.Л.Рвачев // Зарубеж. радиоэлектроника. – 1997. – № 9. – С. 26–38.

**101.** Рвачев В.Л. Исчисление для Вселенной (диалог академика с лицеистом) / В.Рвачев // Зарубеж. радиоэлектроника. – 1998. – № 3. – С. 66–77.

**102.** Рвачев В.Л. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией / В.Л.Рвачев, Т.И.Шейко, В.Шати́ро // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 146–159.

**103.** Рвачов В.Л. Метод R-функцій в динамічних задачах термопружності для тіл скінченних розмірів / В.Л.Рвачов, Л.С.Лобанова, М.С.Синекон // Доп. НАН України. – 1999. – № 5. – С. 64–68.

**104.** Рвачев В.Л. Применение метода R-функций к построению уравнений локусов, обладающих симметрией / В.Л.Рвачев, В.Шати́ро, Т.И.Шейко // Электромагнит. волны и электрон. системы. – 1999. – **4**, № 4. – С. 4–20.

**105.** Rvachev V.L. Non-archimedean algebra: applications to cosmology and gravitation / V.L.Rvachev, K.Avinash // Foundations of Physics. – 2000. – **30**, № 1. – P. 140–152.

**106.** Rvachev V.L. On completeness of RFM solution structures / V.L.Rvachev, T.I.Sheiko, V.Shapiro, I.Tsukanov // Computational Mechanics. – 2000. – **25**. – P. 305–316.

**107.** Кравченко В.Ф. Применение теории R-функций к задачам дифракции термоупругих волн на объектах сложной формы / В.Ф.Кравченко, В.И.Пустовойт, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. РАН. – 2000. – **372**, № 4. – С. 487–489.

**108.** Рвачов В. Власні коливання пологих оболонок складної у плані форми / В.Рвачов, Л.Курпа, О.Шматко // Машинознавство. – 2000. – № 2. – С. 3–6.

**109.** Кравченко В.Ф. Метод R-функций в задачах моделирования тепловых процессов излучающих тел сложной формы / В.Ф.Кравченко, В.И.Пустовойт, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. РАН. – 2001. – **376**, № 2. – С. 186–190.

**110.** Кравченко В.Ф. Теория R-функций в нестационарных задачах дифракции упругих волн / В.Ф.Кравченко, В.И.Пустовойт, В.Л.Рвачев, Н.Д.Сизова // Докл. РАН. – 2001. – **376**, № 3. – С. 338–342.

**111.** Рвачев В.Л. Построение уравнений локусов в 3D с помощью R-функций / В.Л.Рвачев, Р.А.Уваров, Т.И.Шейко // Радиотехника и информатика. – 2001. – № 2. – С. 158–164.

**112.** Рвачев В.Л. Краевые задачи для областей с граничными условиями на внутренней дуге кривой / В.Л.Рвачев, Е.О.Михаль // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 47–51.

**113.** Рвачев В.Л. Полнота структурных решений в краевых задачах для областей специального вида / В.Л.Рвачев, Е.О.Михаль // Кибернетика и систем. анализ. – 2001. – № 4. – С. 107–118.

**114.** Рвачев В.Л. Собственные колебания пологих оболочек сложной формы в плане при наличии разрезов (трещин) на их поверхности / В.Л.Рвачев, Л.В.Курпа, А.В.Шматко // Доп. НАН України. – 2001. – № 2. – С. 65–72.

**115.** Золочевский А.А. Вариационно-структурный метод в задачах ползучести / А.А.Золочевский, В.Л.Рвачев, С.Н.Скелус // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 135–138.

**116.** Михаль Е.О. Физические поля с геометрическими сингулярностями / Е.О.Михаль, В.Л.Рвачев, И.Г.Цуканов, В.Шати́ро, Т.И.Шейко // Радиотехника и информатика. – 2002. – № 3. – С. 22–28.

**117.** Рвачев В.Л. Полные структуры решений для областей усложненной геометрии / В.Л.Рвачев, Е.О.Михаль // Доп.

НАН України. – 2002. – № 2. – С. 28–33.

**118.** Максименко-Шейко К.В. Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам / К.В.Максименко-Шейко, В.Л.Рвачев // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2003. – 46, № 2. – С. 81–88.

**119.** Kurpa L. The R-function method for the free vibration analysis of thin orthotropic plates of arbitrary shape / L.Kurpa, V.Rvachev, E.Ventsel // J. Sound and Vibration. – 2003. – № 26. – P. 109–122.

**120.** Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах исследования волноводов с геометрическими сингулярностями / В.Л.Рвачев, Ю.С.Семерич, Т.И.Шейко // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 73–79.

**121.** Рвачев В.Л. Эйнштейновская революция в точных науках и неархимедовы исчисления / В.Л.Рвачев, В.К.Сорокин // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 27–29.

**Bibliography (transliterated):** 1. Rvachev V.L. Geometricheskie prilozheniya algebrы logiki. Kyiv: Tehnika, 1967. 212 p. Bibliogr.: pp. 207–209. 2. Lytvyn O.M., Rvachov V.L. Klyaschna formula Tejlora, yiyi uzahal'nennya ta zastosuvannya. Kyiv: Nauk. dumka, 1973, 123 p. Bibliogr.: pp. 112–122. 3. Rvachev V.L., Kurpa L.V., Sklepus N.G., Uchishvili L.A. Metod R-funkcij v zadachah ob izgibe i kolebaniyah plastin slozhnoj formy. Kyiv: Nauk. dumka, 1973, 121 p. Bibliogr.: p. 120. 4. Rvachev V.L. Metody algebrы logiki v matematicheskoy fizike. Kyiv: Nauk. dumka, 1974, 259 p. Bibliogr.: pp. 251–257. 5. Rvachev V.L., Slesarenko A.P. Algebra logiki i integralnye preobrazovaniya v kraevykh zadachah. Kyiv: Nauk. dumka, 1976, 287 p. Bibliogr.: pp. 279–285. 6. Rvachev V.L., Procenko V.S. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej. Kyiv: Nauk. dumka, 1977, 235 p. Bibliogr.: pp. 227–232. 7. Rvachev V.L., Slesarenko A.P. Algebro-logicheskie i proekcionnye metody v zadachah teploobmena. Kyiv: Nauk. dumka, 1978, 140 p. 8. Rvachev V.L., Rvachev V.A. Neklassicheskie metody teorii priblizhenij v kraevykh zadachah. Kyiv: Nauk. dumka, 1979, 196 p. Bibliogr.: pp. 189–192. 9. Rvachev V.L. Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 552 p. Bibliogr.: pp. 535–543. 10. Rvachev V.L., Man'ko G.P. Avtomatizatsiya programmirovaniya v kraevykh zadachah. Kyiv: Nauk. dumka, 1983, 230 p. Bibliogr.: pp. 223–227. 11. Rvachev V.L., Kurpa L.V. R-funkcii v zadachah teorii plastin. Kyiv: Nauk. dumka, 1987, 175 p. Bibliogr.: pp. 171–175. 12. Rvachev V.L., Shevchenko A.N. Problemno-orientirovannye yazyki i sistemy dlya inzhenernykh raschetov. Kyiv: Tehnika, 1988, 198 p. 13. Rvachev V.L., Sinekop N.S. Metod R-funkcij v zadachah teorii uprugosti i plastichnosti. Kyiv: Nauk. dumka, 1990, 216 p. 14. Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Algebra logiki, atomarnye funkcii i vevlyety v fizicheskikh prilozheniyah. Moscow: Fizmatlit, 2006, 520 p. 15. Rvachev V.L. Elementy diskretnogo analiza i teorii R-funkcij: Ucheb. posobie. Kharkiv: Izd-vo Khar'k. politehn. in-ta, 1972, 169 p. 16. Rvachev V.L., Goncharyuk I.V. Kruchenie sterzhnej slozhnogo profilya: Ucheb. posobie. Kharkiv: Izd-vo Khar'k. politehn. in-ta, 1973, 104 p. 17. Savin H.M., Rvachov V.L. Pro porushennya sumisnosti deformatsii v kontaktnykh zadachakh teoriiy pruzhnosti. Dop. AN URSSR. 1963, No 3, pp. 354–357. 18. Rvachev V.L., Yuschenko E.L. O klasse funkcij, udobnykh dlya analiticheskogo opisaniya geometricheskikh obrazov. Kibernetika i tehnika vychislenij. Kyiv: Nauk. dumka, 1964, pp. 18–31. 19. Rvachev V.L., Shklyarov L.I. O primenenii metoda Bubnova-Galerkina k resheniyu kraevykh zadach dlya oblastej slozhnoj formy. Differenc. uravneniya, 1965, No 1, No 11, pp. 1537–1543. 20. Volkov A.P., Kravchenko V.F., Man'ko G.P., Rvachev V.L. O reshenii odnoj kraevoy zadachi metodom R-funkcij. Differenc. uravneniya, 1967, No 3, No 9, pp. 1602–1605. 21. Lytvyn O.M., Rvachov V.L. Pro odnu kvadraturnu formulu. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1967, No 11, pp. 1016–1018. 22. Rvachev V.L., Uchishvili L.A. Ob odnom metode resheniya zadachi izgiba plastinki, zaschemlennoj po konturu. Prikl. mehanika, 1968, No 4, vol. 4, pp. 123–128. 23. Rvachov V.L., Uchishvili L.O. Rozrakhunok vil'no opertykh plastynok metodom R-funkcij. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1968, No 10, pp. 935–937. 24. Klimenko V.G., Rvachev V.L. O polnote po energii sistem koordinatnykh funkcij, stroyaschihsya po metodu R-funkcij. Differenc. uravneniya, 1969, No 5, No 9, pp. 1724–1726. 25. Rvachov V.L., Strel'chenko A.J. Pro povnotu koordinatnykh poslidovnostej dlya zadachi Nejmana, pobudovanykh metodom R-funkcij. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1969, No 3, pp. 222–225. 26. Rvachov V.L., Rakova L.V. Vlasni kolyvannya plastyn skladnoy formy. Dop. AN URSSR, Ser. A, 1970, No 5, pp. 445–458. 27. Rvachev V.L. K voprosu o postroenii koordinatnykh posledovatel'nostej. Differenc. uravneniya, 1970, No 6, vol. 6, pp. 1034–1047. 28. Procenko V.S., Rvachev V.L. Ob odnom podhode k resheniyu smeshannoy zadachi teorii uprugosti. Prikl. mehanika, 1970, No 6, vol. 9, pp. 90–94. 29. Rvachov V.L., Procenko V.S. Pro strukturu rozv'yazku kontaktnoy zadachi z nakhylenym shtampom. Dop. AN URSSR, 1970, No 11, pp. 1023–1026. 30. Rvachev V.L., Rakova L.V. Raschet sobstvennykh form i chastot poperechnykh kolebanij plastinki slozhnoj

formy. Prikl. mehanika, 1970, No 6, vol. 4, pp. 80–85. 31. Rvachov V.L., Yarmolyuk V.K. Pro zastosuvannya metodu R-funkcij dlya rozv'yazuvannya stacionarnykh zadach teploprovodnosti ta elektrodynamiky. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1971, No 11, pp. 1003–1005. 32. Rvachov V.L., Yarmolyuk V.K., Kravchenko V.P. Pro zastosuvannya metodu R-funkcij dlya rozv'yazannya mishanykh krajovykh zadach iz neodnorodnykh hranynnykh umovamy. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1971, No 11, pp. 984–987. 33. Rvachev V.L., Rvachev V.A. O predstavlenii mnogochlenov finitnymi funkciyami. Mat. fizika, 1972, vol. 11, pp. 126–129. 34. Anikiyenko O.M., Lytvyn O.M., Rvachov V.L., Saфонов M.O. Pro formulu rozkladu v okoli kuta. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1972, No 2, pp. 99–100. 35. Lytvyn O.M., Rvachov V.L. Rozklad H-realizovanykh funkcij v okoli kuskovo-hladkoy liniyi. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1972, No 5, pp. 423–425. 36. Rvachov V.L., Slesarenko A.P. Do pobudovy struktury rozv'yazku dlya odniyeyi nelinejnoj krajovoy zadachi teplovyprominyuyuchoho tila skladnoy formy. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1973, No 1, pp. 77–80. 37. Rvachov V.L., Rvachov V.O. Pro nablyzhennya funkciyeyu  $up(x)$ . Dop. AN URSSR. Ser. A, 1973, No 6, pp. 507–508. 38. Rvachov V.L., Slesarenko A.P., Saфонов M.O. Pro rozv'yazannya stacionarnykh nelinejnykh krajovykh zadach teploprovodnosti. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1974, No 11, pp. 1015–1021. 39. Rvachev V.L., Rvachev V.A. O pryomeneniy  $up(x)$  v metode konechnykh elementov. Mat. fizyka, 1975, vol. 17, pp. 170–175. 40. Rvachev V.L., Koval' F.F., Man'ko G.P. Nekotorye novye konstruktivnye sredstva metoda R-funkcij. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1978, No 8, pp. 691–694. 41. Rvachev V.L., Bobileva O.N. O postroenii obobschennoj formuly Tejlora raznostnogo tipa. Ukr. mat. zhurn, 1978, No 30, vol. 6, pp. 768–778. 42. Rvachev V.L., Bobileva O.N. Obobschennaya formula Tejlora raznostnogo tipa. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1978, No 1, pp. 26–30. 43. Rvachev V.L., Sinekop N.S. Formuly svertki v metode R-funkcij i ih primenenie k postroeniyu struktur reshenij kraevykh zadach. Dokl. AN SSSR, 1980, No 225, vol. 1, pp. 80–83. 44. Kalinichenko V.I., Rvachev V.L., Ropavka A.I. Dvoystvennye metody v zadachah nestacionarnoj teploprovodnosti. Kharkiv: 1981, 20 p. (Prepr. / AN URSSR. In-t probl. mashinostroeniya; № 172). 45. Rvachev V.L., Bojko M.V. O postroenii normalizovannykh uravnenij geometricheskikh ob'ektov translyacionnogo tipa. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1981, No 2, pp. 32–35. 46. Rvachev V.L., Bojko M.V. Postroenie strukturykh formul, simmetrichnykh i antisimmetrichnykh otноситel'no prostranstvennykh grupp preobrazovanij. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1981, No 7, pp. 16–19. 47. Rvachev V.L., Sinekop N.I. Priblizhennoe reshenie ploskoj zadachi teorii uprugosti dlya ortotropnogo tela metodom R-funkcij. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1981, No 10, pp. 61–64. 48. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Erivanceva L.S. Struktury reshenij nekotorykh zadach teorii uprugosti dlya pravil'nogo n-ugol'nika, nagruzhenного sosredotochennymi silami. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1982, No 9, pp. 33–36. 49. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Kravchenko L.K. Metod R-funkcij v zadachah teorii malyh uprugoplasticheskikh deformatsij. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1983, No 1, pp. 49–53. 50. Rvachev V.L., Kurpa L.V. Struktury reshenij zadach teorii plastin so smeshannymi granichnymi usloviyami. Dokl. AN URSSR. Ser. A, 1983, No 9, pp. 34–37. 51. Rvachev V.L., Veretel'nik V.V. Struktury reshenij zadachi o kolebaniyah v aksial'no-simmetrichnykh rezonatorah. Dokl. AN SSSR, 1983, No 273, vol. 5, pp. 1109–1111. 52. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Kravchenko L.K. Issledovaniya uprugoplasticheskogo napryazhennogo sostoyaniya tel vrascheniya konechnoj dliny. Problemy prochnosti, 1984, No 5, pp. 94–97. 53. Rvachev V.L., Kurpa L.V., Shevchenko A.N. Metod R-funkcij v zadachah o nestacionarnykh kolebaniyah plastin. Probl. prochnosti, 1984, No 6, S. 22–25. 54. Rvachev V.L., Shejko T.I. Metod R-funkcij v zadachah rascheta polej dlya tel, fizicheskie karakteristiki kotorykh imeyut razryvy pervogo roda. Prikl. matematika i mehanika, 1984, No 48, vol. 5, pp. 873–877. 55. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Sinekop N.I. Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya ortotropnogo tela konechnykh razmerov. Prikl. mehanika, 1984, No 20, vol. 4, pp. 40–49. 56. Rvachev V.L., Kurpa L.V. Metod R-funkcij v zadachah ob izgibe anizotropnykh plastin.



- Dokl. AN SSSR, 1985, No **280**, vol. 2, pp. 314–317. **57.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Fedotova E.A. Struktura resheniya dlya zadach teorii plastin so smeshannymi usloviyami zakrepleniya. Mat. metody i fiz.-meh. polya, 1985, vol. 21, pp. 57–62. **58.** Rvachev V.L., Manko G.P., Shevchenko A.N. The R-functions approach and software for the analysis of physical and mechanical fields. Software for discrete manufacturing. Paris, 1985, pp. 197–213. **59.** Rvachev V.L., Sinekop N.S., Kravchenko L.K. Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya neodnorodnogo cilindra. Prikl. mehanika, 1986, No **22**, vol. 1, pp. 18–23. **60.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Nasriddinov H.F. Metod R-funkcij v zadachah nelinejnogo deformirovaniya plastin. Prikl. mehanika, 1987, No **23**, vol. 9, pp. 73–78. **61.** Rvachev V.L., Sinekop N.S., Kravchenko L.K. Raschet neodnorodnogo cilindra s zhestkim vkluyucheniem. Matematicheskie metody i fiz.-meh. polya, 1987, vol. 26, pp. 72–78. **62.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Shevchenko A.N. Raschet uprugih plastin pri kombinirovannom nagruzhennii. Prikl. mehanika, 1987, No **23**, vol. 3, pp. 57–61. **63.** Rvachev V.L., Kurpa L.V. Reshenie zadach ustojchivosti plastin metodom R-funkcij. Problemy prochnosti, 1987, No 6, pp. 100–103. **64.** Rvachev V.L., Lobanova L.S., Sinekop N.S. Metod R-funkcij v dinamicheskikh zadachah teorii uprugosti. Dokl. AN USSR. Ser. A, 1988, No 5, pp. 35–38. **65.** Rvachev V.L. Relyativistskij vzglyad na razvitie konstruktivnykh sredstv matematiki. Kharkiv: 1990, 47 p. (Prepr. / AN USSR. In-t probl. mashinostroeniya; No 337). **66.** Afanas'ev V.A., Kravchenko V.F., Rvachev V.A., Rvachev V.L. Vosstanovlenie izobrazhenij s pomoshch'yu dekonvekcionnykh okon, postroennykh na osnove atomarnykh funkcij. Dokl. AN SSSR, 1991, No **321**, vol. 5, pp. 938–941. **67.** Rvachev V.L., Sinekop N.S., Molotkov I.P. Metod R-funkcij v kontaktnykh zadachah termoprugosti dlya tel konechnykh razmerov. Dokl. AN SSSR, 1991, No **321**, vol. 4, pp. 721–725. **68.** Rvachev V.L. Nearhimedova arifmetika i drugie konstruktivnye sredstva matematiki, osnovannye na ideyah special'noj teorii otositel'nosti. Dokl. AN SSSR, 1991, No **316**, vol. 4, pp. 884–889. **69.** Rvachev V.L., Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.A. Ob odnom metode vychislenij preobrazovaniy Fur'e i Hartli v konechnoj cifrovoj vychislitel'noj sisteme. Dokl. AN SSSR, 1991, No **320**, vol. 2, pp. 577–580. **70.** Rvachev V.L., Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.A. Ob odnom teoretiko-chislomom metode BPF v kol'ce Ferma. Dokl. AN SSSR, 1991, No **320**, vol. 2, pp. 303–306. **71.** Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.A., Rvachev V.L. Primenenie atomarnykh funkcij dlya cifrovyykh fil'trov. Dokl. AN SSSR, 1991, No **321**, vol. 4, pp. 697–700. **72.** Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.A., Rvachev V.L. Primenenie atomarnykh funkcij dlya sinteza cifrovogo differenciatora. Dokl. AN SSSR, 1991, No **319**, vol. 2, pp. 347–351. **73.** Rvachev V.L., Suvorova I.G., Shejko T.I. Chislennaya realizatsiya zadachi o techenii vyazkoj zhidkosti metodom R-funkcij v sisteme "Pole-3". Mat. metody i fiz.-meh. polya, 1991, No 33, pp. 95–99. **74.** Rvachev V.L. Relyativistskoe i drugie nearhimedovy ischisleniya. Kharkiv: 1992, 47 p. (Prepr. / AN Ukrainy. In-t probl. mashinostroeniya; No 356). **75.** Rvachev V.L., Shevchenko A.N. Intelligent software tools for the simulation of physico-mechanical fields. Pattern and Image Analysis, 1992, No 2, vol. 2, pp. 45–49. **76.** Rvachev V.L. Nearhimedova geometriya i drugie konstruktivnye sredstva matematiki, osnovannye na ideyah special'noj teorii otositel'nosti. Vychisl. tehnologii: Tr. shk.-seminara po kompleksam programmat. mat. fiziki, Rostov n.-D. 1990 g. Novosibirsk: In-t vychisl. tehnologii SO AN Rossii, 1992, No 1, vol. 2, pt. 2, pp. 273–281. **77.** Kravchenko V.F., Kravchenko N.I., Rvachev V.L. Ob odnom metode rascheta preobrazovaniya elektromagnitnykh voln v teplovye polya na primere pryamougol'nogo volnovoda. Dokl. AN Rossii, 1992, No **326**, vol. 1, pp. 63–67. **78.** Afanas'ev V.A., Kravchenko V.F., Rvachev V.A., Rvachev V.L. Optimal'nye finitnye okna dlya vosstanovleniya izobrazhenij. Dokl. AN Rossii, 1992, No **322**, vol. 3, pp. 498–500. **79.** Rvachev V.L. Relyativistskij analiz i ego primenenie k resheniyu nekotorykh nelinejnykh zadach. Dokl. AN Rossii, 1992, No **326**, vol. 4, pp. 637–641. **80.** Rvachev V.L., Sinekop N.S., Molotkov I.P. Struktura resheniya kontaktnykh zadach termoprugosti. Dokl. AN Ukrainy. Ser. A, 1992, No 6, pp. 25–29. **81.** Kravchenko N.I., Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Ob odnom metode rascheta kolebanij v elektricheskikh modulyatorah na primere polukoaksial'nogo rezonatora s odnoosnym kristallom. Dokl. AN Rossii, 1993, No 1, pp. 36–39. **82.** Rvachev V.L. The red displacement of the spectrums of the immovable for cosmos objects (result of the non-Archimedean calculus). Prepr. / Ukr. Nat. Acad. of Sci., Ins. for Problems in Machinery; No 337. Kharkiv, 1994. 20 p. **83.** Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Atomarnye eksponencial'nye funkcii. Dokl. AN Rossii, 1994, No **336**, vol. 3, pp. 309–311. **84.** Gorshkov A.S., Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Atomarnye garmonicheskie funkcii i obobschennyj algoritm BPF. Dokl. AN Rossii, 1994, No **336**, vol. 4, pp. 462–465. **85.** Gulyaev Yu.V., Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Sizova N.D. Issledovanie difrakcii uprugih voln na konuse. Dokl. AN Rossii, 1995, No **343**, vol. 3, pp. 315–318. **86.** Rvachev V.L., Shevchenko A.N., Shejko T.I. Ischisleniya s naibol'shim chislom. Kibernetika i sistem. analiz, 1995, No 3, pp. 71–86. **87.** Gulyaev Yu.V., Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Sizova N.D. Metod R-funkcij v issledovanii difrakcii uprugih voln na zhestkom vkluyuchennii proizvol'noj formy. Dokl. AN Rossii, 1995, No **344**, vol. 4, pp. 457–459. **88.** Rvachev V.L. Ot special'noj teorii otositel'nosti k matematike bez aksiomy Arhimeda i obratno. Radio-tehnika, 1995, No 2, 6 (Elektromagnitnye volny No 1, 2), pp. 58–70. **89.** Rvachev V.L., Shejko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics. Appl. Mech. Rev., 1995, No **48**, vol. 4, pp. 151–188. **90.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Arkhipov A.V. The variational-structural method for problems of an elasto-plastic bending of arbitrary-shape plates. Dop. NAN Ukrainy, 1995, No 10, pp. 60–62. **91.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Bolotina A.Y. The variational-structural method for problems of bending flexible shallow shells with a complex boundary of the domain. Dop. NAN Ukrainy, 1995, No 6, pp. 63–65. **92.** Rvachev V.L., Eremenko S.Yu. Kombiniruemye nearhimedovy ischisleniya i vzglyad na teoreticheskuyu fiziku s ih pozicii. Kharkiv, 1996, 38 p. (Prepr. / NAN Ukrainy. In-t probl. mashinostroeniya; No 393). **93.** Gulyaev Yu.V., Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Sizova N.D. Aposteriornye ocenki pogreshnosti strukturnykh reshenij prostranstvennykh zadach matematicheskoy fiziki. Dokl. AN Rossii, 1996, No **346**, vol. 4, pp. 445–458. **94.** Gulyaev Yu.V., Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Sizova N.D. Differencial'no-raznostnyj metod i teoriya R-funkcij v prostranstvennykh zadachah matematicheskoy fiziki. Dokl. AN Rossii, 1996, No **347**, vol. 5, pp. 618–621. **95.** Rvachev V.L., Shevchenko A.N., Sizova N.D. Issledovanie termonapryazhennogo sostoyaniya lopatki aviacionnykh dvigatelej. Prikl. mehanika, 1996, No **32**, vol. 4, pp. 32–36. **96.** Veretel'nik V.V., Rvachev V.L., Shevchenko A.N. i dr. R-funkcii v zadachah modelirovaniya processa zatverdevaniya metalla v formah slozhnoy geometrii. Zarubezh. radioelektronika, 1996, No 8, pp. 38–49. **97.** Rvachov V.L., Sklepus S.M., Sklepus O.M. Rozrakhunok bahatosharovykh polohykh obolonok strukturnym metodom. Dop. NAN Ukrainy, 1996, No 4, pp. 53–56. **98.** Rvachev V.L., Shejko T.I., Shapiro V., Uiker J.J. Implicit function modeling of solidification in metal castings. Trans. ASME, 1997, No **119**, pp. 466–473. **99.** Rvachev V.L., Shevchenko A.N., Shejko T.I. i dr. Matematicheskoe modelirovanie temperaturnykh polej pri zatverdevanii metalla v formah slozhnoy profilya. Mat. metody ta fiz.-meh. polya, 1997, No **40**, vol. 1, pp. 59–65. **100.** Eremenko S.Yu., Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Kombiniruemye nearhimedovy Ischisleniya i novye modeli relyativistskoj mehaniki. Zarubezh. radioelektronika, 1997, No 9, pp. 26–38. **101.** Rvachev V.L. Ischislenie dlya Vse-lennoj (dialog akademika s liceistom). Zarubezh. radioelektronika, 1998, No 3, pp. 66–77. **102.** Rvachev V.L., Shejko T.I., Shapiro V. Metod R-funkcij (RFM) v kraevykh zadachah s geometricheskoy i fizicheskoy simmetriey. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 1998, No **41**, vol. 1, pp. 146–159. **103.** Rvachov V.L., Lobanova L.S., Synyepok M.S. Metod R-funkcij v dinamichnykh zadachakh termopruzhnosti dlya til skinchennykh rozmiriv. Dop. NAN Ukrainy, 1999, No 5, pp. 64–68. **104.** Rvachev V.L., Shapiro V., Shejko T.I. Primenenie metoda R-funkcij k postroeniyu uravnenij lokusov, obladayuschih simmetriey. Elektromagnit. volny i elektron. sistemy, 1999, No 4, vol. 4, pp. 4–20. **105.** Rvachev V.L., Avinash K. Non-archimedean algebra: applications to cosmology and gravitation. Foundations of Physics, 2000, No **30**, vol. 1, pp. 140–152. **106.** Rvachev V.L., Shejko T.I., Shapiro V., Tsukanov I. On completeness of RFM solution structures. Computational Mechanics, 2000, No **25**, pp. 305–316. **107.** Kravchenko V.F., Pustovojt V.I., Rvachev V.L., Sizova N.D. Primenenie teorii R-funkcij k zadacham difrakcii termoprugih voln na ob'ektah slozhnoy formy. Dokl. RAN, 2000, No **372**, vol. 4, pp. 487–489. **108.** Rvachov V., Kurpa L., Shmatko O. Vlasni kolyvannyya polohykh obolonok skladnoy u plani formy. Mashynoznavstvo, 2000, No 2, pp. 3–6. **109.** Kravchenko V.F., Pustovojt V.I., Rvachev V.L., Sizova N.D. Metod R-funkcij v zadachah modelirovaniya teplovykh processov izluchayuschih tel slozhnoy formy. Dokl. RAN, 2001, No **376**, vol. 2, pp. 186–190. **110.** Kravchenko V.F., Pustovojt V.I., Rvachev V.L., Sizova N.D. Teoriya R-funkcij v nestacionarnykh zadachah difrakcii uprugih voln. Dokl. RAN, 2001, No **376**, vol. 3, pp. 338–342. **111.** Rvachev V.L., Uvarov R.A., Shejko T.I. Postroenie uravnenij lokusov v 3D s pomoshch'yu R-funkcij. Radioelektronika i informatika, 2001, No 2, pp. 158–164. **112.** Rvachev V.L., Mihal' E.O. Kraevye zadachi dlya oblastej s granichnymi usloviyami na vnutrennej duge krivoj. Mat. metody i fiz.-meh. polya, 2001, No **44**, vol. 4, pp. 47–51. **113.** Rvachev V.L., Mihal' E.O. Polnota strukturnykh reshenij v kraevykh zadachah dlya oblastej special'nogo vida. Kibernetika i sistem. analiz, 2001, No 4, pp. 107–118. **114.** Rvachev V.L., Kurpa L.V., Shmatko A.V. Sobstvennyye kolebaniya pologh

obolochek slozhnoy formy v plane pri nalichii razrezov (treschin) na ih poverhnosti. Dop. NAN Ukrainy, 2001, No 2, pp. 65–72. **115.** Zolochevskiy A.A., Rvachev V.L., Sklepus S.N. Variacionno-strukturnyj metod v zadachah polzuchesti. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 2001, No 44, vol. 1, pp. 135–138. **116.** Mihal' E.O., Rvachev V.L., Cukanov I.G., Shapiro V., Shejko T.I. Fizicheskie polya s geometricheskimi singulyarnostyami. Radioelektronika i informatika, 2002, No 3, pp. 22–28. **117.** Rvachev V.L., Mihal' E.O. Polnye struktury reshenij dlya oblastej uslozhnennoj geometrii. Dop. NAN Ukrainy, 2002, No 2, pp. 28–33. **118.** Maksimenko-Shejko K.V., Rvachev V.L. Matematicheskie modeli dvizheniya neszhimajemoj v'язkoj zhidkosti po skruchennym trubam. Mat. metody i fiz.-meh. polya, 2003, No 46, vol.

2, pp. 81–88. **119.** Kurpa L., Rvachev V., Ventsel E. The R-function method for the free vibration analysis of thin orthotropic plates of arbitrary shape. J. Sound and Vibration, 2003, No 26, pp. 109–122. **120.** Rvachev V.L., Semerich Yu.S., Shejko T.I. Metod R-funkcij v zadachah issledovaniya volnovodov s geometricheskimi singulyarnostyami. Mat. metody i fiz.-meh. polya, 2004, No 47, vol. 1, pp. 73–79. **121.** Rvachev V.L., Sorokin V.K. Ejnshtejnovskaya revolyuciya v tochnyh naukah i nearhimedovy ischisleniya. Dop. NAN Ukraini, 2005, No 7, pp. 27–29.

*Поступила (received) 30.06.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Шейко Тетяна Іванівна** – доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудівництва ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (057) 294-27-74; e-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua.

**Шейко Татьяна Ивановна** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков; тел.: (057) 294-27-74; e-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua.

**Sheyko Tatyana Ivanivna** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Chief Researcher, the A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems (IPMach) NAS of Ukraine, Kharkiv; tel.: (057) 294-27-74; e-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua.

**Курпа Лідія Василівна** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Прикладна математика», Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpa@kpi.kharkov.ua.

**Курпа Лидия Васильевна** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpa@kpi.kharkov.ua.

**Kurpa Lidiya Vasylivna** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, National Technical University "KhPI", tel.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpa@kpi.kharkov.ua.

**Бездетко Олена Олегівна** – інженер I категорії, Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: bezdetko@kpi.kharkov.ua.

**Бездетко Елена Олеговна** – инженер I категории, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: bezdetko@kpi.kharkov.ua.

**Bezdetko Olena Olegivna** – engineer of the 1-st category, National Technical University "KhPI", tel.: (057) 707-60-32; e-mail: bezdetko@kpi.kharkov.ua.

**Осетров Андрій Олександрович** – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: andy.osetrov@gmail.com.

**Осетров Андрей Александрович** – кандидат технических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: andy.osetrov@gmail.com.

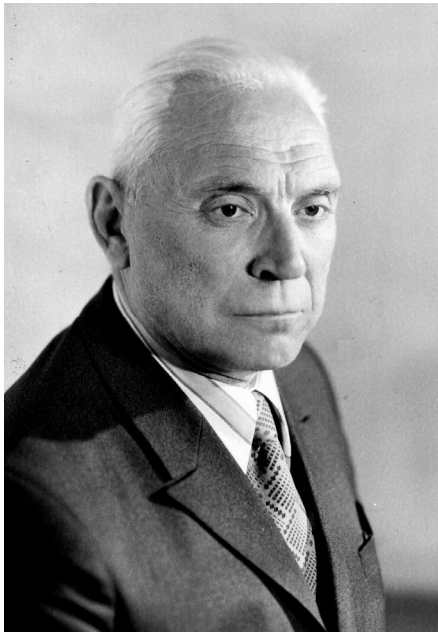
**Osetrov Andriy Olexandrovich** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Lecturer, National Technical University "KhPI", tel.: (057) 707-60-32; e-mail: andy.osetrov@gmail.com.

УДК 621.01 (092)

**Ю. М. АНДРЕЕВ, Е. И. ДРУЖИНИН, А. А. ЛАРИН****ВЕКОВОЙ ЮБИЛЕЙ ПРОФЕССОРА ЛЬВА ИЗРАИЛЕВИЧА ШТЕЙНВОЛЬФА**

В статье представлен жизненный и творческий путь известного ученого из ХПИ – профессора Л. И. Штейнвольфа. Анализируется его вклад в развитие теории колебаний и динамики машин, а также практическое применение научных достижений. Посвящается 100-летию со дня рождения.

**Ключевые слова:** теоретическая механика, теория колебаний, динамика машин, система компьютерной алгебры, тепловозные и танковые силовые установки, вибрационная диагностика.



23 апреля 2016 года исполнилось 100 лет со дня рождения Льва Израилевича Штейнвольфа, известного ученого в области механики, динамики машин и прикладной теории колебаний, доктора технических наук, профессора кафедры теоретической механики Харьковского политехнического института. Научные исследования Л. И. Штейнвольфа посвящены самым разнообразным проблемам динамики силовых передач боевых и транспортных машин. Ценность его научной работы заключалась в тесной связи с производством и постоянным внедрением результатов исследований в практику конструкторских бюро, занимающихся расчетами и доводкой силовых передач с двигателями внутреннего сгорания. Особенность Л. И. Штейнвольфа ученого – сочетание широких практических знаний и академической аналитической механики. Говоря современным языком, его отличала инновационная направленность в работе. С самого начала появления электронных вычислительных машин, а позднее и персональных компьютеров он стремился внедрить в практику инженерных и научных механических расчетов самые современные, зачастую именно им разрабатываемые специальные алгоритмы и подходы. Неоценимый его вклад в развитие систем компьютерной алгебры в области механики и внедрение таких методов в научную, практическую и учебную деятель-

ность. Им опубликовано более 150 научных статей, две брошюры и монография.

Л. И. Штейнвольф родился 23 апреля 1916 года в Екатеринославе (с 1926 г. Днепропетровск). Его отец Израиль Борисович Штейнвольф был горным инженером. До 1924 года он работал в Донбассе, а в 1924-м вместе с семьей переехал в Харьков, где до 1956 года работал в различных организациях, связанных с угольной промышленностью. В 1931 году Лев Израилевич оканчивает семилетнюю школу и поступает в фабрично-заводское училище (ФЗУ) при Харьковском электромеханическом заводе. После ФЗУ в 1933 году он поступает на рабочий факультет при Харьковском механико-машиностроительном институте<sup>1</sup> (ХММИ). Окончив рабфак, в 1934 году становится студентом ХММИ. Получив в 1939 году диплом инженера-механика по специальности «Динамика машин», Л. И. Штейнвольф поступает в аспирантуру ХММИ по той же специальности. Однако учеба в аспирантуре была прервана войной, и вместе с институтом Лев Израилевич эвакуируется в город Красноуфимск, где работает старшим преподавателем кафедры «Двигатели внутреннего сгорания». Но уже в сентябре 1942 года его призывают в Красную Армию и направляют в Военно-политическое училище. После окончания училища по сокращенной программе, в мае 1943 года Штейнвольф направлен на курсы младших лейтенантов Московского военного округа, где до февраля 1944 года был слушателем, а после командиром учебного взвода [1, л. 1, 5].

Работу над кандидатской диссертацией, которую Лев Израилевич выполнял под руководством профессора Я. М. Майера, он возобновил после демобилизации в августе 1945 года. В своей работе Л. И. Штейнвольф продолжил исследования маятниковых антивибраторов, начатые его предшественником, также учеником Майера, Ю. А. Гоппом [2]. Он подробно рассмотрел применение маятникового антивибратора для гашения крутильных колебаний валопроводов ДВС и предложил удобный инженерный метод расчета нерезонансных вынужденных колебаний произвольной многомассовой системы с присоединенным маятниковым антивибратором на бифилярном подвесе при установке его на произвольной многомассовой системе [3]. Для уточнения общих вопро-

<sup>1</sup> В 1930 г. Харьковский политехнический институт (ХПИ) был разделен на пять самостоятельных вузов, в их числе

был и ХММИ. В 1950 г. ХММИ вошел в состав восстановленного ХПИ.

сов теории, методов расчета нерезонансных колебаний и эффективности воздействия маятниковых антивибраторов впервые была использована экспериментальная установка, которая оказалась универсальным средством, позволяющим исследовать целый ряд вопросов крутильных колебаний [3, с. 211]. Успешная защита диссертации состоялась в 1947 году [1, л. 7].

С 1945 года Лев Израилевич стал работать ассистентом на кафедре теоретической механики ХММИ, которую возглавлял И. М. Бабаков. Иван Михайлович был выдающимся ученым в области механики, автором одного из лучших учебников по теории колебаний, прекрасным педагогом и организатором специальности динамика машин [4]. Он оказал огромное влияние на подготовку научно-педагогических кадров, и в том числе на формирование Л. И. Штейнвольфа, как ученого и педагога, проработавшего с ним много лет на кафедре теоретической механики. С 1953 года он работает на должности доцента, а в 1954 году ему присвоено и соответствующее ученое звание.

В 1957 году в ХПИ была открыта Проблемная лаборатория «Динамическая прочность деталей машин», которую возглавил известный ученый в области математики и механики, член-корреспондент АН УССР профессор А. П. Филиппов. Л. И. Штейнвольф был приглашен в эту лабораторию для организации и руководства научно-исследовательской группой силовых установок. Его научные интересы всегда были тесно связаны с практическими проблемами, и, в частности, с проблемами создания и совершенствовании транспортных машин, оснащенных двигателями внутреннего сгорания (ДВС). Наряду с задачами анализа решались также и задачи нового направления – синтеза механических систем, а также управления спектром собственных частот. В 1967 году ученый успешно защитил докторскую диссертацию на тему: «Динамика механических передач силовых установок тепловозов». В ней рассмотрены общие вопросы расчета свободных и вынужденных колебаний, переходных процессов, синтеза механических передач и расчета фрикционных автоколебаний. В работе также дан анализ существовавших тогда методов расчета собственных частот и форм колебаний. При расчете вынужденных колебаний рассмотрена замена нелинейного демпфирования эквивалентным линейным из условия равенства работ действительных демпфирующих сил и эквивалентных сил вязкого трения [5].

Лев Израилевич в своей докторской диссертации решил важнейшие народнохозяйственные задачи. В ходе работы были проведены динамические расчеты механических передач силовых установок тепловозов ТЭЗ, ТЭ10, и ТЭ40 производства Харьковского завода транспортного машиностроения (ХЗТМ) имени В. А. Малышева и тепловозов 2ТЭ10Л, М62 и ТГ106 Луганского тепловозостроительного завода имени Октябрьской революции. Эта работа имела большое народно-хозяйственное значение, именно магистральные тепловозы серий ТЭЗ и ТЭ10 обеспечили перевод советских железных дорог на тепловозную тягу [6].

Данные работы не утратили своей актуальности, в связи с чем научно-технические отчеты по ним приняты на вечное государственное хранение в Центральный государственный научно-технический архив Украины [7].

Научные исследования по различным проблемам динамики силовых передач транспортных машин выполнялись Л. И. Штейнвольфом по наиболее актуальным направлениям развития транспортной техники, на базе современных достижений математики, механики и кибернетики. Научная группа, которую возглавлял Лев Израилевич, отличалась высокой работоспособностью, в ней царила прекрасная творческая атмосфера. За годы существования в Проблемной лаборатории небольшого по составу коллектива группы, в нем подготовлено два доктора и 16 кандидатов наук. Привлеченный со студенческих лет для научной работы в группе Владимир Николаевич Карабан под руководством Л. И. Штейнвольфа стал кандидатом, а затем доктором технических наук, заведующим кафедрой теоретической механики ХПИ.

С 1960-х годов в практике научных исследований стали применяться электронные цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ). С этого времени Лев Израилевич активно внедряет в практику расчетов колебаний машин вычислительные методы с программированием их для выполнения расчетов на ЭЦВМ. В работе [8] Л. И. Штейнвольфом дан обзор различных подходов к расчетам собственных частот и форм колебаний линейных механических систем и обоснована эффективность применения в программах для ЭЦВМ QR-алгоритма. Далее это направление получило развитие в расчетах вынужденных колебаний, что отражено в его работе [9]. Отметим, что внедрение ЭЦВМ в практику расчетов на колебания механических систем способствовало заметному повышению эффективности в получении результатов при исследовании колебаний линейных дискретных систем. Наибольшую трудоемкость при этом составлял процесс составления вручную матриц инерции и жесткости систем уравнений, описывающих данные колебания. Поэтому, с начала 1970-х годов, Л. И. Штейнвольф совместно с В. Н. Митиным начали разрабатывать методы автоматизированного построения систем уравнений, основанного на применении, так называемых структурных матриц [10; 11], которые нашли воплощение к концу 1970-х годов сначала для так называемых «цепных систем». В дальнейшем этот подход получил дальнейшее развитие для систем произвольной структуры.

Важнейшим этапом научного творчества Л. И. Штейнвольфа стали исследования по нелинейным колебаниям в машинах, что связано с усложнением транспортных и боевых машин и повышенными требованиями к их работе при эксплуатации. Ученый прекрасно понимал, что определяющей тенденцией развития зарубежного и отечественного машиностроения является создание надежных и долговечных машин с постоянно возрастающей динамической и функциональной нагруженностью. Кроме того исследование динамики силовых передач, являющихся

важнейшими элементами машин, часто требовали рассматривать их механические модели как многомассовые, структурно сложные с наличием конструктивных или технологических нелинейностей. Поэтому под его руководством В. М. Шатохиным были разработаны алгоритмы и программы, реализующие применение итерационного метода Ньютона-Канторовича для нелинейных интегральных уравнений, описывающих свободные и вынужденные колебания дискретных систем [12; 13]. Затем этот подход был развит для исследований и решений задач оптимизации и синтеза, а также для исследования переходных режимов в дискретных механических системах [14; 15]. Отметим здесь оригинальный результат, полученный Л. И. Штейнвольфом совместно с Ю. М. Андреевым в области количественной оценки влияния параметров дискретных элементов механической системы произвольной структуры на ее собственные частоты [16].

Потребность в управлении динамическими процессами и улучшении характеристик силовых передач побуждало включать в них как элемент объемную гидропередачу, часто в сочетании с дифференциальными механизмами, что приводило к появлению более широкого класса систем, а именно гидромеханических, которые имели ряд преимуществ по сравнению с чисто механическими. Исследование динамики гидромеханических силовых передач в то время было связано с определенными трудностями моделирования, к которым можно отнести автоматизированное построение их уравнений движения на основе системы компьютерной алгебры и оценку взаимодействия рабочей жидкости с элементами механической части силовой передачи. Расчет установившихся и переходных режимов в гидромеханических системах являлся наукоемкой проблемой, имевшей важное практическое значение. Принципиальная возможность оценки взаимного влияния конструктивных параметров механической части силовой передачи и динамики поведения рабочей жидкости гидромеханической передачи на стадиях проектирования и доводки опытных образцов, безусловно, имела важное значение для обеспечения дальнейшей качественной эксплуатации системы в целом. Все перечисленные выше трудности были успешно преодолены Львом Израилевичем и его учениками [17; 18].

Следует подчеркнуть, что научные достижения по всем указанным направлениям имели важное практическое значение. Профессор Штейнвольф Л.И. пользовался огромным авторитетом среди работников промышленности. Его научные достижения нашли применение при решении проблем прочности и надежности танковых силовых установок. На протяжении многих лет Лев Израилевич и его ученики занимались проблемами колебаний танковых силовых установок, оснащенных уникальными дизелями семейства ТД, разрабатываемых на ХЗТМ им. В. А. Малышева [19]. Работы в этом направлении продолжал его ученик В. М. Шатохин, защитивший в 2006 г. докторскую диссертацию по специальности «Бронетанковая техника и вооружение».

Исследования, начавшиеся с создания автоматизированного составления средствами ЭВМ уравнений колебаний в машинах, нашли продолжение при создании программного комплекса (ПК) КиДиМ, имеющего важное прикладное значение. Комплекс, являющийся дальнейшим развитием идеи структурных матриц, основан на применении специально созданной системы компьютерной алгебры. Он позволяет автоматизировать процессы построения математических моделей и отыскания решений задач кинематики, статики и динамики для широкого класса дискретных механических систем, со стационарными и нестационарными, голономными и неголономными связями. ПК КиДиМ можно считать самым главным научным достижением Льва Израилевича и его учеников. Он используется в расчетах машин и механизмов, в том числе и с нелинейными элементами, в исследованиях установившихся и переходных процессов в машинах. Участники проводившихся в 80-е годы прошлого столетия всесоюзных конференций по проблемам систем аналитических вычислений в механике помнят блестящие доклады Л. И. Штейнвольфа, посвященные упомянутым вопросам, а также применению ПК КиДиМ к исследованию систем с нестационарными и неголономными связями. Последнее нашло отражение в статьях [20, 21], опубликованных уже после смерти Льва Израилевича.

С 1986 года по договоренности с Ю. П. Волошиным, ставшим тогда главным конструктором Чебоксарского завода промышленных, была начата работа по созданию большого программного комплекса КиДиМ. Комплекс был призван существенно облегчить расчетную практику КБ по расчетам анализа и синтеза систем с ДВС на базе специально разрабатываемой для этого системы компьютерной алгебры. Над этим программным продуктом под руководством Л. И. Штейнвольфа трудились В. Н. Митин (ядро системы компьютерной алгебры), Ю. М. Андреев (программы расчета линейных и нелинейных свободных и линейных вынужденных колебаний), А. А. Ларин (программы силового расчета), В. М. Шатохин (расчеты нелинейных вынужденных колебаний), Е. И. Дружинин (расчеты систем с гидрообъемными передачами) и др. ученые. Впоследствии разработанный программный комплекс был внедрен в практику КБ Чебоксарского завода промышленных тракторов и КБ завода им. В. А. Малышева.

Научное направление по разработке и реализации теории и алгоритмов специальной системы компьютерной алгебры для исследования дискретных механических систем общего вида с произвольными связями, которому положил начало Лев Израилевич, успешно развивал его ученик Ю. М. Андреев. В 2009 г. он защитил докторскую диссертацию на тему «Разработка аналитических компьютерных методов анализа и синтеза динамики машин», целиком посвященную этой проблеме.

С самого начала работ над ПК КиДиМ Л. И. Штейнвольф совместно с В. Н. Митиным, а впоследствии и с Ю. М. Андреевым, видя перспективность применения в учебном процессе ХПИ, использовал его при изучении курсов теоретической и анали-

зирования динамики машин, в том числе и с нелинейными элементами, в исследованиях установившихся и переходных процессов в машинах. Участники проводившихся в 80-е годы прошлого столетия всесоюзных конференций по проблемам систем аналитических вычислений в механике помнят блестящие доклады Л. И. Штейнвольфа, посвященные упомянутым вопросам, а также применению ПК КиДиМ к исследованию систем с нестационарными и неголономными связями. Последнее нашло отражение в статьях [20, 21], опубликованных уже после смерти Льва Израилевича.

тической механики. Эта работа уже после смерти Льва Израилевича была успешно продолжена его учениками и внедрена в учебный процесс кафедр теоретической механики и систем и процессов управления НТУ «ХПИ» при изучении учебных дисциплин механического цикла [22].

Особое место в научном творчестве Льва Израилевича Штейнвольфа занимает разработка метода диагностики рабочего процесса ДВС по крутильным колебаниям его валопровода, проводившаяся под его руководством А. А. Лариным. Особенностью предложенного метода диагностики является построение диагностической модели, адекватно отражающей связь измеряемых сигналов с диагностируемыми качествами. При создании данного метода было использовано такое новшество как специальная программа – имитатор случайных колебаний, применяющаяся на стадии разработки с целью заменить дорогостоящие эксперименты сигналами, полученными с помощью ЭВМ [23]. Новизной было также применение метода

регуляризации по Тихонову для решения системы уравнений, реализующей алгоритм диагностики [24].

Профессор Л. И. Штейнвольф внес большой вклад в дело подготовки инженеров и научных работников. В разные годы он читал оригинальные курсы теоретической и аналитической механики, теории колебаний и динамики машин, что нашло свое выражение в издании монографии «Динамические расчеты машин и механизмов» [25].

Лев Израилевич являлся образцом принципиального и внимательного воспитателя молодежи, всегда отличался изысканными манерами человека, уверенного и доступного для общения, был требовательным, но в то же время и снисходительным к огрехам учеников. Профессор Л. И. Штейнвольф пользовался заслуженным авторитетом коллектива всего университета, студентов и выпускников инженерно-физического факультета, специалистов в области динамики машин. Выпускники многих поколений студентов навсегда сохранили память об этом замечательном ученом и педагоге.

#### Бібліографія:

1. Архив НТУ «ХПИ» Дело 12973 Штейнвольф Лев Израилевич. Отдел кадров ХПИ. – Начато 01.01.1950 г. Окончено 03.07.1991 г. – 82 л.
2. Ларин А. А. Жизненный и творческий путь профессора Юрия Аркадьевича Гоппа / А. А. Ларин // Омский научный вестник. – 2013. – № 2 (120) – С. 40-44.
3. Штейнвольф Л. И. Исследование маятникового демпфера крутильных колебаний коленчатых валов двигателей. : дис. ... канд. техн. наук. / Лев Израилевич Штейнвольф. – Х.: 1947. – 213 с.
4. Бесов Л. М. Классик отечественной механики Иван Михайлович Бабаков / Л. М. Бесов, А. А. Ларин, О. К. Морачковский // История Української науки на межі тисячоліть. – 2007. – Вип. 28. – С. 35-42.
5. Штейнвольф Л. И. Динамика механических передач силовых установок тепловозов : дис. ... докт. техн. наук. / Лев Израилевич Штейнвольф. – Х.: 1966. – 655 с.
6. Ларин А. А. Исследования колебаний тепловозных силовых установок в Харьковском политехническом институте в 1960-е гг. / А. А. Ларин // Механіка та машинобудування. – 2009. – Вип. 2. – С. 158-167.
7. Балишев М. А. Научный доробок професора Льва Штейнвольфа (огляд нових надходжень ЦДНТА України) / М. А. Балишев, А. О. Ларін // Архіви України. – К.: 2013. – Вип. 3 (285). – С. 138-144.
8. Штейнвольф Л. И. Об алгоритмах расчета свободных крутильных колебаний на ЭЦВМ / Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып. 6. – С. 106-109.
9. Штейнвольф Л. И. О расчетах вынужденных крутильных колебаний на ЭЦВМ / Л. И. Штейнвольф, В. Н. Карабан // Динамика и прочность машин. – 1969. – Вып. 10. – С. 80-84.
10. Митин В. Н. Структурные матрицы цепных вибрационных систем / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Вып. 17. – 1973. – С. 3-7.
11. Митин В. Н. Структуры дискретных механических моделей конструкций / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Вып. 35. – 1982. – С. 3-6.
12. Карабан В. Н. К вопросу применения итерационного метода для расчетов колебаний существенно нелинейных систем / В. Н. Карабан, В. М. Шатохин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1981. – Вып. 33. – С. 54-63.
13. Карабан В. Н. Исследование вынужденных колебаний в приводах механизмов циклового действия / В. Н. Карабан, В. М. Шатохин, Л. И. Штейнвольф // Теория механизмов и машин. – 1983. – Вып. 34. – С. 61-66.
14. Драгун С. В. Оптимизация моделей силовых передач в динамических расчетах / С. В. Драгун, В. Н. Карабан, Л. И. Штейнвольф // Проблемы машиностроения. – 1982. – Вып. 17. – С. 66-70.
15. Штейнвольф Л. И. Оптимальный синтез конструктивных параметров упругих соединений / Л. И. Штейнвольф // Теория машин и механизмов. – 1974. – Вып. 17. – С. 102-107.
16. Андреев Ю. М. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1984. – Вып. 40. – С. 50-56.
17. Дружинин Е. И. Определение демпфирующих характеристик аксиально-плунжерных гидрообъемных машин / Е. И. Дружинин, Л. И. Штейнвольф // Теория механизмов и машин. – 1984. – Вып. 37. – С. 25-31.
18. Дружинин Е. И. Застосування системи комп'ютерної алгебри для моделювання динаміки гідромеханічних силових передач транспортних засобів / Є. І. Дружинин, Ю. М. Андреев // Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні». – Львів. – 2011. – Вип. 45. – С. 75-80.
19. Ларин А. О. Дослідження коливань танкових дизелів сімейства ТД (історія питання). / А. О. Ларін // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – № 670 «Держава та армія». – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. – С. 199-205.
20. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 53. – С. 96-102.
21. Андреев Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем /

Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 54. – С. 93-98.

22. Андреев Ю. М. Практикум по теоретической механике с применением ПЭВМ / Ю. М. Андреев, Е. И. Дружинин, А. А. Ларин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. – 100 с.

23. Ларин А. А. Использование цифрового имитатора для исследования систем вибрационной диагностики рабочего процесса ДВС / А. А. Ларин, В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Двигатели внутреннего сгорания. – 1983. – Вып. 37. – С. 118–124.

24. Ларин А. А. Применение метода регуляризации в аналитической вибрационной диагностике машин / А. А. Ларин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – 1987. – Вып. 45. – С. 67-70.

25. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов / Л. И. Штейнвольф // М.–К.: МАШГИЗ, 1961. – 340 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Arhiv NTU «HPI» Delo 12973 Shteinvolf Lev Izrailevich. Otdel kadrov HPI. Nachato 01.01.1950 g. Okoncheno 03.07.1991 g. 82 p. 2. Larin A. A. Jiznennyi i tvorcheskii put' professora Yuriya Arkad'evicha Goppa. Omskii nauchnyi vestnik. 2013, No 2 (120), pp. 40-44 3. Shteinvolf L. I. Issledovanie mayatnikovogo dempfera krutil'nykh kolebaniy kolenchatykh valov dvigatelei. : dis. ... kand. tehn. nauk. Kharkiv, 1947. 213 p. 4. Besov L. M., Larin A.A., Morachkovskii O.K. Klassik otechestvennoi mehaniki Ivan Mikhailovich Babakov. Istoriya Ukraïns'koï nauki na meji tisyacholit', 2007, vol. 28, pp. 35-42. 5. Shteinvolf L. I. Dinamika mehanicheskikh peredach silovykh usta-novok teplovozov : dis. ... dokt. tehn. nauk. Kharkiv, 1966, 655 p. 6. Larin A. A. Issledovaniya kolebaniy teplovoznykh silovykh ustanovok v Har'kovskom politehnicheskome institute v 1960-e gg. Mehanika ta mashinobuduvannya, 2009, vol. 2, pp. 158-167. 7. Balishev M. A., Larin A.O. Naukovii dorobok profesora L'va Shteinvol'fa (oglyad novykh nadhodjen' CDNTA Ukraïni). Arhivi Ukraïni. Kyiv: 2013. vol. 3 (285), p. 138-144. 8. Shteinvolf L. I. Ob algoritmah rascheta svobodnykh krutil'nykh kolebaniy na ECVМ. Dinamika i prochnost' mashin, 1967, vol. 6, pp. 106-109. 9. Shteinvolf L. I., Karaban V.N. O raschetah vynuždennykh krutil'nykh kolebaniy na ECVМ. Dinamika i prochnost' mashin, 1969, vol. 10, pp. 80-84. 10. Mitin V. N., Shteinvolf L.I. Strukturnye matricy cepnykh vibracionnykh sistem. Dinamika i prochnost' mashin, 1973, vol. 17, pp. 3-7. 11. Mitin V. N., Shteinvolf L.I. Strukturnye matricy cepnykh mehanicheskikh modelei konstrukcii. Dinamika i prochnost' mashin, 1982, vol. 35, pp. 3-6. 12. Karaban V. N., Shatohin V.M., Shteinvolf L.I. K voprosu primeneniya iteracionnogo metoda dlya raschetov kolebaniy suschestvenno nelineinykh sistem. Dinamika i prochnost' mashin, 1981, vol. 33, pp. 54-63. 13. Karaban V. N., Shatohin V.M., Shteinvolf L.I. Issledovanie vynuždennykh kolebaniy v privodakh mehanizmov ciklovogo deistviya. Teoriya mehanizmov i mashin, 1983, vol. 34, pp. 61-66. 14. Dragun S. V., Karaban V.N., Shteinvolf L.I. Optimizatsiya modelei silovykh peredach v dinamicheskikh raschetah. Problemy mashinostroeniya, 1982, vol. 17, pp. 66-70.

15. Shteinvolf L. I. Optimal'nyi sintez konstruktivnykh parametrov uprugih soedinenii. Teoriya mashin i mehanizmov, 1974, vol. 17, pp. 102-107. 16. Andreev Yu. M., Shteinvolf L. I. Sintez nelineinykh vibracionnykh sistem po skeletnym krivym s ispol'zovaniem teorii chuvstvitel'nosti. Dinamika i prochnost' mashin, 1984, vol. 40, pp. 50-56. 17. Drujinin E. I., Shteinvolf L. I. Opredelenie dempfirovannykh harakteristik aksial'no-plunjernykh gidroob'emnykh mashin. Teoriya mehanizmov i mashin, 1984, vol. 37, pp. 25-31. 18. Drujinin E. I., Andreev Yu. M. Zastosuvannya sistemi komp'yuternoï algebri dlya modelyuvannya dinamiki gidromechanicheskikh silovykh peredach transportnykh zasobiv. Ukraïns'kii mijvidomchii naukovotekhnichnii zbirnik. Avtomatizatsiya virobnychnykh procesiv u mashinobuduvanni ta priladobuduvanni. L'viv, 2011, vol.45, pp. 75-80. 19. Larin A. O. Doslidjennya kolivan' tankovykh dizeliv simeistva TD (istoriya pitannya). Visnik Nacional'nogo universitetu «L'viv's'ka politehnika» № 670 «Derjava ta armiya». L'viv: Vid-vo NU «L'viv's'ka politehnika», 2010, pp. 199-205. 20. Andreev Yu. M., Shteinvolf L. I. Komp'yuternoe modelirovanie zadach mehaniki golonomnykh sistem tverdykh tel so stacionarnymi i nestacionarnymi svyazhami. Dinamika i prochnost' mashin, 1993, vol. 53, pp. 96-102. 21. Andreev Yu. M., Shteinvolf L. I. Komp'yuternoe postroenie differencial'nykh uravnenii dvijeniya negolonomnykh sistem. Dinamika i prochnost' mashin, 1993, vol. 54, pp. 93-98. 22. Andreev Yu. M., Drujinin E.I., Larin A.A. Praktikum po teoreticheskoi mehanike s primeneniem PEVM. Kharkiv: NTU "KhPI", 2004, 100 p. 23. Larin A. A., Mitin V.N., Shteinvolf L.I. Ispol'zovanie cifrovogo imitatora dlya issledovaniya sistem vibracionnoi diagnostiki rabocheho processa DVS. Dvigateli vnutrennego sgoraniya, 1983, vol. 37, pp. 118-124. 24. Larin A. A., Shteinvolf L.I. Primenenie metoda regulyariatsii v analiticheskoi vibracionnoi diagnostike mashin. Dinamika i prochnost' mashin, 1987, vol. 45, pp. 67-70. 25. Shteinvolf L. I. Dinamicheskie raschety mashin i mehanizmov. Moscow–Kyiv: Mashgiz, 1961, 340 p.

Поступила (received) 14.04.2016.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Андреев Юрий Михайлович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры систем и процессов управления, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-76-454, e-mail: andrjejev@gmail.com

**Andreev Yurii Mihailovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of control systems and processes, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-76-454, e-mail: andrjejev@gmail.com

**Дружинин Евгений Иванович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-76-373, e-mail: druzhinin\_e\_i@ukr.net

**Drujinin Evgenii Ivanovich** – Ph.D., Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-76-373, e-mail: druzhinin\_e\_i@ukr.net

**Ларин Андрей Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры истории науки и техники, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-76-503, e-mail: larinpokotilovka@mail.ru

**Larin Andrei Alekseevich** – Ph.D., Associate Professor, Department of History of Science and Technology, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-76-503, e-mail: larinpokotilovka@mail.ru

УДК 539.3

Л.В. АВТОНОМОВА, С.В. БОНДАРЬ, А.В. СТЕПУК, В.Л.ХАВИН, С.Ю. ШЕРГИН

## УДАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Проведено конечноэлементное моделирование процесса ударного деформирования тонкостенной конструкции из алюминиевого сплава при ударе пробойником с конусообразной формой рабочей части. Решение динамической контактной вязкопластической задачи позволило определить поля напряжений и деформаций для конструкции с дополнительным ребром жесткости. Анализ полей деформаций показал, что наличие дополнительного ребра приводит к перераспределению поля напряжений и приводит к увеличению жесткости всей конструкции.

**Ключевые слова:** тонкостенная конструкция, удар, пробойник, контактная задача, метод конечных элементов.

**Введение.** Для препятствия проникновению в различные помещения применяются раздвижные конструкции защитных устройств, качество охранных функций которых зависит от прочности и жесткости их составных звеньев. Как правило, эти звенья сложной конфигурации состоят из пластинчатых элементов, связанных ребрами. При создании надежного качественного защитного устройства прежде всего необходимо обеспечить эффективное сопротивление его элементов ударному воздействию при сохранении функционального назначения. Предварительный прочностной анализ динамической прочности таких пространственных тонкостенных элементов позволяет сделать выбор материала и геометрических параметров и обеспечить рациональное размещение подкрепляющих ребер.

**Анализ последних исследований и литературы.** Исследованиям высокоскоростного ударного деформирования тонкостенных конструкций посвящено много работ [1-4]. Влиянию подкрепляющих ребер на напряженно-деформированное состояние тонкостенных элементов при ударном воздействии посвящены исследования [5-7]. Численно-аналитическими методами решены задачи влияния ребер на жесткость и прочность одномерных и двумерных тел, которые воспринимают динамические сосредоточенные усилия [6]. Численное моделирование процесса деформирования тонких пластин путем удара пробойником с учетом связанности физических полей может быть проведено методом конечных элементов с помощью специализированных программных комплексов [7]. Так в работе [5] представлены результаты конечно-элементного расчета динамической прочности П-образной тонкостенной конструкции, подкрепленной ребрами жесткости при воздействии на нее летящим шаром.

**Целью** данной статьи является численное моделирование процесса деформирования тонкостенной конструкции коробчатого профиля при ударе коническим пробойником и исследование влияния дополнительного ребра жесткости на ее жесткость.

**Постановка задачи.** Математическая модель, которая описывает рассматриваемый процесс, включает следующие уравнения: закон сохранения импульса, закон сохранения энергии (энергетический

баланс), квазистационарные условия пластического деформирования (волновые процессы не учитывались вследствие небольшой скорости удара), условие скольжения (трения) на подвижной границе тел, нелинейные физические соотношения в виде нелинейной зависимости напряжений от скорости деформаций и температуры. Для сжимаемых материалов изменение гидростатического давления учитывается уравнением Грюнаизена, учитывалось условие разрушения. Так же учитывается термо-механическая связь физических процессов.

Для сжимаемых материалов модель Ми-Грюнаизена:

$$\sigma_Y = \sigma_0 C^2 \mu_j \left[ 1 + (1 - \gamma_0 / 2) \mu_j^2 - a \mu_j^2 / 2 \right] / \left[ 1 - (S_1 - 1) \mu_j - S_2 \mu_j^2 / (\mu_j + 1) - S_3 \mu_j^3 / (\mu + 1)^2 \right]^2 + (\gamma_0 + a \mu_j) \cdot E,$$

где  $\sigma_Y$  – интенсивность напряжений,  $\sigma_0$  – начальная интенсивность напряжений,  $\dot{\epsilon}_0$  – начальная скорость деформирования,  $C$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  – константы,  $\gamma_0$  – постоянная Грюнаизена,  $a$  – коррекция объема первого порядка и  $\mu_j = \sigma_Y / \sigma_0 - 1$ .

Момент разрушения оценивается по накоплению деформации в соответствии с

$$\epsilon^f = \left[ D_1 + D_2 \exp D_3 \sigma^* \right] \left[ 1 + D_4 \ln \dot{\epsilon}^* \right] \left[ 1 + D_5 T^* \right],$$

где  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  – экспериментальные константы,  $\dot{\epsilon}^*$  – скорость деформаций,  $\sigma^*$  – отношение  $\sigma_Y$  к эффективным напряжениям,  $T$  – температура:

$$\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eff}}; \quad \dot{\epsilon}^* = \frac{\dot{\epsilon}^f}{\dot{\epsilon}_0}$$

разрушение наступает при  $D = \sum \frac{\Delta \bar{\epsilon}^p}{\epsilon^f} \geq 1$ .

Численная реализация данной динамической контактной задачи может быть осуществлена методом конечных элементов на базе независимого подхода Лагранжа-Эйлера при помощи численных программных комплексов. Такой подход представляется использованием полностью связанных уравнений движения, связывающих вместе скорости движения как материальных точек, так и узлов КЭ-сетки.

Полное динамическое уравнение равновесия в матричной форме, которое позволяет получить приращения материальных узловых перемещений, скоро-



стей и ускорений за период времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  принимает вид:

$$M^L \bar{a} + C^{A1} \bar{v} + C^{A2} (\bar{v} - \bar{v}^g) + K^L \bar{u} + K^A (\bar{u} - \bar{u}^g) = \\ = \bar{f} - (M^L + M^A) a + (C^{A1} + C^{A3} + C^{A4}) v|_t.$$

В работе [8] получены матрицы  $M^L$ ,  $M^A$ ,  $C^{A1}$ ,  $C^{A2}$ ,  $C^{A3}$ ,  $C^{A4}$ ,  $K^L$ ,  $K^A$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{a}$  – приращения векторов материальных узловых перемещений, скоростей и ускорений за отрезок времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $\bar{u}^g$ ,  $\bar{v}^g$  – приращения узловых перемещений и скоростей для независимого движения узлов сетки за отрезок времени от  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $v$ ,  $a$  – значения узловых материальных скоростей и ускорений в момент времени  $t$ ;  $\bar{f}$  – вектор узловых усилий. Для решения нелинейного матричного уравнения используется метод Ньютона-Рафсона. Для интегрирования по времени используется явная схема Неймарка, которая заключается в определении неизвестных приращений переменных и скоростей в момент времени  $t + \Delta t$ .

**Численная реализация и обсуждение результатов.** При решении динамической контактной задачи были получены параметры напряженно-деформированного состояния в тонкостенной конструкции коробчатого профиля алюминиевого сплава при ударе стальным пробойником массой 1 кг с конической формой рабочей части (угол атаки 30 град.), который движется со скоростью 5 м/с. На рис. 1 приведена расчетная схема.

В табл. 1 приведены геометрические параметры и физико-механические характеристики стального пробойника и конструкции из алюминиевого сплава. Конечноэлементная модель включает 2290 элементов и 3675 узлов.

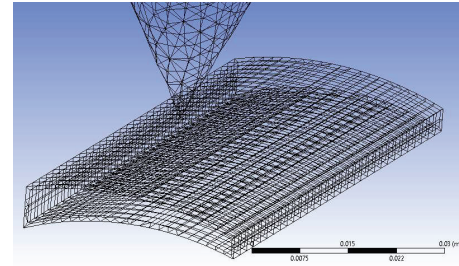


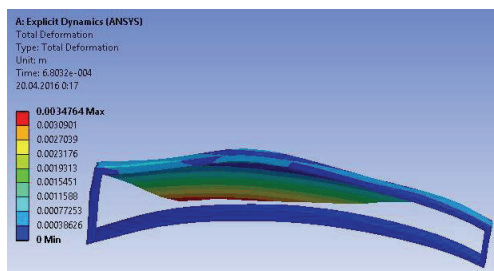
Рисунок 1 – Расчетная схема

Численное моделирование рассматриваемого ударного процесса позволило установить, что для данной геометрии и материала конструкции происходит пластическое деформирование только верхней пластины без разрушения.

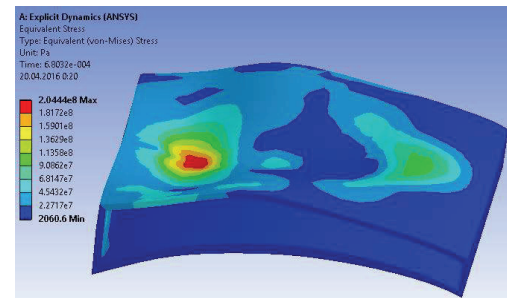
Таблица 1 – Параметры конструкции

Параметр	Сталь	Алюминий
Длина, м	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
Ширина, м	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
Высота, м	0,18385	$8,566 \cdot 10^{-3}$
Толщина, м		$1,0 \cdot 10^{-3}$
Плотность, г/м <sup>3</sup>	7826	2710
Модуль упругости, МПа	$2,5 \cdot 10^{11}$	$0,8 \cdot 10^{11}$
Предел прочности, МПа	470	275

На рис. 2 приведено поле распределения перемещений (а) и напряжений (б) в тонкостенной конструкции алюминиевого сплава при ударном воздействии. Максимальное значение перемещений верхней поверхности достигает 0,0035 м, а значения напряжений по Мизесу составляют: максимальное – 204 МПа, минимальное – 22,7 МПа.

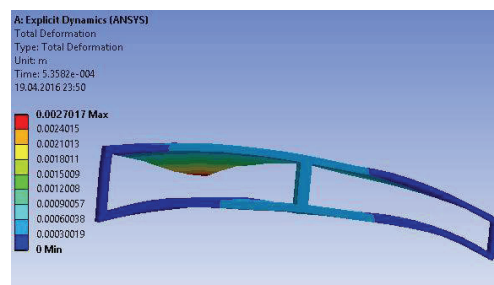


а

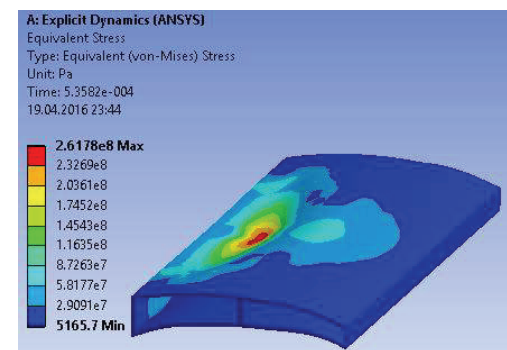


б

Рисунок 2 – Распределение перемещений (а) и напряжений (б) в тонкостенной конструкции при ударном воздействии



а



б

Рисунок 3 – Распределение перемещений (а) и напряжений (б) в тонкостенной конструкции с серединным ребром жесткости при ударном воздействии

На рис. 3 приведено поле распределения перемещений (а) и напряжений (б) в тонкостенной конструкции коробчатого профиля того же размера с добавленным срединным ребром жесткости при ударе пробойника в точке с теми же координатами. Максимальное значение перемещений верхней поверхности снизилось до 0,0027 м, а максимальное значение напряжений по Мизесу составило 262 МПа.

Анализ напряженно-деформированного состояния при ударном взаимодействии с пробойником при скорости движения 5 м/с на тонкостенную конструкцию показал, что наличие добавочного срединного ребра увеличивает контактную жесткость всей конструкции в четыре раза и существенно уменьшает область пластического деформирования.

**Выводы.** Исследовано ударное взаимодействие пробойника с конусообразной формой рабочей части с тонкостенной коробчатой конструкцией изготовленной из алюминиевого сплава. Численное моделирование ударного процесса проведено с помощью метода конечных элементов на базе независимого подхода Лагранжа-Эйлера для двух вариантов тонкостенной коробчатой конструкции. Анализ прочности тонкостенной конструкции коробчатого профиля из алюминиевого сплава при ударном воздействии пробойником значительной массы показал, что при введении дополнительного срединного ребра в конструкцию, позволило изменить жесткость этой конструкции и улучшить прочностные свойства всего составного защитного устройства, элементами которого она является.

**Список литературы:** 1. Абросимов Н.А. Исследование динамического деформирования упругопластических сферических оболочек при тепловом ударе / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 1. – С. 139-143. 2. Баженов В.Г. Исследование упругопластических процессов деформации круглых пластин при импульсном нагружении с учетом больших прогибов / В.Г. Баженов, М.А. Батанин // Прикл. механика. – 1978. – № 3. – С. 74-78. 3. Воробьев Ю.С. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии / Ю.С. Воробьев, М. В. Чернобрышко // Проблемы чис-

ловальной механики и прочности конструкций. – 2010. – Вып. 14. – С. 87-92. 4. Бизюк А.В. Скоростной удар по тонкостенным конструкциям / А.В. Бизюк, В.В. Бизюк, А.В. Колодязный // Вестник ХНУ ХПИ. – 2007. – № 775. – С. 29-35. 5. Автономова Л. В. Деформирование П-образной тонкостенной конструкции с ребрами жесткости при ударе шаром / Л. В. Автономова, С. В. Бондарь, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 3-8. 6. Дмитриева Л. М. Пластинки и оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, под действием локальных динамических нагрузок / Л. М. Дмитриева // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1976. – № 12. – С. 172-187. 7. Степук О. В. Особливості деформування П-подібної тонкостінної конструкції при ударі / О. В. Степук, Л. В. Автономова, С. В. Бондарь // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 37. – С. 193-199. 8. Bayoumi H. N. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for quasi-static and dynamic metal forming simulation / H. N. Bayoumi. – PhD. Dissertation. – University of British Columbia. – 2001. – 128 p.

**Bibliography (transliterated):** 1. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Issledovanie dinamicheskogo deformirovaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri teplovom udare. Izv. AN SSSR. MTT. 1978, No 1, pp. 139-143. 2. Bazhenov V.G., Batanin M.A. Issledovanie uprugoplasticheskikh processov deformatsii kruglykh plastin pri impul'snom nagruzenii s uchetom bol'shikh progibov. Prikl. mehanika, 1978, No 3, pp. 74-78. 3. Vorob'ev Ju., Chernobrykko V. Skorostnoe deformirovanie jelementov konstrukcij v uprugoplasticheskoy stadii. Problemy obchyslyval'noyi mekhaniki i mitsnosti konstruktсий. 2010, vol. 14, pp. 87-92. 4. Bizjuk A.V., Bizjuk V.V., Kolodjazhnyj A.V. Skorostnoj udar po tonkostennym konstrukcijam. Vestnik HNU "KhPI", 2007, No 775, pp. 29-35. 5. Avtomonova L. V., Bondar' S. V., Stepuk A. V. Deformirovanie P-obraznoj tonkostennoj konstrukcii s rebrami zhestkosti pri udare sharom. Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. Kharkiv: NTU "KhPI", 2014, No 6 (1049), pp. 3-8. 6. Dmitrieva L. M. Plastinki i obolochki, podkreplennye rebrami zhestkosti, pod dejstviem lokal'nyh dinamicheskikh nagruzok. Issledovanija po teorii plastin i obolochek, 1976, No 12, pp. 172-187. 7. Stepuk O. V., Avtomonova L. V., Bondar S. V. Osoblyvosti deformuvannya P-podibnoyi tonkostinnoyi konstruktсийi pry udari. Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. Kharkiv: NTU "KhPI", 2013, No 37, pp. 193-199. 8. Bayoumi H. N. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for quasi-static and dynamic metal forming simulation. PhD. Dissertation. University of British Columbia, 2001, 128 p.

Поступила (received) 03.06.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Автономова Людмила Владимировна** – канд. техн. наук, вед. научн. сотр., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com

**Avtonomova Ludmila** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Leading Researcher, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: lavtonomova@gmail.com

**Бондарь Сергей Владимирович** – канд. техн. наук, ст. научн. сотр., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru

**Bondar Sergiy** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: serg\_xpi@mail.ru

**Степук Александр Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: abtop@yahoo.com

**Stepuk Alexander** – Candidate of Physics -Mathematical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: abtop@yahoo.com

**Хавин Валерий Львович** – канд. техн. наук, зав. каф., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: Vkhavin@kpi.kharkov.ua

**Khavin Valeriy** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Head of Department, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: Vkhavin@kpi.kharkov.ua

**Шергин Сергей Юрьевич** – ст. преп., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: 70-761-78, e-mail: Sshergin@kpi.kharkov.ua

**Shergin Sergei** – Senior Lecturer, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: Sshergin@kpi.kharkov.ua

УДК 539.3

В. Ф. ВАСИЛЬЧЕНКО, А.Н. ЛОМАКИН

## ОПТИМИЗАЦИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматриваются круглые пластины, подвергающиеся действию нестационарной нагрузки. Предложен алгоритм решения задачи о пластине минимального веса с ограничениями на перемещения и напряжения. Задача решается на основе метода последовательных приближений. Необходимые условия оптимальности формулируются на основе принципа Понтрягина. На основе данных условий оптимальности и алгоритма метода последовательных приближений разработана универсальная программа оптимизации круглых пластин. С ее помощью находятся конфигурации минимального объема с ограничениями на напряжения и перемещения для произвольного закрепления. При этом исходные и сопряженные переменные для каждого конкретного геометрического исполнения пластины  $h(r)$  ищутся путем разложения по собственным формам колебаний. Краевые задачи решаются методом начальных параметров; начальные задачи при этом интегрируются методом Рунге – Кутты. Максимизация гамильтониана производится в конечном наборе точек по радиусу пластины. Приведены результаты расчета оптимальной пластины.

**Ключевые слова:** пластины, оптимизация, напряженно-деформированное состояние, минимизирующий объем, крайняя задача.

**Введение.** Круглые пластины, подвергающиеся воздействию нестационарных изгибающих нагрузок, служат моделями разнообразных элементов конструкций. Это диски турбомашин, крышки-перегородки, диафрагмы, основания роторных машин и т. п. В математическом плане задачи оптимизации круглых пластин близки к соответствующим задачам оптимизации стержней при изгибных колебаниях. В то же время для них характерен и ряд отличительных особенностей, которые требуют детализации и изучения.

**Постановка задачи.** В статье рассматривается задача минимизации массы круглой пластины при ограничениях, накладываемых на характеристики напряженно-деформированного состояния. Для исследования привлекается математический аппарат принципа максимума Понтрягина [1]. Вычисление оптимальных параметров основывается на методе последовательных приближений варьируемым функциям [2]. Алгоритм решения задач оптимизации элементов конструкций в случае периодического нагружения представлен в книге [3].

**Решение задачи.** Рассмотрим круглую пластину с внутренним радиусом  $r_1$  и внешним  $r_2$ , нагруженную произвольной осесимметричной изгибающей нагрузкой  $q(r, t)$ . Деформации пластины описываются системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \varphi; & \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\frac{M}{rD} - \frac{\gamma}{r} \varphi; \\ \frac{\partial M}{\partial r} &= Q - (1 - \gamma)D \frac{\varphi}{r} + \frac{\gamma}{r} M; & (1) \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= \rho h r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(r, t) r. \end{aligned}$$

Здесь  $w(r, t)$ ,  $\varphi(r, t)$  – перемещение и угол поворота на окружности радиуса  $r$  в момент времени  $t$

$$M = r M_r; \quad Q = r Q_r,$$

где  $M_r$  ( $r, t$ ),  $Q_r$  ( $r, t$ ) – изгибающий момент и перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины ок-

ружности радиуса  $r$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \gamma^2)}$  – цилиндрическая жесткость;  $E$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  – модуль упругости, коэффициент

Пуассона и плотность материала;  $h(r)$  – закон изменения толщины пластины по радиусу (конфигурация).

Система уравнений дополняется начальными условиями

$$W(r, 0) = W_0(r); \quad \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = V_0(r) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 w(r_1, t) + b_1 Q(r_1, t) &= C_1(t); \\ a_2 \varphi(r_1, t) + b_2 M(r_1, t) &= C_2(t); \\ a_3 w(r_2, t) + b_3 Q(r_2, t) &= C_3(t); \\ a_4 \varphi(r_2, t) + b_4 M(r_2, t) &= C_4(t), \end{aligned} \quad (3)$$

которые для различных значений коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $C_i$  реализуют наиболее употребительные способы закрепления внутреннего  $r = r_1$  и внешнего  $r = r_2$  контуров кольцевой пластины, а также дают возможность учесть нагружение контурными силами и моментами. Для сплошных пластин необходимо учесть условия  $\varphi = 0$  и  $M = 0$  в точке  $r = 0$ .

Варьируемой будем считать конфигурацию  $h(r)$ , подчиненную конструктивным ограничениям

$$h_1(r) \leq h(r) \leq h_2, \quad (4)$$

а задача оптимизации будет состоять в определении конфигурации  $h(r)$ , удовлетворяющей ограничениям (4) и минимизирующей объем пластины

$$I_0 = V = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r h(r) dr$$

при условии, что на заданном интервале времени  $(0, T)$  выполнены ограничения на перемещение и интенсивность напряжений

$$|W(r, t)| \leq W_d; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_r \sigma_\theta \leq \sigma_d. \quad (5)$$

Радиальное и окружное нормальные напряжения подсчитываются через решения краевой задачи (1) – (3) по формулам

$$\sigma_r = \frac{6M}{rh^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{Eh}{2r} \varphi + \gamma \sigma_r.$$

Ограничения на перемещения и напряжения сводятся к интегральным условиям

$$I_w = \int_0^T \int_{r_1}^{r_2} K_w |W| dr dt = 0; \quad I_\sigma = \int_0^T \int_{r_1}^{r_2} K_\sigma \sigma_i^2 dr dt = 0$$

с помощью штрафных функций

$$K_w(r,t) = \begin{cases} K_1, |W(r,t)| > W_d; \\ 0, |W(r,t)| \leq W_d; \end{cases}$$

$$K_\theta(r,t) = \begin{cases} K_2, \sigma_i(r,t) > \sigma_d; \\ 0, \sigma_i(r,t) \leq \sigma_d. \end{cases}$$

Значения параметров  $K_1, K_2$  заранее неизвестны и устанавливаются пробными расчетами. Необходимые условия оптимальности формируются на основе принципа максимума [1] и будут представлены исходной краевой задачей (1) – (3), сопряженной краевой задачей

$$\frac{d\bar{W}}{dr} = \bar{\varphi}; \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dr} = -\frac{\bar{M}}{rD} - \nu \frac{\bar{\varphi}}{r} - 6K_2 \frac{\sigma_r(2-\nu) + \sigma_\theta(2\nu-1)}{rh^2};$$

$$\frac{d\bar{M}}{dr} = \bar{Q} - (1-\nu^2)D \frac{\bar{\varphi}}{r} + \frac{\nu}{r} \bar{M} - K_2 \frac{Eh}{2r} (2\sigma_\theta - \sigma_r); \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dr} = \rho hr \frac{d^2W}{dt^2} - K_1 \text{sign}(W)$$

с однородными начальными условиями

$$\bar{W}(r, T) = \frac{d\bar{w}(r, T0)}{dt} = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 \bar{W}(r_1, t) + b_1 \bar{Q}(r_2, t) &= 0; \\ a_2 \bar{\varphi}(r_1, t) + b_2 \bar{M}(r_1, t) &= 0; \\ a_3 \bar{W}(r_2, t) + b_3 \bar{Q}(r_2, t) &= 0; \\ a_4 \bar{\varphi}(r_2, t) + b_4 \bar{M}(r_2, t) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

замкнутыми на оптимальном  $h(r)$  условием максимума гамильтониана

$$H = \int_0^T \left( -\frac{M\bar{M}}{rD} + (1-\nu^2)D \frac{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}{r} + \rho hr \bar{W} \frac{d^2W}{dt^2} - K_2 \sigma_i^2 \right) dt - rh. \quad (9)$$

На основе данных условий оптимальности и алгоритма метода последовательных приближений [2, 3] была разработана универсальная программа оптимизации круглых пластин. С ее помощью находятся конфигурации минимального объема с ограничениями на напряжения и перемещения для произвольного закрепления. При этом исходные и сопряженные переменные для каждого конкретного геометрического исполнения пластины  $h(r)$  ищутся путем разложения по собственным формам колебаний [4]. Краевые задачи решаются методом начальных параметров; начальные задачи при этом интегрируются методом Рунге – Кутты. Максимизация гамильтониана (9) производится в конечном наборе точек по радиусу пластины.

**Пример.** В качестве примера рассматривается решение задачи оптимизации наружного щита мощного турбогенератора. Щит должен обладать необходимой жесткостью и прочностью, а также обеспечивать, за счет уплотнения места соединения с ротором, герметизацию внутренней полости статора, где под некоторым избыточным давлением находится охлаждающая среда – водород.

Исходя из геометрических размеров конструк-

ции, моделью наружного щита может служить кольцевая пластина с внутренним и внешним радиусами  $r_1 = 0,4$  м,  $r_2 = 1,8$  м.

Параметры материала:

$$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \nu = 0,3; \quad \rho = 7,84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Расчетная нагрузка  $q = 7,84 \cdot 10^5$  Па прикладывается в момент времени  $t = 0$  и имитирует внезапный взрыв охлаждающей среды.

Необходимо найти закон изменения толщины щита по радиусу, подчиняющийся конструктивным ограничениям  $0,07 \text{ м} \leq h(r) \leq 0,2$  м и минимизирующий объем материала при условии, что для всех  $r \in [r_1, r_2], t \in [0, T]$  ( $T = 0,02$  с) выполнено условие относительно интенсивности напряжений,

$$\sigma_i^2(r, t) \leq \sigma_d^2, \quad (10)$$

где максимальное значение интенсивности напряжений для исходного варианта изготовления щита  $h(r) = 0,14$  м. Условие (10) обеспечивает для оптимального по весовым характеристикам щита такой же запас по прочности, как и для исходного варианта конструкции.

После анализа экспериментальных данных была рассмотрена модель пластины свободной на внутреннем контуре относительно линейных перемещений и упруго закреплена на пружине жесткостью  $C_\varphi$  ( $C_\varphi = 0,3 \cdot 10^8 \text{ нм}^{-1}$ ) относительно угловых перемещений. Выбранная модель соответствует начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} W(r, 0) = \frac{dW(r, 0)}{dt} &= 0; \quad M(r_1 t) + r_1 C_\varphi \varphi(r_1, t) = 0; \\ Q(r_1, t) = W(r_2, t) = \varphi(r_2, t) &= 0. \end{aligned}$$

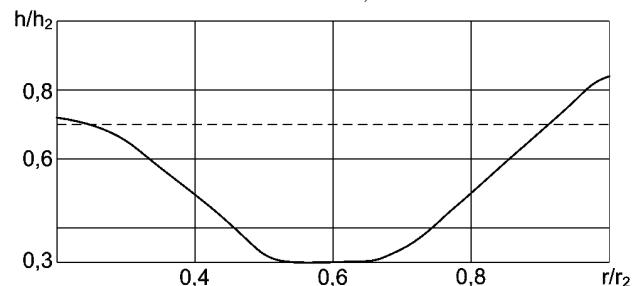
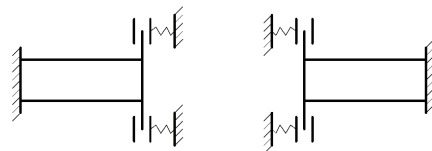


Рисунок 1 – Оптимальная конфигурация конструкции

**Выводы.** На рис. 1 приведена оптимальная конфигурация. Пунктиром показан исходный проект. Оптимальный проект дает экономию материала около 15 %.

**Список литературы:** 1. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969. – 384 с. 2. Черноушко Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф. Л. Черноушко, Н. В. Банчук. – М.: Наука, 1973. – 238 с. 3. Гринев В. Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В. Б. Гринев, А. П. Филипов. – К.: Наукова думка, 1975. – 295 с. 4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Pontryagin L. S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov*. Moscow: Nauka, 1969, 384 p. 2. Chernous'ko F. L., Banichuk N.V. *Variacionnye zadachi mehaniki i upravleniya*. Moscow: Nauka, 1973, 238 p. 3. Grinev

V. B., Fillipov A.P. *Optimizaciya elementov konstrukcij po mehanicheskim harakteristikam*. Kyiv: Naukova dumka, 1975, 295 p. 4. Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow: Nauka, 1967, 444 p.

*Postupila (received) 22.07.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Васильченко Виктор Федорович** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-60-32, e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Vasilchenko Viktor Fedorovich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Applied Mathematics, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 60- 32; e-mail: viktor\_vasilchenko@rambler.ru

**Ломакин Александр Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-68-79, e-mail: anlomakin@rambler.ru

**Lomakin Aleksandr Nikolaevich** – candidate of technical science, associate professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI", tel. (057) 707- 68- 79; e-mail: anlomakin@rambler.ru

УДК 539.3

**Д.Г. ВИНОГРАДСКИЙ, А.Г. АНДРЕЕВ**

**ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ**

Данная работа посвящена исследованию взаимного влияния соединений с натягом для вариантов соединений: сплошной вал с двумя втулками, два сплошных вала с втулкой, пустотелый вал с двумя втулками, два пустотелых вала с втулкой в ПК ANSYS. Получены характеристики НДС (эквивалентные напряжения. Контактные давления суммарные перемещения) в зависимости от величины интервала между соединениями с натягом.

**Ключевые слова:** соединения с натягом, метод конечных элементов, напряжения, деформации.

**Введение.** Соединение с натягом широко применяются в различных машинах и механизмах, когда требуется передача больших осевых сил, крутящих моментов или нагрузок. Прочность и относительная неподвижность этих соединений обеспечиваются силами трения, которые зависят от давления между соединительными деталями, и определяется величиной натяга - разницы размеров охватывающей и охватываемой деталей. Силы трения обусловлены созданием распределенной нормальной нагрузки (давления) на сопряженных поверхностях соединяемых деталей. Посадочный размер охватывающей детали делают несколько меньше посадочного размера охватываемой детали. После соединения посадочный размер деталей становится общим, при этом посадочный размер охватывающей детали в результате упругих деформаций увеличивается, а охватываемой – уменьшается. Из соединений деталей с натягом наибольшее распространение получили цилиндрические соединения, у которых одна деталь охватывается второй по цилиндрической поверхности. Характерными примерами деталей, соединенных посадкой с натягом, являются: венцы зубчатых и червячных колес, подшипники качения, роторы электродвигателей и т. д.

**Постановка задачи.** При удлинении валов или соединении их с помощью втулок используются посадки с натягом, которые могут влиять друг на друга, поскольку фактический натяг не будет равен исходному геометрическому, а будет скорректирован влия-

нием рядом находящегося второго соединения с натягом, а также консольным эффектом выступающих частей валов и втулок.

Целью данной работы является выяснение, в какой мере это справедливо.

Рассматриваются 6 типов соединения с натягом:

– тип А – сплошной вал и втулка равных осевых размеров (рис. 1),

– тип Б - пустотелый вал и втулка равных осевых размеров (рис. 2),

– тип I – сплошной вал с двумя втулками (рис. 3),

– тип II – два сплошных вала с втулкой (рис. 4),

– тип III – пустотелый вал с двумя втулками (рис. 5),

– тип IV – два пустотелых вала с втулкой (рис. 6).

При оценке взаимного влияния с натягом очевидно, что любое из соединений типа I, II, III, IV – это 2 соединения типа А или Б и конструктивно объединяющие их в одно целое элементы в виде валов и втулок.

Таблица 1 – Характеристики материала

Физический параметр	Значения для стали 40Х
Модуль упругости E, МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7800
Предел текучести $\sigma_t$ , МПа	785
Предел прочности $\sigma_b$ , МПа	980
Коэффициент трения $\mu$	0,15
Натяг в соединении $\Delta$ , М	0,00012

Взаимному влиянию соединений с натягом соответствует изменение энергии этих соединений. Энергия, накопленная в соединениях типа А или Б при технологической операции «посадка с натягом» корректируется при переходе этих соединений типа А или Б при в состав одного из соединений типа I, II, III, IV вследствие:

- 1) консольных эффектов за счет выступающих частей валов и втулок,
- 2) деформации конструктивно объединяющих элементов в виде валов или втулок соединений типа I, II, III, IV, которые в этом случае оказываются продлением соответствующих валов и втулок соединений типа А или типа Б.

**Теоретические основы.** Поставленная задача моделировалась с помощью МКЭ в ПК ANSYS. Для решения проблемы использовался стандартный конечный элемент программного пакета - трехмерный восьми узловый объемный элемент PLANE82, который имеет три степени свободы в каждом узле. Для создания контактной пары в ПК ANSYS использовались конечные элементы CONTA 172 и TARGET 169.

Точки фиксации на рисунках 1-6 обозначены \*.

Решение задачи МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\}, \tag{1}$$

где  $[K]$  – матрица жесткости тела, состоящая из матриц жесткости конечных элементов;  $\{U\}$  – вектор-столбец узловых перемещений;  $\{F\}$  – вектор приведенной внешней нагрузки.

Формулы для расчета удельного давления на поверхности контакта в области упругих деформаций [1]:

$$P = \frac{N}{(C_1/E + C_2/E)dx}; \tag{2}$$

$$C_1 = \frac{1+(d_1/d)^2}{1-(d_1/d)^2} - \mu; \quad C_2 = \frac{1+(d/d_2)^2}{1-(d/d_2)^2} + \mu, \tag{3}$$

где  $E_1$  та  $E_2$  – модуль упругости;  $N$  – расчетный натяг,  $d$  – номинальный размер соединения;  $d_1$  – внутренний диаметр вала;  $d_2$  – наружный диаметр втулки;  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона соответственно вала и втулки (рис. 1, 2).

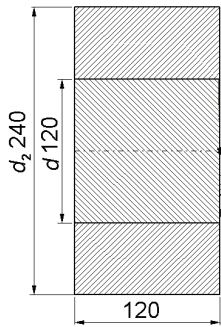


Рисунок 1 – Схема сплошного вала и втулки

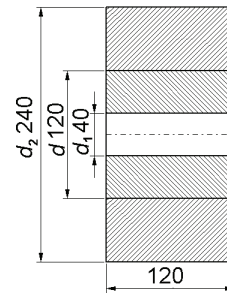


Рисунок 2 – Схема полого вала и втулки

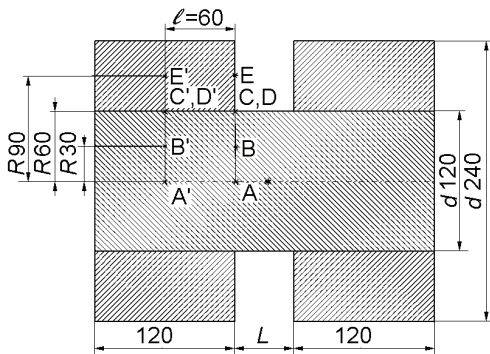


Рисунок 3 – Схема сплошного вала с двумя втулками

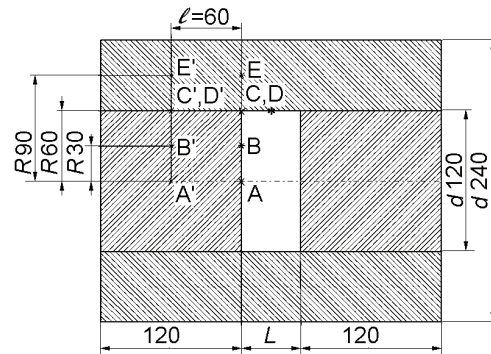


Рисунок 4 – Два сплошных вала с втулкой

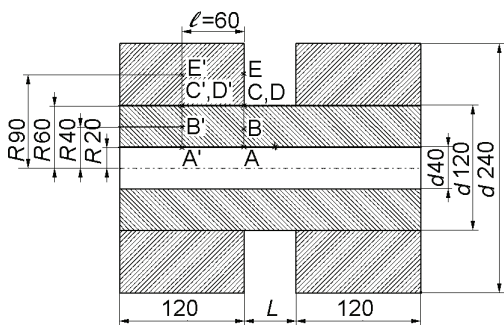


Рисунок 5 – Пустотелый вал с двумя втулками

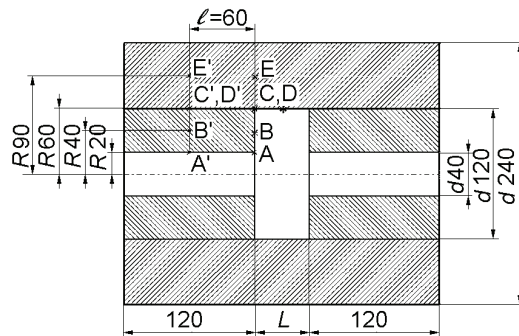


Рисунок 6 – Два пустотелых вала с втулкой

**Анализ полученных результатов.**

В результате исследования выяснили, что в диаметральной сечении, проходящее через середину контактной зоны (расчетные точки А', В', С', D', Е'), влияние второго соединения с натягом слабо доходит, в связи с чем будем использовать диаметральной торцевое сечение с точками А, В, С, D, Е для определения характеристик НДС.

Кривые на последующих графиках будут соответствовать точкам (А, В, С – вал, D, Е – втулка) с такими обозначениями:



**НДС соединения вала и втулки (тип А, тип Б)**

Полученные результаты приведены в табл. 2, 3.

Таблица 2 – Характеристики НДС соединения типа А (см. рис. 1)

Радиус R, мм	$\sigma_{\text{ЭКВ}}$ , МПа	$P_{K_2}$ , МПа	$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м
0	70,2	76,2	0
30	69,4		69,9
60	70		140
60	183		469
90	84,5		377

Таблица 3 – Характеристики НДС соединения типа Б (см. рис. 2)

Радиус R, мм	$\sigma_{\text{ЭКВ}}$ , МПа	$P_{K_2}$ , МПа	$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м
20	142	71,6	142
40	80,1		145
60	75,2		180
60	172		446
90	79,4		361

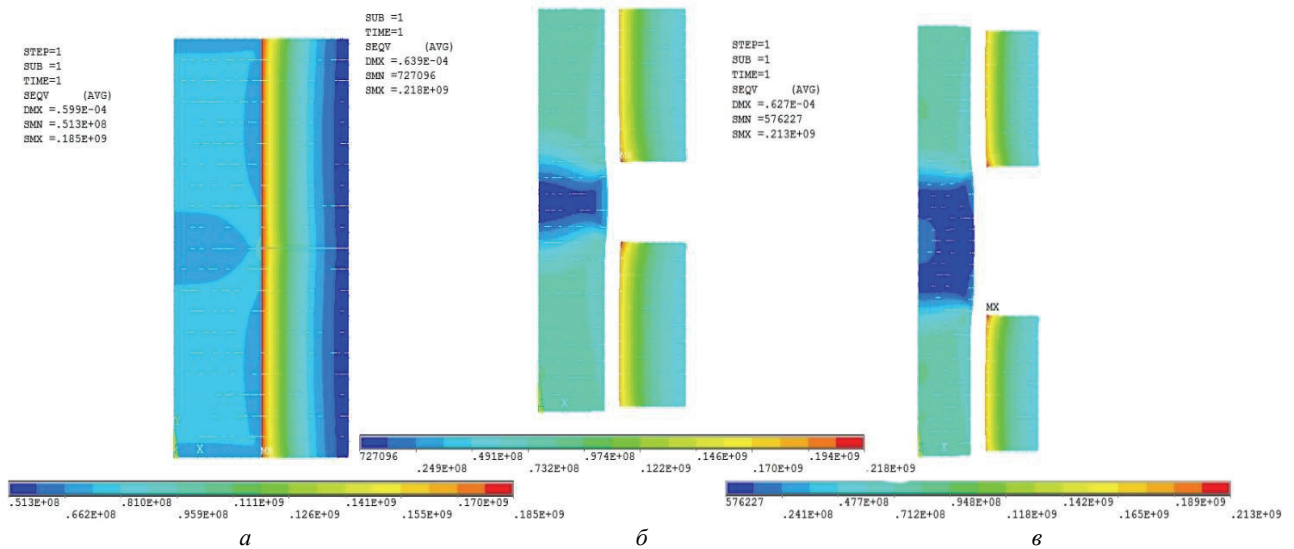


Рисунок 7 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 120 мм

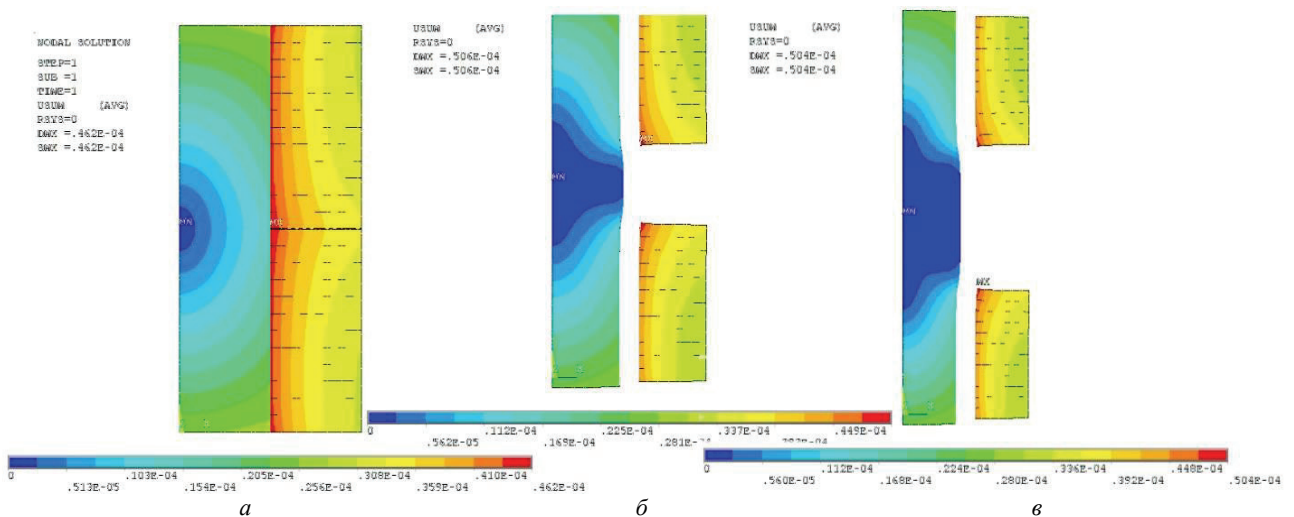


Рисунок 8 – Суммарные перемещения: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 120 мм

**НДС соединений сплошного вала и двух втулок (тип Г)**

Полученные результаты приведены на рис. 7-12.

Проанализировав графики, мы можем судить, что эквивалентные напряжения в торцевом сечении вала

уменьшаются при увеличении интервала L, стабилизируются при L = 120 мм. В зоне контакта на втулке напряжение растет до L = 50 мм. Суммарные перемещения до L = 50 мм в вале падают, во втулке растут.

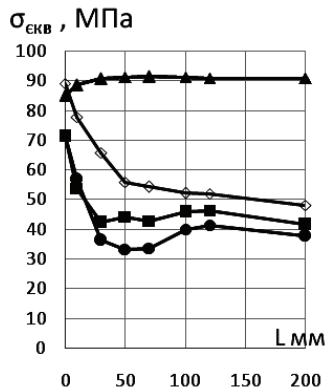


Рисунок 9 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

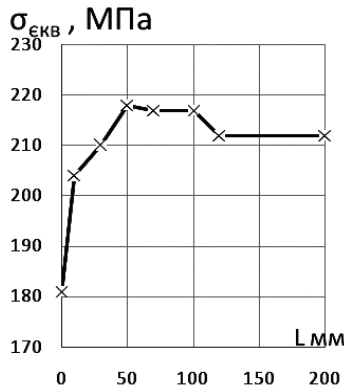


Рисунок 10 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

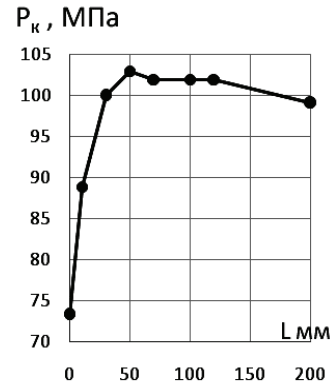


Рисунок 11 – Контактные давления

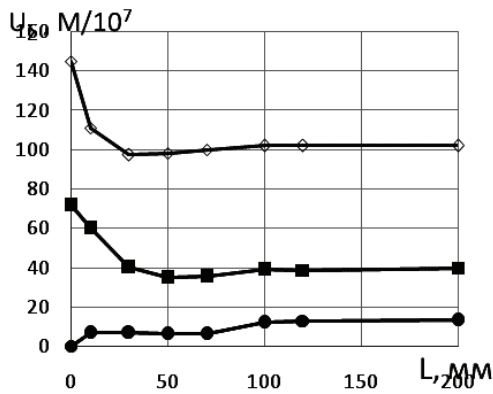
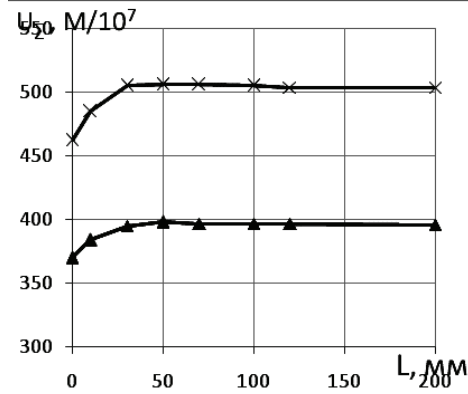


Рисунок 12 – Суммарные перемещения



**НДС соединений двух сплошных валов и втулки(тип II)**

Полученные результаты приведены на рис. 13-17.

С увеличением зазора  $L$  в торцевом сечении эквивалентные напряжения втулки падают, в вале растут, контактные давления растут, все перемещения уменьшаются и только на втулке в зоне контакта повышаются. При значении  $L = 150$  мм они перестают существенно изменяться.

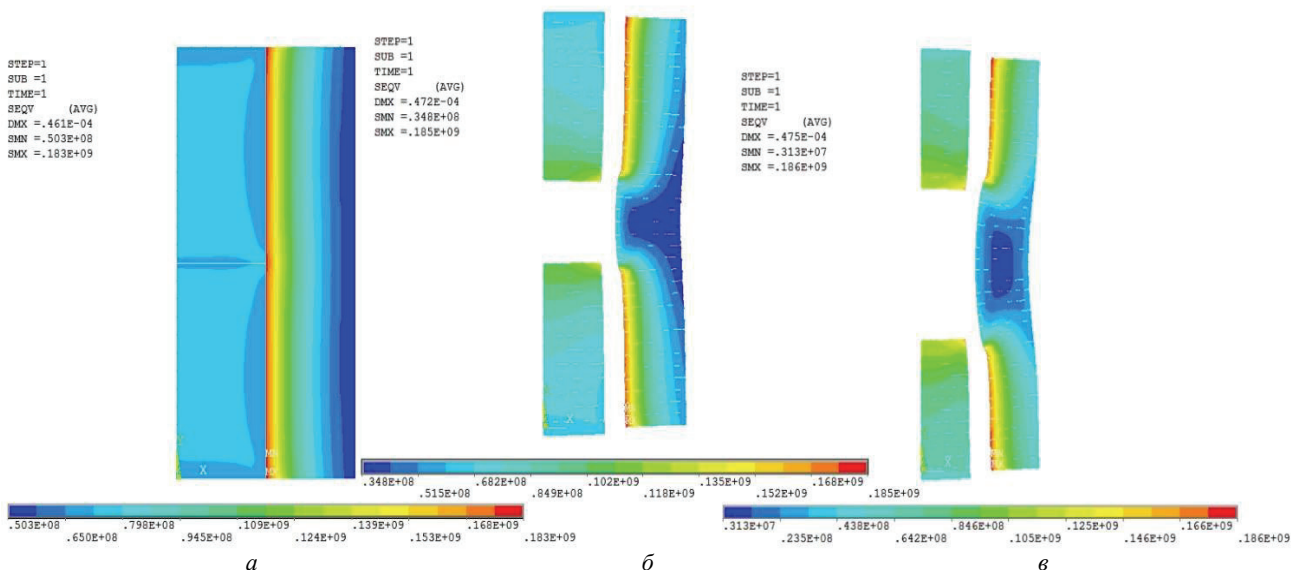


Рисунок 13 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а –  $L = 0$ , б –  $L = 70$  мм, в –  $L = 150$  мм



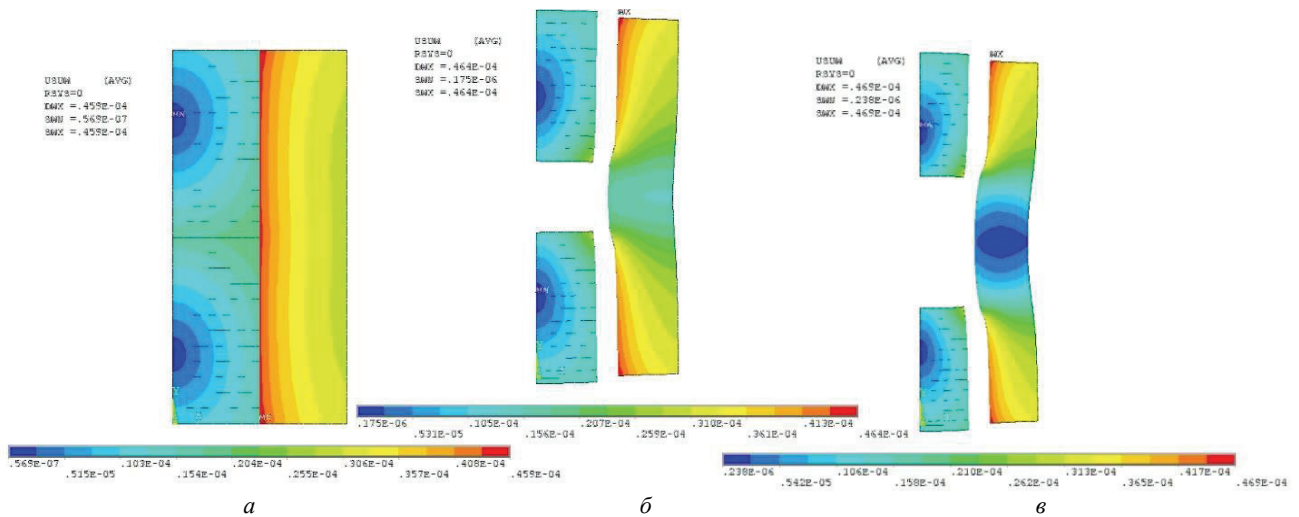


Рисунок 14 – Суммарные перемещения: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 150$  мм

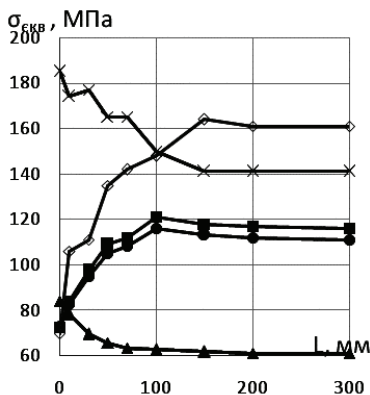


Рисунок 15 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

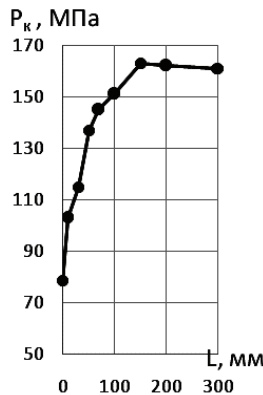


Рисунок 16 – Контактные давления

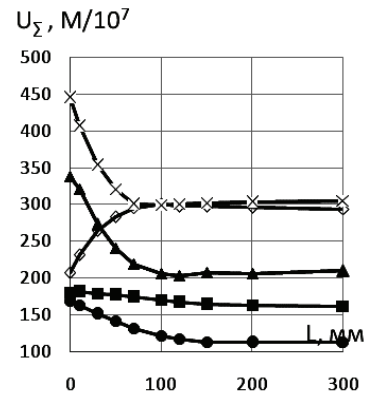


Рисунок 17 – Суммарные перемещения

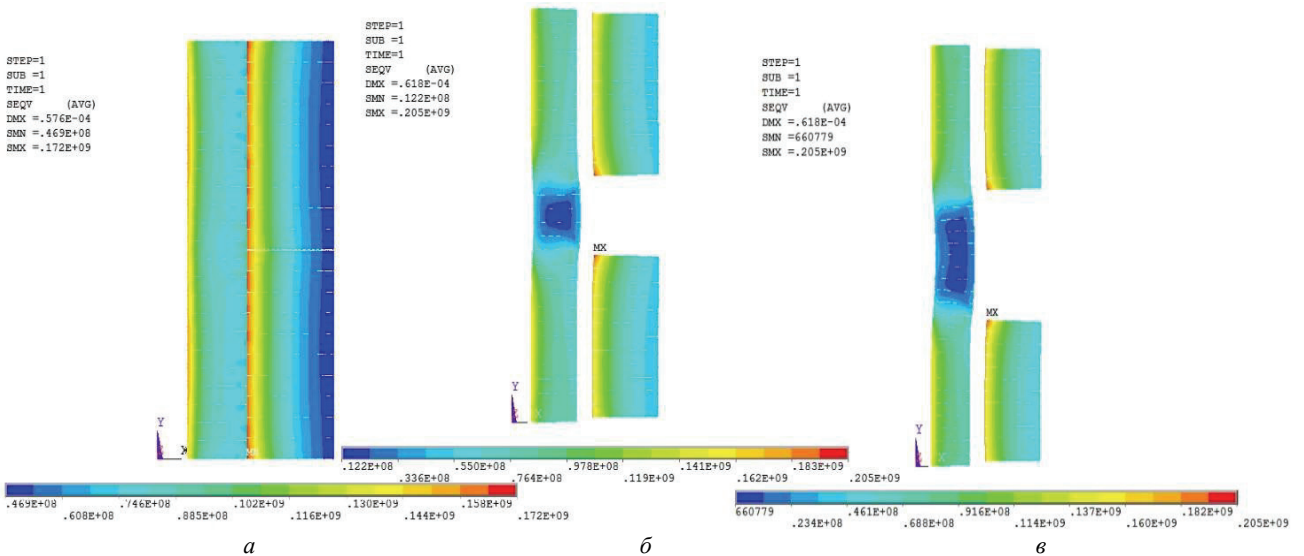


Рисунок 18 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 100$  мм

**НДС соединение двух пустотелых валов и втулки(тип IV)**

Полученные результаты приведены на рис. 23-27.

С увеличением зазора  $L$  эквивалентные напряжения в торцевом сечении вала повышаются, во втулке снижаются, и при  $L = 100$  мм стабилизируются. Контактные давления растут до  $L = 100$  мм. Суммарные перемещения на валу увеличиваются, а во втулке

уменьшаться и, при достижении зазора  $L = 100$  мм перестают существенно меняться.

В табл. 4 и 5 приведены сводные характеристики НДС соединений типа А или типа Б и соответствующих им соединениям типа I, II или III, IV, причем эти характеристики соответствуют расчетным точкам С и D для  $R = 60$  мм в торцевом сечении соединений с натягом при осевой координате  $l = 0$ .

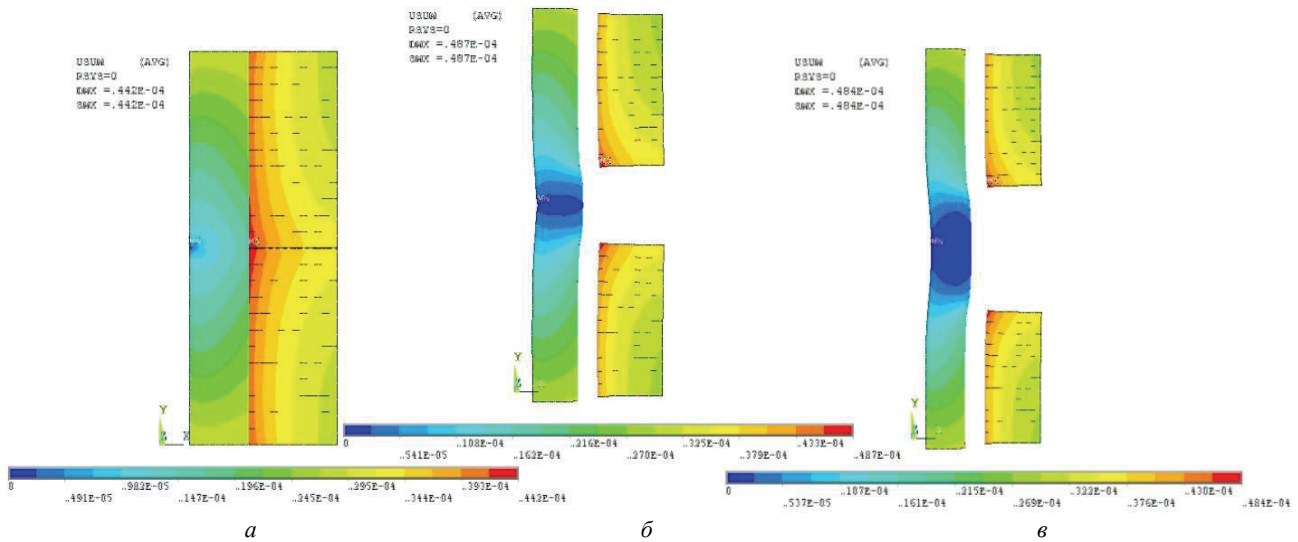


Рисунок 19 – Суммарные перемещения: а –  $L = 0$ , б –  $L = 50$  мм, в –  $L = 100$  мм

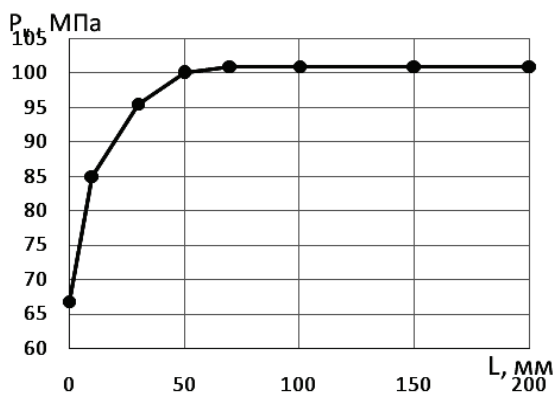


Рисунок 20 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

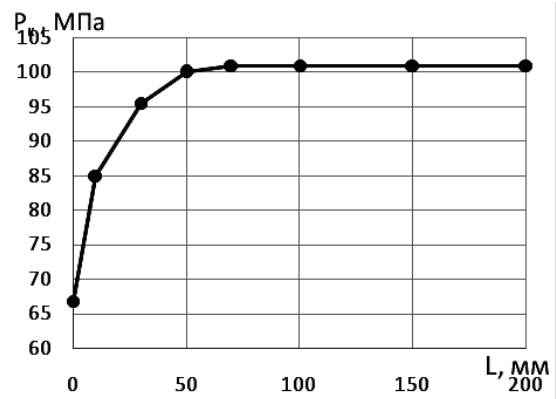


Рисунок 21 – Контактные давления

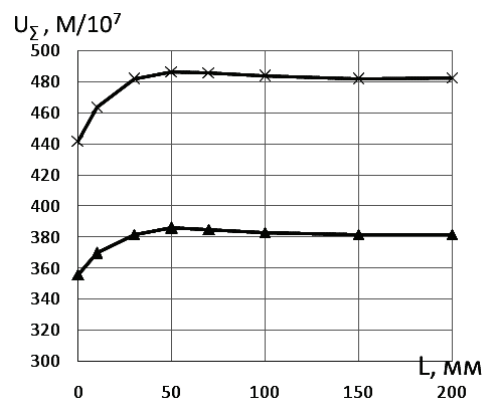
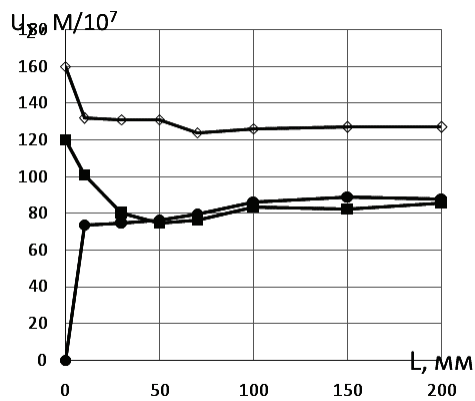


Рисунок 22 – Суммарные перемещения

Таблица 4 – НДС соединений с натягом типа А и типа I, II

Характеристики НДС	Радиус детали	Тип А	Тип I				Тип II			
			L, мм				L, мм			
			0	50	70	120	0	50	100	150
$\sigma_{\text{сKB}}$ , МПа	Втулка R60	183	181	218	217	212	185	165	150	141
	Вал R60	70,2	89,2	55,9	54,3	51,9	69,8	135	148	164
$P$ , МПа	R 60	76,2	73,3	103	102	102	78,8	137	151	163
$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м	Втулка R60	469	462	505	506	505	445	321	259	302
	Вал R60	140	145	97	100	102	207	283	300	291

Таблиця 5 – НДС соединений с натягом типа А и типа III, IV

Характеристики НДС	Радиус детали	Тип Б	Тип III				Тип IV			
			L, мм				L, мм			
			0	30	70	100	0	30	50	100
$\sigma_{скв}$ , МПа	Втулка R60	172	166	199	206	205	167	140	135	126
	Вал R60	75,2	88,9	68,7	53,5	50,6	80,4	140	141	150
P, МПа	R 60	71,6	66,8	95,5	101	101	76,6	112	125	140
$U_{\Sigma} \cdot 10^7$ , м	Втулка R60	446	442	448	486	484	409	322	232	270
	Вал R60	180	160	118	124	126	232	300	321	341

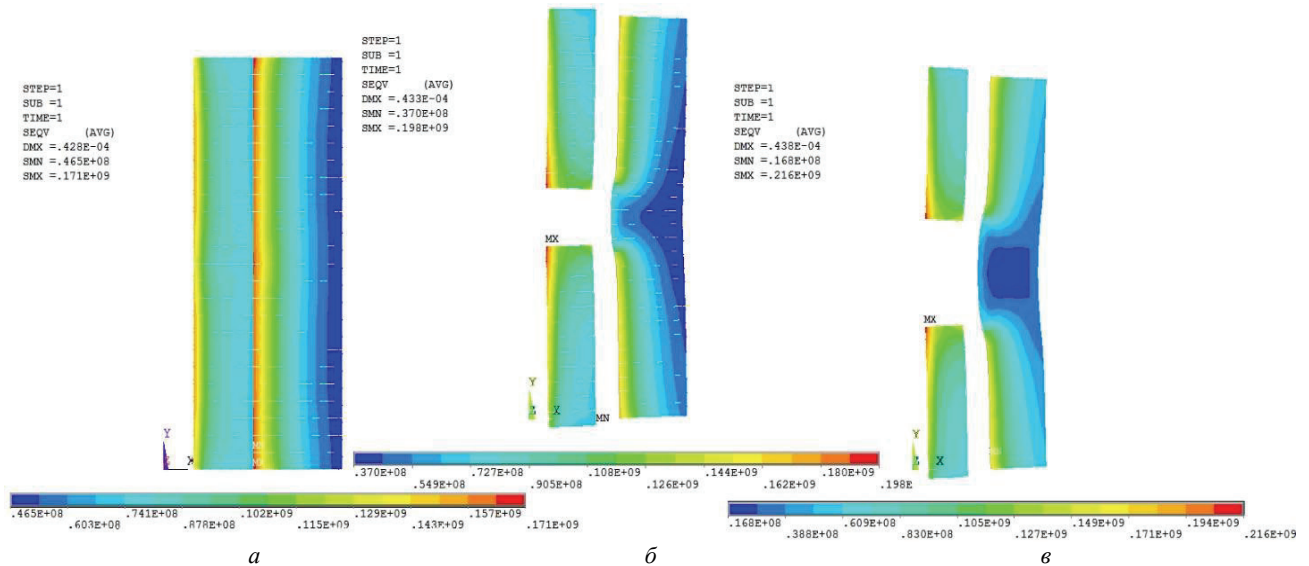


Рисунок 23 – Эквивалентные напряжения по Мизесу: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 100 мм

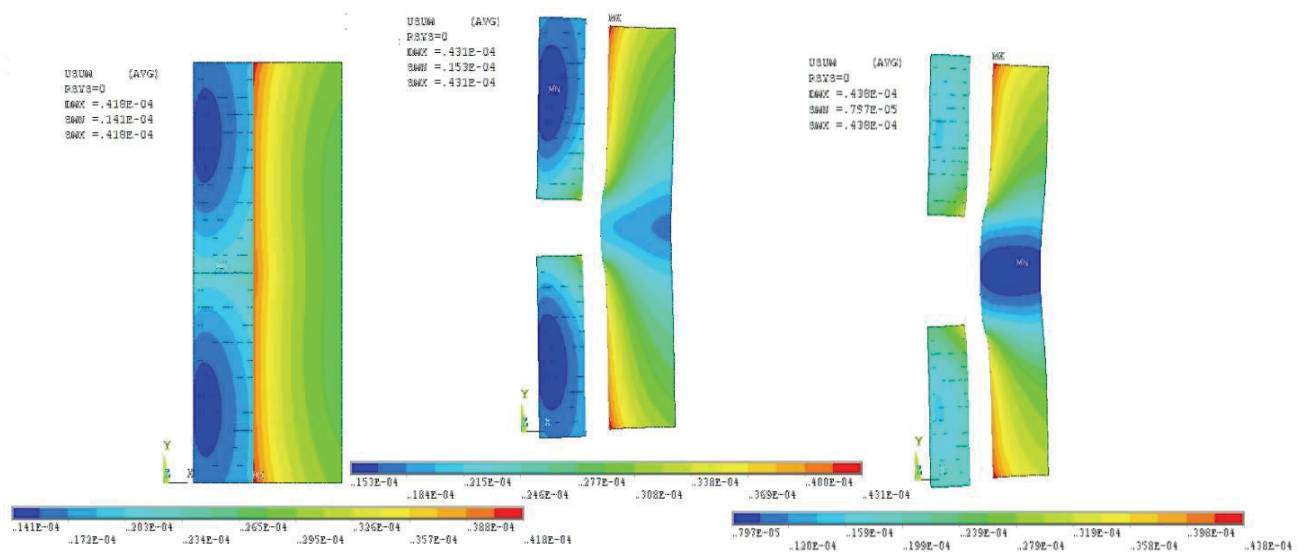


Рисунок 24 – Суммарные перемещения: а – L = 0, б – L = 50 мм, в – L = 100 мм

**Проверка результатов**

Для проверки правильности полученных результатов используем соединения с натягом типа А и Б (см. рис. 1, 2) и сравним контактные давления, полученными в программе ANSYS и по формуле (2) [2].

Соединение типа А:

$$\Delta = \left| \frac{78,749 - 77,87}{78,749} \right| = 1,116 \% .$$

Соединение типа Б:

$$\Delta = \left| \frac{71,999 - 72,60}{71,999} \right| = 0,835 \% .$$

Полученные результаты свидетельствуют о практическом совпадении данных программы ANSYS и стандартных формул (2) [2].

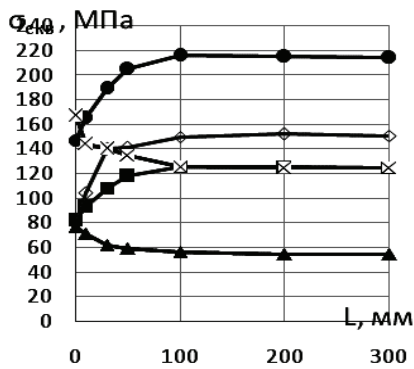


Рисунок 25 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

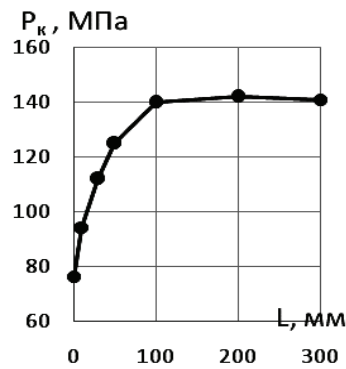


Рисунок 26 – Контактные давления

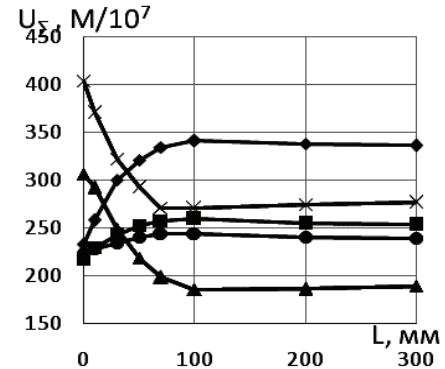


Рисунок 27 – Суммарные перемещения

**Выводы.** Исследовалось влияние одного соединения с натягом на другое для следующих соединений: тип I – сплошной вал и две втулки, тип II – два сплошных вала и втулка, тип III – пустотелый вал и две втулки, тип IV – два пустотелых вала и втулка.

Расчеты подтвердили идентичность НДС каждого из двух соединений с натягом, входящих в соединения типа I, II, III, IV.

В соединениях с натягом типа А и типа В характеристики НДС в диаметральных сечениях относительно равномерны. Однако в соединениях типов I, II, III, IV, когда соединения с натягом связываются между собой валами или втулками, во внутренних торцевых кромках соединений возникает всплеск напряжений, что обусловлено влиянием связующих соединения конструктивных элементов и «консольным» эффектом выступающих частей валов и втулок. При увеличении интервала  $L$  между валами или втулками они сначала интенсивно изменяются, затем стабилизируются, при достижении значения  $L_0$ .

По мере увеличения интервала  $L$  между втулками или валами  $\sigma_{\text{эkv}}$  во втулках соединений типа I и III растут, в соединениях типа III, IV падают, в валах соединений типа I, II падают, в соединениях типа II, IV растут.

Для  $\sigma_{\text{эkv}}$  интервалы стабилизации  $L_0$  составляют: для соединений типа I – 120 мм, тип II – 150 мм, типа III, IV – 100 мм.

Для контактных давлений  $P_k$  интервалы стабилизации составляют: для соединений типа I – 100 мм, тип II – 150 мм, типа III, IV – 100 мм.

Для суммарных перемещений  $U_{\Sigma}$  интервалы стабилизации  $L_0$  составляют: для соединений типа I – 100 мм, тип II – 150 мм, типа III – 50 мм, IV – 100 мм.

Характеристики НДС соединений типа I, II, III, IV при  $L = 0$  по сравнению с характеристиками типов А, В довольно близки.

Полученные результаты согласуются с распределением напряжений в задаче Ляме о толстостенных цилиндрах под действием внутренних и внешних давлений.

Результаты исследования свидетельствуют о возможности применения принципа Сен-Венана к соединениям с натягом.

**Список литературы:** 1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. Учеб. пособие / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с. 2. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении / Е.И. Берникер. – М.; Л.: Машиностроение, 1966. – 166 с. 3. Тарабасов Н.Д. Расчет напряженных посадок в машиностроении / Н.Д. Тарабасов. – М.: Машгиз, 1961. – 264 с. 4. Шевченко Р.А. Компьютерное моделирование некоторых типов профильных соединений с натягом при осевых нагрузках / Р.А. Шевченко, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57. – С. 106-114. 5. Данилов Д.В. НДС профильных з'єднань з натягом під дією контактних навантажень / Д.В. Данилов, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – № 52. С. 63-76. 6. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с. 7. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах / К.А. Басов. Под общ. ред. Д.Г. Красковско-го. – М.: КомпьютерПресс, 2002. – 224 с. 8. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса ANSYS / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс 2006. – 248 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Samul V.I. Osnovi teorii uprugosti i plastichnosti. Uchebnoe posobie. Moscow: Visshaya shkola, 1982, 264 p. 2. Bemiker E.I. Posadka s natyagom v mashinostroenii. Moscow: Mashinostroenie, 1968, 168 p. 3. Tarabasov N.D. Raschet napryazhenykh posadok v mashinostroenii. Moscow: Mashgiz, 1961. 264 p. 4. Shevchenko R.A., Andreev A.G. Komp'yuternoe modelirovanie nekotorykh tipov profil'nykh soedinenij s natyagom pri osevykh nagruzkah. Visnyk NTU "KhPI", 2014, No 57, pp. 106-114. 5. Danilov D.V., Andreev A.G. NDS profil'nykh soedinenij s natyagom pod dejstviem kontaktnykh nagruzk. Visnyk NTU "KhPI", 2011, No 52, pp. 63-76. 6. Basov K.A. ANSYS: spravochnik pol'zovatelya. Moscow: DMK Press, 2005, 640 p. 7. Basov K.A. ANSYS v primerah i zadachah. Pod red. D.G. Kraskovskogo. Moscow: Komp'yuter Press, 2002, 224 p. 8. Basov K.A. Graficheskii interfeice kompleksa ANSYS. Moscow: DMK Press, 2006, 248 p.

Поступила (received) 19.07.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Виноградский Дмитрий Георгиевич** – студент, кафедра Динамика и прочность машин, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (063) 426-13-64; e-mail: cikmon@mail.ru

**Vinogradsky Dmitry Georgievich** - Student, Department of Dynamics and strength of machines, National Technical University «KhPI»; tel.: (063) 426-13-64; e-mail: cikmon@mail.ru

**Андреев Арнольд Георгиевич** - кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

**Andreev Arnold'g Georgievich** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University «KhPI», tel.: (057)707-68-79; e-mail: andreev@kpi.kharkov.ua.

УДК 539.3

**А.В. ВОРОПАЙ, Е.С. МАЛАХОВ****НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН И ИХ СИСТЕМ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С РАЗЛИЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ**

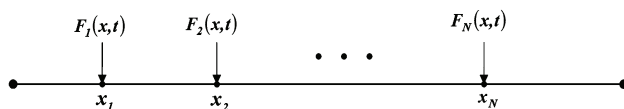
Рассматриваются нестационарные колебания струн и их систем, вызванные конечным количеством сосредоточенных нагрузок. Нестационарными нагрузками могут моделироваться внешние силы, также реакции, соответствующие влиянию сосредоточенных масс или демпферов. Для системы струн, пересекающих одну общую, строится обобщенная схема исследования. Излагается методика построения системы уравнений, состоящей из одномерных волновых уравнений для некоторого произвольного количества струн, которая замыкается дополнительными соотношениями в точках контакта. Полученная система является системой интегральных уравнений Вольтерра, которая после дискретизации сводится к блочной системе линейных уравнений. В качестве примера решается задача о нестационарных колебаниях струны с двумя присоединенными демпферами.

**Ключевые слова:** струна, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтерра, прямая и обратная задача.

**Введение.** Вопросам вывода уравнения колебания струны и его решения посвящен целый раздел математической физики, который приведен в большинстве учебников, например [1, 2]. Исследование поведения струн и их систем изложено во многих работах, например, в работе [3] приводится постановка прямой и обратной задач для нестационарных колебаний системы трех струн, и их решение с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Отдельно отметим статью [4], в которой описано гашение крутильных и продольных колебаний каната, причем в указанном исследовании для более сложного механического объекта используется стержневая модель, однако задача сводится к анализу подобных волновых уравнений. В отличие от [4], при исследовании малых поперечных колебаний канатов и их систем целесообразно использовать модель струны.

В данной работе исследуются нестационарные колебания системы струн для общего случая нагружения с учетом дополнительных демпфирующих элементов и сосредоточенных масс, а так же определяются дополнительные контактные реакции, возникающие между струнами и этими элементами.

**Постановка и решение задачи о нагружении одной струны.** Рассматривается закрепленная струна конечной длины. На струну действуют  $N$  сосредоточенных нагрузок, которые вызывают нестационарные колебания струны (рис. 1).

Рисунок 1 – Струна с  $N$  нагрузками

Колебания описываются одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^N F_n(x,t). \quad (1)$$

В случае если со струной в некоторой точке контактирует сосредоточенная масса или демпфирующее устройство, то их влияние можно моделировать до-

бавлением дополнительных сосредоточенных сил, которые на самом деле будут являться реакциями между струной и этими элементами. Аналогичный подход можно использовать и в случае контакта двух струн. Таким образом, нагрузку в правой части уравнения (1) можно представить в виде:

$$F_n(x,t) = R_n(t) \delta(x - x_n), \quad (2)$$

где  $x_n$  – точки приложения  $n$ -той нагрузки на струне, а силы  $R_n(t)$  могут быть внешними возмущающими сосредоточенными нагрузками, реакцией  $R_M(t)$  между струной и сосредоточенной массой или реакцией  $R_D(t)$  между струной и дополнительной демпфирующей опорой. Уравнение (1) дополняется следующими граничными и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{du(x,0)}{dt} = 0. \quad (3)$$

Перемещение струны, полученное при решении (1), представимо в виде суммы свертков [3]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t K_n(x,t-\tau) \cdot R_n(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где ядра имеют вид

$$K_n(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\omega_k} \cdot \sin(\omega_k t) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x_n) \cdot \sin(\lambda_k \cdot x), \quad (5)$$

и обозначено  $C = 2/(l \cdot \rho)$ ,  $\omega_k = a \cdot \lambda_k$ ,  $\lambda_k = \pi k / l$ .

В случае присоединения сосредоточенных масс выполняется следующие условие контакта для каждой массы:

$$R_M(t) = M \cdot \frac{d^2 u(x_M,t)}{dt^2}, \quad (6)$$

где  $x_M$  – точка контакта струны и массы,  $M$  – величина массы. Из соотношения (6) можно получить перемещение в точке контакта с массой:

$$u(x_M,t) = \frac{1}{M} \int_0^t (t-\tau) R_M(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Если струна подкреплена дополнительными демпфирующими элементами, то влияние таких дополнительных опор можно учитывать добавлением дополнительных реакций вида:

$$R_D(t) = \kappa \cdot \frac{du(x_D, t)}{dt}, \quad (8)$$

где  $x_D$  – точка контакта струны и демпфера,  $\kappa$  – коэффициент демпфирования. Выражение для перемещений в точке установки демпфера из соотношения (8) имеет вид:

$$u(x_D, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^t R_D(\tau) d\tau. \quad (9)$$

**Постановка и решение задачи о нагружении системы струн.** В случае исследования системы струн – для каждой струны записываем соответствующее решение волнового уравнения вида (4), в котором кроме системы внешних сил  $R_n(t)$ , а также реакций между струнами и дополнительными элементами  $R_M(t)$  и  $R_D(t)$  добавляются дополнительные силы контактного взаимодействия между струнами – реакции  $R_{ij}(t)$  (сила контакта между  $i$ -ой и  $j$ -ой струнами).

Для сложных систем с большим количеством нагрузок, дополнительных опор и точек контакта число уравнений будет равно числу струн и всегда меньше числа неизвестных. Количество необходимых уравнений будет определяться по следующей краткой схеме:

$$\begin{cases} (J) \text{ выражений для струн;} \\ (N_R) \text{ соотношений для дополнительных;} \\ (J-1) \text{ соотношений для } R_{ij}. \end{cases} \quad (10)$$

На общей схеме (10) показано, что полная система, определяющая перемещения системы струн, состоит из  $J$  выражений вида (4) для каждой  $i$ -ой струны, что не достаточно для решения задачи, и поэтому система дополняется  $N_R$  соотношениями для дополнительных реакций в точках присоединения масс и демпферов вида (7), (9) и замыкается  $J-1$  кинематическими соотношениями для  $R_{ij}$  в точках контакта струн (уточним, что количество  $(J-1)$  соотношений подразумевают, что  $(J-1)$  струн пересекают  $J$ -ю, и не пересекаются между собой).

При решении прямой задачи внешнее нагружение задано, а неизвестными в этой системе, кроме перемещений самих струн  $u_i(x, t)$ , будут еще и реакции между струнами  $R_{ij}(t)$ , а также реакции между струнами и дополнительными элементами  $R_M(t)$  и  $R_D(t)$ .

К примеру, в случае нагружения системы трех струн с двумя демпферами будут неизвестными две силы контакта между струнами, две силы реакции между соответствующими струнами и демпферами, а так же перемещения самих струн, то есть 7 неизвестных функций для 3-х струн. Таким образом, три выражения вида (4) дополняются двумя соотношениями для демпферов в точках их установки и двумя  $(3-1=2)$  выражениями для точек контакта двух струн.

В обратных задачах, когда неизвестно внешнее нагружение, в качестве исходных данных должны быть заданы перемещения в некоторых точках струн, причем число точек, в которых заданы функции перемещения струн во времени  $u_i(x_n, t) = f_i(t)$  должно быть не меньше числа внешних неизвестных сосредоточенных нагрузок, вызывающих нестационарные колебания.

При рассмотрении системы струн, состоящей из несущей струны большей длины и подкрепляющих ее более коротких струн, изложенный подход дает следующую систему выражений для перемещений  $u_i(x, t)$ , записанную в операторной форме:

$$\begin{cases} u_1 = -\sum_n A1_n \cdot R_n; \\ u_2 = -\sum_n A2_n \cdot R_n; \\ \dots\dots\dots \\ u_J = \sum_n AJ_n \cdot R_n. \end{cases} \quad (11)$$

где введен интегральный оператор:

$$Ai_n = \int_0^t Ki_n(x, t-\tau) d\tau, \quad (12)$$

в котором  $i=1\dots J$  – номер струны, а индекс  $n$  соответствует номеру нагрузки  $R_n(t)$ . В системе (11) предварительно было использовано условие антисимметричности контактных сил между струнами  $R_{ij} = -R_{ji}$

и введены обозначения  $R_n = (R_{in}(t) \ P_n(t))^T$ , где  $P_n(t)$  обозначает временную составляющую возмущающих нагрузок, а  $R_{in}(t)$  – контактная сила, возникающая при взаимодействии струн или при контакте струн с дополнительными элементами. Следует уточнить, что знак минус перед слагаемыми ставится в том случае, если  $R_n$  соответствует контактной силе, возникающей при взаимодействии струны с демпфером или массой, или же из условия антисимметричности. Выражения для перемещений (11) дополняются условиями вида (7) и (9) для каждой струны. Так же необходимо учитывать предположение, что в точках контакта струн их перемещения полностью совпадают, то есть выполняются следующие кинематические условия:

$$u_i(x_{in}, t) = u_j(x_{jn}, t). \quad (13)$$

Неизвестные контактные силы находятся с использованием выражений (7) и (9), которые подставлялись в (11). После подстановки проводится дискретизация методом частичного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t-\tau) \cdot R(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^j R_i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \sin(\omega_k(t_j-\tau)) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^j R_i \cdot \frac{2}{\omega_k} \sin\left[\omega_k \cdot \left((j-i) + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t\right] \cdot \sin\left(\frac{\omega_k \cdot \Delta t}{2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $t_j = j \cdot \Delta t$  – дискретное время. Таким образом, получается следующая система матричных уравнений для дискретных ядер:

$$\begin{cases} -\sum_n A1_{1n} \cdot R_n = \sum_p A3_{1p} \cdot R_p; \\ \dots\dots\dots \\ -\sum_n A1_{(J-1)n} \cdot R_n = \sum_p A3_{(J-1)p} \cdot R_p, \end{cases} \quad (15)$$

где матрица  $Ai_{nm}$  соответствует дискретной форме ядер  $Ki_n(x_m, t_j)$ , то есть индекс  $n$  обозначает точку приложения силы,  $m$  – точку исследования, а  $i$  – номер струны.

При решении прямых задач вектор  $\mathbf{R}_p$ , соответствующий силе  $P_n(t)$ , считается известным, поэтому слагаемые с  $\mathbf{R}_p$  помещаются в правую часть, а остальные – в левую. При решении обратных задач вектор  $\mathbf{R}_p$  неизвестен, а необходимо знать перемещения  $\mathbf{u}_p$  в некоторых точках струн, соответствующие  $u_i(x_{pm}, t)$ . В результате будет получена система вида (15) в которой известные перемещения  $\mathbf{u}_p$  помещаются в правую часть соответствующих уравнений. При решении как прямой так и обратной задачи эта система приводится к компактной записи при помощи соответствующих обозначений (к примеру  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}\mathbf{1}_{11} + \mathbf{A}\mathbf{3}_{11}$ ,  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A}\mathbf{3}_{13} \cdot \mathbf{R}_3$ ). Таким образом, (15) принимает вид блочного матричного уравнения с неизвестными  $\mathbf{R}_n$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{J-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{J-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Решение блочного матричного уравнения (16), соответствующего системе интегральных уравнений Вольтерры, является существенно некорректной задачей [5], и для решения используются обобщенный алгоритм Гаусса [6] или обобщенный алгоритм Крамера в сочетании с регуляризирующим алгоритмом А. Н. Тихонова. Рассмотрим более подробно на примере решения задачи при помощи обобщенного алгоритма Крамера, который для систем до 4-х интегральных уравнений дает более устойчивые результаты:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_2; \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{R}_{J-1} = (\Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta\mathbf{A}^T \cdot \Delta_{J-1}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{J-1} & \mathbf{A}_{(J-1)2} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-1)} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{J-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1(J-2)} & \mathbf{B}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(J-1)1} & \cdots & \mathbf{A}_{(J-1)(J-2)} & \mathbf{B}_{J-1} \end{vmatrix}$$

– определители блочных матриц,  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [5].

После нахождения контактных сил перемещения в произвольной точке  $x_{s_j}$  любой из струн можно вычислить на основе соотношений (11). Стоит отметить, при увеличении количества струн и других дополнительных элементов происходит незначительное теоретическое усложнение задачи, однако значительное увеличение времени вычислений.

**Пример решения конкретной задачи: колебания одной струны, подкрепленной двумя демпферами.** Рассматривается закрепленная струна конечной длины, к которой присоединены два дополнительных демпфирующих элемента (рис 2). Сосредоточенная нагрузка, вызывающая нестационарные колебания системы, имеет вид  $F(x, t) = P(t)\delta(x - x_3)$ , где  $x_3$  – точка приложения нагрузки на струне. Точки контакта струны с демпферами обозначены  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, а точка наблюдения –  $x_s$ .

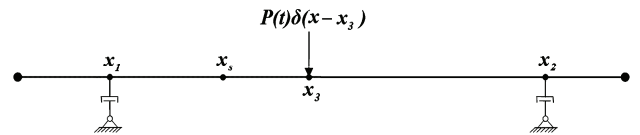


Рисунок 2 – Струна с двумя демпферами

Колебания такой струны описываются следующим одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^3 R_n(t)\delta(x - x_n), \quad (18)$$

где  $R_1(t)$ ,  $R_2(t)$  – реакции, обусловленные взаимодействием струны с соответствующими демпферами, а  $R_3(t)$  соответствует приложенной к струне нагрузке.

Волновое уравнение (18) дополняется начальными и краевыми условиями (3), а так же условиями типа (9) для двух демпферов:

$$u(x_1, t) = \frac{1}{\kappa_1} \int_0^t R_1(\tau) d\tau; \quad u(x_2, t) = \frac{1}{\kappa_2} \int_0^t R_2(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Как показано выше, решение представимо в операторной форме:

$$u(x, t) = -A'_1 \cdot R_1 - A'_2 \cdot R_2 + A'_3 \cdot R_3, \quad (20)$$

где  $A'_n = \int_0^t K_n(x, t - \tau) d\tau$ . После дискретизации интегрального уравнения (21) и использования условий

контакта с демпферами (19), была получена система двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} -\mathbf{A}'_{11} \cdot \mathbf{R}_1 - \mathbf{A}'_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}'_{13} \cdot \mathbf{R}_3 = \frac{\Delta t}{\kappa_1} \cdot \mathbf{R}_1; \\ -\mathbf{A}'_{21} \cdot \mathbf{R}_1 - \mathbf{A}'_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}'_{23} \cdot \mathbf{R}_3 = \frac{\Delta t}{\kappa_2} \cdot \mathbf{R}_2. \end{cases} \quad (21)$$

При решении задачи вектор  $\mathbf{R}_3$ , соответствующий силе  $P(t)$ , считается известным, поэтому слагаемые с  $\mathbf{R}_3$  помещаются в правую часть, а остальные – в левую. Система (21) приводится к компактной записи при помощи соответствующих обозначений:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}'_{11} + \Delta t / \kappa_1, \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}'_{12}, \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}'_{21},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}'_{22} + \Delta t / \kappa_2, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}'_{13} \cdot \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}'_{23} \cdot \mathbf{R}_3.$$

Таким образом, получено матричное уравнение с неизвестными  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Система уравнений (22) является блочным матричным уравнением, которое эквивалентно системе интегральных уравнений Вольтерры I-го рода. Неиз-

вестные контактные силы принимают вид:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta_2, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ ;  $\Delta_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ ;  $\Delta_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$  – определители блочных матриц.

По известным контактным силам вычисляем перемещение струны в произвольной точке на основе соотношения (20) в дискретной форме.

**Вычислительный эксперимент.** Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами:  $l = 25$  м – длина струны;  $d_{st} = 0,0052$  м – диаметр струны;  $\rho = 0,109$  кг/м – линейная плотность струн;  $a = 214$  м/с – скорость распространения волн в струне,  $\kappa = 200$  – коэффициент демпфирования для обоих демпферов. Для наглядности вначале рассмотрим симметричный случай:  $x_1 = 0,04 \cdot l$ ,  $x_2 = 0,96 \cdot l$  – точки расположения демпферов,  $x_3 = 0,5 \cdot l$  – точка приложения возмущающей нагрузки. Точка наблюдения –  $x_s = 0,45 \cdot l$ , а параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-19}$  выбирался согласно методике, изложенной в работе [7].

Изменение возмущающей силы  $P(t)$  во времени при решении задачи в виде верхней полуволны синуса

$$P(t) = q_0 \cdot |\sin(\omega_0 t)| (H(t - t_0) - H(t - t_1)),$$

где  $q_0 = 10$  Н – интенсивность нагрузки,  $t_0 = 0,25$  с и  $t_1 = 0,5$  с – начало и конец нагружения. Исследовался промежуток времени  $T = 2$  с. Вместо бесконечных сумм в выражениях производился учет конечного числа членов ряда  $K = 200$ , для дискретизации по времени  $\Delta t = T / J = 0,004$ ;  $J = 500$  шагов.

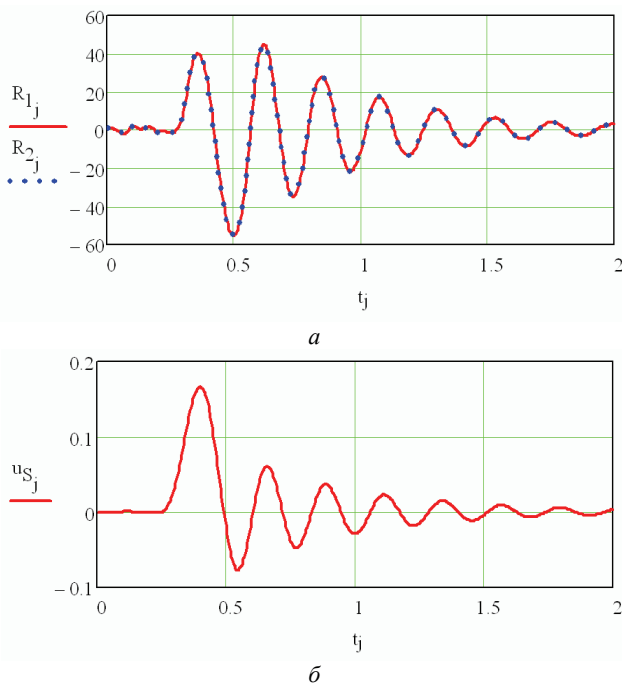


Рисунок 3 – Изменение во времени (симметричный случай): а – контактных сил; б – перемещения

На рис. 3, а показаны изменения контактных сил во времени при контакте струн с демпферами, а на рис. 3, б показаны перемещения струны для нагрузки, описанной выше. Сплошная кривая соответствует реакции  $R_1$ , а точками показана реакция  $R_2(t)$ .

Укажем на то, что в период до начала действия возмущающей нагрузки видно незначительную величину реакций между струной и демпферами, что обусловлено, по-видимому, вычислительными погрешностями при решении системы интегральных уравнений. В силу симметричного расположения реакций возникающих при контакте струн с демпферами, а также приложения возмущающие нагрузки в средней точке струны делаем вывод, что реакции  $R_1$  и  $R_2$  должны совпадать, что демонстрирует рис. 3, а. Это совпадение подтверждает достоверность вычислений.

В качестве несимметричного случая выберем следующие точки расположения демпферов:  $x_1 = 0,1 \cdot l$ ,  $x_2 = 0,75 \cdot l$ , а  $x_3 = 0,4 \cdot l$  – точка приложения возмущающей нагрузки. В силу того, что демпферы расположены гораздо ближе к точке нагрузки, можно значительно уменьшить коэффициент демпфирования  $\kappa = 20$ . Точка наблюдения та же.

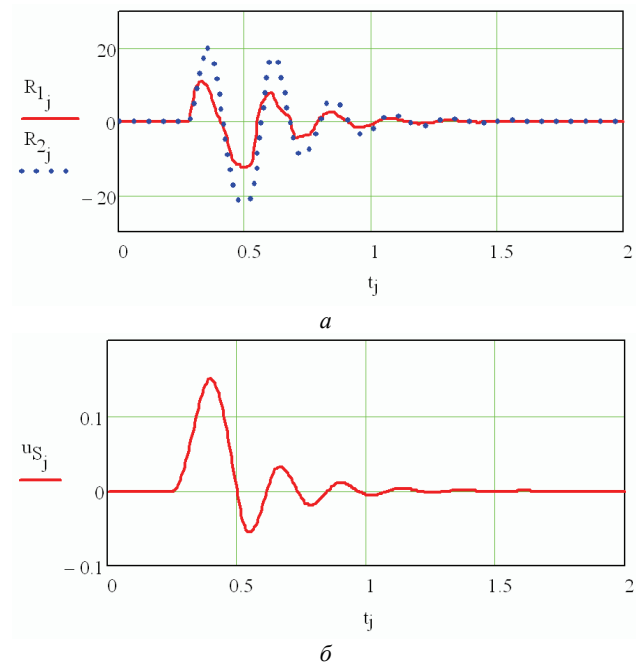


Рисунок 4 – Изменение во времени (несимметричный случай): а – контактных сил; б – перемещения

**Выводы.** В данной работе показана методика построения задачи о нестационарных колебаниях струны и системы струн под действием некоторого конечного количества нагрузок, обусловленных действием сосредоточенных нагрузок, масс, демпферов или взаимодействием самих струн. Предложен алгоритм решения данной задачи на основе прямого и обратного преобразования Лапласа, обобщенно метода Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова. В качестве примера, получено решение прямой задачи о колебании одной струны, подкрепленной двумя демпферами. Проведен численный эксперимент, в котором показано, что для симметричного случая нагружения реак-



ции, обусловленные демпферами, совпадают, что подтверждает достоверность вычислений. На основе предложенного в статье подхода можно исследовать поведение струны, расположения демпферов и различных сосредоточенных нагрузений в произвольных точках струны.

**Список литературы:** 1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики (5-е изд.) / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 742 с. 2. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с. 3. Малахов Е. С. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн / Е. С. Малахов, А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – №6 (1178). – С. 56-62. 4. Lin Chen Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location / Lin Chen, Limin Sun, Satish Nagarajaiah // Journal of Sound and Vibration. –Vol. 377. – 1 September 2016. – P. 38-57. 5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с. 7. Воронай А. В. Регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов

конструкции / А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 41 (1150). – С. 22-29.

**Bibliography (transliterated):** 1. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoy fiziki (5-e izd.). Moscow: Nauka, 1977, 742 p. 2. Aramanovich I.G., Levin V.I. Uravnenija matematicheskoy fiziki. – Moscow: Nauka, 1969, 288 p. 3. Malakhov E. S, Voropaj A. V. Obratnaja zadacha dlja nestacionarnyh kolebanij sistemy strun. Visnik NTU "KhPI". Serija: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, No 6 (1178), pp. 56-62. 4. Lin Chen, Limin Sun, Satish Nagarajaiah. Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location. Journal of Sound and Vibration, vol. 377, 1 September 2016, pp. 38-57. 5. Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. Metody reshenija nekorrektnyh zadach. Moscow: Nauka, 1986, 288 p. 6. Gantmaher F.R. Teorija matric. 2-e izd., dop. Moscow: Nauka, 1967, 576 p. 7. Voropaj A. V. Reguljarizirujushhij algoritm A.N. Tihonova v nekorrektnyh zadachah nestacionarnoj dinamiki uprugih jelementov konstrukcii. Visnik NTU "KhPI". Serija: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah. Kharkiv: NTU "KhPI", 2015, No 41 (1150), pp. 22-29.

*Поступила (received) 01.09.2016.*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Воронай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "KhPI"; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

**Малахов Евгений Сергеевич** – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

**Malakhov Evgeniy Sergeevich** – Postgraduate Student, Kharkiv National Automobile and Highway University; tel: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

УДК 539.3

Е.Д. ГРОЗЕНОК, Э.А. СИМСОН, А.В. СТЕПУК, С.Ю. ШЕРГИН

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗАГОТОВОК ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПОДШИПНИКОВЫХ КОЛЕЦ

Проведено математическое моделирование процесса индукционного нагрева цилиндрической заготовки для подшипникового кольца и получен рациональный режим работы индуктора. С учетом остывания заготовки получено распределение поля температур перед началом процесса штамповки. Численное решение, полученное методом конечного элемента, сравнивалось с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** цилиндрическая заготовка, индукционный нагрев, рациональный режим, термоэлектромагнитная задача, метод конечных элементов.

**Введение.** Процесс изготовления подшипниковых колец включает выполнение цепочки последовательных технологических операций: индукционный нагрев цилиндрической заготовки, штамповку и раскатку. Первый этап включает индукционный нагрев цилиндрической заготовки до необходимой температуры, что позволяет в дальнейшем эффективно производить ее пластическое деформирование, т.к. для успешной реализации цепочки технологических операций нагретый металл должен иметь определенную микроструктуру, физико-химические свойства. При выборе режима работы индукционного нагревателя необходимо исключить пережог, неравномерный нагрев или недогрев заготовки, так как они могут привести к термическим напряжениям, хрупкости, низкой прочности материала конечного изделия (кольца подшипника). Поэтому возникает необходимость в проведении тщательного моделирования и выбора рационального режима нагрева.

**Анализ последних исследований и литературы.** Исследованиям индукционного нагрева заготовок для различных технологических процессов (**ковки, штамповки, рубки, прокатки, гибки, а также закалки**) посвящено ряд работ [1-4]. Прогнозированию структуры и свойств стали при термической обработке посвящены работы [1-3]. Задача теплопроводности для индукционного нагрева подшипниковых колец перед раскаткой рассмотрена в работах [4, 5]. Процессу нагрева нескольких заготовок, перемещающихся с постоянной скоростью через индуктор, посвящена работа [6], в которой представлено решение задачи оптимального управления процессами периодического и непрерывного индукционного нагрева заготовок по критериям быстродействия и минимума расхода энергии. Отмечено, что для большого диапазона диаметров заготовок не целесообразно использовать универсальный индуктор, так как с увеличением отношения внутреннего диаметра индуктора к диаметру заготовки уменьшается связь магнитного поля индуктора с заготовкой. Вследствие этого для каждого типоразмера заготовок и индукторов требуется проводить экспериментально-теоретическое моделирование процесса нагрева и выбор рационального режима работы нагревателя, обеспечивающего необходимые характеристики температурного поля в заготовке. Математическое моделирование процесса индукционного на-

грева и численно-аналитические методы расчета электромагнитных систем индуктор-заготовка представлены в многочисленных работах Кувалдина [7]. Однако, при численном решении связанной нелинейной нестационарной термоэлектромагнитной краевой задачи с учетом нелинейной зависимости физико-химических и структурных характеристик материала от температуры вводятся определенные допущения (не учитывается влияние нагрева заготовки на ток в индукторе), поэтому для гарантии достоверности результатов необходимо сравнение их с экспериментальными данными.

**Целью** данной статьи является исследование электромагнитного и теплового полей, возникающих в цилиндрической стальной заготовке, предназначенной для подшипникового кольца при индукционном нагреве, а также выбор рационального режима работы индуктора.

**Постановка задачи.** Для реализации последующего этапа качественной штамповки необходимо чтобы объемное неравномерное температурное поле цилиндрической заготовки с учетом времени остывания между индукционным нагревом и осадкой заготовки под прессом должно отвечать жестким требованиям: максимальная температура нагрева  $T_{\max} = 1150$  °С, а перепад температуры  $T_{\max} - T_{\min} = 50$  °С. Математическая модель, которая описывает индукционный нагрев цилиндрической заготовки, включает уравнения электромагнитного поля Максвелла и нестационарное уравнение теплопроводности Фурье с соответствующими граничными и начальными условиями с учетом связанности физических процессов. Уравнения электромагнитного поля имеют вид [8]

$$\operatorname{rot} H = \sigma(T)E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu(T) \frac{\partial H}{\partial t};$$

$$j = \sigma(T)E + \frac{\partial D}{\partial t},$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля;  $E$  – напряженность электрического поля;  $B$  – магнитная индукция;  $j$  – плотность тока;  $D$  – электрическая индукция;  $\sigma(T)$  – электрическая проводимость и  $\mu(T)$  магнитной проницаемости, нелинейно зависящие от температуры  $T$ . Наибольшая плотность тока  $j_r$  при нагреве цилиндрической заготовки будет на глубине скин-слоя  $\delta$ , а к центру снижаться экспоненциально

$$j_r = j_0 e^{-kr}$$

Глубина проникновения  $\delta$  определяется зависимостью:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho_e}{\omega\mu_0\mu}}$$

где  $\omega = 2\pi f$  угловая частота,  $f$  – частота тока,  $\rho_e$  – удельное сопротивление материала заготовки,  $\mu_0$  – проницаемость вакуума,  $\mu$  – удельная проницаемость материала заготовки. Плотность источников тепла равна

$$p(t) = \sigma(T)E^2(t) = \frac{1}{\sigma(T)}j^2(t)$$

При температуре 721 °С в углеродистой стали происходит выделение теплоты при превращении исходной структуры перлита в аустенит, плотность источников которой можно определить как

$$Q = \rho L \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

где  $L$  – объемная плотность источника тепла,  $\Psi$  – объемная доля превращенного аустенита,  $\rho$  – плотность.

Нелинейное уравнение теплопроводности для расчета температурного поля в заготовке имеет вид:

$$\rho C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T)\text{grad}T) + Q(t) + p(t)$$

где  $C(T)$  – теплоемкость и  $\lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности металла, зависящие от температуры

Так как при нагреве поверхностного слое заготовки до температуры 1200 °С, величина теплового потока в радиальном направлении на порядок больше потока в осевом направлении, поэтому можно пренебречь передачей тепла вдоль оси цилиндрической заготовки (торцы заготовки можно считать теплоизолированными), на боковой же поверхности имеет место конвективная и лучистая теплоотдача. Граничные условия на поверхности заготовки имеют вид:

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{нов} = \alpha_k (T_{нов} - T_{cp}) + \sigma_e (T_{нов}^4 - T_{cp}^4)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент конвективного теплообмена,  $\sigma_e$  – коэффициент теплоотдачи излучением,  $T_{нов}$  – температура поверхности,  $T_{cp}$  – температура окружающей среды.

**Численная реализация и обсуждение результатов.** Рассмотренный подход был применен для определения рационального режима работы индуктора, который охлаждается водой до температуры 60°С, цилиндрической заготовки из стали ШХ15 длиной  $l = 190$  мм и радиусом  $r = 50$  мм. Методом конечных элементов (МКЭ) была численно решена краевая нестационарная термоэлектромагнитная задача для определения распределения объемного поля температур. Конечноэлементная модель включает 60221 элементов и 16346 узлов. На рис. 1 приведена расчетная схема индуктора с заготовкой.

На рис. 2 приведены использованные в расчете графики, зависимости от температуры.

Нагрев заготовки осуществляется индуктором с частотой тока  $f = 800$  Гц и максимальной мощностью

$W = 40$  кВт за время  $t = 300$  с. Расчетным путем определялся рациональный режим нагрева заготовки. На рис. 3, а приведен график изменения во времени мощности индуктора, при котором происходит нагрев цилиндрической заготовки до максимальной температуры  $T_{max} = 1150$  °С с разностью температуры не более  $T_{max} - T_{min} = 40$  °С.

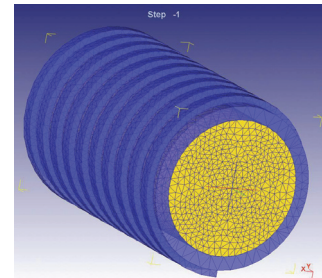


Рисунок 1 – Расчетная схема

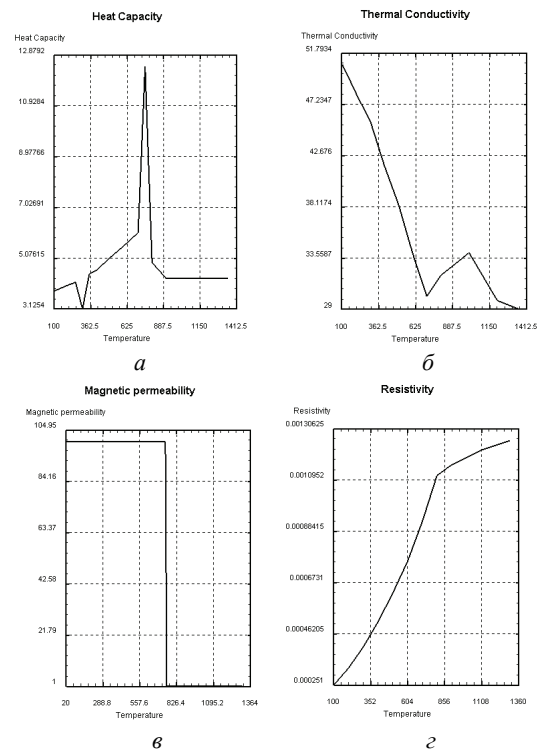


Рисунок 2 – Зависимости значений физических характеристик от температуры для стали ШХ15: а – теплоемкости; б – теплопроводности; в – магнитной проницаемости; г – электрической проводимости материала стальной заготовки

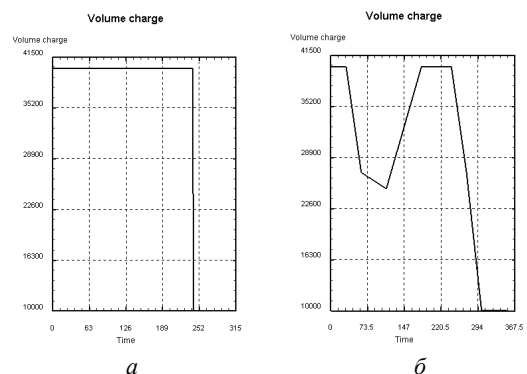


Рисунок 3 – Изменение мощности индуктора от времени

На рис. 4 представлено распределение поля температуры в сечении заготовки после нагрева в индукторе. Так температура на поверхности равна  $T_{пов} = 1140 \text{ }^\circ\text{C}$ , а на оси заготовки  $T_{мин} = 1110 \text{ }^\circ\text{C}$  при максимальном уровне температуры внутри  $T_{max} = 1150 \text{ }^\circ\text{C}$ . Так как в процессе индукционного нагрева заготовки происходит отвод тепла с внешней ее поверхности, то во внутренней объеме образуется зона, нагревая на более высокую температуру, что может привести к перегреву внутренних слоев стали. Для перехода к последующей технологической операции – штамповке кольца необходимо решить задачу остывания заготовки в виде нестационарной задачи теплопроводности с учетом полученного после нагрева температурного поля. В качестве граничных условий задавался лучистый и конвективный теплообмен с воздухом ( $T_{cp} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) на всех поверхностях цилиндрической заготовки. На рис. 5 приведено температурное поле заготовки после остывания в течении  $t = 5 \text{ с}$ , после чего начинается процесс штамповки. Следует отметить перераспределение и снижение уровней температур. Так на оси за счет теплопроводности температура поднялась до  $T_{ocu} = 1140 \text{ }^\circ\text{C}$ , на поверхности за счет теплоотвода появились зоны с минимальной температурой  $T_{мин} = 1090 \text{ }^\circ\text{C}$  и максимальной температура нагрева  $T_{max} = 1130 \text{ }^\circ\text{C}$ .

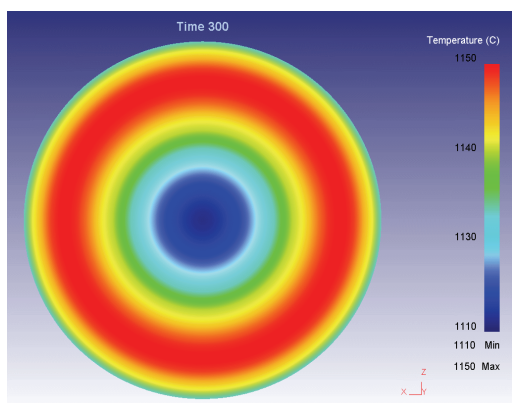


Рисунок 4 – Распределение поля температуры в сечении заготовки при нагреве в индукторе

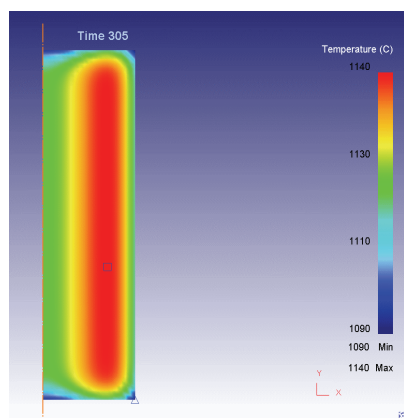


Рисунок 5 – Распределение поля температуры в заготовке после остывания

Для проверки адекватности математической модели, описывающей процесс индукционного нагрева

заготовки, была решена задача идентификации температурного поля для режима нагружения индуктора приведенного на рис. 3, б. Проводилось пирометрическое измерение температуры заготовки на боковой поверхности (радиус  $r = 50 \text{ мм}$ ) и в центре (радиус  $r = 0$ ) торцевой части заготовки. На рисунке 6 представлены численно найденное распределение температуры на торце заготовки. В табл. 1 приведены значения температуры, полученные расчетным и экспериментальным путем.

Таблица 1 – Расчетные и экспериментальные значения температур на торце образца

Радиус $r$ , мм	Расчетное значение $T, \text{ }^\circ\text{C}$	Измеренное значение $T, \text{ }^\circ\text{C}$
0	1030	1030
50	1140	1130

Сравнение результатов показало хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений. Так погрешность для перепада температуры между поверхностью и осью заготовки, полученная расчетным и экспериментальным путем, составляет 9 %, что свидетельствует об адекватности модели реальному процессу.

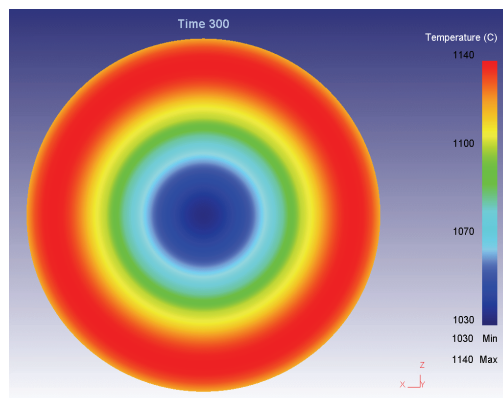


Рисунок 6 – Распределение вычисленного МКЭ поля температуры в сечении заготовки

**Выводы.** В работе проведено численное исследование индукционного нагрева цилиндрической заготовки подшипникового кольца. При помощи метода конечных элементов решена нестационарная связанная термоэлектромагнитная краевая задача и определен рациональный режим работы индуктора, при котором температурное поле в заготовке соответствует технологическим требованиям для последующего процесса штамповки. При максимально допустимой температуре нагрева достигнут минимальный перепад температур в объеме заготовки, то есть обеспечен ее более равномерный нагрев. Экспериментально подтверждена достоверность модели расчета температурного поля.

**Список литературы:** 1. Denis S. Revue de Metallurgie / S. Denis // CIT/Science et Genie des Materiaux. - fevrier 1997. – P. 157-175. 2. Федосов С.А. Компьютерная программа для расчета параметров термического цикла при импульсном поверхностном нагреве / С.А. Федосов // Материалы и упрочняющие технологии –99. – V11 Российская научн. технич.

конференция, 6-8 окт. 1999. – Курск. – С. 31-33 **3.** Rödel J. Werkstoffphysikalische Model für das Randschichthärten von Stahl. (Физические модели поверхностной закалки сталей) / J.Rödel // HTM: Härter. techn. Mitt. – 1999. – 54, № 4. – P. 230-240. **4.** Князев С.В. Моделирование стационарного распределения температуры металла в проходном индукционном нагревателе / С.В.Князев, А.И. Данилушкин, А.П. Мостовой // Вестник Иркутского государственного технического университета. – Иркутск: ИрГТУ, 2012. – № 9 (68). – С. 41-46. **5.** Базаров А.А. Построение численной модели нестационарного теплообмена цилиндрических заготовок при индукционном нагреве / А.А. Базаров, Н.А. Базир, Л.С.Зимин // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. – 2007. – № 2 (20). – С. 181-183. **6.** Князев С.В. Математическая модель индукционного нагрева подшипниковых колец перед раскаткой / С.В. Князев, А.И. Данилушкин, С.И. Семенов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Воронеж: ВГТУ, 2012. – Том 8. – № 10-1-2012. – С. 101-103. **7.** Кувалдин А.Б. Теория индукционного и диэлектрического нагрева / А.Б.Кувалдин. – М.: Изд-во МЭИ, 1999. – 80 с. **8.** Подстригач Я.С. Магнетотермоупругость проводящих тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, В.Ф. Кондрат. – К.: Наукова думка, 1982. – 248 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Denis, S. Revue de Metallurgie. CIT/Science et Genie des Materiaux. fevrier, 1997, pp. 157-175. **2.** Fedosov, S.A. Komp'juternaja programma dlja rascheta parametrov termicheskogo cikla pri impul'snom poverhnošnom nagreve. Materialy i uprochnjajushhie tehnologii – 99/VII Rossijskaja nauchn. tehnič. Konferencija (6-8 okt. 1999), Kursk, pp. 31-33. **3.** Rödel J. Werkstoffphysikalische Model für das Randschichthärten von Stahl. HTM: Härter. techn. Mitt. 1999, 54, No 4, pp. 230-240. **4.** Knjazev S.V., Danilushkin A.I., Mostovoj A.P. Modelirovanie stacionarnogo raspredelenija temperatury metalla v prohodnom indukcijnom nagrevatele. Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta, Irkutsk: IrGTU, 2012, No 9 (68), pp. 41-46. **5.** Bazarov A.A., Bazir H.A., Zimin L.S. Postroenie chislennoj modeli nestacionarnogo teploobmena cilindričeskikh zagotovok pri indukcijnom nagreve. Vestnik SamGTU. Ser. Tehničeskije nauki, No 2, 20 (2007), pp. 181-183. **6.** Knjazev S.V., Danilushkin A.I., Semenov S.I. Matematičeskaja model' indukcijnoogo nagreva podšipnikovyh kolec pered raskatkoj. Vestnik Voronežskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta, Voronež: VGTU, 2012, vol. 8, No 10-1 (2012), pp. 101-103. **7.** Kuvaldin, A.B. Teorija indukcijnoogo i dijelektričeskogo nagreva. Moscow: Izd-vo MJeI, 1999, 80 p. **8.** Podstrigach Ja.S., Burak Ja.I., Kondrat V.F. Magnetotermouprugost' provodjashih tel. Kiev: Naukova dumka, 1982, 248 p.

Поступила (received) 27.07.2016.

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Грозенюк Евгений Денисович** – аспирант, каф. сопротивления материалов, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: ev.grozenok@gmail.com

**Grozenok Ievgen** – Postgraduate student, Strength of materials Department, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: ev.grozenok@gmail.com

**Симсон Эдуард Альфредович** – докт. техн. наук, каф. сопротивления материалов, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: simson@upec.ua

**Simson Eduard** - Doctor of Sciences (High Ph. D.) Strength of materials' Department, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: simson@upec.ua

**Степук Александр Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр., Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: abtop@yahoo.com

**Stepuk Alexander**- Candidate of Physics -Mathematical Sciences (Ph. D.), Sr Researcher, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: abtop@yahoo.com

**Шергин Сергей Юрьевич** - ст.преподаватель, каф. сопротивления материалов, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: 70-761-78, e-mail: Sshergin@kpi.kharkov.ua

**Shergin Sergei** – Sr Lecturer, Strength of materials Department, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: Sshergin@kpi.kharkov.ua

УДК 539

С.М. ІСАКОВ, О.С. ІСАКОВ, С.І. МАРУСЕНКО

## ТРИБОЛОГІЧНА СИСТЕМА УЛЬТРАЗВУКОВОГО ЗВАРЮВАННЯ. ПІДСИСТЕМА УЛЬТРАЗВУКОВОГО ІНСТРУМЕНТУ

Розроблено підсистему ультразвукового інструменту з використанням програмного комплексу ANSYS, що інтегровано у трибологічну систему ультразвукового зварювання. Проведено моделювання ультразвукового інструменту, симетричного відносно осі, та чисельні розрахунки робочої резонансної частоти та форми коливань. Запропоновано підхід до інтегрування нової підсистеми у загальну трибологічну систему ультразвукового зварювання.

**Ключові слова:** трибологічна система, високочастотне навантаження, ультразвукове зварювання.

**Вступ.** Трибологічну систему ультразвукового зварювання (УЗЗ), що було запропоновано у [1, 3], для більш точного моделювання усіх процесів, що проходять внаслідок взаємодії ультразвукового інструменту (УЗІ) та деталей, що оброблюються, треба доповнити підсистемою ультразвуковий інструмент. Підсистема УЗІ базується на розрахунках резонансних режимів ультразвукового інструменту (надалі інструмент або модель), що моделюється з використанням активних та пасивних матеріалів [5], що відповідають конструктивним елементам УЗІ – п'єзокерамічному перетворювачу, системі хвилеводів і робочого наконечника, що у свою чергу є знімним. Напруга генератора змінного струму подається на електроди п'єзокерамічних елементів, внаслідок п'єзо ефекту коливання електричного струму перетворюються в механічні коливання, а використання елементів зворотного зв'язку дозволяє підвищити ефективність системи автоматичного контролю та управління процесом зварювання.

У рамках роботи проводиться геометричне моделювання ультразвукового інструмента з урахуванням особливостей конструкції, та розрахунок резонансної форми коливань УЗІ з використанням можливостей та програмних засобів програмного комплексу ANSYS.

**Опис підсистеми УЗІ.** У рамках даної роботи було запропоновано для моделювання УЗІ використання віссиметричного плоского кінцевого елемента. Фізико-механічні характеристики матеріалів, що використовуються у моделі УЗІ, зібрані у підсистемі матеріалів і формалізовані як функції, що залежать від температури.

Характеристики титанового сплаву, з якого виготовлений інструмент, наведені в табл. 1.

П'єзокерамічна ортотропність обумовлена поляризацією матеріалу уздовж осі  $X$ , що спрощує вид матриць.

Матриця пружних постійних:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ сим. & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$$

Матриця діелектричних постійних:

$$C = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & & 0 \\ & \varepsilon_{22} & \\ 0 & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Матриця п'єзоелектричних постійних:

$$S = \begin{bmatrix} s_{33} \\ s_{31} \\ s_{31} \\ & s_{15} \\ & & s_{15} \end{bmatrix}$$

Щільність  $\rho = 7500 \text{ кг/м}^3$ .

Таблиця 1 – Характеристики титанового сплаву

Характеристика	Розмірність	Величина
Модуль пружності, $E$	Н/м <sup>2</sup>	$10,7 \cdot 10^{10}$
Коефіцієнт Пуассона, $\nu$		0,3.
Щільність, $\rho$	кг/м <sup>3</sup>	4450

Параметри робочого процесу УЗІ розраховуються з використанням методик, що були запропоновані у [3] з використанням підсистеми тертя та термодинамічної підсистеми трибологічної системи ультразвукового зварювання.

Використання програмного комплексу ANSYS потребує написання та відпрацювання спеціалізованого інтерфейсу [2] між ПК та трибологічною системою УЗЗ.

**Геометрична модель УЗІ.** Інструмент являє собою комбінацію циліндричних і конічних тіл, які в перетині мають прямокутник і трапецію, і є віссиметричним. У ПК ANSYS було побудовано перетин, який надалі було повернено навколо вісі (рис. 1).



Рисунок 1 – Перетин УЗІ, який побудовано простими чотирикутниками

Розбивку плоского перетину було проведено за допомогою спеціального елемента MESH200, що не є об'ємним (рис. 2). Для використання цього кінцевого

елемента для розбивки плоских перетинів необхідно умовою є вибір опції кількості вузлів і ступенів вільності у вузлі.

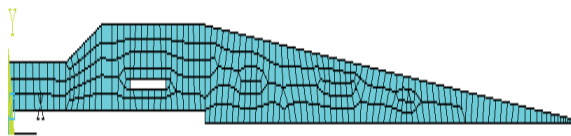


Рисунок 2 – Перетин моделі, що розбито елементом MESH200

Точки з координатами таких вузлів збігаються автоматично, тому що по визначенню функції форм рівні одиниці у даній точці й нулю у всіх інших. Крім цього використане визначення зв'язку глобальних і криволінійних координат забезпечує геометричну відповідність елементів, тобто два суміжних елементи будуть стикатися по всієї границі, тому що функції форм задовольняють умовам безперервності. Такі елементи, у яких функції форм, що визначають геометрію й невідому функцію переміщень, однакові, називаються ізопараметричними. У сучасних програмних комплексах звичайно застосовуються шестигранні ізопараметричні криволінійні KE засновані на функціях форм серендипового сімейства елементів.

На площині повинна збігатися кількість вузлів і ступенів вільності на грані об'ємного елемента. Це восьми вузловий квадратичний елемент із трьома ступенями вільності у вузлі. У роботі був використаний об'ємний елемент SOLID95 двадцяти вузловий із трьома ступенями вільності у вузлі. Дані операції виконувалися для створення впорядкованої сітки в кінцевому результаті.

Після обертання площини навколо осі симетрії було отримано тривимірне вісисиметричне тіло (рис. 3).

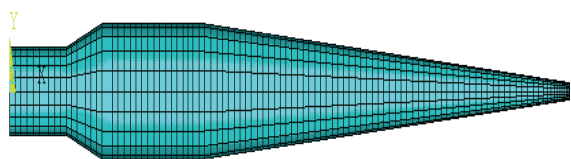


Рисунок 3 – Об'ємна модель інструмента

NODAL SOLUTION  
STEP=1  
SUB =16  
FREQ=23141  
USUM (AVG)  
RSYS=0  
DMX =9.528  
SMN =-.072823  
SMX =9.528

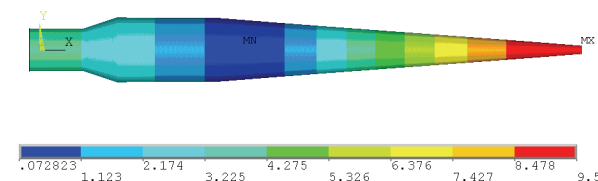


Рисунок 4 – Робоча форма коливань УЗІ

**Розрахунок робочої форми коливань УЗІ.** Частоти й форми коливань було отримано в результаті

розрахунку в ПК ANSYS методом Ланцоша.

Пошук частот проводився в діапазоні від 0 до 35000 Гц, куди потрапило 11 частот (табл. 2).

Таблиця 2 – Частоти, що знайдено у заданому діапазоні

Set	Frequency	Load Step	Substep	Cumulative
1	0.0000	1	1	1
2	0.0000	1	2	2
3	0.0000	1	3	3
4	0.0000	1	4	4
5	0.0000	1	5	5
6	4.67562E-03	1	6	6
7	4032.3	1	7	7
8	4032.3	1	8	8
9	8302.8	1	9	9
10	8302.8	1	10	10
11	13375.	1	11	11
12	13375.	1	12	12
13	18820.	1	13	13
14	18945.	1	14	14
15	18945.	1	15	15
16	23141.	1	16	16
17	25184.	1	17	17
18	25184.	1	18	18
19	27861.	1	19	19
20	32402.	1	20	20
21	32402.	1	21	21
22	35766.	1	22	22
23	37562.	1	23	23
24	40419.	1	24	24
25	40419.	1	25	25
26	42636.	1	26	26
27	48570.	1	27	27
28	48570.	1	28	28
29	51071.	1	29	29
30	51597.	1	30	30

Робочий режим коливань ультразвукового інструменту відбувається на частоті 23,141 кГц, а форма коливань УЗІ наведена на рис. 4.

**Висновки.** Проведено моделювання та розрахунок робочої частоти коливань вісисиметричного УЗІ на базі можливостей ПК ANSYS, що за допомогою спеціалізованого інтерфейсу було інтегровано у підсистему УЗІ трибологічної системи ультразвукового зварювання.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на моделювання невісисиметричних УЗІ за допомогою спеціалізованих скінченних елементів [4], розробку та налаштування підсистеми вимушених коливань та подальшу інтеграцію нових підсистем з підсистемами трибологічної системи УЗЗ.

**Список літератури:** 1. *Ісаков С.М.* Трибосистема в якості моделі УЗ зварювання / *С.М. Ісаков* // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XXI міжнар. наук.-практ. конф., Ч.1 (Харків) / за ред. проф. Товажнянського Л.Л. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – 1 с. 2. *Автономова Л.В.* Управление параметрами технологического процесса структурносвязанной акустической системы / *Л.В. Автономова, С.Н. Ісаков* // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Х.: 2008. – № 1/5 (31-2008). – С. 3-6. 3. *Ісаков С.Н.* Построение трибологической системы ультразвуковой сварки / *С.Н. Ісаков* // Вісник НТУ «ХПІ». Зб. наук. праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 63 (1036). – С. 55-59. 4. *Isakov S.* Designing of ultrasonic waveguides in conditions of spatial oscillations / *S. Isakov, O. Kedrovskaya* // MicroCAD'99 "Information technologies: Science, Technique, Technology, Education, Health". – 1999. – Iss. 7, part 1. – P.293-299. 5. *Isakov S.* Adaptive Structures Optimization / *S. Isakov* // Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures – Fortschr.-Ber. – VDI Reihe 11 Nr. 268. – Düsseldorf: VDI Verlag 1998.- PP. 249-256.

**Bibliography (transliterated):** 1. Isakov S.M. Trybosystema v yakosti modeli UZ zvaryuvannya. Informatsiyni tekhnolohiyi: nauka, tekhnika, tekhnolohiya, osvita, zdorov'ya: Tezy dopovidey XXI mizhnar. nauk.-prakt. konf., Ch.1 (Kharkiv) za red. prof. Tovazhnyans'koho L.L. Kharkiv, NTU "KhPI" (2013): 1 p. 2. Avtonomova L.V., Isakov S.N. Upravlenie parametrami tehnologicheskogo processa strukturnosvjazannoy akusticheskoy sistemy. Vostochno-evropejskiy zhurnal peredovyh tehnologij. Kharkiv 1/5 (2008): pp. 3-6. 3. Isakov S.N. Postroenie tribologicheskoy sistemy ul'trazvukovoy svarki. Visnyk NTU

"KhPI". Zb. nauk. prats'. Seriya: Dynamika i mitsnist' mashyn. Kharkiv: NTU "KhPI", 63 (1036). 2013. pp. 55-59. 4. Isakov S., Kedrovskaya O. Designing of ultrasonic waveguides in conditions of spatial oscillations. MicroCAD'99 Information technologies: Science, Technique, Technology, Education, Health. Iss. 7, part 1 (1999). pp. 293-299. 5. Isakov S. Adaptive Structures Optimization. Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures - Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11. Nr. 268. Düsseldorf: VDI Verlag (1998). pp. 249-256.

Надійшла (received) 03.06.2016

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ісаков Сергій Миколайович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, кафедра «Опір матеріалів», Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78. si@manoilgroup.com.

**Isakov Sergei** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Sr. Researcher, Department of Resistance of Materials, National Technical University "KhPI", tel.: (057) 707-69-78. si@manoilgroup.com.

**Ісаков Олексій Сергійович** – аспірант, Національний технічний університет «ХПІ».

**Isakov Olexsii** – postgraduate, National Technical University "KhPI"

**Марусенко Світлана Іванівна** – науковий співробітник, кафедра «Опір матеріалів», Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 707-61-78.

**Marusenko Svitlana** – researcher, Department of Resistance of Materials, National Technical University "KhPI", tel.: (057) 707-61-78.

УДК 519:539:534

**С.В. КРАСНИКОВ**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРПУСА ПАРОВОЙ ТУРБИНЫ И АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

Исследуются вибрационные характеристики корпуса паровой турбины и его взаимодействие с фундаментом. Объектом исследования является наиболее гибкий корпус паровой турбины – цилиндр низкого давления. Рассматривается паровая турбина, которая относится к классу наибольших мощностей среди конструкций этого типа. Моделирование и проведение расчетных исследований выполнено с использованием метода конечных элементов. Построены серии конечно-элементных моделей рассматриваемой конструкции. Проведены расчеты собственных колебаний на серии из десяти моделей. Получены основные вибрационные характеристики при различных вариантах моделирования взаимосвязи корпуса паровой турбины с фундаментом. Полученные результаты можно использовать для оценки вибрационного состояния корпуса паровой турбины и фундамента на который опирается каждый корпус.

**Ключевые слова:** вибрация, паровая турбина, цилиндр низкого давления, метод конечных элементов, собственные частоты, фундамент.

**Введение.** Энергетика крупных промышленных регионов базируется на энергоблоках средней и большой мощности. В конце восьмидесятых годов прошлого века были созданы паровые турбины мощностью около 1000 МВт. Это достижение остается непревзойденным и в наше время. Новые энергоблоки, как правило, имеют мощность 800 МВт и более. Для этих энергоблоков паровые турбины типично имеют состав из нескольких цилиндров низкого давления и одного или нескольких цилиндров высокого давления. Все корпуса паровой турбины устанавливаются на фундамент. Корпуса паровой турбины имеют возможность перемещаться относительно фундамента в рамках заданных ограничений. Корпус цилиндра низкого давления паровой турбины подвергается воздействию термических, гравитационных и динамических нагру-

зок. Наибольшее количество отказов энергоблоков происходит в результате повышенного уровня вибраций [1, 2]. Корпуса цилиндров низкого давления являются пространственными пластинчато-стержневыми конструкциями. Они имеют значительно меньшую жесткость по сравнению с корпусами цилиндров высокого давления и фундаментом. Поэтому для обеспечения надежности энергоблока особое внимание уделяется динамическому поведению корпуса цилиндра низкого давления [3].

**Цель работы.** Необходимо исследовать зависимость основных вибрационных характеристик корпуса турбины от различных вариантов его взаимосвязи с фундаментом турбины. Объектом проведенных исследований является корпус цилиндра низкого давления



паровой турбины мощностью 1100 МВт. Предметом исследования являются собственные частоты и формы корпуса при различных состояниях его взаимосвязи с фундаментом.

**Построение математической модели.** Исследования базируются на теории колебаний и использовании метода конечных элементов. Запись основного функционала в общем виде:

$$L(t, O) q(t) = R(t), \quad (1)$$

где  $O$  – различные состояния взаимодействия корпуса турбины с фундаментом;  $L$  – дифференциальное уравнение Лагранжа 2-го рода;  $R$  – внешние силы.

В соответствии с методом конечных элементов [4] выражение (1) в матричном виде имеет следующую запись:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = 0, \quad (2)$$

где  $M$  – матрица масс,  $C$  – матрица демпфирования,  $K$  – матрица жесткости.

Решения уравнения (2) для задач собственных и вынужденных колебаний соответственно записываются в виде (3), (4).

$$\det[K - p_j^2 M] = 0; \quad ([K] - p_j^2 [M])\{V_j\} = 0, \quad (3)$$

где  $p_j$  –  $j$ -я собственная частота системы;  $\{V_j\}$  – вектор  $j$ -й собственной формы системы.

**Построение расчетной модели.** Геометрические модели корпуса цилиндра низкого давления показаны на рис. 1-3. На рис. 1 показана верхняя часть корпуса, на рис. 2 – нижняя часть, на рис. 3 – сборная геометрическая модель всего корпуса цилиндра низкого давления.

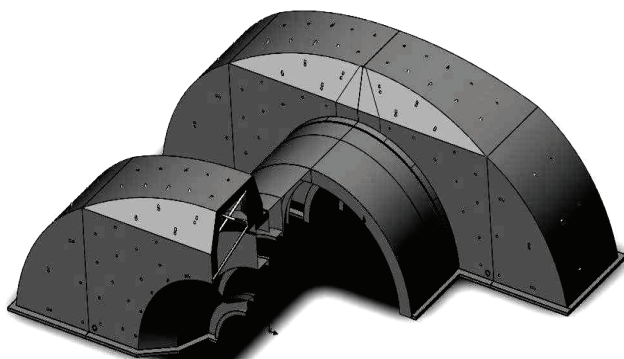


Рисунок 1 – Геометрическая модель верхней части корпуса паровой турбины

Были построены серии конечно-элементных моделей корпуса цилиндра низкого давления. Они отличаются моделированием взаимодействия корпуса паровой турбины с фундаментом. Исследуемый корпус цилиндра низкого давления устанавливается на фундамент паровой турбины, имеет сложное соединение с фундаментом и другими частями паровой турбины в виде системы пружин, шпоночных соединений и опорных полок. Дискретизация моделей взята на основе ранее разработанных подходов [5, 6]. Данные о моделях приведены в табл. 1 и показаны на рис. 4-6.

В моделях Т1 и Т2 различные состояния взаимодействия корпуса турбины с фундаментом моделируются разной системой стержней [7-9]. Для модели Т2

система стержней показана на рис. 4. Для модели Т1 эта система содержит только вертикально ориентированные (по оси  $Y$ ) стержни. У модели Т3 отсутствуют стержни, узлы которых находятся в плоскости симметрии  $YOZ$  [10, 11]. У модели Т1 вместо этих стержней стоит запрет перемещений в соответствующих направлениях.

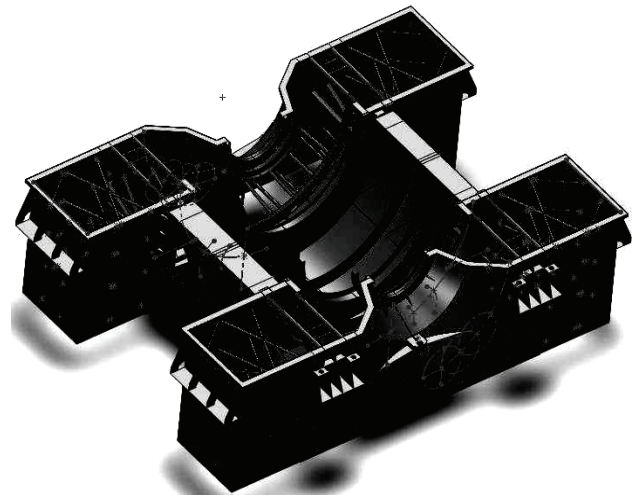


Рисунок 2 – Геометрическая модель нижней части корпуса паровой турбины

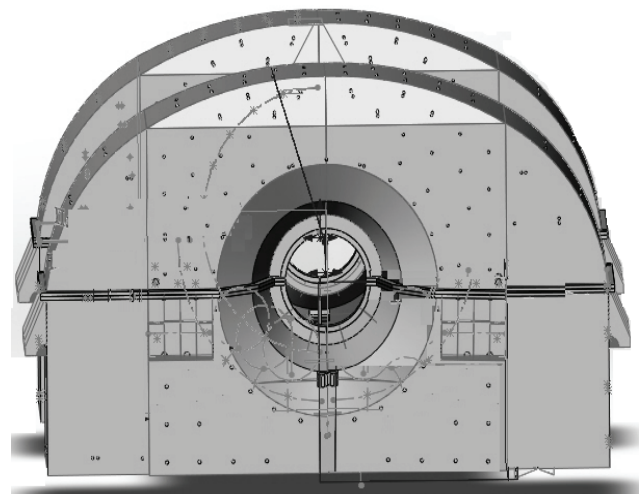


Рисунок 3 – Геометрическая модель корпуса паровой турбины

Таблица 1 – Параметры конечно-элементных моделей

Название модели	Номер рисунка	Количество		
		узлов	элементов	степеней свободы
Т1	4	13183	15135	78873
Т2	5	13270	15222	78876
Т3		13267	15219	78876

**Результаты численных исследований.** Рабочая частота рассматриваемой паровой турбины 25 Гц. В силу специфики генератора вынуждающая нагрузка на корпус цилиндра низкого давления имеет частоту не только 25 Гц, но и 50 Гц. Поэтому исследуемый диапазон для динамических характеристик выбран от 0 до 55 Гц.

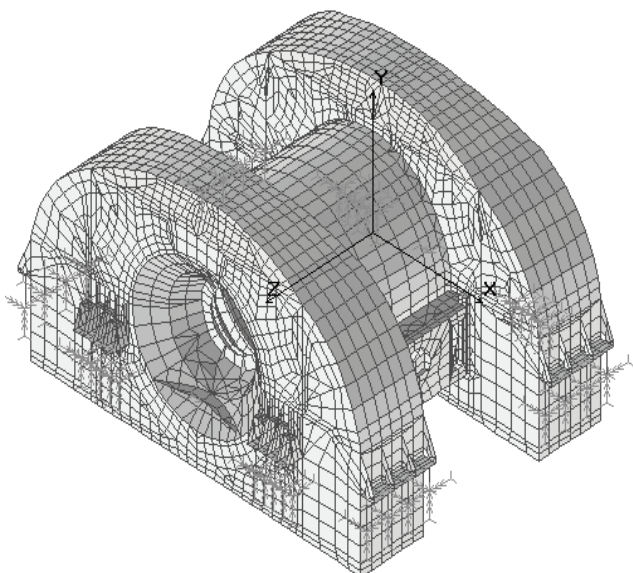


Рисунок 4 – Конечно-элементная модель T1

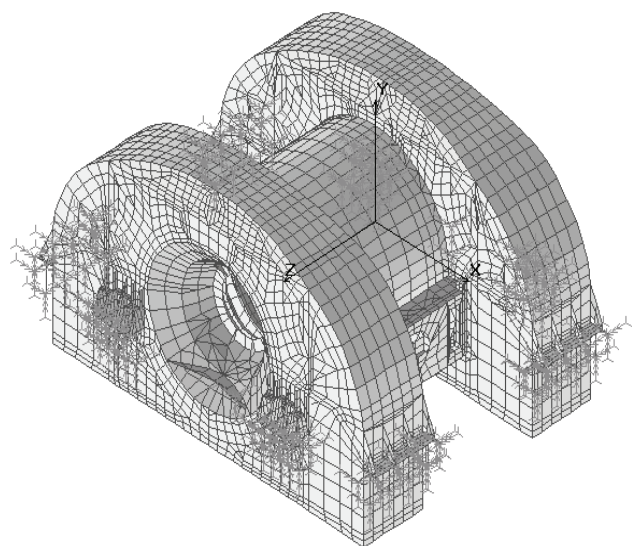


Рисунок 5 – Конечно-элементная модель T2

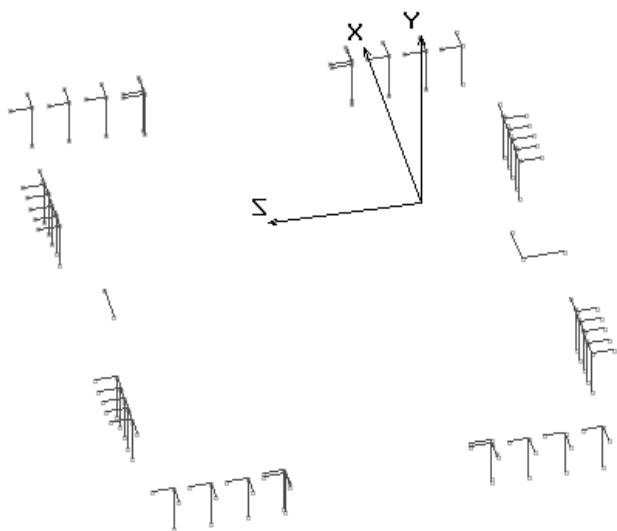


Рисунок 6 – Опорная система стержней для конечно-элементной модели T2

Были проведены расчеты собственных частот и форм колебаний при различной жесткости опорной системы стержней. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты анализа собственных колебаний

Номер расчета	Тип модели	Вертикальная жесткость (Н/м)	Количество резонансов по диапазонам			
			0-55 Гц (всего)	0-25 Гц (всего)	0-25 Гц (глобальные)	0-55 Гц (глобальные)
1	T1	$10^1$	335	30	5	5
2	T1	$10^8$	334	29	4	5
3	T1	$10^{10}$	325	23	4	5
4	T1	$10^{12}$	325	22	1	5
5	T2	$10^8$	334	30	5	5
6	T2	$10^{10}$	331	27	5	5
7	T2	$10^{12}$	325	23	3	5
8	T2	$10^{15}$	330	27	5	5
9	T2	$10^{17}$	325	23	4	5
10	T3	$10^{10}$	331	28	5	5

У моделей T2 и T3 жесткость стержней в направлениях X и Z одинакова и отличается на несколько порядков от аналогичной величины по направлению Y. В табл. 2 позициям 5-7 соответствует жесткость стержней в направлениях X и Z меньшие на 3 порядка от жесткости стержней направленных по Y, позиции 8-9 – на 8 порядков, а позиции 10 – на 5 порядков.

Из табл. 2 видно, что в исследуемом диапазоне 0–55 Гц корпус цилиндра низкого давления имеет большое число резонансов. При этом глобальных резонансов только 5. Остальные резонансы связаны с колебаниями отдельных стержней и пластин.

Модель позиции 1 (см. табл. 2) отличается наименьшей жесткостью. Наибольшее отличие ее глобальных резонансов от всех остальных в том, что имеется только один глобальный резонанс с максимальными колебаниями по оси Y. Естественно, что глобальные резонансы этой модели имеют наименьшие величины собственных частот.

Из табл. 2 видно, что модель T1 при жесткости опор от  $10^8$  Н/м имеет не больше 4 глобальных резонансов в диапазоне 0-25 Гц. В этом диапазоне частот модели T2 и T3 при жесткости опор в вертикальном направлении (Y, рис. 5) от  $10^8$  Н/м имеют до 5 глобальных резонансов.

С повышением жесткости опорных стержней количество глобальных резонансов в диапазоне 0-55 Гц остается неизменным. Количество глобальных резонансов в диапазоне 0-25 Гц уменьшается только при значительном увеличении жесткости опоры – на 4 порядка. При этом если уменьшить жесткость опоры в плоскости XOZ и, соответственно, увеличить разницу жесткостей с направлением Y (позиции 8 и 9, см. табл. 2), то количество резонансов в диапазоне 0-25 Гц увеличится.

Сравнивая позицию 10 с позициями 5-9 (см. табл. 2) заметно несколько особенностей. При удалении стержней, моделирующей так называемый «фикс-пункт» (модель T3), количество глобальных резонан-

сов в рассматриваемых диапазонах не отличается от базовой модели Т2. При этом анализ собственных форм колебаний показал, что соотношение колебаний элементов корпуса в плоскости ХОZ перераспределились, а формы колебаний в вертикальном направлении Y имеют сходство.

Общая картина изменения форм собственных колебаний следующая: при увеличении жесткости опорной системы наименьшие изменения имеют формы колебаний с максимумами колебаний в плоскости ХОZ, но перераспределение соотношения жесткостей оказывает на них большое влияние.

**Выводы.** Построены геометрические модели и серия конечно-элементных моделей корпуса цилиндра низкого давления паровой турбины большой мощности. Проведенные расчеты собственных колебаний показали, что в диапазоне 0-25 Гц находятся от 20 до 30 собственных частот, а в диапазоне 0-55 Гц около 325-335. При этом глобальных форм колебаний в диапазоне 0-55 Гц стабильно 5, а величина жесткости опорных конструкций (фундамент и система связей) даже при увеличении на несколько порядков незначительно уменьшает количество глобальных резонансов в диапазоне 0-25 Гц. Значительное влияние на это количество оказывает соотношение жесткости опор в вертикальном и горизонтальном направлениях.

**Список литературы:** 1. Рунов Б.Т. Исследование и устранение вибрации паровых турбоагрегатов / Б.Т. Рунов. – М.: Энергоиздат, 1982. – 352 с. 2. Шульженко Н.Г. Численный анализ колебаний систем турбоагрегат-фундамент / Н.Г. Шульженко, Ю.С. Воробьев. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с. 3. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. – Tokyo: Japan, 2009. – 104 p. 4. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел / С.Ю. Еременко. – Х.: Основа, 1991. – 271 с. 5. Жовдак В.О. Решение задачи статистической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров / В.О. Жовдак, С.В. Красников, О.С. Степченко // Проблемы машиностроения. – Х.: Контраст, 2004. – Т. 7, № 3. – С. 39-47. 6. Красников С.В. Компьютерное моделирование багатокорпусного турбоагрегата та аналіз його вібраційних характеристик / С.В. Красников, О.С. Степченко, А.В. Торяник // Машинознавство. – Львів: Кінпатрі, 2009. – № 2. – С. 27-33. 7. Zhiqiang Hu A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction / Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He and Lei Xiao //ASME

Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition Volume 1B. – Düsseldorf: International Gas Turbine Institute, 2014. – P. V01BT27A041, 8 pages. 8. Alan Turnbull Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth / Alan Turnbull // Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. – London: The Royal Society, 2014. – P. 20140254, 19 pages. 9. Adhhikari Sukanta Turbo-Generator Foundation / Adhhikari Sukanta // Structural Engineering Forum of India. – New Delhi: SEFI, 2010. – P. 1-19. 10. Chowdhury Indrajit Dynamics of Structure and foundation a unified approach / Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu. – Leiden: CRC Press, 2009. – 616 p. 11. Gu Ping New dynamic participation factor for turbine generator foundation Practice Periodical on Structural Design and Construction / Gu Ping // VA.: American Society of Civil Engineers, 2009. – № 15 (1). – P. 54-62.

**Bibliography (transliterated):** 1. Runov B.T. Issledovanie i ustranenie vibracii parovyh turboagregatov. Moscow: Energoizdat, 1982, 352 p. 2. Shul'zhenko N.G., Vorob'ev Yu.S. Chislennyj analiz kolebanij sistem turboagregat-fundament. Kyiv: Nauk. dumka, 1991, 232 p. 3. HITACHI. Turbine and Generator Foundation Design and construction & recommendation. Tokyo: Japan, 2009, 104 p. 4. Eremenko S.Yu. Metody konechnykh elementov v mehanike deformiruemykh tel. Kharkiv: Osnova, 1991, 271 p. 5. Zhovdak V.O., Krasnikov S.V., Stepchenko O.S. Reshenie zadachi statisticheskoy dinamiki mashinostroitel'nykh konstrukcij s uchetom sluchajnogo izmeneniya parametrov. Problemy mashinostroeniya, Kharkiv: Kontrast, 2004, vol. 7, No 3, pp. 39-47. 6. Krasnikov S.V., Stepchenko O.S., Toryanik A.V. Komp'yuterne modelyuvannya bahatokorpusnoho turboahrehatu ta analiz joho vibracijnykh kharakterystyk. Mashynoznavstvo, L'viv: Kinpatri, 2009, No 2, pp. 27-33. 7. Zhiqiang Hu, Wei Wang, Puning Jiang, Qinghua Huang, Jianhua Wang, Sihua Xu, Jin He and Lei Xiao A Seismic Analysis on Steam Turbine Considering Turbine and Foundation Interaction. ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition Volume 1B. Düsseldorf: International Gas Turbine Institute, 2014, pp. V01BT27A041, 8 pages. 8. Alan Turnbull. Corrosion pitting and environmentally assisted small crack growth. Proceedings. Mathematical, Physical, and Engineering Sciences. London: The Royal Society, 2014, pp. 20140254, 19 pages. 9. Adhhikari Sukanta Turbo-Generator Foundation. Structural Engineering Forum of India. New Delhi: SEFI, 2010, pp.1-19. 10. Chowdhury Indrajit, Dasguptu P. Shambhu Dynamics of Structure and foundation a unified approach. Leiden: CRC Press, 2009, 616 p. 11. Gu Ping New dynamic participation factor for turbine generator foundation Practice Periodical on Structural Design and Construction. VA.: American Society of Civil Engineers, 2009, No 15 (1), pp. 54-62.

Поступила (received) 08.09.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Красников Сергей Васильевич**, кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, тел. (+038057) 707-37-30, e-mail: vsevavr@yandex.ru

**Krasnikov Sergij Vasylovych**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, phone (+038057) 707-37-30, e-mail: vsevavr@yandex.ru

УДК 539.3

Д.В. ЛАВИНСКИЙ

### АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПРЕССОВАНИИ

Представлена математическая постановка задачи анализа упругопластического деформирования системы электропроводных тел при действии электромагнитного поля. Предложен численный метод решения согласно схемы метода конечных элементов. Предложенный метод, базируется на вариационном принципе стационарности полной энергии системы. Рассмотрено приложение данного метода к анализу деформирования составной матрицы пресс-формы, которая используется для прессования порошковых материалов.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, упругопластическое деформирование, прессование порошков, метод конечных элементов.

**Введение.** Энергия электромагнитного поля (ЭМП) используется для большого числа технологических операций. Известно большое число технологических приложений, где используется силовое воздействие ЭМП на обрабатываемый объект, с целью необратимого деформирования, в том числе и при прессовании изделий из порошковых материалов. При этом силовое воздействие испытывает не только обрабатываемая заготовка, но и индуктор, с помощью которого генерируется ЭМП. Основные конструктивные решения и особенности электромагнитного прессования порошковых материалов, а также подходы к численному моделированию процесса, описываются, например, в работе [1].

Обобщенно технологическая система в данном случае включает: индуктор, матрицу и порошок. Все элементы технологической системы могут испытывать силовое воздействие за счет возникновения электромагнитных сил. Энергия, развиваемая ЭМП, может достигать уровней, при которых электромагнитные силы вызывают разрушение элементов технологической системы. Таким образом, в данном случае анализ НДС элементов технологической схемы является неотъемлемым этапом процесса проектирования.

Также широко используется прессование изделий с помощью порошков тугоплавких соединений типа карбид вольфрама, кобальта, никеля при температуре до 1800 °С и давлениях прессования 30–40 МПа в пресс-формах проводится в матрицах из тугоплавких материалов. При давлениях больше 40 МПа матрицы в пресс-формах разрушаются. Поэтому создание расчетных методов оценки прочности на базе анализа напряженно-деформированного состояния является актуальной научной задачей. В работе [2] проведен детальный анализ НДС составных матриц пресс-форм из углерод-углеродных композитных материалов (УУКМ), определены предельные давления прессования. Для снижения силового воздействия на матрицу в некоторых случаях возможно совместное использование изостатического и электромагнитного прессования.

**Математическая постановка задачи.** Расчетное оценивание конструкционной прочности систем электропроводных тел базируется на анализе упруго-

пластического деформирования, который опирается на предварительный анализ распределения ЭМП. Распределение векторных компонент ЭМП в электропроводном теле описывается системой фундаментальных уравнений Максвелла, которые дополняются материальными соотношениями и граничными условиями:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0; \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c [\dot{\vec{u}} \times \vec{B}];$$

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_c \vec{H}; \quad \vec{E}_\Gamma \times \vec{n} = 0;$$

$$\vec{D}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0; \quad \vec{H}_\Gamma \times \vec{n} = 0; \quad \vec{B}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{H}, \vec{E}, \vec{H}_\Gamma, \vec{E}_\Gamma$  – вектора напряженности магнитного и электрического полей в объеме и на границе ( $\Gamma$ ) тела;  $\vec{D}, \vec{B}, \vec{D}_\Gamma, \vec{B}_\Gamma$  – вектора электрической и магнитной индукции в объеме и на границе ( $\Gamma$ ) тела;  $\varepsilon_c, \mu_c, \gamma_c$  – электрическая и магнитная проницаемость, и электропроводность материала;  $\vec{j}$  – вектор плотности тока;  $\vec{n}$  – вектор нормали к границе тела.

Распределение компонент тензоров напряжений  $\vec{\sigma}$  и деформаций  $\vec{\varepsilon}$ , а также вектора перемещений  $\vec{u}$  удовлетворяет системе уравнений, которая содержит дифференциальные уравнения равновесия, геометрические соотношения, материальные соотношения и граничные условия:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f} = 0; \quad \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T];$$

$$\vec{\varepsilon} = {}^{(4)}\vec{S} \cdot \vec{\sigma}; \quad (3)$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{p} + \frac{\Xi}{2} \vec{E}_\Gamma + \frac{\mu_c}{2} (\Xi \dot{\vec{u}} \times \vec{n} + \vec{i}) \times H_\Gamma,$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $\vec{f}$  – вектор интенсивности объемных сил (в случае учета электромагнитных сил:  $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ );  ${}^{(4)}\vec{S}$  – тензор соответствия 4-го ранга, который в случае упругого деформирования имеет вид соответственно линейного закона Гука;  $\vec{p}$  – поверхностная нагрузка;  $\Xi, \vec{i}$  – плотность поверхностных зарядов и токов.

Процесс прессования порошкового материала

может быть разбит на три этапа: уплотнение, упругое деформирование заготовки, пластическое деформирование заготовки. На первом этапе силовое воздействие на технологическую оснастку пренебрежимо мало, на втором и третьем этапах мы имеем дело уже с твердотельной заготовкой, материал которой обладает особыми свойствами. Так как, целью работы является анализ НДС элементов технологической оснастки, то допустимо использование традиционных подходов для учета упругопластического деформирования.

При рассмотрении упруго-пластического деформирования, поведение материала рассматривается в инкрементальной форме (3) совместно с условием пластичности разом (4):

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left( d\bar{\sigma} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\bar{\sigma}_0 \bar{I} \right) + \frac{3}{2} d\varepsilon_i^p \frac{\bar{s} - \bar{\beta}}{\sigma_i}; \quad (4)$$

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{EE_h}{E - E_h} \bar{\varepsilon}^p;$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr} \left( (\bar{s} - \bar{\beta})^2 \right)} - \sigma_T = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\bar{I}$  – единичный тензор;  $\bar{\sigma}_0$  – шаровой тензор напряжений;  $\bar{s}$  – девиатор напряжений;  $\bar{\varepsilon}^p$  – тензор деформаций пластичности;  $\varepsilon_i^p$  – интенсивность пластических деформаций;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\sigma_T$  – предел текучести;  $E_h$  – модуль упрочнения.

Анализ упругопластического деформирования систем электропроводных тел сложной геометрии требует использования численных методов. К наиболее универсальным относится метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет в рамках единой расчетной схемы рассматривать распределение векторных компонент ЭМП и тензорных компонент процесса деформирования. Конкретная реализация МКЭ в данном случае может опираться на вариационный принцип стационарности полной энергии системы электропроводных тел [3,4].

Для уменьшения количества уравнений, которые описывают распределение ЭМП вводим в рассмотрение векторный магнитный потенциал  $\vec{A}$ , связанный с основными векторными компонентами ЭМП следующим образом:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_c \vec{j}. \quad (7)$$

Уравнения (1) записаны для случая пренебрежения нелинейным «магнитным» поведением материала и без учета «электрической» составляющей ЭМП, поскольку для анализа деформирования электропроводных тел ее вклад является несущественным.

Выражение для полной энергии имеет следующий вид:

$$E = U + W, \quad (8)$$

где  $U$  – энергия квазиупругого деформирования;  $W$  – энергия ЭМП (в пренебрежении «электрической» составляющей).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \cdot {}^{(4)}C \cdot \bar{\varepsilon} dV - \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV - \quad (9)$$

$$- \int_{A_p} \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \vec{i} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} dA;$$

$$W = \int_V \left( \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 - \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV, \quad (10)$$

где  ${}^{(4)}C$  – тензор коэффициентов упругости.

Решение должно удовлетворять следующему вариационному уравнению:

$$\delta E = \delta U + \delta W = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) приводит в итоге к решению двух независимых систем алгебраических уравнений относительно узловых перемещений и узловых значений векторного магнитного потенциала.

Особенности вариационной постановки анализа упругопластического деформирования системы тел при действии ЭМП подробно изложены в работах [5,6], детальное описание алгоритма для численной реализации представлено в работе [7].

**Пример расчета.** Рассмотрим упругопластическое деформирование для расчетной схемы, представленной на рис. 1. Геометрические размеры элементов конструкции составной матрицы такие же, как и в работе [2], толщина внешнего индуктора принималась такой же, как и у наружного несущего цилиндра.

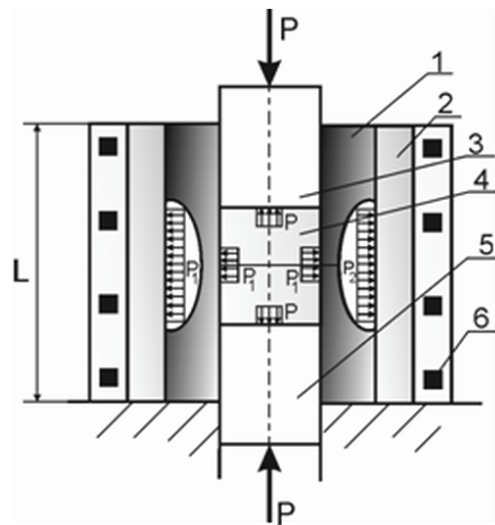


Рисунок 1 – Расчетная схема:

1 – внутренний цилиндр-вкладыш, выполненный из графита; 2 – наружный несущий цилиндр, изготовленный из УУКМ; 3, 5 – верхний и нижний пуансоны из УУКМ; 4 – порошок, с помощью которого прессуют изделия; 6 – многовитковый индуктор

Механические свойства материала приняты следующими: цилиндр-вкладыш – графит: предел прочности на растяжение – 15 МПа, предел прочности на сжатие – 51,5 МПа, модуль упругости –  $1,05 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,2; наружный несущий цилиндр – УУКМ: предел прочности на растяжение – 110 МПа, предел прочности на сжатие – 100 МПа, модуль упругости –  $1,8 \cdot 10^4$  МПа, коэффи-

коэффициент Пуассона – 0,19; изоляция токопровода индуктора – материал капролон; модуль упругости –  $2,5 \cdot 10^3$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, предел прочности при растяжении – 70 МПа, предел прочности при сжатии – 90 МПа; токопровод индуктора – медь; модуль упругости –  $18 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,33, предел текучести – 180 МПа.

Давление прессования принималось 100 МПа, амплитуда силы тока в импульсе – 30 кА. Задача решена для осесимметричной модели. В качестве базового выбирался четырехузловой осесимметричный конечный элемент с билинейной аппроксимацией перемещений и окружной компоненты векторного магнитного потенциала. Особенности использования элементов подобного типа подробно рассмотрены в работах [8,9]. На границах раздела между составными частями конструкции вводились слои контактных конечных элементов. Вопросы, связанные с выбором характеристик «контактных» конечных элементов для осесимметричных конструкций рассматривались в работе [10].

На первом этапе решения получены распределения векторных компонент ЭМП. Расчеты показали, что максимальные значения касательной компоненты напряженности магнитного поля вдоль границы раздела «вкладыш – заготовка» наблюдаются на середине длины вкладыша, следовательно, именно здесь следует ожидать снижение силового воздействия при совместном использовании псевдоизостатического и электромагнитного прессования.

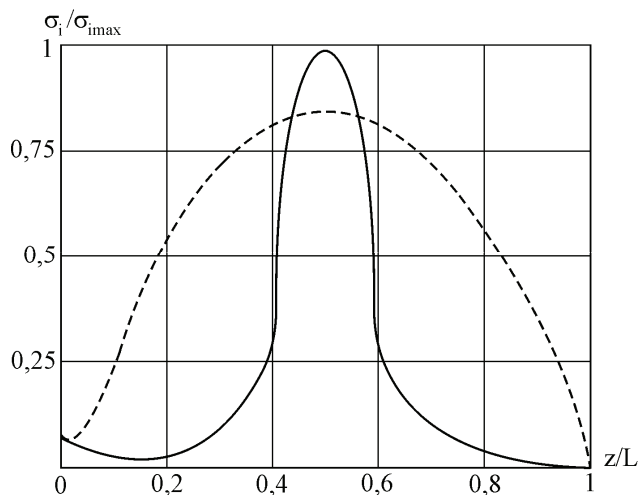


Рисунок 2 – Распределение интенсивности напряжений в точках внутренней поверхности вкладыша

Далее проанализируем НДС системы «индуктор – составная матрица – заготовка» при использовании псевдоизостатического и электромагнитного прессования. На рис. 2 приведено качественное распределение интенсивности напряжений в точках внутренней поверхности вкладыша. Сплошная линия – для случая псевдоизостатического прессования [2], штриховая линия – для случая совместного использования псевдоизостатического и электромагнитного прессования. Как и в случае псевдоизостатического прессования максимальные значения наблюдаются на середине

длины вкладыша, но наличие электромагнитных сил здесь, действительно, приводит к значительному (порядка 15 %) уменьшению максимальной интенсивности напряжений.

**Выводы.** В работе представлена общая математическая постановка задачи упругопластического деформирования систем электропроводных тел. Предложен численный метод решения в соответствии со схемой метода конечных элементов, который базируется на принципе минимума полной энергии системы тел. Предложенный метод использован для анализа деформирования составной матрицы пресс-формы, которая используется для совместного псевдоизостатического и электромагнитного прессования порошковых материалов.

**Список литературы:** 1 Mamalis A. G. Electro-magnetic tooling for metal forming and powder compaction: numerical simulation / A. G. Mamalis, D. E. Manolacos, A. G. Kladas, A. K. Koumoutsos // In Proceedings of the 1 st International Conference on High Speed Forming. – 2004, March. – P. 143-154. 2. Ашихмин В.П. Анализ прочности элементов пресс-форм из углерод-углеродных материалов для псевдоизостатического прессования / В.П. Ашихмин, О.В. Бирюков, В.А. Гурин, Б.Б. Затолока, В.В. Колосенко, С.Ю. Саенко, Д.В. Лавинский, О.К. Морачковский // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (91). – 2007. – № 6. – С. 120-123. 3. Belokon' A.V. Partitioned schemes of the finite-element method for dynamic problems of acoustoelectro-elasticity / A.V. Belokon', V.A. Eremeyev, A.V. Nasedkin, A.N. Solov'yev // J. Appl. Math. Mech. – 2000. – 64 (3). – P. 367-377. 4. Nasedkin A.V. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects / A.V. Nasedkin, V.A. Eremeyev // ZAMM. – 2014. – 94 (10). – P. 878-892. 5. Altenbach H. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, D. Lavinsky // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2015. – Vol. 27, iss. 12. – P. 1-13. – DOI: 10.1007/s00161-015-0484-8. 6. Лавинський Д. В. Пружно-пластичне деформування систем тіл при дії електромагнітних полів / Д. В. Лавинський, О. К. Морачковський // Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. ст. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – № 2. – С. 125-135. 7. Simo J. Computational Inelasticity / J. Simo, T. Hughes. – Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1998. 8. Cazzani A. Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes / A. Cazzani, S.N. Atluri // Comput. Mech. – 1993. – 11 (4). – P. 229-251. 9. Cazzani A. A four-node hybrid assumed-strain finite element f or laminated composite plates / A. Cazzani, E. Garusi, E. Tralli, S.N. Atluri // CMC Comput. Mater. Contin. – 2005. – 2 (1). – P. 23-38. 10. Bondar' S. V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures / S. V. Bondar', D. V. Lavinskii // Strength of Materials. – 2011. – Vol. 43, № 4. – P. 447-454.

**Bibliography (transliterated):** 1 Mamalis A. G., Manolacos D. E., Kladas A. G., Koumoutsos A. K. Electro-magnetic tooling for metal forming and powder compaction: numerical simulation. In Proceedings of the 1 st International Conference on High Speed Forming. 2004, March. pp. 143-154. 2. Ashihmin V.P., Biryukov O.V., Gurin V.A., Zatoloka B.B., Kolosenko V.V., Saenko S.Yu., Lavinsky D.V., Morachkovsky O.K. Analiz prochnosti elementov press-form iz uglerod-uglerodnykh materialov dlya psevdoizostaticheskogo pressovaniya. Voprosy atomnoj

науки і техніки. Seriya: Fizika radiacionnykh povrezhdenij i radiacionnoe materialovedenie (91). 2007, No 6, pp.120-123. **3.** Belokon' A.V., Eremeyev V.A., Nasedkin A.V., Solov'yev A.N. Partitioned schemes of the finite-element method for dynamic problems of acoustoelectro-elasticity. J. Appl. Math. Mech. 2000, **64** (3), pp. 367–377. **4.** Nasedkin A.V., Eremeyev V.A. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects. ZAMM 94, 2014, **10**, pp. 878–892. **5.** Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K. and Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015, vol. 27, iss. 12, pp. 1-13. DOI: 10.1007/s00161-015-0484-8 **6.** Lavinsky D.V., Morachkovsky O.K. Pruzhno-plastychne deformuvannya system til pry dii electromagnitnykh poliv. Visnyk Zaporiz'kogo na-

cional'nogo universitetu: zb.nauk. st. fizyko-matematychni nauky. Zaporizhzhya: ZNU, 2015, No 2, pp. 125-135. **7.** Simo J., Hughes T. Computational Inelasticity. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1998. **8.** Cazzani A., Atluri S.N. Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes. Comput. Mech. 1993, **11** (4), pp. 229–251. **9.** Cazzani A., Garusi E., Tralli A., Atluri S.N. A four-node hybrid assumed-strain finite element for laminated composite plates. CMC Comput. Mater. Contin. 2005. **2** (1), pp. 23–38. **10.** Bondar' S.V., Lavinskii D.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials, 2011, vol. 43, No 4, pp. 447-454.

Поступила (received) 02.06.2016

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Лавинский Денис Владимирович** – канд. техн. наук, доц., кафедра теоретической механики, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

**Lavinsky Denis Vladimirovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics, National Technical University "KhPI", tel.: (057)- 70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

УДК 539.431:678

**О.О. ЛАРИН**

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ОЦІНКА ХАРАКТЕРИСТИК ОПОРУ ВТОМІ ГУМО-КОРДНИХ КОМПЗИТИВ ПРИ ДЕФОРМУВАННІ В НАПРЯМУ ОРТОГОНАЛЬНОМУ АРМУВАННЮ ДО ТА ПІСЛЯ ШТУЧНОГО СТАРІННЯ**

У роботі визначаються показники опору втомі гумового композиту, що посиленій армуванням текстильним кордом та закономірності їх зміни внаслідок старіння. Дослідження проводяться експериментально з плоскими зразками на розтяг із циклічним завданням деформацій. Окремо досліджувались зразки матеріал до та після старіння. Старіння задавалось штучно шляхом тривалої витримки зразків в термокамері на фіксованій підвищеній температурі. Проведено порівняльний аналіз зміни параметрів кривих утоми з часом в наслідок старіння.

**Ключові слова:** гумові композити, старіння, експериментальні тести на втому, каркас пневматичної шини.

**Вступ**

В сучасному машинобудуванні широко застосовуються гумово-кордні елементи конструкції. Це можуть бути спеціальні шланги, демпфуючі прокладки, гумові пружні вставки в приладах амортизації, пневматичні шини автомобілів [1-3] та інше.

Надійність перелічених елементів конструкцій є їх важливою характеристикою, що дає можливість отримати оцінки експлуатаційного ресурсу. Достовірні оцінки по строку служби гумових та гумо-кордних композиційних елементів дозволяють попередити раптові відмови, спланувати ремонтні роботи тощо.

З багатьох досліджень, що наведені в літературі відомо, що найпоширенішими типами відмов у гумо-кордних елементах конструкцій є пошкодження, що з'являються на поверхні [4] або між шарами [5]. Дослідження показують, що в існує відносно слабка міжфазна міцність, і в наслідок дії навантажень з'являються внутрішні початкові тріщини, які поступово переростають в зовнішній гумовий шар, що приводить до остаточного розриву [4, 5]. Узагальнюючи наведені

дані, можна стверджувати, що робота механічних об'єктів гумо-кордними елементами, як правило, відбувається при динамічному (циклічному) навантаженні, що призводить до накопиченню втомі в матеріалах.

Питанням оцінки характеристик опору втомі для різних матеріалів приділяється багато уваги в літературі, зокрема і питанням прогнозування втомної довговічності у гумоподібних матеріалах [6,7] Основною характеристикою опору втомі є експериментальна крива Велера, яка визначає залежність між амплітудами параметру напружено-деформованого стану (НДС) від кількості циклів деформації (напружень), що витримає зразок до появи тріщини заданого розміру (або до руйнування).

Тут слід зазначити, що відомі експериментальні дані по залежностям кількості циклів до відмови від параметрів НДС вказує на те що завжди існує досить суттєвий статистичний розкид у визначенні матеріальних констант [8,9].

Крім цього, однією з важливих особливостей еластомірних матеріалів, зокрема гумових сумішей,

є прояв ефекту природного старіння [10–14]. Відомо, що гумоподібні матеріали здатні істотно змінювати свої фізико-хімічні властивості з часом. При чому такі характеристики, як статична міцність та опір утомі можуть змінюватись в декілька разів за номінальний термін експлуатації конструкції для гумових елементів навіть, які не знаходяться в роботі (наприклад, під час зберігання) [10, 11]. Зазвичай, термін гарантованого зберігання (навіть не експлуатації) складає 5-6 років, після яких компанії виробники не рекомендують використовувати дані конструкції через низьку їх надійність, оскільки властивості гуми за цей час суттєво деградують [10–14]. Отже аналіз закономірностей зміни властивостей гумових матеріалів з часом є такою самою важливою проблемою, як і дослідження початкових характеристик цих матеріалів.

На процеси старіння впливає велика кількість зовнішніх факторів, серед яких найбільш суттєвими є термічне старіння, озонування (насичення киснем), вплив хімічних речовин (зокрема дуже агресивну дію реалізують нафтопродукти та сольові розчини), ультрафіолетове опромінення тощо [12, 13]. Враховуючи означені фактори, сучасні елементи конструкцій, що мають гумові частини виготовляють з тим аби уникнути безпосереднього впливу зазначених факторів на несучі елементи конструкцій, тобто їх покривають захисними елементами. Таким чином, за належного зберігання та правильної експлуатації особливий вплив на старіння відбувається переважно через механізми термічного старіння (решта факторів у будь-якому разі вносить свій певний вклад, наприклад, завжди присутнє дифузійне проникнення кисню у гуму) [13].

Термічне старіння – це процес зміни фізичних та хімічних характеристик гуми під дією температури [14]. Слід відзначити, що даний процес протікає за будь-яких позитивних значень температури (навіть за кімнатних) відбуваються процеси старіння. Звичайно, деградація є тим більш інтенсивною чим більшою є температура. Даний факт покладено в основу проведення прискорених випробувань гуми на механічну поведінку у штучно зістареному стані.

Слід наголосити на тому, що старіння впливає також і на показники опору втомі для цих матеріалів. При чому в літературі є досить обмежена інформація щодо впливу старіння на ці характеристики, а більшість відомих досліджень описують зміну у часі пружних параметрів та показників міцності. Проте саме зміна характеристик втомі даних матеріалів лежить в основі оцінки надійності відповідних елементів конструкцій. Таким чином, визначення характеристик опору втомі відповідних композиційних матеріалів є важливою науково-практичною задачею.

### Мета роботи

Метою даного дослідження є експериментальне визначення закономірностей зміни показників опору втомі гумового композиту, що посиленний текстильним кордом внаслідок їх штучного старіння.

### Експериментальне визначення показників кривих утоми для гумокордного композиту

В даній роботі було проведено серію експериме-

нтальних випробувань на циклічну втому із композитним матеріалом який є шаром каркасу пневматичних шин. Відповідний композит складається з гумової матриці, що посилена текстильним кордом. Експерименти проводились на одновісний розтяг. Для досліджень було використано зразки геометрія яких відповідає вимогам стандартів, щодо механічних випробувань гумоподібних матеріалів та гумо-кордних композитів ISO 527-2 1A.

Зразки мали наступні фактичні геометричні параметри: товщина:  $h = 10 \pm 0,1$  мм; ширина:  $b = 10$  мм; довжина робочої частини:  $L = 80$  мм; загальна довжина:  $L_{sp} = 150$  мм. Товщина зразків мала 1% варіацію внаслідок виробничих допусків, що існують при виготовленні гумового листу. На рис. 1 наведено ескізне креслення геометрії зразків та фотографія натурального екземпляру.

Зразки жорстко фіксувались у механічних затискачах, як показано на рис. 2. Задавалось жорстке навантаження, тобто задавались фіксовані значення деформації зразку. Пневматичні затискачі дозволяють утримувати фіксоване значення зусилля, що утримує зразок навіть при зменшенні його товщини внаслідок прояву ефекту Пуассона. При випробуваннях на втому задавалось жорстке циклічне навантаження, тобто задавались фіксовані значення деформації зразку.

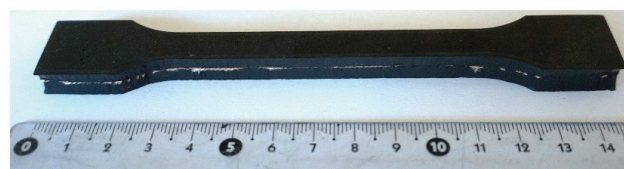
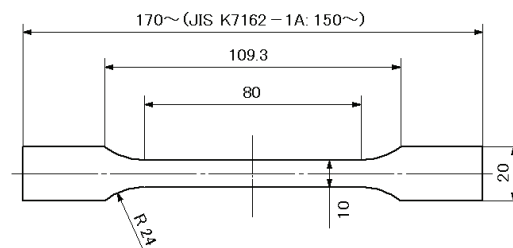


Рисунок 1 – Геометрія зразків для випробувань

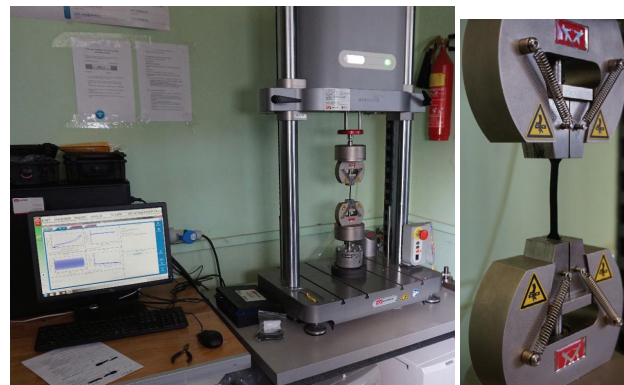


Рисунок 2 – Фіксація зразків у вимірювальному комплексі INSTRON E3000 для проведення циклічних тестів

В рамках даної роботи, дослідження обмежувались лише випробуванням зразків при навантаженні в напрямку перпендикулярному до армування.



З метою уникнення прояву ефекту втрати статичної стійкості деформування зразків було без стискання. Таким чином проводилось циклічне деформування при жорсткому навантаженні (задавались деформації) із фіксованими середнім рівнем деформації в циклі (133 %) та з різними амплітудами: 133 %, 100 %, 87% та 66 %. Відповідно розраховані за лінійною інженерною оцінкою (модуль 100 складає 3 МПа) рівні напружень Піала-Кірхгофа мали середнє значення у 4 МПа, а амплітудні значення були на рівні 4 МПа, 3 МПа, 2,6 МПа та 2 МПа відповідно. Частота циклів складала 5 Гц. Дане значення було знайдено з міркувань забезпечення відсутності динамічної складової у поведінці зразку (деформації проходила квазістатично), а також забезпечувало відсутність помітного нагріву зразків (при більших значеннях спостерігались вібрації випробувальної машини, а також істотне самонагрівання зразків).

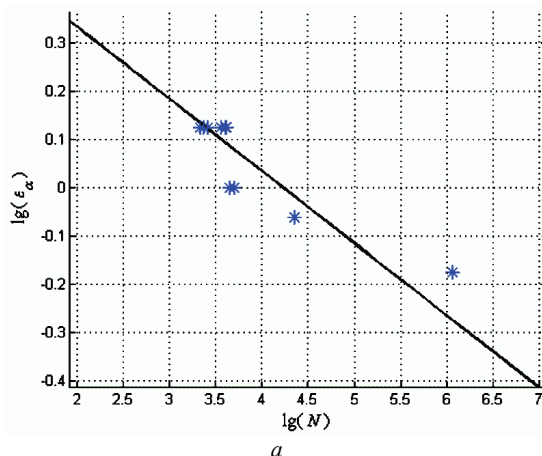
Крім того тести на втомну довговічність проводились для стабілізованого матеріалу, тобто спочатку виконувалось 10 циклів деформації зразка з якого після цього знімалось повністю навантаження. Така попередня процедура дозволяла позбавитись впливу ефекту Маліна на подальші результати.

В результаті тривалої дії циклічного навантаження в зразках формувались мікро-пошкодження в місцях природної концентрації НДС – навколо кордних волокон (рис. 3, а), які з часом розвивались та розповсюджувались на всю ширину зразку, що врешті рещт призвело до його повного руйнування (рис. 3, б).

Експериментальні точки були апроксимовані прямою лінією у подвійних логарифмічних координатах, тобто відповідно до рівняння Велера, окремо для деформацій (1) та істинних напружень Коші (2):

$$\varepsilon_a^{m_\varepsilon} N_\varepsilon = \varepsilon_0^{m_\varepsilon} N_{0\varepsilon}; \quad (1)$$

$$\sigma_a^{m_\sigma} N_\sigma = \sigma_0^{m_\sigma} N_{0\sigma}, \quad (2)$$



де  $N_\varepsilon$ ,  $N_\sigma$  – кількість циклів деформації (напружень Коші) до відмови по втомі при амплітуді деформацій  $\varepsilon_a$  (або відповідно: при амплітудах напружень Коші  $\sigma_a$ ;  $m$  – показник нахилу відповідної кривої Велера,  $N_0$  – базове число циклів до відмови,  $\varepsilon_0$  та  $\sigma_0$  – теоретичні (умовні) границі втоми (для кривих по деформаціям, або напруженням), тобто під  $\sigma_0$ , наприклад, розумітимуться амплітуди напружень Коші за яких відмова зразку буде спостерігатись через базове число циклів ( $N_{0\sigma}$ )).

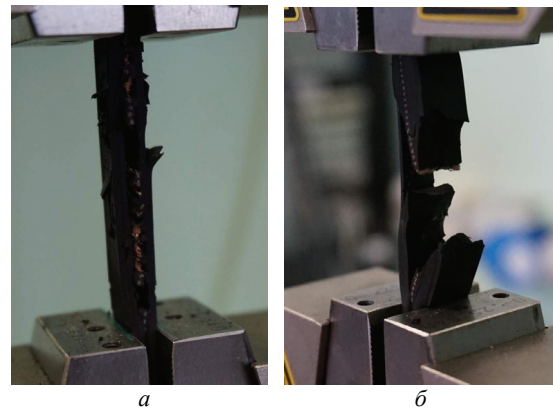


Рисунок 3 – Фотографії розвитку пошкоджень у зразків підчас випробувань на втому

В даній роботі було проведено апроксимації таким чином, що було зафіксовано базовий рівень амплітуд деформування на рівні 50% і при цьому параметрами кривої Велера, що підлягають визначенню вважались показник нахилу цієї кривої  $m$  та кількість циклів  $N_0$  до руйнування зразку.

На рис. 4 представлені криві втоми для зразків гумокордного композиту при його одновісному навантаженні в напрямі перпендикулярному армуванню текстильним кордом.

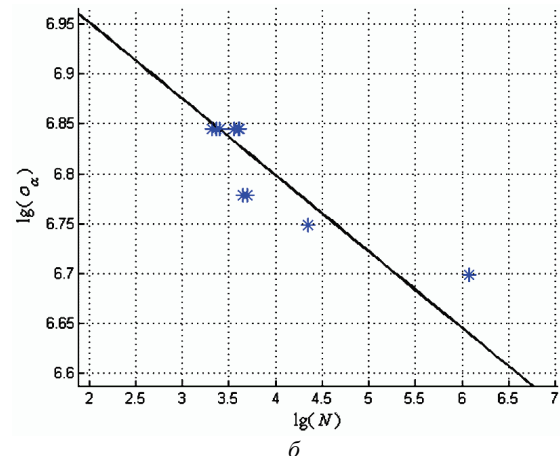


Рисунок 4 – Криві втоми зразків композиту представлені для амплітуд деформацій (а) та істинних напружень (б)

На рис. 3 зірочками помічено експериментальні точки, а прямі лінії – апроксимації, що побудовані методом найменших квадратів. Було отримано наступні параметри апроксимації:  $m_\varepsilon = 8$ ,  $N_{0\varepsilon} = 5,3 \cdot 10^6$  для залежності амплітуд деформацій (напружень Піала) від кількості циклів до руйнування, та:  $m_\sigma = 18$ ,

$N_{0\sigma} = 5 \cdot 10^6$  для залежності амплітуд істинних напружень від кількості циклів до руйнування. Значення параметру  $m$  округлено до цілого числа. Слід відмітити, що проведені тести засвідчують, що для кожного фіксованого рівня навантаження кількість циклів до відмови, що фіксувалась під час експериментів має

досить істотний розкид в межах 30 % від значення, що отримане апроксимацією.

Для подальшого практичного використання зручно привести отримані результати до умовно симетризованого циклу. З цією метою було використано рівняння Гербера (3), яке вказує на вплив середніх значень в циклах на характеристики втоми:

$$\sigma_{asym} = \sigma_a \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3)$$

Використання формули (3) для перерахунку кривих втоми не призводить до зміни параметру нахилу цієї кривої ( $m$ ), а лише змінює значення кількості циклів до руйнування, що витримає матеріал при симетричному циклі. Таким чином перераховані для симетричного циклу деформування значення кількості циклів до руйнування зразку матеріалу склали  $N_{0\sigma}^s = 3,1 \cdot 10^7$  для залежності амплітуд деформацій і напружень Піала та:  $N_{0\sigma}^s = 9 \cdot 10^9$  для істинних напружень Коші.

**Методика проведення процедури штучного старіння гумових матеріалів**

Наступним етапом досліджень було проведення аналогічних випробувань для даного композиту після його старіння.

Для штучного старіння зразки гуми витримувались тривалий час на фіксованій підвищеній температурі. Для цієї процедури використовувалась термокамера SNOL 44/200 LNP з примусовою конфекцією, яка оснащена мікропроцесорним контролером OMRON E5CK. Дана сушильна шафа надає можливість формувати та утримувати рівномірний по камері температурний стан.

Відомі в літературі дані, щодо штучного старіння пневматичних шин загалом та штучного старіння їх окремих елементів вказує на те що використання термокамери з фіксованим рівнем температури 70 °C пришвидшує процеси старіння по характеристикам міцності у (30-40) разів [6]. У зазначених довідкових джерелах та рекомендаціях по пришвидшеному штучному старінню гумових матеріалів зазначається, що

процедури штучного старіння слід проводити не перевищуючи температури 100 °C.

З метою пришвидшення штучного старіння при дослідженнях, що проводились в даній роботі використовувалось старіння на температурі 80 °C. Еквівалентні значення по часу зберігання (експлуатації) шин в звичайних умовах можна визначити з моделі Арреніуса для розрахунку коефіцієнту зміщення:

$$k = \exp \left[ \frac{E_0}{R} \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right], \quad (4)$$

де  $k$  – коефіцієнту зміщення, який показує у скільки разів менше часу необхідно витримати зразок в умовах з температурою  $T_1$  для того щоб його властивості міцності змінились так само як для зразку матеріалу який перебуває у температурі  $T_2$ ;  $E_0$  – енергія активації хімічних реакцій в матеріалі,  $R$  – універсальна газова стала ( $R = 8,31446$  Дж/(моль·K)).

Енергія активації  $E_0$  є емпіричним параметром, який необхідно визначити з порівняння певної характеристики визначеної після витримки заданий час на різних температурах. Так, наприклад, для характеристик міцності гумових сумішей пневматичних шин відомо, що найбільший коефіцієнт зміщення складає 40 для матеріалу, що знаходиться при температурі 70 °C у порівнянні до матеріалу, який є у звичайних умовах [10, 11]. Використання формули (5) для окреслених вище параметрів дозволяє визначити енергію активації для процесу деградації властивостей цих гумових зразків  $E_0 = 105$  кДж/моль.

Використовуючи отримане значення для енергії активації, можна розрахувати коефіцієнт зміщення для гумових зразків витриманих і за більшої температури. В даній роботі для прискореного старіння було використано витримку зразків 10 діб у термокамері на температурі 80 °C, що відповідає перебуванню цього матеріалу в нормальних умовах зберігання протягом 3 років.

На рис. 5 наведено криві втоми зразків гумового композиту, що посилені текстильним кордом із навантаженням в напрямку перпендикулярному армуванню після їх штучного старіння.

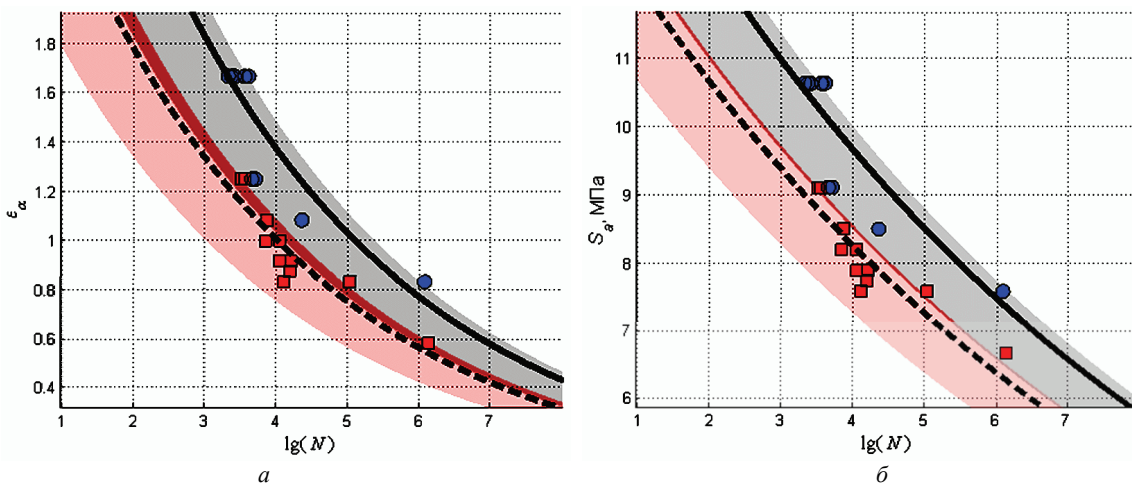


Рисунок 5 – Криві втоми зразків композиту після його штучного старіння (витримка 10 діб на температурі 80oC), які представлені для амплітуд деформацій (а) та істинних напружень Коші (б)

На рисунках суцільні криві та сині точки відповідають даним отриманим для зразків до старіння, а пунктирні криві та червоні точки відповідно – кривим утоми після штучного старіння зразків. Зафарбованими зонами показано розкид експериментальних значень з коефіцієнтом варіації 0.3.

Порівняння кривих утоми побудованих окремо для амплітуд деформацій та істинних напружень Коші для зразків композиту, що досліджується показує, що показник нахилу кривої втоми не зазнає вираженої зміни і може вважатись сталим. Також очевидним є якісний висновок, щодо того, що спостерігається суттєве зменшення кількості циклів до відмови, яке може витримати даний матеріал після старіння. Так, базове число циклів до відмови на фіксованому рівні амплітуд деформацій у 50 % зменшилось у 12 раз, а аналогічне зменшення по кривим, що побудовані для істинних напружень спостерігається у 16 раз. В таблиці 1 наведено дані по характеристикам кривих утоми до та після старіння.

Таблиця 1 – Параметри кривих утоми зразків гумо-кордного композиту до та після штучного старіння

Матеріал	Параметри кривої втоми			
	Для деформацій		Для істинних напружень	
	$m_\epsilon$	$N_{0\epsilon}^s$	$m_\sigma$	$N_{0\sigma}^s$
У первісному стані	8	$3.1 \cdot 10^7$	18	$9 \cdot 10^9$
Після штучного старіння	8	$2.5 \cdot 10^6$	18	$5.4 \cdot 10^8$

### Висновки

В роботі проведено комплекс експериментальних випробувань гумокордних зразків композиту на втомну міцність до та після їх штучного старіння. Процедура старіння проводилась шляхом витримки зразків у термокамері на фіксованій температурі 80 оС протягом 10 діб. Встановлено за моделлю Арреніуса, що така витримка для даного матеріалу відповідає його природному старінню протягом 3-х років.

В рамках дослідження побудовані криві втоми (криві Велера) по деформаціям та істинним напруженням Коші. Порівняльний аналіз отриманих результатів показує, що показник нахилу кривих утоми не змінюється через старіння в той час як базове число циклів до відмови суттєво зменшилось (більш ніж на порядок). Так, за 3 умовних роки базове число циклів до відмови гумових зразків зменшилось у 12 та 16 раз відповідно для кривих утоми побудованих відносно деформацій та істинних напружень Коші.

**Список літератури:** 1. Noda N.-A. Effect of dimensions of crimped portion upon sealing performance of hydraulic brake hose by applying three-dimensional fem analysis / N.-A. Noda, B. Kim, K. Ota [et al.] // Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering. – 2013. – Vol. 7, No. 2. – P. 281-292. 2. Luo Y. Numerical investigation of nonlinear properties of a rubber absorber in rail fastening systems / Y. Luo, Y. Liu, H. P. Yin // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol. 69. – P. 107-113. 3. Polukoshko S. Vibration damping using laminated elastomeric structures / S. Polukoshko, V. Gonca, J. Svabs // Solid State Phenomena. – 2015. – Vol. 220-221. – P. 81-90. 4. Seung-Bum Kwak Micro-damage formation of a rubber hose

assembly for automotive hydraulic brakes under a durability test / Seung-Bum Kwak, Nak-Sam Choi // Engineering Failure Analysis. 2009. – Vol. 16. – P. 1262-1269. 5. Cho J.R. Fatigue life assessment of fabric braided composite rubber hose in complicated large deformation cyclic motion / J.R. Cho, Y.H. Yoon, C.W. Seo, Y.G. Kim // Finite Elements in Analysis and Design, 2015. – Vol. 100. – P. 65-76. 6. Mars W. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber / W. Mars, A. Fatemi // International Journal of Fatigue. – 2002. – Vol. 24, No. 9. – P. 949-961. 7. Schubel P. M. Fatigue characterization of tire rubber / P. M. Schubel, E. E. Gdoutos, I. M. Daniel // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2004. – Vol. 42, No. 2. – P. 149-154. 8. Sun Q. A statistically consistent fatigue damage model based on miner's rule / Q. Sun, H.-N. Dui, X.-L. Fan // International Journal of Fatigue. – 2014. – Vol. 69. – P. 16-21. 9. Zhao Y. X. Weibull modeling of the probabilistic s-n curves for rolling contact fatigue / Y. X. Zhao, H. B. Liu // International Journal of Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 47-54. 10. Baldwin J. M. Rubber aging in tires. part 1: field results / J. M. Baldwin, D. R. Bauer, K. R. Ellwood // Polymer Degradation and Stability. – 2007. – Vol. 92, No. 1. – P. 103-109. 11. Bauer D. R. Rubber aging in tires. part 2: accelerated oven aging tests / D. R. Bauer, J. M. Baldwin, K. R. Ellwood // Polymer Degradation and Stability. – 2007. – Vol. 92, No. 1. – P. 110-117. 12. Choi J.-H. Heat aging effects on the material property and the fatigue life of vulcanized natural rubber, and fatigue life prediction equations / J.-H. Choi, H. Jin Kang, H.-Y. Jeong [et al.] // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2005. – Vol. 19, No. 6. – P. 1229-1242. 13. La Count B. J. Development of a service-simulating, accelerated aging test method for exterior tire rubber compounds ii. design and development of an accelerated outdoor aging simulator / B. J. La Count, J. M. Castro, F. Ignatz-Hoover // Polymer Degradation and Stability. – 2002. – Vol. 75, No. 2. – P. 213-227. 14. Woo C. S. Heat-aging effects on the material properties and fatigue life prediction of vulcanized natural rubber / C. S. Woo, W. D. Kim // e-Journal of Soft Materials. – 2006. – Vol. 2. – P. 7-12.

**Bibliography (transliterated):** 1. Noda N.-A. Kim B., Ota B. et al. Effect of dimensions of crimped portion upon sealing performance of hydraulic brake hose by applying three-dimensional fem analysis. Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering. 2013. vol. 7, no. 2, pp. 281-292. 2. Luo Y., Liu Y., Yin H. P. Numerical investigation of nonlinear properties of a rubber absorber in rail fastening systems. International Journal of Mechanical Sciences. 2013. vol. 69, pp. 107-113. 3. Polukoshko S., Gonca V., Svabs J. Vibration damping using laminated elastomeric structures. Solid State Phenomena. 2015. vol. 220-221. pp. 81-90. 4. Seung-Bum Kwak, Nak-Sam Choi Micro-damage formation of a rubber hose assembly for automotive hydraulic brakes under a durability test. Engineering Failure Analysis. 2009. vol. 16, pp. 1262-1269. 5. Cho J.R., Yoon Y.H., Seo C.W., Kim Y.G. Fatigue life assessment of fabric braided composite rubber hose in complicated large deformation cyclic motion. Finite Elements in Analysis and Design. 2015. vol. 100, pp. 65-76. 6. Mars W., Fatemi A. A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. International Journal of Fatigue. 2002. vol. 24, no. 9, pp. 949-961. 7. Schubel P. M., Gdoutos E. E., Daniel I. M. Fatigue characterization of tire rubber. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2004. vol. 42, no. 2, pp. 149-154. 8. Sun Q., Dui H.-N., Fan X.-L. A statistically consistent fatigue damage model based on miner's rule. International Journal of Fatigue. 2014. vol. 69, pp. 16-21. 9. Zhao Y. X., Liu H. B. Weibull modeling of the probabilistic s-n curves for rolling contact fatigue. International Journal of Fatigue. 2014. vol. 66, pp. 47-54. 10. Baldwin J. M., Bauer D. R., Ellwood K. R. Rubber aging in tires. part 1: field results. Polymer Degradation and Stability. 2007. vol. 92, no. 1, pp. 103-109. 11. Bauer D. R.,

Baldwin J. M., Ellwood K. R. Rubber aging in tires. part 2: accelerated oven aging tests. *Polymer Degradation and Stability*. 2007. vol. 92, no. 1, pp. 110-117. **12.** Choi J.-H., Jin Kang H., Jeong H.-Y. [et al.] Heat aging effects on the material property and the fatigue life of vulcanized natural rubber, and fatigue life prediction equations. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2005. vol. 19, no. 6, pp. 1229-1242. **13.** La Count B. J., Castro J. M., Ignatz-Hoover F. Development of a service-

simulating, accelerated aging test method for exterior tire rubber compounds ii. design and development of an accelerated outdoor aging simulator. *Polymer Degradation and Stability*. 2002. vol. 75, no. 2, pp. 213-227. **14.** Woo C. S., Kim W. D. Heat-aging effects on the material properties and fatigue life prediction of vulcanized natural rubber. *e-Journal of Soft Materials*. 2006. vol. 2, pp. 7-12.

Поступила (received) 26.07.2016

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ларін Олексій Олександрович** – кандидат технических наук, доцент, кафедра «Динамика и прочность машин», Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057) 707-68-79; e-mail: AlexeyA.Larin@gmail.com.

**Larin Oleksij Oleksandrovych** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University «KhPI», tel.: (057) 707-68-79; e-mail: AlexeyA.Larin@gmail.com.

УДК 539.3<sup>1</sup>

**Э.А. СИМСОН, Д.С. ЯГУДИН**

**ИССЛЕДОВАНИЕ НДС ДИСКА БОРОНЫ НА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ПРУЖИННОЙ СТОЙКЕ**

Проведено компьютерное моделирование процесса эксплуатации дисковой бороны на индивидуальной пружинной стойке. Сформулирована задача по исследованию поведения стойки при силовом и кинематическом нагружении стойки от действия эксплуатационных нагрузок, а также проведен частотный анализ конструкции. Анализ полей деформаций и напряжений показал, что статическое и кинематическое нагружение само по себе не приводит к разрушению стойки. По результатам исследования поверхности излома разрушение носит комплексный характер: накопление усталостных повреждений с последующим разрушением от статической кинематической нагрузки.

**Ключевые слова:** дисковая бороны, пружинная стойка, собственная частота, разрушение, метод конечных элементов.

**Введение.** Для проведения в полном объеме численных исследований напряженно-деформированного состояния дисковой бороны на пружинной стойке при всех заданных параметрах необходима научно обоснованная модель рабочей среды, то есть почвы, как сплошных сред, которая имела бы в качестве параметров твердость и влажность, заданные в расчетном задании. В данной работе определялись абсолютные значения сил в расчете на 1 м захвата, а также зависимости этих сил от угла атаки, глубины обработки и скорости поступательного движения. С целью усовершенствования конструкции пружинной стойки проведен статический анализ НДС при действии на нее силового и кинематического нагружения, а также определена собственная частота системы и частота вынуждающей нагрузки.

**Анализ последних исследований и литературы.** Современные технологии возделывания и уборки сельскохозяйственных культур выдвигают высокие требования к ресурсосбережению и энергоэффективности процесса [1,2]. На этом фоне дисковые орудия получили широкое распространение в сельскохозяйственном секторе.

На рынке сельскохозяйственной техники существует большое множество различных вариантов конструкции рабочих органов. В частности дискаторы, в основном своем большинстве, спроектированы либо с

единым валом, на который посажены дисковые рабочие органы, либо с набором пружинных стоек, на каждую из которых крепится один диск [3].

В литературе известны работы посвященные экспериментальному определению силы, действующей на диски во время работы. Например, в СКБ завода «Сибсельмаш» была разработана и изготовлена специальная динамометрическая тележка для пространственного динамометрирования дисковых батарей, с которой были проведены соответствующие эксперименты [4]. В данной работе приводятся данные полевых испытаний на динамометрической тележке, проведенные для трех различных видов обработки почвы – предпосевной обработки, обработки паров и лущения стерни. Во время опытов ежедневно по 3-4 раза определялась твердость и брались пробы влажности почвы. Затем на каждом участке подсчитывалось среднее значение твердости и влажности. Количество стеблей на 1 м<sup>2</sup> составляло 400-500 шт. высотой 150-200 мм, количество сорняков 9-15.

**Целью** данной статьи является численное моделирование деформирования пружинной стойки при штатных силовых нагрузках, кинематических нагрузках, а также исследования спектра собственных и вынужденных частот колебаний конструкции в процессе эксплуатации.

**Постановка задачи и численная реализация.**

Нагружение стойки бороны с рабочим органом в процессе работы моделировалось системой двух сил (рис. 1) в соответствии с [4, стр. 226-230].

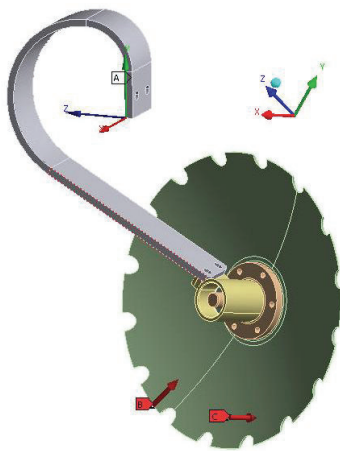


Рисунок 1 – Расчетная модель диска на пружинной стойке

Элементарные сопротивления почвы, возникающие на рабочей поверхности и лезвии вертикально установленного сферического диска, не имеют одной равнодействующей силы, они могут быть приведены к двум перекрещивающимся силам  $R'$  и  $R''$ . Сила  $R'$  лежит в плоскости диска и проходит на расстоянии  $r$  ниже оси диска. Сила  $R''$  параллельна оси вращения дисков, находится на глубине  $h$  от дна борозды, равно примерно половине глубины хода дисков, и на расстоянии  $l$  впереди вертикальной плоскости, проведенной через ось вращения дисков. Отрезок  $l$  мал и его можно приравнять нулю.

Анализ полученных в [4] материалов позволил считать, что среднее значение параметра  $r$  составило около 3 см. Осевая сила  $R''$  для малых углов атаки проходит несколько сзади вертикального диаметра диска. При углах атаки свыше  $35^\circ$ , сила  $R''$  проходит впереди вертикального диаметра (для угла  $45^\circ$   $l$  равно 7 см). Тем не менее, в практических расчетах для углов атаки  $15-35^\circ$  можно принимать, что расстояние  $l$  равно нулю.

Величина смещения диска назад, в сторону и вверх определялась как величина соответствующего перемещение точки на оси ступицы. Для определения фактических углов наклона бороны в процессе работы измерялось перемещение точек на окружности диска в верхней и нижней точках в направлении перпендикулярном плоскости диска. Решается задача определения НДС пружинной стойки при силовом и кинематическом нагружении, а также вычисляется спектр собственных и вынужденных частот колебаний.

Под силовым нагружением подразумевается реакция почвы при обработке, а кинематическое – наезд на жесткое тело в поле и последующий перекаат через него.

Для численного решения поставленных задач в трехмерной постановке используется метод конечных элементов.

При конечно-элементном моделировании в каче-

стве граничных условий принято защементировать вертикальные поверхности стойки в зоне фактического крепления к жесткой раме.

**Обсуждение результатов.** После проведения расчета при силовом и кинематическом нагружении получены распределения эквивалентных напряжений в конструкции (рис. 2, 3).

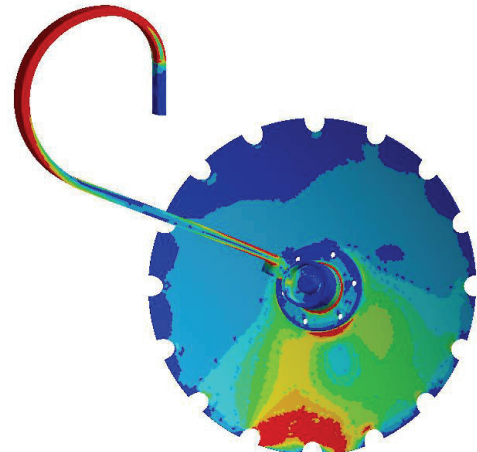


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений (силовое нагружение)

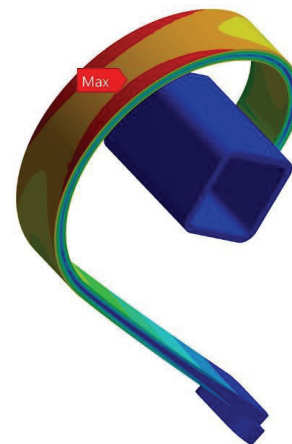


Рисунок 3 – Распределение эквивалентных напряжений (кинематическое нагружение)

Максимальные напряжения в таком случае возникают в зоне закрутки стойки и составляют 250 МПа.

При расчете модели с кинематическим напряжением имитировался наезд на препятствие высотой 75мм. Максимальные напряжения в таком случае также находятся в зоне закрутки и составляют 700МПа при пределе текучести равном 1100МПа. Очевидно, что такие напряжения не могут привести к разрушению пружинной стойки.

При движении диска в «тяжелом» грунте существует реальная опасность попадания конструкции в резонанс. Предполагается, что при обработке почвы каждая прорезь в диске приводит к микро-удару с частотой, зависящей от скорости обработки. Для провер-

ки был проведен расчет собственных частот колебаний, а также исходя из геометрических размеров диска рассчитана частота микро-ударов в зависимости от скорости движения трактора. Зависимость вынуждающей частоты от скорости движения, а также спектр собственных частот (разброс обусловлен не полной определенностью граничных условий в месте контакта диска с грунтом) изображены на рис. 4.

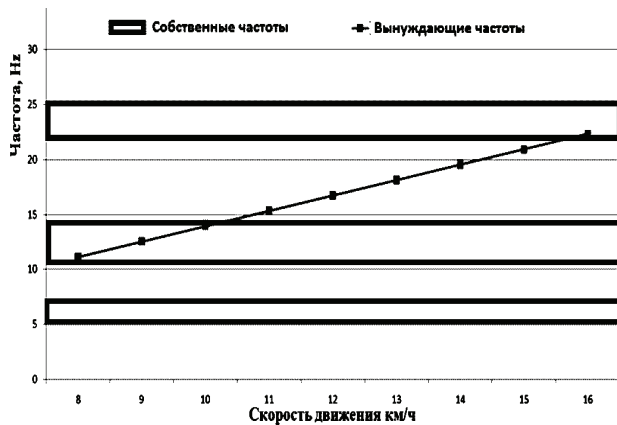


Рисунок 4 – График собственных и вынужденных частот колебаний конструкции

Из полученных данных видно, что вторая собственная частота попадает в резонанс при скоростях обработки от 8 до 10 км/ч. Форма колебаний на второй собственной частоте соответствует кручению в зоне изгиба стойки. При колебаниях конструкции на этой частоте зона максимальных напряжений также находится в месте закрутки.

#### Выводы

1. Зона максимальных напряжений соответствует зоне фактического эксплуатационного разрушения
2. В случае кинематического нагружения, когда

какой-то диск наезжает на препятствие (7-10 см.), максимальные напряжения существенно повышаются до 680 МПа (разрушение не происходит)

3. Регулярные циклические воздействия совершаются с частотой 11-24 Гц, а собственные частоты варьируются от 5 Гц – первая, 12 Гц – вторая и 22-24 Гц – третья

4. На резонирующей частоте в зоне разрушения происходят изгибно-крутильные колебания, соответствующие 2-й собственной частоте.

5. Рекомендовано вывести собственные частоты системы из спектра вынужденных частот воздействия.

**Список литературы:** 1. Современные энергосберегающие технологии обработки почвы [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://urozhayna-gryadka.narod.ru/energoser.technologii.htm> 2. Технология «нулевой» обработки почвы [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://opyt.t30p.ru/post/leopoliss-No-Till-eto-znachit-bez-vspashki-Tehnologiya-nulevoi-obrabotki-pochvi.aspx> 3. Бабицкий Л.Ф. Анализ конструкции дисковых почвообрабатывающих рабочих органов / Л.Ф. Бабицкий, А.С. Меренов // Современные проблемы науки и техники. – 2014. – № 6. 4. Стрельбицкий В.Ф. Силовые характеристики рабочих органов дисковых лушительщиков и борон / В.Ф. Стрельбицкий. – Тракторы и сельхозмашины. – 1968. – № 1. – С. 30-33.

**Bibliography (transliterated):** 1. Sovremennye energosberegayushchie tehnologii obrabotki pochvy. Available at: <http://urozhayna-gryadka.narod.ru/energoser.technologii.htm> 2. Tehnologiya "nulevoj" obrabotki pochvy. Available at: <http://opyt.t30p.ru/post/leopoliss-No-Till-eto-znachit-bez-vspashki-Tehnologiya-nulevoi-obrabotki-pochvi.aspx> 3. Babickij L.F., Merenov A.S. Analiz konstrukcii diskovyh pochvoobrabatyvayuschih rabochih organov. Sovremennye problemy nauki i tehniki. 2014, No 6. 4. Strel'bickij V.F. Silovye harakteristiki rabochih organov diskovyh lushtil'schikov i boron. Traktory i sel'hozmashiny. 1968, No 1, pp. 30-33.

Поступила (received) 03.06.2016.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Симсон Эдуард Альфредович** – д-р техн. наук, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: [simson@upec.ua](mailto:simson@upec.ua)

**Simson Eduard Al'fredovich** – Doctor of Technical Sciences, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: [simson@upec.ua](mailto:simson@upec.ua)

**Ягудин Дмитрий Сергеевич** – аспирант, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)-70-761-78, e-mail: [dmitriy.yagudin27@gmail.com](mailto:dmitriy.yagudin27@gmail.com)

**Yagudin Dmitrij Sergeevich** – Postgraduate Student, National Technical University "KhPI", tel.: (057)-70-761-78, e-mail: [dmitriy.yagudin27@gmail.com](mailto:dmitriy.yagudin27@gmail.com)

УДК 539.3

Э. А. СИМСОН, С. А. НАЗАРЕНКО

## АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ И ДИНАМИКИ ПОВОРОТНО-СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ (ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ КАЧЕНИЯ)

Особенности поворотной-симметричных конструкций позволяют путем создания специализированных теорий и численных технологий перейти от общих методов анализа к специальным, значительно меньшей размерности. Рассмотрены и проанализированы методы прочностного и динамического расчета на примере подшипников качения. Доработка метода решения спектральной проблемы ЦСК базируется на включении метода квазициклических разложений «внутри» алгоритма итерационного преобразования подпространства.

**Ключевые слова:** механика, поворотной-симметричные конструкции, подшипники качения, блочная итерация, конечные элементы.

**Введение.** В механике и машиностроении широко распространены многокомпонентные поворотной (циклически) симметричные конструкции (ЦСК) [1–4]. Особенности ЦСК позволяют путем создания специализированных теорий и численных технологий перейти от общих методов анализа систем к специальным, существенно меньшей размерности [1–5].

Многообразные подшипники качения являются как наиболее распространенным сборочным узлом в машиностроении, так и примером ЦСК многокомпонентной структуры [5–9]. Подшипниковые узлы качения (вал – внутреннее кольцо – ролики – сепаратор – внешнее кольцо – «адаптор») осуществляют пространственную фиксацию роторов и передают статические и динамические усилия от вращающихся деталей на неподвижные опоры. Появляющаяся при функционировании подшипниковых узлов качения вибрация обуславливается большим количеством факторов и достаточно сложно структурирована [6, 7].

При расчетных исследованиях ЦСК применяются континуальные и дискретные модели. Континуальные позволяют учесть конструктивные особенности отдельных элементов и определить характеристики подшипников качения, как связанной системы. Дискретные (с сосредоточенными параметрами) модели более просты и часто применяются для исследования эффектов отклонений от ЦСК, статистических параметров динамических и прочностных характеристик. Анализ научно-технической документации показал, что проблемы динамики подшипниковых узлов качения недостаточно исследованы [6, 7].

**Анализ ЦСК на примере подшипника качения.** Подшипники качения будем рассматривать как многокомпонентную связанную систему при нелинейной изменчивости характеристик материалов с учетом технологической наследственности, возникающей при их изготовлении [8, 9]. Наличие симметрии с позиции расчета дает существенные преимущества, позволяя свести задачу к анализу модели одного сектора с наложенными условиями цикличности.

ЦСК можно представить в виде  $N$  секторов, геометрические и физические параметры которых сохраняют инвариантность при повороте относительно оси вращения на любой угол, кратный  $\gamma = 2\pi/N$ . Порядок симметрии  $N$  – число роликов в случае подшипнико-

вых узлов качения (рис. 1).

Для анализа использовался метод конечных элементов (МКЭ), считающийся наиболее универсальной и мощной технологией моделирования сложных конструкций и адаптированный к поворотной симметрии [10, 11]. Для геометрического представления ЦСК достаточно построить аппроксимирующую геометрическую модель одной типовой подструктуры. Описания остальных получаются из нее преобразованием поворотной симметрии. В общем случае нагружения секторов требуют индивидуальной аппроксимации.

Анализ ЦСК начинается с построения модели сектора, на которую наносится конечноэлементная сетка (рис. 2.). Вводятся условия закрепления конструкции, а также поворотной симметрии на границах с сопредельными секторами.

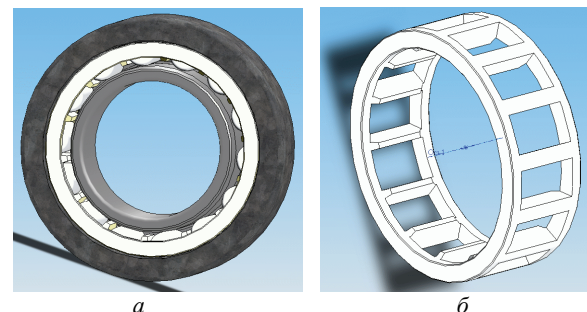


Рисунок 1 – Твердотельная модель:  
а – подшипника качения; б – сепаратора

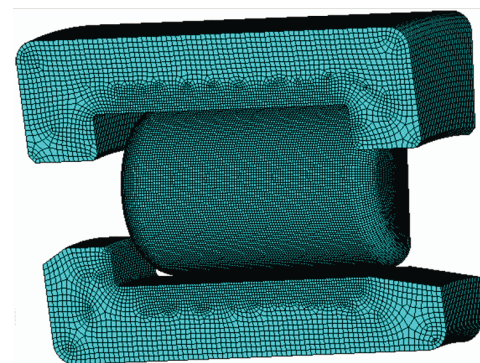


Рисунок 2 – КЭ модель контактирующих фрагментов ролика, внутреннего и внешнего колец с приставными бортиками

Блочное уравнение равновесия конечноэлемент-

ной модели  $j$  – той типовой подструктуры связывает обобщенные перемещения  $j$  – го граничного сечения  $\bar{y}_{1j}$ , внутренней области сектора  $\bar{y}_{Sj}$ ,  $(j + 1)$ -го граничного сечения  $\bar{y}_{2j}$  с внешними нагрузками  $\bar{F}_j$  и внутренними реакциями  $\bar{q}_{1j}$  и  $\bar{q}_{2j}$  ( $j = \overline{1, N}$ ), замещающими воздействие сопредельных подструктур

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1S} & K_{12} \\ K_{S1} & K_{SS} & K_{S2} \\ K_{21} & K_{2S} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{Sj} \\ \bar{y}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{1j} \\ \bar{F}_{Sj} \\ \bar{F}_{2j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{q}_{1j} \\ \mathbf{0} \\ \bar{q}_{2j} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Размерность блоков матрицы жесткости  $K$  зависит от числа степеней свободы внутренней и граничной областей сектора. Граничные зоны в зависимости от геометрической формы сектора могут состоять из нескольких несвязных областей. Для их описания вводится связанная система координат, одна из осей которой направлена вдоль оси циклической симметрии, две другие поворачиваются вокруг нее при переходе от одного сектора к другому на угол  $\gamma$ . При сборке модели  $j$  – тая граничная зона совмещает левое сечение  $j$  – го сектора и правое сечение  $(j - 1)$ -го сектора.

Связанная система координат позволяет представить глобальную матрицу жесткости ЦСК в квазициклической форме

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_3 \\ A_3 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_3 & A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_3 & A_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $A_1 = \begin{bmatrix} V_1 K_{11} V_1^T + V_2 K_{22} V_2^T & V_1 K_{1S} \\ K_{S1} V_1^T & K_{SS} \end{bmatrix}$ ,

$$A_2 = \begin{bmatrix} V_1 K_{12} V_2 & 0 \\ K_{S2} V_2^T & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_2^T, \quad (3)$$

$V_1$  и  $V_2$  – матрицы перехода от систем координат  $(j - 1)$ -го и  $j$ -го сектора к связанным координатам  $j$ -го сечения. Вектор нагрузок имеет вид

$$\bar{F} = \{\bar{F}_j\}_{j=1}^N; \quad \bar{F}_j = \begin{bmatrix} V_1 \bar{F}_{1j} + V_2 \bar{F}_{2j} \\ \bar{F}_{Sj} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Квазициклическая структура позволяет от анализа глобальной системы уравнений ЦСК перейти к решению систем уравнений, размерность которых обусловливается числом обобщенных перемещений внутренней области и граничного сечения сектора:

$$\Lambda_j \bar{\xi}_j = \bar{G}_j, \quad j = \overline{1, t, N}, \quad (5)$$

где  $\Lambda_j = A_1 + (A_2 + A_3) \cos \gamma j + i(A_2 - A_3) \sin \gamma j$ ,

$$\bar{G}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (\cos k\gamma j \cdot \bar{F}_k - i \sin k\gamma j \cdot \bar{F}_k).$$

Перемещения  $\bar{y}_j$ , соответствующие квазистроке, формируются суперпозицией решений (5) с соответствующими весовыми коэффициентами.

Комплексные системы уравнений (5) в вещественной форме представляют системы уравнений с

симметричной матрицей коэффициентов, что позволяет использовать для их реализации стандартное программное обеспечение

$$\begin{bmatrix} \Lambda_j^{\text{Re}} & -\Lambda_j^{\text{Im}} \\ \Lambda_j^{\text{Im}} & \Lambda_j^{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_j^{\text{Re}} \\ \bar{\xi}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{G}_j^{\text{Re}} \\ \bar{G}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix}, \quad j = \overline{1, t, N}. \quad (6)$$

Метод квазициклических разложений (МКЦР) позволяет перейти от решения задачи большой размерности к нескольким существенно меньшей. Эффективность метода можно значительно приумножить суперэлементной сверткой (полной или частичной конденсацией) внутренней области.

Для нерезонансных задач динамики ЦСК применение МКЦР отличается только физическим значением матрицы коэффициентов, которая в этом случае является матрицей динамической жесткости

$$K_d = K - \omega^2 M,$$

где  $M$  – матрица масс,  $\omega$  – частота вынуждающей силы.

Из решения обобщенного уравнения колебаний многокомпонентных структур с учетом нелинейных диссипативных эффектов видно, что выражения, входящие в уравнение резонансной кривой, представляют функционалы, зависящие от резонирующей собственной частоты и формы колебаний [12]. При решении спектральной проблемы ЦСК на основе сектора возможны разнообразные комбинации МКЦР и блочной (или обратной) итерации, обуславливающие различно сформированные группы частот и форм.

Решение задачи в первом варианте повторяет схему (1) – (6), где матрица коэффициентов в уравнениях (1) представляет матрицу динамической жесткости  $K_d$  сектора, нагружение сектора  $\bar{F}_j \equiv 0$ ,  $\omega$  – искомые собственные частоты. Тогда (5) преобразуются в систему однородных уравнений.

Итерационный метод решения проблемы собственных значений позволяет найти относящиеся к каждому  $j$ -му параметру цикличности спектры частот  $\omega_{jk}$ ,  $j = \overline{1, t, N}$ . При подобном подходе неосуществим упорядоченный поиск заданной частоты.

Собственные формы ЦСК для  $\omega_{jk}$  имеют вид

$$\bar{y}^{(jk)} = \{\bar{y}_n^{(jk)}\}_{n=1}^N = \left\{ \cos j \cdot n\gamma \cdot \bar{\xi}_{kj}^{\text{Re}} - \sin j \cdot n\gamma \cdot \bar{\xi}_{kj}^{\text{Im}} \right\}_{n=1}^N.$$

Вторая схема предполагает включение МКЦР «внутри» алгоритма блочной итерации решения спектральной проблемы ЦСК (на этапе итерационного преобразования подпространства). Подход позволяет отыскивать нижнюю часть спектра (либо пакет частот, ближайших к заданному значению, при использовании «сдвигки») вне зависимости от принадлежности соответствующих собственных форм тому или иному параметру цикличности.

В этом варианте метод итерации подпространства применяется к глобальной модели конструкции в связанной системе координат  $KY = MX$ .

Для матрицы начальных приближений  $X^0 = \{X_j^0\}_{j=1}^N$  формирование правой части  $F = MX^0$  складывается посекторно

$$F = \{F_j\}_{j=1}^N = \{M_1 X_{j-1} + M_2 X_j + M_3 X_{j+1}\}_{j=1}^N;$$



$$(X_0 = X_N); (Y_{N+1} = Y_1),$$

где структура  $M_1, M_2, M_3$  аналогічна  $A_1, A_2, A_3$  (3).

После того как матрица правых частей сформирована, вычисления проводятся по схеме МКЦР (2) – (5). Операции метода итерирования подпространства  $Y^T K Y$  и  $Y^T M Y$  фактически сводятся к процедуре определения правых частей следующего приближения  $F$ , то есть  $KY^{(2)} = F^{(1)} = MY^{(1)}$ . При таком подходе осуществляется направленный поиск спектра нижних частот всей ЦСК, при этом число отыскиваемых частот зависит лишь от размерности итерированного подпространства. Процедура получения решения статической задачи ЦСК с различным нагружением секторов становится базовым модулем для динамических задач, а размерность системы разрешающих уравнений определяется дискретной моделью одного сектора.

Колебания подшипников качения обуславливаются в основном деформациями его колец – с «узловыми диаметрами». Главные специфические особенности колебаний подшипников качения как ЦСК связаны с наличием в спектрах двукратных собственных частот. Параметр цикличности  $j$  характеризует целое число волн перемещений на окружности колец («узловые диаметры»). Отметим, что собственные формы, соответствующие  $j = 0$  и  $j = N/2$  – одинарные, а соответствующие прочим  $j$  – кратные.

Отличительная черта группы собственных форм, соответствующих  $j = 0$  – синфазные колебания секторов с одинаковыми амплитудами. В группе форм колебаний с параметром цикличности  $j = N/2$  также сектора совершают колебания с одинаковыми амплитудами, но соседние сектора колеблются в противофазе. В остальных группах  $j$  собственные формы колебаний имеют более сложный вид. В зависимости от номера группы форма колебаний имеет несколько целых волн перемещений в окружном направлении, поэтому соседние пролеты между роликами имеют всегда разные амплитуды колебаний. С увеличением  $j$  искаженные «узловые диаметры» все больше искривляются и располагаются на кольцах вдоль роликов.

В силу сложности и связанности конструкции узловые линии сильно искривлены, что затрудняет экспериментальную идентификацию параметра  $j$  для соответствующей формы, особенно при их большом числе [6, 7]. Идентификация собственных форм затруднена потому, что по числу всплесков на периферии не всегда можно определить параметр  $j$ . Собственные частоты обычно возрастают с ростом числа  $j$ .

**Выводы.** Рассмотрены и проанализированы методы прочностного и динамического расчета ЦСК (на примере подшипников качения). Доработка метода решения спектральной проблемы ЦСК базируется на включении МКЦР «внутрь» алгоритма итерационного преобразования подпространства. На следующем этапе работ будет проведен анализ чувствительности прочностных и динамических характеристик ЦСК.

**Список литературы:** 1. Shi C. Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems / C. Shi, R. G. Parker // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engi-

neering Sciences. – 2015. – Vol. 471, № 2173. – P. 20140672. 2. Андреев А. Г. Основные направления исследований ученых НТУ «ХПИ» в области механики / А. Г. Андреев, С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХП». – 2015. – № 57 (1166). – С. 3–7. 3. Шушиков А. Н. Расчет напряжений циклически-симметричных пространственных конструкций / А. Н. Шушиков, С. Ю. Мисюра // Вісник НТУ «ХП». – 2013. – № 63 (1036). – С. 139–147. 4. He Y. A scaled boundary finite element method for cyclically symmetric two-dimensional elastic analysis / Y. He // Computers and Structures. – 2013. – № 120. – P. 1–8. 5. Назаренко С. А. Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы / С. А. Назаренко // Вестник НТУ «ХП». – 2006. – № 32. – С. 119–122. 6. Shah D. S. A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing / Shah D. S., Patel V. N. // Procedia Technology. – 2014. – № 14. – P. 447–456. 7. Симсон Э. А. Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / Э. А. Симсон, С. А. Назаренко, М. В. Трохман // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – № 2/4. – С. 44–47. 8. Симсон Э. А. Холодная раскатка заготовок подшипниковых колец / Э. А. Симсон, В. В. Овчаренко, В. И. Демидов и др. // Вісник НТУ «ХП». – 2011. – № 52. – С. 156–160. 9. Автономова Л. В. Моделирование процесса горячей раскатки колец подшипника / Л. В. Автономова, Е. Д. Грозенко, Э. А. Симсон // Вісник НТУ «ХП». – 2015. – № 4 (1113). – С. 158–162. 10. Bogomolov S. I. Application of a superparametric finite shell element to the calculation of turbine blade vibrations // S. I. Bogomolov, S. S. Lutsenko, S. A. Nazarenko // Strength of Materials. – 1982. – Vol. 14, № 6. – P. 796–799. 11. Guo Y. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model / Y. Guo, R. G. Parker // Mechanism and Machine Theory. – 2012. – № 51. – P. 32–45. 12. Марусенко С. І. Аналіз статико-динамічних нелінійних процесів у елементах структурно зв'язаних систем / С. І. Марусенко, С. О. Назаренко, Е. А. Симсон // 36. наук. пр. Академії внутрішніх військ МВС України. – 2010. – № 1 (15). – С. 65–75.

**Bibliography (transliterated):** 1. Shi C., Parker R.G. Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2015, vol. 471, No 2173, pp. 20140672. 2. Andreev A. G., Nazarenko S.A. Osnovnye napravleniya issledovaniy uchenykh NTU "KhPI" v oblasti mehaniki. Visnyk NTU "KhPI", 2015, No 57 (1166), pp. 3–7. 3. Shupikov A. N., Misyura C.Yu. Raschet napryazhenij ciklicheski-simmetrichnyh prostranstvennyh konstrukcij. Visnyk NTU "KhPI", 2013, No 63 (1036), pp. 139–147. 4. He Y. A scaled boundary finite element method for cyclically symmetric two-dimensional elastic analysis. Computers and Structures, 2013, No 120, pp. 1–8. 5. Nazarenko S. A. Analiz chuvstvitel'nosti konstrukcij pri vozdejstvii fizicheskikh polej razlichnoj prirrody. Visnyk NTU "KhPI", 2006, No 32, pp. 119–122. 6. Shah D. S., Patel V. N. A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing. Procedia Technology, 2014, No 14, pp. 447–456. 7. Simson E. A., Nazarenko S.A., Trohman M.V. Metodika analiza chuvstvitel'nosti vibracionnyh parametrov mehanicheskikh sistem. Vostochno-evropejskij zhurnal передовых технологий, 2008, No 2/4, pp. 44–47. 8. Simson E. A., Ovcharenko V.V., Demidov V.I. i dr. Holodnaya raskatka zagotovok podshypnikovovyh kolec. Visnyk NTU "KhPI", 2011, No 52, pp. 156–160. 9. Avtonomova L. V., Grozenok E.D., Simson E.A. Modelirovanie processa goryachej raskatki kolec podshypnika. Visnyk NTU "KhPI", 2015, No 4 (1113), pp. 158–162. 10. Bogomolov S. I., Lutsenko S.S., Nazarenko S.A. Application of a superparametric finite shell element to the calculation of turbine blade vibrations.

Strength of Materials, 1982, vol. 14, No 6, pp. 796-799. **11.** Guo Y., Parker R.G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. Mechanism and Machine Theory, 2012, No 51, pp. 32-45. **12.** Marusenko S. I., Nazarenko S.O., Simson E.A. Analiz statyko-

dynamichnykh nelinejnykh procesiv u elementakh strukturno zv'yazanykh system. Zb. nauk. pr. Akademiї vnutrishnikh vijs'k MVS Ukrainy, 2010, No 1 (15), pp. 65-75.

Поступила (received) 05.02.2016

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Назаренко Сергій Александрович** – кандидат технічних наук, старший научний співробітник, кафедра «Сопротивлення матеріалів», Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko\_serzh@mail.ua

**Nazarenko Sergej Aleksandrovich** – Candidate of Technical Sciences, Senior Staff Scientist, Department of Strength of Materials, National Technical University «KhPI», tel.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko\_serzh@mail.ua.

**Симсон Едуард Альфредович** – доктор технічних наук, професор, кафедра «Сопротивлення матеріалів», Національний технічний університет «ХПІ», тел.: (057)- 700-29-72, e-mail: nazarenko\_serzh@mail.ua.

**Simson Eduard Alfredovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Strength of Materials, National Technical University «KhPI», tel.: (057)- 700-29-72, e-mail: nazarenko\_serzh@mail.ua.

УДК 539.3

**В. Г. СУКИАСОВ**

**АНАЛИЗ РЕЛАКСАЦИИ КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ МЕЖДУ ВЯЗКОУПРУГИМ КОМПОЗИТНЫМ БАНДАЖОМ И ТРУБОПРОВОДОМ**

Изложены постановка и методика приближенного аналитического решения задачи о взаимодействии композитного ремонтного бандажа со стальным трубопроводом. Вязкоупругие свойства ортотропного композита моделируются на основе принципа соответствия Вольтерра, в сочетании с правилом смесей. Зависимость контактного давления от времени получена с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа для различных значений объемного содержания армирующих волокон.

**Ключевые слова:** бандаж, трубопровод, вязкоупругие свойства, композит, контактное давление, преобразование Лапласа.

**Введение.** Местные коррозионные повреждения магистральных трубопроводов в условиях высоких эксплуатационных нагрузок могут представлять угрозу для безопасности транспортировки. Эффективным способом ремонта трубопровода является установка композитного бандажа [1–3] путем намотки полуфабриката на поврежденный участок с последующим отверждением, в ходе которого формируется напряженное состояние из-за усадки полимерного связующего [4]. Это оказывает на трубу благоприятное сжимающее воздействие, в дальнейшем ослабевающее за счет релаксации напряжений вследствие вязкоупругого деформирования бандажа. Описание на макроуровне волокнистого композита регулярной структуры обычно исходит из рассмотрения его как однородной ортотропной среды, свойства которой определяются либо экспериментально путем испытания образцов, либо теоретически по известным характеристикам матрицы и армирующих волокон, с применением тех или иных схем гомогенизации [5,6]. Анализ прочности и жесткости отремонтированной трубы, как правило, основывается на линейно упругой модели композита, при этом используются данные о свойствах готового материала [1–3, 7]. Необходимость обеспечения прочности контакта бандажа и трубы на протяжении всего срока эксплуатации требует учета релаксации, при этом линейный характер вязкоупругого поведения композита

позволяет рассматривать независимо эффекты от усложненных напряжений и действия внутреннего давления.

**Постановка задачи.** Объектом изучения является взаимодействие без натяга между фрагментом металлического трубопровода и ремонтным бандажом из композита на полимерной основе. Расчетная модель представляет собой показанный на рис. 1 двухслойный цилиндр под действием внутреннего давления, в условиях плоской деформации. Материал внутреннего цилиндра I упругий изотропный; наружный цилиндр II считается ортотропным вязкоупругим. Особенностью вязкоупругого деформирования является зависимость от времени компонент НДС. Для анизотропной линейно-вязкоупругой среды наследственного типа определяющие соотношения в прямой форме имеют вид [5]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t A_{ijkl}(t-\zeta) d\sigma_{kl}(\zeta), \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где  $A_{ijkl}(t) = A_{jikl}(t) = A_{ijlk}(t) = A_{klij}(t)$  – модули ползучести, представляющие собой компоненты тензора 4-го ранга. Обратная форма упомянутых соотношений:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t-\zeta) d\varepsilon_{kl}(\zeta), \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}), \quad (2)$$

где  $C_{ijkl}(t) = C_{jikl}(t) = C_{ijlk}(t) = C_{klij}(t)$  – модули релаксации, компоненты тензора 4-го ранга.

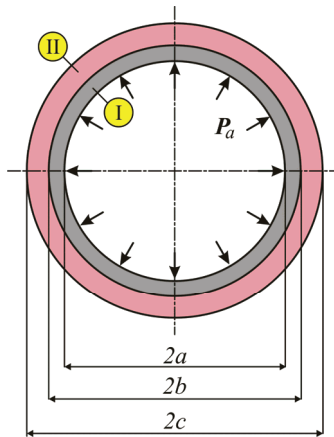


Рисунок 1 – Модель трубопровода с бандажом

Применение к выражениям (1), (2) одностороннего интегрального преобразования Лапласа

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt, \quad (3)$$

где  $s$  – параметр преобразования,  $f(t)$  – оригинал,  $\tilde{f}(s)$  – изображение, приводит за счет теоремы о свертке [8], при условии стабильности механических свойств, к соотношениям относительно изображений

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = s \tilde{A}_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = s \tilde{C}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad (4)$$

которые внешне, с точностью до обозначений, повторяют закон Гука для упругой анизотропной среды. Это внешнее сходство, имеющее место также и для преобразованных по Лапласу статических и кинематических соотношений, лежит в основе принципа соответствия Вольтерра [9]. Данный принцип позволяет исследовать вязкоупругое деформирование с позиций решения упругой задачи относительно изображений соответствующих величин. Он же дает возможность для применения правила смесей [6] при определении эффективных характеристик композитного материала.

**Свойства полимерной матрицы.** Матрица представляет собой изотропный вязкоупругий материал, для которого входящие в (1), (2) модули принимают вид

$$A_{ijkl}(t) = [\frac{1}{9}U(t) - \frac{1}{6}J(t)]\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4}J(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk});$$

$$C_{ijkl}(t) = [K(t) - \frac{2}{3}G(t)]\delta_{ij}\delta_{kl} + G(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (5)$$

где  $J(t) = 2\varepsilon_{12}(t)/\sigma_{12}(0)$  и  $U(t) = \theta(t)/\sigma_0(0)$  – функции сдвиговой и объемной ползучести;  $G(t) = \frac{1}{2}\sigma_{12}(t)/\varepsilon_{12}(0)$  и  $K(t) = \sigma_0(t)/\theta(0)$  – функции сдвиговой и объемной релаксации;  $\theta$  – относительное изменение объема;  $\sigma_0$  – среднее нормальное напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Поэтому соотношения (1), (2) приобретают форму [10]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \frac{1}{2}J(t-\zeta)ds_{ij}(\zeta) + \delta_{ij} \int_0^t \frac{1}{3}U(t-\zeta)d\sigma_0(\zeta); \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\zeta)de_{ij}(\zeta) + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\zeta)d\theta(\zeta), \quad (7)$$

где  $s_{ij}$  и  $e_{ij}$  – компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно. Изображения по Лапласу упомянутых выше функций связаны соотношениями

$$s^2 \tilde{G}(s) \tilde{J}(s) = 1; \quad s^2 \tilde{K}(s) \tilde{U}(s) = 1. \quad (8)$$

**Решение для составного цилиндра.** Радиальное и окружное напряжения, а также радиальное перемещение во внутреннем изотропном цилиндре с упругими характеристиками  $E^I$  и  $\nu^I$  определяются известным решением Ляме

$$\sigma_{rr}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[ P_a a^2 - P_k b^2 - (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[ P_a a^2 - P_k b^2 + (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right]; \quad (9)$$

$$u^I = \frac{1 + \nu^I}{E^I (b^2 - a^2)} \left[ (1 - 2\nu^I)(P_a a^2 - P_k b^2)r + (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r} \right],$$

где  $P_k$  – контактное давление на поверхности соприкосновения с бандажом.

Для ортотропного вязкоупругого наружного цилиндра с главными осями вдоль радиального  $r$ , окружного  $\theta$  и осевого  $z$  направлений определяющие соотношения в изображениях (4) принимают вид

$$\tilde{\varepsilon}_{rr}^{II} = s \tilde{A}_{rr} \tilde{\sigma}_{rr}^{II} - s \tilde{A}_{r\theta} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II}; \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{II} = s \tilde{A}_{\theta\theta} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II} - s \tilde{A}_{r\theta} \tilde{\sigma}_{rr}^{II}. \quad (10)$$

Изображения радиального и окружного напряжений, а также радиального перемещения в наружном цилиндре определяются как

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{II} = \frac{b^{\mu+1} \tilde{P}_k}{c^{2\mu} - b^{2\mu}} \left[ r^{\mu-1} - \frac{c^{2\mu}}{r^{\mu+1}} \right];$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II} = \frac{\mu b^{\mu+1} \tilde{P}_k}{c^{2\mu} - b^{2\mu}} \left[ r^{\mu-1} + \frac{c^{2\mu}}{r^{\mu+1}} \right]; \quad (11)$$

$$\tilde{u}^{II} = \frac{b^{\mu+1} \tilde{P}_k}{c^{2\mu} - b^{2\mu}} \left[ (\mu s \tilde{A}_{\theta\theta} - s \tilde{A}_{r\theta}) r^\mu + (\mu s \tilde{A}_{\theta\theta} + s \tilde{A}_{r\theta}) \frac{c^{2\mu}}{r^\mu} \right],$$

где  $\mu = \sqrt{\tilde{A}_{rr}/\tilde{A}_{\theta\theta}}$ .

**Применение правила смесей.** Входящие в (10), (11) коэффициенты определяются согласно формулам

$$s \tilde{A}_{rr} = \frac{1 - \nu_{rz}^* \nu_{zr}^*}{E_r^*}; \quad s \tilde{A}_{\theta\theta} = \frac{1 - \nu_{\theta z}^* \nu_{z\theta}^*}{E_\theta^*}; \quad (12)$$

$$s \tilde{A}_{r\theta} = \frac{\nu_{r\theta}^* + \nu_{rz}^* \nu_{z\theta}^*}{E_r^*} = \frac{\nu_{\theta r}^* + \nu_{\theta z}^* \nu_{zr}^*}{E_\theta^*}$$

через эффективные «упругие» характеристики композита (отмечены звездочкой), которые, в свою очередь, зависят от свойств волокон и матрицы (далее снабжены индексами «f» и «m» соответственно).

Для линейно упругих армирующих волокон справедлив закон Гука

$$\varepsilon_{ij}^f = [(1 + \nu^f) \sigma_{ij}^f - \nu^f \sigma_{kk}^f \delta_{ij}] / E^f, \quad (i, j, k = \overline{1,3}). \quad (13)$$

Соотношения (6) для вязкоупругой матрицы в изображениях принимают вид

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^m = \frac{1}{2} s \tilde{J} \tilde{\sigma}_{ij}^m + \frac{1}{3} s \delta_{ij} [\frac{1}{3} \tilde{U} - \frac{1}{2} \tilde{J}] \tilde{\sigma}_{kk}^m, \quad (i, j, k = \overline{1,3}) \quad (14)$$

или в форме закона Гука

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^m = [(1 + \nu^m) \tilde{\sigma}_{ij}^m - \nu^m \tilde{\sigma}_{kk}^m \delta_{ij}] / E^m, \quad (i, j, k = \overline{1,3}), \quad (15)$$

где, согласно (8),  $E^m = \frac{9s\tilde{K}\tilde{G}}{3\tilde{K} + \tilde{G}}$ ;  $\nu^m = \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{2(3\tilde{K} + \tilde{G})}$ .

Реальные полимерные материалы практически не обнаруживают объемной вязкости [10], что позволяет при описании матрицы моделью стандартной вязкоупругой среды [9] считать

$$G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)e^{-t/\tau}; \quad K(t) = K_0 = \text{const.}, \quad (16)$$

где  $G_0$  и  $G_\infty$  – мгновенный и длительный модули сдвига;  $\tau$  – время релаксации;  $G_0 = \frac{1}{2}E_0/(1 + \nu_0)$ ;  $K_0 = \frac{1}{3}E_0/(1 - 2\nu_0)$ . Тогда характеристики матрицы в (15) приобретают вид

$$E^m = E_0 \frac{s + \beta/\tau}{s + \kappa/\tau}; \quad \nu^m = \nu_0 \frac{s + \gamma/\tau}{s + \kappa/\tau}, \quad (17)$$

где

$$\beta = \frac{G_\infty}{G_0}; \quad \gamma = \frac{1 + \nu_0 - \beta(1 - 2\nu_0)}{3\nu_0}; \quad \kappa = \frac{2(1 + \nu_0) + \beta(1 - 2\nu_0)}{3}.$$

Эффективные свойства композита с армированием в окружном направлении определяются согласно правилу смесей [6]:

$$E_\theta^* = \omega E^f + (1 - \omega)E^m; \\ \nu_{\theta r}^* = \nu_{\theta z}^* = \omega \nu^f + (1 - \omega)\nu^m; \quad (18)$$

$$E_r^* = E_z^* = \frac{E^f E^m}{\omega E^m + (1 - \omega)E^f};$$

$$\nu_{rz}^* = \nu_{zr}^* = \frac{\omega E^m \nu^f + (1 - \omega)E^f \nu^m}{\omega E^m + (1 - \omega)E^f},$$

где  $\omega$  – объемное содержание волокон.

**Определение контактного давления.** Изображение по Лапласу контактного давления следует из (9), (11) в виде

$$\tilde{P}_k = \frac{B}{s \left\{ \mu s \tilde{A}_{\theta\theta} \left[ 1 + \frac{2}{(c/b)^{2\mu} - 1} \right] + s \tilde{A}_{r\theta} + D \right\}}, \quad (19)$$

где для краткости введены обозначения двух констант

$$B = 2 \frac{(1 - \nu^l)^2 P_a a^2}{E^l (b^2 - a^2)}; \quad D = \frac{(1 + \nu^l)[(1 - 2\nu^l)b^2 + a^2]}{E^l (b^2 - a^2)}.$$

Непосредственное обращение (19) не представляется возможным в виду чрезвычайно громоздкой зависимости от параметра  $s$  в результате последовательной подстановки формул (12), (18), (17). Поэтому используется приближенный подход, суть которого состоит в разложении трансцендентной части знаменателя в усеченный степенной ряд по параметру  $s$ , с последующим отысканием оригинала средствами встроенной библиотеки пакета Maple.

Вычисления выполнены при следующих исходных данных:  $a = 0,485$  м;  $b = 0,510$  м;  $c = 0,560$  м;  $P_a = 7$  МПа;  $E^l = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu^l = 0,3$ ;  $E^f = 7,35 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu^f = 0,2$ ;  $E_0 = 3,4 \cdot 10^3$  МПа;  $\nu_0 = 0,35$ ;  $\beta = 0,65$ ;  $\tau = 2400$  с.

В результате получены приближенные зависимости контактного давления от времени, показанные на

рис. 2-4 для различных значений  $\omega$ .

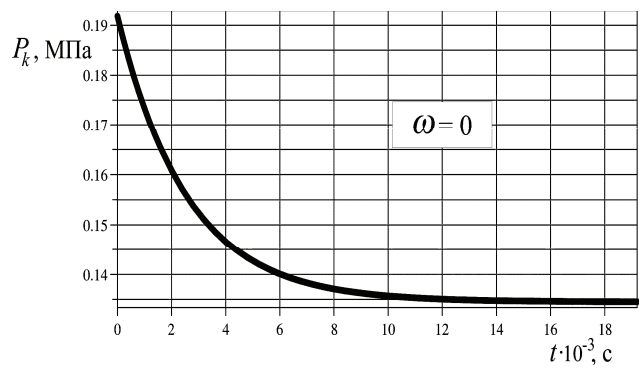


Рисунок 2 – Зависимость контактного давления от времени

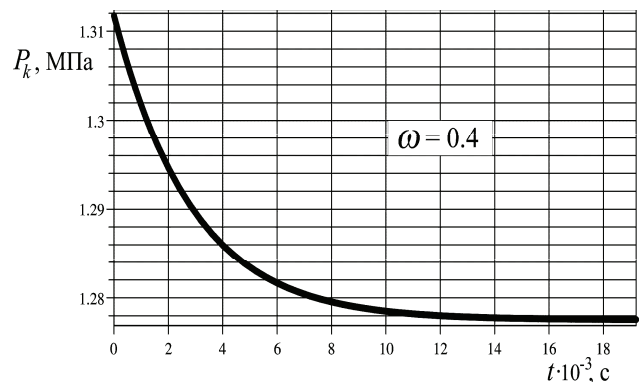


Рисунок 3 – Зависимость контактного давления от времени

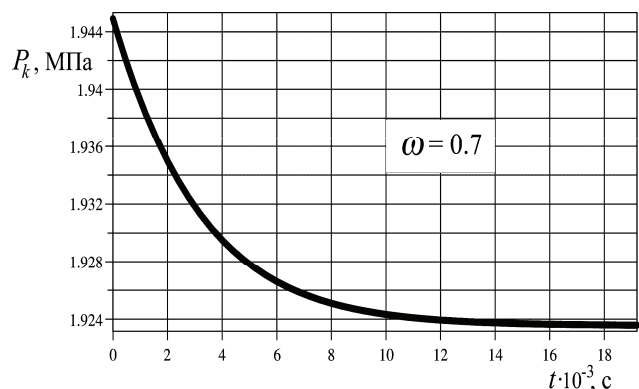


Рисунок 4 – Зависимость контактного давления от времени

**Выводы.** Полученные результаты иллюстрируют эффект повышения жесткости бандажа при увеличении доли армирующих волокон, что, однако, практически не влияет на время релаксации вязкоупругого композита. Зависимость на рис. 2 для случая отсутствия волокон полностью повторяет решение, полученное в замкнутом виде [11] для задачи о взаимодействии трубы с вязкоупругой изотропной накладкой.

**Список литературы:** 1. Lukacs J. Experimental and Numerical Investigations of External Reinforced Damaged Pipelines / J. Lukacs, G. Nagy, I. Torok, J. Egert, B. Pere // Procedia Engineering 2. – 2010. – Vol. 2. – P. 1191–1200. 2. Costa-Mattos H.S. An alternative methodology to repair localized corrosion damage in metallic pipelines with epoxy resins / H.S. Costa-Mattos, J.M.L. Reis, R.F. Sampaio, V.A. Perrut // Materials and Design. – 2009. – Vol. 30. – P. 3581–3591. 3. Köpple M.F. Composite repair of through-wall defects in pipework – Analytical

cal and numerical models with respect to ISO/TS 24817 / M.F. Köppl, S. Lauterbach, W. Wagner // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – P. 173–178. **4.** Альтенбах Х. Прогнозирование технологических напряжений в трубопроводе при его ремонте композитной накладкой / Х. Альтенбах, К. Науменко, Г. Львов, В. Сукиасов, А. Подгорный // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 197–222. **5.** Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 333 с. **6.** Tuttle M.E. Structural Analysis of Polymeric Composite Materials / M.E. Tuttle. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. – 640 p. **7.** Duell J.M. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system / J.M. Duell, J.M. Wilson, M.R. Kessler // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2008. – Vol. 85. – P. 782–788. **8.** Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 544 с. **9.** Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 320 с. **10.** Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов / В.В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 328 с. **11.** Львов Г.И. Исследование вязкоупругого деформирования составного цилиндра / Г.И. Львов, В.Г. Сукиасов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 119–124.

**Bibliography (transliterated):** 1. Lukacs J., Nagy G., Torok I., Egert J., Pere B. Experimental and Numerical Investigations of Ex-

ternal Reinforced Damaged Pipelines. Procedia Engineering 2. 2010, vol. 2, pp. 1191–1200. **2.** Costa-Mattos H.S., Reis J.M.L., Sampaio R.F., Perrut V.A. An alternative methodology to repair localized corrosion damage in metallic pipelines with epoxy resins. Materials and Design. 2009, vol. 30, pp. 3581–3591. **3.** Köppl M.F., Lauterbach S., Wagner W. Composite repair of through-wall defects in pipework. Analytical and numerical models with respect to ISO/TS 24817. Composite Structures. 2013, vol. 95, pp. 173–178. **4.** Altenbah H., Naumenko K., Lvov G., Sukiasov V., Podgorniy A. Prognozirovanie tehnologicheskikh napryazheniy v truboprovode pri ego remonte kompozitnoy nakladkoj. Mehanika kompozitnykh materialov. 2015, T. 51, No 2, pp. 197–222. **5.** Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov. Moscow: Mir, 1982. 333 p. **6.** Tuttle M.E. Structural Analysis of Polymeric Composite Materials. New York: Marcel Dekker, Inc. 2004, 640 p. **7.** Duell J.M., Wilson J.M., Kessler M.R. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2008, vol. 85, pp. 782–788. **8.** Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integralnye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie. Moscow: Nauka, 1974, 544 p. **9.** Meyz Dj. Teoriya i zadachi mehaniki sploshnykh sred. Moscow: Mir, 1974, 320 p. **10.** Moskvitin V.V. Soprotivlenie vyazko-uprugih materialov. Moscow: Nauka, 1972, 328 p. **11.** Lvov G.I., Sukiasov V.G. Issledovanie vyazkouprugogo deformirovaniya sostavnogo tsilindra. Visnik NTU "HPI". Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Kharkiv: NTU "HPI", 2013, No 58 (1031), pp. 119–124.

*Поступила (received) 05.07.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Сукиасов Владимир Георгиевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент, кафедра динамики и прочности машин, Национальный технический университет «ХПИ»; тел.: (057) 7076879; e-mail: dpm\_161@mail.ru.

**Sukiasov Vladimir Georgievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI"; tel.: (057) 7076879; e-mail: dpm\_161@mail.ru.

УДК 539.3

**С.Н.СКЛЕПУС, А.З. ГАЛИШИН**

**О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

*90-летию академика НАН Украины  
Ю.Н. Шевченко посвящается*

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и длительной прочности полых цилиндров и цилиндрических оболочек, работающих при ползучести. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента, сопоставляются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Исследовано влияние соотношения геометрических размеров на точность оболочечного решения. Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, прогнозирование, полый цилиндр, цилиндрическая оболочка.

**1. Введение.** В современной технике находят широкое применение элементы конструкций в виде тел вращения, работающие в условиях ползучести. С целью снижения компьютерных затрат для таких объектов зачастую принимается расчетная схема в виде

оболочки вращения [1-8 и др.]. При этом привлекаются как классическая теория, так и различные уточненные теории оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига. Погрешность решения, полученного в рамках той или иной теории оболочек, зависит от

соотношения геометрических размеров, граничных условий, условий нагружения, механических характеристик материала и пр. Одновременно изучить влияние всех факторов является сложной задачей. Одним из возможных путей исследования погрешностей приближенных теорий оболочек является сопоставление полученных на их основе решений с результатами решения трехмерных задач [9]. Анализ применимости классической и уточненных теорий в задачах упругого деформирования оболочек дан в работах [9, 10 и др.]. В то же время, исследованию применимости оболочечных моделей в задачах ползучести, повреждаемости и длительной прочности цилиндрических оболочек посвящены единичные работы. Так, в статье [11], были исследованы ползучесть и повреждаемость вследствие ползучести полого цилиндра в рамках осесимметричной пространственной постановки и на базе гипотез Кирхгофа-Лява. В этой работе учитывалось различное поведение сплава АК4-1Т при растяжении и сжатии в условиях ползучести. В отличие от [11], в настоящей статье используется уточненная модель, основанная на гипотезах прямолинейного элемента. Свойства ползучести считаются независимыми от вида напряженного состояния. Результаты решения задачи ползучести и повреждаемости для оболочек различной толщины сопоставляются с результатами пространственного решения для осесимметрично нагруженных полых цилиндров.

В литературе также отсутствуют работы, посвященные прогнозированию времени до разрушения полых цилиндров вследствие ползучести.

Цели работы:

- сопоставить результаты решения задачи повреждаемости вследствие ползучести полых цилиндров в рамках пространственной и оболочечной постановок;
- разработать способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**2. Постановка и метод решения начально-краевой задачи ползучести цилиндра в рамках пространственной модели.** Рассмотрим круговой осесимметрично нагруженный полый изотропный цилиндр в цилиндрической системе координат  $O\varphi z$ . Ось  $Oz$  совпадает с осью вращения. Полагаем, что температура цилиндра  $T(r, z, t)$  неизменна во времени  $t$  и выполняется условие  $T(r, z, 0) = T_0$ , где  $T_0$  – начальная температура (температура естественного, ненапряженного и недеформированного состояния).

Задачу будем решать в геометрически линейной, квазистатической постановке и в предположении, что в процессе деформирования пластические деформации не возникают. Принимаем, что компоненты скоростей упругих деформаций  $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$  и скоростей необратимых деформаций ползучести  $\dot{p}_{kl}$  аддитивны:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}, \quad (k, l = \overline{1,3}).$$

Для описания ползучести и повреждаемости воспользуемся уравнениями работы [12], которые представим в виде:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \frac{\sigma_i^m}{(1-\psi)^n} s_{kl}; \quad \dot{\psi} = B \frac{\sigma_i^k}{(1-\psi)^q}. \quad (1)$$

Здесь  $A, B, m, n, k, q$  – константы материала;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $s_{kl}$  – компоненты девиатора напряжений;  $\psi = \psi(r, z, t)$  – скалярный параметр повреждаемости:  $\psi(r, z, 0) = 0, \psi(r, z, t_*) = 1$ , где  $t_*$  – время до разрушения.

В цилиндрической системе координат имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{zz}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t); \\ \dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t). \end{aligned}$$

Здесь и далее точка над символами означает полную производную по времени.

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке цилиндра, в том числе в точках пространственной дискретизации краевой задачи, можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r; \quad \frac{du_z}{dt} = \dot{u}_z; \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{r,r}; \quad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{z,z}; \quad \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} = \frac{\dot{u}_r}{r}; \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z} + \dot{\varepsilon}_{z,r}; \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}); \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}); \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}); \\ \frac{dp_{rr}}{dt} &= \dot{p}_{rr}; \quad \frac{dp_{zz}}{dt} = \dot{p}_{zz}; \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}; \quad \frac{dp_{rz}}{dt} = \dot{p}_{rz}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)$  – перемещения вдоль осей  $Or$  и  $Oz$  соответственно;  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rz}$  – компоненты тензора полных деформаций;  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$  – компоненты тензора напряжений;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ,

$\lambda_1 = \lambda + 2G$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , где  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $p_{rr}, p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{rz}$  – компоненты тензора деформаций ползучести.

В начальный момент времени деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю. Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования цилиндра.

Решение начальной задачи для системы уравнений (2) будем проводить методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, будем находить из решения вариационной задачи для функционала в форме Лагранжа [7]

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0,5 \iint_{\Omega} \left[ \lambda_1 \left( \dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda \left( \dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r(\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[ \dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\theta^c}{r} + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\delta\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$  – вектор скоростей перемещений;  $\Omega$  – меридианное сечение цилиндра;  $\partial\Omega_p$  – часть контура  $\partial\Omega$ , где приложены внешние силы,  $\dot{P}_n, \dot{P}_\tau$  – скорости нормальной и касательной составляющих внешних сил,  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  – внешняя нормаль и касательная к контуру  $\partial\Omega$ ;  $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$ ,  $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$ ;  $n_r, n_z$  – направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$ . Скорости «фиктивных» сил, обусловленных деформациями ползучести, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{N}_r^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \quad \dot{N}_z^c = [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\varphi\varphi})]; \\ \dot{N}_\theta^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{\varphi\varphi} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})]; \quad \dot{N}_{rz}^c = 2G\dot{p}_{rz}. \end{aligned}$$

Скорости деформаций ползучести в функционале (3) считаются известными и не варьируются.

Вариационные задачи для функционала (3) решаются методом Ритца в сочетании с методом R-функций [13].

**3. Постановка и метод решения задачи на осевом оболочечной теории.** Рассматривая осесимметрично нагруженный полый цилиндр в рамках уточненной теории оболочек, предполагаем, что выполняются гипотезы прямолинейного элемента [9]. В соответствии с данными гипотезами связь между осевым  $u_z$  и нормальным  $u_\zeta$  перемещениями произвольной точки оболочки с соответствующими перемещениями точки срединной поверхности  $u, w$  имеет вид

$$u_z = u + \zeta \psi_z; \quad u_\zeta = w; \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (4)$$

где  $\zeta$  – координата, которая отсчитывается по нормали к срединной поверхности с радиусом  $r = R$ ;  $\psi_z, \gamma_z$  – полный угол прямолинейного элемента и угол, обусловленный поперечным сдвигом, соответственно; штрих означает производную по координате  $z$ . Используя (4) и соотношения Коши, связь между компонентами тензора деформаций в произвольной точке оболочки  $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\zeta}$  компонентами деформации срединной поверхности  $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$ , параметром изменения ее кривизны  $\kappa_z$  и углом сдвига  $\gamma_z$  представим в виде

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z + \zeta \kappa_z; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi / a_\varphi; \quad 2\varepsilon_{z\zeta} = \gamma_z;$$

$$\varepsilon_z = u'; \quad \varepsilon_\varphi = w/R; \quad \kappa_z = \psi_z'; \quad a_\varphi = 1 + \zeta/R. \quad (5)$$

Компоненты напряжений определяются равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= B_{11} \varepsilon_{zz} + B_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = B_{12} \varepsilon_{zz} + B_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a; \\ \sigma_{z\zeta} &= B_{33} \varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $B_{ij}$  – жесткостные коэффициенты

$$B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = \nu B_{11}; \quad B_{33} = 2G.$$

Величины с индексом «а» означают дополнительные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^a &= B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}); \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{11}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}); \\ \sigma_{z\zeta}^a &= B_{33} p_{z\zeta}, \end{aligned}$$

где  $p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$  – компоненты деформаций ползучести, которые зависят от напряжений, констант ползучести и параметра повреждаемости материала и определяются путем численного интегрирования физических уравнений. Как и в случае пространственной задачи, это интегрирование осуществляется методом РКМ.

Вводя в рассмотрение интегральные характеристики напряженного состояния – радиальное  $N_r$ , осевое  $N_z$  усилия и осевой изгибающий момент  $M_z$ , и, используя уравнения равновесия [9], кинематические (5) и физические (6) уравнения, решение задачи сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка вида

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (7)$$

где  $P(z)$  – матрица системы, зависящая от упругих констант материала;  $\mathbf{f}$  – вектор свободных членов, который зависит еще и от деформаций ползучести, и параметра повреждаемости. Решение системы (7) должно удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра. Ненулевые элементы матрицы  $P(z)$  и вектора  $\mathbf{f}$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} p_{12} &= -p_{54} = -\mu_1/R; \quad p_{13} = -p_{64} = \mu_2/R; \\ p_{14} &= (C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11})/R^2; \\ p_{31} &= -p_{46} = 1; \quad p_{41} = 1/C_{33}; \quad p_{52} = C_{20}/\delta; \\ p_{53} &= p_{62} = -C_{10}/\delta; \quad p_{63} = C_{00}/\delta; \\ f_1 &= -(\mu_1 N_z^a + N_\varphi^a - \mu_2 M_z^a)/R - q_\zeta; \\ f_2 &= -q_z; \quad f_3 = -m_z; \quad f_4 = Q_z^a/C_{33}; \\ f_5 &= (C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a)/\delta; \\ f_6 &= -(C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a)/\delta, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mu_1 = (C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20})/\delta$ ;  $\mu_2 = (C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10})/\delta$ ;  
 $\delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2$ .

Входящие в (7) величины  $q_z, q_\zeta, m_z$  означают приведенные к срединной поверхности распределенные поверхностные нагрузки и момент [9]. Интегральные жесткостные характеристики  $C_{pq}, C_{33}$  а также дополнительные усилия  $N_z^a, N_\varphi^a, Q_z^a$  и момент  $M_z^a$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} C_{pq} &= B_{11} F \{ b_q \zeta^p \} \quad (p, q = 0, 1, 2); \quad C_{33} = 2Gh; \\ b_0 &= a_\varphi; \quad b_1 = \nu; \quad b_2 = a_\varphi^{-1}; \quad F \{ \dots \} = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) d\zeta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi\}; & N_\varphi^a &= F\{\sigma_{\varphi\varphi}^a\}; \\ Q_z^a &= F\{\sigma_{z\zeta}^a a_\varphi\}; & M_z^a &= F\{\sigma_{zz}^a a_\varphi \zeta\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Входящие в (9) интегралы вычисляются численно на основании процедуры, сочетающей методы Симпсона и Ньютона. На каждом шаге по времени краевая задача (7) решается методом Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией по С. К. Годунову.

Здесь необходимо отметить следующее:

1. Приведенные выше уравнения предназначены для описания деформирования в условиях ползучести цилиндрических оболочек с учетом повреждаемости и при отсутствии тепловых воздействий. В уравнениях учитываются величины  $\zeta/R$ . Удержание этих величин может оказаться целесообразным для оболочек средней толщины и бесполезным для тонких оболочек.

2. Независимо от того учитываются или не учитываются величины  $\zeta/R$ , разрешающие уравнения, основанные на гипотезах Кирхгофа – Лява, могут быть получены с помощью (8), если в них положить  $1/C_{33} = 0$ , а в равенствах (4), (5) положить  $\gamma_z = 0$  [4].

3. В работе [14] показано, что при наличии температурных деформаций учет величин  $\zeta/R$  может привести к появлению значительных «фиктивных» напряжений. Поэтому в температурных задачах этими величинами следует пренебрегать по сравнению с единицей.

**4. Численные результаты.** В первом примере проведено сопоставление результатов решения задачи ползучести и повреждаемости для полого цилиндра и цилиндрической оболочки. В последующих примерах будет описана методика прогнозирования времени до разрушения при ползучести для таких объектов.

*Пример 1.* Рассмотрим ползучесть цилиндра, на наружной поверхности которого приложено давление, изменяющееся по закону

$$P_{out} = P(z) = \frac{1}{2} P_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{l}\right) \right]. \quad (10)$$

Геометрические размеры: длина  $l = 0,1$  м; радиус срединной поверхности  $R = 0,1$  м; толщина  $h = 0,01$  м. Обозначим

$$\xi = h/R. \quad (11)$$

В данном случае  $\xi = 1/10$ . Для величины  $P_0$ , определяющей максимальное значение нагрузки, принято, что  $P_0 = 18,7$  МПа. Упругие константы материала:  $E = 60$  ГПа,  $\nu = 0,35$ . Константы материала в уравнениях

$$(1): \quad A = 5,5 \cdot 10^{-23} \text{ МПа}^{-(m+1)} \text{ ч}^{-1}, \\ B = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ МПа}^{-k} \text{ ч}^{-1}, \quad m = 7, \quad k = 9, \quad n = q = 3.$$

Граничные условия для краевой задачи в рамках пространственной постановки задавались в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= 0, \quad \dot{\sigma}_z = 0 \quad \text{для } z = \pm \frac{l}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{inn} = R - \frac{h}{2}; \\ \dot{\sigma}_r &= -\dot{P}_{out} = 0, \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0 \quad \text{для } r = r_{out} = R_0 + \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

Можно показать, что структура решения, удовле-

творяющая кинематическим граничным условиям для скоростей перемещений, имеет вид:

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  – неопределенные компоненты структуры

решения;  $\omega = \frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$  – полоса  $\Omega$ , заключенная

между линиями  $z = -l/2$  и  $z = l/2$  ( $\omega = 0$ ,  $\omega_{,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega$ ,  $\omega > 0$  внутри полосы). При численной реализации, неопределенные компоненты  $\Phi_1, \Phi_2$  представлялись в виде конечных рядов вида:

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z);$$

$$\Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

где  $C_n^{(1)}(t), C_n^{(2)}(t)$  – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  – система линейно независимых базисных функций. Здесь в качестве  $\{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\}$  использовались бикубические сплайны Шенберга. Системы сплайнов строились на регулярной сетке  $K_r \times K_z$ , где  $K_r, K_z$  – количество отрезков дискретизации вдоль осей  $Or$  и  $Oz$ , соответственно.

Решение задачи ползучести цилиндра, сформулированной в рамках пространственной постановки, было получено при следующих параметрах пространственной и временной дискретизации:  $K_r = 10, K_z = 20$ ; начальный шаг по времени  $\Delta_0 t = 10^{-3}$  ч; заданная погрешность вычислений в методе РКМ  $\varepsilon = 10^{-4}$ . При численных расчетах критерием окончания процесса решения и нахождения времени до разрушения было выполнение в какой-либо точке пространственной дискретизации условия  $\psi \geq 0,9$ .

При решении задачи в рамках теории оболочек рассматривалась правая симметричная половина оболочки  $0 \leq z \leq l/2$ . На меридианное сечение оболочки наносилась равномерная сетка, состоящая из 101 точки по  $z$  и 11 точек по толщине. Другие параметры дискретизации принимали значения:  $\Delta_0 t = 10^{-5}$  ч,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Граничные условия в рамках теории оболочек формулировались в виде

$$N_r = u_z = \psi_z = 0, \quad \text{при } z = 0;$$

$$N_z = M_z = u_r = 0, \quad \text{при } z = l/2.$$

Нагрузка на срединной поверхности оболочки определялась по формуле

$$q_\zeta = - \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) P(z).$$

Расчеты показали, что в пространственном и оболочечном решениях разрушение начинается в центре на внутренней поверхности цилиндра. Время до разрушения в пространственном решении  $t_{3D} = 4266$  ч, а в оболочечном –  $t_{SH} = 3305$  ч (символ «\*» для простоты опущен). То есть отличие в определении време-



ни до разрушения составляет 22,5 %. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1-5. На рис. 1 показаны графики изменения вдоль оси цилиндра радиальных перемещений срединной поверхности в различные моменты времени. Кривые 1 соответствуют моменту времени  $t = 0$ ; 2 –  $t = 2000$  ч; 3 –  $t = t_*$ . Здесь и далее линии с маркерами соответствуют результатам пространственного решения. На рис. 2 для тех же моментов времени показаны графики изменения параметра повреждаемости на внутренней поверхности

цилиндра, где начинается разрушение.

На рис. 3, а показаны аналогичные графики для окружных  $\sigma_{\phi\phi}$ , а на рис. 3, б осевых  $\sigma_{zz}$  напряжений. Такие же графики для окружных  $p_{\phi\phi}$  и осевых  $p_{zz}$  деформаций ползучести приведены на рис. 4.

Рис. 5 иллюстрирует изменение во времени параметра повреждаемости  $\psi$  (кривые а) и окружных напряжений  $\sigma_{\phi\phi}$  (кривые б) в центре на внутренней поверхности цилиндра.

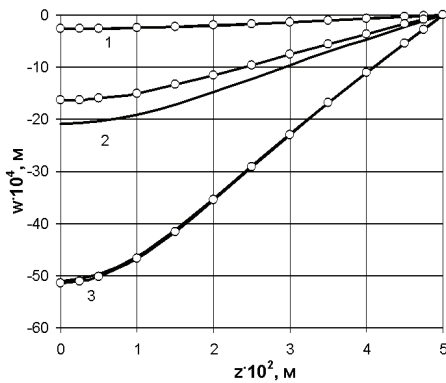


Рисунок 1 – Радиальные перемещения точек срединной поверхности цилиндра в различные моменты времени

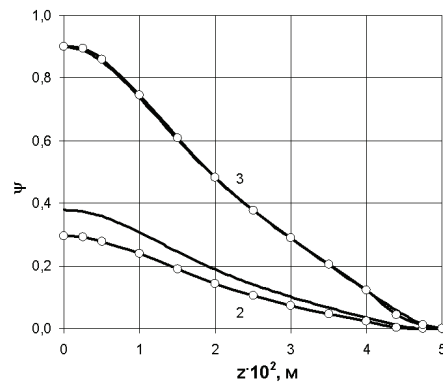


Рисунок 2 – Параметр повреждаемости на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

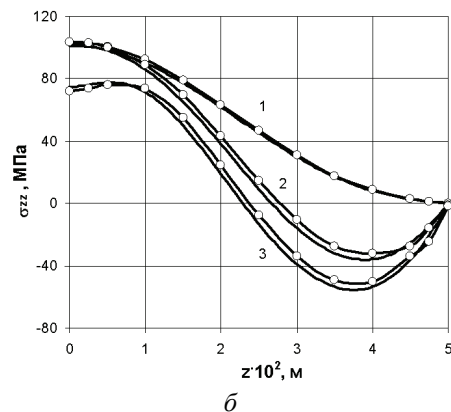
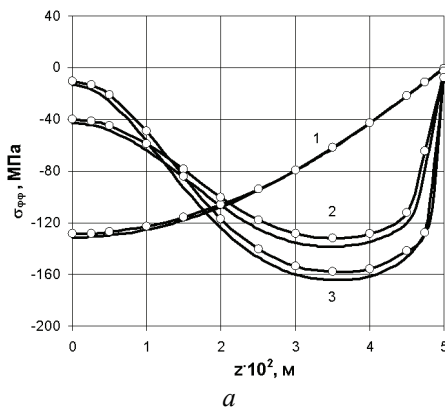


Рисунок 3 – Окружные (а) и осевые (б) напряжения на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

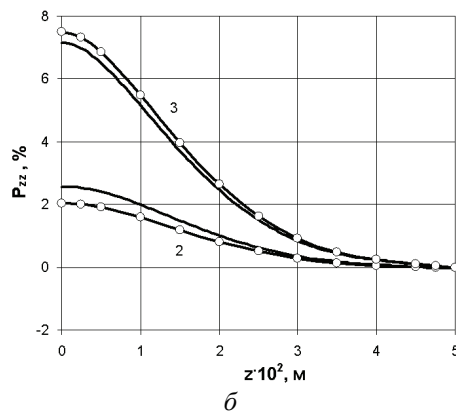
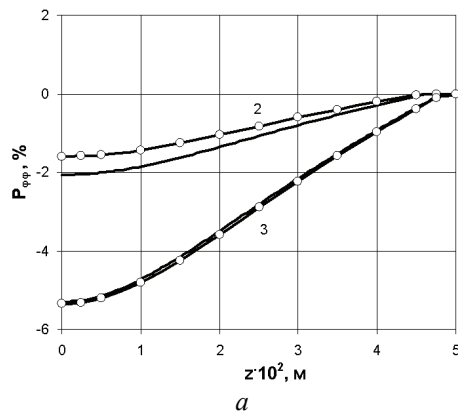


Рисунок 4 – Окружные (а) и осевые (б) деформации ползучести на внутренней поверхности цилиндра в различные моменты времени

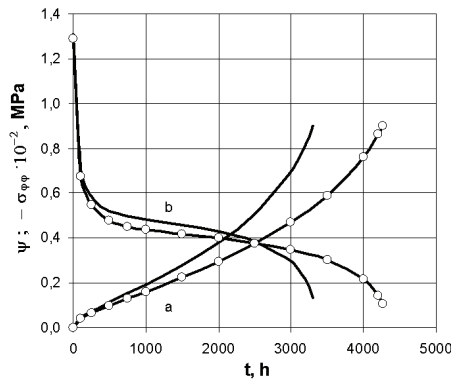


Рисунок 5 – Повреждаемость и окружные напряжения в центре на внутренней поверхности цилиндра

Из рисунков видно, что в начальный момент времени (в уругом решении) получено практически полное совпадение результатов для перемещений и напряжений. С ростом времени расхождение увеличивается.

Например, при  $t = 2000$  ч, наблюдаются заметные (до 28 %) расхождения в перемещениях, деформациях ползучести и для параметра повреждаемости. В то же время напряжения в области максимальных значений отличаются лишь на 5 %. В моменты времени, соответствующие завершению скрытого разрушения, результаты согласуются хорошо. В целом можно сделать вывод о достаточно хорошем совпадении результатов для характеристик напряженно-деформирован-

ного состояния, полученных с помощью пространственной и оболочечной теорий.

Следующие примеры посвящены разработке способа прогнозирования времени до разрушения полых цилиндров на основе данных о времени до разрушения, полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**Пример 2.** Рассмотрим цилиндр из предыдущего примера, при тех же граничных условиях, свойствах материала и геометрических размерах, за исключением толщины. Значения  $\xi$  будем варьировать в пределах от 1/50 до 1/8. Величины  $P_0$  (табл. 1) выбирались так, чтобы время до разрушения во всех вариантах расчета было близко. Как и ранее разрушение для всех значений  $\xi$  начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В табл. 1 приведены значения  $t_{3D}$  времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения  $t_{SH}$  времени до разрушения, полученные на основе оболочечной модели. В табл. 1 также помещены значения относительного отклонения для времени до разрушения

$$\Delta = \frac{t_{3D} - t_{SH}}{t_{3D}} \tag{12}$$

Видно, что во всех рассмотренных случаях  $t_{3D} > t_{SH}$ , поэтому отклонения (12) всюду положительны. Из таблицы также видно, что с ростом  $\xi$  относительное отклонение  $\Delta$  возрастает.

Таблица 1 – Значения  $t_{3D}$  времени до разрушения, полученные в расчетах по пространственной модели, и значения  $t_{SH}$  времени до разрушения

$\xi$	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
$P_0$ , МПа	3,17	6,95	8,85	11,3	18,7	23,8
$t_{SH}$ , ч	4096	3750	3806	3623	3305	3108
$t_{3D}$ , ч	4245	4111	4291	4216	4266	4291
$\Delta$	0,035	0,088	0,113	0,141	0,225	0,276
$t_{SH}^{pr}$ , ч	4056	3744	3813	3628	3315	3095
$t_{3D}^{pr}$ , ч	4287	4117	4284	4210	4254	4309

Анализируя зависимость приведенных отклонений  $\Delta$  от величины  $\xi$ , приходим к выводу, что она близка к линейной и ее можно аппроксимировать зависимостью

$$\Delta(\xi) = k\xi \tag{13}$$

Угловой коэффициент  $k$  в (13) определялся методом наименьших квадратов и оказался равным  $k = 2,23$ .

При этом использовались данные для  $\xi = 1/50; 1/25; 1/16; 1/10$ .

Приняв для параметра  $\Delta$  аппроксимацию (13), получим формулу для прогнозирования времени до разрушения по оболочечной теории на основе пространственного решения

$$t_{SH}^{pr} = t_{3D}(1 - k\xi) \tag{15}$$

Из (12), (13) также следует формула, позволяющая базе оболочечного решения прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке

$$t_{3D}^{pr} = \frac{t_{SH}}{1 - k\xi} \tag{16}$$

Эта формула привлекательна тем, что для прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке необходимо знать лишь коэффициент  $k$  и значение времени до разрушения в оболочечной постановке. Учитывая, что затраченное время на получение пространственного решения может на несколько порядков превышать соответствующее время в оболочечной постановке, получаем несомненную выгоду.

На основе найденного коэффициента  $k$  (14) по формулам (15), (16) вычислены прогнозируемые значения времени до разрушения в оболочечной  $t_{SH}^{pr}$  и пространственной  $t_{3D}^{pr}$  постановках (см. табл. 1). Можно убедиться, что максимальное отличие расчетных и прогнозируемых значений составляет 1,3 %. Следует отметить, что при определении коэффициента  $k$  не использовались данные для  $\xi = 1/20$  и  $1/8$ , однако полученные расчетные и исходные значения также

хорошо согласуются между собой.

Очевидно, что для построения прямой, исходящей из начала координат на плоскости  $\xi O\Delta$  достаточно знать одну точку. Пусть эта точка соответствует значению  $\xi = 1/10$ . Тогда угловый коэффициент будет равен  $k_1 = 2,25$ , что незначительно отличается от значения (14). Можно легко убедиться, что прогнозируемые в этом случае значения времени до разрушения будут мало отличаться от приведенных в табл. 1.

**Пример 3.** Рассмотрим цилиндр, нагруженный постоянным внутренним давлением

$$P_{inn} = \frac{PR}{r_{inn}} = P \left( 1 - \frac{h}{2R} \right)^{-1},$$

где  $P$  – давление, отнесенное к срединной поверхности (табл. 2). Остальные условия совпадают с условиями предыдущего примера. В табл. 2 представлены расчетные  $t_{SH}$ ,  $t_{3D}$  значения времени до разрушения и значения

отклонения  $\Delta$ . Разрушение для всех значений  $\xi$  начинается в центре цилиндра, на внутренней поверхности. В отличие от примера 2 здесь все отклонения  $\Delta$  (12) отрицательны. Зависимость  $\Delta(\xi)$  также можно аппроксимировать выражением вида (13). При этом коэффициент аппроксимации отрицателен и равен

$$k = -2,21.$$

Прогнозируемые значения времени до разрушения  $t_{SH}^{pr}$ ,  $t_{3D}^{pr}$ , найденные по формулам (15), (16), также помещены в табл. 2. Максимальное отклонение расчетных и прогнозируемых данных наблюдается при  $\xi = 1/8$  и не превышает 1,3 %. Линейная зависимость, построенная по одной точке (для  $\xi = 1/10$ ) с коэффициентом  $k_1 = 2,12$ , дает максимальную погрешность 1,6 %.

Очевидно, что для цилиндров, рассмотренных во 2-м и 3-м примерах, можно принять единый коэффициент с модулем, равным среднему арифметическому модулей коэффициентов  $k$  при внутреннем и внешнем давлении, то есть  $|k| = 2,22$ .

Таблица 2 – Расчетные  $t_{SH}$ ,  $t_{3D}$  значения времени до разрушения и значения отклонения  $\Delta$

$\xi$	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
$P$ , МПа	2,55	5,1	6,4	8,0	13,0	16,5
$t_{SH}$ , ч	4594	4707	4688	4892	5200	5422
$t_{3D}$ , ч	4360	4281	4172	4277	4291	4304
$\Delta$	-0,054	-0,099	-0,124	-0,144	-0,212	-0,260
$t_{SH}^{pr}$ , ч	4553	4659	4633	4868	5239	5493
$t_{3D}^{pr}$ , ч	4400	4325	4222	4298	4259	4248

**Пример 4.** Для проверки работоспособности предложенной методики прогнозирования времени до разрушения рассмотрим цилиндр из примера 1, но вдвое большей длины, то есть с  $l = 0,2$  м. В результате расчетов установлено, что  $t_{3D} = 957$  ч и  $t_{SH} = 768$  ч.

Учитывая, что вид нагрузки не изменился и, используя значение коэффициента  $k$  (14) найдем соответствующие прогнозируемые времена до разрушения:  $t_{3D}^{pr} = 988$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 744$  ч. То есть расхождения с расчетными значениями составляют около 3,2 %, что подтверждает эффективность предложенного подхода.

**Пример 5.** Исследуем применимость предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных цилиндрических оболочек и цилиндров. Заметим, что для оболочек с  $\xi > 1/8$  отклонение расчетного времени до разрушения  $t_{SH}$  от  $t_{3D}$  превышает 30 %. В этих случаях, для получения более достоверного решения, нужно использовать более сложные теории оболочек, учитывающие, например, поперечное обжатие. Отметим также, что для толстостенных оболочек зависимость отклонения  $\Delta(\xi)$ , полученная на основе теории оболочек средней толщины, может сильно отклоняться от линейного закона.

Рассмотрим цилиндр под действием наружного давления, изменяющегося по закону (10) и цилиндр под действием постоянного внутреннего давления. Для обоих случаев отношение  $h/R = 1/5$ . Граничные условия и свойства материала – те же что и в приме-

рах 2, 3. Для наружного и внутреннего давлений примем:  $P_0 = 40,4$  МПа,  $P = 28,2$  МПа.

Для цилиндра под действием наружного давления получены следующие расчетные значения времени до разрушения:  $t_{3D} = 4307$  ч,  $t_{SH} = 2471$  ч. Используя формулы (15), (16), где  $k = 2,22$ , для прогнозируемых значений времени до разрушения получим:  $t_{3D}^{pr} = 4444$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 2395$  ч. Отличие прогнозируемого и расчетного времени до разрушения в пространственном случае составляет 3,2 %, а по теории оболочек – 3,1 %.

Для цилиндра под внутренним давлением получено:  $t_{3D} = 4203$  ч,  $t_{SH} = 5562$  ч. Используя формулы (15), (16), где  $k = -2,22$ , для прогнозируемых значений времени до разрушения получим  $t_{3D}^{pr} = 3852$  ч и  $t_{SH}^{pr} = 6069$  ч. Соответствующие погрешности составляют 8,4 % и 9,1 %.

Таким образом, получено удовлетворительное совпадение расчетных и прогнозируемых значений времени до разрушения. Если принять во внимание большой разброс экспериментальных данных на третьей стадии ползучести, где значения времени до разрушения могут отличаться в 2 раза, то можно сделать вывод о применимости предложенного подхода для прогнозирования времени до разрушения толстостенных оболочек и цилиндров.

Предложенный способ прогнозирования времени

до разрушения, основанный на линейной аппроксимации вида (13), применим в широком диапазоне изменения относительной толщины цилиндра и для нахождения коэффициента  $k$  требует всего двух расчетов при каком-то фиксированном значении  $\zeta$ . В этом заключается его несомненное достоинство. В других случаях (например, для других граничных условий или вида нагрузки) необходимо проверять приемлемость данной аппроксимации. Определение рамок применимости линейной или какой-либо другой аппроксимации требует дополнительных исследований.

**5. Выводы.** Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в условиях ползучести полых цилиндров и цилиндрических оболочек, находящихся под действием поперечной нагрузки. Предложенный подход основан на анализе отклонения оболочечного решения от пространственного. Он позволяет достаточно точно прогнозировать время до разрушения в пространственной постановке, используя результаты оболочечного решения, и наоборот – прогнозировать время до разрушения в оболочечной постановке на основе пространственного решения.

**Список литературы:** 1. Бурлаков А.В. Длительная прочность оболочек / А.В. Бурлаков, Г.И. Львов Г.И., О.К. Морачковский. – Х.: Вища шк., 1981. – 104 с. 2. Локощенко А.М. Долговечность цилиндрических оболочек при чистом изгибе в условиях ползучести / А.М. Локощенко, Н.Е. Печенина, С.А. Шестериков // Прикл. математика и механика. – 1989. – 25, № 12. – С. 73–78. 3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, Р.Г. Терехов. – К.: Наук. думка, 1992. – 329 с. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian / A.Z. Galishin // Int. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 29, No. 1. – P. 61-69. 5. Altenbach H. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Forschung im Ingenieurwesen. – 1996. – 62, № 3. – S. 47-57. 6. Galishin A. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling / A. Galishin, A. Zolochevskiy, A. Kühhorn, M. Springmann // Techn. Mech. – 2009. – Vol. 29, №. 1. – P. 48-59. 7. Золочевский А.А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Склепус, С.Н. Склепус. – Х.: «Бизнес Инвестор Групп», 2011. – 720 с. 8. Shevchenko Yu.N. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material / Yu.N. Shevchenko, A.Z. Galishin, M.E. Babeshko // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, № 6. – P. 607-613. 9. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – К.: Наук.

думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 4). 10. Сало В.А. Краевые задачи статки оболочек с отверстиями / В.А. Сало. – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 11. Zolochevsky A. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions / A. Zolochevsky, S. Sklepus, A. Galishin, A. Kühhorn, M. Kober // Techn. Mech. – 2014. – Vol. 34, № 2. – P. 104-113. 12. Dunne F.P.E. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics / F.P.E. Dunne, A.M. Othman, F.R. Hall, D.R. Hayhurst // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – 32, № 11. – P. 945-957. 13. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 14. Galishin A.Z. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution / A.Z. Galishin, Yu.N. Shevchenko // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 5. – P. 526-533.

**Bibliography (transliterated):** 1. Burlakov A.V., Lvov G.I., Morachkovskij O.K. Dlitel'naja prochnost' obolochek. Kharkiv: Visha shk., 1981, 104 s. 2. Lokoshenko A.M., Pechenina N.E., Shesterikov S.A. Dolgovechnost' cilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe v usloviyah polzuchesti. Prikl. matematika i mehanika. 25, No 12, 1989, p. 73-78. 3. Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E., Terehov R.G. Termoviazkoplachesticheskie processi slozhnogo deformirovaniya elementov konstrukcij. Kyiv: Nauk. dumka, 1992, 329 s. 4. Galishin A.Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian. Int. Appl. Mech. 1993, vol. 29, No. 1, p. 61-69. 5. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften. Forschung im Ingenieurwesen. 1996, 62, № 3, p. 47-57. 6. Galishin A., Zolochevsky A., Kühhorn A., Springmann M. Transversal shear effect in moderately thick shells from materials with characteristics dependent on the kind of stress state under creep-damage conditions: Numerical modeling. Techn. Mech., 2009, vol. 29, No 1, p. 48-59. 7. Zolochevskij A.A., Sklepus A.N., Sklepus S.N. Nelinejnaja mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Kharkiv: «Biznes Investor Grupp», 2011. 720 p. 8. Shevchenko Yu.N., Galishin A.Z., Babeshko M.E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material. Int. Appl. Mech, 2015, vol. 51, No 6, p. 607-613. 9. Grigorenko Ja.M., Vasilenko A.T. Teorija obolochek peremenoj zhestkosti. (Metodi rascheta obolochek v 5 T., T4). Kyiv: Nauk. dumka, 1981, 544 p. 10. Salo V.A. Kraevie zadachi statiki obolochek s otverstijami. Kharkiv: NTU «HPI», 2003, 203 p. 11. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions. Techn. Mech. 2014. vol. 34, No 2, p. 104-113. 12. Dunne F.P.E., Othman A.M., Hall F.R., Hayhurst D.R. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics. Int. J. Mech. Sci. 1990, 32, No 11, p. 945-957. 13. Rvachev V.L. Teorija R-funkcij i nekotorie ee prilozhenija. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 552 p. 14. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution. International Applied Mechanics. 2008, vol. 44, No 5, p. 526-533.

Поступила (received) 10.07.2016.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Склепус Сергей Николаевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков, тел. (050) 522-49-01 (моб.), (0572) 67-54-95 (д.), e-mail: ssklepus@rambler.ru

**Sklepus Sergej Nikolaevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Officer, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv, tel.: (050) 522-49-01, (0572) 67-54-95, e-mail: ssklepus@rambler.ru

**Галишин Александр Закирьянович** – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев, e-mail: galishin55@mail.ru

**Galishin Aleksandr Zakir'yanovich** – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, e-mail: galishin55@mail.ru

УДК 539.3

С.Н.СКЛЕПУС

## ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАГРУЖЕНИЯ

Статья посвящена исследованию ползучести и повреждаемости пологих изотропных оболочек сложной формы в плане, из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения. В постановке задачи используются определяющие соотношения, описывающие дислокационную ползучесть первоначально изотропных материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, ассоциированную с образованием и ростом плоских микротрещин с преимущественной ориентацией. Начально-краевая задача ползучести и повреждаемости решается с помощью совместного использования методов R-функций, Ритца и Рунге-Кутта-Мерсона. Исследовано влияние направления внешней нагрузки на ползучесть, повреждаемость и длительную прочность сферической пологой оболочки сложной формы.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, полая оболочка, метод R-функций.

**1. Введение.** Решению задач ползучести и повреждаемости оболочек посвящены многие статьи и монографии [1-3 и др.]. В большинстве работ рассматриваются различные аспекты ползучести и повреждаемости оболочек из материалов нечувствительных к виду нагружения. Существуют лишь единичные публикации, в которых исследуется влияние вида нагружения на ползучесть и повреждаемость оболочек. Так, в работах [4-8] исследовалась ползучесть оболочек из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения без учета повреждаемости материала.

В данной статье исследуется влияние вида нагружения на ползучесть повреждаемость и длительную прочность изотропной пологой оболочки сложной формы из материала с характеристиками, зависящими от вида нагружения.

**2. Постановка задачи. Метод решения.** Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2z$  изотропную тонкую пологую оболочку толщиной  $h$  и произвольной формы  $\Omega$  в плане. Ось  $Oz$  перпендикулярна плану оболочки. Температура оболочки постоянная  $T(x_1, x_2, z, t) = \text{const}$ . Оболочка нагружена поперечной нагрузкой  $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$ . Стрела подъема оболочки над плоскостью  $Ox_1x_2$ :  $f < a/5$ , где  $a$  – наименьший характерный размер оболочки. Полагаем, что прогибы в процессе ползучести остаются малыми (стрела прогиба  $w_{\max} \leq h/4$ ). Оболочка предполагается достаточно тонкой ( $10 \leq a/h \leq 80$ ), чтобы выполнялись гипотезы Кирхгоффа-Лява.

Краевая задача ползучести, в произвольный момент времени  $t \neq 0$ , может быть сведена к вариационной задаче для функционала в форме Лагранжа, определенного на кинематически возможных скоростях перемещений [7, 9]

$$\Lambda(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}) = 0,5 \iint_{\Omega} \left\{ A_1 (\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + \dot{w}^2 (k_1^2 + k_2^2)) + 2\dot{w}(k_1\dot{u}_{1,1} + k_2\dot{u}_{2,2}) \right\} + 2A_2 (\dot{u}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + \dot{w}(k_1\dot{u}_{2,2} + k_2\dot{u}_{1,1}) + k_1k_2\dot{w}^2) +$$

$$+ A_3 (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2 - 2B_1 (\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,11} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,22} + \dot{w}(k_1\dot{w}_{,11} + k_2\dot{w}_{,22})) - 2B_2 (\dot{u}_{1,1}\dot{w}_{,22} + \dot{u}_{2,2}\dot{w}_{,11} + \dot{w}(k_1\dot{w}_{,22} + k_2\dot{w}_{,11})) - 2B_3 \dot{w}_{,12} (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) + D_1 (\dot{w}_{,11}^2 + \dot{w}_{,22}^2) + 2D_2 \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_3 \dot{w}_{,12}^2 \Big\} dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} (\dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})) dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} (\dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} + \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} + 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12}) dx_1 dx_2 - \iint_{\Omega} (\dot{q}^c + \dot{q}_z) \dot{w} dx_1 dx_2, \quad (1)$$

где  $\dot{u}_1(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{u}_2(x_1, x_2, t)$ ,  $\dot{w}(x_1, x_2, t)$  – скорости перемещений координатной поверхности оболочки вдоль осей  $Ox_1, Ox_2, Oz$ , соответственно;  $k_1, k_2$  – главные кривизны оболочки.

Жесткостные характеристики оболочки вычисляются по формулам:

$$A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz; \quad A_2 = \nu A_1; \quad A_3 = \int_{(h)} G dz; \\ B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz; \quad B_2 = \nu B_1; \quad B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz; \\ D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz; \quad D_2 = \nu D_1; \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz,$$

а «фиктивные» силы, обусловленные ползучестью – по формулам:

$$\dot{N}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz; \\ \dot{N}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \quad \dot{N}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} dz; \\ \dot{M}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz; \\ \dot{M}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \quad \dot{M}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G \dot{p}_{12} z dz; \\ \dot{q}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} [k_1 (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) + k_2 (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11})] dz.$$

Здесь  $E, \nu, G$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона

сона и модуль сдвига материала оболочки. Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести  $\dot{p}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), входящие в выражения для «фиктивных» сил, считаются заданными.

В расчетах будем использовать определяющие уравнения, описывающие ползучесть первоначально изотропных материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, в которых наблюдается дислокационная ползучесть, ассоциированная с образованием и ростом на гранях зерен микротрещин с преимущественной ориентацией [9]:

$$\dot{p}_{kl} = \sigma_e^m \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q \left( \frac{C\sigma_{ij} + AI_1\delta_{ij}}{\sigma_{e2}} + Be_k e_l \right), \quad (2)$$

$$(k, l = \overline{1, 2}),$$

где  $\sigma_e = \sigma_{e2} + \alpha\sigma_{e1}$ ,  $\sigma_{e1} = Be_k \sigma_{kl} e_l$ ;  $\sigma_{e2} = \sqrt{AI_1^2 + CI_2}$ ;  $I_1 = \sigma_{kk}$ ;  $I_2 = \sigma_{kl}\sigma_{lk}$ ;  $e_k$  – компоненты единичного вектора  $\mathbf{e}$ , характеризующего ориентацию микротрещин и направленного перпендикулярно к плоскости трещины;  $A, B, C, m, q$  – параметры материала, которые находятся на основе данных базовых экспериментов на одноосное растяжение, сжатие и чистое кручение. В дальнейшем полагаем, что микротрещины ориентируются перпендикулярно направлению действия максимального главного напряжения  $\sigma_1$ , действующего в плоскости  $Ox_1x_2$ . В этом случае компоненты вектора  $\mathbf{e}$  могут быть найдены по формулам:

$$e_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_1)^2 + \sigma_{12}^2}}; \quad e_2 = \pm \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_1)^2 + \sigma_{12}^2}},$$

где  $\sigma_1 = 0,5(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2})$ .

Кинетическое уравнение для параметра повреждаемости имеет вид [9]

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \left( \frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q. \quad (3)$$

Здесь в качестве скалярного параметра повреждаемости ( $\psi \in [0, \psi_*]$ ) взята удельная энергия рассеяния

$$\psi = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt.$$

Начальное значение  $\psi = 0$  соответствует неповрежденному состоянию, а критическое значение

$$\psi_* = \int_0^{t_*} \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt - \text{времени до разрушения } t_*.$$

Уравнения (2), (3) описывают различное поведение материала при растяжении, сжатии и кручении, различное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и кручении, сжимаемость материала при ползучести, эффект Пойнтинга, влияние гидростатического давления, а также анизотропию, обусловленную повреждаемостью.

Направленный характер повреждаемости описывается тензорной мерой повреждаемости:  $(\psi_{ij}) = \psi \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = \psi (e_i e_j)$ , где диадное произведение

$\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  образует симметричный тензор второго ранга, характеризующий анизотропию материала, обусловленную повреждаемостью.

Основные неизвестные задачи ползучести и повреждаемости вследствие ползучести в произвольной точке оболочки можно найти из решения задачи Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [9]

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \dot{u}_1; & \frac{du_2}{dt} &= \dot{u}_2; & \frac{dw}{dt} &= \dot{w}; \\ \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{11} + k_1 \dot{w} - z \dot{w}_{,11}; & \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{22} + k_2 \dot{w} - z \dot{w}_{,22}; \\ \frac{d\gamma_{12}}{dt} &= \dot{\gamma}_{12} + \dot{\gamma}_{2,1} - 2z \dot{w}_{,12}; \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\varepsilon}_{11} + \nu \dot{\varepsilon}_{22} - (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22})]; \\ \frac{d\sigma_{22}}{dt} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\dot{\varepsilon}_{22} + \nu \dot{\varepsilon}_{11} - (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11})]; \\ \frac{d\sigma_{12}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{12} - 2\dot{p}_{12}); \\ \frac{dp_{11}}{dt} &= \dot{p}_{11}; & \frac{dp_{22}}{dt} &= \dot{p}_{22}; & \frac{dp_{12}}{dt} &= \dot{p}_{12}; & \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (4)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  деформации ползучести и параметр повреждаемости равны нулю:  $p_{11} = p_{22} = p_{12} = \psi = 0$ . Начальные условия для остальных неизвестных функций следуют из решения задачи упругого деформирования оболочки. Для решения упругой задачи может быть использован приведенный выше функционал. При этом в формуле (1) необходимо заменить производные функций по времени самими функциями, а при вычислении «фиктивных» сил положить  $\dot{p}_{11} = \dot{p}_{22} = \dot{p}_{12} = 0$ .

Решение начальной задачи для системы уравнений (4) будем проводить методом Рунге-Кутты-Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага по времени. Правые части уравнений, в моменты времени, соответствующие схеме РКМ, будем находить из решения вариационной задачи для функционала (1), которая решается методом Ритца в сочетании с методом R-функций [10].

**3. Численные результаты.** В качестве примера расчета рассмотрим ползучесть пологой сферической оболочки с эллиптическими надрезами посередине каждой из сторон (рис. 1). Материал оболочки – алюминиевый сплав АК4-1Т при температуре  $T = 473$  К. Оболочка находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки  $|q_z| = 16$  МПа. Геометрические размеры:  $a = 4 \cdot 10^{-2}$  м;  $b = 2 \cdot 10^{-2}$  м;  $c = 3 \cdot 10^{-2}$  м; толщина  $h = 8 \cdot 10^{-3}$  м; главные кривизны:  $k_1 = k_2 = 10,0 \text{ м}^{-1}$ .

Упругие константы материала:  $E = 60$  ГПа;  $\nu = 0,35$ . Константы материала в определяющих уравнениях ползучести [9, 11]:

$$A = -7,33142 \cdot 10^{-6} \text{ МПа} \cdot \frac{2m}{m+1} \cdot \frac{2}{m+1};$$

$$B = 3,17926 \cdot 10^{-4} \text{ МПа} \frac{\text{м}}{\text{м}+1} \frac{1}{\text{ч}^{\frac{1}{\text{м}+1}}};$$

$$C = 1,6603 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} \frac{\text{м}}{\text{м}+1} \frac{2}{\text{ч}^{\frac{2}{\text{м}+1}}}; \quad m = 8; \quad q = 3.$$

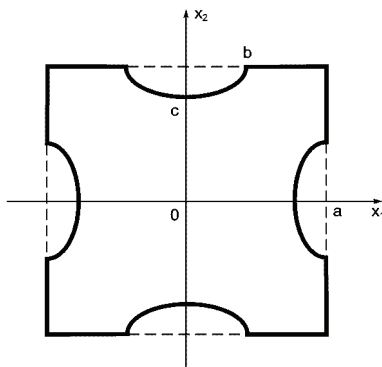


Рисунок 1 – План пологой сферической оболочки

Критическое значение параметра повреждаемости зависит от вида напряженного состояния и вычисляется по формуле [11]:  $\psi_* = \frac{1}{2}(3I_2 - I_1^2)(a - bI_1)$ , где  $a = 4 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ ;  $b = 4 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-2}$ .

На контуре оболочки заданы условия шарнирно-го закрепления, неподвижного в тангенциальном направлении. В этом случае кинематические граничные условия и соответствующая структура решения имеют вид:

$$\dot{w} = 0; \quad \dot{u}_r = \dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2 = 0;$$

$$\dot{w} = \omega \Phi_1; \quad \dot{u}_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3; \quad \dot{u}_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4.$$

Здесь  $\Phi_i (i = \overline{1,4})$  – неопределенные компоненты структуры решения;  $n_1, n_2$  – направляющие косинусы внешней нормали  $\mathbf{n}$  к контуру оболочки  $\partial\Omega$ . Функция  $\omega(x_1, x_2)$  строится с помощью теории R-функций и должна удовлетворять условиям:  $\omega = 0$ ,  $\omega_{,n} = -1$  на границе  $\partial\Omega$  и  $\omega > 0$  внутри области  $\Omega$ .

При численной реализации, неопределенные компоненты представлялись в виде конечных рядов вида:

$$\Phi_i(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{N_i} C_n^{(i)}(t) f_n^{(i)}(x_1, x_2),$$

где  $C_n^{(i)}(t) (i = \overline{1,4})$  – неопределенные коэффициенты, которые на каждом временном шаге находятся методом Рунге;  $t$  – некоторый фиксированный момент временной дискретизации схемы РКМ или дискретизации по времени для выдачи результатов расчета;  $\{f_n^{(i)}\}$  – системы линейно независимых функций. Здесь в качестве  $\{f_n^{(i)}\}$  использовались степенные полиномы.

Нормализованное до первого порядка уравнение границы области  $\Omega$  имеет вид:

$$\omega(x) = [(F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 (F_3 \wedge_0 F_4)] \wedge_0 (F_5 \wedge_0 F_6) = 0,$$

где  $\wedge_0$  – символ R-конъюнкции [10]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2};$$

$$F_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2); \quad F_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2);$$

$$F_l' = F_l [F_l^2 + (\text{grad} F_l)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (l = 3, 4, 5, 6);$$

$$F_3 = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 - a)^2}{b_2^2} - 1; \quad F_4 = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 + a)^2}{b_2^2} - 1;$$

$$F_5 = \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{(x_1 - a)^2}{b_2^2} - 1; \quad F_6 = \frac{x_2^2}{b_1^2} + \frac{(x_1 + a)^2}{b_2^2} - 1;$$

$$b_1 = b; \quad b_2 = a - c.$$

Интегрирование по области  $\Omega$ , при вычислении элементов системы Ритца, и по толщине, при вычислении «фиктивных» сил выполнялось с помощью квадратурных формул Гаусса различной степени точности.

Установлено, что стабилизация приближенного решения достигается при следующих значениях степеней полиномов:  $P_1 = 16$ ,  $P_2 = 8$ ,  $P_3 = P_4 = 13$  и общем числе узлов интегрирования по четверти области, равном 980. Количество узлов интегрирования по толщине равнялось 14. Заданная погрешность решения задачи Коши методом Рунге-Кутты-Мерсона  $\delta = 10^{-5}$ .

Были найдены времена до разрушения:  $t_{*1} = 17011$  ч, при действии на оболочку наружного давления ( $q_z = 16,0$  МПа) и  $t_{*2} = 39973$  ч, при действии на оболочку внутреннего давления ( $q_z = -16,0$  МПа). Время до разрушения находилось с точностью до величины последнего шага ( $\Delta t_{\text{last step}} \approx 8 \div 16$  ч). В обоих случаях разрушение начинается в центре на внутренней поверхности оболочки, где интенсивность напряжений максимальна. Время до разрушения существенно зависит от направления приложенной нагрузки. При действии на оболочку внутреннего давления в ней преобладают сжимающие напряжения. Процесс ползучести для данного материала при сжатии идет медленнее и, соответственно, время до разрушения оказывается в 2,35 раза большим, чем в случае наружного давления той же интенсивности.

На рис. 2–4 показано изменение во времени абсолютных значений прогибов, интенсивности напряжений и параметра повреждаемости на внутренней поверхности в центре оболочки. Кривые 1, 2 соответствуют данным, полученным для  $q_z = 16$  МПа и  $q_z = -16$  МПа. Как видно из рис. 3, для напряжений имеем разную качественную картину их изменения. Для оболочки под внутренним давлением в начальные моменты времени происходит рост интенсивности напряжений, вследствие чего процесс ползучести интенсифицируется, и только затем начинается релаксация напряжений. Для оболочки нагруженной внешним давлением снижение уровня напряжений наблюдается в течение всего процесса ползучести, вплоть до окончания времени скрытого разрушения.

Также был выполнен расчет оболочки под наружным давлением на базе «классических» определяющих соотношений, основанных только на экспериментальных данных при растяжении. Время до разрушения составило  $t_{*кн} = 1315$  ч, что более чем на порядок отличается от  $t_{*1}$  и  $t_{*2}$ .

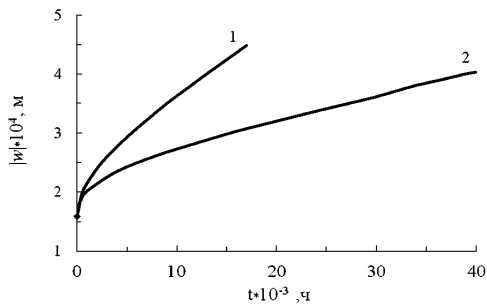


Рисунок 2 – Прогнби в центре оболочки

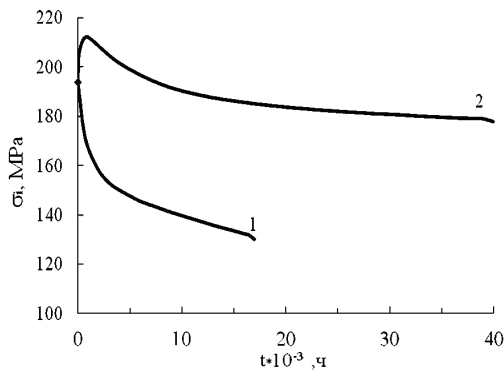


Рисунок 3 – Интенсивность напряжений в центре на внутренней поверхности оболочки

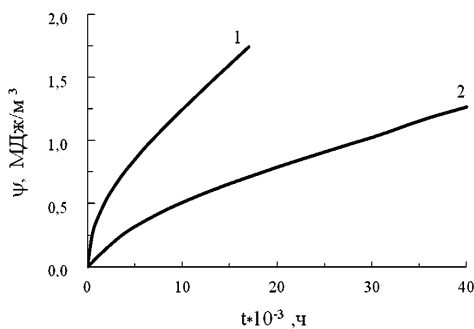


Рисунок 4 – Повреждаемость в центре на внутренней поверхности оболочки

**4. Выводы.** Из представленных результатов можно сделать вывод, что абсолютные величины прогибов, напряжений, уровень повреждаемости и время до разрушения существенно зависят от знака поперечной внешней нагрузки, при одной и той же ее интенсивности. «Классические» определяющие соотношения не учитывают реальные свойства материала и, их использование вносит существенные погрешности при исследовании ползучести и повреждаемости пологих оболочек из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения.

**Список литературы:** 1. Бурлаков А.В. Длительная прочность оболочек / А.В. Бурлаков, Г.И. Львов., О.К. Морачковский. – Х.: Вища шк., 1981. – 104 с. 2. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный и др. –

К.: Наук. думка, 1984. – 264 с. 3. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала / В.С. Гудрамович и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 256 с. 4. Золочевский А.А. Об учете разноспротивляемости материалов растяжению и сжатию в задачах ползучести оболочек / А.А. Золочевский // Динамика и прочность машин. – 1980. – Вып. 32. – С. 8-13. 5. Золочевский А.А. Исследование ползучести тороидальной оболочки с учетом анизотропии и разноспротивляемости растяжению-сжатию / А.А. Золочевский, О.К. Морачковский // Изв. вузов. Машиностроение. – 1984. – № 5. – С. 20-23. 6. Золочевский А.А. Двумерные краевые задачи ползучести оболочек, разноспротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Золочевский // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1988. – № 1. – С. 29-33. 7. Золочевский А.А. Ползучесть пологих оболочек сложной формы в плане из материалов с усложненными свойствами / А.А. Золочевский, С.Н. Скелпус // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т.5, № 3. – С. 35-42. 8. Скелпус С.Н. Исследование ползучести гибких пологих оболочек из материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии / С.Н. Скелпус // Вестник НТУ «ХПИ». – 2005. – 22. – С. 29-36. 9. Золочевский А.А. Нелинейная механика деформируемого твердого тела / А.А. Золочевский, А.Н. Скелпус, С.Н. Скелпус. – Х.: «Бізнес Інвестор Групп», 2011. – 720 с. 10. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 11. Рубанов В.В. Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии: Дис...канд. физ.-мат. наук / В.В. Рубанов. – Новосибирск, 1986. – 147 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Burlakov A.V., Lvov G.I., Morachkovskij O.K. Dlitel'naja prochnost' obolochek. Kharkiv: Visha shk., 1981, 104 p. 2. Polzuchest' elementov mashinostroitel'nih konstrukcij. A.N. Podgornij i dr. Kyiv: Nauk. dumka, 1984, 264 p. 3. Predel'nie sostojanija obolochek pri sloznom nagruzenii i polzuchesti materiala. V.S. Gudramovich i dr. Kyiv: Nauk. dumka, 1984, 256 p. 4. Zolochevskij, A.A. Ob uchete raznosoprotivliaemosti materialov rastiageniju i sgtiju v zadachah polzuchesti obolochek. Dinamika i prochnost' mashin. Vol. 32, 1980, pp. 8-13. 5. Zolochevskij, A.A., Morachkovskij, O.K. Issledovanie polzuchesti toroidal'noj obolochki s uchetom anizotropii i raznosoprotivliaemosti rastiageniju-sgtiju. Izv. Vuzov. Mashinostromie. No. 5. 1984. pp. 20-23. 6. Zolochevskij A.A. Dvumernie kraevie zadachi polzuchesti obolochek, raznosoprotivliajushihsia rastiageniju i sgtiju. Izv. Vuzov. Mashinostromie. No 1, 1988, pp. 29-33. 7. Zolochevskij A.A., Sklepus S.N. Polzuchest' pologih obolochek sloznoj formi iz materialov s usloznenimi svojstvami. Probl. Mashinostromie. No 3, 2002, pp. 35-42. 8. Sklepus S.N. Issledovanie polzuchesti gibkih pologih obolochek iz materialov s razlichnimi svojstvami pri rastiagenii i sgtii. Vestnik NTU "HPI", 22, 2005, pp. 29-36. 9. Zolochevskij A.A., Sklepus A.N., Sklepus S.N. Nelinejnaja mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Kharkiv: Biznes Investor Grupp, 2011, 720 p. 10. Rvachev V.L. Teorija R-funkcij i nekotorie ee prilozhenija. Kyiv: Nauk. dumka, 1982, 552 p. 11. Rubanov V.V. Eksperimental'noe obosnovanie opredelajushih uravnenij polzuchesti metallicheskih materialov s razlichnimi svojstvami pri rastiagenii i sgtatii: Diss...kand. fiz.-mat. nauk. Novosibirsk, 1986, 147 p.

Поступила (received) 03.07.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Скелпус Сергей Николаевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков, тел. (050) 522-49-01 (моб.), (0572) 67-54-95 (д.), e-mail: ssklepus@rambler.ru

**Sklepus Sergej Nikolaevich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Officer, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv, tel.: (050) 522-49-01, (0572) 67-54-95, e-mail: ssklepus@rambler.ru



УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

С.А. ШЕВЧЕНКО, А.Л. ГРИГОРЬЕВ, М.С. СТЕПАНОВ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯТОРА ДАВЛЕНИЯ С ПНЕВМАТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ КОЛЕБАНИЙ СТОЛБОВ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДАХ

Составлена дискретно-континуальная нелинейная модель и выведено трансцендентное характеристическое уравнение для исследования свободных колебаний регулятора пневмосистемы запуска ракетного двигателя. Разработан метод нахождения границы динамической устойчивости системы и критерий устойчивости ее предельного цикла. Описан порядок настройки системы на автоколебания малой амплитуды.

**Ключевые слова:** пневмосистема, дискретно-континуальная модель, гармоническая линеаризация, механический импеданс, динамическая устойчивость, автоколебания.

**Введение и постановка задачи.** Исследуемый регулятор давления устанавливается в пневмосистеме запуска ЖРД третьей ступени ракеты-носителя (РН) и предназначен для стабилизации параметров рабочего тела (сжатого гелия), посредством которого осуществляется раскрутка турбонасосного агрегата при включении двигателя. Подробное описание особенностей работы пневмосистемы и ее математических моделей приведены в статьях [1-4]. Расчетная схема пневмосистемы показана на рис. 1; в ней трубопроводы и пружины рассматриваются как континуальные подсистемы с распределенными параметрами, а полости, клапаны и поршни – как подсистемы с сосредоточенными параметрами. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных, полученных при стендовых и огневых испытаниях опытного образца такой системы на двигателе РД861К, подтвердило правильность основных принципов, использованных при моделировании, и открыло дорогу для использования разработанного программного комплекса при решении задач проектирования новых устройств подобного назначения.

мы с распределенными параметрами, а полости, клапаны и поршни – как подсистемы с сосредоточенными параметрами. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных, полученных при стендовых и огневых испытаниях опытного образца такой системы на двигателе РД861К, подтвердило правильность основных принципов, использованных при моделировании, и открыло дорогу для использования разработанного программного комплекса при решении задач проектирования новых устройств подобного назначения.

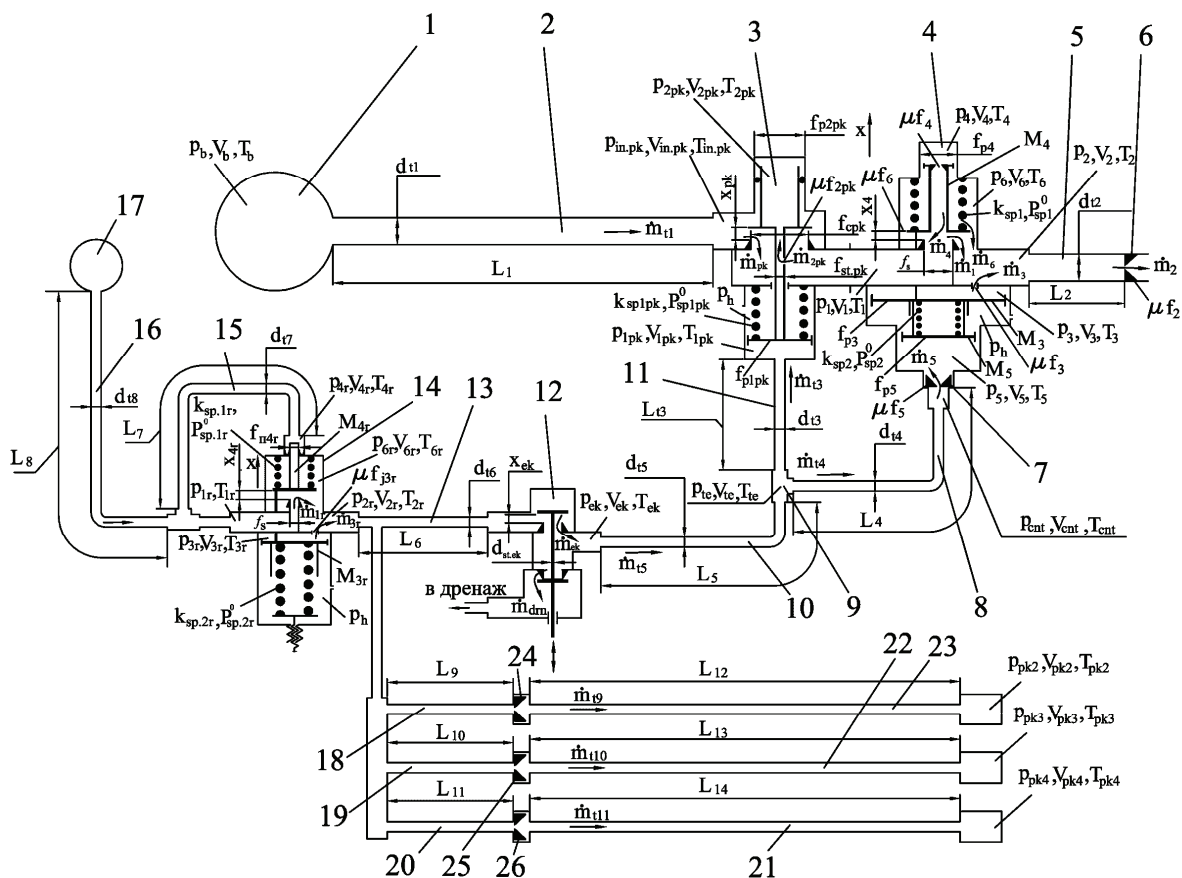


Рисунок 1 – Расчетная схема пневмосистемы запуска ЖРД: 1, 17 – шаробаллоны; 2, 5 – входной и выходной трубопроводы; 3 – пневмоклапан; 4, 14 – регуляторы давления; 6, 7, 24–26 – жиклер; 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 18–23 – трубопроводы линии управления; 9 – тройник; 12 – электропневмоклапан.

Одной из важнейших задач, которую приходится решать при создании новой пневмосистемы, является обеспечение динамической устойчивости регулятора давления газа. Решению этой проблемы посвящено множество работ (напр., [5-7]), но в них не учитываются связанные колебания столбов газа во входном и выходном трубопроводах, а также в многочисленных трубопроводах системы управления. В то же время, как свидетельствуют результаты расчетного исследования (рис.2), а также опыт длительной доводки опытного образца,

– эта пневмосистема работает на пределе дина-

мической устойчивости;

– изменение длин трубопроводов влияет на устойчивость ее работы.

Использование программного комплекса [1-4] позволяет в десятки раз сократить затраты на разработку новой пневмосистемы; в том числе, с его помощью можно проверить спроектированный образец на динамическую устойчивость. Но, к сожалению, решаемые дифференциальные уравнения являются нелинейными и сложными, что препятствует использованию стандартных для теории регулирования методов проверки линейной системы на устойчивость.

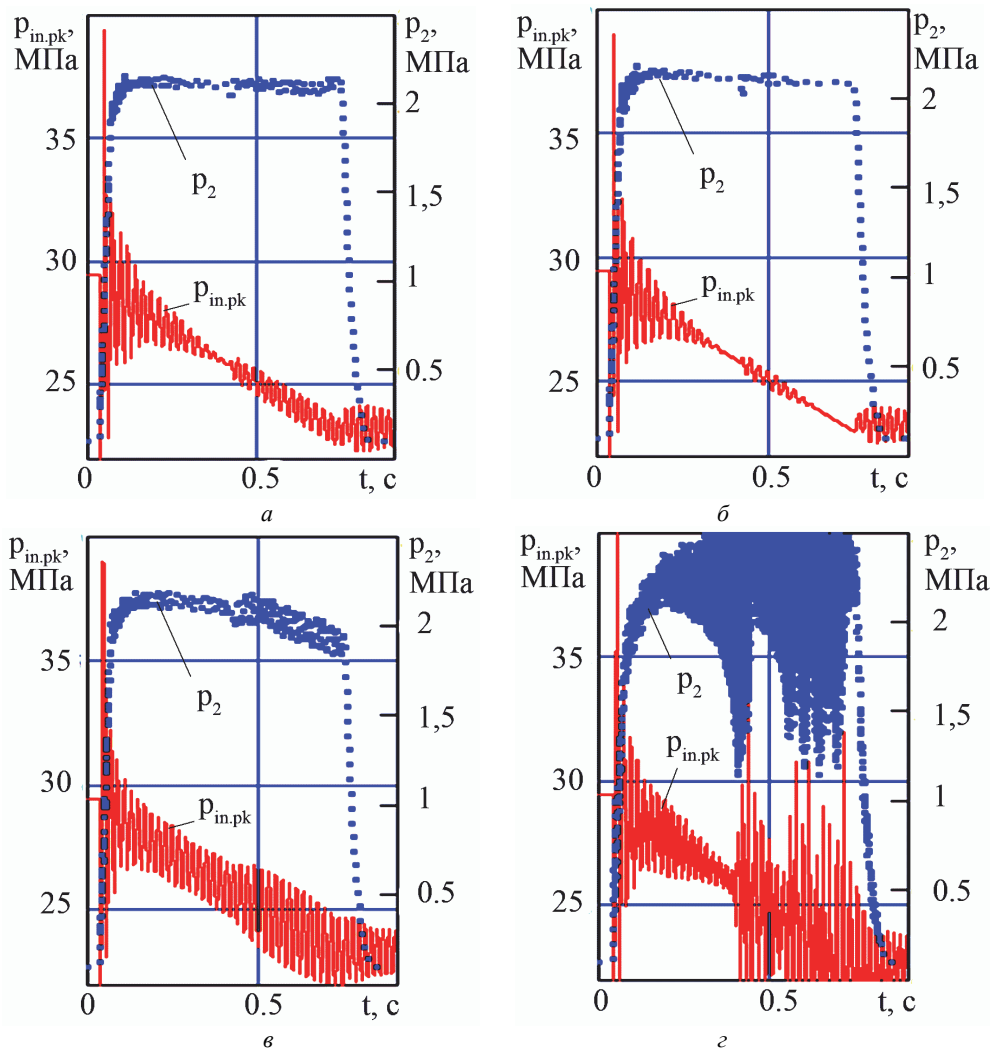


Рисунок 2 – Влияние длин трубопроводов на колебания давления газа до и после регулятора:  
 а –  $L_1 = 4,3$  м;  $L_2 = 1,9$  м;  $L_3 = 1,7$  м; б – изменено  $L_1 = 5,3$  м; в –  $L_2 = 2,4$  м; г –  $L_3 = 2,7$  м

Для устранения этого препятствия нелинейную систему уравнений линеаризуют [8,9]; при этом получают условие устойчивости для колебаний малой амплитуды, где, напр., размах колебаний клапана не превышает 10% от его подъема. Заметим, что такие колебания, даже если они не затухают со временем, здесь не опасны; более того, они желательны, поскольку устраняют трение покоя в уплотнительных манжетах [10]. Поэтому вывод критерия устойчивости для малых колебаний не актуален.

Однако, как следует из экспериментальных дан-

ных, после своего открытия клапан регулятора этой пневмосистемы имеет значительную амплитуду колебаний, составляющую 15-20% от его подъема. Кроме того, далее будет показано, что устойчивость регулятора зависит от амплитуды колебаний клапана. Поэтому линеаризацию следует проводить с учетом амплитуды колебаний как дополнительного нелинейного фактора.

Целью работы является получение аналитических и графоаналитических зависимостей между параметрами пневмосистемы, обеспечивающих ее ус-

тойчивость при больших амплитудах колебаний. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

– линеаризовать формулы Сен-Венана с учетом установившихся колебаний клапана, имеющих большую амплитуду, и вывести формулы для колебаний расхода газа через дроссели и клапанную щель регулятора;

– получить аналитические зависимости амплитуды колебаний давлений газа во входной, выходной и управляющей полостях регулятора от амплитуды и частоты колебаний скорости клапана (то есть найти *удельный механический импеданс* для входного, выходного и управляющего трубопроводов);

– вывести уравнение для частот свободных колебаний пневмосистемы, имеющих известную амплитуду, и сформулировать достаточные условия для обеспечения устойчивости при больших амплитудах,

– указать условия выбора параметров, приводящие к автоколебаниям малой амплитуды.

Подобные задачи рассматривались в научной литературе, в частности, в трудах *В.А. Бесекерского* и *Е.П. Попова* [8], *Б.Ф. Гликмана* [9], *Б.В. Булгакова* [11], ставших классическими. Метод гармонической линеаризации, описанный в давней работе *Л.С. Гольдфарба* [12], в дальнейшем получил широкую известность и часто используется для исследования колебаний при нелинейном трении. Механический импеданс для исследования трубопроводных систем был введен в науку *Б.Ф. Гликманом, проф. В.А. Бесекерским* разрабатывались методы динамического исследования континуальных систем, для которых выводилось трансцендентное характеристическое уравнение. Однако для исследования сложной пневмосистемы, показанной на рис.1, при применении известных результатов потребовалась, как показала практика, их существенная доработка.

**Уравнение движения клапана и его аналог для комплексных амплитуд колебаний.** В конструкции регулятора 4 (рис. 1) площадь тарелки по запорному контуру близка к площади штока  $f_4$  и отличается от нее на малую величину  $\Delta f_4$  дифференциальной площадки клапана, посредством которой частично компенсируется влияние отрывающей газодинамической силы. Поэтому в отношении основного перепада давления  $p_1 - p_2$ , изменяющегося за время многократных включений пневмосистемы в широких пределах от 35 МПа до 6 МПа, этот клапан практически разгружен. Уравнение движения клапана регулятора 4 (см. рис.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} m_{\text{кл}} \ddot{h} = & f_5 \cdot (p_5 - p_0) - f_3 \cdot (p_3 - p_0) - \\ & -(f_4 - \Delta f_4) \cdot (p_4 - p_1) - \Delta f_4 \cdot (p_4 - p_6) - \\ & - f_6 \cdot (p_6 - p_2) - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h) \cdot (p_1 - p_2) - \\ & - F_{\text{тр.м}}(\dot{h}) - z_{\text{кл}}(h + h_{\text{кл.0}}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_{\text{кл}} = m_4 + (1/3)m_{\text{пр.кл}}$  – приведенная масса клапана и движущихся витков его пружины;  $z_{\text{кл}}$ ,  $h_{\text{кл.0}}$  – коэффициент жесткости и предварительная деформация этой пружины;  $h$  – совместное перемещение  $h_4$

клапана и его поршней;  $f_3$ ,  $f_5$  – площади поршней регулирования и управления;  $f_6$  – площадь поперечного сечения полости пружины;  $K_{\text{г.д}}$ ,  $\mu f_{\text{кл}}$  – коэффициент газодинамической силы [1] и эффективное проходное сечение клапана;  $F_{\text{тр.м}}$  – суммарное трение в трех манжетах регулятора, определяемое формулами работы [10],

$$F_{\text{тр.м}} = 0,3N_{\text{пр.с}} \chi(v) \text{sign}(\dot{h}), \quad v = |\dot{h}|, \quad (2)$$

$N_{\text{пр.с}}$  – прижимающая сила;  $\chi = \chi(v)$  – коэффициент трения, зависящий от скорости скольжения (рис. 3, а);  $p_0$  – давление газа за поршнями (в двигательном отсеке РН или в лабораторном боксе).

Если в дифференциальных уравнениях [1], описывающих работу пневмосистемы, обнулить производные по времени, то получим параметры установившегося режима подачи газа – подъем клапана  $h^*$ , давления  $p_j^*$ , силу трения  $F_{\text{тр.м}}^*$  и др. Будем искать перемещение клапана и изменения давлений и сил в форме незатухающих гармонических колебаний с комплексной частотой  $\lambda$ :

$$h = h^* + \hat{h} \exp(\lambda t); \quad p_j = p_j^* + \hat{p}_j \exp(\lambda t);$$

$$F_{\text{тр.м}} = F_{\text{тр.м}}^* + \hat{F}_{\text{тр.м}} \exp(\lambda t),$$

где  $\lambda = i \cdot \omega$ ;  $i$  – это мнимая единица;  $\omega$  – круговая частота колебаний;  $\hat{h}$ ,  $\hat{p}_j$ ,  $\hat{F}_{\text{тр.м}}$  – вообще говоря, комплексные числа. Тогда подобно (1) получим аналогичное уравнение для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} m_{\text{кл}} \lambda^2 \hat{h} = & f_5 \hat{p}_5 - f_3 \hat{p}_3 - (f_4 - \Delta f_4) (\hat{p}_4 - \hat{p}_1) - \\ & - \Delta f_4 (\hat{p}_4 - \hat{p}_6) - f_6 (\hat{p}_6 - \hat{p}_2) - \\ & - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h^*) (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \\ & - K_{\text{г.д}} \mu f'_{\text{кл}}(h^*) (p_1^* - p_2^*) \hat{h} - \hat{F}_{\text{тр.м}} - z_{\text{кл}} \hat{h}, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрихом обозначена производная  $\mu f_{\text{кл}}(h)/dh$ .

Заметим, что уравнение (3), так же как и (1), содержит много неизвестных и не является замкнутым, но это положение можно исправить, если указать формулы, связывающие амплитуды колебания давлений с комплексной амплитудой  $\hat{v}$  и комплексной частотой  $\lambda$  колебаний скорости клапана; такие зависимости называют *удельными механическими импедансами* [9]. Мы получим эти зависимости далее, но начнем с анализа колебаний сухого трения в манжетах.

**Гармоническая линеаризация сухого трения в манжетах.** В работе [13] описан метод гармонической линеаризации для анализа колебаний расхода газа через дроссель при малых перепадах давления

$$\Delta p(\varphi) = \Delta \bar{p} \sin \varphi, \quad \varphi = \omega \cdot t.$$

Используется нелинейная расходная характеристика Бернулли вида

$$G(\varphi) = \mu f \sqrt{2\rho \Delta \bar{p}} |\sin \varphi| \text{sign}(\sin \varphi),$$

где  $\rho$  – это плотность газа; характеристика преобразуется к виду:

$$G(\varphi) = [\mu f \sqrt{2\rho \Delta \bar{p}}] K(\varphi),$$

после чего переменный множитель  $K(\varphi)$  заменяется его коэффициентом Фурье

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi K(\varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin^{3/2} \varphi d\varphi \approx 10/9.$$

В результате получили зависимость для ампли-

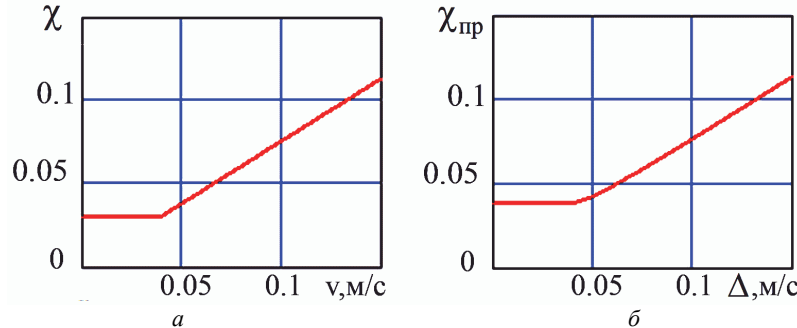


Рисунок 3 – Зависимость коэффициентов трения  $\chi$  и  $\chi_{пр}$ :  
 а – от скорости скольжения  $v$  фторопласта-4, б – от амплитуды колебаний  $\Delta$  скорости клапана

Аналогичную процедуру применим к формуле (2), в которой зависимость коэффициента трения от скорости скольжения аппроксимируем формулой

$$\chi(v) = \begin{cases} \chi_0, & v \leq v_*; \\ \chi_0 \cdot v / v_*, & v > v_*, \end{cases}$$

где  $v_* \approx 0,04$  м/с; коэффициент  $\chi_0 \approx 0,03$  (см. рис. 3, а).

Если амплитуда  $\Delta$  колебаний скорости мала, то есть  $\Delta \leq v_*$ , то трение в манжетах является сухим, и коэффициент Фурье

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \chi_0 \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} \cdot \chi_0,$$

откуда коэффициент приведения

$$k_{пр,м}(\Delta) = 4 / \pi \approx 1,27.$$

Для больших амплитуд трение в манжете является смешанным – при малых скоростях скольжения сухим, а при больших – сухим и вязким одновременно. При нахождении коэффициента Фурье воспользуемся симметрией графика функции  $y(\varphi) = \chi(v \cdot \sin \varphi)$  относительно вертикальной оси  $\varphi = \pi/2$  и получим:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \chi(v \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4}{\pi} \chi_0 + \frac{4}{\pi} \int_{\psi}^{\pi/2} \chi_0 (v / v_*) \sin^2 \varphi d\varphi, \\ &\quad \sin \psi = v_* / v. \end{aligned}$$

Вычисляя этот интеграл, находим искомый коэффициент приведения

$$k_{пр,м}(\Delta) = 4 / \pi + (2 / \pi) \times$$

$$\times [(\Delta / v_*) \arccos(v_* / \Delta) - \sqrt{1 - (v_* / \Delta)^2}].$$

Характер изменения приведенного коэффициента трения  $\chi_{пр} = k_{пр,м} \chi_0$  в рабочем диапазоне скоростей клапана  $\Delta < v_M = 0,15$  м/с показан на рис. 3, б.

Следовательно,

$$\hat{F}_{тр,м} = 0.3 N_{пр,с} \chi_0 k_{пр,м}(\Delta). \quad (4)$$

туд колебаний

$$\hat{G} = k_{пр,др} \mu f \sqrt{2\rho \Delta \dot{p}},$$

где коэффициент приведения  $k_{пр,др} = 1,11$ .

**Линеаризация пульсирующего расхода при критических перепадах давления.** В клапанной щели регулятора, а также в выходном дросселе исследуемой пневмосистемы наблюдается критический режим течения сжатого гелия. Расход газа вычисляется по уточненной формуле Сен-Венана [4], в которой учтен эффект Джоуля-Томсона:

$$G = \frac{\mu f p_j}{\sqrt{RT_j}} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} (1 - 0,24 b_2 p_j / T_j),$$

где  $p_j, T_j$  – давление и температура газа перед дросселем;  $R$  – газовая постоянная;  $b_2 = 1,378$  [К/МПа] – вириальный коэффициент в уравнении состояния реального газа Абеля.

Для анализа колебаний используется адиабатическая модель, поэтому колебания давления и температуры имеют связанные амплитуды:

$$p_j = p_j^* + \hat{p}_j \sin(\omega t);$$

$$T_j = T_j^* (p_j / p_j^*)^{1/k} \approx T_j^* (1 + (1/k)(\hat{p}_j / p_j^*) \sin(\omega t)),$$

где  $k$  – это показатель адиабаты; звездочка здесь и далее обозначает параметры установившегося режима течения газа.

Следовательно,

$$\frac{p_j}{\sqrt{T_j}} \approx \frac{p_j^*}{\sqrt{T_j^*}} \cdot (1 + \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{p_j^*} \cdot \sin(\omega t));$$

$$\frac{p_j^2}{(T_j)^{3/2}} \approx \frac{(p_j^*)^2}{(T_j^*)^{3/2}} \cdot (1 + \frac{k+3}{2k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{p_j^*} \cdot \sin(\omega t)).$$

Подставим эти значения в формулу для расхода и получим:

$$G \approx G^* [1 + (k+1)/(2k) \cdot (\hat{p}_j / p_j^*) \cdot \sin(\omega t)] -$$

$$- \frac{0,24 b_2}{k} \cdot \frac{\hat{p}_j}{T_j^*} \cdot \sin(\omega t) \frac{\mu f p_j^*}{\sqrt{RT_j^*}} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

Второе слагаемое мало, и им можно пренебречь. Нашли искомую формулу для амплитуды пульсации

расхода

$$\hat{G} = k_{kr} (\hat{p}_j / p_j^*) G^*,$$

где  $k_{kr} = (k+1)/(2k) \approx 0,8$ .

Полученный результат был проверен при использовании метода гармонической линеаризации; при условии  $\hat{p}_j / p_j^* \leq 0,2$  коэффициент приведения  $k_{kr}$  отклоняется от указанного выше значения не более чем на 1,5%. То есть этим результатом можно пользоваться и для анализа больших амплитуд колебаний.

Заметим, что при исследовании колебаний параметров газа в трубопроводах и полостях пневмосистемы используем акустическое приближение [14], в рамках которого плотность  $\rho$  и скорость звука  $a$  считаются постоянными величинами:  $\rho_j = \rho_j^*$  и  $a_j = a_j^*$ .

Поэтому для амплитуд колебаний  $\hat{Q}$  объемной скорости газа, прошедшего через дроссель, получаем формулы, аналогичные формулам для расхода массы:

$$\hat{Q} = \kappa_{пр,др} \mu f \sqrt{2/\rho^*} \Delta \hat{p}; \quad \hat{Q} = k_{kr} (\hat{p}_j / p_j^*) Q^*. \quad (5)$$

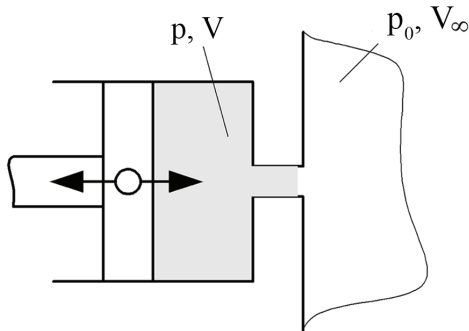


Рисунок 4 – Схема полости с жиклером

**Механический импеданс при колебаниях поршня в полости с жиклером.** Схема исследуемой подсистемы показана на рис. 4, на рис.1 ей соответствуют камера над штоком клапана, полость пружины, камеры регулирования и управления регулятора 4.

Случай, когда сжимаемостью газа в полости можно пренебречь, изучен в [13]; здесь исследуется общий случай. Как и в [13], изменением плотности газа  $\rho$  при дросселировании пренебрежем, а для расчета мгновенной объемной скорости  $Q$  пульсирующего течения газа через дроссель используем результат гармонической линеаризации формулы Бернулли

$$Q = \kappa_{пр,др} \mu f \sqrt{2/(\rho |\Delta \hat{p}|)} \Delta p,$$

где  $\kappa_{пр,др} = 1,11$ ;  $\Delta \hat{p}$  – амплитуда изменения перепада давления  $\Delta p$ .

В начале этой части исследования будем считать, что полость за дросселем имеет большой объем и постоянное давление газа  $p_0$ , тогда  $\Delta p = p - p_0$ .

Запишем уравнение сжимаемости газа в полости, предполагая этот процесс адиабатическим:

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp}{dt} = f_n C_n - Q,$$

то есть

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{d\Delta p}{dt} = f_n C_n - Z \cdot \Delta p,$$

где  $a$  – это скорость звука в газе,  $V$  – объем полости;  $f_n$  – площадь поршня,

$$Z = \mu f_{пр} \sqrt{2/(\rho |\Delta \hat{p}|)}, \quad \mu f_{пр} = \kappa_{пр,др} \mu f,$$

и для нахождения гармонического решения этого уравнения воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$C_n = \Delta \exp(\lambda t); \quad \Delta p = \Delta \hat{p} \exp(\lambda t); \quad \lambda = i \omega,$$

причем будем считать, что амплитуда  $\Delta > 0$ , а  $\Delta \hat{p}$  – это комплексное число.

Подстановка и сокращение экспонент дает равенство

$$(\lambda V / (a^2 \rho) + Z) \Delta \hat{p} = f_n \Delta, \quad (6)$$

откуда

$$((\omega \cdot V / (a^2 \rho))^2 + Z^2) \cdot |\Delta \hat{p}|^2 = f_n^2 \Delta^2.$$

Учтем формулу для коэффициента  $Z$  и получим квадратное уравнение для амплитуды колебаний давления:

$$(\omega \cdot V / (a^2 \rho))^2 |\Delta \hat{p}|^2 + (\mu f_{пр})^2 (2/\rho) |\Delta \hat{p}| = f_n^2 \Delta^2.$$

Его решение имеет вид:

$$|\Delta \hat{p}| = \rho (f_n / \mu f_{пр})^2 \Delta^2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2}),$$

где  $\beta$  – это коэффициент сдвига фазы,

$$\beta = f_n \Delta \omega V / (a^2 \mu f_{пр}^2).$$

Если коэффициент  $\beta = 0$ , то есть  $V = 0$ , то колебания давления будут иметь ту же фазу, что и колебания скорости, здесь импеданс  $Z$  положительный, пропорциональный амплитуде колебаний скорости и не зависящий от частоты:

$$Z = \rho (f_n / \mu f_{пр})^2 \Delta.$$

Это характеристика *квадратичного трения*. В исследуемой пневмосистеме характерные значения коэффициентов сдвига фазы, вычисленные при частотах  $\omega = 600$  1/с и скоростях  $\Delta = 0,05$  м/с, составляют:

- для жиклера  $\mu f_{4,пр}$  верхней камеры –  $\beta = 0,0001$ ;
- для жиклера  $\mu f_{3,пр}$  камеры регулирования –  $\beta = 0,038$ ;
- для жиклера  $\mu f_{5,пр}$  камеры управления –  $\beta = 1,419$ ;
- для дросселирующих пазов в тарели клапана  $\mu f_{6,пр}$  полости пружины –  $\beta = 0,002$ .

Как видим, в трех случаях перепад давления между полостями определяется квадратичным трением, и в уравнении (3) можно принять, что

$$\hat{p}_4 = \hat{p}_1 + \rho_1^* \left( \frac{f_4}{\mu f_{4,пр}} \right)^2 \Delta^2; \quad \hat{p}_3 = \hat{p}_2 + \rho_2^* \left( \frac{f_3}{\mu f_{3,пр}} \right)^2 \Delta^2;$$

$$\hat{p}_6 = \hat{p}_2 + \rho_2^* \left( \frac{f_6}{\mu f_{6,пр}} \right)^2 \Delta^2.$$

После чего это уравнение упростится и с учетом полученных выше результатов примет вид:

$$m_{\text{кл}} \lambda^2 \ddot{h} + (\chi_{\text{кв}} \Delta + \chi_{\text{м}} / \Delta) \lambda \dot{h} + (z_{\text{кл}} + z_{\text{г.д}}) \ddot{h} = f_5 \ddot{p}_5 - \Delta f_1 \ddot{p}_1 - (f_3 - \Delta f_1) \ddot{p}_2, \quad (7)$$

где  $\chi_{\text{кв}}$ ,  $\chi_{\text{м}}$  – коэффициенты трения в дросселях и в манжетах,

$$\chi_{\text{кв}} = \rho_1^* f_4^3 / \mu f_{4,\text{пр}}^2 + \rho_2^* f_3^3 / \mu f_{3,\text{пр}}^2 + \rho_2^* f_6^3 / \mu f_{6,\text{пр}}^2; \quad (8)$$

$$\chi_{\text{м}} = 0,3 N_{\text{пр.с}} \chi_0 k_{\text{пр.м}}(\Delta),$$

$z_{\text{г.д}}$  – коэффициент жесткости для газодинамической силы,

$$z_{\text{г.д}} = K_{\text{г.д}} \mu f'_{\text{кл}}(h^*) (p_1^* - p_2^*);$$

площадь  $\Delta f_1 = \Delta f_4 - K_{\text{г.д}} \mu f_{\text{кл}}(h^*)$ .

В камере управления сдвиг фаз является существенным, и вместе с силой квадратичного трения возникает заметная сила упругости. Из равенства (6) найдем комплексную амплитуду колебаний давления

$$\Delta \hat{p} = \frac{f_{\text{п}} \Delta}{(\omega V / (a^2 \rho))^2 + Z^2} \cdot \left( -\frac{\lambda V}{a^2 \rho} + Z \right) = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 Z}{f_{\text{п}} \Delta} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{|\Delta \hat{p}|^2 (\omega^2 V / (a^2 \rho))}{f_{\text{п}} \Delta}.$$

Первое слагаемое правой части отвечает квадратичному трению, а соответствующая компонента давления изменяется в фазе со скоростью поршня:

$$\Delta \hat{p}_{\text{кв}} = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 Z}{f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\left[ \frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \Delta^2}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right]^{3/2} \mu f_{\text{пр}} \sqrt{2 / \rho}}{f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \sqrt{2} \Delta^2}{(1 + \sqrt{1 + \beta^2})^{3/2}}. \quad (9)$$

Второе слагаемое отвечает силе упругости газовой пружины, образующейся между поршнем и жиклером; соответствующая компонента давления изменяется в одной фазе с перемещением поршня:

$$\Delta \hat{p}_{\text{упр}} = \frac{|\Delta \hat{p}|^2 (\omega^2 V / (a^2 \rho))}{\lambda f_{\text{п}} \Delta} = \frac{\rho (f_{\text{п}} / \mu f_{\text{пр}})^2 \Delta \omega \beta}{(1 + \sqrt{1 + \beta^2})^2} \cdot \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (10)$$

В результате пульсации давления представляют в виде суммы

$$\Delta p = \Delta \hat{p}_{\text{кв}} \cos \omega t + \Delta \hat{p}_{\text{упр}} \sin \omega t,$$

где перемещения  $h_{\text{п}}$  и скорости  $C_{\text{п}}$  поршня изменяются по закону

$$h_{\text{п}} = \Delta \sin \omega t / \omega; \quad C_{\text{п}} = \Delta \cos \omega t.$$

**Оптимизация квадратичного трения.** Один из постулатов теории динамической устойчивости гласит, что увеличение трения повышает устойчивость. Далее мы покажем, что этот закон справедлив и для исследуемой системы. Увеличение силы сухого трения в манжетах возможно при их удлинении, что вступает в противоречие с требованием обеспечить минимальную массу и габариты. Вязкое трение, возникающее в тех же манжетах при больших скоростях скольжения, а также в трубопроводах, является следствием соответствующих физических эффектов, и повлиять на величину этой силы непросто. Другое дело – квадратичное трение, которое

возникает при течении газа через дроссели и сильно зависит от диаметра дросселя. Но и здесь при проектировании пневмосистемы многоразового запуска ЖРД возникают ограничения:

- уменьшение площади проходного сечения  $\mu f_4$  и/или  $\mu f_6$  препятствует своевременному заполнению соответствующих полостей сжатым гелием, что увеличивает начальный заброс клапана регулятора и приводит к недопустимо высокой колебательности переходного процесса [15];

- уменьшение площади проходного сечения  $\mu f_3$  замедляет и ослабляет действие отрицательной обратной связи, что снижает устойчивость;

- при выборе площади проходного сечения  $\mu f_5$  необходимо, с одной стороны, отсрочить начало подъема клапана регулятора до начала открытия пневмоклапана, а с другой – не допустить заметного уменьшения крутизны заднего фронта у импульса подачи газа.

Последнее условие предоставляет конструктору некоторую свободу в выборе диаметра  $d_5$  управляющего жиклера. В этом пункте мы найдем значение этого диаметра, обеспечивающее максимум квадратичного трения.

В формулу (9) площадь  $\mu f_{\text{пр}}$  входит непосредственно, а также через коэффициент сдвига фазы  $\beta$ . Приведем формулу (9) к виду:

$$\Delta \hat{p}_{\text{кв}} = \frac{\rho a^2}{2 V \omega} \cdot \beta \cdot [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}.$$

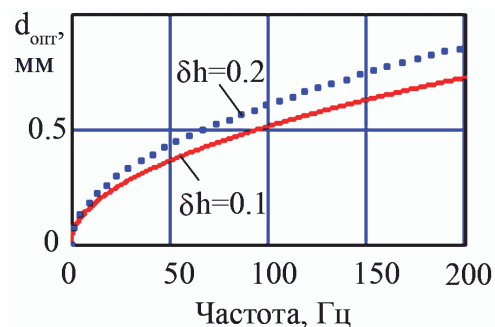


Рисунок 5 – Зависимость оптимального диаметра дросселя  $d_{\text{опт}}$  от частоты и амплитуды колебаний  $\delta h$

Используемая здесь функция

$$\chi_d(\beta) = \beta \cdot [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}$$

имеет максимум при  $\beta = 2\sqrt{2} \approx 2,82$ , что нетрудно установить путем дифференцирования. Учтем, что

$$\beta = f_{\text{п}} \Delta \omega V / (a^2 \mu f_{\text{пр}}^2) \quad \text{и} \quad V = f_{\text{п}} \cdot (h_0 + h_*),$$

где ход клапана  $h_0$  отвечает начальному значению объема полости.

Следовательно,

$$\frac{\mu f_{\text{пр}}^2}{f_{\text{п}}^2} = \frac{\omega \sqrt{(h_0 + h_*) \Delta h}}{2\sqrt{2} a} \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt{\frac{\omega \sqrt{(h_0 + h_*) \Delta h}}{\mu k_{\text{пр.др}} 2\sqrt{2} a}}, \quad (11)$$

где  $d, D$  – диаметры дросселя и поршня;  $\Delta h = \Delta/\omega$  – амплитуда колебаний для перемещений клапана.

Как видим, оптимальное значение диаметра дросселя  $d_{\text{опт}}$  зависит от частоты и относительной амплитуды

$$\delta h = \Delta h / (h_0 + h^*)$$

колебаний (рис. 5), но эта зависимость слабая; кроме того, вблизи максимума сила трения изменяется медленно (рис. 6). Для значений

$$\omega = 600 \text{ 1/c}; \Delta h = 0,15 \text{ мм}; h_0 + h^* = 1,5 \text{ мм}; \mu = 0,7$$

формула (11) приводит к соотношению  $d/D = 1/60$ , а диапазон оптимального выбора составляет

$$1/80 < d/D < 1/40.$$

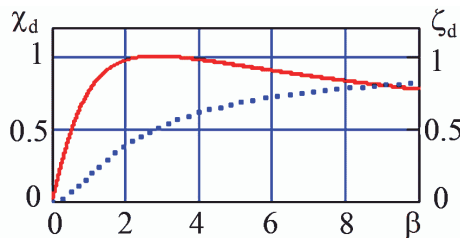


Рисунок 6 – Характеристики зависимости сил трения  $\chi_d$  и упругости  $\zeta_d$  в полости управления от коэффициента  $\beta$

Для управляющей полости пневмосистемы имеем  $d_5/D_5 = 1/45$ , то есть это соотношение обеспечивает предельно большое квадратичное трение. Для верхней камеры  $d_4/D_4 = 1/4$ , для полости регулирования  $d_3/D_3 = 1/20$ , и эти соотношения, по указанной выше причине, далеки от оптимальных значений.

Что касается упругого давления  $\Delta \bar{p}_{\text{упр}}$ , формула (10), то по мере уменьшения диаметра жиклера оно монотонно возрастает вместе с функцией

$$\zeta_d(\beta) = (\beta / (1 + \sqrt{1 + \beta^2}))^2,$$

но имеет очевидный предел, который отвечает модулю сжимаемости газа в полости и составляет

$$\Delta \bar{p}_{\text{упр,м}} = f_{\text{п}} a^2 \rho \Delta h / V;$$

с практической точки зрения предел достигается при значениях  $\beta > 4$  (рис. 6).

**Импеданс полости управления.** Компоненты (9) и (10) комплексного импеданса

$$\Psi_5(\lambda, \Delta) = \Delta \bar{p}_{\text{кв}} + \Delta \bar{p}_{\text{упр}} / \lambda$$

камеры управления пропорциональны функциям  $\chi_d(\beta)$ ,  $\zeta_d(\beta)$  и зависят от частоты и амплитуды колебаний, как это показано выше. Но ограничиться использованием этих зависимостей в уравнении (7) не удастся, поскольку давление за управляющим жиклером является переменным; кроме того, сжимаемость газа в этой камере влияет на амплитуду пульсации расхода в жиклере, что необходимо учесть при расчете импеданса трубопровода управления.

Поэтому мы усложним расчетную схему (рис. 7), объем  $V_0$  будем здесь считать небольшим, а давление  $p_0$  – переменным. Кроме того, учтем, что комплексные амплитуды пульсации давления  $\hat{p}_0$  и скорости  $\hat{u}_0$

газа в конечном сечении трубопровода связаны зависимостью

$$\hat{p}_0 = \Psi_{\text{cnt}}(\lambda) \hat{u}_0, \tag{12}$$

где  $\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)$  – импеданс трубопровода, который в этой задаче считается известной функцией (он получен далее).

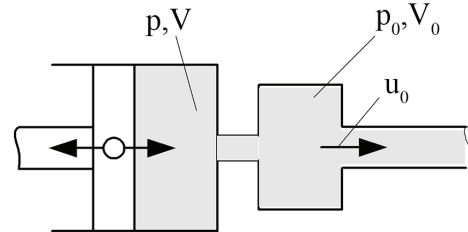


Рисунок 7 – Схема управляющей полости

Запишем уравнения сжимаемости для полостей рассматриваемой системы

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp}{dt} = f_{\text{п}} C_{\text{п}} - Q(p - p_0);$$

$$\frac{V_0}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp_0}{dt} = Q \cdot (p - p_0) - f_{\text{тр}} u_0,$$

а также их очевидное следствие

$$\frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{d(p - p_0)}{dt} = f_{\text{п}} C_{\text{п}} - \frac{V}{a^2 \rho} \cdot \frac{dp_0}{dt} - Q(p - p_0), \tag{13}$$

где  $f_{\text{тр}}$  – это площадь поперечного сечения трубопровода.

Уравнение вида (13) мы решали выше, поэтому сразу можем записать равенство для комплексных амплитуд гармонических колебаний

$$\hat{p} - \hat{p}_0 = \Psi_5(\lambda, \Delta) (\Delta - [(\lambda V) / (f_{\text{п}} a^2 \rho)]) \hat{p}_0. \tag{14}$$

Перейдем в уравнениях сжимаемости к комплексным амплитудам:

$$\frac{\lambda V}{a^2 \rho} \cdot \hat{p} = f_{\text{п}} \Delta - \hat{Q}; \quad \frac{\lambda V_0}{a^2 \rho} \cdot \hat{p}_0 = \hat{Q} - f_{\text{тр}} \hat{u}_0, \tag{15}$$

и дополним соотношения (14) и (15) равенством (12).

Пришли к системе 4-ех линейных уравнений для 4-ех неизвестных  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}_0$ ,  $\hat{u}_0$  и  $\hat{Q}$ . Решая эту систему, получаем искомую зависимость

$$\frac{\hat{p}}{\Delta} = \frac{\Psi_5(\lambda, \Delta) \left( \frac{f_{\text{тр}}}{\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)} + \frac{\lambda \cdot V_0}{a^2 \rho} \right) - f_{\text{п}} \left( \frac{\lambda V}{a^2 \rho f_{\text{п}}} \Psi_5(\lambda, \Delta) - 1 \right)}{\frac{f_{\text{тр}}}{\Psi_{\text{cnt}}(\lambda)} + \frac{\lambda V_0}{a^2 \rho} - \left( \frac{\lambda V}{a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) - 1 \right) \cdot \frac{\lambda V}{a^2 \rho}},$$

или

$$\hat{p} = \Psi_5(\lambda, \Delta) \Delta + \frac{\frac{f_{\text{п}}}{f_{\text{тр}}} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda V}{f_{\text{п}} a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) \right)^2 \Psi_{\text{cnt}}(\lambda) \Delta}{1 + \left[ V_0 + V \left( 1 - \frac{\lambda V}{f_{\text{п}} a^2 \rho} \Psi_5(\lambda, \Delta) \right) \right] \cdot \frac{\lambda \Psi_{\text{cnt}}(\lambda)}{f_{\text{тр}} a^2 \rho}}. \tag{16}$$

Таким образом, механический импеданс полости управления включает в себя импеданс управляющего дросселя  $\Psi_5(\lambda, \Delta)$  как отдельное слагаемое; поэтому аналитические зависимости, полученные в предыдущем пункте, остаются актуальными и для общего случая. Что касается второго слагаемого равенства (16), то выделение его компонент аналитическим методом затруднительно, но легко осуществимо при помощи компьютерной программы.

Пусть соответствующий импеданс имеет описание вида  $Z(\lambda, \Delta)$ . Тогда суммы

$$\Psi_{u,кв}(\lambda, \Delta) = 0,5(Z(\lambda, \Delta) + Z(-\lambda, \Delta)) \text{ и}$$

$$\Psi_{u,упр}(\lambda, \Delta) = 0,5(Z(\lambda, \Delta) - Z(-\lambda, \Delta))/\lambda$$

являются аналитическими функциями от величины  $\lambda^2$  (то есть, четными по круговой частоте  $\omega$ ) и представляют трение и упругое сопротивление газовой пружины, расположенной за дросселем управления и вибрирующей с указанной частотой и амплитудой.

Импеданс имеет такую же физическую размерность, как волновое сопротивление  $a\rho$ , и этот множитель присутствует в формулах для импеданса трубопроводов. Поэтому на него можно разделить все импедансы и перейти к безразмерным величинам. Тогда равенство (16) примет вид

$$\frac{\hat{p}}{a\rho} = \Psi_5(\lambda, \Delta) \Delta +$$

$$\frac{f_{пн}}{f_{тр}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{пн} a} \Psi_5(\lambda, \Delta)\right)^2 \Psi_{cnt}(\lambda) \Delta \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{1 + \left[ V_0 + V \left(1 - \frac{\lambda V}{f_{пн} a} \Psi_5(\lambda, \Delta)\right) \right]} \cdot \frac{\lambda \Psi_{cnt}(\lambda)}{f_{тр} a}$$

**Импеданс газовой пружины.** Простейшая расчетная схема блока управления пневмосистемы показана на рис. 8, а. Если для этой схемы дополнительно принять допущение, что объем тупиковой полости  $V_T = 0$ , то мы получим классическую газовую пружину, которую в акустическом приближении рассчитывают по тем же формулам [14], что и цилиндрическую пружину сжатия [16]. В частности, давления в концевых сечениях столба газа представляются в виде следующих бесконечных сумм:

$$p_0(t) = a\rho \left[ u_0(t) + 2K^2 u_0(t-2\tau) + 2K^4 u_0(t-4\tau) + \dots \right];$$

$$p_T(t) = a\rho \left[ 2K u_0(t-\tau) + 2K^3 u_0(t-3\tau) + 2K^5 u_0(t-5\tau) + \dots \right],$$

где  $\tau = L/a$  – запаздывание волны на длине трубопровода  $L$ ;  $K = \exp(-\xi\tau)$  – коэффициент ее затухания.

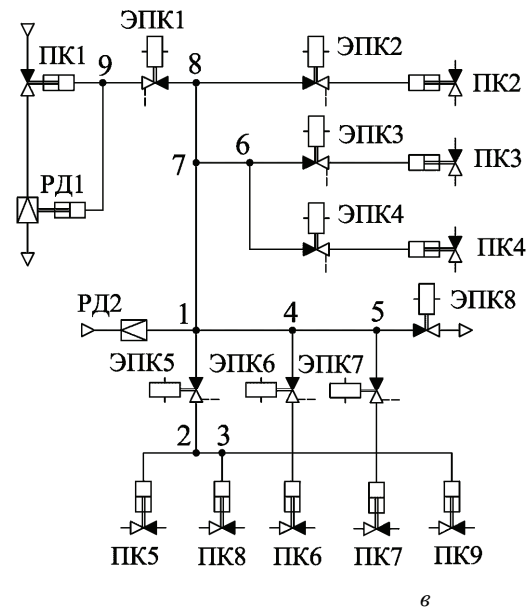
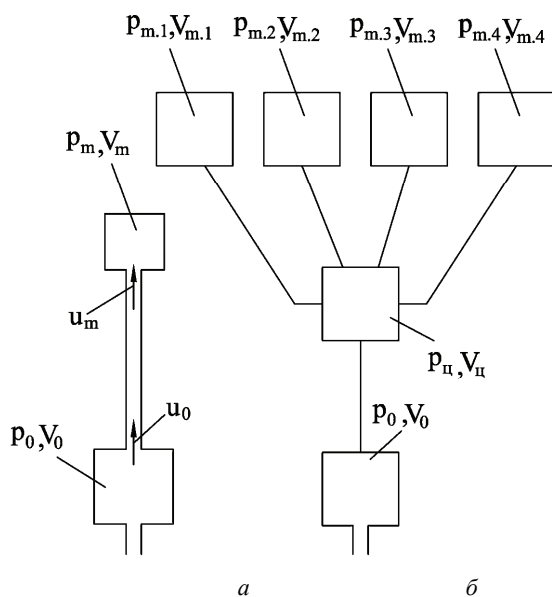


Рисунок 8 – Расчетные схемы пневмоблока управления: а – простейшая; б – разветвленная; в – реальная. На схеме приняты сокращения: ПК – пневмоклапан; ЭПК – электропневмоклапан; РД – регулятор давления

Фактор затухания  $\xi$  для трубопроводов блока управления вычисляется при использовании закономерностей неустановившегося ламинарного режима течения по формуле из работы [17]

$$\xi_{л} = 6\nu_r / d^2 + (8/d)\sqrt{\nu_r / (\pi\tau)},$$

где  $\nu_r$  – кинематическая вязкость газа;  $d$  – диаметр трубопровода.

Фактор  $\xi_{л}$  значительно (на порядок) превосходит аналогичный результат, получающийся по теории

Пуазейля для стационарного течения.

Учтем равенство

$$u_0(t) = \hat{u}_0 \exp(\lambda t)$$

и используем формулу для суммы геометрической прогрессии; тогда эти формулы примут вид:

$$\hat{p}_0 = a\rho \hat{u}_0 \left[ (1 + K^2 \exp(-2\lambda\tau)) / (1 - K^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right]; \quad (18)$$

$$\hat{p}_T = a\rho \hat{u}_0 \left[ 2K \exp(-\lambda\tau) / (1 - K^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right]. \quad (19)$$

В результате несложных преобразований равен-



ства (18) и (19) сворачиваются:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= a \rho c \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau) \hat{u}_0; \\ \hat{p}_{\text{T}} &= a \rho [1 / \operatorname{sh}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)] \hat{u}_0, \end{aligned} \quad (20)$$

но для (18) нам понадобится еще одна форма. Воспользуемся равенством

$$\exp(-2\lambda\tau) = (1 - \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (1 + \operatorname{th}(\lambda\tau))$$

и получим:

$$\hat{p}_0 = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))] \hat{u}_0, \quad (21)$$

где

$$\delta = (1 - K^2) / (1 + K^2).$$

Таким образом, для простейшей схемы управления импеданс имеет вид

$$\Psi_{\text{cnt}}(\lambda) = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))],$$

но, чтобы правильно моделировать нижние частоты колебаний пружины [16], этот результат нужно уточнить и дополнить слагаемым  $(\xi / \lambda) \Psi_{\text{cnt}}(\lambda)$ :

$$\Psi_{\text{cnt}}(\lambda) = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}(\lambda\tau)) / (\delta + \operatorname{th}(\lambda\tau))] (1 + \xi / \lambda). \quad (22)$$

Формулы (20) - (21) уточняют теорию работы [8] о передаточной функции и импедансе механического четырехполюсника с распределенными параметрами: в них газодинамическое сопротивление трубопровода учтено как распределенное, а не местное.

Теперь учтем сжимаемость газа в тупиковой полости, имеющей объем  $V_{\text{T}} > 0$ , для чего запишем

уравнение сжимаемости:

$$\frac{V_{\text{T}}}{a^2 \rho} \cdot \frac{d}{dt} (F + W) = \frac{f_{\text{тр}}}{a \rho} \cdot (F - W), \quad \text{или}$$

$$\frac{V_{\text{T}}}{f_{\text{тр}} a} \cdot \frac{d}{dt} (F + W) = F - W,$$

где  $F, W$  – прямая и отраженная волны давления,

$$F + W = p_{\text{T}}, \quad (F - W) / (a \rho) = u_{\text{T}},$$

и перейдем в этом дифференциальном соотношении к комплексным амплитудам гармонических колебаний:

$$[\lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)] \cdot (F + W) = F - W,$$

откуда  $W = K_{\text{V}} \cdot F$ ;

здесь коэффициент отражения

$$K_{\text{V}} = (1 - \lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)) / (1 + \lambda V_{\text{T}} / (f_{\text{тр}} a)).$$

В результате равенство (18) принимает вид

$$\hat{p}_0 = a \rho \hat{u}_0 [(1 + K_{\text{V}} \exp(-2(\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)) / (1 - K_{\text{V}} \exp(-2(\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau))],$$

или

$$\hat{p}_0 = a \rho [(1 + \delta \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau)) / (\delta + \operatorname{th}((\lambda + \xi_{\text{л}}) \tau))] \hat{u}_0, \quad (23)$$

где

$$\delta = (1 - K_{\text{V}}) / (1 + K_{\text{V}}) = (\lambda V_{\text{T}}) / (f_{\text{тр}} a).$$

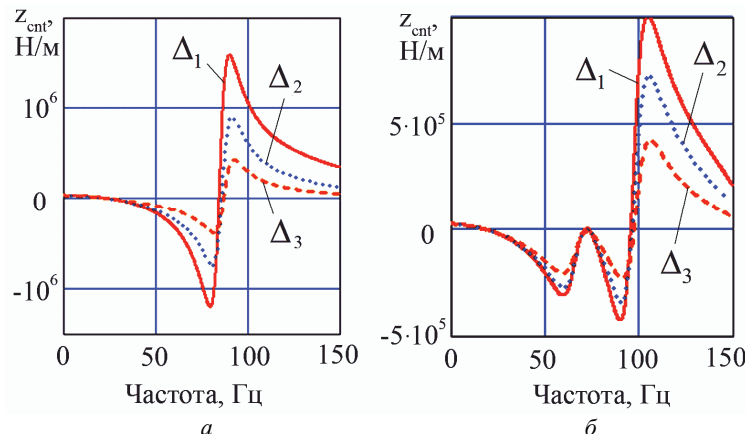


Рисунок 9 – Зависимости коэффициента жесткости от частоты и амплитуды колебаний клапана ( $\Delta_1 = 0$  м/с,  $\Delta_2 = 0,05$  м/с,  $\Delta_3 = 0,1$  м/с):  $a$  – простейшая схема;  $b$  – разветвленная схема блока управления

Значения коэффициента жесткости  $z_{\text{cnt}}$  газовой пружины, полученные как реактивная составляющая импеданса по формулам (16), (22) и (23) для разных частот и амплитуд колебаний клапана, показаны на графиках рис. 9,  $a$ . Начальный участок соответствует зависимости

$$\begin{aligned} z_{\text{cnt}} &= a^2 \rho (f_5^2 / (V_{\text{T}} + V_{\text{cnt}})) + m_{\text{cnt}} \lambda^2; \\ m_{\text{cnt}} &= \rho (f_5 / f_{\text{cnt}})^2 V_{\text{cnt}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где первое слагаемое описывает сжимаемость газа в суммарном объеме трубопровода  $V_{\text{cnt}}$  и тупиковой полости  $V_{\text{T}}$ , а второе – инерцию газа в трубопроводе.

**Метод расчета механического импеданса для пневмоблока управления.** К сожалению, простейшая

схема, показанная на рис. 8,  $a$ , плохо соответствует реальной схеме блока управления. Причиной является то, что к началу работы пневмосистемы запуска ЖРД уже открыты длинные линии управления, ведущие к другим потребителям. Более реалистичной является расчетная схема, показанная на рис. 8,  $b$ , и именно она использована в программном комплексе [1-4]. Здесь выделена центральная полость объемом  $V_{\text{ц}}$ , от которой идут трубопроводы к тупиковым полостям, а также к полости управления регулятора.

Заметим, что сеть трубопроводов управления является непроточной и не имеет параллельных цепей и активных элементов, возбуждающих колебания. Это позволило отказаться от сложных методов [9], использующих передаточные матрицы или графы, и предложить *прямой метод расчета импеданса*, который

опирается на разработанные правила пересчета этой величины при последовательном соединении труб.

Напомним, что величина, обратная импедансу, называется адмиттансом [12]. Будем считать, что адмиттанс с входит в соотношение

$$\hat{u} = c\hat{p}/(a\rho),$$

то есть с точки зрения физики это безразмерная величина. Сформулируем и докажем две теоремы.

*Теорема 1. Пусть в полость объемом V приходит один трубопровод с площадью сечения  $f_0$ , а уходят n трубопроводов, имеющих площади  $f_1, \dots, f_n$  и адмиттансы  $c_1, \dots, c_n$ . Тогда входной трубопровод на стыке с полостью имеет адмиттанс*

$$c_0 = (f_1/f_0)c_1 + \dots + (f_n/f_0)c_n + (V/f_0)\lambda/a. \quad (25)$$

Доказательство. Запишем уравнение сжимаемости для полости и перейдем в нем к комплексным амплитудам колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{V}{a^2\rho} \cdot \frac{dp}{dt} &= f_0 u_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j u_j \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\lambda V}{a^2\rho} \cdot \hat{p} &= f_0 \hat{u}_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j \hat{u}_j. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением  $\hat{u}_j = c_j \hat{p}/(a\rho)$ ,

$j = 0, 1, \dots, n$  и получим

$$\frac{\lambda V}{a^2\rho} \cdot \hat{p} = \frac{f_0 c_0 \hat{p}}{a\rho} - \sum_{j=1, \dots, n} \frac{f_j c_j \hat{p}}{a\rho},$$

откуда

$$\frac{\lambda V}{a} = f_0 c_0 - \sum_{j=1, \dots, n} f_j c_j.$$

Утверждение доказано.

*Теорема 2. Пусть у трубопровода с газом длина равна L, а в его выходном сечении адмиттанс равен  $c_{кон}$ . Тогда адмиттанс во входном сечении вычисляется по формуле*

$$c_{нач} = (c_{кон} + c_{тр}) / (1 + c_{кон} c_{тр}), \quad (26)$$

где  $c_{тр}$  – это адмиттанс трубопровода при закрытом выходе,

$$c_{тр}(\lambda) = [(\delta + th(\lambda\tau)) / (1 + \delta th(\lambda\tau))];$$

$$\delta = (1 - K^2) / (1 + K^2); \quad \tau = L/a.$$

Доказательство. Воспользуемся равенствами (20), а также симметрией столба газа в отношении выбора конечных сечений и линейностью его уравнений, откуда вытекают следующие формулы для комплексных амплитуд:

$$\hat{p}_{нач} / (a\rho) = \Psi_1 \hat{u}_{нач} - \Psi_2 \hat{u}_{кон};$$

$$\hat{p}_{кон} / (a\rho) = \Psi_2 \hat{u}_{нач} - \Psi_1 \hat{u}_{кон},$$

где  $\Psi_1 = cth((\lambda - \xi)\tau)$ ;  $\Psi_2 = 1/sh((\lambda - \xi)\tau)$ .

Учтем, что по условию теоремы

$$\hat{u}_{кон} = c_{кон} \hat{p}_{кон} / (a\rho),$$

следовательно

$$\hat{p}_{кон} = \Psi_2 \hat{u}_{нач} / (1 + \Psi_1 c_{кон}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{нач} = (\Psi_1 - \Psi_2^2 c_{кон} / (1 + \Psi_1 c_{кон})) \hat{u}_{нач},$$

то есть

$$\begin{aligned} c_{нач} &= \frac{1 + \Psi_1 c_{кон}}{\Psi_1 + (\Psi_1^2 - \Psi_2^2) c_{кон}} = \left\| \Psi_1^2 - \Psi_2^2 = 1, \Psi_1 = c_{тр}^{-1} \right\| = \\ &= \frac{c_{тр} + c_{кон}}{1 + c_{тр} c_{кон}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что в блоке управления большинство трубопроводов имеет одинаковую площадь, а адмиттансом трубопровода является гиперболический тангенс и формула (25) соответствует правилу вычисления гиперболического тангенса суммы. Поэтому смысл доказанных теорем можно передать следующей фразой: при параллельном соединении трубопроводов суммируются значения адмиттансов – гиперболических тангенсов, а при последовательном соединении – суммируются значения их аргументов (то есть арктангенсы от адмиттансов).

Результат применения теорем 1 и 2 к расчетной схеме, показанной на рис. 8, б, проиллюстрирован на рис. 9, б, где показаны графики реактивной составляющей удельного механического импеданса. Сравнивая с рис. 9, а, замечаем существенные отличия по расположению резонансных частот; кроме того, при одинаковом объеме газа уточненная схема обладает вдвое большей приведенной массой. Поэтому для решения задач этого исследования представляется целесообразным не заниматься упрощениями, а перейти к реальной схеме блока управления, показанной на рис. 8, в. При использовании формул (25) и (26) анализ схемы, содержащей около 20-ти трубопроводов, не представляет больших трудностей.

Метод расчета импеданса блока управления использует обычный алгоритм обработки графа, в котором от мелких ветвей переходят к более крупным ветвям, а затем по стволу дерева спускаются к корню, который в этой модели располагается в полости за управляющим дросселем. Адмиттанс крайней ветви вычисляем по формуле

$$c_j = (\delta_j + th((\lambda + \xi_j)\tau_j)) / (1 + \delta_j th((\lambda + \xi_j)\tau_j));$$

$$\delta_j = V_j \lambda / (f_j a),$$

а адмиттанс тройника – по формуле

$$c_l = (\delta_l + c_m + c_n + th((\lambda + \xi_l)\tau_l)) / (1 + (\delta_l + c_m + c_n) \times th((\lambda + \xi_l)\tau_l)),$$

где индексы m и n отвечают мелким ветвям, которые объединяются в более крупную ветвь с индексом l.

Тройники на схеме рис. 8, в, обозначены цифрами 1, 2, ..., 9. Результат реализации этого метода расчета близок к графикам рис. 9, б.

После расчета реактивной  $z_{cnt}$  и активной  $f_{cnt}$  составляющей импеданса блока управления уравнение (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} m_{кл} \lambda^2 \hat{h} + (\chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_m / \Delta) \lambda \hat{h} + \\ + (z_{кл} + z_{г.д} + z_{др.5} + z_{cnt}) \hat{h} = -\Delta f_1 \hat{p}_1 - (f_3 - \Delta f_1) \hat{p}_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\chi_{kv,c} = \chi_{kv} + \chi_{др.5}$ ;  $\chi_{др.5}$ ,  $z_{др.5}$  – коэффициенты трения и упругой силы в управляющем дросселе,

$$\begin{aligned} \chi_{др.5}(\omega, \Delta) &= 0.5 \rho_5^* (f_5^3 / \mu f_{5,пр}^2) \Delta^2 [2 / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})]^{3/2}; \\ z_{др.5}(\omega, \Delta) &= \rho_5^* f_5^3 / \mu f_{5,пр}^2 \Delta \omega \beta / (1 + \sqrt{1 + \beta^2})^2; \\ \beta &= f_5 \Delta \omega V_5 / (a_5^2 \mu f_{5,пр}^2). \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения поставленных задач осталось найти связь между амплитудами  $\hat{p}_1, \hat{p}_2$  и  $\hat{h}$  колебаний давления газа и подъема клапана.

**Импеданс входного и выходного трубопровода.** В отличие от блока управления, по этим трубопроводам течет турбулентный поток газа, имеющий постоянную среднюю скорость  $u_{1,2}^*$  и пульсирующую составляющую скорости  $u_{1,2}$ . Поэтому фактор затухания волны вычисляется по формуле Прандтля

$$\xi_{1,2} = 0,079 u_{1,2}^{*3/4} \nu_r^{1/4} / d_{1,2}^{5/4}.$$

Суммарный коэффициент потерь давления заменяется эквивалентным распределенным сопротивлением, которое увеличивает значение фактора  $\xi$ .

Объем баллона принимается бесконечно большим, поэтому предельный переход в (18) при условии  $\Delta \rightarrow \infty$  приводит к равенству

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= -a_1 \rho_1 \text{th}((\lambda + \xi_1) \tau_1) \hat{u}_1 = \\ &= -a_1 \rho_1 \cdot \frac{\text{th}(\lambda \tau_1) + \text{th}(\xi_1 \tau_1)}{1 + \text{th}(\lambda \tau_1) \text{th}(\xi_1 \tau_1)} \cdot \hat{u}_1, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $a_1, \rho_1, \tau_1$  – скорость звука, плотность газа и запаздывание волны на длине входного трубопровода.

Свяжем пульсацию давления с пульсацией скорости клапана. Сжимаемостью газа в полости перед клапаном пренебрегаем. Тогда вместо уравнения сжимаемости имеем равенство объемных скоростей:

$$f_1 u_1 = Q_1 + \Delta f_1 \dot{h},$$

откуда, с учетом (5), получаем

$$f_1 \hat{u}_1 = k_{кр} (\hat{p}_1 / p_1^*) Q_1^* + K_\mu (\hat{h} / h^*) Q_1^* + \Delta f_1 \lambda \hat{h},$$

или

$$\hat{u}_1 / u_1^* = k_{кр} \hat{p}_1 / p_1^* + K_\mu \hat{h} / h^* + (\Delta f_1 / f_1) (\lambda \hat{h} / u_1^*), \quad (29)$$

где множитель  $K_\mu \in [0, 9; 1, 2]$ ; его величина зависит от характера изменения коэффициента расхода:

$$K_\mu(h^*) = 1 + h_4^* (\mu_{кл}(h^*))' / \mu_{кл}(h^*).$$

Учтем, что  $\Delta f_1 / f_1 < 0,005$  и  $\Delta / u_1^* < 0,01$ , поэтому последнее слагаемое в (29) можно отбросить. Из системы равенств (28) и (29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_1}{u_1^*} &= \frac{K_\mu}{1 + A_T \Psi_1} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*} = \\ &= \frac{K_\mu (1 + \text{th}(\lambda \tau_1) \text{th}(\xi_1 \tau_1))}{1 + A_T \text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1) (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + A_T)} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{-\hat{p}_1}{a_1 \rho_1 u_1^*} &= \frac{K_\mu \Psi_1}{1 + A_T \Psi_1} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*} = \\ &= \frac{K_\mu (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1))}{1 + A_T \text{th}(\xi_1 \tau_1) + \text{th}(\lambda \tau_1) (\text{th}(\xi_1 \tau_1) + A_T)} \cdot \frac{\hat{h}}{h^*}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_T &= k_{кр} u_1^* a_1 \rho_1 / p_1^* = k_{кр} (u_1^* / a_1) z_1; \\ \Psi_1 &= \text{th}((\lambda + \xi_1) \tau_1), \end{aligned}$$

$z_1$  – фактор сжимаемости гелия во входном трубопроводе

Воспользуемся равенством

$$(a + b) / (c + d) = (ac - bd) / (c^2 - d^2) + (ad - bc) / (c^2 - d^2)$$

и после несложных преобразований приведем формулу (31) к следующему каноническому виду:

$$-\hat{p}_1 / (a_1 \rho_1) = \Psi_{p1,a}(\lambda^2) \lambda \hat{h} + \Psi_{p1,r}(\lambda^2) \hat{h}, \quad (32)$$

где  $\Psi_{p1,a}, \Psi_{p1,r}$  – это активная и реактивная составляющие импеданса входного трубопровода, которые являются четными функциями от частоты колебаний.

К аналогичному виду приводится формула (30):

$$\hat{u}_1 / u_1^* = \Psi_{a1}(\lambda^2) \lambda \hat{h} + \Psi_{r1}(\lambda^2) \hat{h}; \quad (33)$$

графики используемых функций приведены на рис. 10, а.

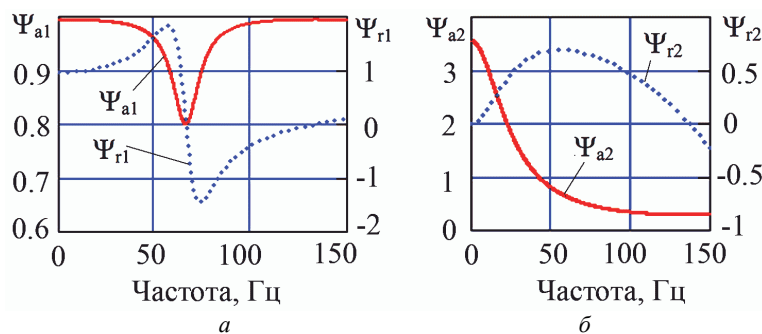


Рисунок 10 – Зависимость активной  $\Psi_a$  и реактивной  $\Psi_r$  компоненты импеданса от частоты: а – входной трубопровод; б – выходной трубопровод

Для анализа выходного трубопровода запишем условие отражения волн у выходного дросселя:

$$k_{кр} [(F + W) / p_2^*] u_2^* = (F - W) / (a_2 \rho_2),$$

откуда получаем

$$W = K_{отр} F,$$

где

$$p_2^* = a_2^2 \rho_2 / (k z_2);$$

$$K_{отр} = (1 - 0.5(k + 1) z_2 u_2^* / a_2) / (1 + 0.5(k + 1) z_2 u_2^* / a_2),$$

$F, W$  – прямая и отраженная волны давления;  $a_2, \rho_2, z_2$  – скорость звука, плотность и фактор сжимаемости

сти гелия в выходном трубопроводе;  $K_2$  – искомый коэффициент отражения, который, как оказалось, в основном зависит от числа Маха  $u_2^*/a_2$  и показателя адиабаты  $k$ ;  $k_{кр} = (k+1)/(2k)$  – коэффициент линеаризации критического расхода (формула (5)).

Равенство (18) для выходного трубопровода получает вид

$$\hat{p}_2 = a_2 \rho_2 \hat{u}_2 \frac{1 + K^2 K_{отр} \exp(-2\lambda\tau_2)}{1 - K^2 K_{отр} \exp(-2\lambda\tau_2)},$$

или

$$\hat{p}_2 = a_2 \rho_2 [(1 + \delta_2 \operatorname{th}(\lambda\tau_2))/(\delta_2 + \operatorname{th}(\lambda\tau_2))] \hat{u}_2, \quad (34)$$

где

$$\delta_2 = (1 - K^2 K_{отр})/(1 + K^2 K_{отр}) \approx 0,5(k+1)z_2 u_2^*/a_2.$$

У анализируемой системы  $\delta_2 \in [0, 2; 0, 3]$ , а если принять  $\delta_2 = 0$ , то при низких частотах

$$\hat{p}_2 \approx a_2 \rho_2 /(\lambda\tau_2) \hat{u}_2.$$

Поэтому, используя аналогичные выкладки, равенство (34) было приведено к своему каноническому виду:

$$\hat{p}_2/(a_2 \rho_2) = (\lambda\tau_2)^{-1} [\Psi_{2,a}(\lambda^2)\lambda + \Psi_{2,r}(\lambda^2)] \hat{u}_2; \quad (35)$$

такая форма представления этой зависимости оказалась удобной для дальнейшего решения. Используемые здесь функции описываются формулами

$$\Psi_{a2} = \frac{\delta_2}{\delta_2^2 \cosh^2(\lambda\tau_2) - \sinh^2(\lambda\tau_2)};$$

$$\Psi_{r2} = \frac{(1 - \delta_2^2) \operatorname{th}(\lambda\tau_2) (\lambda\tau_2)}{\operatorname{th}^2(\lambda\tau_2) - \delta_2^2}, \quad (36)$$

а их графики показаны на рис. 10, б.

Теперь, пренебрегая сжимаемостью газа в полости после клапана, а также площадью  $\Delta f_1$ , запишем равенство для объемных скоростей:

$$f_2 u_2 = (\rho_1/\rho_2) f_1 u_1 + f_3 \hat{h},$$

откуда

$$\hat{u}_2 = (\rho_1 f_1 / \rho_2 f_2) \hat{u}_1 + (f_3 / f_2) \lambda \hat{h}, \quad \text{или}$$

$$\hat{u}_2 = [(\rho_1 f_1) / (\rho_2 f_2)] u_1^* [\Psi_{a1}(\lambda^2)\lambda + \Psi_{r1}(\lambda^2)] + \lambda f_3 / f_2 \hat{h}.$$

Учтем равенство (35) и получим искомую формулу для импеданса выходного трубопровода:

$$\hat{p}_2 = \frac{a_2 \rho_2}{\lambda\tau_2} \cdot [\Psi_{a2} \lambda + \Psi_{r2}] \times$$

$$\times \left[ \frac{\rho_1 f_1}{\rho_2 f_2} \cdot u_1^* \cdot \left( \frac{\Psi_{r1}}{\lambda} + \Psi_{a1} \right) + \frac{f_3}{f_2} \right] \cdot \lambda \hat{h}.$$

**Уравнение для частот и амплитуд свободных нелинейных колебаний пневмосистемы.** В предыдущем пункте фактически пренебрегли величиной площади  $\Delta f_1$  в уравнениях сжимаемости газа; следовательно, чтобы сохранить симметрию уравнений механики, должны пренебречь этой величиной в уравнении движения (27). Подставим в это уравнение формулу (37) и после сокращения на амплитуду  $\hat{h}$  и других очевидных преобразований получим *вековое уравнение* для частот  $\lambda$  (и амплитуд  $\Delta$ ) свободных нели-

нейных колебаний системы:

$$A_0 \lambda^3 + A_1(\lambda^2, \Delta) \lambda^2 + A_2(\lambda^2, \Delta) \lambda + A_3(\lambda^2, \Delta) = 0, \quad (37)$$

где

$$A_0 = m_{кл};$$

$$A_1 = \chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_m / \Delta + \Psi_{a2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-1};$$

$$A_2 = z_{кл} + z_{г,д} + z_{др,5} + z_{cnt} + K_T \Psi_{a2} \Psi_{r1} +$$

$$+ \Psi_{r2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-2} + \chi_{cnt} \xi_l;$$

$$A_3 = K_T \Psi_{r2} \Psi_{r1} + z_{cnt} \xi_l;$$

$$K_T = K_\mu (f_3 / f_2) a_2^* G^* / h_4^*; \quad M_T = A_T K_T \tau_2^2 k (L_1 / L_2);$$

$$M_V = (f_3 / f_2)^2 \rho_2^* f_2 L_2.$$

Напомним, что в этих формулах от амплитуды  $\Delta$  колебаний скорости клапана зависят также коэффициенты  $\chi_{kv,c}$ ,  $\chi_m$ ,  $\chi_{cnt}$ ,  $z_{др,5}$ ,  $z_{cnt}$ .

Величины  $M_T$  и  $M_V$  имеют физическую размерность массы, причем  $M_V$  – это приведенная (к регулирующему поршню клапана) масса газа в выпускном трубопроводе, а  $M_T$  – общая приведенная масса газа во впускном и выпускном трубопроводах. Величина  $K_T$  имеет размерность Н/м, это *коэффициент жесткости обратной связи регулятора*.

Формально уравнение (37) записано как кубическое для частоты  $\lambda$ , что дает один из ключей к его решению, но оно является не алгебраическим, а трансцендентным, и это существенно усложняет анализ.

Простейший метод решения (37) описывается итерационной схемой

$$A_0 \lambda_{j+1}^3 + A_1(\lambda_j^2, \Delta) \lambda_{j+1}^2 + A_2(\lambda_j^2, \Delta) \lambda_{j+1} + A_3(\lambda_j^2, \Delta) = 0,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots,$$

где для некоторой фиксированной амплитуды  $\Delta$  выбирается начальное значение искомой частоты  $\lambda_0$  из диапазона  $100i \dots 500i$ , а затем это значение уточняется путем последовательного решения кубических уравнений. После каждой итерации из трех частот выбирается минимальное по модулю число  $\lambda_{j,1}$ .

Результат такого решения проиллюстрирован на рис. 11, а. Величина

$$K_z = \exp(2\pi \alpha / \omega), \quad \alpha + i \cdot \omega = \lambda, \quad \omega > 0$$

определяет коэффициент затухания (или, в других случаях, возрастания) колебаний. Для амплитуды  $\Delta = 0,008 \dots 0,035$  м/с алгоритм сходится к решению, которое является комплексным числом, а на других участках не сходится. Полученные решения отвечают затухающим колебаниям.

Для малых амплитуд, как показано далее, зависимость коэффициентов  $A_k$  от частоты  $\lambda$  ослабевает, и в алгоритме допустимо использовать среднее значение  $\lambda_{ср,j}$ , вычисляемое по двум минимальным (по модулю) корням кубического уравнения  $\lambda_{j,1,2}$ :

$$\lambda_{ср,j} = 0,5 \cdot \operatorname{Re}(\lambda_{j,1} + \lambda_{j,2}) + 0,5 \cdot \operatorname{Im}(\lambda_{j,1} - \lambda_{j,2}).$$

В результате достигается сходимость метода (рис. 11, б), но полученные зависимости являются приближенными.

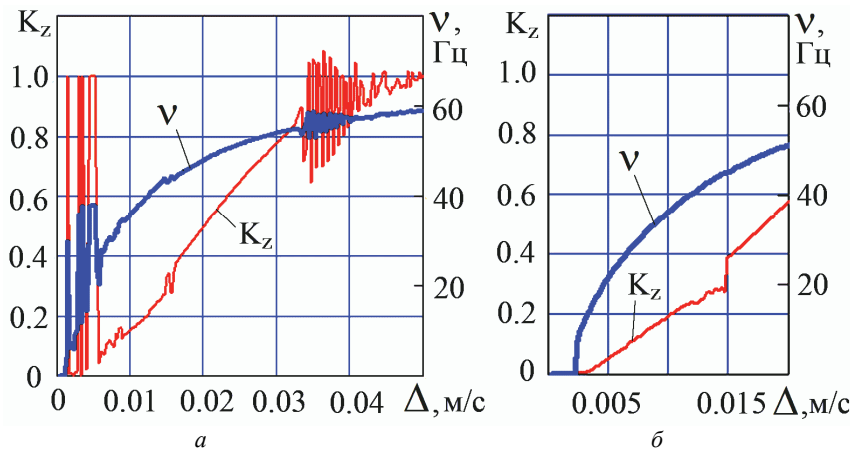


Рисунок 11 – Зависимости частоты  $\nu$  и коэффициента затухания колебаний  $K_z$  от их амплитуды  $\Delta$ :  $a$  – метод простых итераций;  $b$  – итерации с усреднением частот

Заметим, что вековое уравнение (37) полезно представить в виде:

$$\lambda^2 + B_1(\lambda^2, \Delta)\lambda + B_2(\lambda^2, \Delta) = 0. \quad (38)$$

где  $B_1 = (A_1 + A_3/\lambda^2)/A_0$ ;  $B_2 = A_2/A_0$ .

Если в (38) значения  $B_1, B_2$  зафиксировать, получим квадратное уравнение, описывающее частоты колебаний одномассовой системы.

**Случай малых амплитуд колебаний. Коэффициент жесткости обратной связи и статическая устойчивость.** Из формулы для коэффициента  $A_1$  следует, что при условии  $\Delta \rightarrow 0$  и частота  $\lambda \rightarrow 0$ . Если частоты колебаний малы, то в коэффициентах уравнения (38) допустимы замены

$$\text{th}(\lambda \tau_j) \approx \lambda \tau_j (1 - (\lambda \tau_j)^2 / 3), \quad (39)$$

которые означают, что трубопроводы с газом моделируются как равномерно сжимаемые цилиндрические пружины, где учитывается жесткость и приведенная масса витков. Поскольку малы и амплитуды колебаний, можно пренебречь квадратичным трением. В результате вековое уравнение (38) из трансцендентного превращается в квадратное уравнение

$$M_{\text{пр}}\lambda^2 + (\chi_M/\Delta - M_{\text{пр}}\delta_2\tau_2^{-1})\lambda + Z_{\text{пр}} = 0, \quad (40)$$

где

$$M_{\text{пр}} = K_T(1/\delta_2^2 - 1)\tau_2^2/\delta_2 + m_{\text{снт}} + m_{\text{кл}} \approx K_T\tau_2^2/\delta_2^3;$$

$$Z_{\text{пр}} = K_T/\delta_2 + z_{\text{Г.д}} + z_{\text{снт}} + \dots \approx K_T/\delta_2$$

– масса и коэффициент жесткости, для которых в этом уравнении оставлены главные (по величине) слагаемые.

Так,

$$Z_{\text{пр}}/(-z_{\text{Г.д}}) > 10,$$

и это означает, что условие статической устойчивости для положения равновесия клапана, которое обеспечивается *восстанавливающей силой*, выполнено с большим запасом. Спонтанным отклонениям от равновесия (напр., при включении новых потребителей) препятствует большая сила инерции; величина приведенной к клапану массы газа  $M_{\text{пр}}$  превышает 350 кг, а масса самого клапана  $m_{\text{кл}} \approx 0,3$  кг. Заметим, что боль-

шие значения приведенной массы и жесткости характерны для низких частот, и при переходе к частотам  $\nu \approx 60$  Гц они уменьшаются на два порядка.

Из уравнения (40) можно получить зависимость частоты от амплитуды:

$$\lambda = 0,5(1 - \Delta_0/\Delta)\delta_2\tau_2^{-1} + \sqrt{(0,5(1 - \Delta_0/\Delta)\delta_2\tau_2^{-1})^2 - \omega_0^2},$$

где  $\Delta_0 = \chi_M\tau_2/(M_{\text{пр}}\delta_2) \approx 0,0017$  м/с;

$$\omega_0 = \sqrt{Z_{\text{пр}}/M_{\text{пр}}}; \quad \nu_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 24,6 \text{ Гц}.$$

При  $\Delta > 0,005$  м/с числа  $\lambda$  являются комплексными и описывают гармонические колебания, при  $\Delta < 0,005$  м/с колебания аperiodические (рис. 12).

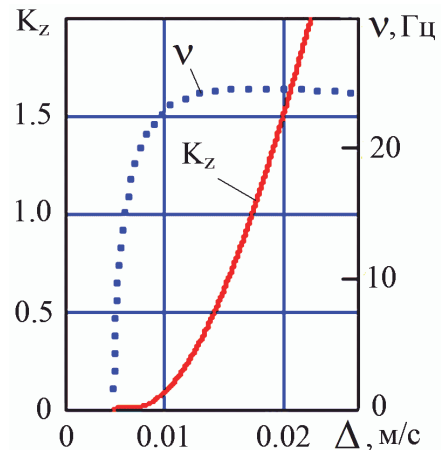


Рисунок 12 – Результаты упрощенного моделирования инерции газа в трубопроводах

Сопоставление рис. 11, б и рис. 12 показывает, что зависимости  $\nu(\Delta)$  и  $K_z(\Delta)$  близки при частотах  $\nu < 10$  Гц, где аппроксимация (39) выполняется с высокой точностью. Но при частотах  $\nu > 20$  Гц расхождение результатов носит качественный характер. Уравнение (40) предсказывает динамическую неустойчивость при частотах  $\nu \approx 24$  Гц и амплитудах  $\Delta > \Delta_0$ , чего у этой пневмосистемы нет. Следовательно, при ее исследовании на динамическую устойчивость необходимо учитывать не инерционность, а колебания газа в трубопроводах.

**Метод нахождения частот и амплитуд предельных циклов.** В теории автоматического управления [8] уравнения вида (37) преобразуют к равенству для характеристического комплекса Михайлова

$$C(\lambda, \Delta) = C_0(\lambda^2, \Delta) + C_1(\lambda^2, \Delta)\lambda = 0, \quad (41)$$

где, для этого случая, можно использовать две конкурирующие факторизации:

$$A - C_0 = A_0 \lambda^2 + A_2; C_1 = A_1 + A_3 / \lambda^2 \text{ и}$$

$$B - C_0 = A_1 \lambda^2 + A_3; C_1 = A_0 \lambda^2 + A_2.$$

Колебательную границу области динамической устойчивости образуют мнимые числа  $\lambda = i \cdot \omega$  и соответствующие им амплитуды колебаний скорости

$$\Delta \in [0, v_M]; v_M = 0,15 \text{ м/с,}$$

которые являются решениями системы

$$\{ C_0(-\omega^2, \Delta) = 0; C_1(-\omega^2, \Delta) = 0. \quad (42)$$

Система (42) содержит два нелинейных уравнения для двух неизвестных, но может быть сведена к одному уравнению при использовании метода исключения неизвестной. Для исключения используют первое уравнение, которое решают численно.

Как это следует из приведенных выше формул, для факторизации **A** выполняется условие монотонности  $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$ , и здесь решение единственно. Для факторизации **B** условие  $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$  выполняется при  $\Delta \in [0, v_*]$ , но при  $\Delta \in [v_*, v_M]$  имеем неравенство  $\partial C_0 / \partial \Delta < 0$ ; в этом случае задача исключения не-

известной может иметь одно или два решения.

Зафиксируем в первом уравнении круговую частоту  $\omega$  и найдем отвечающую ему амплитуду  $\Delta$ , для чего вычислим значения функции

$$C_0(-\omega^2, v_M \cdot j/100); j = 1...100,$$

после чего локализуем корень этого уравнения и уточним значение  $\Delta(\omega)$ , используя линейную интерполяцию. Подставим это значение во второе уравнение и получим *функцию невязки*, которую определим следующим образом:

$$\zeta(\omega) = -C_1(-\omega^2, \Delta(\omega)). \quad (43)$$

Для факторизаций **A** и **B** соответственно

$$\zeta_a = (A_0 A_3 - A_1 A_2) / A_2 \text{ и}$$

$$\zeta_b = (A_0 A_3 - A_1 A_2) / A_1,$$

то есть невязка содержит *минор Гурвица* из одноименного алгебраического критерия устойчивости [18].

Графики этой функции показаны на рис. 13. При визуализации невязка  $\zeta_a$  умножается на величину  $\Delta$  и получает смысл недостающей (избыточной) силы трения в манжете. Для факторизации **B** графики имеют две ветви, что объясняется немонотонной формой зависимости суммарной силы трения от амплитуды колебаний. Корни  $v_1, v_2$  невязки (и соответствующие амплитуды  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ), присутствующие на рис. 13, отвечают границе устойчивости, или соответствующему *предельному циклу колебаний*.

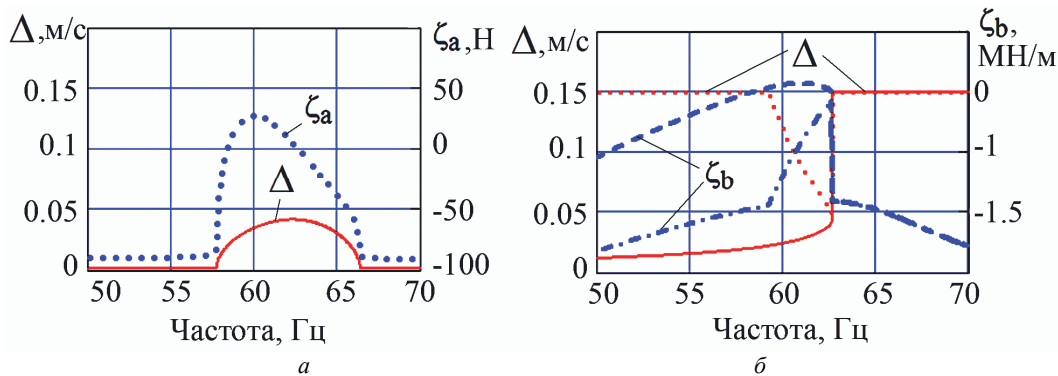


Рисунок 13 – Определение частот и амплитуд предельных циклов и проверка устойчивости: а – факторизация **A**; б – факторизация **B**

**Графоаналитический критерий устойчивости предельного цикла.** Известно, что устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям. Предложенный в этом пункте и использованный в нашей работе критерий устойчивости является развитием известных методов, описанных в [8, гл.18].

Если известны частоты  $v_j$  всех предельных циклов,

$$0 < v_1 < v_2 < v_3 < \dots,$$

и циклы *простые* (невязка не имеет кратных корней), то частоты с четными номерами отвечают автоколебаниям, с нечетными – неустойчивым циклам, и

– при  $v < v_1$  и в интервалах  $(v_{2j}, v_{2j+1})$ ,  $j = 1, 2, \dots$

свободные колебания затухают,

– в интервалах  $(v_{2j-1}, v_{2j})$ ,  $j = 1, 2, \dots$  свободные колебания растут.

Следовательно, если при частотах  $v < 50$  Гц предельных циклов нет, то при  $v_2 \approx 62$  Гц система имеет автоколебания, а при  $v_1 \approx 58$  Гц начинается интервал частот, где амплитуды ее колебаний растут. Но, как оказалось, к этому выводу можно прийти без использования информации о других предельных циклах.

Критерий опирается на вспомогательные утверждения, которые имеют несложное доказательство, поэтому мы его опускаем. Числители приведенных ниже дробей можно найти в аналитическом методе исследования устойчивости из [8], которые

там также даны без доказательства. Но в такой форме, как указано ниже, утверждения сформулированы впервые.

*Лемма 1.* Пусть зависимость комплексной частоты  $\lambda = \alpha + i \cdot \omega$ ,  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  от амплитуды  $\Delta$  описывается неявным уравнением (41)  $C(\lambda, \Delta) = 0$ , и выполнено условие  $C(\lambda_0, \Delta_0) = 0$ , где  $\lambda_0 = i \cdot \omega_0$ ;  $\omega_0, \Delta_0 > 0$ . Тогда в точке  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\Delta = \Delta_0$  для зависимости  $\alpha(\Delta)$  выполнено равенство

$$\frac{d\alpha}{d\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial C_0 / \partial \Delta \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2 - \partial C_1 / \partial \Delta \cdot \partial C_0 / \partial \lambda^2}{(\omega_0 \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2)^2 + (\partial C_1 / \partial \Delta)^2}. \quad (44)$$

*Лемма 2.* Для функции невязки (43) в каждой точке ее графика выполнено условие

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = \frac{2\omega_0}{\partial C_0 / \partial \Delta} \cdot (\partial C_0 / \partial \Delta \cdot \partial C_1 / \partial \lambda^2 - \partial C_1 / \partial \Delta \cdot \partial C_0 / \partial \lambda^2). \quad (45)$$

Рассмотрим следствия из этих результатов. **Устойчивость предельного цикла эквивалентна условию**  $d\alpha/d\Delta < 0$ ; тогда, напр., спонтанное увеличение амплитуды приводит к затухающим колебаниям, что уменьшает амплитуду. Сравнивая правые части (44) и (45), приходим к равенству

$$\text{sign}(d\alpha/d\Delta) = \text{sign}(d\zeta/d\omega) \cdot \text{sign}(\partial C_0 / \partial \Delta).$$

Таким образом, если производная  $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$ , а в корне невязки производная  $d\zeta/d\omega < 0$ , то предельный цикл соответствует автоколебаниям; при положительных производных  $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$  и  $d\zeta/d\omega > 0$  он неустойчивый. Кроме того, если при выполнении условия  $\partial C_0 / \partial \Delta > 0$  имеем  $\zeta(\omega) < 0$ , то свободные колебания являются затухающими, а если  $\zeta(\omega) > 0$  – то при этой частоте они растущие по амплитуде.

Заметим, что сформулированное и доказанное утверждение объединяет два равноправных критерия, связанные с двумя факторизациями, и на практике должен использоваться тот критерий, который удобен для данной задачи. При анализе пневмосистемы запуска ЖРД более удобной является факторизация  $A$ , поскольку здесь функция  $C_0(-\omega^2, \Delta)$  монотонно зависит от амплитуды  $\Delta$ .

Кроме того, как это следует из доказанного утверждения, увеличение силы трения повышает запас динамической устойчивости пневмосистемы.

Следует особо подчеркнуть, что графики рис. 13 описывают зависимость амплитуды от частоты только лишь для окрестностей предельных циклов; для остальных частот они столь же условны, как и известная кривая Михайлова.

**Графоаналитический метод решения векового уравнения для затухающих или растущих колебаний.** В основе метода использован следующий прием.

Вернемся к исходной точке исследования, а именно к уравнению (3), и к мнимому числу  $\lambda = i\omega$  добавим вещественную часть  $\alpha$ , то есть от числа  $\lambda$  перейдем к сумме  $\alpha + \lambda = \alpha + i \cdot \omega$ . Теперь при условии  $\alpha < 0$  мы будем анализировать затухающие, а при условии  $\alpha > 0$  – растущие гармонические колебания.

Такое изменение приведет к появлению дополнительного экспоненциального множителя рядом с коэффициентом затухания волны в формуле (18):

$$\hat{p}_0 = a \rho \hat{u}_0 \left[ (1 + (K \exp(-\alpha\tau))^2 \exp(-2\lambda\tau)) / (1 - (K \exp(-\alpha\tau))^2 \exp(-2\lambda\tau)) \right],$$

и в других аналогичных формулах, то есть оно скорректирует значения этих коэффициентов. В результате уравнение (37) примет вид

$$A_0(\alpha + \lambda)^3 + A_1(\lambda^2, \Delta, \alpha)(\alpha + \lambda)^2 + A_2(\lambda^2, \Delta, \alpha)(\alpha + \lambda) + A_3(\lambda^2, \Delta, \alpha) = 0,$$

где  $A_j$  – это скорректированные указанным образом вещественные функции, зависящие от трех аргументов. Далее получаем уравнение

$$A_0 \lambda^3 + (A_1 + 3\alpha A_0) \lambda^2 + (A_2 + 3\alpha^2 A_0 + 2\alpha A_1) \lambda + (A_3 + \alpha^3 A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha A_2) = 0,$$

которое преобразуется к равенству вида (41):

$$C(\lambda, \Delta, \alpha) = C_0(\lambda^2, \Delta, \alpha) + C_1(\lambda^2, \Delta, \alpha) \lambda = 0. \quad (46)$$

В уравнении (46) вещественное число  $\alpha$  (либо связанный с ним коэффициент затухания волны  $K_z$ , что удобней для интерпретации результатов исследования) играет роль параметра. Этот параметр фиксируем на некотором уровне, а полученное уравнение для двух переменных  $\lambda$  и  $\Delta$  решаем описанным выше графоаналитическим методом.

Практическая реализация такого подхода для исследования колебаний низкой частоты показана на рис. 14, а. Для сканирования комплексной плоскости частот использовалось значение  $K_z = 0,1$ . Корни невязки отвечают парам близких частот, причем, в силу доказанного критерия, в каждой паре большая частота является стабильной, а меньшая – неустойчивой. Однако когда за период колебаний амплитуда уменьшается в 10 раз, стабильность имеет теоретическое значение. Для практики важно, что при частотах 20...30 Гц колебания быстро затухают, а их максимальная амплитуда не превосходит значения 0,004 м/с.

Этот же метод использован для исследования растущих колебаний при частотах  $v \in (v_1, v_2)$ . Коэффициент  $K_z = 1,04$  обеспечил получение кратного корня  $v_{cp}$  невязки (см. рис. 14, б). Амплитуда колебаний  $\Delta_{cp}$  больше  $\Delta_1$  на 35%. Следовательно, изменение частот  $v_1 \rightarrow v_{cp}$  занимает 12 периодов колебаний, или 0,2 с. Это 30% длительности установившегося режима подачи газа. Участки медленного изменения амплитуды колебаний присутствуют на рис. 2, а – в.

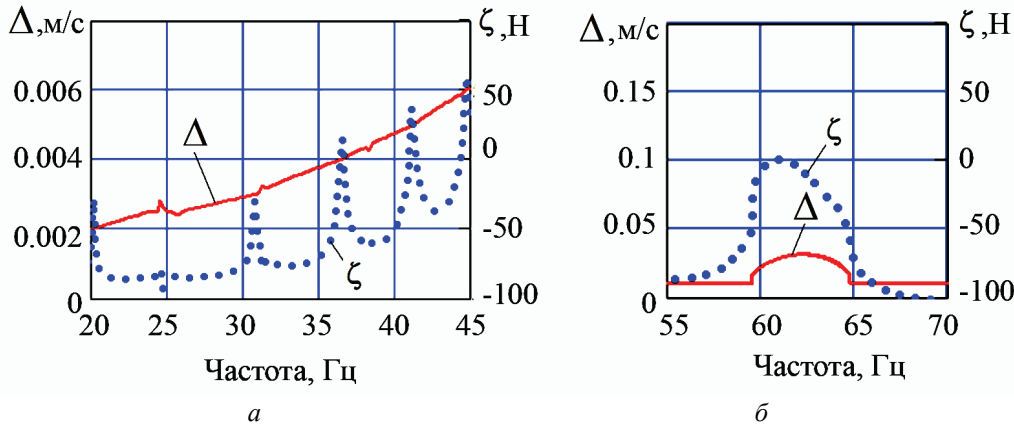


Рисунок 14 – Исследование затухающих колебаний низкой частоты и растущих колебаний в интервале частот между предельными циклами: а –  $K_z = 0,1$ ; б –  $K_z = 1,04$

**Достаточное условие динамической устойчивости пневмосистемы.** Получим простейшее условие указанного типа, которое накладывается на основные параметры системы. Из свойства монотонности

$$\partial A_2 / \partial \Delta = \partial C_0 / \partial \Delta > 0$$

следует, что система не имеет предельных циклов, если при всех частотах выполняется неравенство

$$-A_0 \omega^2 + A_2(-\omega^2, 0) > 0. \quad (47)$$

Учтем формулы для коэффициентов, но оставим в них только старшие по величине слагаемые:

$$A_0 = m_{кл}; \quad A_2 \approx K_T \Psi_{a2}(\omega) \Psi_{r1}(\omega) + z_{г.д} + z_{cnt}.$$

Величины  $z_{г.д}$ , а также  $z_{cnt}$  при средних частотах (см. рис. 9), отрицательны. После использования формулы (24) и отбрасывания второстепенных положительных чисел неравенство

$$K_T \Psi_{a2}(\omega) \Psi_{r1}(\omega) - (m_{cnt} + m_{кл}) \omega^2 > -z_{г.д}$$

оказывается более сильным, чем (47). Минимум его правой части достигается при частоте  $\omega_m \approx 0.5\pi / \tau_2$  и составляет примерно  $0,5 \delta_2$ .

Причем, если принять условие  $m_{cnt} = 0$ , то поправочный коэффициент 0,5 нужно заменить на 0,8, что лишний раз подчеркивает сильное влияние колебаний газа в управляющих трубопроводах на динамическую устойчивость.

При поправочном коэффициенте 0,5 получаем следующее неравенство:

$$0,5 \delta_2 K_T > -z_{г.д},$$

или, после подстановок и сокращений,

$$\delta_2 (f_3 / f_2) > \Lambda_M, \quad (48)$$

где

$$\Lambda_M = -2K_{г.д} f_{кл} \cdot (p_1^* - p_2^*) / (G^* a_2^*) \approx -2K_{г.д} / \mu(h^*);$$

$f_{кл}$ ,  $\mu$  – площадь проходного сечения по седлу клапана и соответствующий коэффициент расхода, зависящий от подъема клапана; коэффициент  $K_{г.д}$  газодинамической силы для клапанов такого типа отрицательный и лежит в пределах  $-0,5 \dots -0,3$  [1].

Получено простое и удобное для практики усло-

вие, а если его заменить равенством, то вплотную приблизимся к границе динамической устойчивости. Коэффициент  $\delta_2$ , в основном, определяется числом Маха, поэтому правая часть (48) изменяется примерно пропорционально изменению  $(1/f_2)^2$ , а динамическая устойчивость пневмосистемы сильно зависит от выбора диаметра выходного трубопровода. В анализируемой конструкции на первом включении пневмосистемы

$$\delta_2 (f_3 / f_2) \approx 0,8 \Lambda_M$$

и если, напр., уменьшить диаметр выходного трубопровода на 5 %, то устройство будет работать без автоколебаний. Однако корректировки диаметра выходного трубопровода для тонкой настройки на автоколебания малой амплитуды недостаточно; кроме того необходимо учесть изменение коэффициента расхода  $\mu(h_j^*)$ ,  $j \in \overline{1,5}$  для различных включений двигателя.

**Настройка пневмосистемы на автоколебания малой амплитуды.** Как следует из (48), выполнение неравенства

$$\delta_2 (f_3 / f_2) < \Lambda_M, \quad (49)$$

является *необходимым условием* возникновения автоколебаний. Но для получения автоколебаний малой амплитуды оно не является достаточным, поскольку его выполнение не зависит от выбора диаметра  $d_5$  управляющего жиклера.

При большом диаметре жиклера основным фактором нелинейности становится сухое трение; значения коэффициента эквивалентного вязкого трения

$$\chi_c = \chi_{kv,c} \Delta + \chi_{cnt} + \chi_M / \Delta + \Psi_{a2} (M_V + M_T \Psi_{a1}) \tau_2^{-1}$$

для этого случая показаны на рис. 15, а. В уравнении  $C_0(-\omega^2, \Delta) = 0$  зависимость левой части от  $\Delta$  становится слабой, и частоты  $\nu_{1,2}$  предельных циклов сближаются. Следовательно, в этом случае амплитуды  $\Delta_{1,2}$  отвечают точкам пересечения одного из графиков, показанных на рис. 14, а, с горизонтальной линией

$$y = A_3(\omega^2) / \omega^2; \quad \omega = 2\pi i \nu_{1,2},$$

которая там не показана. При этом амплитуда  $\Delta_2$  устойчивого цикла размещается за точкой  $\nu^* = 0,04$  м/с



минимума силы трения и, как следствие, оказывается недопустимо большой.

Если диаметр управляющего жиклера близок к своему оптимальному значению 0,7...0,9 мм, то у системы появляется значительный коэффициент жесткости  $z_{др.5}(\Delta)$ , благодаря чему между частотами  $\nu_{1,2}$

предельных циклов образуется зазор. Теперь значения  $\chi_c(\Delta, \nu_{1,2})$  располагаются на разных кривых (рис. 15, б), а амплитуды  $\Delta_{1,2}$  (при благоприятных значениях других параметров) получают возможность сместиться от значения  $\nu^*$  в одну сторону и удовлетворять условию  $\Delta_{1,2} < 0,04$  м/с (табл. 1).

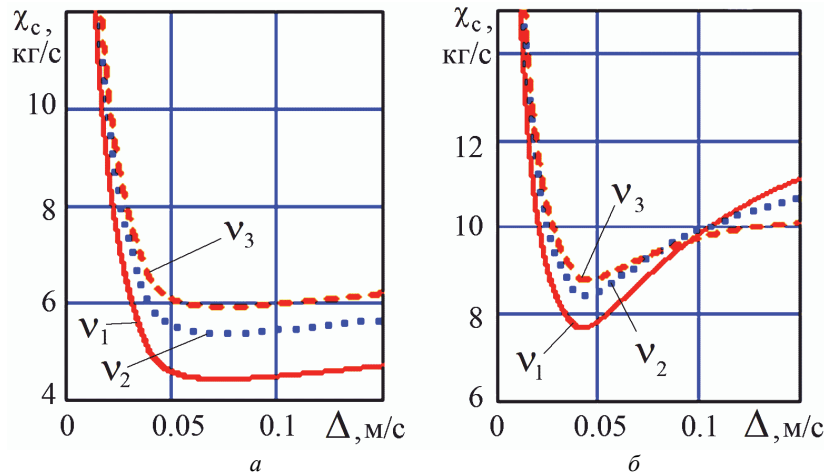


Рисунок 15 – Зависимости суммарного коэффициента трения  $\chi_c$  от амплитуды  $\Delta$  и частоты колебаний  $\nu$  ( $\nu_1 = 50$  Гц,  $\nu_2 = 60$  Гц,  $\nu_3 = 70$  Гц) при разных диаметрах управляющего дросселя: а – диаметр  $d_5 = 2$  мм; б – диаметр  $d_5 = 0,8$  мм

Таблица 1 – Частота и амплитуда автоколебаний при варьировании диаметра управляющего дросселя

$d_5$ , мм	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
Первое включение системы, $p_1^* = 30$ МПа; $T_1^* = 293$ К									
$\nu_2$ , Гц	–	60,6	62,8	63,4	63,7	63,8	63,8	63,7	63,6
$\Delta_2$ , м/с	–	0,029	0,041	0,051	0,062	0,076	0,093	0,114	0,138
Третье включение системы, $p_1^* = 22$ МПа; $T_1^* = 253$ К									
$\nu_2$ , Гц	–	55,1	56,4	56,7	56,9	56,9	56,8	56,7	56,6
$\Delta_2$ , м/с	–	0,032	0,044	0,056	0,071	0,088	0,108	0,130	0,156
Пятое включение системы, $p_1^* = 15$ МПа; $T_1^* = 213$ К									
$\nu_2$ , Гц	–	48,2	49,4	49,7	49,8	49,8	49,7	49,7	49,5
$\Delta_2$ , м/с	–	0,030	0,042	0,054	0,068	0,084	0,102	0,124	0,148

Таким образом, второе необходимое условие заключается в (приблизженном) выполнении соотношения (11) по оптимальному выбору диаметра  $d_5$ .

Частота и амплитуда автоколебаний зависят от многих факторов, в том числе и от длин трубопроводов (рис. 2). Но, как показывает табл. 1, если путем корректировки размеров трубопроводов выполнить условие (49), то поставленную задачу можно решить за счет выбора диаметра управляющего жиклера. Оказалось, что при изменении параметров газа в баллоне, происходящем по мере использования рабочего тела на включения двигателя, амплитуды автоколебаний сохраняются, а частоты смещаются вместе со снижением скорости звука в трубопроводах с газом.

Третье необходимое условие заключается в обеспечении высокой интенсивности возбуждения колебаний, имеющих частоты  $\nu > \nu_1 \approx 58$  Гц, и его выполнение зависит от номера включения ЖРД.

При первом включении начальный уровень давления  $p_1 \approx 1$  атм, поэтому после открытия пневмокла-

пана из входного трубопровода происходит заброс газа в практически пустую полость. Что приводит к интенсивным колебаниям давления газа и скорости клапана на переходном режиме работы устройства (рис.16, а) и автоколебаниям на установившемся режиме (рис. 17, а). Перестройка давлений на промежутке времени  $t \in (2,15, 2,25)$ , с объясняется подключением новых потребителей, что, кроме прочего, изменяет импеданс блока управления и влияет на амплитуды автоколебаний.

К началу последующих включений между пневмоклапаном и регулятором сохраняется остаточное давление  $p_1 \approx 0,3...0,6$  рб. Поэтому интенсивность заброса газа в эту полость по сравнению с первым включением снижается: амплитуды высокочастотных колебаний уменьшаются в 2-3 раза (рис.16, б), а их суммарная энергия – в 5 раз и более. Вместо автоколебаний получаем динамическую устойчивость (рис. 17, б), причем эта же закономерность наблюдается и при других длинах трубопроводов (рис. 18).

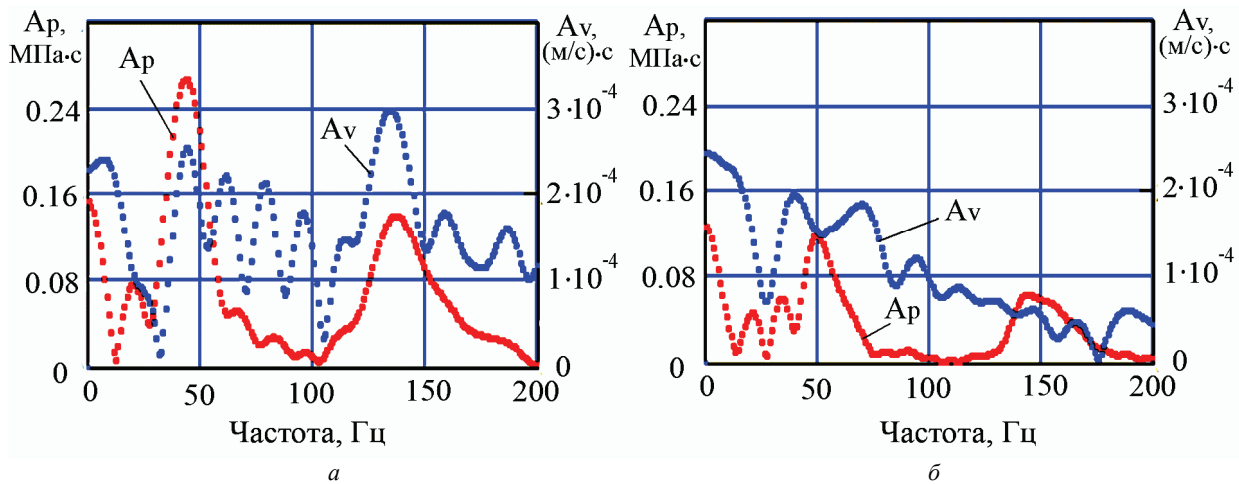


Рисунок 16 – Амплитуды преобразования Фурье для расчетных значений давления газа перед регулятором и скорости клапана регулятора на переходном режиме: *a* – первое включение; *б* – второе включение. Расчет переходного режима выполнен по методу, описанному в [1-4]

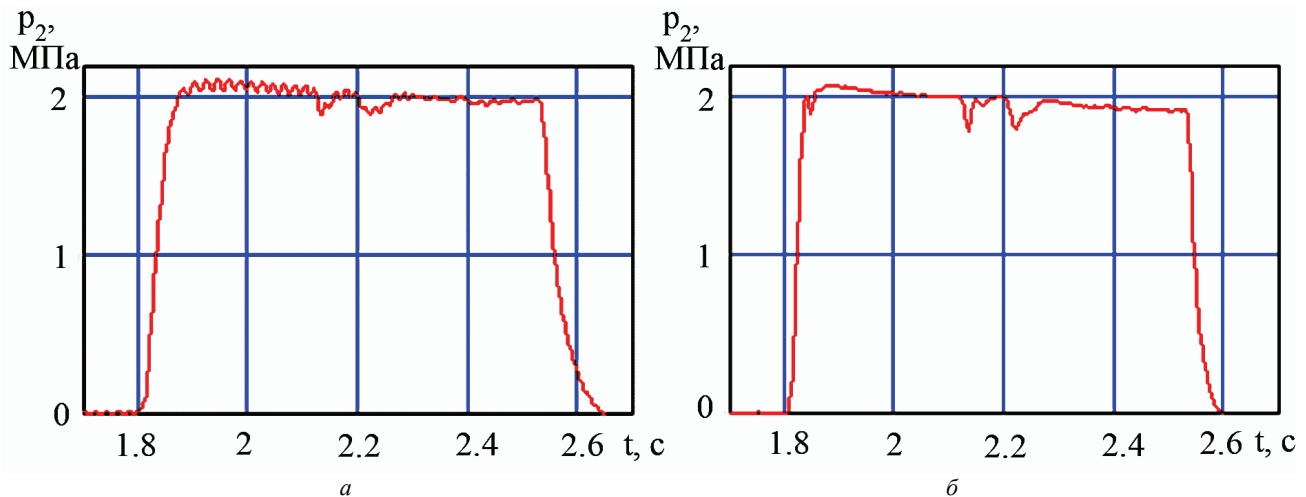


Рисунок 17 – Давление газа в выходном трубопроводе пневмосистемы запуска при огневых испытаниях двигателя: *a* – первое включение; *б* – второе включение ЖРД

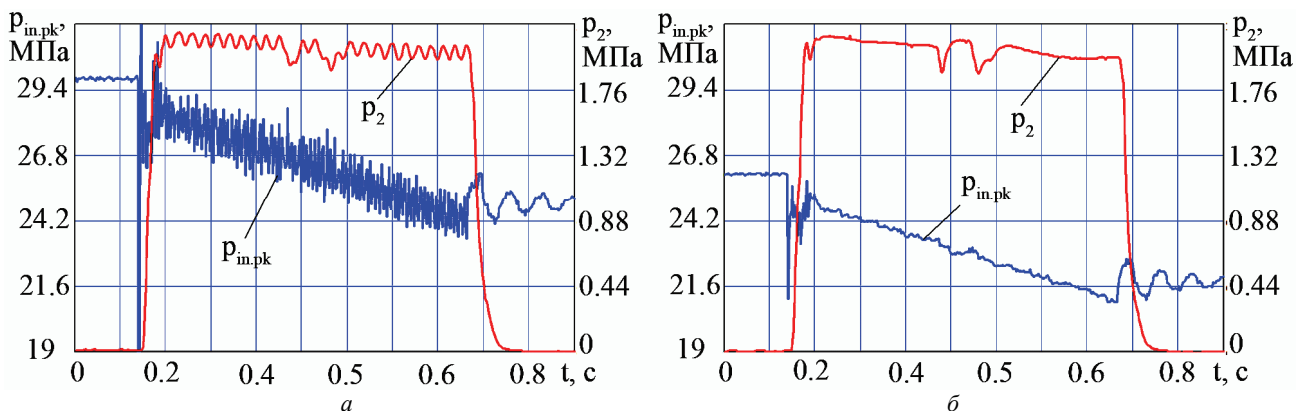


Рисунок 18 – Давление газа во входном  $p_{in.pk}$  и в выходном  $p_2$  трубопроводе пневмосистемы запуска при огневых испытаниях двигателя с увеличенной длиной входного трубопровода: *a* – первое включение; *б* – второе включение ЖРД

Но, если настроить систему на автоколебания малой амплитуды при первом включении двигателя, то такое решение сохраняет эффективность и для других включений, поскольку оно обеспечивает:

- минимально возможное затухание и максимальную продолжительность колебаний клапана на

установившемся режиме подачи газа;

- максимальный участок подъемов клапана  $h < h_1^*$ , отвечающих динамической неустойчивости, и предельно крутые фронты импульса подачи газа.

Динамическая неустойчивость пневмосистемы при малых подъемах клапана подтверждена в экспе-

риментах по нестационарной продувке металлорукава [19]. Для снижения расхода газа диаметр жиклера 6 уменьшали в 1,5...2 раза. Упругопластические деформации уплотнительного кольца изменяют геометрию клапанной щели, поэтому при малых подъемах клапана его коэффициент расхода также мал. Что нарушает условие (48) и приводит к неустойчивости, которая в экспериментах [19] проявлялась в форме пульсаций давления и расхода газа.

Возможности аналитического решения задачи на этом исчерпаны, и окончательную (тонкую) настройку на автоколебания малой амплитуды проводим при использовании разработанных программ расчета, а ее результат проверяем на испытательных стендах.

### Выводы.

Для исследования динамической устойчивости составлена упрощенная дискретно-континуальная нелинейная динамическая модель пневмосистемы запуска ЖРД, описывающая подачу сжатого гелия из баллона по трубопроводам через регулятор с пневматическим управлением.

При использовании метода гармонической линеаризации выведены формулы для расчета амплитуд колебаний расхода газа через дроссель и клапанную щель, а также амплитуд пульсации силы трения в манжетах, при установившихся колебаниях клапана.

Разработан метод расчета удельного механического импеданса для процесса установившихся колебаний столбов газа в разветвленных системах трубопроводов и получены формулы для импеданса входного, выходного и управляющего трубопроводов исследуемой пневмосистемы.

Выведено трансцендентное характеристическое уравнение, связывающее частоты и амплитуды гармонических нелинейных свободных колебаний клапана регулятора пневмосистемы. Разработаны методы решения этого уравнения для случаев установившихся, затухающих и растущих колебаний.

Предложен и использован новый графоаналитический метод нахождения мнимых корней характеристического уравнения, определяющих колебательную границу динамической устойчивости системы, а также получен новый критерий устойчивости для соответствующих предельных циклов.

Показано, что устойчивость и колебательность пневмосистемы зависит от размеров трубопроводов и диаметра управляющего жиклера. Описан порядок настройки исследуемой системы на автоколебания малой амплитуды.

**Список литературы:** 1. Шевченко С.А. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – № 7 (124). – С. 100–110. 2. Шевченко С.А. Уточнение метода инвариантов для расчета динамических параметров газа в трубопроводах пневмосистемы запуска ракетного двигателя / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2015. – № 6 (1115). – С. 156–181. 3. Шевченко С.А. Уточненный расчет дина-

ческих параметров газа в шаробаллоне / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2015. – № 45 (1154). – С. 32–40. 4. Шевченко С.А. Особенности расчета агрегатов автоматики пневмосистем ракетной техники при учете фактора сжимаемости гелия / С.А. Шевченко, Ю.А. Митиков, А.Л. Григорьев // *Вестник двигателестроения*. – 2016. – № 2. – С. 148–159. 5. Стадник Д.М. Обеспечение устойчивости системы автоматического регулирования давления газа в топливных баках ракеты – носителя : дис. канд. техн. наук / Стадник Д.М. – Самара: 2015. – 195 с. 6. Дзитолев В.Л. Исследование устойчивости газового редуктора с трубопроводами / В.Л. Дзитолев, В.И. Есин, В.Ф. Кузнецова, Ю.Г. Прядко // *Вопросы оптимизации и автоматизации конструкторских работ*. – Тула: 1975. – Вып. 28. – С. 100–111. 7. Крутиков Г.А. Исследование на ЭЦВМ газовых редукционных клапанов с демпфирующей камерой / Г.А. Крутиков, А.П. Ефремов, В.Д. Пекчев // *Проблемы машиностроения*. – К.: 1977. – Вып. 5. – С. 94–98. 8. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975. – 767 с. 9. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей / Б.Ф. Гликман. – М.: Машиностроение, 1989. – 296 с. 10. Шевченко С.А. Математическая модель манжетных уплотнений из фторопласта для агрегатов пневмоавтоматики ракетных двигателей / С.А. Шевченко, С.А. Валивахин, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2016. – №6 (1178). – С. 124–143. 11. Булгаков Б.В. Колебания. – М.: Гостехиздат, 1954. – 890 с. 12. Гольдфарб Л.С. О некоторых нелинейностях в системах автоматического регулирования // *Автоматика и телемеханика*. – Т. VIII, №3. – С. 193–206. 13. Залманзон Л.А. Автоколебания в системах с пневматическими регуляторами, содержащими глухие камеры // *Труды 2-го всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования*. – М.-Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. – Т. 1. – С. 266–298. 14. Атанов Г.А. Основы одномерной нестационарной газодинамики. – К.: Вища школа, 1979. – 183 с. 15. Шевченко С.А. Экспериментальное исследование динамических характеристик регулятора давления газа в системе запуска ЖРД многократного включения // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр.* – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2015. – Вып. 4 (84). – С. 49–68. 16. Грунауэр А.А. О связи силы пружины с законом ее деформирования / А.А. Грунауэр, И.И. Тартаковский, А.Л. Григорьев // *Теория механизмов и машин*. – Х.: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7–22. 17. Григорьев А.Л. Использование интегралов Дюамеля для расчета импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: 2013. – № 54 (1027). – С. 63–86. 18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967 – 575 с. 19. Шевченко, С.А. Газодинамическое сопротивление и скорость звука в канале с гофрированной стенкой / С.А. Шевченко, В.И. Конох, А.П. Макотер // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП». – 2016. – № 20 (1192). – С. 94–101.

**References (transliterated):** 1. Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Modelirovanie pnevmosistemy zapuska ZhRD pri uchete teploobmena gaza so stenkami polostey i utochnenii sil, deystvuyushhikh na klapany regulatorov [Modelling of the LRE pneumatic starting system at taking into account the heat exchange between gas and cavity walls, as well as refinement of the forces acting on the regulator poppets]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, 2015, no. 7 (124), pp. 100–110. 2. Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Utochnenie metoda invariantov dlya raschyota dinamicheskikh parametrov gaza v truboprovodah pnevmosistemy zapuska raketnogo dvigatelya [Improvement of the invariant

method for calculating the dynamic parameters of gas in pipelines of rocket engine pneumatic starting system]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 156–181. **3.** Shevchenko S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov M. S. Utochnennyi raschet dinamicheskikh parametrov gaza v sharoballone [Improved calculation of gas-dynamic parameters in spherical tank]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 45 (1154), pp. 32–40. **4.** Shevchenko S. A., Mitikov Yu. A., Grigor'ev A. L. Osobennosti rascheta agregatov avtomatiki pnevmosistem raketnoy tekhniki pri uchete faktora szhimaemosti geliya [Specificity of control units of rocketry pneumatic systems analysis with allowance for the helium compressibility factor]. *Visnyk dvigatelestroeniya*, 2016, no. 2, pp. 148–159. **5.** Stadnik D. M. Obespechenie ustoychivosti sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya davleniya gaza v toplivnykh bakakh rakety-nositelya: dis. Kand. Tekhn. nauk [Assurance of sustainability of the system of automatic control of gas pressure in the launch vehicle tanks. Ph.D. thesis in Engineering Science]. Samara, 2015. 195 p. **6.** Dzitoev V. L., Esin V. I., Kuznecov V. F., Pryadko Yu. G. Issledovanie ustoychivosti gazovogo reduktora s truboprovodami [Research of stability of the gas pressure regulator with pipelines]. *Voprosy optimizatsii i avtomatizatsii konstruktorskikh rabot*. Tula, 1975, vol. 28, pp. 100–111. **7.** Krutikov G. A., Efremov A. P., Penchev V. D. Issledovanie na ECVM gazovykh reduksionnykh klapanov s dempfirovushhey kameroy [Research of gas reducing valves with damping cavities by using ECM]. *Problemy mashinostroeniya*. Kyiv, 1997, no. 5, pp. 94–98. **8.** Beserkskiy V. A., Popov E. P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 767 p. **9.** Glikman B. F. Avtomaticheskoe regulirovanie zhidkostnykh raketnykh dvigateley [Automatic control of liquid rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 296 p. **10.** Shevchenko S. A., Valivahin S. A., Grigor'ev A. L., Stepanov, M. S. Matematicheskaya model' manzhetnykh uplotneniy iz ftoroplasta dlya agregatov pnevmoavtomatiki raketnykh dvigateley [Mathematical model of PTFE seals for hydraulics units of rocket engines]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 6 (1178), pp. 124–143. **11.** Bulgakov B. V. Kolebaniya [Oscillations]. Gostekhizdat Publ., 1954. 890 p. **12.** Gol'dfarb L. S. O

nekotorykh nelineynostyakh v sistemakh avtomaticheskogo regulirovaniya [Some nonlinearities in automatic control systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. Vol. VIII, no. 3, pp. 193–206. **13.** Zalmanzon L. A. Avtokolebaniya v sistemakh s pnevmaticheskimi regulyatorami, sodержashhimi glukhie kamery [Self-oscillations in systems with pneumatic regulators containing blind cavities]. *Trudy 2-ed vsesoyuznogo soveshchaniya po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Proceedings of the 2nd All-Union Conference on automatic control theory]. Moscow–Leningrad, Izd-vo Akademii nauk SSSR Publ., Vol. 1, 1955, pp. 266–298. **14.** Atanov G. A. Osnovy odnomer-noy nestacionarnoy gazodinamiki [Fundamentals of one-dimensional unsteady gas dynamics]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 1979. 183 p. **15.** Shevchenko S. A. Eksperimental'noe issledovanie dinamicheskikh kharakteristik regulyatora davleniya gaza v sisteme zapuska ZHRD mnogokratnogo vklucheniya [Experimental research and adjustment of dynamic characteristics of the gas pressure regulator for startup system of the multiple run LRE]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktivnykh apparatov*: sb. nauch. tr. [Questions of design and production of flying vehicles: collection of research papers]. Kharkiv, Nac. Aerokosm. Un-t «KhAI» Publ., 2015, no. 4 (84), pp. 49–68. **16.** Grunauer A. A., Tartakovskiy I. I., Grigor'ev A. L. O svyazi sily pruzhiny s zakonom ee deformirovaniya [Connection of the spring force with its deformation law]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*. Kharkiv, Vyshha shkola Publ., 1985, no. 39, pp. 7–22. **17.** Grigor'ev A. L. Ispol'zovanie integralov Dyumelya dlya rascheta impul'sov davleniya i skorosti techeniya vyzkoy zhidkosti po truboprovodu [Use of Duhamel integrals for calculating pressure pulses and flow velocity of viscous liquids in a pipeline]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, 2013, no. 54 (1027), pp. 63–86. **18.** Gantmakher F. R. Teoriya matrits [Theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 575 p. **19.** Shevchenko, S.A., Konoh, V.I, Makoter, A.P. Gazodinamicheskoe soprotivlenie i skorost' zvuka v kanale s gofirovannoy stenкой [Gas-dynamic resistance and velocity of sound in the channel with the corrugated wall]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Kharkiv, 2016, no. 20 (1192), pp. 94–101.

*Поступила (received) 22.08.2016*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Шевченко Сергей Андреевич** – ведущий инженер-конструктор отдела агрегатов автоматики ЖРД, Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля», г. Днепр, e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Shevchenko Sergey A.** – Leading Engineer, Yuzhnoye State Design Office, Dnipro, e-mail: info@yuzhnoe.com.

**Григорьев Александр Львович** – проф., д-р техн. наук, профессор, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: +380577076035, e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Grigoriev Aleksandr L.** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «KhPI», tel.:

+380577076035, e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru

**Степанов Михаил Сергеевич** – проф., д-р техн. наук, декан, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: +380577076035, e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

**Stepanov Mikhail S.** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University «KhPI», tel.:

+380577076035, e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru.

UDC 539.3

*V.A. BAZHENOV, O.S. POGORELOVA, T.G. POSTNIKOVA***DANGEROUS BIFURCATIONS IN 2-DOF VIBROIMPACT SYSTEM**

Dynamic behaviour of strongly nonlinear non-smooth discontinuous vibroimpact system is studied. Under variation of system parameters we find the discontinuous bifurcations that are the dangerous ones. It is phenomenon unique to non-smooth systems with discontinuous right-hand side. We investigate the 2-DOF vibroimpact system by numerical parameter continuation method in conjunction with shooting and Newton-Raphson methods. We simulate the impact by nonlinear contact interactive force according to Hertz's contact law. We find the discontinuous bifurcations by Floquet multipliers values. At such points set-valued Floquet multipliers cross the unit circle by jump that is their moduli becoming more than unit by jump. We also learn the bifurcation picture change when the impact between system bodies became the soft one due the change of system parameters. This paper is the continuation of the previous works.

**Keywords:** Vibroimpact, Discontinuous, Hertz's law, Bifurcation, Multiplier, Nonlinear, Stability.

**Introduction.** Nonlinear problems are arising in many different domains of science and engineering. Often they are modeled using sets of ordinary differential equations with discontinuous right-hand side. For example they are the systems with mechanical impacts, stick-slip motion from friction, electronic switches, hybrid dynamics in control, and genetic networks [1]. Vibroimpact system is one example of such systems. Vibroimpact system is strongly nonlinear non-smooth one; the set of its motion differential equations contains the discontinuous right-hand side. Many new phenomena unique to non-smooth systems are observed under variation of system parameters. Jumps and switches in a system's state represent the grossest form of nonlinearity. Recently the investigations of such systems are developed rapidly. But today it has become clear that many aspects of dynamical behaviour of non-smooth systems aren't investigated and understood. Especially systems with impacts are of the particular interest for scientists. Under variation of system parameters a nonlinear system can often exhibit catastrophic bifurcations that destroy the desirable system state. Discontinuous bifurcations that occur in non-smooth vibroimpact systems are dangerous ones. They are hard bifurcations. Just such hard bifurcations can portend the crisis and catastrophe [2–4].

A crisis is a sudden discontinuous change in a chaotic attractor as a system parameter is varied. The crisis can be considered as a catastrophe that one endeavours to avoid. Catastrophic events can occur in different form in various kinds of nature, physics and mechanic systems. After the crisis the system state is quite different from that one before the crisis. If the nonlinear dynamical system state before the crisis is normal and desirable then the state after the crisis may be undesirable or destructive. The hard bifurcations were the subject of Catastrophe theory. Catastrophe theory was introduced in the 1960s by the renowned Field Medal mathematician Rene Thom as a part the general theory of local singularities [5]. Since then it has found applications across many areas, including biology, economics, and chemical kinetics. By investigations the phenomena of bifurcation and chaos, Catastrophe theory proved to be fundamental to the understanding of qualitative dynamics. The famous books [6, 7] are devoted to this topic. The theory was very fashionable at

70th years of 20th century. Then this fashion went away and terminology from catastrophe returned to singularities, discontinuous bifurcations and so on. But the catastrophes and crises remained. Blue Sky Catastrophes, the Swallow's Tail bifurcations are learnt by contemporary scientists [8].

The bifurcation analysis execution and the bifurcation diagrams building allow to find and to distinguish the safe, explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems. There are crying needs for investigations of arising of the safe, explosive and dangerous bifurcations in dynamical systems, of the crises and catastrophes for chaotic attractors. We have observed the fold catastrophe in two-body 2-DOF vibroimpact system [9–11].

We investigate the dynamic behaviour of 2-DOF vibroimpact system by numerical parameter continuation method in conjunction with shooting and Newton-Raphson methods. Short review was made in [10]. The works [12, 13] were discussed in this survey. We simulate the impact by nonlinear contact interactive force according to Hertz's contact law. Such simulation gives us the possibility to find the motion law along the whole time-base including the impact phase, to determine the impact duration and to find the contact impact forces. We find discontinuous bifurcation points where setvalued Floquet multipliers cross the unit circle by jump that is their moduli becoming more than unit by jump. It is phenomenon unique for nonsmooth systems with discontinuous right-hand side. We also learn the change of vibroimpact system dynamical behaviour when the impact between system bodies

became the soft one due the change of system parameters. This paper is the continuation of the previous works [9–11].

The aims of this paper are:

To find discontinuous bifurcations which can be the dangerous ones under variation of excitation amplitude for strongly nonlinear 2-DOF vibroimpact system.

To find discontinuous bifurcations under variation of excitation frequency.

To analyze the change of vibroimpact system bifurcation behaviour under the impact softening.

**Problem formulation. The initial equations.** So far as this paper is the continuation of works [9–11] the prob-

lem formulation is the same. We'll repeat it shortly.

We analyze the dynamic behaviour of discontinuous nonlinear vibroimpact system presuming it is a two-body two-degree-of-freedom one (Fig. 1).

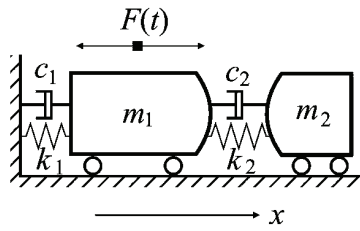


Figure 1 – Vibroimpact system model

This vibroimpact system is formed by the main body and attached one, and the latter can play the role of percussive or non-percussive dynamic damper. Bodies are connected by linear elastic springs and dampers. The main body is under the effect of periodical external force:

$$F(t) = P \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

We consider impacts as low velocity elastic collinear collisions without friction. The contact surfaces are smooth curvilinear ones without roughness. Thus real surface geometry in contact zone may be approximated by «Herzian» geometry.

The initial point of x coordinate is chosen in the main body mass center at the moment when all springs are not deformed. The initial distance between bodies at this moment is D. The structure of the system is experiencing transformation during the movement. The reason is its dynamic states modification forced by the impact contacts between elements.

Motion equations of the system have got the form:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2x_1 - 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \\ &\quad - \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \\ &\quad + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(x_1 - x_2)], \quad (2) \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) + \\ &\quad + \frac{1}{m_2}F_{con}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

where  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,

$\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $\omega_1, \omega_2$  – partial oscillation,

$F_{con}(x_1 - x_2)$  – contact interaction force, it is simulating the impact and working only during the impact. Initial conditions are:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = D, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0. \quad (3)$$

We considered in detail the impact simulation manner in [14,15]. To simulate the impact here we use the Hertz's contact interaction force based on quasistatic Hertz's theory [16, 17]:

$$\begin{aligned} F_{con}(x_1 - x_2) &= K[(x_1 - x_2)H(x_1 - x_2)]^{\frac{3}{2}} \\ K &= \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \delta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1\pi}, \delta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2\pi}, \quad (4) \end{aligned}$$

where  $(x_1 - x_2)$  is the relative bodies rapprochement due the local deformation in contact zone,  $H(x_1 - x_2)$  is the Heaviside step function,  $\nu_i$  and  $E_i$  are respectively Poisson's ratios and Young's modulus for both bodies, A, B and q are the geometry characteristics of contact zone. We consider these surfaces as spherical ones, then  $A = B = 1/2R_1 + 1/2R_2$ , where  $R_1, R_2$  are the contact surfaces radiuses. Only local deformations in contact zone are taken into account by the Hertz's theory. There are different proposals to make Hertz's formula more precise. Nevertheless Hertz's theory is widely used for analysis of vibroimpact system dynamics now too. Just impact simulation by nonlinear contact interaction force allows to find the motion law at all timebase including impact phase, to define impact duration and contact forces values.

**Bifurcation analysis.** Bifurcation analysis of vibroimpact system dynamic behaviour was fulfilled by numerical parameter continuation method in conjunction with shooting and Newton-Raphson methods [9]. Periodic motion stability or instability was determined by matrix monodromy eigenvalues that is by Floquet multipliers' values. The periodical solution is becoming unstable one if even though one Floquet multiplier leaves the unit circle in complex plane that is its modulus becoming more than unit. Such multiplier value characterizes the bifurcation kind of this bifurcation point. We have described the theoretical basis for analysis of two-body 2-DOF system in [9], numerical system parameters are given in [9–11].

**Discontinuous bifurcations under excitation amplitude varying.** We have plotted out the oscillation amplitude dependence on excitation amplitude for both system bodies that is the loading curves. Their global view in wide range of excitation amplitude is given at [10]. Now we'll look at their partial view where discontinuous bifurcation occurs (Fig. 2). Here and further the upper curve corresponds to attached body, the lower one – to main body. Unstable regimes are dotted by red colour. The oscillation amplitude is calculated as  $A_{max} = (|x_{max}| + |x_{min}|)/2$ .

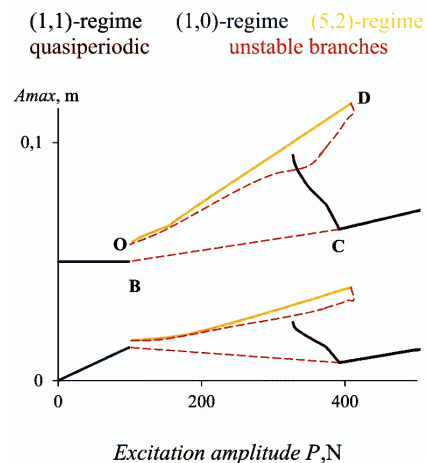


Figure 2 – Partial view of loading curves

Point B is a point of discontinuous bifurcation. It is phenomenon unique for non-smooth nonlinear system

whose equations have discontinuous right-hand side. The vibroimpact system converts its motion from impactless one (section OB) into motion with periodic impacts – unstable (1,1)-regime. Other regimes – stable and unstable branches of (5,2)-regime<sup>1</sup> – are arising here. At point B Floquet multipliers are experiencing a discontinuous change and accepting big values [18, 19].

The set-valued Floquet multipliers cross the unit circle in direction of real positive axis by jump that is their moduli becoming more than unit by jump. Floquet multipliers behaviour in the excitation amplitude range  $0 < P < 500$  N is shown at Fig. 3. Fig. 4 also shows well these jumps for multipliers  $\mu_1$  and  $\mu_2$ .

Table 1 shows these jumps by numbers.

Naturally the contact force also has a discontinuous bifurcation at point B.

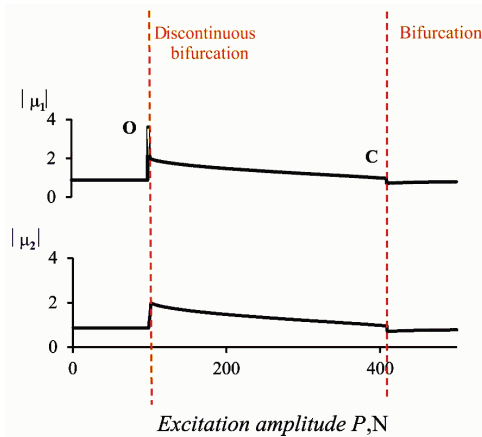


Figure 3 – Floquet multipliers jumps under discontinuous bifurcation at loading curves

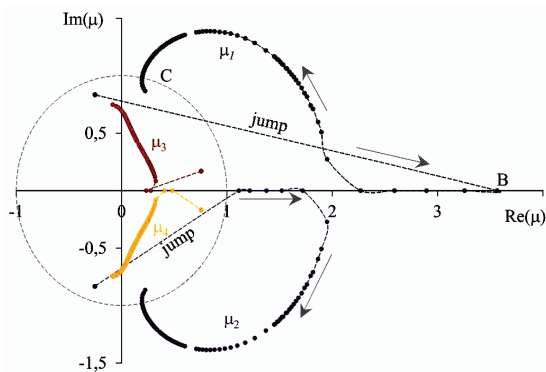


Figure 4 – Floquet multipliers behaviour in OBC section

Table 1 – Floquet multipliers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  jumps at point B

P	Re( $\mu_1$ )	Im( $\mu_1$ )	$ \mu_1 $	Re( $\mu_2$ )	Im( $\mu_2$ )	$ \mu_2 $
98.48	-0.25	0.83	0.87	-0.25	0.83	0.87
98.98	-0.25	0.83	0.87	-0.25	0.83	0.87
99.48	3.57	0	03.57	1.12	0	1.12

**Discontinuous bifurcations under excitation frequency varying.** We have plotted out the oscillation amplitude dependence on excitation frequency for both system bodies that is the frequency-amplitude response. Their global view in wide range of excitation frequency is given

<sup>1</sup> We call  $nT$ -periodic regime with  $k$  impacts per cycle as  $(n, k)$ -regime [20].  $T$  is period of external loading (1).

at [10]. Now we'll look at several partial views where discontinuous bifurcations occur.

At Fig. 5 at point B we observe phenomenon unique to non-smooth systems with discontinuous right-hand side. The point B (Fig. 6) is the point of discontinuous bifurcation. The vibroimpact system converts its motion from impactless one into motion with periodic impacts. T-periodic stable impactless regime is becoming T-periodic unstable regime with one impact per cycle – (1,1)-regime. Other regimes are arising here – stable (3,1)-regime and stable (4,2)-regime. Let us note by the way that (3,1)-periodic regime is stable in small frequency range. It is rare attractor [21].

At point B two complex conjugate Floquet multipliers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are leaving the unit circle. They are experiencing a change by jump and accepting big values (Fig. 7). One can also see the jump of monodromy matrix in this point.

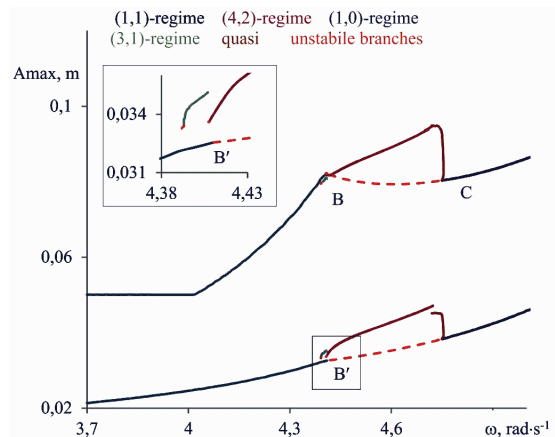


Figure 5 – Partial view of frequency-amplitude response

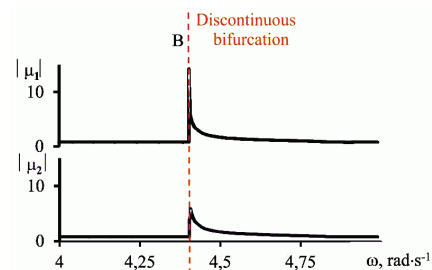


Figure 6 – Floquet multipliers jumps under discontinuous bifurcation at frequency-amplitude response

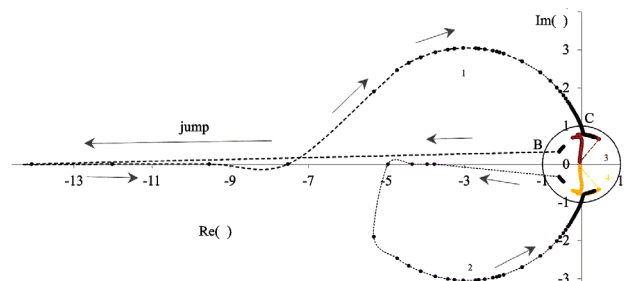


Figure 7 – Set-valued Floquet multipliers jump under discontinuous bifurcation

Another partial view frequency-amplitude response in narrow range of excitation frequency is depicted at Fig. 8. At point N we observe phenomenon unique to discontinuous system – discontinuous fold bifurcation. The discontinuous

fold bifurcation connects a table branch to an unstable branch. Here set-valued Floquet multiplier  $\mu_1$  makes huge jump along the positive real axis (Fig. 9). Its motion along positive real axis is demonstrated by Table 2.

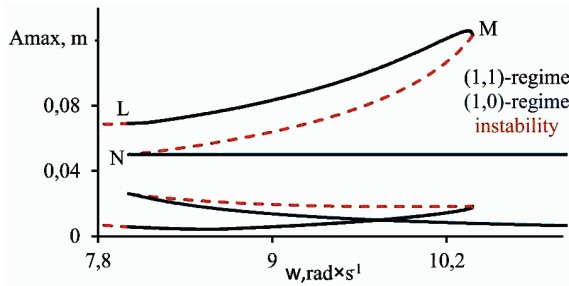


Figure 8 – Partial view of frequency-amplitude response

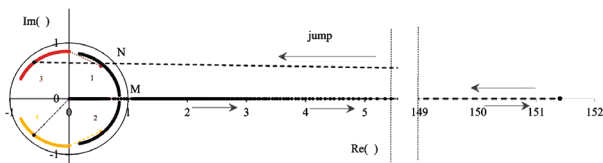


Figure 9 – Floquet multiplier jump under discontinuous bifurcation

Table 2 – Floquet multipliers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  jumps at point B

$\omega_i, \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	8.03	8.04	8.05	8.06	8.07	8.10	8.16
$\text{Re}(\mu_1)$	0.595	0.593	151.4	90.1	65.9	37.4	19.7
$\text{Im}(\mu_1)$	0.654	0.652	0	0	0	0	0
$ \mu_1 $	0.8828	0.8829	151.4	90.1	65.9	37.4	19.7

Naturally contact impact force also has the discontinuous bifurcation at these points.

**Vibroimpact system dynamic behaviour under change of impact kind.** There is the vibroimpact system classification by different aspects [22]. One of them is impact kind characteristic – rigid or soft impact. Some principal distinctions between rigid and soft contact were formulated in [23]. The main sign is its duration. Just impact duration dictates the way of its simulation. If impact duration is large then impact isn't instantaneous. Its simulation by boundary conditions with Newton's restitution coefficient using based on stereomechanic theory isn't possible [14]. The stiffness of vibroimpact system elements causes the impact softness. The soft impacts take place in engineering very often. What influence will impact kind change exert at vibroimpact system dynamic behaviour particularly at discontinuous bifurcations?

The clear criterion of impact rigidness or softness is absent. The typical trait of impact softness is its duration. Is it instantaneous or not? We have introduced the coefficient of the relative impact duration  $k_{con} = T_{con}/T \cdot 100\%$  at (1,1)-regime. Here  $T_{con}$  – the time of impact that is the time of contact between bodies. Rigid impact is almost instantaneous because its duration is very small. Relative impact duration is  $k_{con} = 0.09\%$  for the motion with rigid impact at (1,1)-regime. We have changed vibroimpact system parameters in such a way that impact between bodies became the soft one [11, 24, 25]. Relative impact duration became  $k_{con} = 20.9\%$  for the motion with soft impact at (1,1)-regime. We have plotted both loading curves

and frequency-amplitude response in wide range of excitation amplitude and frequency. We have discovered that discontinuous bifurcations are absent for our vibroimpact system with soft impact. Is it regularity or chance? Does impact softening make a vibroimpact system safer always by removing the dangerous discontinuous bifurcations? Further investigations may answer this question.

**Conclusions**

1. Numerical parameter continuation method provided the solution step by step and allowed to examine dynamic behaviour of two-body two-degree-of-freedom discontinuous vibroimpact system under variation of parameter continuation.

2. Impact simulation by Hertz's contact force allowed obtaining impact duration and contact forces under rigid and soft impact which wasn't instantaneous.

3. At rigid impact discontinuous bifurcations occur under variation of both excitation amplitude and excitation frequency.

4. A dangerous discontinuous fold bifurcation was observed under excitation frequency varying.

5. At soft impact discontinuous bifurcations are absent.

**References:** 1. Jeffrey M. R. Catastrophic sliding bifurcations and onset of oscillations in a superconducting resonator / M. R. Jeffrey et al. // Physical Review E. – 2010. – T. 81, № 1. – C. 016213. 2. Grebogi C. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems / C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke // Physical review letters. – 1986. – T. 57, № 11. – C. 1284. 3. Thompson J. M. T. Safe, explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems / J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, Y. Ueda // Physical Review E. – 1994. – T. 49, № 2. – C. 1019. 4. Фейгин М. И. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы / М. И. Фейгин // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – № 3. – C. 121-127. 5. Castrigiano D. P. L. Catastrophe theory / D. P. L. Castrigiano S. A. Hayes. – Westview Pr, 2004. 6. Arnold V. I. Catastrophe theory / V. I. Arnold. – Springer Science & Business Media; 2003. 7. Afrajmovich V. S., Il'yashenko Y. S., Shil'nikov L. P., Arnold V. I., Kazarinoff N. Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory. 1994. 8. Shilnikov, L. P. Showcase of blue sky catastrophes / L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – 24(08). – C. 1440003. 9. Bazhenov V. A. Stability and Bifurcations Analysis for 2-DOF Vibroimpact System by Parameter Continuation Method. Part I: Loading Curve / P. P. Lizunov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova, V. V. Otrasheskaia // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2015. – T. 4 (4). – C. 357-370. 10. Bazhenov, V. A. Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response / V. A. Bazhenov, P. P. Lizunov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2016. – T. 5(3). – C. 269-281. 11. Bazhenov V. A. Contact impact forces at discontinuous 2-DOF vibroimpact / V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. – 2016. – T. 1, № 1. – C. 183-196. 12. Allgower E. L. Introduction to numerical continuation methods / E. L. Allgower, K. Georg. – SIAM, 2003. – T. 45. 13. Nayfeh A. H. Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods / A. H. Nayfeh, B. Balachandran. – John Wiley & Sons; 2008. 14. Bazhenov V. A. Comparison of two impact simulation methods used for nonlinear vibroimpact systems with rigid and soft impacts / V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova // Journal of Nonlin-



ear Dynamics.– 2013. – № 2013:12. **15.** *Bazhenov V. A.* Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems / *V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova, S. N. Goncharenko* // Strength of materials. – 2009. – № 41(4). – P. 392–398. **16.** *Goldsmith W.* Impact: the theory and physical behaviour of colliding solids / *W. Goldsmith*. – 1960. Edward Arnold, London. **17.** *Johnson K. L.* Contact mechanics, 1985 / *K. L. Johnson*. – Cambridge University Press, Cambridge; 1974. **18.** *Ivanov A. P.* Analysis of discontinuous bifurcations in nonsmooth dynamical systems / *A. P. Ivanov* // Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – № 17(3-4). – P. 293–306. **19.** *Leine R. I.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems / *R. I. Leine, D. H. Van Campen, B. L. Van de Vrande* // Nonlinear dynamics. – 2000. – № 23 (2). – P. 105–164. **20.** *Lamarque C. H.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal superposition / *C. H. Lamarque, O. Janin* // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – № 235 (4). – P. 567–609. **21.** *Zakrzhevsky M.* Rare attractors in driven nonlinear systems with several degrees of freedom / *M. Zakrzhevsky, I. Schukin, V. Yevstignejev* // Transport & Engineering. – 2007. – № 24. **22.** *Blazejczyk-Okolewska B.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts—fundamental assumptions and rules / *B. Blazejczyk-Okolewska, K. Czolczynski, T. Kapitaniak* // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2004;23(3):517–537. **23.** *Andreus U.* Dynamics of SDOF oscillators with hysteretic motion-limiting stop / *U. Andreus, P. Casini* // Nonlinear Dynamics. – 2000. – № 22 (2). – P. 145–164. **24.** *Bazhenov V. A.* Change of impact kind in vibroimpact system due its parameters changing / *V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova* // MATEC Web of Conferences. – 2014. – Vol. 16. EDP Sciences. – P. 05007. **25.** *Bazhenov V. A.* Influence of system stiffness parameters at contact softness in vibroimpact system / *V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova* // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2014. – № 92. – P. 65–77.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Jeffrey Mike R., et al. Catastrophic sliding bifurcations and onset of oscillations in a superconducting resonator. Physical Review E 81.1 (2010): 016213. **2.** Grebogi Celso, Edward Ott, James A. Yorke Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. Physical review letters 57.11 (1986): 1284. **3.** Thompson J. M. T., Stewart H. B., Ueda Y. Safe, explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems. Physical Review E 49.2 (1994): 1019. **4.** Fejgin M. I. Projavlenie jeffektov bifurkacionnoj pamjati v povedenii dinamicheskoy sistemy. Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal, 2001, no 3, pp. 121-127. **5.** Castriigiano D. P. L., Hayes S. A. Hayes. Catastrophe theory. Westview Pr, 2004. **6.** Arnol'd V. I. Catastrophe theory. Springer Science & Business Media, 2003. **7.** Arnol'd V. I. et

al. Dynamical systems. V: bifurcation theory and catastrophe theory. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013. **8.** Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V. Showcase of blue sky catastrophes. International Journal of Bifurcation and Chaos 24.08 (2014): 1440003. **9.** *Bazhenov V. A., et al.* Stability and Bifurcations Analysis for 2-DOF Vibroimpact System by Parameter Continuation Method. Part I: Loading Curves. Journal of Applied Nonlinear Dynamics 4.4 (2015). pp. 357-370. **10.** *Bazhenov V. A., et al.* Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response. Journal of Applied Nonlinear Dynamics 5.3 (2016). pp. 269-281. **11.** *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Contact impact forces at discontinuous 2-DOF vibroimpact. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 2016, vol. 1, no 1, pp. 183-196. **12.** Allgower E. L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Vol. 45, SIAM, 2003. **13.** Nayfeh A. H., Balachandran B. Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods. John Wiley & Sons, 2008. **14.** *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Comparison of two impact simulation methods used for nonlinear vibroimpact systems with rigid and soft impacts. Journal of Nonlinear Dynamics, 2013. **15.** *Bazhenov V. A. et al.* Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems. Strength of materials 41.4 (2009). pp. 392-398. **16.** *Goldsmith W.* Impact. Courier Corporation, 2001. **17.** *Johnson K. L.* Contact mechanics, 1985. (1974), pp. 57-63. **18.** *Ivanov A. P.* Analysis of discontinuous bifurcations in nonsmooth dynamical systems. Regular and Chaotic Dynamics 17.3-4 (2012), pp. 293-306. **19.** *Leine R. I., Van Campen D. H., Van de Vrande B. L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. Nonlinear dynamics 23.2 (2000). pp. 105-164. **20.** *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal superposition. Journal of Sound and Vibration 235.4 (2000), pp. 567-609. **21.** *Zakrzhevsky, M., Schukin, I., Yevstignejev, V.* Rare attractors in driven nonlinear systems with several degrees of freedom. Transport & Engineering 24 (2007). **22.** *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts—fundamental assumptions and rules. European Journal of Mechanics-A/Solids23.3 (2004), pp. 517-537. **23.** *Andreus, U., Casini, P.* Dynamics of SDOF oscillators with hysteretic motion-limiting stop. Nonlinear Dynamics 22.2 (2000), pp. 145-164. **24.** *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Change of impact kind in vibroimpact system due its parameters changing. MATEC Web of Conferences, vol. 16. EDP Sciences, 2014. **25.** *Bazhenov, V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Influence of system stiffness parameters at contact softness in vibroimpact system. Opir materialiv ta teoriiya sporud 92 (2014), pp. 65-77.

Надійшла (received) 22.09.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Баженів Віктор Андрійович** – доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, тел. +38(044) 245-48-29; моб.тел.: +38(067) 111-22-33; e-mail: vikabazh@ukr.net

**Bazhenov V.A.** – Professor, Head of Department of Structural Mechanics, KNUCA; tel.: +38(067) 111-22-33; e-mail: vikabazh@ukr.net

**Погорелова Ольга Семенівна** – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, тел. +38(044) 245-48-29; мобільний тел.: +38(067) 606-03-00; e-mail: pogos13@ukr.net

**Pogorelova O.S.** – Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Research Officer, KNUCA; tel.: +38(067) 606-03-00; e-mail: pogos13@ukr.net

**Постнікова Тетяна Георгіївна** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, тел. +38(044) 245-48-29; мобільний тел.: +38(050) 353-47-19; e-mail: posttan@ukr.net

**Postnikova T.G.** – Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, KNUCA; tel.: +38(050) 353-47-19; e-mail: posttan@ukr.net

**Y. GRIGORENKO, E. BESPALOVA, N. YAREMCHENKO**

**SOME STATIONARY DEFORMATION PROBLEMS FOR COMPOUND SHELLS OF REVOLUTION**

A common approach to solving stationary deformation problems for compound systems composed of shells of revolution with different geometry and structure is developed. The approach is based on the use of shell models with different level of rigor and of the general numerical-analytical technique for solving corresponding problems. The examples of studying the subcritical stress-strain state, vibrations, and dynamical instability of complex form systems are presented, features of their deformation are noted.

**Keywords:** Compound systems, stationary deformation, common approach, analysis.

**Introduction.** Many constructions of modern engineering are modeled by the elastic systems consisting of conjugated shells of revolution with different geometry and structure. For example, they include airframes of rockets and rocket engines, underwater vehicles, protective coatings for nuclear reactors, surface tanks on cylindrical or conical supports, a.o. Study of stationary deformation of these systems covers the wide range of theoretical and applied problems. Their solving is related to reasonable compromises between the choice of the model, which describes adequately behavior of the construction on the one hand, and its effective realization for the following rational studying on the other hand. In large measure, these requirements are taken into account by the authors in developing approaches to the design of complex shell systems [1–4].

**1. Principal Ideas.** The present report addresses the following three classes of problems for stationary deformation: subcritical state of flexible shells, vibrations of branched shell systems, dynamical stability of the shells undergoing harmonic actions.

These problems are united by the common object of studying and are solved using the common models of deformation and ideology of a numerical-analytical technique.

As object for study, the system consisting of  $J$  shells of revolution with different geometry, which are coaxial with respect to the  $Oz$ -axis, and including, in the general case, a number of branches from the meridian-generatrix is chosen (Fig. 1, where  $\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_j^0, \alpha_j^{M_j})\}$  ( $j = \overline{1, J}$ ) is the variable that changes along the meridian).

The shells may be whether single-layer with continuous inhomogeneity of elastic properties over the thickness or consisting of several layers whose interfaces are in ideal contact (discrete inhomogeneous shells). This system undergoes actions of a stationary axisymmetric force and temperature loads, in particular, distributed along the meridian actions, as well as of forces-moments, which are concentrated on the shell ends or in a number of normal cross sections  $z = \text{const}$ . It is assumed that the layers are made of isotropic or orthotropic materials and are deformed elastically within the range of actions being considered. The ends of the shell system may be under arbitrary physically consistent boundary conditions, while the equilibrium conditions of static characteristics as well as the continuity condition for the kinematic characteris-

tics of the stress state are formulated at the lines connecting two or several shells in the general coordinate system  $(r, z)$ .

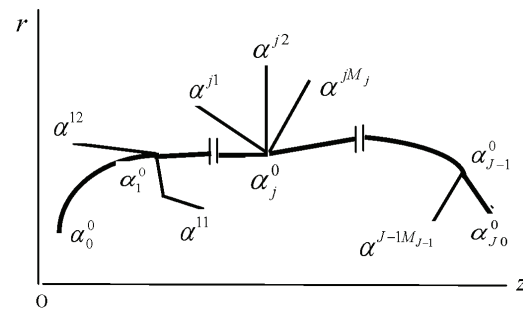


Figure 1 – General view of the generatrix-meridian of the shell system

The geometrically nonlinear mean bending theory formulated within the framework of the Kirchhoff-Love classic model, first-order shear Timoshenko-Mindlin model, and nonclassical one taking into account transverse shears and reduction is used as theoretical foundation for the analysis. The respective mathematical models are presented in the form of nonlinear one-dimensional problems, linearized two-dimensional boundary-value problems, and eigen-value different order problems.

The ideology of the numerical-analytical technique for solving corresponding problems is based on the rational reduction to one-dimensional linear boundary-value problems, which are solved numerically with high accuracy by the orthogonal-sweep method. To do this, the following methods are used: Newton–Kantorovich–Raphson quasilinearization method, reduction of dimensionality using the Fourier series, and step-by-step method as the variant of reverse iteration with formation of the Rayleigh relation.

**2. Stress State of Flexible Shells.** The stress-strain state of the systems composed of inhomogeneous shells of revolution within the wide range of static axisymmetric loads is considered in the subcritical stage of deformation. The study is carried out within the framework of the above prerequisites using classic and shear Timoshenko-type models and involving the quasilinearization method in combination with the orthogonal-sweep method.

Let us study the stress state of the system which consists of the following three shells of revolution (Fig. 2 a): cylindrical one with radius  $r_c$ , length  $l_c$  (marking C), tore-

elliptical one of negative curvature with the ellipse semi-axes  $a, b$  and distance  $r_{01}$  of the ellipse center to the axis of revolution  $Oz$  (marking  $E^-$ ), tore-elliptical one of positive curvature with the same semi-axes and distance  $r_{02}$  of the ellipse center to the axis of revolution (marking  $E^+$ ). All the shells are of the same thickness  $h$  and made of the isotropic mylare material ( $E$  is the elastic modulus,  $\mu$  is Poisson's ratio) with both end contours being rigidly fixed. The  $C - E^- - E^+$  system is acted upon by the external force field of the intensity  $q$ .

In problem solving, the following input data are used:

$$r_c = 0.1m, l_c/r_c = 1.0, b/r_c = 2.0, a/b = 0.5 - 2.0, r_{01}/r_c = 3.0, r_{02}/r_c = 1.0, h/r_c = 0.01, E = 5.0285 \text{ GPa}, \mu = 0.33; \alpha \in [0, \pi/2]$$

( $\alpha$  is the central angle of both elliptical shells).

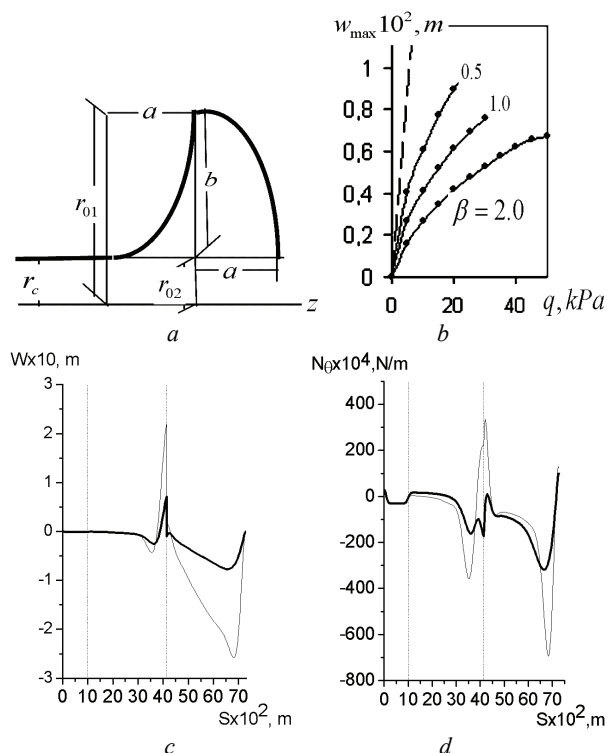


Figure 2. View of the generatrix of the system  $C - E^- - E^+$  ( $C$  is cylinder,  $E^-$  is ellipse of negative curvature,  $E^+$  is ellipse of positive curvature) (a); «load – deflection» curves  $w_{\max}(q)$  for the ellipticity parameters  $\beta = a/b = 1.0$  (b); distributions of the deflection  $w = w(s)$  (c) and circumference force  $N_\theta = N_\theta(s)$  (d) along the system generatrix  $s$

The results obtained are presented in Fig. 2, b as the «load – deflection» curves  $w_{\max}(q)$  for different values of the geometrical parameter  $\beta = a/b = 0.5; 1.0; 2.0$  ( $b$  is fixed) that characterizes the ellipticity of the shells  $E^-$  and  $E^+$ . Here the strokes correspond to the linear theory for  $\beta = 0.5$ . The value of the limiting critical load decreases monotonically within  $q_{cr} \in [25.4 - 49.8]$  kPa with  $\beta$ .

The distributions of the deflection  $w$  and circumferential force  $N_\theta$  along the meridian-generatrix  $s$  for  $\beta = 1.0$  near the critical load  $q/q_{cr} = 0.93$  are shown in Fig. 2, c, d, respectively (heavy lines are referred to the nonlinear

theory, thin lines to the linear theory, normal sections  $s = \text{const}$  of the conjugated elements of the system are marked by vertical straight lines). The qualitative character of these curves both defined by the linear and nonlinear theories is same for deflections as well as for stresses while quantitatively the maximum values of these functions differ more than two times.

Figure 2, d shows that the compressive stresses at the given external load peak in the zone of the positive curvature of the elliptical shell  $E^+$ . For this reason, this zone is the most dangerous link considering the stability of the whole system. Let us assess the possibility to define the limiting value of the load for the  $C - E^- - E^+$  system as a whole by this single the most dangerous element. Values of the critical load for the shell  $E^+$  under condition of hinged supporting in the section of conjugation with the shell  $E^-$  for  $\beta \in [0.5 - 2.0]$  are collected in Table 1. Values of the limiting load for the  $C - E^- - E^+$  system are presented here also.

Table 1. Values of the critical load for the tore-elliptical element with positive curvature ( $E^+$ ) and for the system as a whole ( $C - E^- - E^+$ )

$\beta = a/b$	$q_{cr}, \text{kPa}$			
	0.5	1.0	1.5	2.0
$E^+$	9.43	15.2	21.6	28.4
$C - E^- - E^+$	25.4	32.2	41.9	49.8

As is seen from the Table, values of the limiting load for the system as a whole exceed appropriate values for the above shell by 1.5-2.5 times. This example demonstrates that all the elements of the shell system are interrelated in determining limiting critical loads.

**3. Vibrations of the Branched Shells of Revolution.** To study vibrations of the compound systems composed of branched shells, we involve the nonclassical model which takes into account transverse shears and reduction and employs the step-by-step method with reverse iteration in combination with the orthogonal-sweep method.

Consider the fragment of the mine pipeline with like periodically arranged external circular ribs spaced by  $l$ . The design schema of the fragment is presented by the shell system, which consists of the cylindrical shell of length  $l$ , midsurface radius  $R$ , thickness  $h$  and of the circular plate with the inner radius  $R$ , outer radius  $R + l$  and thickness  $h$  conjugated with this shell in the section  $z = l/2$  (Fig. 3 a).

The symmetry conditions are specified at the cylinder ends  $z = 0$  and  $z = l$ . It is assumed that the outside contour of the plate  $x = R + l$  is free, the conjugation conditions are given in the section of the cylinder  $z = l/2$  and at the inside contour of the plate  $x = R$ . The cylinder and circular plate are made of an isotropic material with elastic modulus and Poisson's ratio  $E_c, \mu_c$  and  $E_{pl}, \mu_{pl}$  respectively.

The lowest frequencies of the shell system were studied depending on the relative stiffness of its elements with the parameter  $\eta = E_{pl}/E_c \in [-1; 5]$  with  $E_c = \text{fixed}$ . When  $\eta < -1$  (the first limiting case), vibrations of the

system are governed only by the plate while the cylinder may be considered as the element that provides rigid fixation of its internal contour. If  $\eta \geq 4$  (the second limiting case), to the contrary, the cylinder dominates while the plate can be considered as the element that provides rigid fixation of the half-length cylinder.

The results of these studies ( $R = 0,1 \text{ m}$ ,  $h_c = h_{pl} = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $l_c = l_{pl} = 0,1 \text{ m}$ ;  $E_c = 2 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0,3$ ) for the frequency parameter  $\lambda = \lambda(\eta)$  are presented in Fig. 3 b ( $\eta \in [1,0 - 5,0]$ ,  $\lambda = \omega^2$ , where  $\omega$  is the minimal natural frequency). As is seen from the Figure, the system vibrates as a single whole only within the interval  $\eta \in (2,25; 3,75)$ . Outside of this interval, the system vibrates whether as a cantilever circular plate ( $\eta < 2,25$ ) or as a half-length cylinder with the rigidly clamped contour  $s = l_c / 2$  ( $\eta > 3,75$ ).

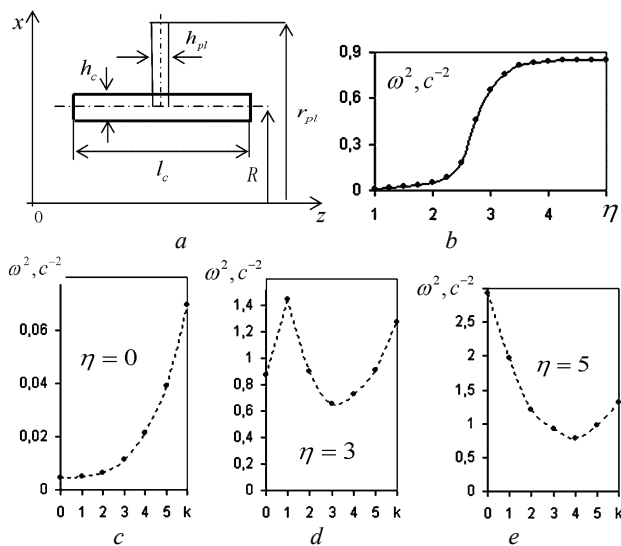


Figure 3 – Design schema of the fragment of the cylindrical pipe with circular plate (a); dependency of the frequency parameter  $\lambda = \omega^2$  on the parameter  $\eta$  of the relative stiffness of the cylinder and plate (b); dependency  $\lambda = \lambda(k)$ , where  $k$  is a number of the nodal diameters of the form of the system vibrations in the circumferential direction, for  $\eta = 1$  (c),  $\eta = 3$  (d),  $\eta = 5$  (e)

Note that conditional dependencies  $\lambda = \lambda(k)$ , which are typical for shells of revolution, demonstrate within the above intervals of variation of  $\eta$  qualitatively different character (see Fig. 3 c, d, e;  $k$  is a number of nodal diameters in the circumferential direction). The dependency  $\lambda = \lambda(k)$  at  $\eta = 1$  (Fig. 3 c) is typical for bending vibrations of plates. It is monotonic function which increases with a number of the diameters  $k$ . This dependency at  $\eta = 5$  (Fig. 3, e) is typical for smooth cylindrical shells and is nonmonotone being minimal at  $k = 4$ . The dependency  $\lambda = \lambda(k)$  at  $\eta = 3$  (Fig. 3, d) takes an intermediate position between the two above considered cases and consists of two branches. The first branch at  $k = 0, k = 1$  is a monotonically increasing functions that corresponds to prevailing vibrations of the plate  $A_{pl} > A_c$  in the whole shell system ( $A_{pl}$  and  $A_c$  are the relative maximal vibration amplitudes of the plate and cylinder, respectively). The second branch at  $k > 2$  is presented by the nonmonotone function

with the minimum at  $k = 3$  which indicates that vibrations of the cylinder are prevailing ( $A_c > A_{pl}$ ).

Thus, we can conclude that in the case of branched shell systems the known dependencies typical for vibrations of their single components can undergo not only quantitative changes but and qualitative ones.

**4. Dynamical Stability of Shells of Revolution.**

Let us consider the main domain of the dynamical instability (DDI) of shells of revolution undergoing the axisymmetric periodical actions  $P(s, t) = P_0(s) + P_t \cos \omega t$ , where  $s$  is the length of the generatrix-meridian,  $P_0(s)$  is the static component of the action,  $\omega$  and  $P_t(s)$  are the frequency and amplitude of its dynamical portion,  $t$  is the time variable. In studying, the following assumptions are used:

- the general state of the shell  $Y = Y^0 + \delta Y$  ( $Y^0 = Y_{00}(s) + Y_{0t}(s) \cos \omega t$  is the initial axisymmetric stationary state,  $\delta Y$  is the nonaxisymmetric perturbation) is described, as above, by the two-dimensional inhomogeneous dynamical problem of the mean-bending theory without allowing for energy dissipation;
- perturbation  $\delta Y(s, \theta, t)$  is defined from the homogeneous dynamical problem, which is obtained by linearization of the initial problem and contains the components of the initial axisymmetric state  $Y^0$  with allowance for its inhomogeneity in the form of parametric terms;
- the existence conditions of periodic solutions of the homogeneous linearized problem with periods  $T = 2\pi / \omega$  and  $2T$ ; these periods correspond to the boundaries of the main DDI in approximating them by trigonometric series over the circumferential coordinate and time for each number of the harmonic  $k$  and are determined from solving two one-dimensional two-parametric eigenvalue problems.

In what follows, we will study features of the main DDI of shells with alternating Gaussian curvature in comparison with the shells of constant (zero) curvature using as an example corrugated and smooth cylinders.

Assume that the generatrix-meridian of a corrugated shell is described by a plane sinusoid curve with an amplitude  $a$  and period  $l$  whose coordinate axis is distant by  $R$  from the  $z$ -axis of revolution. At  $a = 0$ , we deal with the cylindrical shell of the radius  $R$ . The both shells are isotropic, of same thickness  $h$  and length  $2L$  along the  $z$ -axis, ends are hinged, and in the central section  $z = 0$  are subject to the shearing harmonic force with the amplitude  $P_t = Q^*$  and frequency  $\omega$ .

Figure 4 shows distributions of the meridional  $c$  and circumferential  $\tilde{N}_\theta = N_\theta E_0 / Q^*$  forces along the generatrix for the smooth (Fig. 4 a, I) and corrugated (Fig. 4 b, II) cylinders for  $h/R = 0,05$ ;  $2L/R = 2$ ;  $a/R = 0,16$ ;  $2L/l = 4$ ;  $R = 500l_0$ ;  $E = E_0$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\rho = \rho_0$ , where  $l_0$  is the characteristic linear dimension,  $E$  is the elastic modulus,  $\mu$  is Poisson's ratio,  $\rho$  is the material density. As is seen, the meridional forces in the cylindrical shell are absent while the circumferential forces are tensile and concentrated in the vicinity of the place where the load is applied. In the case of corrugated shell, we can observe alternation of tensile and compressive zones both for me-

ridional and circumferential forces with the circumferential ones exceeding considerably the meridional.

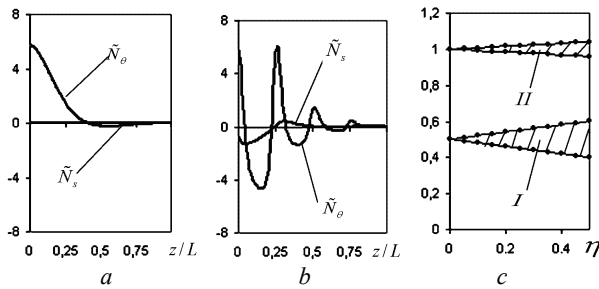


Figure 4 – Distributions of the meridional  $\tilde{N}_s$  and circumferential  $\tilde{N}_\theta$  forces for the cylindrical (a) and corrugated (b) shells and their main DDIs (c)

The main DDIs for these two shells are presented in Fig. 3 c with axes  $\lambda = \omega(\eta) / \omega_{II}(0)$  and  $\eta = P_t / P_{cr} \in [0; 0.5]$ , where  $\omega_{II}(0)$  is the natural frequency of the shell with alternating curvature. As comparison of the domains presented above shows, the DDI for the corrugated cylinder (II) is arranged higher on the frequency axis and is significantly narrower than for the smooth cylinder (I).

Thus, the stress state of the shells of alternating curvature is defined by the existence of the zones with tensile and compressive stresses that, as distinct from the shells with constant curvature, may cause the loss of stability both under internal and external pressures. Besides, employing of such shells makes it possible to decrease sufficiently the domain of dangerous parameters of the harmonic action.

**Conclusions.** The common approach to solving a number of problems on stationary deformation of the compound systems composed of shells of revolution is proposed. The approach involves shell models with differ-

ent degree of severity and general numerical-analytical technique to solve the relevant problems by the rational reduction of them to one-dimensional linear boundary-value problems.

Using the illustrative examples, the interrelation of all elements of the shell system in determining limiting critical loads as well as the possibility of qualitative change of the known dependencies typical for vibrations of its single components are shown.

**References:** 1. Grigorenko Ya.M. The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) / Ya. M. Grigorenko, A. Ya. Grigorenko // Int. Appl. Mech. – 2013. – Vol. 49 (2). – P. 123-193. 2. Bepalova E. Vibration of Highly Inhomogeneous Shells of Revolution under Static Loading / E. Bepalova, G. Urusova // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2008. – Vol. 3(7). – P. 1299-1313. 3. Bepalova E. I. Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction / E. I. Bepalova, G.P. Urusova // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51 (4). – P. 410-419. 4. Bepalova E.I. Identifying the Domains of Dynamic Instability for Inhomogeneous Shell Systems under Periodic Loads / E. I. Bepalova, G.P. Urusova // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 47 (2). – P. 186-194.

**References (transliterated):** 1. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya. The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review). Int. Appl. Mech., 2013, vol. 49 (2), pp. 123-193. 2. Bepalova E., Urusova G. Vibration of Highly Inhomogeneous Shells of Revolution under Static Loading. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2008, vol. 3(7), pp. 1299-1313. 3. Bepalova E.I., Urusova G.P. Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction. Int. Appl. Mech, 2015, vol. 51 (4), pp. 410-419. 4. Bepalova E.I., Urusova G.P. Identifying the Domains of Dynamic Instability for Inhomogeneous Shell Systems under Periodic Loads. Int. Appl. Mech., 2011, vol. 47 (2), pp. 186-194.

Надійшла (received) 22.09.2016

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Григоренко Ярослав Михайлович** – головний науковий співробітник відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; академік НАН України, д.т.н.; Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; тел.: (044)4547759; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ua.

**Grigorenko Yaroslav** – Chief Researcher of S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, tel.: (044)4547759; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ua.

**Беспалова Олена Іванівна** – провідний науковий співробітник відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; д.ф.-м.н.; Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; тел.: (044)4547759; e-mail: elena\_bepalova@ukr.net.

**Bepalova Elena** – Leading Researcher of S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, tel.: (044)4547759; e-mail: elena\_bepalova@ukr.net

**Яремченко Наталія Петрівна** – науковий співробітник відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; к.ф.-м.н.; Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України; тел.: (044)4547759; e-mail: n.yaremchenko@mail.ru.

**Yaremchenko Natalia** – Research Officer of S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, tel.: (044)4547759; e-mail: n.yaremchenko@mail.ru

УДК 539.3

*P.V. KROT, V.V. KORENNOY***VIBRATION DIAGNOSTICS OF ROLLING MILLS BASED ON NONLINEAR EFFECTS IN DYNAMICS**

This paper intends to describe nonlinear effects occurring in rolling mills dynamics. That is necessarily for vibrations damping and reliable diagnostics of rolling mills equipment under non-stationary working conditions. Three types of nonlinear effects are investigated taking place in drivelines and stands of different design, namely, transient torsional vibrations in hot rolling mills, chatter vibrations in tandem cold rolling mills and parametrical vibrations in high-speed wire and rod rolling mills. The procedure is proposed for natural frequencies identification when short transient torque signals restrict application of the Fourier transform. Examples are given on using nonlinear effects for wear diagnostics and vibrations control based on natural frequencies and modes analysis of multi-body systems.

Keywords: Rolling mills, nonlinear oscillations, chatter vibrations, identification

**Introduction.** The different types of rolling mills for production of steel strips, rods and tubes belong to the most dynamical large-scale industrial plants. A wide variety of drivelines designs are formed by multistage gearboxes, pinion stands, universal spindles, switchable couplings and the huge number of rolling stands types with 2, 4 and up to 20 rolls including compact rolling mills (blocks) with both vertical and horizontal rolls for wire and rod production.

Standard maintenance procedures usually implemented for majority of rotating machines (balancing, shafts alignment) are not applicable for rolling mills due to frequent changes of rolls and technological schedules. Harsh operating conditions of rolling mills affect vibration parameters and diminish implementation of standard diagnostics methods where loads and speeds are supposed to be stationary. That makes very important to understand the causes of different dynamical processes occurring under variable working conditions.

Research of nonlinear effects in rolling mills dynamics covers a wide range of domains in mechanics theory including elastic-plastic behavior of deformed metal, nonlinear torsional vibrations, chatter vibrations synchronization and parametrical axial vibrations of rolled rods in the multi-stand tandem mills where neighboring stands coupled by rolled metal. Interrelation of several nonlinear effects, which cause high dynamics, complicates the development of vibration damping methods in certain type of mills and appropriate diagnostics procedures.

This research intends to represent a systemized overview of nonlinear effects observed in steel rolling mills of different types. Three problems in rolling mills dynamics are discussed: 1) transient torsional oscillations in drivelines of hot rolling mills subjected to excessive wear (angular and radial backlashes); 2) chatter vibrations in continuous cold rolling mills; and 3) parametrical oscillations in high-speed compact reducing sizing mills with multi-stage gearboxes which structure is controlled by switchable servo couplings. The possible methods are proposed for rolling mills equipment diagnostics and resonance modes detection for vibration damping based on analysis of nonlinear dynamical effects.

**1. Transient torsional vibrations in the drivelines of hot rolling mills.** The drivelines of hot rolling mills are

operated under high specific loads, harsh conditions and are characterized by increased wear. Backlashes as bilinear stiffness (Figure 1a) and frequent step-like loads cause the most severe failures in the drivelines. The typical geared driveline of hot rolling mill includes (Fig. 1, b): 1 – rolled strip; 2 – work rolls; 3 – spindles with the sliding pads or universal joints; 4 – pinion stand splitting drive torque; 5 – intermediate coupling; 6 – gearbox; 7 – motor shaft coupling; 8 – electric drive (5-12 MW).

Quick wear causes angular and radial backlashes which are opened before transient process for uncertain part  $\delta_i$ , then, coupling stiffness become equal to  $\text{tg}(\beta)$ .

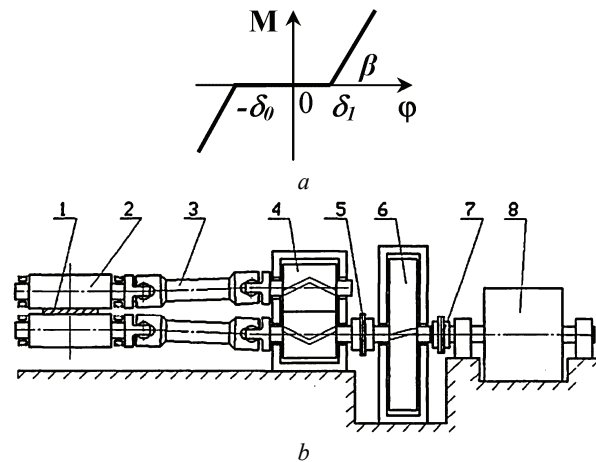


Figure 1 – Bilinear stiffness characteristic (a); geared driveline of the hot rolling mill (b)

Standard methods of vibration diagnostics [1], e.g. based on envelope spectrum analysis, require stationary drive speed and work load for defects recognition. It is almost impossible to provide constant conditions because of metal temperature and friction variation in the deformation zone. To solve these problems, a new approach is proposed for wear diagnostics based on detailed models (Fig. 2, a) of drivelines and their analysis in the range of natural frequencies of vibration [2]. Its implementation requires enough accurate identification of natural frequencies by the short and noised transient signals in order to compose reliable diagnostic rules.

**1.1 Natural frequencies identification for short transient vibrations.** Torsional moments of inertia are determined by the equipment drawings and referred to the rolls rotation speed. To determine the elasticity coefficients with sufficient accuracy by the drawings is virtually impossible, because coupling parts have a complex shape, and there is a natural variation in modulus values. It is proposed to determine the elastic constants by the known analytical relations of the first and second harmonics of torsional vibration in the 3-mass system (Fig. 2, b).

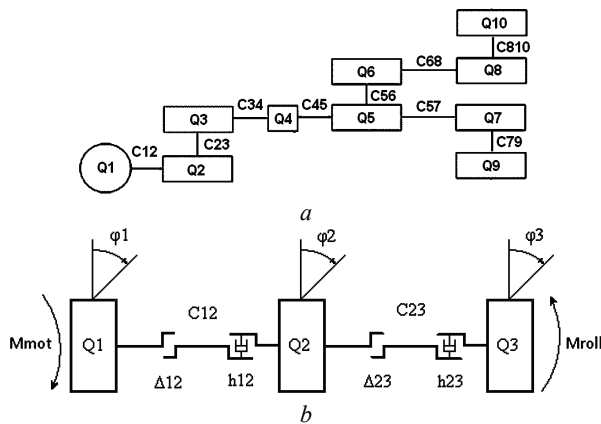


Figure 2. Design schemes of multi-body driveline of rolling mill: a – full; b – reduced to 3-mass model; (Qi – the moment of inertia of rigid components; Ci – the stiffness of the massless elastic couplings; Δii – gaps; hii – damping coefficients; φi – angular displacement; Mmot, Mroll – motor and rolling torques)

Torque signals can be represented by the following expressions:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t); \\
 f_1(t) &= (a_1 \cdot \cos(a_5 \cdot t) + a_3 \cdot \sin(a_5 \cdot t)) \cdot \exp(a_7 \cdot t); \\
 f_2(t) &= (a_2 \cdot \cos(a_6 \cdot t) + a_4 \cdot \sin(a_6 \cdot t)) \cdot \exp(a_8 \cdot t); \\
 f_3(t) &= a_9 \cdot (1 - \exp(a_{10} \cdot t)),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

where  $f_1(t)$  and  $f_2(t)$  – 1st and 2nd natural frequency modes of damped oscillations,  $f_3(t)$  – exponentially increasing rolling force (input load),  $a_1...a_{10}$  – coefficients of approximation (Table 1).

Table 1 – Coefficients of transient signal approximation

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
-147	85	191	-31	11,99	20,91	22,17	3,65	112	36,7

Approximation required when short records of real transient process restrict application of the Fourier transform to determine natural frequencies. The useful parameters from the Table 1, reflecting the transient process, are:  $a_5, a_6$  – first and second natural frequencies of the driveline (Hz),  $a_9$  – static value of rolling torque (kN m),  $a_{10}$  – rate of the rolling torque rise (characterized by rolls speed and metal reduction during the transient process).

Comparing the values of natural frequencies obtained from the equipment drawings and experimental data (Table 2), a notable difference can be seen in  $\beta_1$  16,66...12,03 Hz and  $\beta_2$  25,98...21,09 Hz.

The influence of moments of inertia on the natural frequencies is significantly lower than the influence of the

stiffness. In turn, the stiffness (elasticity) is difficult to determine accurately, since parts often have a complex shape, different material components (different values of modulus), but it significantly affects the values of natural frequencies. Adjusted values of stiffness are determined by using the known relations of natural frequencies with parameters of 3-mass vibrating system:

$$\begin{cases}
 \beta_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot d \cdot \sqrt{a-b}; \\
 \beta_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot d \cdot \sqrt{a+b};
 \end{cases}$$

$$a = (f + e \cdot c); \quad b = \sqrt{(f - e \cdot c)^2 + c}; \tag{2}$$

$$c = \frac{C_{12}}{C_{23}}; \quad d = \sqrt{\frac{C_{23}}{Q_2}}; \quad e = \frac{Q_1 + Q_2}{2 \cdot Q_1}; \quad f = \frac{Q_2 + Q_3}{2 \cdot Q_3}.$$

Knowing the initial parameters  $Q_1, Q_2, Q_3$  – calculated from drawings and  $\beta_1, \beta_2$  – defined from real signals recordings, the adjusted values of stiffness  $C_{12}$  and  $C_{23}$  (Table 2) are determined by solving numerically the system of equations (2). Results of simulation are represented in Fig. 3.

Table 2. Initial and enhanced values of natural frequencies of 3-mass driveline

Parameters	$Q_1 \times 10^3$ , kg·m <sup>2</sup>	$Q_2 \times 10^3$ , kg·m <sup>2</sup>	$Q_3 \times 10^3$ , kg·m <sup>2</sup>	$C_{12} \times 10^6$ , N·m/rad	$C_{23} \times 10^6$ , N·m/rad	$\beta_1$ , Hz	$\beta_2$ , Hz
Calculated	46,70	11,85	2,48	214,10	30,68	16,66	25,98
Adjusted				68,77	32,81	12,03	21,09

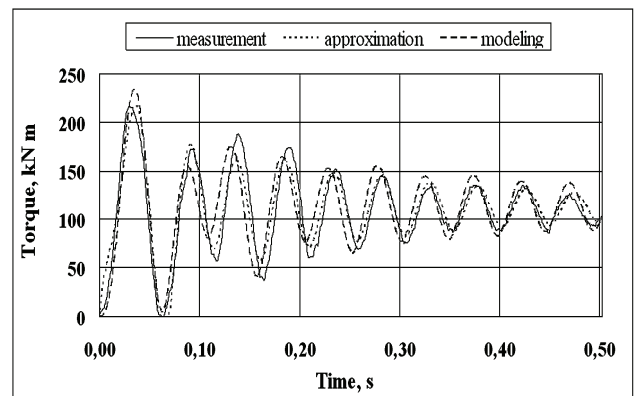


Figure 3 – Transient torque modeling with enhanced values of natural frequencies

The most significant factor affecting approximation is the non-linear behavior of torque when it crosses zero level. The phase shift appears in signals at this moment (after first period of oscillation) due to gaps opening and closing. Therefore, approximation should be restricted by logical conditions or measured data should be taken when all samples are above zero level.

**1.2 Using transient torque signals for wear diagnostics.** Abovementioned nonlinear effects during transient processes can be used in wear diagnostics to overcome problems in non-stationary signals. For example, it can be used the difference of the first (second) period of transient signals for diagnostics purposes. Vibration signal needs low-pass filtering before analysis. The low-pass

filter cutting frequency should be twice more than highest natural frequency of the oscillating system [2].

Torque amplification factor (TAF) is one of the main parameters in dynamic systems analysis. However, dynamic response of nonlinear systems depends on static rolling torque. It was shown that mill driveline exhibits higher TAF with decreasing static torque for different angular wear. This nonlinear effect is also used in driveline wear diagnostics (couplings, bearings). The distinctive advantage of proposed approach is that instead of full gaps, only their opened part can be identified which has influences on driveline dynamics. It was shown that radial gaps in bearings have the same influence on TAF as the angular ones. The highest TAF corresponds to opposite direction of shaft weight and teeth coupling reaction. The response of linear dynamic model is taken as reference values for wear diagnostics.

**2. Chatter vibrations in the tandem cold rolling mills.** Since the end of last century, chatter vibrations phenomena in the high-speed cold rolling mills is still intensively investigated because it significantly (by 20-30%) reduces annual plant productivity and strip quality. The most advanced tendencies in this domain of research were discussed in [3] and other studies. The main reason of vibration amplification in the tandem mills is considered the regeneration effect due to periodic variation of strip thickness and roughness [4-8] as well accounting viscoelastic properties of deformed steel strip [9].

Strategies of tandem mills control are based on modern approaches including adaptive models, fuzzy logic, neural nets for parameters prediction to meet very high demands on steel strips flatness, roughness and thickness tolerance (<5 microns). Nevertheless, sensors and actuators in conventional Automatic Gauge Control (AGC) systems because of narrow pass band (<10 Hz) are not able to control high frequency chatter vibrations. Nowadays, the only practical way to cancel chatter and prevent strip break is to drop down the mill speed by the alarms from vibration monitoring system. Such control impacts reduce overall mill productivity and affect strip quality due to transient processes excited in the drivelines.

Chatter vibrations were investigated in the 5-stands high-speed 4-high cold rolling mill 2030 (rolls length in mm). The real-time chatter vibration monitoring and diagnostics system was developed for early detection of periodic defects on rolls (Fig. 4, a) and strip (Fig. 4, b).

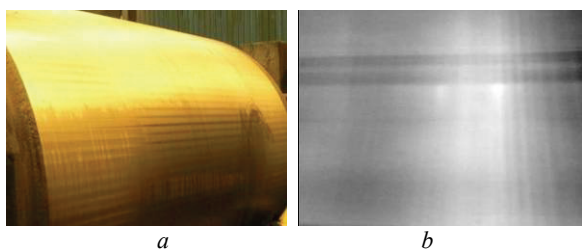


Figure 4 – Chatter marks on rolls (a) and strip (b)

It was shown by the detailed FEM analysis that 4-high rolling stand cumulative mass fraction is about 0.80-0.85 for the first 4-9 modes [10]. The composed model

(Figure 5a), unlike other known studies, includes the work rolls bending units and backup rolls balancing units which are accounted as corresponding stiffness instead of external forces. Such approach allows fulfilling a dynamic analysis of the 4-high stand under the variable operating schedules. It is assumed symmetrical vibration for both service and drive sides of stand. Beside it, horizontal stability is analyzed of rolls chocks within the gaps  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  and displacement  $a$  within stand housing under the rolling force  $P$  (Fig. 5, a). The effect of chatter regeneration due to strip thickness variation is investigated along with associated natural modes of stand vibrations (Fig. 5, b).

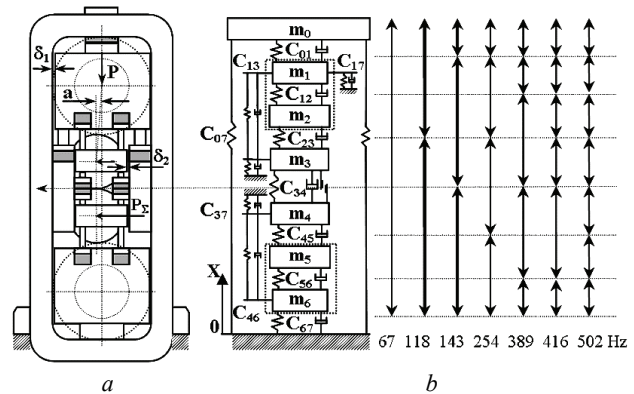


Figure 5 – Dynamic model of 4-high stand with rolls bending units (a); natural modes of roll stack vibrations (b)

There are studies devoted to chatter regeneration in cutting tools dynamics [11]. The similarity of cutting machines and tandem rolling mills is that material is moving from one stand to subsequent stand and periodic defects have the influence with certain delay, but rolling parameters affect this delay significantly. Investigations of regeneration effect in rolling mills are mainly based on linear models or parametric excitation of strip due to variable stiffness in the rolls gap.

In distinction of known approaches, reliable chatter detection can be provided due to the commonly known physical phenomenon – synchronization of the mechanical oscillators via the couplings between them. The rolling stands of tandem mill are synchronizing by the elastic strip. Synchronization is accompanied by the effect of involving of close natural frequencies of adjacent stands and drift of their phases of vibration to certain value, identical in all stands. This effect results in decreasing of frequencies deviation from average value and increasing the correlation coefficients in adjacent stands. Frequencies and phases of chatter vibration begin to change even for minimal energy exchange between stands. Two main conditions for chatter early detection were derived as:

$$\sigma_n \leq \sigma_{min}; K_{mean} \geq K_{max}, \quad (3)$$

where  $\sigma_n$  – current root mean square (RMS) deviation of the principal modes frequencies in the adjacent stands within chatter frequency range (Hz);  $\sigma_{min}$  – minimal difference equal to spectrum frequency step (Hz);  $K_{mean}$  – mean correlation coefficient of vibration in the  $n-1$  pairs of adjacent stands;  $n$  – number of stands;  $K_{max}$  – maximal correlation coefficient for steady rolling without chattering ( $K_{max} < 0.2-0.3$ ).



**3. Parametrical oscillations of rolled rod in high-speed compact mills.** Nowadays, many enterprises producing long products like wire and rods, subjected to effect of vibration excitation in the high-speed compact mills with complicated geared drives. Increasing working speed above 110 m/s is limited by high probability of incidents due to vibrations in the constrained space between pairs of rolls (twisted by 90° in adjacent stands) and the subsequent loss of longitudinal stability.

The problem also lies in the fact that rolling mills designed by Morgan Construction Company (USA), in contrast to all previously studied mills, has a gearbox with variable structure providing certain technological advantages in rods rolling of various sections (Fig. 6).

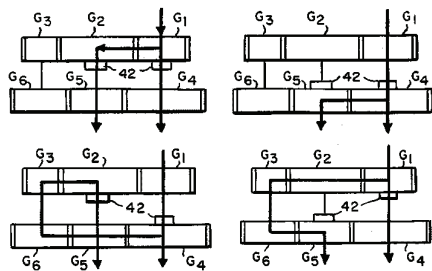


Figure 6 – Geared drive with variable structure of Reducing Sizing Mill (RSM)

The nature of this instability is still not clearly understood, because torque measurements during rolling in fully closed housing are very difficult. Dynamic analysis and vibration diagnostics of such type of gearboxes controlled by servo couplings are very complicated. Therefore, in-depth analytical study of driveline and rolled rod dynamics has been carried out [12].

A detailed kinematical scheme of reducing sizing mill (RSM) is represented in Fig. 7, a. Gearbox consists of four stages A, B, C, D and four stands 1...4 coupled by shafts. Dark points correspond to places of vibration sensors installation, M1...M9 are the controllable servo couplings to change gears ratios in accordance with rolling schedule.

In some previous studies of such type of mills on mathematical models [13, 14], authors addressing the dynamic phenomena by detuning from the resonance frequency bands proposed the following means: flexible couplings (change torsional stiffness); changes in the number of teeth (gears overlap); change in mass of rotating parts (moment of inertia). It was concluded that flexible couplings only briefly reduce peak loads in the gearbox. More effective is the change in the number of teeth of gears (for the same gear ratios), as the main cause of the oscillation is a periodic variation in the stiffness of the gears and couplings. The amplitude of the oscillation in gearing stiffness depends on the coefficient  $e_R$  of teeth overlapping. Range considered in studies of change  $e_R = 2.5...4.1$  can reduce the dynamics of the driveline to acceptable values. The same result was obtained for split-path gearbox of slabbing mill where parametrical oscillations were investigated [15].

With an increase in the rolling speed on the wire and rod mills, defects become important in the driveline: the

eccentricities of the work rolls; unbalance of components; misalignment of shafts; defects of mounting; wear of gears and couplings, breakage of teeth; defects of bearing assemblies. Beside the failures, defects cause kinematical perturbations affecting the accuracy of the rolled rod. Therefore, the main approach to solving the problem of increasing the rolling speed is the equipment condition monitoring and rod tension control [16-17].

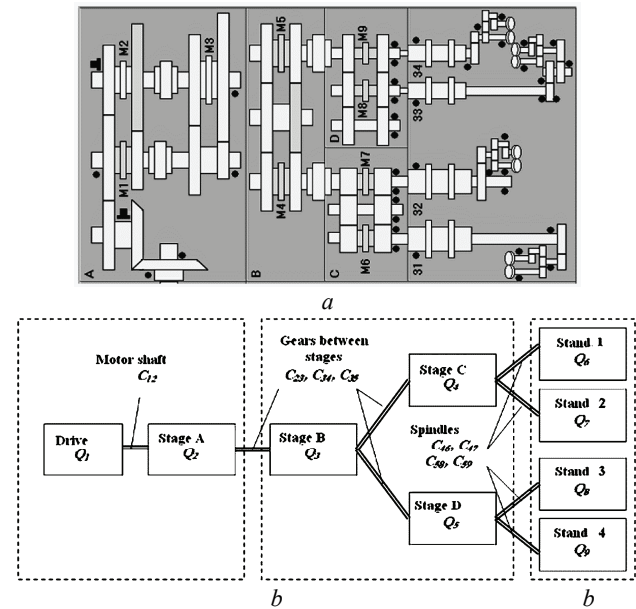


Figure 7 – Geared driveline of Reducing Sizing Mill (RSM): kinematical scheme of gearbox with stages A, B, C and servo couplings M1...M9 (a); calculation scheme (b); scheme of axial vibrations excitation (c)

Analytical multi-body model of RSM is shown in Fig. 7, b. A detailed analysis of natural frequencies and associated modes is represented in Table 3.

There are natural modes at the 22.7, 25.2, 31.8, 62.8 Hz where pairs of neighboring stands, 2-3, 3-4, 1-2, 2-3 accordingly, oscillate with opposite phases (relative amplitudes shown in frames).

Natural frequencies of transverse oscillations of rods are calculated with taking into account relation of elasticity modulus with temperature and section size are: 19.5...13.8 Hz (stands 1-2); 18.9...13.4 Hz (stands 2-3); 55.4...39.2 Hz (stands 3-4). Hence, if the frequency of natural mode will be twice less than excitation frequency, such modes may cause parametric oscillations. The calculation scheme of parametric oscillations is represented in Figure 7c. The corresponding equation of rod vibration is as following [18]:

$$C \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} + (P_0 + P \cdot \cos \Theta t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

where  $P_0$  – mill setup tension force;  $P$  – excitation force between stands;  $y$  – displacement of rod from center line;  $x$  – longitudinal coordinate of rod;  $m$  – mass of rod between stands;  $\Theta$  – excitation frequency;  $C$  – stiffness of rod.

Then, initial equation can be reduced to standard Mathieu form:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (a - 2q \cdot \cos 2\tau)x = 0. \quad (5)$$

where  $a$ ,  $q$  – constants depending on rolling conditions (input and exit rod sections, reduction in stands, modulus of rod depending on metal temperature).

Further, stability of RSM when rods rolled in every pass schedule can be analyzed by standard Ince-Strutt

diagram and mill control optimized to avoid resonance zones within the ranges of geared driveline working speed. Software is developed to calculate on-line stability conditions of rolling process for different reduction schedules.

Table 3 – Natural frequencies and modes of RSM geared driveline

Masses	Natural frequencies and modes (Hz)							
	20.1	22.7	25.2	31.8	45.6	62.8	102.0	156.0
Q1 (drive)	-0.324	0.073	0.001	0.001	-0.09	-0.001	-0.059	0.015
Q2 (stage A)	0.130	0.017	0.001	0.001	0.187	0.003	0.854	-0.530
Q3 (stage B)	0.073	-0.040	0.001	0.001	0.406	0.005	0.452	0.835
Q4 (stage C)	0.167	-0.232	0.001	0.001	0.346	-0.653	-0.147	-0.089
Q5 (stage D)	0.205	0.090	0.001	0.001	0.575	0.662	-0.204	-0.120
Q6 (stand 1)	0.278	-0.473	0.001	-0.707	-0.328	0.226	0.016	0.004
Q7 (stand 2)	0.278	-0.473	0.001	0.707	-0.328	0.226	0.016	0.004
Q8 (stand 3)	0.569	0.491	-0.707	0.001	-0.252	-0.127	0.013	0.003
Q9 (stand 4)	0.569	0.491	0.707	0.001	-0.252	-0.127	0.013	0.003

**Conclusions.** The conducted research of nonlinear effects in rolling mills dynamics is the basis for condition monitoring and diagnostics of mechanical equipment and technological processes.

Using transient processes during metal biting in hot rolling mills allows developing the algorithms for diagnostics of angular and radial backlashes in drivelines. Short recordings of transient signals require special procedures for natural frequencies calculation since Fourier transform is not sufficient.

The multi-body dynamic models of cold rolling mills improve accuracy and diminish time lag in chatter vibration detection. Effect of neighboring stands synchronization is efficiently used in chatter monitoring system on industrial tandem mill 2030.

The multi-ratio gearbox of high-speed wire and rod rolling mill has advantages in production of variable sections of rods. Parametric oscillations of rod are excited due to out of phase natural torsional modes of vibrations in pairs of stands.

**References:** 1. Polzer J. Intelligent soft-sensor technology and automatic model-based diagnosis for improved quality, control and maintenance of mill production lines (Softdetect) / J. Polzer, M. Markworth, M. Jelali et al. Report of Research Fund on Coal and Steel (RFCS). Luxembourg; 2009. 2. Krot P.V. Nonlinear Vibrations and Backlashes Diagnostics in the Rolling Mills Drive Trains / P.V. Krot // Proc. of 6<sup>th</sup> EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008). – Institute of Problems in Mechanical Engineering RAS, June 30 – July 4, St. Petersburg, Russia, 2008 – P. 360-366. 3. Krot P.V. Regenerative chatter vibrations control in the tandem cold rolling mills / P.V. Krot, I.Y. Prihodko, P.P. Chernov // 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Control (ECSC 2008). – Institute of Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia, September 8-12, 2008. – P. 428-437. 4. Liu X. Time Delay Effect on Regenerative Chatter in Tandem Rolling Mills / X. Liu, Y. Zang, Z. Gao, L. Zeng // Shock and Vibration. – 2016. – Vol. 2016. – P. 39-54. 5. Pei-Hua Hu Regenerative Chatter in High-Speed Tandem Rolling Mills / Pei-Hua Hu, Kornel F. Ehmman // Conference Paper. ASME 2006 International Manufacturing Science and Engineering Conference. 2006, January. 6. Chen Y. Stability analysis of the rolling process and regenerative chatter on 2030 tandem mills / Y. Chen, S. Liu, T. Shi, S. Yang, G. Liao // Pro-

ceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2002. – Vol. 216, No 12. – P. 1225-1235. 7. Chen Yonghui Regenerative chatter with fifth-octave-mode in 4-H cold rolling mills / Chen Yonghui, Li Weihua, Shi Tielin, Yang Shuzi // Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition). – 2003. – Iss. 5. – P. 55-57 (in Chinese). 8. Zhao H. Stability analysis of chatter in tandem rolling mills – part 2: the regenerative effect / H. Zhao, K.F. Ehmman // Journal of Manufacturing Science and Engineering – Transactions of the ASME. – 2013. – Vol. 135(3). – P. 11-22. 9. Yuan L. Nonlinear vibrations in a covered roll system with viscoelastic contact / L. Yuan, V.-M. Jarvenpaa // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – Vol. 14. – P. 3170-3178. 10. Guo R.-M. Analysis of chatter vibration phenomena of rolling mills using finite element methods / R.-M. Guo, A.C. Urso, J.H. Schunk // Iron and Steel Engineer. – 1993. – Vol. 70 (7). – P. 29-39. 11. Faassen R.P.H. Prediction of regenerative chatter by modelling and analysis of high-speed milling / R.P.H. Faassen et al. // International Journal of Machine Tools & Manufacture. – 2003. – Vol. 43. – P. 1437-1446. 12. Krot P.V. Dynamic Model of Geared Drive with Changeable Structure of High-Speed Wire Rolling Block / P.V. Krot // Vestnik NTU KhPI «Problems of Mechanical Drive». – 2010. – Iss. 27. – P. 96-108 (in Russian). 13. Treder H. Simulation of torsional vibrations in the splitting gearbox of wire rolling mill / H. Treder, G. Dikhans, H. Peken // Stahl und Eisen. – 1980. – № 24. – P. 9-15. 14. Wang J. Torsional vibration modeling and dynamic simulation of a rolling stand power transmission system / J. Wang, L.M. Cartright // Iron & Steel Eng. – 1999. – No 1. – P. 30-34. 15. Krot P.V. Dynamical processes in multi-path geared drive of slabbing mill / P.V. Krot // Vestnik NTU KhPI «Problems of Mechanical Drive». – 2009. – Iss. 19. – P. 96-105 (in Russian). 16. Hofner J. Predictive maintenance for No-Twist rod mills using vibration signature analysis / J. Hofner, J.E. Olenick, J.D. Foley // Iron & Steel Eng. – 1991. – No 1. – P. 55-61. 17. Schmidt J.M. Continuous Vibration Monitoring of a 10 Stand Rod Block / J.M. Schmidt, R.E. Player et al. // AISE Steel Technology. – 2002. – No 1. – P. 44-45. 18. Svetlitsky V.A. Dynamics of rods / V.A. Svetlitsky. – In: Foundations of Engineering Mechanics Series. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2005.

**Bibliography (transliterated):** 1. Polzer J., Markworth M., Jelali M. et al. Intelligent soft-sensor technology and automatic model-based diagnosis for improved quality, control and maintenance of mill production lines (Softdetect). Report of Research Fund on Coal and Steel (RFCS). Luxembourg; 2009. 2. Krot P.V.

Nonlinear Vibrations and Backlashes Diagnostics in the Rolling Mills Drive Trains. Proc. of 6<sup>th</sup> EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), Institute of Problems in Mechanical Engineering RAS, June 30 – July 4, 2008, St. Petersburg, Russia, pp. 360-366. **3.** Krot P.V., Prihodko I.Y., Chernov P.P. Regenerative chatter vibrations control in the tandem cold rolling mills. 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Control (ECSC 2008), Institute of Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia, September 8-12, 2008, pp. 428-437. **4.** Liu X., Zang Y., Gao Z. and Zeng L. Time Delay Effect on Regenerative Chatter in Tandem Rolling Mills. Shock and Vibration, 2016, vol. 2016, pp. 39-54. **5.** Pei-Hua Hu, Kornel F. Ehmann Regenerative Chatter in High-Speed Tandem Rolling Mills, Conference Paper. ASME 2006 International Manufacturing Science and Engineering Conference. 2006, January. **6.** Chen Y., Liu S., Shi T., Yang S., Liao G. Stability analysis of the rolling process and regenerative chatter on 2030 tandem mills. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2002, vol. 216, No 12, pp. 1225-1235. **7.** Chen Yonghui, Li Weihua, Shi Tielin, Yang Shuzi Regenerative chatter with fifth-octave-mode in 4-H cold rolling mills. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2003, iss. 5, pp. 55-57 (in Chinese). **8.** Zhao H., Ehmann K.F. Stability analysis of chatter in tandem rolling mills – part 2: the regenerative effect. Journal of Manufacturing Science and Engineering – Transactions of the ASME, 2013, vol. 135 (3), pp. 11-22. **9.** Yuan L., Jarvenpaa V.-M. Nonlinear vibrations in a covered roll system with viscoelas-

tic contact. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, vol. 14, pp. 3170–3178. **10.** Guo R.-M., Urso A.C., Schunk J.H. Analysis of chatter vibration phenomena of rolling mills using finite element methods. Iron and Steel Engineer, 1993, vol. 70 (7), pp. 29-39. **11.** Faassen R.P.H. et al. Prediction of regenerative chatter by modelling and analysis of high-speed milling. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2003, vol. 43, pp. 1437–1446. **12.** Krot P.V. Dynamic Model of Geared Drive with Changeable Structure of High-Speed Wire Rolling Block. Vestnik NTU KhPI «Problems of Mechanical Drive», 2010, iss. 27, pp. 96-108 (in Russian). **13.** Treder H., Dikhans G., Peken H. Simulation of torsional vibrations in the splitting gearbox of wire rolling mill. Stahl und Eisen, 1980, № 24, pp. 9-15. **14.** Wang J., Cartright L.M. Torsional vibration modeling and dynamic simulation of a rolling stand power transmission system. Iron & Steel Eng, 1999, No 1, pp. 30-34. **15.** Krot P.V. Dynamical processes in multi-path geared drive of slabbing mill. Vestnik NTU KhPI «Problems of Mechanical Drive», 2009, iss. 19, pp. 96-105 (in Russian). **16.** Hofner J., Olenick J.E., Foley J.D. Predictive maintenance for No-Twist rod mills using vibration signature analysis. Iron & Steel Eng, 1991, No 1, pp. 55-61. **17.** Schmidt J.M., Player R.E. et al. Continuous Vibration Monitoring of a 10 Stand Rod Block. AISE Steel Technology, 2002, No 1, pp. 44-45. **18.** Svetlitsky V.A. Dynamics of rods. In: Foundations of Engineering Mechanics Series. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2005.

Надійшла (received) 21.09.2016

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Крот Павло Вікторович** – старший науковий співробітник, кандидат технічних наук, відділ процесів і машин обробки металів тиском, Інститут чорної металургії ім. З.І. Некрасова НАН України, м Дніпро, тел.: +38(063)2423960; e-mail: paul.krot@gmail.com

**Krot Pavel Viktorovich** – Senior Research Officer, Candidate of Engineering Sciences, Iron and Steel Institute of Z.I. Nekrasov, National Academy of Sciences of Ukraine, Dnipro, tel.: +38(063)2423960; e-mail: paul.krot@gmail.com

**Корінний Володимир Віталійович** – молодший науковий співробітник, відділ технологічного обладнання та систем управління, Інститут чорної металургії ім. З.І. Некрасова НАН України, м. Дніпро, тел.: +38(093)3531308; e-mail: koren\_noy@ukr.net

**Korennoy Vladimir Vital'evich** – Research Assistant, Iron and Steel Institute of Z.I. Nekrasov, National Academy of Sciences of Ukraine, Dnipro, tel.: +38(093)3531308; e-mail: koren\_noy@ukr.net

## РЕФЕРАТИ

УДК 539.3

**До 90-річчя з дня народження Академіка НАН України Володимира Логвиновича Рвачова / Т.І. Шейко, Л.В. Курпа, О.О. Бездетко, А.О. Осетров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 7–26. – Бібліогр.: 44 назв. – ISSN 2078-9130.**

Стаття присвячена 90-річчю від дня народження видатного українського вченого в галузі математики, механіки і кібернетики, академіка НАН України Володимира Логвиновича Рвачова. У статті описаний життєвий і творчий шлях В.Л. Рвачова. Звернено увагу на основні результати наукової діяльності В.Л.Рвачова, що дозволили зробити істотний ривок в області аналітичної ідентифікації геометричних об'єктів та розв'язання крайових задач математичної фізики. Наведено деякі висловлювання В.Л.Рвачова, взяті з його щоденників. Представлено короткий опис результатів, отриманих В.Л.Рвачовим в останні роки, а саме побудовою неархімедового обчислення та можливим його застосуванням в фізиці далекого космосу. Наведено список основних публікацій В.Л. Рвачова.

**Ключові слова:** академік В.Л. Рвачов, 90-річчя з дня народження, теорія R-функцій, біографія.

УДК 621.01 (092)

**Столітній ювілей професора Льва Ізраїлевича Штейнвольфа / Ю. М. Андрєєв, Є. І. Дружинін, А. О. Ларін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 27-31. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.**

У статті представлено життєвий і творчий шлях відомого вченого з ХПІ - професора Л. І. Штейнвольфа. Аналізується його внесок в розвиток теорії коливань і динаміки машин, а також практичне застосування наукових досягнень. Присвячується 100-річчю від дня народження.

**Ключові слова:** теоретична механіка, теорія коливань, динаміка машин, система комп'ютерної алгебри, тепловозні і танкові силові установки, вібраційна діагностика.

УДК 539.3

**Ударне деформування тонкостінної конструкції/ Автономова Л.В., Бондар С.В., Степук А.В., Хавін В.Л., Шергін С.Ю. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 32-34. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

Проведено скінченно елементне моделювання процесу ударного деформування тонкостінної конструкції з алюмінієвого сплаву при ударі пробійником з конусоподібною формою робочої частини. Розв'язання динамічної контактної в'язкопластичної задачі дозволило визначити поля напружень і деформацій для конструкції з додатковим ребром жорсткості. Аналіз полів деформацій показав, що наявність додаткового ребра приводить до перерозподілу поля напружень і призводить до збільшення жорсткості всієї конструкції

**Ключові слова:** тонкостінна конструкція, покриття, пробійник, контактна задача, метод скінченних елементів.

УДК 539.3

**Оптимізація круглих пластин при нестационарному навантаженні / В. Ф. Васильченко, О.М. Ломакін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 35-37. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

Розглядаються круглі пластини, що піддаються дії нестационарної навантаження. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про пластині мінімальної ваги з обмеженнями на переміщення і напруження. Завдання вирішується на основі методу послідовних наближень. Необхідні умови оптимальності формулюються на основі принципу Понтрягіна. На основі даних умов оптимальності та алгоритму методу послідовних наближень розроблена універсальна програма оптимізації круглих пластин. З її допомогою знаходяться конфігурації мінімального обсягу з обмеженнями на напруги і переміщення для довільного закріплення. При цьому вихідні та пов'язані змінні для кожного конкретного геометричного виконання пластини  $h$  ( $g$ ) шукаються шляхом розкладання по власних форм коливань. Крайові задачі вирішуються методом початкових параметрів; початкові завдання при цьому інтегруються методом Рунге - Кутта. Максимізація гамільтониана проводиться в кінцевому наборі точок по радіусу пластини. Наведено результати розрахунку оптимальної пластини.

**Ключові слова:** пластини, оптимізація, напружено-деформований стан, що мінімізує обсяг, крайова задача.

УДК 539.3

**Взаємний вплив з'єднань з натягом / Д.Г. Віноградський, А.Г. Андрєєв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 37-44. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

Дана робота присвячена дослідженню взаємного впливу з'єднань з натягом для варіантів з'єднань з натягом: суцільний вал з двома втулками, два суцільні вали зі втулкою, пустотілий вал з двома втулками, два пустотілі вали зі втулкою в ПК ANSYS. Отримані характеристики НДС (еквівалентні напруження, контактний тиск, сумарні переміщення) залежно від величини інтервалу між з'єднаннями з натягом. Встановлено, що з мірою збільшення цього інтервалу характеристики НДС спочатку інтенсивно змінюються, потім стабілізуються, досягнувши певного значення інтервалу. Подібна закономірність має характерні особливості для кожного типу з'єднань. Кожне з двох з'єднань з натягом, які належать до даного типу з'єднань, ідентичні за своїми характеристиками НДС. Отримані результати узгоджуються з розподілом напружень в задачі Ляме про товстостінні циліндри і свідчать про можливість застосування принципу Сен-Венана до з'єднань з натягом.

**Ключові слова:** з'єднання з натягом, метод скінчених елементів, напруження, деформації.

УДК 539.3

**Нестаціонарні коливання струн та їх систем, що контактують з різноманітними зосередженими навантаженнями / А. В. Воропай, Є. С. Малахов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 45–49. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.**

Розглядаються нестационарні коливання струн і їх систем, викликані скінченою кількістю зосереджених навантажень. Нестационарними навантаженнями можуть моделюватися зовнішні сили, а також реакції, які відповідають впливу зосереджених мас або демпферів. Для системи струн, які перетинають одну загальну, будується узагальнена схема дослідження. Викладається методика побудови системи рівнянь, що складається з одновимірних хвильових рівнянь для деякої довільної кількості струн, яка замикається додатковими співвідношеннями в точках контакту. Отримана система є системою інтегральних рівнянь Вольтерра, яка після дискретизації зводиться до блочної системи лінійних рівнянь. Як приклад вирішується задача про нестационарні коливання струни з двома приєднаними демпферами.

**Ключові слова:** струна, нестационарне навантаження, хвильове рівняння, регуляризуючий алгоритм, інтегральне рівняння Вольтерра, пряма і обернена задача.

УДК 539.3

**Чисельне моделювання температурного поля заготовок при індукційному нагріві для виготовлення підшипникових кілець / Є.Д.Грозенок, Е.А.Сімсон, О.В.Степук, С.Ю.Шергін // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 50–53. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

В роботі приведено рішення нестационарної термоелектромагнітної крайової задачі для визначення розподілу об'ємного поля температур при індукційному нагріванні циліндричної заготовки для підшипникового кільця з врахуванням залежності електромагнітних характеристик матеріалу від температури. Чисельне моделювання процесу індукційного нагрівання циліндричної заготовки виконувалося методом кінцевих елементів з використання спеціалізованого програмного комплексу. Проводився підбір електричних параметрів, які забезпечують раціональний режим роботи індукційного нагрівача. Раціональні параметри підбиралися з метою забезпечення максимально рівномірного розподілу температури по всьому об'єму заготовки підшипникового кільця. З урахуванням процесу охолодження отримано розподіл поля температур в заготовці перед початком процесу гарячого штампування, яке відповідає вимогам не перевищення заданого максимального перепаду температури в заготовці. Отримані результати розподілу температури в циліндричній заготовці підшипникового кільця порівнювалися з експериментальними даними пірометричних вимірювань температури на боковій поверхні та в центрі торцевої частини заготовки.

**Ключові слова:** циліндрична заготовка, індукційний нагрів, раціональний режим, термоелектромагнітна задача, метод скінчених елементів.

УДК 539

**Трибологічна система ультразвукового зварювання. підсистема ультразвукового інструменту / С.М. Ісаков, О.С. Ісаков, С.І. Марусенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 54–56. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-9130.**

Розроблено підсистему ультразвукового інструменту з використанням програмного комплексу ANSYS, що інтегровано у трибологічну систему ультразвукового зварювання. Проведено моделювання ультразвукового інструменту, симетричного відносно осі, та чисельні розрахунки робочої резонансної частоти та форми коливань. Запропоновано підхід до інтегрування нової підсистеми у загальну трибологічну систему ультразвукового зварювання.

**Ключові слова:** трибологічна система, високочастотне навантаження, ультразвукове зварювання.

УДК 519:539:534

**Моделювання корпусу парової турбіни та аналіз основних вібраційних характеристик / С.В. Красніков // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 56–59. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Досліджуються вібраційні характеристики корпусу парової турбіни та його взаємодія з фундаментом. Об'єктом дослідження є найбільш гнучкий корпус парової турбіни – циліндр низького тиску. Розглядається парова турбіна, що відноситься до класу найбільших потужностей серед конструкцій цього типу. Моделювання та проведення розрахункових досліджень виконано з використанням методу скінчених елементів. Побудовані серії скінченно-елементних моделей конструкції, що розглядається. Проведені розрахунки власних коливань на серії з десяти моделей. Отримані основні вібраційні характеристики при різних варіантах моделювання взаємозв'язку корпусу парової турбіни з фундаментом. Отримані результати можна використовувати для оцінки вібраційного стану корпусу парової турбіни та фундаменту, на який опирається кожен корпус.

**Ключові слова:** вібрація, парова турбіна, циліндр низького тиску, метод кінцевих елементів, власні частоти, фундамент.

УДК 539.3

**Аналіз деформування складених конструкцій при електромагнітному пресуванні / Д.В. Лавінський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 60–63. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.**

Наведено математичну постановку задачі аналізу пружно-пластичного деформування системи електропровідних тіл при дії електромагнітного поля. Запропоновано чисельний метод розв'язання відповідно до схеми методу скінчених елементів. Запропонований метод базується на варіаційному принципі стаціонарності повної енергії системи. Розглянуто застосування даного методу до аналізу деформування складеної матриці прес-форми, що використовується для пресування порошкових матеріалів.

**Ключові слова:** електромагнітне поле, пружно-пластичне деформування, пресування порошків, метод скінчених елементів.

УДК 539.431:678

**Експериментальна оцінка характеристик опору втомі гумо-кордних композитів при деформуванні в напрямку ортогональному армуванню до та після штучного старіння / О.О. Ларін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 63–68. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.**

У роботі визначаються показники опору втомі гумового композиту, що посиленій армуванням текстильним кордом та закономірності їх зміни внаслідок старіння. Дослідження проводяться експериментально з плоскими зразками на розтяг із циклічним завданням деформацій. Окремо досліджувались зразки матеріал до та після старіння. Старіння задавалось штучно шляхом тривалої витримки зразків в термокамері на фіксованій підвищеній температурі. Проведено порівняльний аналіз зміни параметрів кривих втоми з часом внаслідок старіння.

**Ключові слова:** гумові композити, старіння, експериментальні тести на втому, каркас пневматичної шини.

УДК 539.3

**Дослідження НДС диска борони на індивідуальній пружинній стійці / Е.А. Симсон, Д.С. Ягудин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 68–70. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

Проведено комп'ютерне моделювання проссу експлуатації дискової борони на індивідуальній пружинній стійці. Сформульована задача щодо дослідження поведінки стійки при силовому та кінематичному навантаженні стійки під дією експлуатаційних навантажень, а також виконан частотний аналіз конструкції. Аналіз полей деформацій і напружень виявив, що статичне та кінематичне навантаження не приводить до руйнування стійки. За результатами дослідження поверхні злому руйнування має комплексний характер: накопичення втомних пошкоджень з подальшим руйнуванням від статичного кінематичного навантаження.

**Ключові слова:** дискова борона, пружинна стійка, власна частота, руйнування, метод скінчених елементів.

УДК 539.3

**Аналіз міцності та динаміки багатокомпонентних поворотно симетричних конструкцій (підшипникових вузлів кочення) / Е. А. Симсон; С. О. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 71-74. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.**

Особливості поворотно симетричних конструкцій дозволяють шляхом створення спеціалізованих теорій і чисельних технологій перейти від загальних методів аналізу до спеціальних, значно меншої розмірності. Розглянуто та проаналізовано методи розрахунку характеристик міцності та динаміки на прикладі підшипників кочення. Доопрацювання методу вирішення спектральної проблеми ЦСК базується на включенні методу квазіциклічних розкладань "всередину" алгоритму ітераційного перетворення підпростору.

**Ключові слова:** механіка, поворотно-симетрична конструкція, підшипники кочення, блочні ітерації, кінцеві елементи, модель, сектор.

УДК 539.3

**Аналіз релаксації контактної тиску між в'язкопружним композитним бандажем і трубопроводом / В. Г. Сукіасов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 74-77. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Викладено постановку і методику наближеного аналітичного рішення задачі про взаємодію композитного ремонтного бандажу зі сталевим трубопроводом. В'язкопружні властивості ортотропного композиту моделюються на основі принципу відповідності Вольтерра, в поєднанні з правилом сумішей. Залежність контактної тиску від часу отримана за допомогою однобічного інтегрального перетворення Лапласа для різних значень об'ємного вмісту армуючих волокон.

**Ключові слова:** бандаж, трубопровід, в'язкопружні властивості, композит, контактний тиск, перетворення Лапласа.

УДК 539.3

**Про прогнозування часу до руйнування при повзучості осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів та циліндричних оболонок / С.М. Склепус, О.З. Галішкін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 77-84. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.**

Розглянуто задачу визначення напружено-деформованого стану, пошкодженості та тривалої міцності порожнистих циліндрів і циліндричних оболонок, що працюють при повзучості. Розв'язки для оболонок різної товщини, що базуються на гіпотезах прямолінійного елемента, зіставляються з просторовими розв'язками для осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів. Досліджено вплив співвідношення геометричних розмірів на точність оболонкового розв'язку. Розроблено спосіб прогнозування часу до руйнування в просторовій постановці на основі даних про час до руйнування отриманих по оболонковій теорії, і навпаки.

**Ключові слова:** повзучість, пошкодженість, час до руйнування, прогнозування, порожнистий циліндр, циліндрична оболонка.

УДК 539.3

**Повзучість та пошкодженість пологих оболонок складної форми із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження / С. М. Склепус // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 85-88. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Статтю присвячено дослідженню повзучості та пошкодженості пологих ізотропних оболонок складної форми в плані, із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження. В постановці задачі використовуються визначальні співвідношення, що описують дислокаційну повзучість початково ізотропних матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження, асоційовану з утворенням і зростанням плоских мікротріщин з переважною орієнтацією. Початково-крайова задача повзучості та пошкодженості розв'язується за допомогою спільного використання методів R-функцій, Ріт-

ца та Рунге-Кутта-Мерсона. Досліджено вплив напрямку зовнішнього навантаження на повзучість, пошкоджуваність та тривалу міцність сферичної пологої оболонки складної форми.

**Ключові слова:** повзучість, пошкоджуваність, час до руйнування, полого оболонка, метод R-функцій.

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**Дослідження динамічної стійкості регулятора тиску із пневматичним керуванням при врахуванні коливань стовпів газу в трубопроводах / С.А. Шевченко, О.Л. Григор'єв, М.С. Степанов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 89–108. – Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2078-9130.**

Складено дискретно-континуальну нелінійну модель та виведено трансцендентне характеристичне рівняння для дослідження вільних коливань регулятора пневмосистеми запуску ракетного двигуна. Розроблено метод знаходження межі динамічної стійкості системи та критерій стійкості її граничного циклу. Описано порядок настройки системи на автоколивання малої амплітуди.

**Ключові слова:** пневмосистема, дискретно-континуальна модель, гармонічна лінеаризація, механічний імпеданс, динамічна стійкість, автоколивання.

УДК 539.3

**Небезпечні біфуркації при русі віброударної системи з двома степенями свободи / В.А. Баженов, О.С. Погорелова, Т.Г. Постникова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 109-113. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.**

Вивчається динамічна поведінка сильно нелінійної негладкої розривної віброударної системи. При зміні системних параметрів ми знаходимо розривні біфуркації, які є небезпечними. Це явище унікальне для негладких систем з розривною правою частиною. Вібраударну систему з двома ступнями вільності ми досліджуємо чисельним методом продовження за параметром разом з методами стрільби і Ньютона-Рафсона. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії відповідно до контактному закону Герца. Розривні біфуркації визначаються за значеннями мультиплікаторів Флоке. Вивчається зміна біфуркаційної картини, якщо удар між тілами стає м'яким.

**Ключові слова:** нелінійна розривна віброударна система, закон Герца, біфуркація, мультиплікатор, стійкість.

УДК 539.3

**Деякі задачі стаціонарного деформування складених систем з оболонок обертання / Я.М. Григоренко, О.І. Беспалова, Н.П. Яремченко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 114-117. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

На основі оболонкових моделей різного рівня строгості побудовано єдиний підхід до розв'язання ряду задач стаціонарного деформування для пружних систем з оболонок обертання складної форми і структури. Підхід включає єдину чисельно-аналітичну методику, що базується на раціональному зведенні до одновимірних лінійних крайових задач. Проведено аналіз напружено-деформованого стану гнучких оболонок обертання, їх коливань при наявності розгалужень та динамічної стійкості в полі періодичних навантажень.

**Ключові слова:** складені системи, постійна деформація, загальний підхід, аналіз.

УДК 539.3

**Вібродіагностика прокатних станів на основі нелінійних ефектів в динаміці / П. В. Крот, В. В. Корінний // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 118-123. – Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2078-9130.**

У статті описані нелінійні ефекти, що виникають у динаміці прокатних станів. Це необхідно для демпфірування коливань і надійної діагностики обладнання прокатних станів в умовах нестаціонарних режимів роботи. Досліджені три типи нелінійних ефектів, що спостерігаються у трансмісіях і клітях різної конструкції, а саме, перехідні крутильні коливання в станах гарячої прокатки, коливання «чаттер» в станах тандем холодної прокатки і параметричні коливання в високошвидкісному стані прокатки дроту і прутків. Запропоновано методику для ідентифікації власних частот при коротких перехідних сигналах крутного моменту, коли застосування перетворення Фур'є обмежено. Наведені приклади використання нелінійних ефектів для діагностики зносу і контролю вібрацій на основі аналізу власних частот і форм коливань багатомасних систем.

**Ключові слова:** прокатні стани, нелінійні коливання, вібрації «чаттер», ідентифікація.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

**К 90-летию со дня рождения Академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева / Т.И. Шейко, Л.В. Курпа, Е.О.Бездетко, А.А.Осетров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 7–26. – Бібліогр.: 44 назв. – ISSN 2078-9130.**

Статья посвящена 90-летию со дня рождения выдающегося украинского ученого в области математики, механики и кибернетики, академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева. В статье описан жизненный и творческий путь В.Л. Рвачева. Выделены основные результаты научной деятельности В.Л.Рвачева, позволившие сделать существенный рывок в области аналитической идентификации геометрических объектов и решения краевых задач математической физики. Приведены некоторые высказывания В.Л.Рвачева, взятые из его дневников. Представлено краткое описание результатов, полученных В.Л.Рвачевым в последние годы, связанные с построением неархимедовых исчислений и их возможными приложениями в физике дальнего космоса. Представлен список основных публикаций В.Л. Рвачева.

**Ключевые слова:** академик В.Л. Рвачев, 90-летие со дня рождения, теория R-функций, биография.

УДК 621.01 (092)

**Вековой юбилей профессора Льва Израилевича Штейнвольфа / Ю. М. Андреев, Е. И. Дружинин, А. А. Ларин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 27-31. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.**

В статье представлен жизненный и творческий путь известного ученого из ХПИ – профессора Л. И. Штейнвольфа. Анализируется его вклад в развитие теории колебаний и динамики машин, а также практическое применение научных достижений. Посвящается 100-летию со дня рождения.

**Ключевые слова:** теоретическая механика, теория колебаний, динамика машин, система компьютерной алгебры, тепловозные и танковые силовые установки, вибрационная диагностика.

УДК 539.3

**Ударное деформирование тонкостенной конструкции / Л.В. Автономова, С.В. Бондарь, А.В. Степук, В.Л.Хавин, С.Ю. Шергин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 32-34. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

Проведено конечноэлементное моделирование процесса ударного деформирования тонкостенной конструкции из алюминиевого сплава при ударе пробойником с конусообразной формой рабочей части. Решение динамической контактной вязкопластической задачи позволило определить поля напряжений и деформаций для конструкции с дополнительным ребром жесткости. Анализ полей деформаций показал, что наличие дополнительного ребра приводит к перераспределению поля напряжений и приводит к увеличению жесткости всей конструкции.

**Ключевые слова:** тонкостенная конструкция, удар, пробойник, контактная задача, метод конечных элементов.

УДК 539.3

**Оптимизация круглых пластин при нестационарном нагружении / В. Ф. Васильченко, А.Н. Ломакин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 35-37. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

Рассматриваются круглые пластины, подвергающиеся действию нестационарной нагрузки. Предложен алгоритм решения задачи о пластине минимального веса с ограничениями на перемещения и напряжения. Задача решается на основе метода последовательных приближений. Необходимые условия оптимальности формулируются на основе принципа Понтрягина. На основе данных условий оптимальности и алгоритма метода последовательных приближений разработана универсальная программа оптимизации круглых пластин. С ее помощью находятся конфигурации минимального объема с ограничениями на напряжения и перемещения для произвольного закрепления. При этом исходные и сопряженные переменные для каждого конкретного геометрического исполнения пластины  $h(r)$  ищутся путем разложения по собственным формам колебаний. Краевые задачи решаются методом начальных параметров; начальные задачи при этом интегрируются методом Рунге – Кутты. Максимизация гамильтониана производится в конечном наборе точек по радиусу пластины. Приведены результаты расчета оптимальной пластины.

**Ключевые слова:** пластины, оптимизация, напряженно-деформированное состояние, минимизирующий объем, краевая задача.

УДК 539.3

**Взаимное влияние соединений с натягом / Д.Г. Виноградский, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 37-44. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

Данная работа посвящена исследованию взаимного влияния соединений с натягом для вариантов соединений с натягом: сплошной вал с двумя втулками, два сплошных вала с втулкой, пустотелый вал с двумя втулками, два пустотелых вала с втулкой в ПК ANSYS. Получены характеристики НДС (эквивалентные напряжения, контактные давления, суммарные перемещения) в зависимости от величины интервала между соединениями с натягом. Установлено, что по мере увеличения этого интервала характеристики НДС сначала интенсивно изменяются, затем стабилизируются при достижении некоторого значения интервала. Подобная закономерность имеет характерные особенности для каждого типа соединений. Каждое из двух соединений с натягом, входящих в данный тип соединений, идентично по своим характеристикам НДС. Полученные результаты согласуются с распределением напряжений в задаче Ляме о толстостенных цилиндрах и свидетельствуют о возможности применения принципа Сен-Венана к соединениям с натягом.

**Ключевые слова:** соединения с натягом, метод конечных элементов, напряжения, деформации.



УДК 539.3

**Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками / А. В. Воропай, Е. С. Малахов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 45–49. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.**

Рассматриваются нестационарные колебания струн и их систем, вызванные конечным количеством сосредоточенных нагрузок. Нестационарными нагрузками могут моделироваться внешние силы, также реакции, соответствующие влиянию сосредоточенных масс или демпферов. Для системы струн, пересекающих одну общую, строится обобщенная схема исследования. Излагается методика построения системы уравнений, состоящей из одномерных волновых уравнений для некоторого произвольного количества струн, которая замыкается дополнительными соотношениями в точках контакта. Полученная система является системой интегральных уравнений Вольтерра, которая после дискретизации сводится к блочной системе линейных уравнений. В качестве примера решается задача о нестационарных колебаниях струны с двумя присоединенными демпферами.

**Ключевые слова:** струна, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, регуляризирующий алгоритм, интегральное уравнение Вольтерра, прямая и обратная задача.

УДК 539.3

**Численное моделирование температурного поля заготовок при индукционном нагреве для изготовления подшипниковых колец / Е.Д. Грозенок, Э.А. Симсон, А.В. Степук, С.Ю. Шергин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 50–53. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.**

В работе приведено решение нестационарной термоэлектромагнитной краевой задачи для определения распределения объемного поля температур при индукционном нагреве цилиндрической заготовки для подшипникового кольца с учетом зависимости электромагнитных характеристик материала от температуры. Численное моделирование процесса индукционного нагрева цилиндрической заготовки выполнялось методом конечных элементов с использованием специализированного программного комплекса. Проводился подбор электрических параметров, которые обеспечивают рациональный режим работы индукционного нагревателя. Рациональные параметры подбирались с целью обеспечения максимально однородного распределения температуры по всему объему заготовки подшипникового кольца. С учетом процесса остывания получено распределение поля температур в заготовке перед началом процесса горячей штамповки, которое отвечает требованиям не превышения заданного максимального перепада температуры в заготовке. Полученные численные результаты распределения температуры в цилиндрической заготовке подшипникового кольца сравнивались с экспериментальными данными пирометрических измерений температуры на боковой поверхности и в центре торцевой части заготовки.

**Ключевые слова:** цилиндрическая заготовка, индукционный нагрев, рациональный режим, термоэлектромагнитная задача, метод конечных элементов.

УДК 539

**Трибологическая система ультразвуковой сварки. Подсистема ультразвукового инструмента/ С.Н. Исаков, А.С. Исаков, С.И. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 54–56. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-9130.**

Разработана подсистема ультразвукового инструмента с использованием программного комплекса ANSYS, который интегрирован в трибологическую систему ультразвуковой сварки. Проведены моделирование ультразвукового инструмента, симметричного относительно оси, и численные расчеты рабочей резонансной частоты и формы колебаний. Предложен подход к интегрированию новой подсистемы в общую трибологическую систему ультразвуковой сварки.

**Ключевые слова:** трибологическая система, высокочастотное нагружение, ультразвуковая сварка.

УДК 519:539:534

**Моделирование корпуса паровой турбины и анализ основных вибрационных характеристик / С.В. Красников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 56–59. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Исследуются вибрационные характеристики корпуса паровой турбины и его взаимодействие с фундаментом. Объектом исследования является наиболее гибкий корпус паровой турбины – цилиндр низкого давления. Рассматривается паровая турбина, которая относится к классу наибольших мощностей среди конструкций этого типа. Моделирование и проведение расчетных исследований выполнено с использованием метода конечных элементов. Построены серии конечно-элементных моделей рассматриваемой конструкции. Проведены расчеты собственных колебаний на серии из десяти моделей. Получены основные вибрационные характеристики при различных вариантах моделирования взаимосвязи корпуса паровой турбины с фундаментом. Полученные результаты можно использовать для оценки вибрационного состояния корпуса паровой турбины и фундамента на который опирается каждый корпус.

**Ключевые слова:** вибрация, паровая турбина, цилиндр низкого давления, метод конечных элементов, собственные частоты, фундамент.

УДК 539.3

**Анализ деформирования составных конструкций при электромагнитном прессовании / Д.В. Лавинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 26 (1198). – С. 60–63. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.**

Представлена математическая постановка задачи анализа упругопластического деформирования системы электропроводных тел при действии электромагнитного поля. Предложен численный метод решения согласно схемы метода конечных элементов. Предложенный метод базируется на вариационном принципе стационарности полной энергии системы. Рассмотрено приложение данного метода к анализу деформирования составной матрицы пресс-формы, которая используется для прессования порошковых материалов.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, упругопластическое деформирование, прессование порошков, метод конечных элементов.

УДК 539.431:678

**Экспериментальная оценка характеристик сопротивления усталости резино-кордных композитов при деформировании в направлении, ортогональном армированию до та после искусственного старения / А.А. Ларин // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 63–68. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.**

В работе определяются показатели сопротивления усталости усиленного текстильным кордом резинового композита и закономерности их изменения в результате старения. Исследования проводятся экспериментально с плоскими образцами на растяжение. Отдельно исследовались образцы материала до и после старения. Старение проводилось искусственно путем длительной выдержки образцов в термокамере на фиксированной повышенной температуре. Проведен сравнительный анализ изменения параметров кривых усталости со временем в результате старения.

**Ключевые слова:** резиновый композит, старение, экспериментальные тесты на усталость, каркас пневматической шины.

УДК 539.3

**Исследование НДС диска бороны на индивидуальной пружинной стойке / Э.А. Симсон, Д.С. Ягудин // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 68–70. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

Проведено компьютерное моделирование процесса эксплуатации дисковой бороны на индивидуальной пружинной стойке. Сформулирована задача по исследованию поведения стойки при силовом и кинематическом нагружении стойки от действия эксплуатационных нагрузок, а также проведен частотный анализ конструкции. Анализ полей деформаций и напряжений показал, что статическое и кинематическое нагружение само по себе не приводит к разрушению стойки. По результатам исследования поверхности излома разрушение носит комплексный характер: накопление усталостных повреждений с последующим разрушением от статической кинематической нагрузки.

**Ключевые слова:** дисковая бороны, пружинная стойка, собственная частота, разрушение, метод конечных элементов.

УДК 539.3

**Анализ прочности и динамики поворотных симметричных многокомпонентных конструкций (подшипниковых узлов качения) / Э. А. Симсон; С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 71–74. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.**

Особенности поворотных симметричных конструкций позволяют путем создания специализированных теорий и численных технологий перейти от общих методов анализа к специальным, значительно меньшей размерности. Рассмотрены и проанализированы методы прочностного и динамического расчета на примере подшипников качения. Доработка метода решения спектральной проблемы ЦСК базируется на включении метода квазициклических разложений "внутрь" алгоритма итерационного преобразования подпространства.

**Ключевые слова:** механика, поворотные симметричные конструкции, подшипники качения, блочная итерация, конечные элементы.

УДК 539.3

**Анализ релаксации контактного давления между вязкоупругим композитным бандажом и трубопроводом / В. Г. Сукиасов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 74–77. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Изложены постановка и методика приближенного аналитического решения задачи о взаимодействии композитного ремонтного бандаж со стальным трубопроводом. Вязкоупругие свойства ортотропного композита моделируются на основе принципа соответствия Вольтерра, в сочетании с правилом смесей. Зависимость контактного давления от времени получена с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа для различных значений объемного содержания армирующих волокон.

**Ключевые слова:** бандаж, трубопровод, вязкоупругие свойства, композит, контактное давление, преобразование Лапласа.

УДК 539.3

**О прогнозировании времени до разрушения при ползучести осесимметрично нагруженных полых цилиндров и цилиндрических оболочек / С.Н. Склепус, А.З. Галишин // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 77–84. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.**

Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и длительной прочности полых цилиндров и цилиндрических оболочек, работающих при ползучести. Решения для оболочек различной толщины, основанные на гипотезах прямолинейного элемента, сопоставляются с пространственными решениями для осесимметрично нагруженных полых цилиндров. Исследовано влияние соотношения геометрических размеров на точность оболочечного решения. Разработан способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных о времени до разрушения полученных по оболочечной теории, и наоборот.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, прогнозирование, полый цилиндр, цилиндрическая оболочка.

УДК 539.3

**Исследование ползучести и повреждаемости пологой оболочки из материала с характеристиками, зависящими от вида нагружения / С. Н. Склепус // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 85–88. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.**

Статья посвящена исследованию ползучести и повреждаемости пологих изотропных оболочек сложной формы в плане, из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения. В постановке задачи используются определяющие со-

отношения, описывающие дислокационную ползучесть первоначально изотропных материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения, ассоциированную с образованием и ростом плоских микротрещин с преимущественной ориентацией. Начально-краевая задача ползучести и повреждаемости решается с помощью совместного использования методов R-функций, Ритца и Рунге-Кутты-Мерсона. Исследовано влияние направления внешней нагрузки на ползучесть, повреждаемость и длительную прочность сферической пологой оболочки сложной формы.

**Ключевые слова:** ползучесть, повреждаемость, время до разрушения, полая оболочка, метод R-функций.

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**Исследование динамической устойчивости регулятора давления с пневматическим управлением при учете колебаний столба газа в трубопроводах / С.А. Шевченко, А.Л. Григорьев, М.С. Степанов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 89–108. – Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2078-9130.**

Составлена дискретно-континуальная нелинейная модель и выведено трансцендентное характеристическое уравнение для исследования свободных колебаний регулятора пневмосистемы запуска ракетного двигателя. Разработан метод нахождения границы динамической устойчивости системы и критерий устойчивости ее предельного цикла. Описан порядок настройки системы на автоколебания малой амплитуды.

**Ключевые слова:** пневмосистема, дискретно-континуальная модель, гармоническая линеаризация, механический импеданс, динамическая устойчивость, автоколебания.

УДК 539.3

**Баженов В.А. Опасные бифуркации при движении виброударной системы с двумя степенями свободы / В.А. Баженов, О.С. Погорелова, Т.Г. Постникова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 109–113. – Бібліогр.: 25 назв. – ISSN 2078-9130.**

Изучается динамическое поведение сильно нелинейной негладкой разрывной виброударной системы. При изменении системных параметров мы находим разрывные бифуркации, которые являются опасными. Это явление уникально для негладких систем с разрывной правой частью. Виброударную систему с двумя степенями свободы мы исследуем численным методом продолжения по параметру вместе с методами стрельбы и Ньютона-Рафсона. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия в соответствии с контактными законами Герца. Разрывные бифуркации определяются по значениям мультипликаторов Флоке. Изучается также изменение бифуркационной картины, когда удар между телами становится мягким.

**Ключевые слова:** нелинейная разрывная виброударная система, закон Герца, бифуркация, мультипликатор, устойчивость.

УДК 539.3

**Некоторые задачи стационарного деформирования составных систем из оболочек вращения / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, Н.П. Яремченко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 114–117. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.**

На основе оболочечных моделей различного уровня строгости построен единый подход к решению ряда задач стационарного деформирования для упругих систем из оболочек вращения сложной формы и структуры. Подход включает единую численно-аналитическую методику, которая базируется на рациональном сведении к одномерным линейным краевым задачам. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния гибких оболочек вращения, их колебаний, при наличии разветвлений и динамической стойкости в поле периодических нагрузок

**Ключевые слова:** составные системы, постоянная деформация, общий подход, анализ.

УДК 539.3

**Вибродиагностика прокатных станов на основе нелинейных эффектов в динамике / П. В. Крот, В. В. Коренной // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 26 (1198). – С. 118–123. – Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2078-9130.**

В статье описаны нелинейные эффекты, возникающие в динамике прокатных станов. Это необходимо для демпфирования колебаний и надежной диагностики оборудования прокатных станов в условиях нестационарных режимов работы. Исследованы три типа нелинейных эффектов, наблюдаемых в трансмиссиях и клетях различной конструкции, а именно, переходные крутильные колебания в станах горячей прокатки, колебания «чаттер» в станах тандем холодной прокатки и параметрические колебания в высокоскоростном стане прокатки проволоки и прутков. Предложена методика для идентификации собственных частот при коротких переходных сигналах крутящего момента, когда применение преобразования Фурье ограничено. Приведены примеры использования нелинейных эффектов для диагностики износа и контроля вибраций на основе анализа собственных частот и форм колебаний многомассных систем.

**Ключевые слова:** прокатные станы, нелинейные колебания, вибрации «чаттер», идентификация

## ABSTRACTS

**To the 90<sup>th</sup> anniversary of V. Rvachev, Academician of the NAS of Ukraine / T.I. Sheyko, L.V. Kurpa, O.O. Bezdetko, A.O. Osetrov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 7–26. – Bibliogr.: 44. – ISSN 2078-9130.

The article is devoted to the 90th anniversary of the birth of the outstanding Ukrainian scientist in the field of mathematics, mechanics and cybernetics, Academician of NAS of Ukraine Vladimir L. Rvachev. The article describes the life and creative path of V. Rvachev. The main scientific results of V. Rvachev, that allowed a significant breakthrough in the field of analytical identification of geometric objects and solving boundary value problems of mathematical physics, are discussed. Some statements and quotes of V. Rvachev, taken from his diaries, are listed. A brief description of the results obtained by V. Rvachev during his last years, related to the construction of non-Archimedean calculus and their possible applications in the physics of deep space, is given. A list of the main publications of V. Rvachev is also provided.

**Key words:** academician V. Rvachev, 90<sup>th</sup> anniversary, R-functions theory, biography.

**Centenary of Professor Lev Izrailevich Shteinvolf / Ju.M.Andreev, E.I.Drujinin, A.A. Larin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 27-31. – Bibliogr.: 25. – ISSN 2078-9130.

April 23, 2016 marks the 100th anniversary of the birth of Lev I. Shteinvolf – who was a well-known scientist in the field of mechanics, a doctor of technical sciences, and a professor of theoretical mechanics at Kharkiv Polytechnic Institute. His contributions to the development of computer algebra systems in the field of mechanics, and the introduction of such methods in scientific, practical, and educational activities were invaluable. Noteworthy is his creation of the theoretical foundations and practical implementation of a fundamentally new software in the field of machine dynamics calculations: the KiDiM computer algebra system. The article contains biographical data, and the results of the research and teaching of Professor Shteinvolf and his disciples. Graduates over many generation have forever preserved the memory of this remarkable scientist and educator.

**Keywords:** theoretical mechanics, theory of vibrations, machine dynamics, computer algebra system, diesel tank and propulsion systems, vibration diagnostics.

**High-speed deformation of a high-strength coated thin plate / L.V. Avtomomova, S.V. Bondar, A.V. Stebuk, V.L. Khavin, S.Y. Shergin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 32-34. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

The punch with cone-shaped working part impact into aluminum alloy thin-walled structures is mathematical modelled applying thermo-mechanical coupling of the physical processes during their deformation. The nonlinear physical properties contain a nonlinear stress-strain rate dependence of temperature. To solve the contact problem the sliding boundary conditions (friction) on moving bodies introduced. Numerical simulation of impact process performed using the finite element method and the independent Lagrange-Euler approach for two variants of the thin-walled box structure. The solution of the dynamic viscous plastic contact problem allowed to determine and to design the stress-strain fields in the thin-walled box section. For comparison, the deformation process of the similar aluminum construction with an additional rib considered when the punch with the conical working part impact. Analysis of stress-strain state for two various types of structural geometries demonstrated that mounting the additional medial rib into its design let redistribute the stress fields and significantly reduce the plastic deformation area during the impact because of four fold increasing in its contact stiffness. Such modification of the structure rigidity may improve the strength properties of the entire composite security device applying changes only to its part.

**Keywords:** thin-walled structures, kick piercer, punch, contact problem, the finite element method.

**Optimization of the circular plate in unsteady loading / V.F.Vasilchenko, A.N. Lomakin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 35-37. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.

We consider the round plate is exposed to a non-stationary load. An algorithm for solving the problem of the plate the minimum weight with restrictions on the movement and tension. The problem is solved by a method of successive approximations. Necessary optimality conditions are formulated based on the Pontryagin principle. On the basis of these conditions are optimal and the algorithm of the method of successive approximations developed a versatile program of optimization of circular plates. With it are the minimum volume configuration with restrictions on the stresses and displacements for any fixing. At the same time the original and conjugate variables for each specific geometric execution of the plate  $h(r)$  are sought by an expansion in their own forms of vibrations. Boundary problems are solved by the method of initial parameters; the initial problem with the integrated by the Runge - Kutta method. Maximizing Hamiltonian performed in a finite set of points along the radius of the plate. The results of calculating the optimum plate.

**Keywords:** plate, optimization, stress-strain state, minimizing the volume of the boundary value problem.

**Mutual influence of connections with a tightness / D.G. Vinogradsky, A.G. Andreev** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 37-44. – Bibliogr.: 99. – ISSN 2078-9130.

This work is devoted to research of mutual influence of connections with a tightness of options for connections with a tightness: solid shaft with two hubs, two solid shaft sleeve, hollow shaft with two hubs, two hollow shaft sleeve PC ANSYS. The characteristics of the stress-strain state (equivalent stresses). The contact pressure of the total displacement), depending on the size of the interval between the compounds with an interference fit. It was found that increasing the interval characteristics of the stress-strain state of the first change-intensive, then stabilize when it reaches a certain value range. A similar pattern has the characteristic features of each type of compound. Each of the two connections with a tightness, included in this type of connections are identical in their characteristics of the stress-strain state. These results are consistent with the stress distribution in the Lamé of thick-walled cylinders and indicate the possibility of applying the principle of San-Venan compounds with an interference fit.

**Keywords:** connections with a tightness, finite element method, stress, strain.

**Nonstationary vibrations of strings and their systems contacting with different concentrated loads / A. V. Voropay, E. S. Malakhov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 45–49. – Bibliogr.: 7. – ISSN 2078-9130.

Nonstationary vibrations of strings and their systems, caused by a finite numbers of concentrated loads, are considered. External forces can be simulated by nonstationary concentrated loads. We can use nonstationary concentrated loads to simulate the external forces and reactions, conformed to influence of mass or dampers. A generalized layout of research was built for system of strings, where all strings intersect a common one. A method for constructing the system of equations is given. The system consists of one-dimensional wave equations for several strings. The system is closed by additional relations in contact points. The obtained system is the system of Volterra integral equations. The system is reduced to block matrix equation after discretization. The problem of nonstationary string vibrations with two joined dampers is solved as an example.

**Keywords:** string, transient loading, the wave equation, regularization algorithm, Volterra integral equation, direct and inverse problem.

**Numerical simulation of the workpieces' temperature field for manufacturing bearing rings during induction heating / I.D.Grozenok, E.A.Simson, A.V.Stepuk, S.Y. Shergin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 50-53. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

Non-steady thermo-electromagnetic boundary problem is solved to define volume temperature filed distribution within the bearing ring during inductive heating of the cylinder work piece; its material magnetic characteristics assumed to depend on temperature. Numerical modeling was executed with software package based on finite elements. To make available the rational working regime of the inductive heater a few scheme parameters varied. Their choice defined to provide the most even volumetric temperature distribution within a work piece. Given the process of cooling, the temperature field distribution in the work piece obtained before hot stamping process start, which are limited with the predefined highest changes in temperature in the work piece. The latter meets the requirements to do not exceed a predetermined maximum temperature difference in the work piece. The obtained results of the temperature distribution in the cylindrical blank were compared with the experimental data of pyrometric temperature measurements on the face surface and in the center of the perform tore end-part.

**Keywords:** cylindrical workpiece, induction heating, rational mode, thermos-electromagnetic problem, the finite element method.

**Tribological system of ultrasonic welding. Subsystem ultrasonic tool / S. Isakov, O. Isakov, S. Marusenko** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 54-56. – Bibliogr.: 5. – ISSN 2078-9130.

A subsystem of the ultrasonic instrument using ANSYS software system, which is integrated in the tribological system of ultrasonic welding, is developed. The simulation of the ultrasonic tool, which is symmetrical about an axis, and numerical calculations of the working resonance frequency and waveform are fulfilled. An approach to the integration of new subsystems into the overall tribological ultrasonic welding system is proposed.

**Keywords:** tribological system, the high loading, ultrasonic welding.

**Modelling of the hull of the steam turbine and the analysis of the basic vibration characteristics / S.V. Krasnikov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 56–59. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.

Investigates the vibration characteristics of the casing of the steam turbine and its interaction with the foundation. The object of the study is the most flexible housing of a steam turbine – low pressure case. The steam turbine is considered, which refers to the highest capacity among the structures of this type. Modeling and computational studies performed using the finite element method. Built a series of finite element models of the considered structures. The calculations of self-oscillations to a series of ten models. The main vibration characteristics at different options for modeling the relationship between the hull of the steam turbine with the foundation. The obtained results can be used to assess the vibration condition of the shell of the steam turbine and the foundation on which rests every case.

**Key words:** vibration, steam turbine, low pressure case, finite element method, own frequencies, foundation.

**Deformation analysis of compound structures under electromagnetic press-molding / D.V. Lavinsky** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 60–63. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2078-9130.

The paper under consideration deals with the deformation analysis of compound conductive structures. It is considered the inelastic deformation of the die molds for electromagnetic compactions of powders. It is presented the general mathematical statement of the problem. The statement includes equations for electromagnetic field and for inelastic deformation. The numerical method of solving is based on the variation principles of full energy stationarity. The proposed numerical method is used for analysis of deformation of one type of press-molding for electromagnetic powder compaction.

**Keywords:** electromagnetic field, inelastic deformation, powders compaction, finite element method.

**Experimental estimation of fatigue resistance of rubber-cord composite under orthogonal to reinforcement deformation before and after artificial aging / O. O. Larin** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 63–68. – Bibliogr.: 14. – ISSN 2078-9130.

The paper defines parameters of the fatigue resistance of the rubber-base composite with textile reinforcement and the regularity of their changes due to aging. That material is presents pneumatic tire's carcass layer. The research has carried out experimentally using a modern measuring system INSTRON. Tests have been carried out with specimens on cyclic tensile uni-directional deformation in a displacement control condition. The amplitudes of deformation was fixed and the specimens cycles around the set middle level of deformation, that avoids the effect of specimen buckling. The results of the tests on cyclic deformation up to failure at differ-

ent amplitudes of the load have been approximated by the straight lines in a double logarithmic coordinates, i.e. classical Wohler fatigue curves were obtained. The specimens before and after aging have been studied independently.

The aging of samples was gained artificially using the procedure of thermal prolonged exposure in a heat chamber at a fixed temperature. Based on the recommendations given in the literature, the samples were kept for 6 days at 80 °C, that corresponds to the natural aging of this material at a room temperature during the 3 years.

Comparative analysis of fatigue curves obtained for samples of the material before and after artificial aging shows that the slope of Wohler curves does not change over the time, but the basic number of cycles to failure is significantly reduced. The parameters of the approximations for fatigue curves are obtained relatively for the amplitudes of strains and Cauchy true stresses.

**Keywords:** rubber composites, aging, experimental fatigue tests, carcass layers of the pneumatic tire.

**The stress-strain state research of disk harrow on an individual spring rack / E. A. Simson, D. S. Yagudin // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – C. 68–70. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.**

An operating process of disc harrow on the individual spring rack was conducted by computer simulation. A problem is set on research of rack under power and kinematic load from the action of operational loads, and also the frequency analysis of construction was conducted. The analysis of strains and stresses fields has shown that static and kinematic loading itself does not lead to destruction of the rack. By results of fracture surface research destruction carries complex character: the accumulation of fatigue damage with the subsequent destruction under kinematic static load.

**Keywords:** disc harrow, spring rack, natural frequency, destruction, finite element method.

**Strength and dynamic analysis multicomponent cyclically symmetric structures (rolling bearings) / E. A. Simson, S. A. Nazarenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 71-74. – Bibliogr.: 12. – ISSN 2078-9130.**

This paper reviewed and analyzed the methods of strength and dynamic analysis of cyclically symmetric structures. The original method of analysis has been proposed cyclically symmetric structures such as rolling bearings. Rolling bearings are commonly used in industrial machines. Features cyclically symmetrical designs allow the creation of specialized by theory and numerical techniques to move from the general methods of analysis in the direction of special, much smaller dimensions and costs. Methods for solving spectral problems for cyclically symmetric structures are based on the inclusion of quasi-cyclic decomposition scheme "inside" of the iterative algorithm conversion subspace. Each step of the method is modeled on the basis of cyclical sectors. This allows processing sector finite-element model for each stage. Connectivity is achieved by cyclic recombination inter-face degrees of freedom. The functionality of this approach has been tested. Conclusions of the vibrations of rolling bearings were made.

**Keywords:** mechanics, cyclically symmetric structure, finite element method, rolling bearing, reduced order modeling techniques, stress, sector.

**Analysis the relaxation of contact pressure between viscoelastic composite band and pipeline / V. G. Sukiasov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 74-77. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.**

The statement and an approximate analytical method of solving the problem of interaction between the composite repair band and a steel pipeline are outlined. Computational model is a two-layer cylinder in plane strain conditions, under internal pressure. With one-sided Laplace transformation the viscoelastic problem solution is obtained in the images, according to the Volterra correspondence principle. The viscoelastic properties of the orthotropic composite are simulated by mixtures rule, taking into account the characteristics of reinforcing fibers and a polymer matrix. To find the original describing the time dependency of the contact pressure used the approximation of the transcendental part of image by truncated power series. The calculations were performed for different values of the reinforcing fibers volume content.

**Keywords:** band, pipeline, viscoelastic properties, composite, the contact pressure, the Laplace transformation.

**On prediction of the creep rupture time for axisymmetrically loaded hollow cylinders and cylindrical shells / S.N. Sklepus, A.Z. Galishin // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 77-84. – Bibliogr.: 14. – ISSN 2078-9130.**

The problem of determining the stress-strain state, damageability and long-term strength of hollow cylinders and cylindrical shells, working under creep conditions, is considered. Solutions for shells of various thickness, based on the hypothesis of rectilinear element, compared with the 3D solutions for hollow cylinders under axisymmetric loading. The effect of aspect ratio on the accuracy of solutions based on the shell theory is investigated. Prediction approach of time to failure in 3D formulation on the basis of data, obtained by the shell theory and vice versa is elaborated.

**Keywords:** creep, damageability, time to fracture, prediction, hollow cylinder, cylindrical shell.

**Investigation of the creep and damageability of a shallow shell from material with characteristics dependent on the kind of loading / S.N. Sklepus // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 85-88. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.**

The paper is devoted to the investigation of creep and damageability of isotropic shallow shells with complex shape made from materials with characteristics dependent on the kind of loading. For the formulation of the problem are used the constitutive equations which describe the dislocation creep of initially isotropic materials with characteristics dependent on the kind of loading, associated with the nucleation and growth of planar microcracks with the preferred orientation. A method for solving of the non-linear initial-boundary value problem of creep and damageability is based on the combined application of the R-functions, Ritz and the Runge-Kutta–Merson methods. The influence of the direction of the external load on the creep, damageability and long-term strength of spherical shallow shell with complex shape has been investigated.

**Keywords:** creep, damageability, time to fracture, shallow shell, R-functions method.

**Dynamic stability research of the pressure regulator with pneumatic control with allowance for the gas column oscillations in the pipelines / S. Shevchenko, A. Grigoriev, M. Stepanov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 89–108. – Bibliogr.: 19. – ISSN 2078-9130.**

The discrete-continual nonlinear dynamic model of the liquid rocket engine pneumatic starting system is developed. The model describes steady oscillations at compressed helium supply from a gas tank through the pipelines and pressure regulator with pneumatic control. By using the harmonic linearization method the formulae have been derived for calculation of the gas flowrate oscillations in the throttle and throttling gap as well as collar friction forces. The calculation method of mechanical impedance has been developed for gas columns' oscillations of the control unit's piping system and formulae have been obtained for impedance of the cavities contacting with the regulator. The transcendental characteristic equation for frequencies and amplitudes of the regulator and pneumatic system free oscillations has been derived and methods of its solution have been developed. The graphic-analytical method of the dynamic stability system limit determination has been proposed as well as the new stability criterion for corresponding limit cycles has been obtained. It is shown that stability and oscillation depend on the pipes dimensions and control orifice diameter. The system adjusting sequence for self-oscillations of small amplitude is described.

**Keywords:** pneumatic system, discrete-continual model, harmonic linearization, mechanical impedance, dynamic stability, self-oscillations.

**Dangerous Bifurcations in 2-DOF Vibroimpact System / V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 109-113. – Bibliogr.: 25. – ISSN 2078-9130.**

Dynamic behaviour of strongly nonlinear non-smooth discontinuous vibroimpact system is studied. Under variation of system parameters we find the discontinuous bifurcations that are the dangerous ones. It is phenomenon unique to non-smooth systems with discontinuous right-hand side. We investigate the 2-DOF vibroimpact system by numerical parameter continuation method in conjunction with shooting and Newton-Raphson methods. We simulate the impact by nonlinear contact interactive force according to Hertz's contact law. We find the discontinuous bifurcations by Floquet multipliers values. At such points set-valued Floquet multipliers cross the unit circle by jump that is their moduli becoming more than unit by jump. We also learn the bifurcation picture change when the impact between system bodies became the soft one due the change of system parameters. This paper is the continuation of the previous works.

**Keywords:** vibroimpact, discontinuous, Hertz's law, bifurcation, multiplier, nonlinear, stability.

**Some Stationary Deformation Problems for Compound Shells of Revolution / Y. Grigorenko, E. Bespalova, N. Yaremchenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 114-117. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.**

A common approach to solving stationary deformation problems for compound systems composed of shells of revolution with different geometry and structure is developed. The approach is based on the use of shell models with different level of rigor and of the general numerical-analytical technique for solving corresponding problems. The examples of studying the subcritical stress-strain state, vibrations, and dynamical instability of complex form systems are presented, features of their deformation are noted.

**Keywords:** compound systems, stationary deformation, common approach, analysis.

**Vibration diagnostics of rolling mills based on nonlinear effects in dynamics / P.V. Krot, V.V. Korennoy // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 26 (1198). – P. 118-123. – Bibliogr.: 18. – ISSN 2078-9130.**

This paper intends to describe nonlinear effects occurring in rolling mills dynamics. That is necessarily for vibrations damping and reliable diagnostics of rolling mills equipment under non-stationary working conditions. Three types of nonlinear effects are investigated taking place in drivelines and stands of different design, namely, transient torsional vibrations in hot rolling mills, chatter vibrations in tandem cold rolling mills and parametrical vibrations in high-speed wire and rod rolling mills. The procedure is proposed for natural frequencies identification when short transient torque signals restrict application of the Fourier transform. Examples are given on using nonlinear effects for wear diagnostics and vibrations control based on natural frequencies and modes analysis of multi-body systems.

**Keywords:** rolling mills, nonlinear vibrations, chatter identification.

## ЗМІСТ

Шевченко Юрій Миколайович . . . . .	5
<b>Шейко Т.И., Курна Л.В., Бездетко Е.О., Осетров А.А.</b> К 90-летию со дня рождения Академика НАН Украины Владимира Логвиновича Рвачева . . . . .	7
<b>Андреев Ю.М., Дружинин Е.И., Ларин А.А.</b> Вековой юбилей профессора Льва Израилевича Штейнвольфа . . . . .	27
<b>Автономова Л.В., Бондарь С.В., Степук А.В., Хавин В.Л., Шергин С.Ю.</b> Ударное деформирование тонкостенной конструкции . . . . .	32
<b>Васильченко В.Ф., Ломакин А.Н.</b> Оптимизация круглых пластин при нестационарном нагружении . . . . .	35
<b>Виноградский Д.Г., Андреев А.Г.</b> Взаимное влияние соединений с натягом . . . . .	37
<b>Воропай А.В., Малахов Е.С.</b> Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками . . . . .	45
<b>Грозенок Е.Д., Симсон Э.А., Степук А.В., Шергин С.Ю.</b> Численное моделирование температурного поля заготовок при индукционном нагреве для изготовления подшипниковых колец . . . . .	50
<b>Исаков С.М., Исаков О.С., Марусенко С.І.</b> Трибологічна система ультразвукового зварювання. підсистема ультразвукового інструменту . . . . .	54
<b>Красников С.В.</b> Моделирование корпуса паровой турбины и анализ основных вибрационных характеристик . . . . .	56
<b>Лавинский Д.В.</b> Анализ деформирования составных конструкций при электромагнитном прессовании . . . . .	60
<b>Ларін О.О.</b> Експериментальна оцінка характеристик опору втомі гумо-кордних композитів при деформуванні в напрямку ортогональному армуванню до та після штучного старіння . . . . .	63
<b>Симсон Э.А., Ягудин Д.С.</b> Исследование НДС диска бороны на индивидуальной пружинной стойке . . . . .	68
<b>Симсон Э.А., Назаренко С.А.</b> Анализ прочности и динамики поворотно-симметричных многокомпонентных конструкций (подшипниковых узлов качения) . . . . .	71
<b>Сукиасов В.Г.</b> Анализ релаксации контактного давления между вязкоупругим композитным бандажом и трубопроводом . . . . .	74
<b>С.Н.Склепус, А.З.Галишин</b> О прогнозировании времени до разрушения при ползучести осесимметрично нагруженных полых цилиндров и цилиндрических оболочек . . . . .	77
<b>Склепус С.Н.</b> Ползучесть и повреждаемость пологих оболочек сложной формы из материалов с характеристиками, зависящими от вида нагружения . . . . .	85
<b>Шевченко С.А., Григорьев А.Л., Степанов М.С.</b> Исследование динамической устойчивости регулятора давления с пневматическим управлением при учете колебаний столбов газа в трубопроводах . . . . .	89
<b>Баженов В. А., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.</b> Небезпечні біфуркації при русі віброударної системи з двома степенями свободи (англійською мовою) . . . . .	109
<b>Григоренко Я. М., Беспалова О. І., Яремченко Н. П.</b> Деякі задачі стаціонарного деформування складених систем з оболонок обертання (англійською мовою) . . . . .	114
<b>Крот П. В., Корінний В. В.</b> Вібродіагностика прокатних станів на основі нелінійних ефектів в динаміці (англійською мовою) . . . . .	118
Реферати . . . . .	124
Рефераты . . . . .	128
Abstracts . . . . .	132



## CONTENTS

Shevchenko Yuriy Mykolajovych . . . . .	5
<b>Sheyko T.I., Kurpa L.V., Bezdetko O.O., Osetrov A.O.</b> To the 90th anniversary of V. Rvachev, Academician of the NAS of Ukraine . . . . .	7
<b>Andreev Ju.M., Drujinin E.I., Larin A.A.</b> Centenary of Professor Lev Izrailevich Shteinvolf . . . . .	27
<b>Avtonomova L.V., Bondar S.V., Stepuk A.V., Khavin V.L., Shergin S.Y.</b> High-speed deformation of a high-strength coated thin plate . . . . .	32
<b>Vasilchenko V.F., Lomakin A.N.</b> Optimization of the circular plate in unsteady loading . . . . .	35
<b>Vinogradsky D.G., Andreev A.G.</b> Mutual influence of connections with a tightness . . . . .	37
<b>Voropay A.V., Malakhov E.S.</b> Nonstationary vibrations of strings and their systems contacting with different concentrated loads . . . . .	45
<b>Grozenok I.D., Simson E.A., Stepuk A.V., Shergin S.Y.</b> Numerical simulation of the workpieces' temperature field for manufacturing bearing rings during induction heating . . . . .	50
<b>Isakov S., Isakov O., Marusenko S.</b> Tribological system of ultrasonic welding. Subsystem ultrasonic tool . . . . .	54
<b>Krasnikov S.V.</b> Modelling of the hull of the steam turbine and the analysis of the basic vibration characteristics . . . . .	56
<b>Lavinsky D.V.</b> Deformation analysis of compound structures under electromagnetic press-molding . . . . .	60
<b>Larin O.O.</b> Experimental estimation of fatigue resistance of rubber-cord composite under orthogonal to reinforcement deformation be-fore and after artificial aging . . . . .	63
<b>Simson E.A., Yagudin D.S.</b> The stress-strain state research of disk harrow on an individual spring rack . . . . .	68
<b>Simson E.A., Nazarenko S.A.</b> Strength and dynamic analysis multicomponent cyclically symmetric structures (rolling bearings) . . . . .	71
<b>Sukiasov V.G.</b> Analysis the relaxation of contact pressure between viscoelastic composite band and pipeline . . . . .	74
<b>Sklepus S.N., Galishin A.Z.</b> On prediction of the creep rupture time for axisymmetrically loaded hollow cylinders and cylindrical shells . . . . .	77
<b>Sklepus S.N.</b> Creep and damageability of the shallow shells with complex shape from materials with characteristics dependent on the kind of loading . . . . .	85
<b>Shevchenko S., Grigoriev A., Stepanov M.</b> Dynamic stability research of the pressure regulator with pneumatic control with allowance for the gas column oscillations in the pipelines . . . . .	89
<b>Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.</b> Dangerous Bifurcations in 2-DOF Vibroimpact System . . . . .	109
<b>Grigorenko Y., Bepalova E., Yaremchenko N.</b> Some Stationary Deformation Problems for Compound Shells of Revolution . . . . .	114
<b>Krot P.V., Korennoy V.V.</b> Vibration diagnostics of rolling mills based on nonlinear effects in dynamics . . . . .	118
Abstracts (in Ukrainian) . . . . .	124
Abstracts (in Russian) . . . . .	128
Abstracts . . . . .	132

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Збірник наукових праць

Серія:  
Динаміка і міцність машин

№ 26 (1198)

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. О. К. Морачковський  
Технічний редактор: О. В. Щепкін  
Відповідальний за випуск: канд. техн. наук Г. Б. Обухова

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21,  
НТУ «ХПІ». Каф. ДММ  
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Обл.-вид № 53-16.

Підп. до друку 30.10.2016 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.  
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,95. Облік.-вид. арк. 10,00.  
Тираж 300 пр. 1-й завод 1-100. Зам. № 23. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня Impress

---

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Пушкінська, 56.

---