НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
1885
«ХПІ»

ISSN 2222-0631
16' 2016

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 16 (1188) 2016

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2016

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2016. – № 16 (1188). – 108 с.

Державне видання
Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська .

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого рішенням Атестаційної колегії МОН України щодо діяльності спеціалізованих вчених рад, від 15 грудня 2015 р. Наказ № 1328 (додаток 8) від 21.12.2015 р.

Координаційна рада:
Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф. (**голова**);
К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);
А. П. Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є. І. Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;
Є. Є. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;
Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.;
А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;
В. Д. Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;
В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;
П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепіков, д-р техн. наук, проф.;
С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.; О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
В. І. Ніколаєнко, канд. іст. наук, проф.; П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В. А. Пуляєв, д-р техн. наук, проф.; М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.; Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю. В. Тимофієв, д-р техн. наук, проф.; М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:
Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.
Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Відповідальний секретар: С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.
Члени редколегії: Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.;
Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних ***Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)***.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 6 від 8 липня 2016 р.

© Національний технічний університет «ХПІ», 2016

Ministry of Education and Science of Ukraine
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
“KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

BULLETIN

OF NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY “KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

Series: "Mathematical modeling in engineering and technologies"

№ 16 (1188) 2016

Collected Works

Published since 1961

Kharkiv
NTU "KhPI", 2016

Bulletin of National Technical University "KhPI". Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU "KhPI". – 2016. – No. 16 (1188). – 108 p.

State edition
Certificate of the State Committee for Information Policy of Ukraine
КВ № 5256, July 2, 2001

Language: Ukrainian and Russian.

The Bulletin of the National Technical University "KhPI" is included in the List of Scientific Professional Editions of Ukraine, where the results of dissertations for the degree of doctor and candidate of sciences can be published approved by the Decision of the Certifying Board of the Ministry of Education and Science of Ukraine as to the Activities of Special Academic Councils of December 15, 2015. Decree No.1328 (Appendix No. 8) of 21.12.2015.

Coordinating Board:
L. L. Tovazhnyanskyy, Dr. Tech. Sci., Prof. (**chief**);
K. O. Gorbunov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof. (**secretary**);
A. P. Marchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. I. Sokol, member NAS of Ukraine, Dr. Tech. Sci., Prof.;
E. E. Aleksandrov, Dr. Tech. Sci., Prof.; A. V Boyko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
F. F. Gladkiy, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. D. Godlevskiy, Dr. Tech. Sci., Prof.;
A. I. Grabchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. G. Danko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. D. Dmitrienko, Dr. Tech. Sci., Prof.; I. F. Domnin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. V. Epifanov, PhD. Tech. Sci., Prof.; Yu. I. Zaytsev, PhD. Tech. Sci., Prof.;
P. O. Kachanov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. B. Klepikov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
S. I. Kondrashov, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. I. Kravchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
G. V. Lisachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. K. Morachkovsky, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. I. Nikolaenko, PhD. His. Sci., Prof.; P. G. Pererva, Dr. Econ. Sci., Prof.;
V. A. Pulyaev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. I. Rishchenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
V. B. Samorodov, Dr. Tech. Sci., Prof.; G. M. Suchkov, Dr. Tech. Sci., Prof.;
Yu. V. Timofeev, Dr. Tech. Sci., Prof.; M. A. Tkachuk, Dr. Tech. Sci., Prof.

Editorial Board of the Series:
Executive Editor: V. A. Vanin, Dr. Tech. Sci., Prof.
Deputy Executive Editor: Yu. V. Mikhlin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.
Executive Secretary: S. V. Duhopelnikov, PhD. Tech. Sci., Assoc. Prof.
Members of the Editorial Board: Yu. V. Gandel, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; Yu. L. Gevorkyan, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; O. L. Grigoriev, Dr. Tech. Sci., Prof.; V. K. Dubovyy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;
L. V. Kurpa, Dr. Tech. Sci., Prof.; O. S. Kutsenko, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. M. Litvin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; L. M. Lyubchik, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. G. Nikolaev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; M. V. Novozhilova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.;
A. U. Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof.; V. P. Severin, Dr. Tech. Sci., Prof.;
O. M. Shelkovyy, Dr. Tech. Sci., Prof.; Ye. G. Yanyutin, Dr. Tech. Sci., Prof;
Alexander Kheifets, PhD. Phys.-Math. Sci., Prof.; Andriy Nosych, PhD. Phys.-Math. Sci., Scientist.

In April 2013 the Bulletin of National Technical University "KhPI" series "Mathematical modeling in engineering and technologies" *was included in the* ***Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)***.

Recommended for publication by the Academic Council of NTU "KhPI".
Protocol number 6, July 8, 2016.

© National Technical University "KhPI", 2016

УДК 519.6:539.3

В. А. ВАНИН, С. П. СВЕТЛИЧНЫЙ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛА ПТИЦЫ С ПРЕГРАДОЙ НА ОСНОВЕ СЕТОЧНОГО И БЕССЕТОЧНОГО МЕТОДОВ

Запропоновано гідродинамічні розрахункові моделі деформації тіла птиці, засновані на застосуванні Лагранжевого методу скінченних елементів та безсіткового методу згладжених частинок (SPH), отримано чисельне рішення задачі зіткнення птиці з абсолютно жорсткою перешкодою. Досліджено вплив форми тіла і числа елементів на величину максимального тиску при ударі. Приведені характерні особливості деформації тіла птиці в перші мікросекунди удару.

Ключові слова: пошкодження сторонніми предметами, моделювання зіткнення з птахом, метод Лагранжа, метод згладжених частинок (SPH), взаємодія рідини з твердим деформованим тілом, рівняння стану, тиск Гюгоньо.

Предложены гидродинамические расчетные модели деформации тела птицы, основанные на применении Лагранжевого МКЭ и бессеточного метода сглаженных частиц (SPH), получено численное решение задачи соударения птицы с абсолютно жесткой преградой. Исследовано влияние формы тела и числа элементов на величину максимального давления при ударе. Приведены характерные особенности деформации тела птицы в первые мгновения соударения, полученные при расчете по двум разным методам.

Ключевые слова: повреждение посторонними предметами, моделирование столкновения с птицей, метод Лагранжа, метод сглаженных частиц, взаимодействие жидкости с твердым деформируемым телом, уравнение состояния, давление Гюгонио.

In the paper bird body deformation hydrodynamic computation models using Lagrangian FEM and mesh-less smoothed-particle method (SPH) are developed. A numerical solution for the problem of a bird striking an absolutely rigid barrier is obtained. The dependence of the value of the maximal pressure at the contact on the body shape and particle quantity is studied. The features of the bird body deformation at the first moments of the contact computed using two different models are given.

Key words: Foreign Object Damage (FOD), bird strike simulation, Lagrangian method, SPH method, Fluid structure interaction (FSI), equation of state, Hugoniot pressure.

Введение. Исследование механических процессов ударного взаимодействия деформируемых твердых тел и связанный с ним анализ напряженно-деформированного состояния, распространения упругих и пластических волн напряжений является одной из актуальных проблем прикладной механики твердого деформируемого тела [1]. Среди задач, связанных с изучением ударных процессов, можно выделить относительно новое и активно развивающееся направление – повреждение элементов конструкции авиационных двигателей инородными телами и, в частности, задачу столкновения тела птицы с лопаткой двигателя.

Анализ последних исследований. Большой вклад в изучение проблемы соударения птицы с жесткой и деформируемой преградой был сделан американскими учеными *Дж. Барбером*, *Дж. Вилбеком*, *Г. Тейлором*, *Р. Петерсоном*, *Д. Бауэром* и *А. Чаллита* [2 – 6].

Исследование процессов ударного взаимодействия выполняют с использованием математических моделей различной степени сложности, а также экспериментально. Аналитические решения могут быть получены для ограниченного класса задач и при существенном упрощении (идеализации) математических моделей, описывающих ударные процессы.

Экспериментальный подход сопряжен с необходимостью проведения дорогостоящего эксперимента. Ему присущи существенный разброс и отсутствие повторяемости результатов при одинаковых условиях проведения эксперимента, а также в ряде случаев неполнота и сложность измерения данных в ходе эксперимента.

Альтернативным и перспективным подходом в исследовании процессов ударного взаимодействия является вычислительный эксперимент. Данный метод исследования основан на использовании более сложных математических моделей с применением современных численных методов и реализован в ряде пакетов прикладных программ: LS-DYNA, MSC-DYTRAN, ABAQUS, PAM-CRASH и др. В работах [7 – 16] приведены результаты численного моделирования соударения тела птицы с жесткой и деформируемой преградой. Анализ данных работ показал, что существует ряд вопросов, связанных с применением описанных математических моделей, требующих более детальной проработки. А именно: отсутствие единых стандартов на форму модели тела птицы, противоречия, касающиеся величин максимального давления, а также радиальной скорости растекания тела по преграде, неполнота, а в ряде случаев отсутствие экспериментальных данных, которые можно было бы использовать для верификации разрабатываемых математических моделей.

Постановка задачи. Целью данной работы является анализ применимости численных моделей мягких тел – тела птицы, построенных на основе сеточного (далее по тексту метод конечных элементов (МКЭ)) и бессеточного (метод сглаженных частиц (SPH)) методов в переменных Лагранжа, для моделирования ее соударения с жесткой преградой.

© В. А. Ванин, С. П. Светличный, 2016

Процесс соударения птицы с жесткой преградой представляет собой сложный физико-механический процесс, со свойственными ему рядом особенностей и определенными трудностями его моделирования. Задача исследования механических процессов соударения птицы с жесткой преградой является нестационарной пространственной контактной задачей механики сплошных сред, в которой:

– механические процессы, протекающие в системе «птица-жесткая преграда», существенно неоднородны и нелинейны;

– процесс соударения характеризуется быстротечностью и высокой интенсивностью;

– зона контакта, в общем случае, заранее неизвестна и представлена подвижной областью общей границы раздела сред – неклассический характер контактного взаимодействия [17];

– жесткость преграды влияет на силу контактного взаимодействия;

– существуют сильные разрывы параметров среды.

По классификации, встречающейся в зарубежной литературе, данная задача относиться к классу «Fluid-Structure Interaction» (FSI), где рассматривается взаимодействие *мягкого тела* (птица) с *твердым телом* (преграда). Поведение мягкого тела подчиняется законам гидродинамики сжимаемой жидкости, а твердое тело ведет себя в соответствии с законами механики твердого деформируемого тела.

Учитывая вышеперечисленные особенности, можно сформулировать задачу исследования следующим образом: смоделировать соударение птицы массой m, движущейся под углом 90° к поверхности абсолютно жесткой преграды цилиндрической формы со скоростью v (рис. 1). Разработать математическую модель, корректно описывающую механические процессы соударения с жесткой преградой, и сравнить результаты численного исследования с аналитическим решением и экспериментальными данными.

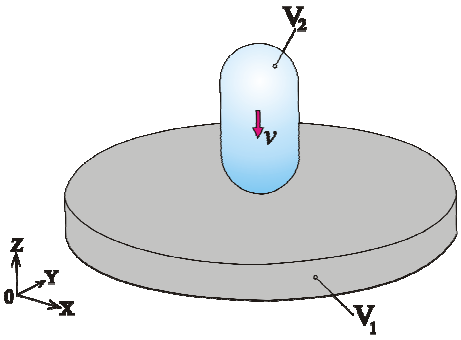


Рис. 1 – Схема соударения тела птицы с жесткой преградой.

Совершенно очевидно, что расчетная модель птицы должна воспроизводить не только импульс силы, передаваемый телом при ударе, но и изменение давления во времени. Поставленная задача считается решенной, если давление, возникающее в модели птицы, имеет такие же, как и в случае соударения реальной птицы, абсолютную величину, время нарастания и разгрузки и импульс давления. На рис. 1 приняты следующие обозначения: V_1 – часть пространства заданного объема, занимаемая преградой; V_2 – часть пространства заданного объема, принадлежащая телу птицы, v_0 – вектор начальной скорости.

Математическая модель. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом прямого численного моделирования. Рассмотрим математическую постановку решаемой задачи.

Для нахождения закона движения мягкого тела

$$x = x(X, t) \tag{1}$$

воспользуемся *подходом Лагранжа*. В качестве независимых переменных в уравнении (1) используются материальные координаты X и время t. Уравнение (1) устанавливает функциональную связь между текущими координатами $x(t)$ точек модели мягкого тела для любого момента времени t и начальными X.

Запишем основные уравнения механики сплошных сред, для $21-$го параметра $\rho(x,t)$, $p(x,t)$, $v(x,t)$, $x(x,t)$, $u(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $\dot{\varepsilon}(x,t)$, описывающих движение, термодинамическое и напряженно деформируемое состояние мягкого тела, а именно:

– уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div v = 0\,; \tag{2}$$

– уравнение изменения количества движения

$$\rho \frac{dv}{dt} = div\sigma\,;\ \frac{dx}{dt} = v\,, \tag{3}$$

где $v(x,t)$ – вектор скорости материальных точек; ρ – плотность тела; $\sigma = \{\sigma_{i,j}\}$, $i, j = 1, 2, 3$ – тензор напряжений Коши для мягкого тела;

– уравнение сохранения энергии

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma : \dot{\varepsilon}\,, \tag{4}$$

где u – удельная внутренняя энергия; : – свертка по двум индексам; $\varepsilon = \left\{ \dot{\varepsilon}_{i,j} \right\}$, $i, j = 1, 2, 3$, – тензор скоростей деформации;

– геометрические и физические соотношения.

Выражения для тензора скоростей деформации линейно $\dot{\varepsilon}_{i,j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, $i, j = 1, 2, 3$.

Тензор напряжений Коши для мягкого тела определен в виде

$$\sigma = -pI \,, \tag{5}$$

где $p(x,t)$ – давление; I – единичный тензор.

Поведение мягкого тела при ударе описано уравнением состояния (*модель Брокмана*)

$$p = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^3 \tag{6}$$

Здесь $\mu = \rho / \rho_0 - 1$ – коэффициент конденсации; $C_0 = 0$, $C_1 = \rho_0 c_0^2$, $C_2 = (2k-1)C_1$, $C_3 = (k-1)(3k-1)C_1$ – параметры уравнения состояния; $k = 2$ – экспериментальная константа; $c_0 = 1482.9$ м/с – скорость звука в воде.

Система уравнений (1) – (6) дополнена граничными, контактными в изменяющейся области контакта Γ и начальными условиями. Для исключения производных из выражений в граничных условиях эти условия формулируются в терминах скоростей и напряжений:

– граничные условия на свободной поверхности

$$\sigma(x,t)_n = 0, \;\; \sigma(x,t)_\tau = 0 \,, \;\; x \in \partial V_2 \setminus \Gamma \,; \tag{7}$$

– начальные условия

$$x(X,0) = X \,, \;\; \frac{dx}{dt}(X,0) = v_0 = -100 \,; \tag{8}$$

– контактные условия на Γ

$$(V(x,t) \cdot n) \le 0, \;\; x \in \Gamma \,, \;\; \sigma(x,t)_\tau = 0, \;\; x \in \Gamma \,, \tag{9}$$

$n, \tau -$ вектора общей нормали и касательной к поверхностям контакта тел 1 и 2.

В данной статье исследовано влияние некоторых форм мягкого тела, параметров численного метода для уравнений (1) – (9) (шага дискретизации по пространственным переменным) на изменение давления в точке первичного контакта его при его ударе о жесткую преграду.

Численная модель взаимодействия тела птицы с преградой. Моделирование соударения тела птицы с жесткой преградой выполнено в системе явного динамического анализа LS-DYNA.

Модель тела птицы представляет собой цилиндрический объем с соотношением длины к диаметру $A/D = 2$. В работе рассмотрены: модель 1 – цилиндр с плоскими торцами (**Flat_Cyl**) (рис. 2, *а*) и модель 2 – цилиндр со скругленными торцами (**Ball_End_Cyl**) (рис. 2, *б*).

Размеры тела птицы заданной массы определены из условия размещения этой массы, имеющей среднестатистическую плотность, внутри цилиндрического объема. Для модели 1 **(Flat_Cyl)** при массе тела птицы равной 1 кг и плотности $\rho_0 = 950$ кг/м^3 выбраны следующие размеры: длина $L = 175$ мм, $D = 87,6$ мм. Для модели 2 **(Ball_End_Cyl)** – длина $L = 186$ мм, $D = 93$ мм.

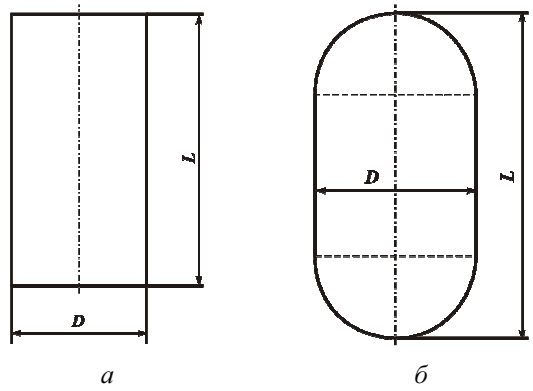


Рис. 2 – Геометрическая модель тела птицы: *а* – цилиндр с плоскими торцами; *б* – цилиндр со скруглёнными торцами.

Модель преграды представляет собой плиту круглой формы со следующими размерами: диаметр 469 мм, толщина 46,9 мм. Для аппроксимации расчетной области модели тела птицы применены два метода: *сеточный* (метод конечных элементов) и *бессеточный метод сглаженных частиц* (SPH).

В случае использования метода конечных элементов применен 3-D 8 – ми узловой гексаэдральный элемент твердого деформируемого тела (рис. 3) с одноточечной схемой интегрирования [18]. Используя аппроксимацию уравнений (2) – (5) с помощью метода конечных элементов, получим разрешающее уравнение в виде:

$$Ma^n = F_{ext}^n - F_{\text{int}}^n + H^n ,$$

где M – диагональная матрица масс; a^n – вектор узловых ускорений на n-м шаге решения; F_{ext}^n – вектор внешних сил на $n-$м шаге решения; F_{int}^n – вектор внутренних сил на $n-$м шаге решения; H^n – вектор сил сопротивления нефизическим формам деформирования,

$$M = \sum_e \int_{V_{2e}} \rho N N^T d\Omega , \quad F_{ext}^n = \sum_e (\int_{V_{2e}} \rho N^T b d\Omega + \int_{\Gamma_e} N^T q d\Gamma) , \quad F_{\text{int}}^n = \sum_e \int_{V_{2e}} B^T \sigma d\Omega ,$$

N – матрица интерполяции, составленная из функций формы конечного элемента e; B – матрица градиентов; b и q – векторы объемных и поверхностных сил в элементе.

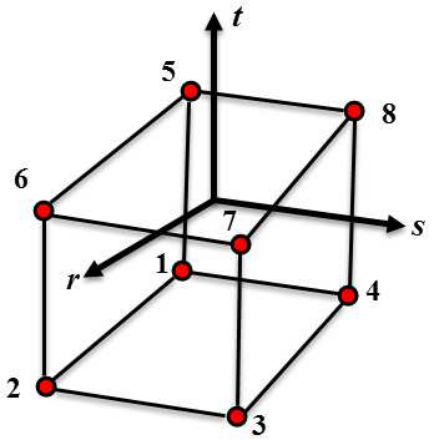
Для $8-$ми узлового элемента твердого деформируемого тела матрица интерполяции размером 3×24 имеет вид

$$N(r,s,t) = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & \dots & L_8 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & L_8 \end{pmatrix}.$$

Параметризованная функция формы конечного элемента (рис. 3) задана в виде:

$$L_j = \frac{1}{8}(1+rr_j)(1+ss_j)(1+tt_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, 8 ,$$

где rr_j, ss_j, tt_j принимают значения (±1; ±1; ±1) в соответствующих узлах элемента.



Узел	*r*	*s*	*t*
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	+1	+1	-1
4	-1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	+1
8	-1	+1	+1

Рис. 3 – 3-D $8-$ми узловой гексаэдральный элемент твердого деформируемого тела с одноточечной схемой интегрирования.

Главным недостатком элемента с одноточечной схемой интегрирования является необходимость контроля безэнергетических форм деформирования. Как правило, возникновение данных форм сопровождается осцилляциями. Одним из способов борьбы с данной патологией является введение дополнительных сил сопротивления (искусственной вязкости), не оказывающих влияние на устойчивые основные формы.

Вектор сил сопротивления нефизическим формам деформирования задан в виде:

$$H^n = \frac{1}{4}\rho c Q_{hg} (\sqrt[3]{\Omega})^2 \sum_{k=1}^{8} \frac{\partial x_j^k}{\partial t} \Gamma_k^j ,$$

где ρ – плотность среды; c – скорость звука; $Q_{hg} = 0,05 \dots 0,15$; $j = 1, 2, 3$, $k = 1 \dots 8$ – номер узла конечного элемента; $\partial x_j^k / \partial t$ – вектор узловых скоростей; Γ_k^j – вектор нефизических режимов деформирования; Ω – объем конечного элемента.

В случае применения метода сглаженных частиц расчетная модель тела птицы описана набором дискретных SPH частиц [18]; каждая частица является точкой интерполяции, в которой заданы свойства среды. Частица определена своими пространственными координатами $x_i(t)$ и массой $m_i(t)$, где $i \in \{1, 2, \dots, M\}$. Свойства частицы определены на длине сглаживания h с помощью функции ядра $W(x,h)$ вида

$$W(x,h) = \frac{1}{h(x)^d}\theta(x) ,$$

где d – параметр, определяющий мерность пространства; $\theta(x)$ – функция сглаживания ядра.

В качестве функции сглаживания выбран кубический B – сплайн.

$$\theta(x)=\frac{1}{\pi h^3}\begin{cases}1-\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{3}{4}\lambda^3, & \lambda\in[0,1];\\ \frac{1}{4}(2-\lambda)^3, & \lambda\in[1,2];\\ 0, & \lambda\geq 2.\end{cases}$$

Здесь $\lambda=|\frac{x}{h}|$.

При таком подходе свойство частицы в произвольной точке области V_2 определяется путем суммирования соответствующих величин всех частиц, находящихся в пределах двух длин сглаживания в ее окрестности.

Так, плотность среды i – ой частицы находится по формуле

$$\rho_i(r)=\sum_{j=1}^{M}m_jW_i(r-r_j)\,.$$

В уравнения, описывающие моделируемую среду, помимо функций физических величин входят их пространственные производные, поэтому необходимо уметь аппроксимировать градиенты функций. Правило дифференцирования функции при использовании SPH аппроксимации имеет вид

$$\nabla A(r)=\sum_{j=1}^{M}m_j\frac{A_j}{\rho_j}\nabla W(r-r_j,h)\,,$$

где A_j – значение интересующего параметра A (например, плотность или скорость) j – ой частицы.

После дискретизации с использованием метода SPH основные уравнения (2) – (4) преобразуются к виду

$$\frac{d\rho_i}{dt}=\sum_{j=1}^{M}m_jv_{i,j}\nabla_iW(r_i-r_j,h)\,; \tag{10}$$

$$\frac{dv_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{M}m_j(\frac{p_j}{\rho_j^2}+\frac{p_i}{\rho_i^2})\nabla_iW(r_i-r_j,h)\,; \tag{11}$$

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}m_j(\frac{p_j}{\rho_j^2}+\frac{p_i}{\rho_i^2})v_{i,j}\nabla_iW(r_i-r_j,h)\,; \tag{12}$$

$$\frac{dr_i}{dt}=v_i\,, \tag{13}$$

где $v_{i,j}=v_i-v_j$; $i,j=1...M$.

Анализ результатов численного решения. Используя (10) – (13) в качестве модели процесса соударения тела птицы с жесткой преградой при соответствующих граничных и начальных условиях, получены следующие результаты. На рис. 4 – 7 представлен результат численного моделирования процесса соударения, отражающий характер изменения деформаций тела птицы со временем. Выполнено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными, полученными методами высокоскоростной съемки (рис. 8). На рис. 4 – 7 и рис. 10 T – это нормированное время, вычисляемое по формуле:

$$T=\frac{t_1\cdot V_{im}}{L}\,,$$

где t_1 – длительность удара; V_{im} – скорость удара. Длительность процесса соударения составляет 1,5 мс.

Характер деформирования модели тела птицы, показанный на рис. 4 – 7, отражает гидродинамическую природу поведения модели, описываемую в рамках теории гидроудара. Отчетливо виден процесс осадки цилиндрического объема в осевом направлении с последующим растеканием по поверхности преграды. Для всех рассматриваемых моделей соблюдается условие симметрии в характере течения. Для моделей, построенных на основе МКЭ (рис. 4 и 6), наблюдается сильное искажение первоначальной формы и размеров конечных элементов в зоне контакта. Следует отметить удовлетворительное согласование характера деформирования тела птицы при моделировании с картиной деформирования, полученной в ходе эксперимента (рис. 8).

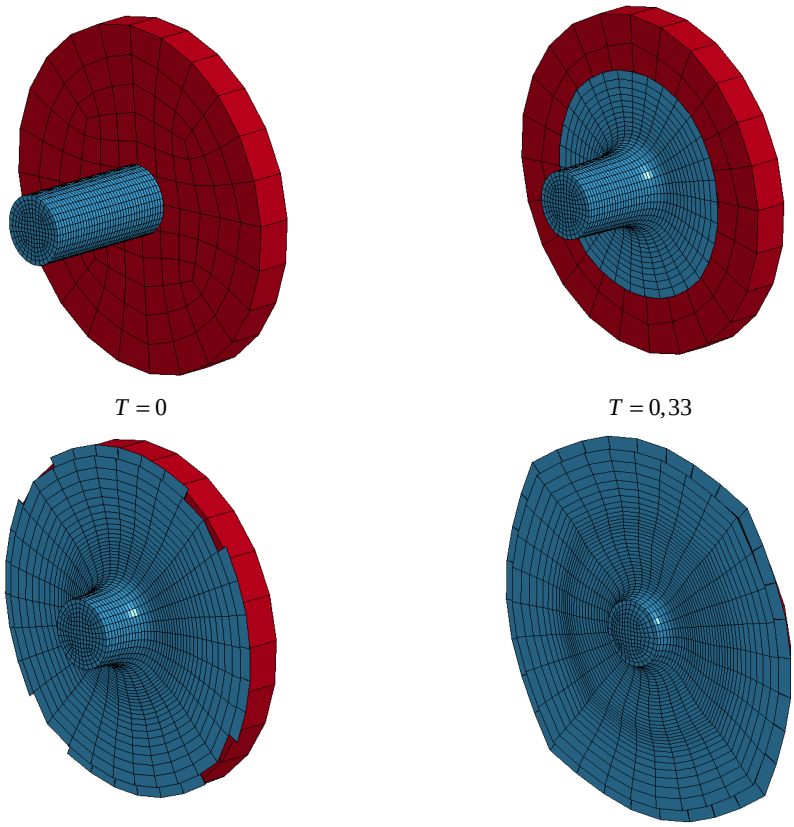


Рис. 4 – Характер деформирования модели тела птицы массой $m = 1$ кг, соударяющейся с жесткой преградой на скорости $V_{im} = 100$ м/с (модель 1, МКЭ).

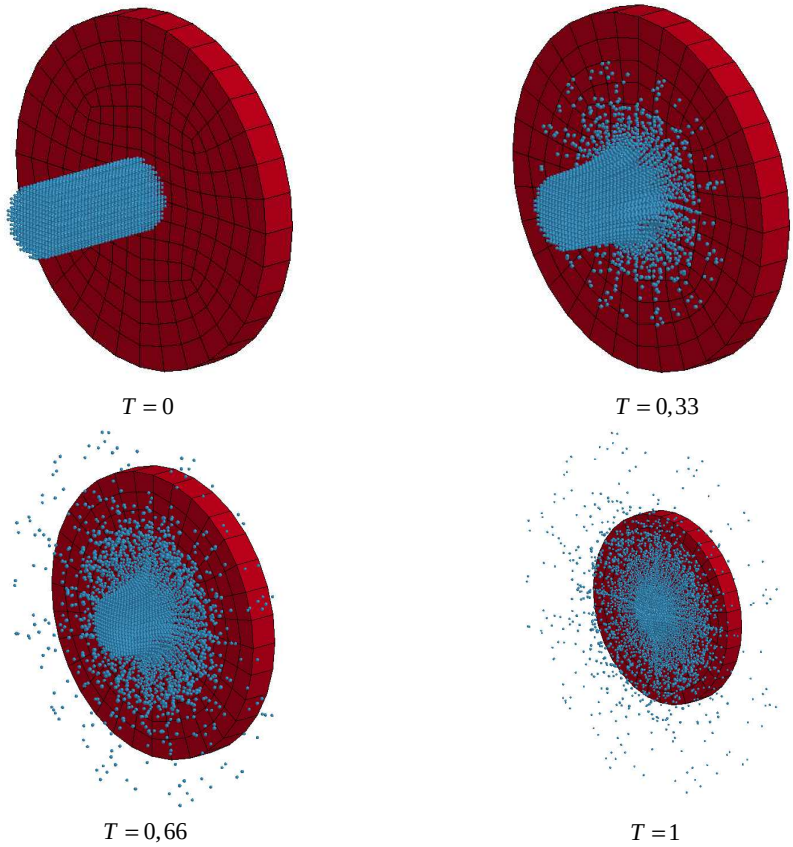


Рис. 5 – Характер деформирования модели тела птицы массой $m = 1$ кг, соударяющейся с жесткой преградой на скорости $V_{im} = 100$ м/с (модель 1, метод SPH).

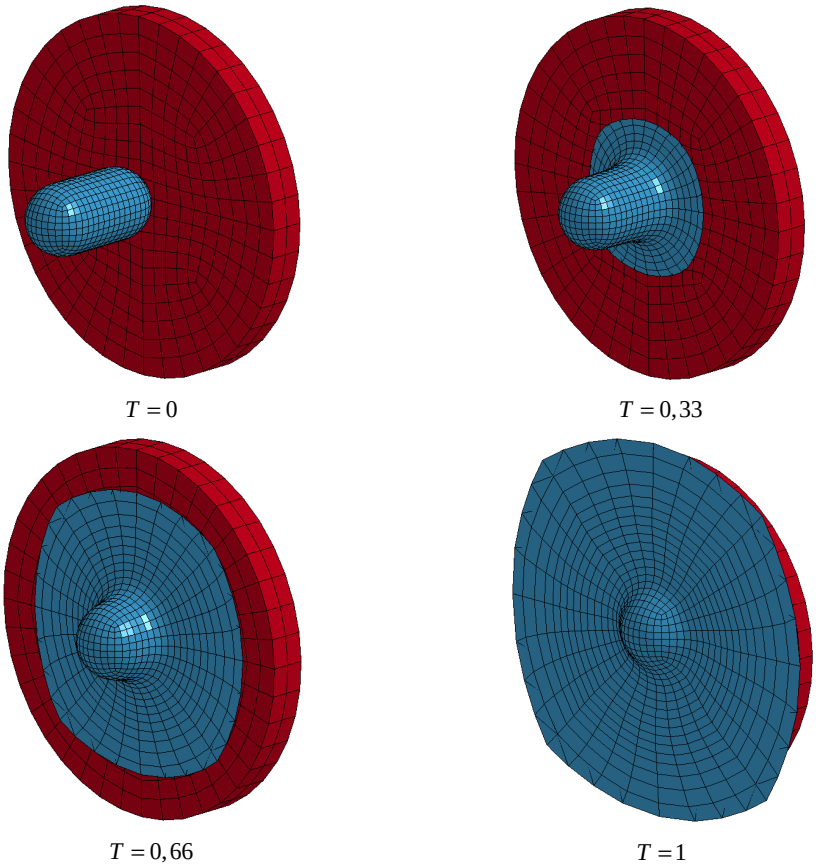


Рис. 6 – Характер деформирования модели тела птицы массой $m = 1$ кг, соударяющейся с жесткой преградой на скорости $V_{im} = 100$ м/с (модель 2, МКЭ).

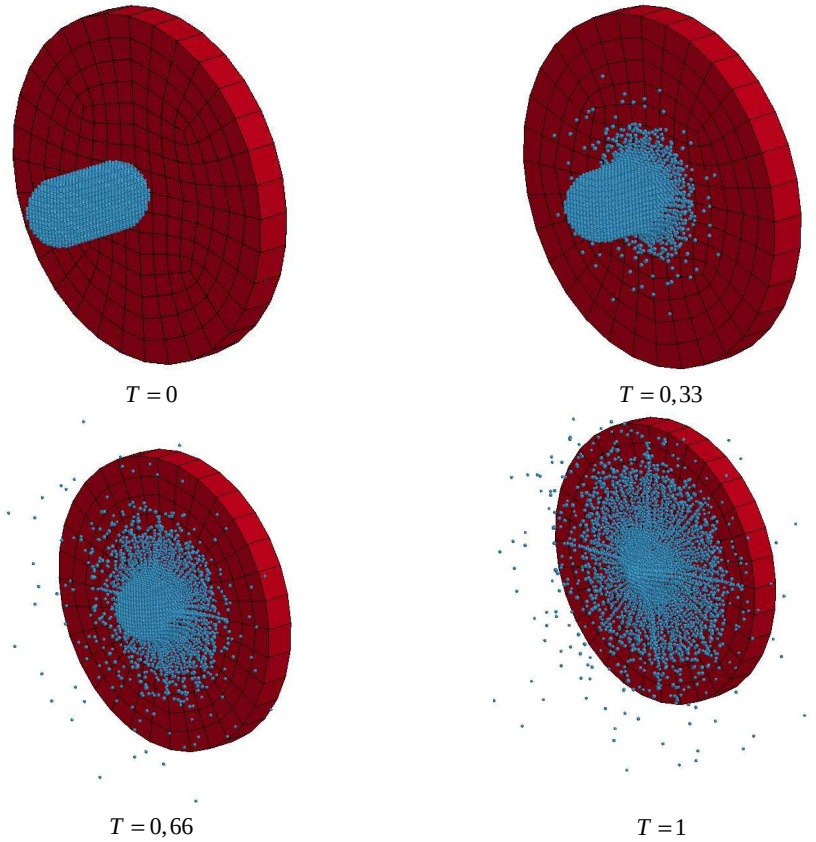


Рис. 7 – Характер деформирования модели тела птицы массой $m = 1$ кг, соударяющейся с жесткой преградой на скорости $V_{im} = 100$ м/с (модель 2, метод SPH).

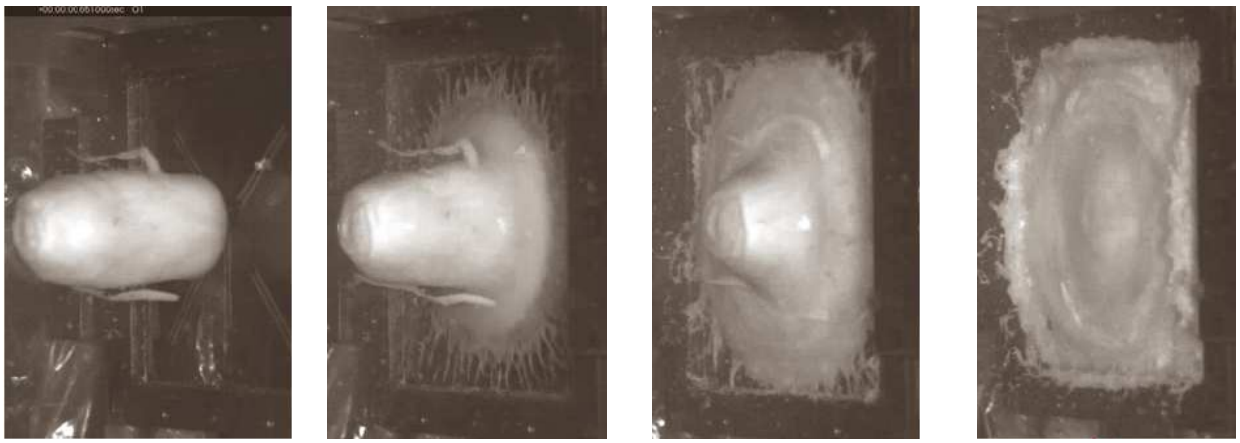


Рис. 8 – Характер деформирования желатинового имитатора массой $m = 1$ кг, соударяющейся с жесткой преградой на скорости $V_{im} = 95$ м/с.

В результате решения задачи о контактном взаимодействии тела птицы с жесткой преградой получены кривые распределения давления при ударе (рис. 9) в точке первичного контакта. Анализируя результат, показанный на рис. 9, можно отметить следующие особенности кривых давления: наличие ярко выраженного максимума и сравнительно малого по отношению к общей длительности участка нарастания давления, соответствующего активной фазе удара. Величина максимального давления при ударе, рассчитанная с помощью МКЭ, в 2,3 – 2,4 раза меньше значения, полученного с помощью метода SPH.

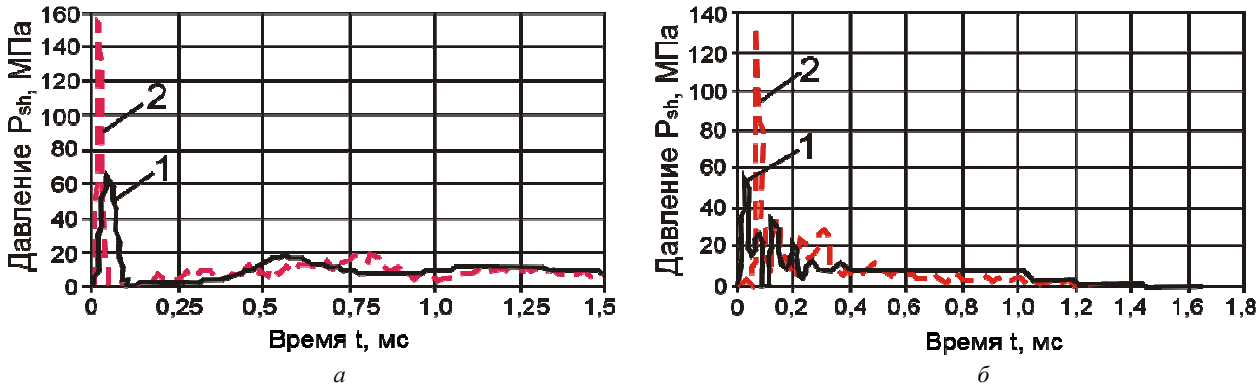


Рис. 9 – Распределение давления при ударе: *а* – модель 1; *б* – модель 2; 1 – МКЭ; 2 – метод SPH.

Заниженное значение давления, полученное с помощью МКЭ, можно объяснить патологией, связанной с существенным искажением формы и размеров элементов сетки (сильная вытяжка элементов в радиальном направлении), что в свою очередь приводит к потере точности решения. В этом смысле метод SPH лишен недостатка, присущего МКЭ.

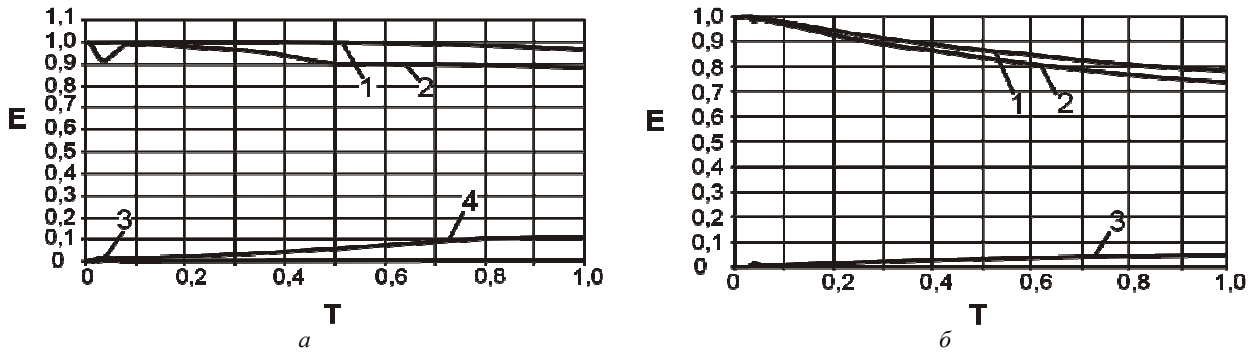


Рис. 10 – Изменение механической энергии при ударе: *а* – МКЭ; *б* – метод SPH;
1 – полная энергия; 2 – кинетическая энергия; 3 – энергия деформирования; 4 – энергия рассеивания.

На рис. 10 показаны графики изменения механической энергии для моделей мягкого тела, построенных на основе МКЭ и метода SPH. Результат, показанный на рис. 10 представлен в виде безразмерных величин: норми-

рованной кинетической энергии $\bar{E}_k = E_k / E_м$, нормированной энергии деформирования $\bar{E}_{вн} = E_{вн} / E_м$ и нормированной энергии рассеивания $\bar{E}_h = E_h / E_м$. Нормирование выполнено по отношению к полной механической энергии $E_м$. Из графиков видно, что в процессе соударения тушки птицы с жесткой преградой происходит процесс превращения кинетической энергии в энергию деформирования. На рис. 10, *а* для кривой 2, описывающей изменение кинетической энергии в момент времени, соответствующий активной фазе удара, виден минимум, которому отвечает максимум на кривой изменения энергии деформирования.

Кривая 4 на рис. 10, *а* показывает изменение энергии рассеивания при ударе тела птицы о жесткую преграду. Данный вид энергии связан с введением дополнительных сил сопротивления безэнергетическим формам деформирования, свойственным для МКЭ в случае применения конечных элементов с разреженной схемой интегрирования и нормируется по отношению к энергии деформирования. Из рис. 10, *а* видно, что величина энергии вязкого взаимодействия превосходит величину внутренней энергии, особенно на промежутке времени, соответствующем этапу установившегося течения, что вносит погрешность в численное решение. Из рис. 10, *б* видно, что в случае применения метода SPH наблюдается рассеивание полной механической энергии.

Ниже представлены результаты анализа влияния шага дискретизации на величину контактного давления в модели тела птицы (рис. 11, 12). Выполнено сравнение полученного результата с теорией для моделей несжимаемой (кривая 1) и сжимаемой (кривая 2) сред. В первом случае давление вычисляли с помощью выражения: $P_{sh} = \rho_0 V_{im} c_0 = 140{,}9$ МПа, во втором – $P_{sh} = \rho_0 V_{im} V_{sh} = 159{,}9$ МПа, где $V_{sh} = c_0 + kV_{im}$ – скорость распространения ударной волны в среде. На рис. 11 и 12 параметр R^2 – достоверность аппроксимации.

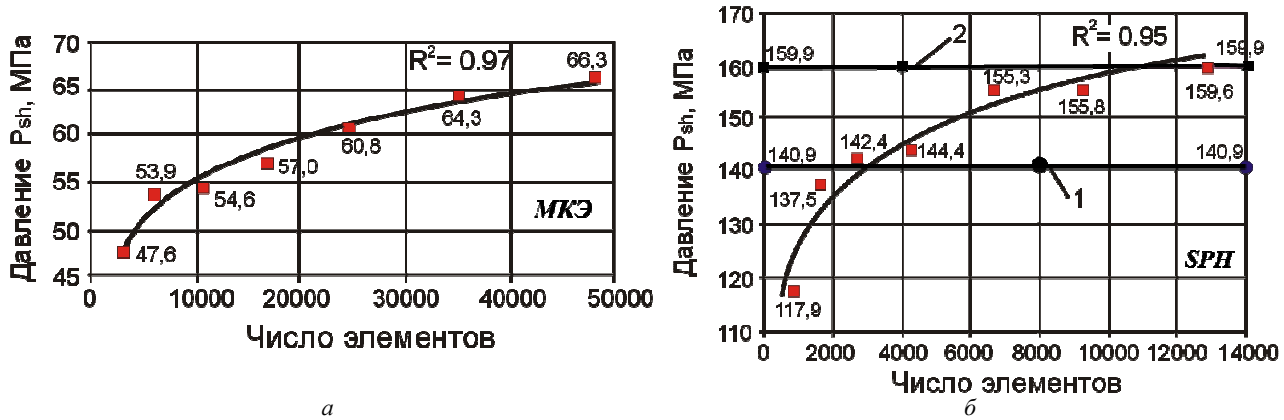


Рис. 11 – Влияние шага дискретизации на величину максимального давления при соударении тела птицы с жесткой преградой (модель 1).

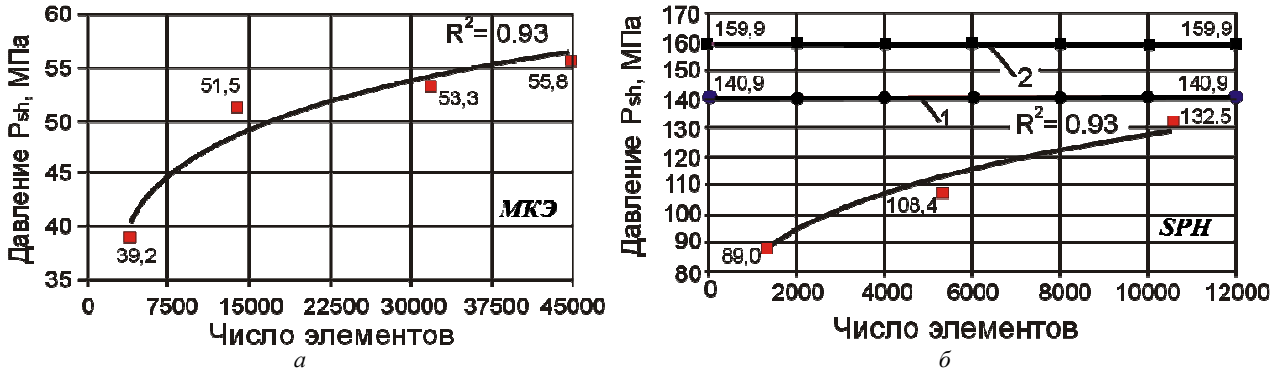


Рис. 12 – Влияние шага дискретизации на величину максимального давления при соударении тела птицы с жесткой преградой (модель 2).

Из рис. 11, 12 видно, что малое количество элементов дает заниженное значение давления, с ростом числа элементов величина давления растет. Начиная с определенного числа элементов, кривые давлений (рис. 11, *б*) выходят на асимптоту, и дальнейшее увеличение числа элементов не приводит к существенному изменению давления (изменение не превышает 3%): для моделей на основе МКЭ это примерно 35000 элементов, а для моделей на основе метода SPH это примерно 7000 – 9000 элементов. Величина максимального давления при ударе, рассчитанная с помощью МКЭ, в 2 – 3,6 раза меньше теоретического значения, полученного для модели несжимаемой среды и в 2.5 – 4 раза меньше теоретического значения, полученного для модели сжимаемой среды.

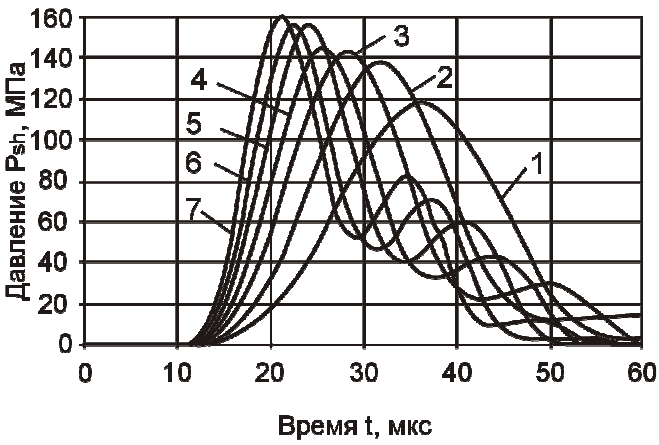


Рис. 13. Влияние плотности сетки на величину максимального давления при соударении тела птицы с жесткой преградой (метод SPH): 1 – NEL=765; 2 – NEL=1617; 3 – NEL=2725; 4 – NEL=4205; 5 – NEL=6633; 6 – NEL=9213; 7 – NEL=12833.

Сгущение конечно-элементной сетки не приводит к ощутимому повышению точности решения, при этом вычислительные затраты возрастают.

В заключении можно отметить, что расчетная модель тела птицы, построенная на основе метода SPH, является более эффективной в вычислительном плане, поскольку позволяет достичь значений давлений, близких к теоретическим, при количестве элементов примерно в 5 раз меньшем, чем для модели, использующей МКЭ.

Для модели 1 получены кривые распределения давления для промежутка времени, соответствующего активной фазе удара (рис. 13).

Следует отметить следующие особенности полученных кривых: с увеличением числа SPH частиц величина максимального давления возрастает на 25%, кроме того, наблюдается сокращение времени нарастания давления.

Выводы. Смоделирован процесс соударения тела птицы с жесткой преградой. Получены кривые распределения давления при ударе. Показано, что в случае применения МКЭ величина максимального давления при ударе в 2,3 – 2,4 раза меньше значения, полученного с помощью метода SPH. Модель тела птицы, построенная на основе метода SPH, является более эффективной в вычислительном плане, обеспечивает хорошее согласование результатов численного решения с результатами, рассматриваемыми в рамках теории гидроудара. В связи с этим данный метод выбран в качестве основного для проведения дальнейших исследований.

Список литературы

1. *Кубенко В Д., Марченко Т. А.* Плоская задача соударения неидентичных затупленных упругих тел // Прикладная механика. – 2009. – № 2 (45). – С. 36 – 45.
2. *Barber J. P., Taylor H. R., Wilbeck J. S.* Bird Impact Forces and Pressures on Rigid and Compliant Targets: Technical report (final) / *University of Dayton Research Institute*. – Ohio, May 1978. – 78 p. – AFFDL-TR-77-60. – ADA061313.
3. *Peterson R. L., Barber J. P.* Bird Impact Forces in Aircraft Windshield Design: Technical report (final) / *University of Dayton Research Institute*. – Ohio, March 1976. – 65 p. – AFFDL-TR-75-150. – ADA026-628.
4. *Barber J. P., Taylor H. R., Wilbeck J. S.* Characterization of Bird Impacts on a Rigid Plate: Part I: Technical report / *University of Dayton Research Institute*. – Ohio, January 1975. – 101 p. – AFFDL-TR-75-5. – ADA021142.
5. *Challita A., Barber J. P.* The Scaling of Bird Impact Loads: Technical report / *University of Dayton Research Institute*. – Ohio, June 1979. – 66 p. – AFFDL-TR-79-3042. – ADA075215.
6. *Wilbeck J. S.* Impact Behavior of Low Strength Projectiles: Technical report / *University of Dayton Research Institute*. – Ohio, Jule 1978. – 129 p. – AFML-TR-77-134. – ADA060423.
7. *Storace A. F., Nimmer R. P., Ravenhall R.* Analytical and Experimental Investigation of Bird Impact on Fan and Compressor Blading // *Journal of Aircraft*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1984. – vol. 21. – No. 7. – Paper No. 83-0954. – pp. 520 – 527.
8. *Frischbier J., Kraus A.* Multiple Stage Turbofan Bird Ingestion Analysis with ALE and SPH Methods // American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 2005. – Paper No. 1016. – pp. 1–9.
9. *Anghileri M., Bisagni C.* New Model of Bird Strike against Aircraft Turbofan Inlet // *Proceedings of 3rd International KRASH Conference*. – Arizona State University, Tempe (USA), 2001, p.8.3.1 – 8.3.11.
10. *Nizampatnam L. S.* Models and Methods for Bird Strike Load Predictions / L. S. Nizampatnam // Department of Aerospace Engineering and the faculty of the Graduate school of Wichita State University. – December 2007. – p. 154. – Режим доступа : http://soar.wichita.edu/dspace/bistream/handle/10057/1494/d07030.pdf?sequence=1. – Дата обращения : 10 июля 2016 г.
11. *Martin N. F.* A Fluid Soft-Body Projectile Model for Impact Damage Analysis / N. F. Martin // *Master's Thesis*. – University of Delaware, June 1982.
12. *Martin N. F.* Nonlinear Finite Element Analysis to Predict Fan-Blade Damage Due to Soft-Body Impact / N. F. Martin // *Journal of Propulsion*. – 1990. – vol. 6. – No. 4. – pp. 445 – 450.
13. *Blair A.* Aeroengine Fan Blade Design Accounting for Bird Strike // A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Applied Science. Department of Mechanical and Industrial Engineering. – The University of Toronto, March 2008. – 84 p.
14. Mao R. H., Meguid S. A., Ng T. Y. Transient three dimensional finite element analysis of a bird striking a fan blade / R. H. Mao, S. A. Meguid, T. Y. Ng. – Режим доступа : http:// www.springerlink.com/index/y82245734271j740.pdf. – Дата обращения : 07 июля 2016 г.
15. *Rajeev J., Shivayogi*. Effect of Bird Material and Projectile Shape on Temporal Pressure Distribution during Bird Impact / J. Rajeev, Shivayogi // *Altair CAE User Conference*. *Innovation through Simulation*, 3 – 5 August 2006. – Bangalore, 2006. – pp. 1 – 14.
16. *Lavoie M-A., Gakwaya A., Nejad Ensan M., Zimcik D. G.* Review of existing numerical methods and validation procedure available for bird strike modeling / M-A. Lavoie, A. Gakwaya, M. Nejad Ensan, D.G. Zimcik // International Conference on Computer Engineering and Systems. – 2007. – vol. 2. – No. 4. – pp. 111 – 118.
17. *Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A.* Three dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks (Review) // International Applied Mechanics. – 2013. – vol. 49. – No. 1. – pp. 1 – 61.
18. LS-DYNA. Keyword user's manual. Version 971. – Livermore: LSTC, 2006. – 2012 p.

References (transliterated)

1. Kubenko V D., Marchenko T. A. Ploskaya zadacha soudareniya neidentichnykh zatuplenykh uprugikh tel [Plane problem of impact of non-identical blunt elastic bodies]. *Prikladnaya mekhanika* [International Applied Mechanics]. 2009, no. 2 (45), pp. 36–45.
2. Barber J. P., Taylor H. R., Wilbeck J. S. *Bird Impact Forces and Pressures on Rigid and Compliant Targets: Technical report (final)*. Ohio, University of Dayton Research Institute Publ., May 1978. 78 p. AFFDL-TR-77-60. ADA061313.
3. Peterson R. L., Barber J. P. *Bird Impact Forces in Aircraft Windshield Design: Technical report (final)*. Ohio, University of Dayton Research Institute Publ., March 1976. 65 p. AFFDL-TR-75-150. ADA026-628.
4. Barber J. P., Taylor H. R., Wilbeck J. S. *Characterization of Bird Impacts on a Rigid Plate: Part I: Technical report*. Ohio, University of Dayton Research Institute Publ., January 1975. 101 p. AFFDL-TR-75-5. ADA021142.
5. Challita A., Barber J. P. *The Scaling of Bird Impact Loads: Technical report*. Ohio, University of Dayton Research Institute Publ., June 1979. 66 p. AFFDL-TR-79-3042. ADA075215.
6. Wilbeck J. S. *Impact Behavior of Low Strength Projectiles: Technical report*. Ohio, University of Dayton Research Institute Publ., Jule 1978. 129 p. AFML-TR-77-134. ADA060423.
7. Storace A. F., Nimmer R. P., Ravenhall R. Analytical and Experimental Investigation of Bird Impact on Fan and Compressor Blading. *Journal of Aircraft*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Publ., 1984, vol. 21, no. 7, Paper No. 83-0954, pp. 520–527.
8. Frischbier J., Kraus A. Multiple Stage Turbofan Bird Ingestion Analysis with ALE and SPH Methods. American Institute of Aeronautics and Astronautics Publ., 2005, Paper No. 1016, pp. 1–9.
9. Anghileri M., Bisagni C. New Model of Bird Strike against Aircraft Turbofan Inlet. *Proceedings of 3rd International KRASH Conference*. Arizona State University, Tempe (USA), 2001, p.8.3.1–8.3.11.
10. Nizampatnam L. S. *Models and Methods for Bird Strike Load Predictions*. Department of Aerospace Engineering and the faculty of the Graduate school of Wichita State University., December 2007, p. 154. Available at: http://soar.wichita.edu/dspace/bistream/handle/10057-/1494/d07030.pdf?sequence=1. (accessed 10.07.2016).
11. Martin N. F. A Fluid Soft-Body Projectile Model for Impact Damage Analysis. *Master's Thesis*. University of Delaware, June 1982.
12. Martin N. F. Nonlinear Finite Element Analysis to Predict Fan-Blade Damage Due to Soft-Body Impact. *Journal of Propulsion*. 1990, vol. 6, no. 4, pp. 445–450.
13. Blair A. *Aeroengine Fan Blade Design Accounting for Bird Strike*. A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Applied Science. Department of Mechanical and Industrial Engineering. The University of Toronto Publ., March 2008. 84 p.
14. Mao R. H., Meguid S. A., Ng T. Y. Transient three dimensional finite element analysis of a bird striking a fan blade. Available at: http:// www.springerlink.com/index/y82245734271j740.pdf. (accessed 07.07.2016).
15. Rajeev J., Shivayogi. Effect of Bird Material and Projectile Shape on Temporal Pressure Distribution during Bird Impact. *Altair CAE User Conference. Innovation through Simulation*. 3 – 5 August 2006, Bangalore, 2006, pp. 1–14.
16. Lavoie M-A., Gakwaya A., Nejad Ensan M., Zimcik D. G. Review of existing numerical methods and validation procedure available for bird strike modeling. *International Conference on Computer Engineering and Systems*. 2007, vol. 2, no. 4, pp. 111–118.
17. Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A. Three dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks (Review). *International Applied Mechanics*. 2013, vol. 49, no. 1, pp. 1–61.
18. LS-DYNA. Keyword user's manual. Version 971. Livermore, LSTC Publ., 2006. 2012 p.

Поступила (received) 15.07.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельне дослідження взаємодії тіла птиці із перешкодою на основі сіткового та безсіткового методів / В. А. Ванін, С. П. Світличний // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 5 – 15. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Численное исследование взаимодействия тела птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного методов / В. А. Ванин, С. П. Светличный // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 5 – 15. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Numerical study of the interaction of bird carcasses with an obstacle on the basis of the grid and gridless methods / V. A. Vanin, S. P. Svetlichniy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 5 – 15. Bibliog.: 18 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvictora52@mail.ru.

Ванин Виктор Антонович – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvictora52@mail.ru.

Vanin Viktor Antonovich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, leading researcher, A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvictora52@mail.ru.

Світличний Сергій Петрович – старший викладач, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковского «ХАІ», м. Харків; тел.: (099) 632-88-54; e-mail: ssp.kharkov@gmail.com.

Светличный Сергей Петрович – старший преподаватель, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков; тел.: (099) 632-88-54; e-mail: ssp.kharkov@gmail.com.

Svetlichniy Sergey Petrovich – Senior Lecturer, N.E. Zhykovsky National Aerospace University "KhAI", Kharkov, tel.: (099) 632-88-54; e-mail: ssp.kharkov@gmail.com.

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОЙ И УПРУГОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ В РЕАКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ПЛАСТИНОЙ

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-обпертої по контуру, та додаткової зосередженої в'язкопружної опори. На пластину діє нестаціонарне навантаження, що збурює коливання. Вплив в'язкопружної опори моделюється додатковою нестаціонарною силою, що діє замість опори. Запропоновано метод розділення реакції в'язкопружної опори на в'язку та пружну складові. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням методу регуляризації А. М. Тихонова. Наведено приклад розрахунку прогину пластини з додатковою в'язкопружною опорою, а також наведені в'язка, пружна та повна реакція між пластиною та додатковою опорою.

Ключові слова: пластина середньої товщини, ідентифікація, нестаціонарне навантаження, в'язкопружна опора, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние вязкоупругой опоры моделируется дополнительной нестационарной сосредоточенной силой действующей вместо опоры. Предложен метод разделения реакции вязкоупругой опоры на вязкую и упругую составляющие. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Приведен пример расчета прогиба пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, а также показаны вязкая, упругая и полная реакция между пластиной и дополнительной опорой.

Ключевые слова: пластина средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, вязкоупругая опора, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

The mechanical system consists of a hingedly supported medium-thickness rectangular plate with an additional concentrated viscoelastic support. The nonstationary concentrated transversal load, which initiates vibration, is acting on the plate. The effect of the viscoelastic support is simulated by an additional nonstationary concentrated force acting instead of the support. The method of separating the viscoelastic support reaction into viscous and elastic components is proposed. The simulation of the plate deforming is based on Timoshenko's refined theory. The researches are reduced to a system of Volterra integral equations. Solving of such Volterra integral equations is an ill-posed problem, which is solved numerically using of Tikhonov's regularization algorithm. A stable analytical and numerical solution of the ill-posed problems for the considered mechanical system is obtained without using iterative computational schemes. The results of numerical calculation for the direct and inverse problems are presented. A computation example of the deflection of a plate with an additional viscoelastic support is given. The viscous, elastic and full reactions between the plate and the additional support vs. time are also demonstrated.

Key words: medium-thickness plate, identification, nonstationary loading, viscoelastic support, system of Volterra integral equation, Tikhonov's regularization algorithm.

Введение и постановка задачи. Данная статья является продолжением исследования нестационарного деформирования механической системы, состоящей из прямоугольной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры при импульсном воздействии. В предыдущей работе [1] приведены возможные постановки обратных задач для пластины с дополнительной опорой, а также описано решение одной обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой.

В случае, когда при решении задачи приоритетом является определение внешнего возмущающего воздействия во времени $P(t)$, методика, описанная в предыдущей работе, демонстрирует достаточно высокую эффективность. В указанных задачах (рис. 1) влияние вязкоупругой опоры, заменялось одной реакцией:

$$R(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot dw(x_C, y_C, t)/dt, \tag{1}$$

что позволяло определить ее в результате решения соответствующей прямой или обратной задачи.

Однако для задач, связанных с идентификацией параметров вязкоупругой опоры (жесткости и вязкости), или при оптимальном проектировании дополнительных опор, снижающих амплитуды прогибов, определения полной реакции недостаточно. Необходимо отдельно знать влияние вязкой и упругой составляющей реакции. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу в следующей постановке: пусть прямоугольная пластина имеет две независимые дополнительные опоры – вязкую (демпфирующую) и линейно упругую, которые приложены в двух разных точках (рис. 2). Считается, что точка D с координатами проекции в срединной плоскости пластины (x_D, y_D) – это место контакта с демпфером, действие которого заменяется реакцией $R_D(t) = \kappa \cdot dw(x_D, y_D, t)/dt$, а точка C с координатами (x_C, y_C) – место контакта с линейно упругой дополнительной опорой (своего рода жесткой пружиной), реакция которой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$. В общем случае предполагается, что точки C и D не совпадают, хотя с точки зрения механики, если точки расположены на небольшом расстоянии, то в силу принципа суперпозиции совместное воздействие вязкой и линейно упругой опор эквивалентно действию вязкоупругой опоры $R(t) = R_D(t) + R_C(t)$. Такое решение задачи оказалось справедливо и в частном случае, когда точки C и D совпадают, поскольку разрешающая система уравнений в прямой и обратной задачах получилась не вырожденной.

© А. В. Воропай, 2016

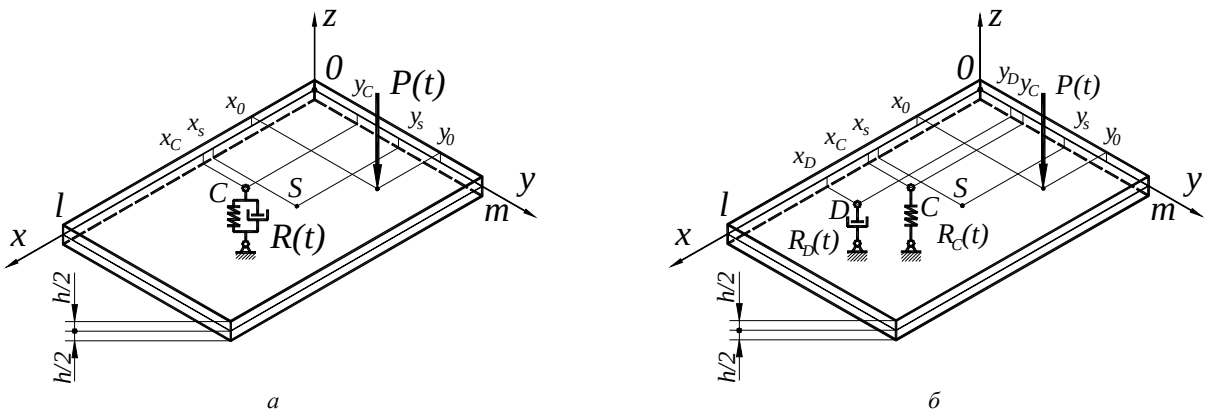


Рис. 1 – Схема нагружения: *а* – пластина с дополнительной вязкоупругой опорой; *б* – пластина с двумя дополнительными независимыми опорами.

Прямая задача. Выражение для прогиба пластины в случае, когда на неё действует несколько независимых поперечных нагрузок ($P_i(t)$, $i \in \overline{1, N}$), приведенное, например в [2], имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t K_i(x, y, t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau , \tag{2}$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – разностное ядро интегрального уравнения, типа свертки, для $i-$ той нагрузки в точке пластины с координатами (x, y). Методы получения ядер и их вид также описаны в [2].

На основе (2) можно записать следующие выражения для точек контакта с демпфером (x_D, y_D) и линейно упругой дополнительной опорой (x_C, y_C):

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau, \end{cases} \tag{3}$$

где $P(t)$ – внешняя возмущающая нестационарная нагрузка; $K_{ij}(t)$ – ядра, записанные для конкретной $i-$ той нагрузки в $j-$ той точке, вид которых будет приведен ниже; $R_C(t)$ и $R_D(t)$ – соответствующие реакции в точках контакта с демпфером и линейно упругой опорой.

Укажем, что реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$, действующие со стороны дополнительных опор на пластину, считались условно отрицательными (взяты в выражениях (3) со знаком минус), действия со стороны пластины на демпфер и «пружины» считались равными по величине, но условно положительными (для удобства записи):

$$R_D(t) = +\kappa \cdot dw(x_D, y_D, t)/dt \text{ и } R_C(t) = +c \cdot w(x_C, y_C, t) . \tag{4}$$

Из соотношений (4) для прогибов в точках (x_D, y_D) и (x_C, y_C) можно получить следующие выражения:

$$w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau \text{ и } w(x_C, y_C, t) = \frac{R_C(t)}{c} . \tag{5}$$

Если считать, что возмущающая сила, а также реакции дополнительных опор являются сосредоточенными нагрузками, то соответствующие ядра $K_{ij}(t)$ в интегралах сверток для шарнирно-опертой пластины средней толщины типа *С. П. Тимошенко* будут иметь вид:

$$K_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin \omega_{1kn}(t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_i}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_i}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_j}{m}\right), \tag{6}$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины; l и m – длина и ширина пластины; (x_i, y_i) – координаты точки, в которой прикладывается $i-$ тая нагрузка, а (x_j, y_j) – это координаты $j-$ той точки, в которой определяется изменение прогиба во времени.

В случае, когда $P(t)$ известна, систему интегральных уравнений (3) относительно неизвестных сил $R_C(t)$ и

$R_D(t)$ можно дополнить выражениями в точках контакта (5). Исключим из уравнений прогибы и перенесем известные слагаемые в правую часть:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{DC}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau; \\ \int_0^t K_{CD}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa}d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Для решения системы интегральных уравнений (7) была выполнена дискретизация методом частичного интегрирования. То есть на малых дискретных участках времени ($\Delta t = T/J$, где T – исследуемый промежуток, а J – число шагов дискретизации) сила $P(t) = P(j\cdot\Delta t) = P_j$, а также реакции $R_C(j\cdot\Delta t)$ и $R_D(j\cdot\Delta t)$ считались постоянными. В результате получена следующая система матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC}\cdot\mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DC}\cdot\mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PC}\cdot\mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{CD}\cdot\mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD}\cdot\mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PD}\cdot\mathbf{P}, \end{cases} \quad (8)$$

где матрицы $\mathbf{A}_{PC}$, $\mathbf{A}_{PD}$ соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{PC}(t-\tau)$ и $K_{PD}(t-\tau)$, элементы которых могут быть найдены в виде $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, как значения дискретно проинтегрированного ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau)d\tau .$$

Матрицы $\mathbf{A}_{DC}$, $\mathbf{A}_{CD}$ и $\mathbf{A}^*_{CC}$ соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{DC}(t-\tau)$, $K_{CD}(t-\tau)$ и $K_{CC}(t-\tau)$, матрица $\mathbf{A}_{CC}$ эквивалентна выражению: $\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}^*_{CC} + \frac{1}{c}\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Произведение $\mathbf{A}_{DD}\cdot\mathbf{R}_D$ соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right]\cdot R_D(\tau)d\tau .$$

Система (8) решается с использованием *обобщенного алгоритма Крамера* для блочных матриц и *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова* [3]. В результате решения (8) определяются $\mathbf{R}_C$ и $\mathbf{R}_D$, являющиеся дискретными аналогами неизвестных независимых реакций $R_C(t)$ и $R_D(t)$.

Обратная задача. Возможно несколько вариантов постановки обратной нестационарной задачи. Рассмотрим основные варианты.

- Точки приложения нагрузки и установки дополнительных опор известны, а также известны коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования, требуется определить внешнюю возмущающую сила $P(t)$ и, как следствие, $R_C(t)$ и $R_D(t)$ (которые также неизвестны). Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба $w(x_S, y_S, t)$ или деформации (например, $\varepsilon_x(x_S, y_S, t)$) в одной произвольной точке пластины.
- Внешняя возмущающая сила $P(t)$ известна, требуется определить неизвестные параметры дополнительной вязко-упругой опоры. Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации в двух произвольных точках пластины.
- Неизвестна как внешняя возмущающая сила $P(t)$ так и параметры дополнительной вязко-упругой опоры (коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования) Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации минимум в трех произвольных точках пластины.

В данной статье рассмотрим решение обратной задачи в первой постановке.

Предположим, что нам известно изменение во времени прогиба в некоторой точке пластины, а именно, $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, тогда, по аналогии с (2), для точки S можно записать:

$$w(x_S, y_S, t) = \int_0^t K_{PS}(t-\tau)\cdot P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{CS}(t-\tau)\cdot R_C(\tau)d\tau + \int_0^t K_{DS}(t-\tau)\cdot R_D(\tau)d\tau . \quad (9)$$

Причем в выражении (9) слагаемые, содержащие значения $R_C(t)$ и $R_D(t)$, записаны со знаком плюс, поскольку при решении обратной задачи реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$ рассматриваются как дополнительные внешние

независимые силы, которые могут принимать положительные или отрицательные значения.

В матричной форме выражение (9) запишется так:

$$\mathbf{A}_{PS} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}_{CS} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DS} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{w}_S , \tag{10}$$

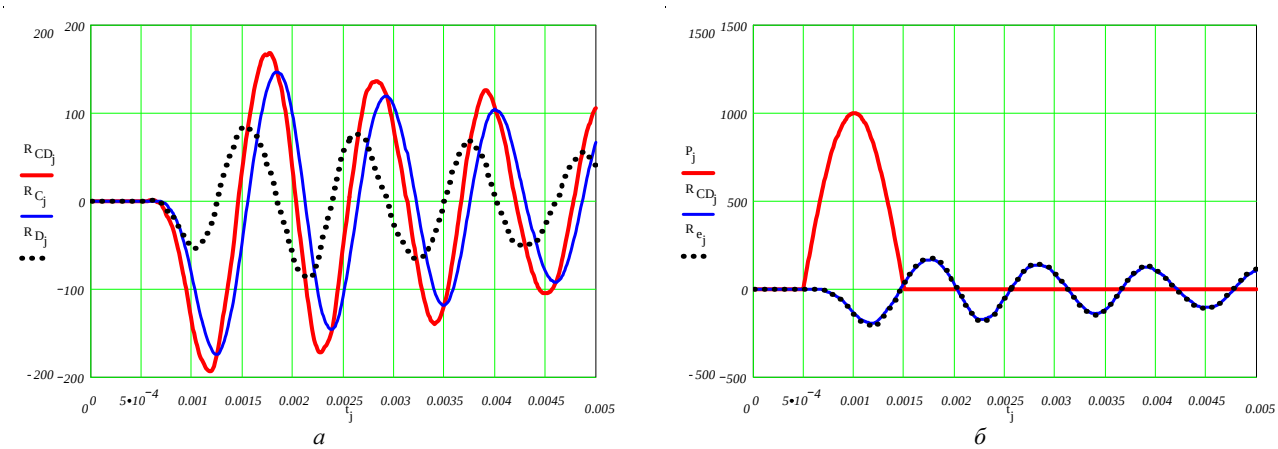
где вектор $\mathbf{w}_S$ соответствует дискретным значениям функции $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ (что как раз имеет место при реальных измерениях), остальные обозначения аналогичны использованным в (8). По сути, выражение (10) является матричным уравнением с тремя неизвестными векторами $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_C$ и $\mathbf{R}_D$. Для его решения достаточно иметь ещё два матричных уравнения, которые могут быть получены из (8) путем переноса всех неизвестных в левую часть и изменения знаков перед слагаемыми, содержащими $\mathbf{R}_C$ и $\mathbf{R}_D$, на положительные.

Для удобства записи и решения системы трёх матричных уравнений целесообразно переобозначить искомые векторы нагрузок $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_C$ и $\mathbf{R}_D$ как $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$, соответственно, тогда матрицы $\mathbf{A}_{ji}$ будут вместо буквенных индексов иметь привычные численные, а именно – строка будет соответствовать точке пластины, а столбец – нагрузке:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Система (11) решается аналогично системе (8) с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова. В результате решения (11) определяются $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$, то есть дискретные аналоги неизвестных сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$. Для удобства исследования положительные направления сил совпадают с положительными направлениями прогибов, а отрицательные значения соответствуют противоположному направлению.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890$ кг/м^3; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $h = 0.04$ м; $l = 0.6$ м; $m = 0.4$ м. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.2$ м. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_{CD} = 0.2$ м, $y_{CD} = 0.2$ м. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^8$ Н/м, а коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4$ Н/(м/с); число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50.



а *б*

Рис. 2 – Реакция вязкоупругой опоры: *а* – составляющие реакции; *б* – реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами.

При решении прямой задачи рассматривалось два случая. Поскольку точки контакта пластины с «вязкой» и «упругой» дополнительными опорами в общей постановке являются независимыми, то в первом случае считалось, что они совпадают (частный случай $x_C = x_D = x_{CD} = 0.2$ м, $y_C = y_D = y_{CD} = 0.2$ м), а во втором случае считалось, что они располагались на некотором расстоянии, когда их суммарное влияние еще подобно влиянию одной вязкоупругой опоры ($x_C = 0.15$ м, $y_C = 0.15$ м и $x_D = 0.25$ м, $y_D = 0.25$ м).

На рис. 2 показаны результаты вычислений для первого случая. Определенные в результате решения сис-

темы уравнений (8) составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой приведены на рис. 2, *а*: 1-я кривая соответствует суммарной реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t) = R_C(t) + R_D(t)$; 2-я кривая – упругая составляющая вязкоупругой опоры $R_C(t)$; 3-я кривая – вязкая составляющая $R_D(t)$. На рис. 2, *б* показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и две кривые, соответствующие реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t)$ и $R_e(t)$. Укажем, что $R_{CD}(t)$, то есть суммарная реакция, показана сплошной линией, а $R_e(t) = R(t)$ – это реакция именно вязкоупругой опоры (1), определение которой описано в [1], на рис. 2, *б* отложена точками, причем видно, что эти две кривые полностью совпадают. Совпадение кривых доказывает правильность решения и возможность использования любого из двух методов для определения реакции вязкоупругой опоры.

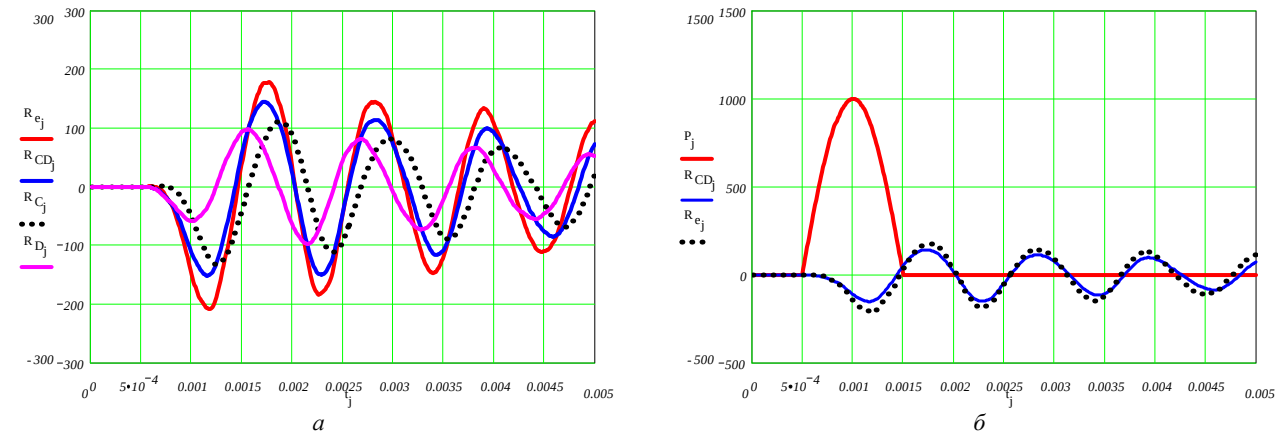


Рис. 3 – Реакции дополнительных вязкого и упругого контакта опор, а также вязкоупругой опоры: *а* – составляющие реакции; *б* – реакция вязкоупругой опоры и суммарная реакция контактов опор.

На рис. 3 показаны результаты вычислений для второго случая. Здесь точки опоры выбирались на небольшом расстоянии – точка контакта вязкоупругой опоры полагалась в центре небольшой окружности с радиусом $5\sqrt{2}$ см (примерно 1/10 величины пластины), а точки контакта «вязкой» и «упругой» опор располагались на концах диаметра этой окружности. Рассматривался случай, когда две дополнительных опоры моделируют одну вязкоупругую, и их суммарное действие ещё подобно, но уже заметно и отличие суммарной реакции от реакции вязкоупругой опоры. Кривые рис. 3, в основном, аналогичны описанным выше для рис. 2. Укажем лишь на некоторые отличия:

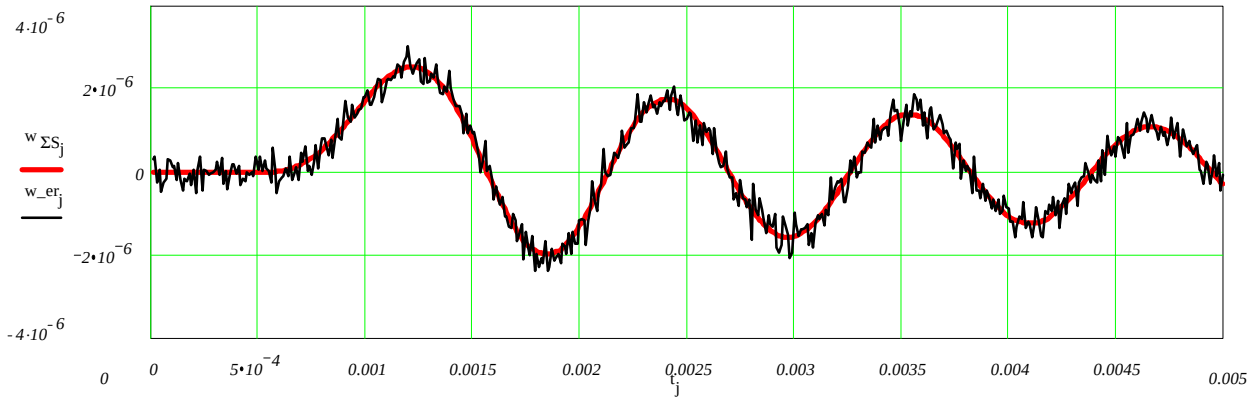
- на рис. 3, *а* на одну кривую больше, поскольку дополнительно показана реакция вязкоупругой опоры;
- на рис. 3, *б* реакция одной дополнительной вязкоупругой опоры и суммарная реакция (совместное действие вязкой и упругой опор) не совпадают, причем максимальные значения реакции вязкоупругой упоры примерно на треть выше, чем величины суммарной реакции.

Такое увеличение объясняется, по-видимому, тем, что двойная опора оказывает некоторое сглаживающее и усредняющее действие (причем, как с математической, так и с физической точек зрения).

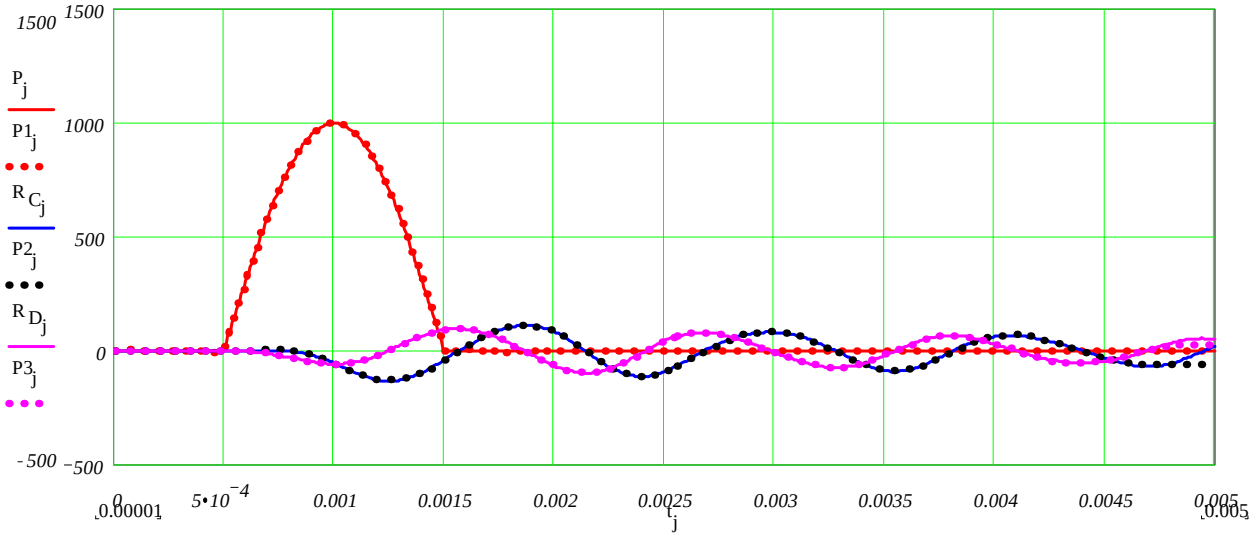
Вычисления при решении обратной задачи выполнялись только для первого случая, то есть решалась задача идентификации неизвестного нестационарного нагружения, действовавшего на пластину, и распределения неизвестных вязкой и упругой составляющих дополнительной вязкоупругой опоры, присоединенной к шарнирно-опертой пластине в некоторой ее точке.

На рис. 4, *а* показаны исходные данные для решения задачи идентификации: изменения прогиба в некоторой точке пластины (полученные при решении прямой задачи) – гладкая кривая, а также *зашумленные значения* прогиба. Укажем, что для моделирования случайных погрешностей, возникающих при экспериментальном измерении прогибов или деформаций в точках пластины, принималось *нормальное распределение зашумления* со среднеквадратичным отклонением, равным 10%.

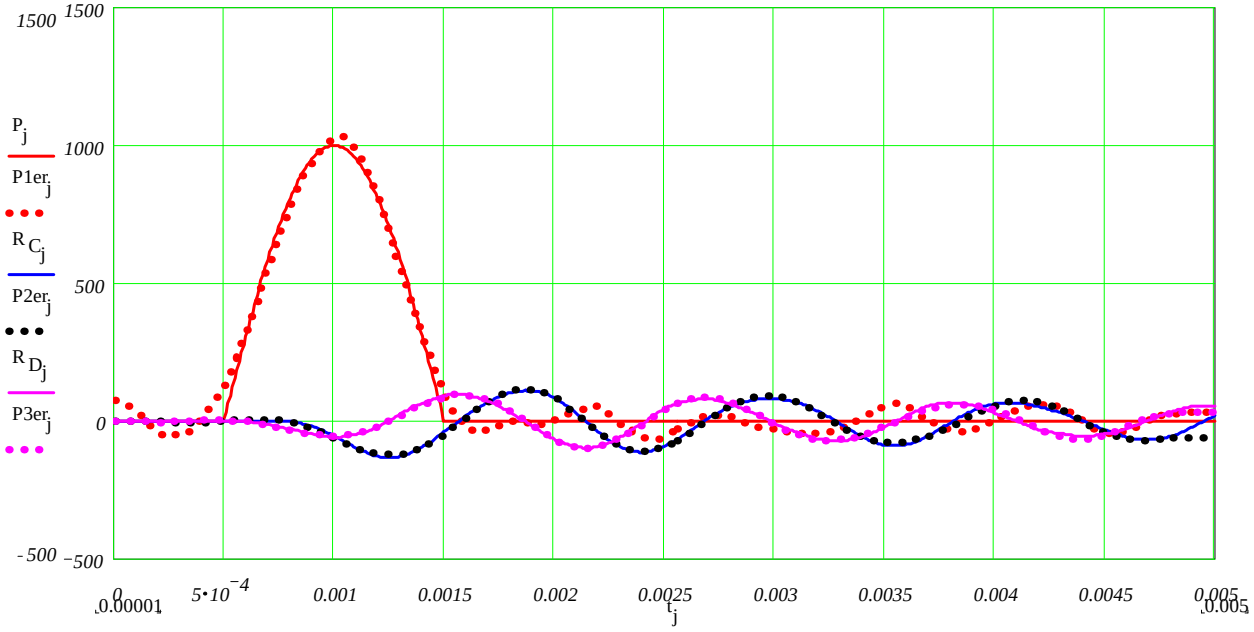
На рис. 4 *б* и рис. 4 *в* сплошными линиями показаны возмущающая нагрузка и составляющие вязкоупругой опоры, полученные при решении прямой задачи, а точками представлены идентифицированные значения сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$, найденные в результате численно-аналитического решения матричной системы (11). Рис. 4, *б* соответствует идентификации изменения во времени нестационарных нагрузок по незашумленным исходным данным, а рис. 4, *в* – по зашумленным.



а



б



в

Рис. 4 – Вычисления по обратной задаче для первого случая: *а* – исходные данные для идентификации; *б* – идентифицированные силы по незашумленным исходным данным; *в* – идентифицированные силы по зашумленным исходным данным (внешняя и две составляющих реакции).

Графики на рис. 4, *б* демонстрируют практически полное соответствие идентифицированных нагрузок аналогичным величинам из прямой задачи. Исключение составляет промежуток в самом конце исследуемого ин-

тервала времени, где наблюдаются небольшие отклонения, вызванные, по-видимому, накоплением погрешностей вычислений при численно-аналитическом решении системы (11). На рис. 4, *в* можно наблюдать, что удовлетворительные результаты при решении задачи идентификации могут быть получены даже при значительном зашумлении исходных данных, и описанная методика может успешно применяться при обработке экспериментальных данных для косвенного измерения нестационарных возмущающих нагрузок и реакций вязких и упругих опор.

Выводы. В работе описан оригинальный подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде двух неизвестных независимых нестационарных сил – вязкой и упругой составляющих реакции между пластиной и дополнительной опорой. Неизвестные нестационарные нагрузки определяются из решения системы интегральных уравнений Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций с дополнительными опорами имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем.

Описана методика решения прямой и обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, позволяющая получать устойчивые аналитико-численные решения.

Список литературы

1. *Воропай А. В.* Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия : Динамика и прочность машин. – Х. : НТУ «ХПИ». – 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
2. *Воропай А. В.*, *Янютин Е. Г.* Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. Механика. – 2007. – 43. – №7. – С. 90 – 97.
3. *Тихонов А. Н.*, *Гончаровский А. В. и др.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 200 с.

References (transliterated)

1. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyazkouprugoy oporoy [Inverse problem for nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
2. Voropay A. V., Janyutin E. G. Identifikatsiya neskol'kikh impul'snykh nagruzok, vozdeystvuyushhikh na plastinu [Identification of several pulse loads acting on a plate]. *Prikl. Mekhanika* [Applied Mechanics]. 2007, vol. 43, no. 7, pp. 90–97.
3. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V. et al. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informaciya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 08.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розподілення в'язкої і пружної складових в реакції додаткової в'язкопружної опори, що контактує з пластиною / О. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 16 – 22. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.

Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной / А. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 16 – 22. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.

Distribution of viscous and elastic components in the reaction of an additional viscoelastic support contacting a plate / A. V. Voropay // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 16 – 22. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

УДК 519.855, 66.011

І. В. ГУРАЛЬ

МАКРОМОДЕЛЮВАННЯ СТАДІЇ МЕТАНОГЕНЕЗУ ЗБРОДЖУВАННЯ ТВЕРДИХ ПОБУТОВИХ ОРГАНІЧНИХ ВІДХОДІВ У БІОГАЗОВИХ УСТАНОВКАХ

Розглянуто задачу моделювання процесів анаеробного мікробіологічного бродіння на стадії метаногенезу з дотриманням балансу. Запропоновано та обґрунтовано модель на цій стадії будувати у вигляді інтервальної дискретної динамічної моделі. Обґрунтовано метод структурної ідентифікації інтервальної дискретної динамічної моделі на принципах функціонування бджолиної колонії у процесі пошуку їжі, який забезпечує можливість отримання простіших структур моделі із заданими прогностичними властивостями по відношенню до існуючих методів.

Ключові слова: структурна ідентифікація, біогазові установки, метаногенез, інтервальна дискретна динамічна модель, алгоритм бджолиної колонії.

Рассмотрена задача моделирования процессов анаэробного микробиологического брожения на стадии метаногенезу с соблюдением баланса. Предложено и обосновано модель на этой стадии изобразить в виде интервальной дискретной динамической модели. Обоснован метод структурной идентификации интервальной дискретной динамической модели на принципах функционирования пчелиной колонии в процессе поиска пищи, который обеспечивает возможность получения простых структур модели с заданными прогностическими свойствами по отношению к существующим методам.

Ключевые слова: структурная идентификация, биогазовые установки, метаногенез, интервальная дискретная динамическая модель, алгоритм пчелиной колонии.

The problem of modeling the processes of anaerobic microbiological fermentation on the methanogenesis stage with keeping the balance is considered in this work. It is proposed and justified to build the model on this stage in the form of an interval discrete dynamic model. The method of structural identification of the interval discrete dynamic model based on the principles of functioning of a honey bee colony in the food search process, which provides the possibility of obtaining simple model structures with specified prognostic properties relative to existing methods, is justified. A macromodel of the fermentation process on the methanogenesis stages based on the interval discrete dynamic model, which provides guaranteed prognostic properties for different anaerobic microbial fermentation under changing acidity, is developed in this paper. It is shown that the resulting model describes adequately and qualitatively the percentage of SSU rRNA methane forming bacteria at biogas plants.

Key words: structure identification, biogas plants, methanogenesis, interval discrete dynamic model, artificial bee colony algorithm.

Вступ. Із зростанням кількості населення міст та промислових підприємств постійно збільшується кількість відходів. Побутові відходи утворюються і накопичуються не лише у житлових приміщеннях, а й у офісах, адміністративних спорудах, кінотеатрах і театрах, магазинах, кафе й ресторанах, дитячих садках, школах, інститутах, лікарнях, готелях, на вокзалах, ринках чи й просто на вулицях. Промислові і побутові відходи створюють багато екологічних проблем [1].

Якщо не проводити утилізацію відходів, а зберігати всі відходи на сміттєзвалищах, утворюються супутні екологічні проблеми, а саме: вимивання поживних речовин і забруднення внутрішніх вод; утворення метану, що призводить до парникового ефекту; просідання ґрунту і т. д. [2]. Таким чином, нагромадження твердих побутових органічних відходів (ТПОВ) є однією із сучасних екологічних проблем. Для її вирішення потрібно утилізувати ТПОВ за допомогою біогазових установок (БГУ), які дають змогу разом із розв’язанням екологічної проблеми отримувати високоефективні органічні добрива та енергію у вигляді біогазу [3].

В основних елементах БГУ проходять складні тепломасообмінні процеси на різних стадіях метанового бродіння. Такі процеси визначені і описані в працях [4, 5], проте в БГУ часто виникають проблеми недотримання технологічних вимог, при яких недотримується і баланс.

Найбільш вагомі результати при дослідженні проблематики переробки твердих органічних побутових відходів шляхом анаеробного мікробіологічного бродіння отримали наукові школи таких українських та зарубіжних вчених, як *Matt E. Griffin*, *Katherine D. McMahon*, *Roderick I. Mackie*, *Lutgarde Raskin*, *Н.Б. Голуб*, *О.А. Козловець*.

На сьогоднішній день процеси анаеробного мікробіологічного бродіння описано також у ряді праць на рівні макромоделей типу «вхід-вихід» [6, 7]. Проте такі моделі не придатні для розв’язування задач управління, оскільки вони не відображають балансу продуктів на різних етапах, що не забезпечує можливості ефективної організації процесу в БГУ. Як наслідок в кращому випадку, низький вихід біогазу, а в гіршому – затухання реакції через загибель мезофільних бактерій. Тому метою даної праці є розробка макромоделей процесу анаеробного мікробіологічного бродіння для окремих етапів. Зокрема, розглянуто задачу макромоделювання для кінцевого етапу – *метаногенезу*.

Аналіз процесів у біогазових установках. Розглянемо процес утворення біогазу шляхом анаеробного мікробіологічного зброджування твердих побутових органічних відходів.

Процес утворення біогазу називають *метановим бродінням*. Його суть полягає в анаеробному бродінні, яке відбувається внаслідок життєдіяльності мікроорганізмів і супроводжується рядом біохімічних реакцій [5]. Кілька видів мікроорганізмів беруть участь у загальних реакціях, які включають в себе такі стадії: гідроліз, ацидогенез, ацетогенез і метаногенез [8]. Анаеробне бродіння вимагає збалансовану діяльність мікробних об’єднань для окислення субстратів та видалення інгібуючих кислот і водню для утворення метану.

© І. В. Гураль, 2016

Відповідно до цих етапів біометаногенезу у процесі беруть участь такі групи бактерій:

- целюлозолітичні, деструктивні гідролітики метаногенної асоціації – гідролізують складні органічні субстрати до органічних кислот (масляна, пропіонова і молочна), а також нижчих спиртів, аміаку, водню;
- ацетотрофні ацетогени метаногенної асоціації – перетворюють органічні кислоти та оцтову кислоту, водень і оксиди вуглецю;
- ацетотрофні метаногени використовують кислоти і ацетат (СН3СОО-)як джерело вуглецю і джерело енергії, які метаболізується у вуглекислий газ і метан; гідрогенотрофні метаногени – строгі анаероби, серед них зустрічаються як мезофільні, так і термофільні форми, гетеротрофи і автотрофи використовують вуглекислий газ як джерело вуглецю і водень як джерело енергії, а частина вуглекислоти реагує з воднем, утворюючи метан [9].

На етапі розчинення і гідролізу органічних сполук задіюються мікроорганізми, що володіють целюлозолітичною, протеолітичною, ліполітичною, сульфовідновлюючою, денітрифікуючою та іншими видами активності. Склад домінуючої мікрофлори цієї фази залежить від складу мікрофлори вхідної сировини, а також від хімічної природи проміжних продуктів розпаду органічних речовин.

У цій фазі біля 76 % органічних речовин перетворюється у вищі жирні кислоти, до 20 % – в ацетат і 4 % – у водень. Цю фазу можна умовно розділити на дві частини: гідролізу і ацидогенозу (кислотоутворення).

На етапі ацетогенезу в процес задіюються ацетогенні і гідрогенпродукуючі бактерії. Вони перетворюють пропіонат в ацетат, CO_2 та H_2, якщо в середовищі одночасно присутні водень-споживаючі бактерії, оскільки водень є інгібітором оцтовокислих бактерій. В 1967 р. встановлено, що оцтовокислі та метаноутворюючі мікроорганізми – симбіонти, їх раніше вважали одним мікробом, який називали *Methanobacillus omelianskii* і який входить до типу *Bacteria* [10].

Третій етап – метаногенний. В ньому задіяні метаноутворюючі бактерії. З біохімічної точки зору метанове бродіння – це анаеробне дихання, в результаті якого електрони від органічних речовин переносяться до вуглекислого газу, котрий потім відновлюється до метану. Окрім різних органічних субстратів (таких, як оцтова кислота), донором електронів для метанобактерій слугує водень, котрий продукується декількома типами анаеробних бактерій.

В умовах строгого анаеробіозу метан можна отримати з ароматичних сполук. У цьому процесі беруть участь декілька видів мікроорганізмів, відповідальних за різні стадії деградації ароматичних кілець до ацетату, який є одним із субстратів для метанобактерій. Його дегідрування дає електрони, які потрібні для відновлення двоокису вуглецю до метану.

У процесах деструкції органічної біомаси до кислот беруть участь асоціації облігатних і факультативних анаеробних організмів, серед яких гідролітичні, кислотогенні, ацетогенні представники родів: *Enterobacteriaceae, Lactobacilaceae, Sterptococcaceae, Clostridium, Butyrivibrio* [9].

Активними метанотвірними компонентами метаногенної асоціації, здатними беспосередньо до біосинтезу метану, є невелика група *метаногенеруючих архебактерій*, життєдіяльність яких відбувається в строго анаеробних умовах, які використовують енергію реакції біосинтезу метану, метаболізуюють водень, кислоти, спирти і оксид вуглецю в метан, відновлюючи вуглекислий газ в метан з поглинанням водню, який також може інгібірувати оцтовокисні бактерії, проте відомо, що оцтовокисні і метанотвірні мікроорганізми утворюють *симбіотичну асоціацію*.

Відомі понад 50 видів метаногенів, які поділяються на три класи — *Methanobacteria, Methanococci і Methanopyri*, що входять до типу *Euryarchaeota*, а саме до цієї групи метаногенів належать *Methanosarcina barkeri, Methanococcus mazei, Methanothrix soengenii, Methanobacterium formicicum, Methanospirilum hungati, Mc. vannielii, Mb. thermoautotrophicum, Methanobacterium kadomensis, Methanobacillus kuzneceovii, Methanobrevibacter ruminantium* [9].

Архебактерії відрізняються від *прокаріотичних мікроорганізмів* відсутністю муреїну в клітинній стінці; специфічним, таким, що не містить жирних кислот, складом ліпідів; наявністю специфічніх компонентів метаболізму у вигляді коферменту М (2-меркаптоетансульфоновая кислота) і фактора F420 (особливий флавін); специфічною нуклеотидною послідовністю 16s рРНК. Рибосомна РНК (рРНК) — вид РНК, що є центральним компонентом рибосоми, комплексу, що збирає білки у клітині, рРНК разом з 70 – 80 рибосомними білками потім збираються в дві складні субодиниці (велика і маленька субодиниці). Гени рибосомних РНК еукаріотів розміщені у кластерах тандемних повторів, довжиною 11 тис. пар основ. Кожен кластер містить гени 18S, 5,8S та 28S рРНК. Такі кластери повторюються від 100 до 1000 разів і разом формують ядерцевий організатор [11]. У бактерій, архей, мітохондрій і хлоропластів маленька рибосомна субодиниця (МСО) містить 16S рРНК, де S в 16S означає *одиниці Сведберга* [12]; велика рибосомна субодиниця містить два види рРНК (5S і 23S рРНК). Архебактерії можуть містити як містять або єдиний оперон рРНК, так і багато його копій [11]. Усередині цієї групи окремі представники метанотвірних бактерій можуть істотно відрізнятися один від одного за низкою показників, зокрема вмістом ГЦ (вміст гуаніну і цитозину) у ДНК.

Для всіх метанобактерій характерна здатність рости у присутності водню і вуглекислого газу, а також висока чутливість до кисню і інгібіторів виробництва метану. У природних умовах присутня *трофічна асоціація* метанобактерій, тісно пов'язаних з гідрогенними бактеріями, що продукують газоподібний водень, який споживається метаногенами; у результаті його концентрація знижується і стає безпечною для воденьтвірних

бактерій.

Ці реакції протікають одночасно, причому умови існування метаноутворюючих бактерій значно вищі, ніж кислотоутворюючі. Швидкість і масштаби анаеробного бродіння метаноутворюючих бактерій залежать від їх метаболічної активності. Разом з тим існуючі хімічні перетворення не дають можливості змоделювати весь процес бродіння і визначити в динаміці оптимальні умови його забезпечення. А існуючі макромоделі, які використовуються для моделювання біогазу, що описують залежність субстрату в вигляді ТПОВ, не дають можливість керувати цим процесом.

Постановка задачі. У праці [5] розглянута макромодель виробництва біогазу, яка ґрунтується на вимірюваннях об'єму залишкової маси. Цю модель записують у вигляді інтервальної дискретної динамічної моделі (ІДДМ)[5]:

$$[\hat{v}_k^-;\hat{v}_k^+]=[\hat{v}_{k-1}^-;\hat{v}_{k-1}^+]-\frac{h\cdot[\hat{g}_1^-;\hat{g}_1^+]\cdot[\hat{v}_{k-1}^-;\hat{v}_{k-1}^+]\cdot(1+h\cdot([\hat{g}_2^-;\hat{g}_2^+]\cdot[\hat{v}_{k-2}^-;\hat{v}_{k-2}^+]-[\hat{g}_3^-;\hat{g}_3^+]))}{([\hat{g}_4^-;\hat{g}_4^+]+[\hat{v}_{k-1}^-;\hat{v}_{k-1}^+])},\ k=1,...,K, \quad (1)$$

де $[\hat{v}_k^-;\hat{v}_k^+]$ – оцінка гарантованого інтервалу об'єму залишкової маси органічних відходів у $k-$тий момент часу; $[\hat{g}_i^-;\hat{g}_i^+]$ – інтервальні оцінки параметрів, при $i=1,...,4$.

Недоліком такої моделі є те, що вона не описує баланс біохімічних процесів на всіх стадіях. В результаті – використання зазначеної моделі не дає можливість організувати процес анаеробного мікробіологічного бродіння в БГУ в такий спосіб, щоб забезпечити максимальний вихід біогазу. Виходом з цієї ситуації може слугувати підхід, при якому для кожного етапу анаеробного мікробіологічного бродіння ТПОВ будують окремі макромоделі і на їх основі забезпечують баланс продуктів кожного з етапів в такий спосіб, щоб загалом забезпечити максимальний вихід біогазу.

Зважаючи на вище зазначене у даній праці розглянуто макромодель кінцевого етапу анаеробного мікробіологічного бродіння – метаногенезу. Приклади моделі динаміки концентрації ацетату на стадії ацидогенезу та моделі динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій на етапі ацетогенезу опубліковано в праці [13].

Розглянемо математичне формування зазначеної задачі.

Нехай для деякого процесу ферментації на стадії метаногенезу при заданому рівні кислотності середовища pH відомі часові значення утворення метаноутворюючих бактерій у біогазовій установці:

$$[\vec{V}^-;\vec{V}^+]=([v_1^-;v_1^+],...,[v_k^-;v_k^+],...,[v_N^-;v_N^+])^T, \quad (2)$$

де $[v_k^-;v_k^+]$ – нижнє та верхнє значення виміряного відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій на $k-$тій дискреті часу.

Необхідно побудувати математичну модель у вигляді дискретної динамічної моделі:

$$v_k=\vec{f}^T(v_0,...,v_{k-1})\cdot\vec{g},\quad k=p,...,K, \quad (3)$$

де $\vec{f}^T(\bullet)$ – вектор невідомих базисних функцій (відомого класу), що визначає структуру дискретної динамічної моделі; символ $(\bullet)$ означає набір базисних функцій в рівнянні (3); v_k – відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в часовій дискреті $k=p,...,K$; $\vec{g}=(g_1,...,g_i)^T$ – вектор невідомих параметрів дискретної динамічної моделі.

Слід зазначити, що загальний вигляд дискретної динамічної моделі (3) отримуватимемо на основі аналізу експериментальних даних, які представлено в інтервальному вигляді та отримано для обмеженої кількості часових дискрет за умов заданої кислотності середовища pH. При цьому вектор оцінок $\hat{\vec{g}}$ параметрів $\vec{g}$ та вектор базисних функцій $\vec{f}^T(\bullet)$ у дискретній динамічній моделі (3) отримуватимемо із умов забезпечення заданої точності моделі:

$$[\hat{v}_k^-;\hat{v}_k^+]\subseteq[v_k^-;v_k^+],\ \forall k=1...N, \quad (4)$$

де $[\hat{v}_k^-;\hat{v}_k^+]$ – у формулі (1) тепер і надалі вважатимемо інтервальними оцінками прогнозованого відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в субстраті.

У результаті, математичну задачу ідентифікації параметрів моделі записуємо у вигляді інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР) [14]:

$$\begin{cases}[\hat{v}_0^-;\hat{v}_0^+]\subseteq[v_0^-;v_0^+],\ [\hat{v}_1^-;\hat{v}_1^+]\subseteq[v_1^-;v_1^+],\ ...,\ [\hat{v}_p^-;\hat{v}_p^+]\subseteq[v_p^-;v_p^+];\\ [\hat{v}_k]=[\hat{v}_k^-;\hat{v}_k^+]=\vec{f}^T([\hat{v}_0^-;\hat{v}_0^+],...,[\hat{v}_{k-1}^-;\hat{v}_{k-1}^+])\cdot\hat{\vec{g}};\\ v_k^-\le\vec{f}^T([\hat{v}_0^-;\hat{v}_0^+],...,[\hat{v}_{k-1}^-;\hat{v}_{k-1}^+])\cdot\hat{\vec{g}}\le v_k^+,\ k=p,...,K,\end{cases} \quad (5)$$

де $[\hat{v}_0^-;\hat{v}_0^+]$, $[\hat{v}_p^-;\hat{v}_p^+]$ – інтервальні оцінки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в часовій дискреті $k=0$ та $k=p$ відповідно.

Таким чином задача ідентифікації параметрів ІДДМ сумарного відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій є задачею розв'язування ІСНАР (5). Проте в загальному випадку базисні функції $\vec{f}^T(\bullet)$ є невідомими, що призводить до задачі структурної ідентифікації ІДДМ. Суть цієї задачі полягає у формуванні послідовності структур ІДДМ, які забезпечують побудову ІСНАР у вигляді (5). Одна із ІСНАР (5) в послідовності виявиться сумісною, що означатиме завершення процедури побудови ІДДМ у вигляді:

$$[\widehat{v}_k] = [\widehat{v}_k^-; \widehat{v}_k^+] = \vec{f}^T([\widehat{v}_0^-; \widehat{v}_0^+], ..., [\widehat{v}_{k-1}^-; \widehat{v}_{k-1}^+]) \cdot \widehat{\vec{g}}. \quad (6)$$

Модель динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ. Розглянемо процес виробництва біогазу на кінцевому етапі (метаногенезі) анаеробного мікробіологічного бродіння. Основним вихідним продуктом цього етапу є біогаз.

Скористаємося результатами досліджень, наведених у працях [10, 13], де розглянуто процеси анаеробного бродіння твердих побутових органічних відходів (ТПОВ). У біореактор, в якості речовин для отримання біогазу, завантажували органічні продукти, експериментальні дані яких отримано із праці [10]. В реактор також було додано $NaHCO_3$ (3 г) і NaOH (2 мл), для контролю і підвищення pH середовища до 7,2, так як при завантаженні субстрату рівень pH був не достатній для процесу анаеробного бродіння [10]. Посівний матеріал для варильного котла складається з 500 мл суміші анаеробного мулу (75 %) і гній великої рогатої худоби (25 %). Також добавили 150 мл дистильованої води. В кінцевому результаті, робочий об'єм субстрату склав 3 л [10].

Процес бродіння досліджувався від початку завантаження твердих органічних побутових відходів протягом 50 діб при температурі $T_0 = [35; 37]\,^\circ C$ [10].

Вибір МСО рРНК цільових олігонуклеотидних зондів був використаний для визначення відносних концентрацій трьох доменів (*Bacteria*, *Archaea* і *Eucarya*). Сума відносних кількостей *Bacteria*, *Archaea* і *Eucarya* (представлені у вигляді відсотка від загального МСО рРНК) повинна дорівнювати 100 %, так як всі відомі організми містяться в межах цих трьох областей [9]. *Bacteria* становили більшість мікроорганізмів в реакторах, *Archaea* присутні в менших кількостях (менше 10 % в більшості випадків), і *Eucarya* присутні на дуже низькому рівні (кошти для обох виручених були нижче на 0,8 %).

На етапі метаногенезу в процес метаноутворюючі бактерії, які входить до типів *Archaea* і *Eucarya*.

Відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій $[v_k^-; v_k^+]$ вираховувався щодня. Результати експериментальних даних вимірювання, отриманих із праці [10], відзначаються точністю в межах 5 %. Тому в процесі ідентифікації моделі необхідним є виконання умови, щоб інтервальні оцінки прогнозованого значення концентрації ацетату були в межах цієї похибки.

Результати вимірювань відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Експериментальні дані відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій протягом 50 діб в інтервальному вигляді

k	τ, *діб*	v_k^-, % МСО рРНК	v_k^+, % МСО рРНК	k	τ, *діб*	v_k^-, % МСО рРНК	v_k^+, % МСО рРНК
0	1	9,5	10,5	26	27	7,068	8,284
2	3	8,55	9,45	28	29	5,9125	6,78
4	5	7,44	8,56	30	31	3,9525	4,7475
6	7	7,89	9,23	32	33	2,325	3,375
8	9	8,835	10,165	34	35	1,767	2,333
10	11	7,89	9,23	36	37	1,7475	1,9825
12	13	6,324	7,346	38	39	1,6575	1,9025
14	15	4,8825	5,6175	40	41	1,6275	1,8725
16	17	5,115	5,885	42	43	1,6275	1,8725
18	19	5,8125	6,68	44	45	1,6275	1,8725
20	21	6,975	8,025	46	47	1,6275	1,8725
22	23	7,975	9,025	48	49	1,6275	1,8725
24	25	7,875	8,925	49	50	1,6275	1,8725

Слід зауважити, що експериментальні дані встановлено при заданих факторах впливу: температура середовища $[T^-; T^+] = [35; 37]\,^\circ C$ і кислотність середовища $\text{pH} = 7,2$.

Для синтезу математичної моделі процесу потрібно перш за все сформувати структуру моделі *(етап структурної ідентифікації)*, після цього провести процедуру налаштування її параметрів *(етап параметричної ідентифікації)* [15].

Для розв'язання цієї задачі структурної ідентифікації ІДДМ, у праці [16] запропоновано *алгоритм поведінки бджолиної колонії*. Детальний опис зазначеного алгоритму на стадії ацетогенезу наведено у праці [13]. Тому зупинимось на основних моментах даного алгоритму, а саме для моделювання на стадії метаногенезу.

Позначимо за λ_s поточну структуру інтервальної дискретної динамічної моделі:

$$\lambda_s = \{ f_1^s(\bullet) \cdot g_1^s;\ f_2^s(\bullet) \cdot g_2^s; ...;\ f_{m_s}^s(\bullet) \cdot g_{m_s}^s \} \subset \Lambda, \tag{7}$$

де $\vec{f}^s = \{ f_1^s(\bullet);\ f_2^s(\bullet); ...;\ f_{m_s}^s(\bullet) \} \subset F$ – набір структурних елементів, що задає поточну s – ту структуру ІДДМ.

Далі введемо наступні умовні позначення: $m_s \in [I_{\min}; I_{\max}]$ – кількість елементів у поточній структурі λ_s; F – множина усіх структурних елементів, $F = \{ f_1(\vec{v}_{k-1}); ...;\ f_l(\vec{v}_{k-1}); ...;\ f_L(\vec{v}_{k-1}) \}$, де $|F| = L$ (потужність множини *F*); $\vec{g}^s = \{ g_1^s; g_2^s; ...; g_{m_s}^s \}$ – вектор невідомих значень параметрів, який для поточної структури ІДДМ оцінюватиметься на основі методів параметричної ідентифікації, які ґрунтуються на процедурах випадкового пошуку [17]; Λ – множина усіх можливих структур ІДДМ.

Задача структурної ідентифікації полягає у пошуку структури λ_0 ІДДМ у вигляді (7), щоб сформований на основі неї інтервальний різницевий оператор:

$$[v_k^-; v_k^+] = [f_1^0(\bullet)] \cdot \hat{g}_1^0 + [f_2^0(\bullet)] \cdot \hat{g}_2^0 + \ldots + [f_{m_0}^0(\bullet)] \cdot \hat{g}_{m_0}^0 \tag{8}$$

задовольняв умови (4), тобто забезпечував належність інтервальних оцінок прогнозованого значення модельованої характеристики до інтервалів допустимих значень модельованої характеристики на множині усіх дискрет.

Варто зазначити, що параметрична ідентифікація в даному випадку є етапом структурної ідентифікації. Як відомо, у випадку, коли дані задано в інтервальному вигляді, цей етап полягає у формуванні деякого вектора базисних функцій (поточної структури λ_s ІДДМ) і знаходженні оцінок параметрів ІДДМ шляхом розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР) [14]. Проте, взамін розв'язування ІСНАР (надзвичайно складної обчислювальної задачі) шукають її деяке наближення до розв'язку, яке задає якість поточної структури ІДДМ λ_s. В цьому випадку задача розв'язування ІСНАР набуває вигляду оптимізаційної задачі.

Отже, якість поточної структури ІДДМ оцінюватимемо за значенням функції мети $\delta(\lambda_s)$, який кількісно визначає наближеність поточної структури до задовільної в сенсі забезпечення умов (4). Значення функції мети $\delta(\lambda_s)$ обчислюватимемо за допомогою виразів, отриманих у праці [19], вигляд яких для фіксованої структури такий:

$$\delta(\lambda_s) = \max_{k=1,...,K} \{ \left| mid(\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], ..., [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \hat{\vec{g}}^s), - mid([v_k]) \right| \},$$

$$\text{якщо } [\hat{v}_k] \cap [v_k] = \varnothing,\ \exists\ k = 1, ..., K; \tag{9}$$

$$\delta(\lambda_s) = \max_{k=1,...,K} \{ \left| mid(\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], ..., [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \hat{\vec{g}}^s) - wid((\vec{f}^{Ts}([\hat{v}_0], ..., [\hat{v}_{k-1}]) \cdot \hat{\vec{g}}^s)) \cap [v_k]) \right| \},$$

$$\text{якщо } [\hat{v}_k] \cap [v_k] = \varnothing,\ \forall\ k = 1, ..., K; \tag{10}$$

де $mid(\bullet)$, $wid(\bullet)$ – операції визначення центру та ширини інтервалів, відповідно.

Вираз (9) описує наближеність поточної структури до задовільної на початкових ітераціях, тим часом як вираз (10) у випадку $\delta(\lambda_s) = 0$ забезпечує виконання умови (8).

Тепер задачу структурної ідентифікації ІДДМ запишемо формально у вигляді задачі знаходження мінімуму функції мети $\delta(\lambda_s)$:

$$\delta(\lambda_s) \xrightarrow{\hat{\vec{g}}^s, \vec{f}^s(\bullet)} \min,\ m_s \in [I_{\min}; I_{\max}],\ \vec{f}^s(\bullet) \in F. \tag{11}$$

Для обчисленого значення функції мети $\delta(\lambda_s)$ для фіксованої структури λ_s ІДДМ за будь-яких умов справедливою буде нерівність $\delta(\lambda_s) \geq 0$. Таким чином, можна стверджувати, що функція мети $\delta(\lambda_s)$ має глобальний екстремум лише у тих точках, для яких виконується наступна рівність: $\delta(\lambda_s) = 0$. Опираючись на теорію множинності моделей [18], можна стверджувати, що у просторі пошуку розв'язків задачі структурної ідентифікації ІДДМ функція $\delta(\lambda_s)$ має багато глобальних мінімумів.

Чим менше значення $\delta(\lambda_s)$, тим краща поточна структура ІДДМ. Якщо $\delta(\lambda_s) = 0$, то поточна структура ІДДМ дає можливість побудувати адекватну модель, для якої інтервальні оцінки прогнозованої характеристики належать до інтервалів можливих значень модельованої характеристики.

Тепер перейдемо до практичної реалізації задачі структурної ідентифікації макромоделі відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ.

Спочатку, спираючись на відомі особливості процесу метаногенезу, згенеруємо набір структурних елементів у вигляді ІДДМ. Результати цієї процедури наведено в табл. 2.

Для синтезу структури ІДДМ(6) за допомогою методу структурної ідентифікації згенеровано множину структурних елементів F з потужністю $L = 520$. Множина структурних елементів містить поліноміальні функції не вищі третього степеня. Тобто шукатимемо інтервальний різницевий оператор не вище третього порядку.

Для реалізації методу структурної ідентифікації інтервального різницевого оператора на основі алгоритму бджолиної колонії задаємо параметрів алгоритму: *MCN* (максимальне кількість ітерацій алгоритму), *LIMIT* (максимальну можливу кількість ітерацій *незмінності структури*, тобто якщо структура ІДДМ не давала покращен-

ня уже *LIMIT* разів, то вона вважається вичерпаною), *S* (початкову кількість структур ІДДМ), $[I_{\min}; I_{\max}]$ (інтервал, межі якого задають відповідно мінімальне $I_{\min}$ та максимальне $I_{\max}$ значення потенційної кількості структурних елементів у структурі ІДДМ λ_s) та множину структурних елементів *F* [17]. Далі відбувається формування початкової множини структур ІДДМ Λ_0 (потужності *S*).

Таблиця 2 – Множина структурних елементів *F* моделей утворення метаноутворюючих бактерій на етапах анаеробного процесу бродіння

№	Структурні елементи
1.	v_{k-1}
2.	v_{k-2}
3.	$v_{k-1} \cdot v_{k-2}$
4.	v_{k-1}^2
5.	v_{k-1}^2
6.	$v_{k-1}^2 \cdot v_{k-2}$
7.	$v_{k-2}^2 \cdot v_{k-1}$
8.	v_{k-1}^3
9.	v_{k-2}^3

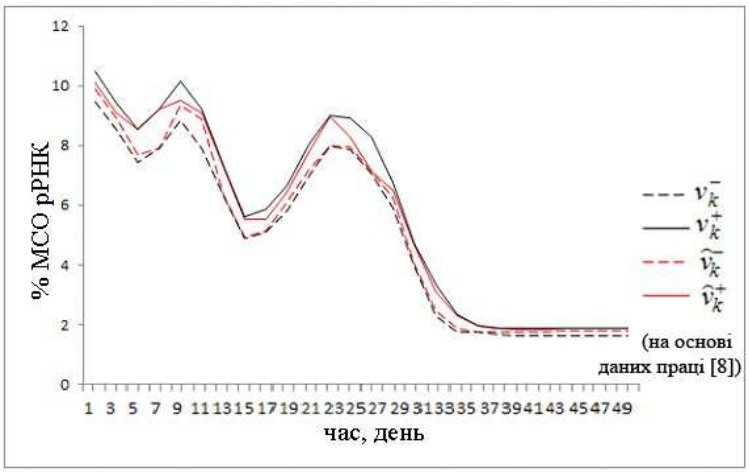


Рис. 1 – Коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ.

Спираючись на процедури алгоритму бджолиної колонії послідовно формуватимемо з набору структурних елементів нові елементи, кожен раз будуючи функцію мети і розв'язуючи задачу мінімізації для заданого набору [18].

Враховуючи заданий початковий набір структурних елементів (табл. 2) на кожній ітерайції з використанням операторів алгоритму бджолиної колонії (оператор $P_\delta(\Lambda_{mcn}, F)$ означає перетворення кожної структури λ_s^1 з множини структур Λ^1_{mcn}, першого ряду формування згенерованих на ітерації алгоритму mcn, у множини структур ІДДМ Λ'_s (де $s = 1 \ldots S$) у спосіб заміни випадковим чином n_s елементів кожної структури λ_s^1, елементами із множини структурних елементів *F;* оператор $D_2(\lambda_s, \Lambda'_s)$ реалізує процес синтезу множини структур ІДДМ Λ^2_{mcn} із поточних множин Λ^1_{mcn} та Λ''_{mcn}, у спосіб селекції структур ІДДМ λ_s^2 за показниками якості; оператор $P_N(F, I_{\min}, I_{\max})$ означає генерування випадковим чином структури λ_s^2 із множини усіх структурних елементів F, де кількість структурних елементів – $m_s \in [I_{\min}; I_{\max}]$.), отримуємо послідовність структур, які в кінцевому випадку забезпечують виконання умови (4) для всіх дискретних значень.

Результати дослідження. В результаті застосування алгоритму бджолиної колонії до розв'язування задачі (11) після 15 ітерацій модифікацій ІСНАР (5) отримали ІДДМ, які визначають відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ:

$$[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = [0{,}0067; 0{,}00672] - [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] \cdot [0{,}003756; 0{,}00376] + [\hat{v}_{k-1}^-; v_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] \cdot [0{,}001388; 0{,}00139] -$$
$$-[\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [0{,}004363; 0{,}004369] - [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] \cdot [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] \cdot [0{,}000111; 0{,}000112] + [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \times$$
$$\times [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [0{,}00013; 0{,}000132] \subset [v_k^-; v_k^+]. \quad (12)$$

Отримана інтервальна дискретна динамічна модель і параметри адекватно відображають процес метаногенезу.

Результати прогнозування в порівнянні з експериментальними даними відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій ТПОВ наведено на рис. 1.

Як бачимо, з рис. 1 коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ знаходиться в межах коридору експериментальних даних, що забезпечує адекватність математичної моделі.

Отримана модель дає можливість спрогнозувати коридор динаміки відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ на стадії метаногенезу, що містить такі фактори впливу як температура середовища $[T^-; T^+] = [35; 37]\,^\circ C$ і кислотність середовища $\text{pH} = 7{,}2$. Таким чином, користуючись моделлю, можемо забезпечити на цій стадії оптимальний відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ, яка, своєю чергою, визначить оптимальний розвиток популяції мікроорганізмів в процесі анаеробного мікробіологічного бродіння.

Для застосування отриманої макромоделі, з метою прогнозування відсотку МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в субстраті в умовах зміни кислотності середовища бродіння, достатньо задати тільки початкові дані для цих умов.

Висновки. Розглянуто задачу моделювання процесів анаеробного мікробіологічного бродіння з дотриманням балансу на стадії метаногенезу. Запропоновано та обґрунтовано модель на цих стадіях будувати в вигляді інтервальної дискретної динамічної моделі.

Обґрунтовано метод структурної ідентифікації ІДДМ на принципах функціонування бджолиної колонії у процесі пошуку їжі, який забезпечує можливість отримання простіших структур ІДДМ із заданими прогностичними властивостями по відношенню до існуючих методів. Ефективність застосування запропонованого методу та його обчислювальної схеми проілюстрована на прикладі побудови моделі процесу анаеробного мікробіологічного бродіння ТПОВ в БГУ об'ємом 5 $дм^3$ на кінцевих стадіях.

Вперше отримано макромодель процесу бродіння на стадіях метаногенезу (12) на основі ІДДМ, яка забезпечує гарантовані прогностичні властивості для різних умов анаеробного мікробіологічного бродіння, при зміні кислотності середовища.

Показано, що отримана модель якісно адекватно описує відсоток МСО рРНК метаноутворюючих бактерій в БГУ.

Список літератури

1. *Баадер Б., Доне Брендерфер М.* Биогаз: Теория и практика / Пер. с нем. М. И. Серебрянного. – М. : Колос, 1982. – 148 с.
2. *Гелетуха Г. Г., Кучерук П. П., Матвеєв Ю. Б.* Перспективи виробництва та використання біогазу в Україні. Аналітична записка БАУ № 4, 2013. – 22 с.
3. *Боднар А. М.* Перший крок до екологічного майбутнього – сортування сміття. – Тернопіль, 2013. – 12 с.
4. *Гураль І. В., Дивак М. П.* Біохімічний аналіз процесів в біогазових установках та його застосування в задачі макромоделювання процесів виробництва біогазу // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах». – Хмельницький, 2014. – № 2 (47). – С. 152 – 158.
5. *Гураль І. В., Дивак М. П., Піговський Ю. Р.* Модель неавтономної системи виробництва біогазу та метод її ідентифікації // Науковий журнал «Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського». – Кременчук, 2015. – Вип. 3/2015 (92) – С. 129 – 136.
6. *Дивак М., Стахів П., Каліщук І.* Ідентифікація параметрів моделей «вхід–вихід» динамічних систем на основі інтервального підходу // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 109 – 117.
7. *Дивак М. П.* Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль : Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с. – ISBN 978-966-654-283-3.
8. *Gerber M., Span R.* An Analysis of Available Mathematical Model for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas. International Gas Union Research conference. – Paris, 2008, P. 5–7.
9. *Швед О. В., Миколів О. Б., Комаровська-Порохнявець О. З., Новіков В. П.* Екологічна біотехнологія : Навч. посіб. у 2 кн. – Львів : Львівська політехніка, 2010.
10. *M. E. Griffin, K. D. McMahon, R. I. Mackie, and L. Raskin.* «Methanogenic population dynamics during start-up of anaerobic digesters treating municipal solid waste and biosolids", Biotechnology and Bioengineering, vol. 57, no. 3, 1998. – P. 342–355.
11. *Сиволоб А. В., Рушковський С. Р., Кир'яченко С. С. та ін.* Генетика : підручник // За ред. А. В. Сиволоба. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – С. 56 – 60.
12. *Опейда Й., Швайка О.* Ін-т фізико-органічної хімії та вуглехімії ім. Л. М. Литвиненка НАН України, Донецький національний університет. – Донецьк : «Вебер», 2008. – 758 с. – ISBN 978-966-335-206-0.
13. *Hural I., Dyvak M., Stakhiv P.* Macromodelling of fermentation process of municipal solid organic waste at biogas plants on the acidogenesis stage // Journal of Applied Computer Science / Technical University Press. – Lodz, Poland, 2016. – Vol. 24 (1).
14. *Дивак М. П., Дивак Т. М.* Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розв'язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора // Індуктивне моделювання складних систем : Зб. наук. пр. – К. : МННЦ ІТС НАН та МОН України, 2009. – Вип. 1. – С. 35 – 43.
15. *Ивахненко А. Г., Мюллер Й. А.* Самоорганизация прогнозирующих моделей. – К. : Техника. – 1985; Берлин : ФЕБ Ферлаг Техник. – 1984. – 223 с.
16. *Porplytsya N., Dyvak M., Dyvak T.* "Method of structure identification for interval difference operator based on the principles of honey bee colony functioning" // Computational problems of electrical engineering Journal. – Vol. 4. – No. 2. – 2014. – P. 57 – 68.
17. *Дивак Т. М., Піговський Ю. Р, Дивак М. П., Марценюк Є. О.* Практичні аспекти застосування методу та алгоритму параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем з інтервальною невизначеністю // Індуктивне моделювання складних систем. – 2010. – Вип. 2. – С. 39 – 49. – Режим доступу : http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/17401. – Дата звертання : 23 травня 2016.
18. *Порплиця Н. П., Дивак М. П.* Синтез структури інтервального різницевого оператора з використанням алгоритму бджолиної колонії // Індуктивне моделювання складних систем. – 2013. – Вип. 5. – С. 256 – 269.

References (transliterated)

1. Baader B., Done Brenderfer M. *Biogas: Teoriya i praktika* [Biogas: Theory and Practice]. *Perevod s nemetskoho*. Ed. Serebryannyy, M. I. Moscow, Kolos Publ., 1982. 148 p.
2. Geletukha G. G., Kucheruk P. P., Matveyev Y. B. *Perspektyvy vyrobnytstva ta vykorystannya biogazu v Ukrayini* [Production prospects of biogas in Ukraine]. *Analitychna zapyska BAU*. No. 4, 2013, 22 p.
3. Bodnar A. M. *Pershyy krok do ekologichnogo maybutn'ogo – sortuvannya smittya* [The first step toward environmental future – sorting trash]. Ternopil, 2013. 12 p.
4. Hural I., Dyvak M. Biokhimichnyy analiz protsesiv v biohazovykh ustanovkakh ta yogo zastosuvannya v zadachi makromodelyuvannya protsesiv

vyrobnytstva biohazu [The biochemical analysis of the processes at biogas plants and its implementation in biogas production macro modelling problem]. *Mizhnarodnyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal «Vymiryuval'na ta obchyslyuval'na tekhnika v tekhnologichnykh protsesakh»* [International scientific-technical journal "Measuring and computing devices in technological processes]. Khmelnitsky, 2014, no. 2 (47), pp. 152–158.

5. Hural I., Dyvak M., Pigovs'kyy Yu. Model' neavtonomnoyi systemy vyrobnytstva biogazu ta metod yiyi identyfikatsiyi [Model of non-autonomous biogas production system and method of its identification]. *Naukovyy zhurnal «Visnyk Kremenchuts'kogo natsional'nogo universytetu imeni Mykhayla Ostrograds'kogo»* [Scientific journal "Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University"]. Kremenchug, 2015, vol. 3/2015 (92), pp. 129–136.

6. Dyvak M., Stakhiv P., Kalishchuk I. Identyfikatsiya parametriv modeley «vkhid–vykhid» dynamichnykh system na osnovi interval'nogo pidkhodu [Identification of "input-output" models of dynamic systems using interval approach]. *Visnyk Ternopil's'kogo derzhavnogo tekhnichnogo universytetu* [Bulletin of Ternopil State Technical University]. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 109–117.

7. Dyvak M. *Zadachi matematychnogo modelyuvannya statychnykh system z interval'nymy danymy* [Problems of mathematical modeling of static systems with interval data]. Ternopil, Vydavnytstvo TNEU «Ekonomichna dumka» Publ., 2011, 216 p. ISBN 978-966-654-283-3.

8. Gerber M., Span R. An Analysis of Available Mathematical Model for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas. International Gas Union Research conference. Paris, 2008, pp. 5–7.

9. Shved O. V., Mykoliv O. B., Komarows'ka-Porokhnyavets O. Z., Novikov V. P. *Ekologichna biotekhnologiya: navch. posib. u 2-ed kn.* [Environmental Biotechnology: Textbook in 2 Volumes]. Lviv, Lviv Polytechnic Publ., 2010.

10. Griffin M. E., McMahon K. D., Mackie R. I., Raskin L. Methanogenic population dynamics during start-up of anaerobic digesters treating municipal solid waste and biosolids. *Biotechnology and Bioengineering.* 1998, vol. 57, no. 3, pp. 342–355.

11. Syvolob A. V., Rushkovs'kyy S. R., Kyr"yachenko S. S. etc. *Genetyka : pidruchnyk* [Genetics: textbook]. Ed. Syvolob A. V. Kyiv, Vydavnycho-polihrafichnyy tsentr "Kyyivs'kyy universytet" Publ., 2008. pp. 56–60.

12. Opeyda J., Shvaika O. *Instytut fizyko-organichnoyi khimiyi ta vuglekhimiyi im. L. M. Lytvynenka NAN Ukrayiny, Donets'kyy natsional'nyy universytet* [L. M. Litvinenko Institute of Physical Organic Chemistry and Coal Chemistry, National Academy of Sciences of Ukraine, the Donetsk National University]. Donetsk, "Weber" Publ., 2008. 758 p. - ISBN 978-966-335-206-0.

13. Hural I., Dyvak M., Stakhiv P. Macromodelling of fermentation process of municipal solid organic waste at biogas plants on the acidogenesis stage. *Journal of Applied Computer Science*. Lodz, Technical University Press Publ., Poland, 2016, Vol. 24 (1).

14. Dyvak M. P., Dyvak T. M. Osoblyvosti pobudovy interval'noyi systemy algebrychnykh rivnyan' ta metodu yiyi rozv"yazku v zadachakh identyfikatsiyi liniynogo interval'nogo riznytsevogo operatora [Features of construction of interval system of algebraic equations and methods of its solving in the problems of identification of interval linear difference operator]. *Induktyvne modelyuvannya skladnykh system: Zb. nauk. pr.* [Inductive modeling of complex systems: collection of scientific papers] Kyiv, MNNTS ITS NAN ta MON Ukrayiny Publ., 2009, vol. 1, pp. 35–43.

15. Ivakhnenko A. G., Myuller Y. A. *Samoorganizatsyya prognoziruyushchykh modeley* [Long-term forecasting and control of complex systems]. Kiev, Tehnika Publ., 1985, Berlin, FEB Ferlag Tekhnik Publ., 1984. 223 p.

16. Porplytsya N., Dyvak M., Dyvak T. Method of structure identification for interval difference operator based on the principles of honey bee colony functioning. *Computational problems of electrical engineering Journal.* 2014, vol. 4, no. 2, pp. 57–68.

17. Dyvak T. M., Pigovsky Ya. R., Dyvak M. P., Martsenyuk Ye. O. Praktychni aspekty zastosuvannya metodu ta algorytmu parametrychnoyi identyfikatsiyi dyskretnykh dynamichnykh system z interval'noyu nevyznachenistyu [Practical aspects of using the method and algorithm of parameter identification of discrete dynamic systems with interval uncertainty]. *Induktyvne modelyuvannya skladnykh system* [Inductive modeling of complex systems]. 2010, vol. 2, pp. 39–49. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/17401. (accessed 23.05.2016).

18. Porplytsya, N. P., Dyvak M. P. Syntez struktury interval'nogo riznytsevogo operatora z vykorystannyam algorytmu bdzholynoyi koloniyi [Synthesis of Structure of Interval Difference Operator Using Artifitional Bee Colony Algorithm]. *Induktyvne modelyuvannya skladnykh system* [Inductive Modeling of Complex Systems]. 2013, vol. 5, pp. 256–269.

Надійшла (received) 29.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Макромоделювання стадії метаногенезу зброджування твердих побутових органічних відходів у біогазових установках / І. В. Гураль // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 23 – 30. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Макромоделирование стадии метаногенеза сбраживания твердых бытовых органических отходов в биогазовых установках / И. В. Гураль // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 23 – 30. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Macromodelling of methanogenesis stage of municipal solid organic waste fermentation at biogas plants / I. V. Hural // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 23 – 30. Bibliog.: 18 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гураль Ірина Володимирівна – аспірант кафедри комп’ютерних наук факультету комп’ютерних інформаційних технологій Тернопільського національного економічного університету, м. Тернопіль; тел.: (096) 199-44-76; e-mail: irishural@gmail.com.

Гураль Ирина Владимировна – аспирант кафедры компьютерных наук факультета компьютерных информационных технологий Тернопольского национального экономического университета, г. Тернополь; тел.: (096) 199-44-76; e-mail: irishural@gmail.com.

Hural Iryna Volodymyrivna – PhD student at the Computer Science Department, Faculty of Computer Information Technologies, Ternopil National Economic University, Ternopil; tel.: (096) 199-44-76; e-mail: irishural@gmail.com.

УДК 621.224

В. Э. ДРАНКОВСКИЙ, М. Ю. ХАВРЕНКО, А. Л. ШУДРИК

К РАСЧЕТУ ПРОТОЧНЫХ ЧАСТЕЙ ВЫСОКОНАПОРНЫХ РАДИАЛЬНО-ОСЕВЫХ ОБРАТИМЫХ ГИДРОМАШИН

Розглянуто методику аналітичного визначення обрисів меридіональною проекції робочого колеса оборотної гідромашини. Проведено порівняння основних геометричних параметрів оборотних гідромашин, насосів і гідротурбін. Дано рекомендації для визначення всмоктуючого діаметра $D_{вс}$, ширини колеса $b_{нап}$, кутів нахилу лопаті $\beta_{вс}$ и $\beta_{нап}$ і положення всмоктуючої кромки.

Складено та використано програму для побудови обрисів меридіональною проекції робочого колеса оборотної гідромашини.

Ключові слова: ГАЕС, оборотна гідромашина, проточна частина, меридіональна проекція.

Рассмотрена методика аналитического определения очертаний меридиональной проекции рабочего колеса обратимой гидромашины. Проведено сравнение основных геометрических параметров обратимых гидромашин, насосов и гидротурбин. Даны рекомендации для определения всасывающего диаметра $D_{вс}$, ширины колеса $b_{нап}$, углов наклона лопасти $\beta_{вс}$ и $\beta_{нап}$ и положения всасывающей кромки.

Составлена и использована программа для построения очертаний меридиональной проекции рабочего колеса обратимой гидромашины.

Ключевые слова: ГАЭС, обратимая гидромашина, проточная часть, меридиональная проекция.

In the article an analytical method for determining the shape of the meridional projection of the impeller of the Francis pump-turbine is considered and its modifications are analyzed. A computational algorithm for determining the meridional projection is presented. The dependence of the basic geometrical parameters on the specific speed in the pump mode is given. The ways to determine the height and suction diameter of the impeller are recommended. The choices of the angles on the suction and pressure side of the scapula are substantiated. The cavities for pump-turbine pumps and turbines for various speeds are built. A program for building the meridional projection in the first approximation is created.

Key words: PSPP, pump-turbine, flowing part, meridional projection.

Введение. При постоянном росте общей установленной мощности ТЭС и АЭС, параллельно вводятся высокоманевренные мощности ГАЭС, обеспечивающие регулирование суточных графиков нагрузки энергосистемы. В мире эксплуатируются более 480 ГАЭС установленной мощностью более 160 млн. кВт, более 100 ГАЭС находятся в стадии проектирования. Согласно принятому в 2014 г. плану развития объединенной европейской энергосистемы ENTSO-E «Ten Year Network Development Plan», прогнозируется увеличение процентной доли ГАЭС с 4,7 % до 6 %, а их мощность, в сравнении с 2014 г. (47 млн. кВт), к 2030 возрастет до 70 – 90 млн. кВт[1].

В условиях евроинтеграции Украины, одной из приоритетных задач является интеграция объединенной энергосистемы (ОЭС) Украины с ENTSO-E, что позволит реализовать реформы в электроэнергетике и увеличить экспорт электроэнергии. ОЭС Украины характеризуется значительным превышением базисных мощностей АЕС (25 %), ТЕС и ТЕЦ (63 %) и крайне низким уровнем ГЭС и ГАЭС (10 % вместо необходимых 16 – 20 %), что вызывает трудности в регулировании суточных графиков нагрузки энергосистемы. Для дальнейшего развития и оптимизации работы ОЭС Украины в условиях интеграции с ENTSO-E наиболее эффективным инструментом является ввод высокоманевренных мощностей ГАЭС. При этом, в первую очередь, следует завершить строительство и ввести в эксплуатацию Ташлыкскую ГАЭС (мощностью 906 МВт) и Днестровскую ГАЭС (мощностью 2208 МВт). Имеются проекты Каневской и Закарпатской ГАЭС, общей мощностью 2300 МВт. Ввод этих крупных ГАЭС позволит повысить эффективность и надежность работы ОЭС Украины [1].

В качестве гидросилового оборудования ГАЭС наиболее распространены двухмашинные агрегаты с обратимыми гиромашинами (насос-турбинами). Применение обратимых гидромашин дает возможность снизить общую стоимость ГАЭС не только за счет уменьшения габаритов машинного здания, но и за счет уменьшения на 20 – 30 % стоимости насос-турбинного и гидромеханического оборудования [2]. Создание насос-турбины, которая имела бы высокий КПД при работе, как в насосном, так и в турбинном режиме, имеет определенные сложности, так как это связано с необходимостью одинаковой скорости вращения в обоих режимах, поскольку число оборотов синхронной электромашины определяется числом полюсов и частотой сети. Кроме того, нужно также учитывать, что во многих случаях, особенно на высоконапорных ГАЭС, отметки верхнего и нижнего бьефов значительно изменяются, а это приводит к переменным величинам напора и подтопления насос-турбин.

Постановка задачи. В литературе приводиться множество данных для расчета основных параметров обратимых гидромашин. Но что касается очертаний меридиональной проекции рабочего колеса, то здесь наработок весьма немного. Сложность состоит в том, что обратимая гидромашина должна работать в двух противоположных режимах, обеспечивая требуемые параметры в турбинном и насосном режимах работы. Следует отметить, что необходимость удовлетворения двум режимам работы значительно затрудняет корректировку размеров проточной части насос-турбины, поскольку изменение очертаний элементов в одном режиме оказывает влияние на поток в зоне противоположного режима. Для первого приближения, можно воспользоваться аналитическим методом, совершенствование которого требует проведения численных расчетов, базирующихся на основе математического моделирования с уточнением характеристик полученных на основе пространственного расчета течения жидкости в полости насос-турбины.

© В. Э. Дранковский, М. Ю. Хавренко, А. Л. Шудрик, 2016

Анализ исследований. В работе [3] дается систематизированное исследование конструкции рабочих колес гидротурбин радиально-осевого типа. Она включает анализ формы полости рабочего колеса, её размеров и расположения входной и выходной кромки. Все расчеты ведутся для диаметра $D_1 = 1$м. В данной методике, основные размеры и форма рабочего колеса определяется тремя относительными величинами: оборотностью n_o (она полностью определяет форму полости рабочего колеса), расходом q_{2eo} (определяет положение максимального КПД в зависимости от расхода) и напором h_{1io} (определяет положение максимального КПД в зависимости от напора). В работе [4] предлагается заменить данные относительные величины на принятые в отечественном гидротурбиностроении: *коэффициент быстроходности* n_s, приведенные обороты n'_1 и приведенный расход Q'_1. В работе [5] приводятся уравнения, полученные путем изменения ряда констант в аналогичных уравнениях работы [4]. Уравнения записаны для $D_{нап} = 1$м в функции $n'_{1m}\sqrt{Q'_{1m}}$ и оптимуме турбинного режима работы. В работе [6] предлагается заменить параметр $n'_{1m}\sqrt{Q'_{1m}}$ с небольшой долей расхождения на $n_{sн}/3{,}65$.

Очертания втулки и обода при известных значениях $D_{вс}$ и $b_{нап}$ в практике гидромашиностроения определяются характером меридионального потока, и обязательным условием является плавное изменение величины меридиональной скорости вдоль линии тока. На рис. 1 представлена рекомендуемая зависимость меридиональной скорости от длинны линии тока, при которой сохраняется закон плавного её изменения.

Ниже приведены уравнения, которые определяют форму обода и втулки и их взаимное расположение. Следует отметить, что расчетным режимом для насос-турбины является насосный, поэтому индексы в уравнениях (1) – (5) соответствуют насосам:

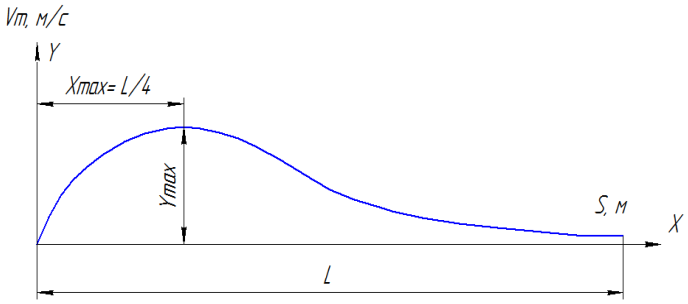


Рис. 1 – Зависимость меридиональной скорости от длины линии тока.

$$b_2 = \frac{n_{sн}}{227015}\cdot(315.5 - 0.274\cdot n_{sн})\cdot D_0\,; \qquad (1)$$

$$y_{\max.вт} = \left(0.45 + \frac{12.62}{0.274\cdot n_{sн} + 12.62}\right)\cdot D_0\,; \qquad (2)$$

$$L_{\max.вт} = \left[1.8 + \frac{n_{sн}}{56750}\left(315.5 - 0.274\cdot n_{sн}\right)\right]\cdot D_0\,; \qquad (3)$$

$$y_{\max.об} = \frac{D_2 - D_0}{2}\,; \qquad (4)$$

$$L_{\max.об} = \left[1.2 + \frac{n_{sн}}{601345}\left(315.5 - 0.247\cdot n_{sн}\right)\right]\cdot D_0\,; \qquad (5)$$

$$x_{\max(вт.об)} = \frac{L_{\max(вт.об)}}{4}\,. \qquad (6)$$

Очертания втулки и обода строятся по уравнению

$$y = y_{\max}\cdot 3.08\left(1 - \frac{x}{L_{\max}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{L_{\max}}\left(1 - \frac{x}{L_{\max}}\right)}\,. \qquad (7)$$

Для построения меридиональных проекций рабочих колес рекомендуется методика [6], где определяющим параметром является коэффициент быстроходности в насосном режиме $n_{sн}$, а не приведенные величины n'_{1m} и Q'_{1m} в турбинном режиме [5]. Это аргументируется тем, что определяющим режимом при проектировании рабочих колес насос-турбин является насосный, что связано с необходимостью создания напора $H_н$. По методике [6] построены меридиональные проекции для насос-турбин; турбин по методике [4] и насосов – [7] на быстроходности $n_{sн} = 91, 99, 115$ и $n_{sн} = 136$. Полости представлены на рис. 2.

Относительный диаметр всасывающей горловины. Поскольку кавитационные качества обратимой гидромашины определяются из условий требуемого коэффициента кавитации в насосном режиме, то относительный диаметр $D'_{вс}$ следует определять из условий насосного режима. На рис. 3 представлены зависимости $D_{вс}/D_{нап}$ для насос-турбин [6], D_0/D_2 для насосов [7] и D_2/D_1 для турбин [4].

При построении полостей, представленных на рис. 2, использовалась формула из [8]

$$D_0 = 0.284 + \left(0.235\cdot 10^{-2}\cdot n_{sн}\right). \qquad (8)$$

В [9] приведена другая зависимость, которая дает немного меньшие значения:

$$D_0 = 4.25\cdot 10^{-2}\cdot n_{sн}^{0.53}\,. \qquad (9)$$

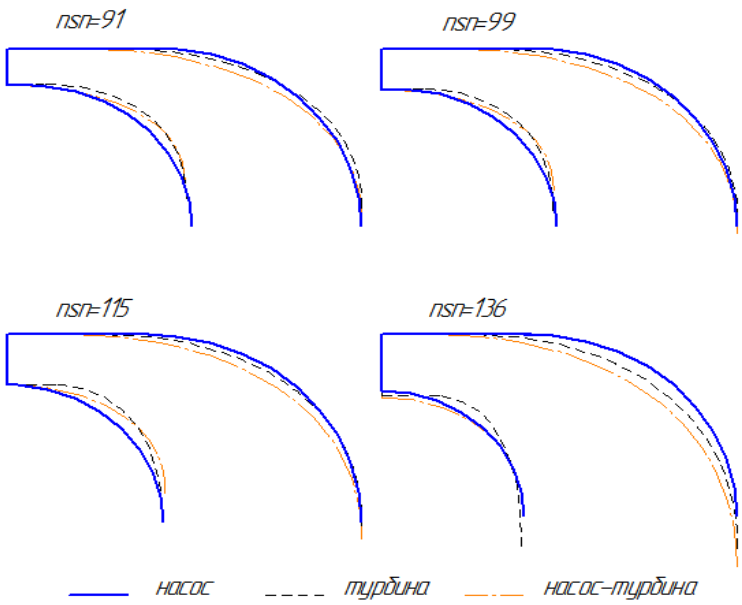


Рис. 2 – Меридиональные проекции рабочих колес насоса, турбины и насос-турбины.

Относительная ширина колеса. Относительная ширина колеса $b'_{нап}$ вычисляется также по рекомендациям для насосов [9]. На рис. 4 представлены зависимости $b_{нап}/D_{нап}$ для насос-турбин [6], b_1/D_2 для насосов [7] и b_2/D_1 для турбин [4].

Анализ экспериментальных данных показывает [8], что опытная зависимость $b_{нап} = f(n_{sн})$ не имеет четкой однозначности, и область разброса достаточно широка, что связано с эксплуатационными режимами работы обратимой гиромашины в диапазоне напоров $H_{\min}/H_{\max}$. В [9] приводится формула, которая, по словам автора, обеспечивает удовлетворительную сходимость с опытом, но в отличие от формулы (1), дает немного большие значения:

$$b_{нап} = 0.07\left(n_{sн}/100\right)^{4/3}. \qquad (10)$$

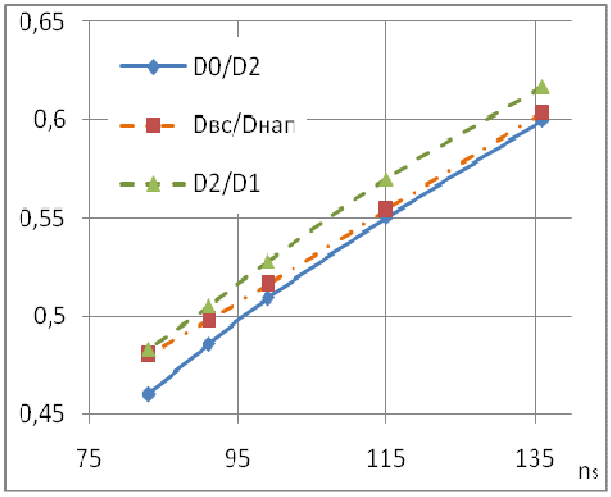


Рис. 3 – Зависимости $D_{вс}/D_{нап}$ для насос-турбин, D_0/D_2 для насосов и D_2/D_1 для турбин.

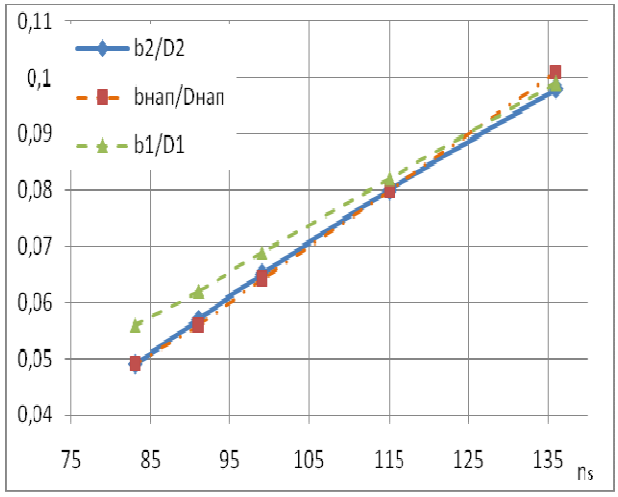


Рис. 4 – Зависимости $b_{нап}/D_{нап}$ для насос-турбин, b_1/D_2 для насосов и b_2/D_1 для турбин.

Углы наклона лопасти и положение всасывающей кромки. Выбор угла на всасывающей стороне $\beta_{вс}$ основывается на рекомендациях для насосов. Это связано с допустимыми значениями углов атаки в насосном режиме, которые определяются, главным образом, опасностью кавитационной эрозии и отрывом потока в колесе при возникновении противотока во всасывающем сечении. Исходя из многолетнего опыта насосостроения [7, 10], в первом приближении угол $\beta_{вс0}$ (угол наклона лопасти у покрывающего диска) можно принять равным $17^\circ \div 20^\circ$. На остальных линиях тока необходимо соблюдать условие [9]:

$$tg\beta_{вci} = tg\beta_{вc0} \le \frac{v_{m.вci}}{v_{m.вc0}} \le \frac{r_{m.вc0}}{r_{m.вci}}, \qquad (11)$$

где $v_{m.вc0}$, $v_{m.вci}$ – меридиональные скорости у покрывающего диска и на соответствующем участке; $r_{m.вc0}$, $r_{m.вci}$ – радиусы входной кромки у покрывающего диска и у соответствующей линии тока.

Что же касается выбора угла на напорной стороне $\beta_{нап}$, то здесь мнения специалистов различаются. Согласно [9], для обратимых гидромашин, необходимо выбор угла $\beta_{нап}$ производить согласно рекомендациям для насосов [7], а именно $\beta_{нап} = 18^\circ \div 20^\circ$, а при $n_{sн} \le 100$, может доходить до 30° и больше. Но, согласно теоретическому исследованию [11], при $n_{sн} \le 250$ нецелесообразно принимать $\beta_{нап}$ по рекомендациям для насосов, по-

скольку с уменьшением $n_{sн}$ растут отрицательные углы натекания, следствием чего будут дополнительные потери в турбинном режиме работы. Как решение проблемы, автор рекомендует уменьшать значения углов $\beta_{нап}$ при $n_{sн} \leq 250$. Результаты расчетов [11] не выходят из границ принятых в насосной практике, несмотря на уменьшение углов $\beta_{нап}$.

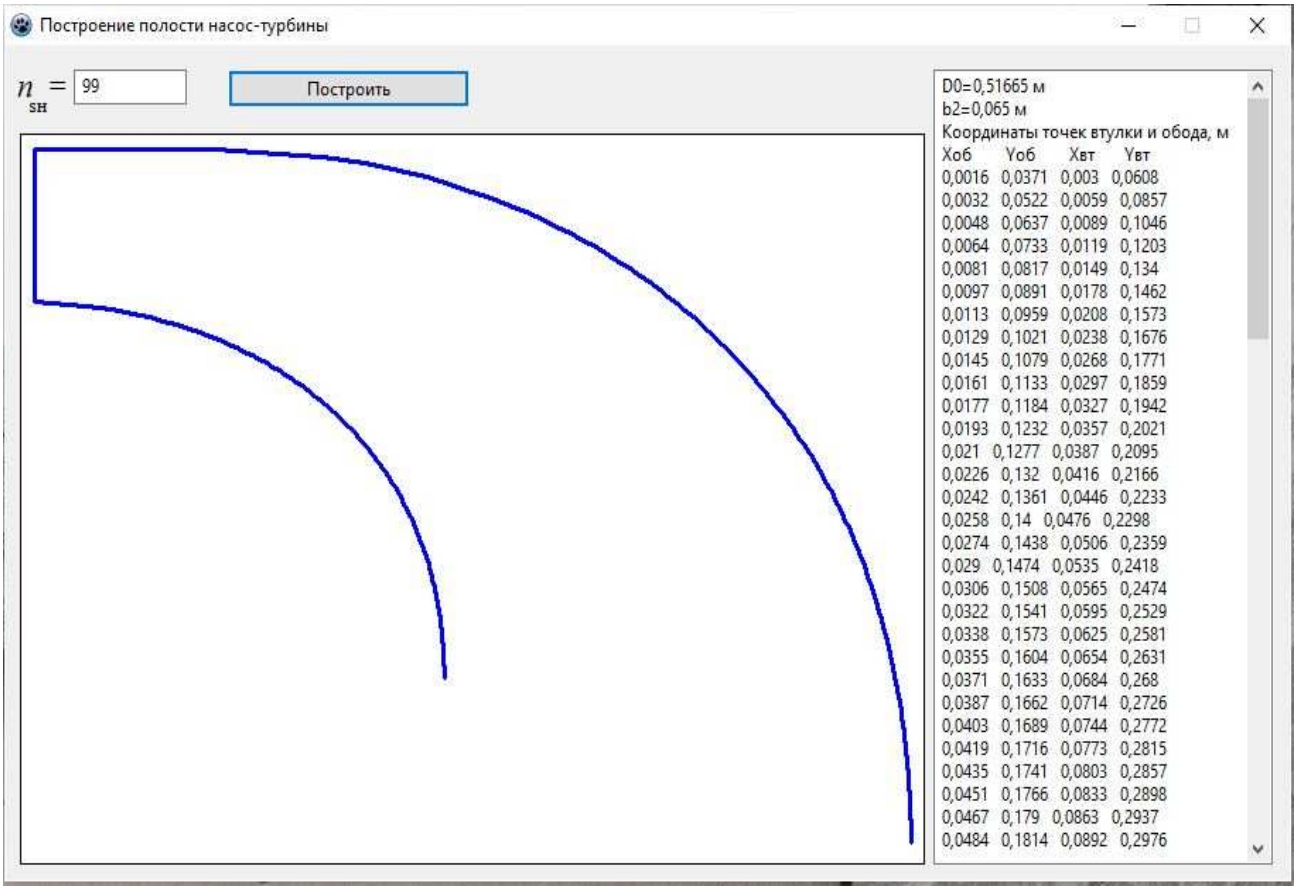


Рис. 5 – Графический интерфейс программы «Полость».

При построении очертаний всасывающей кромки, в первом приближении, следует соблюдать два основных условия. Первое, что нужно учитывать, это необходимость плавного изменения угла $\beta_{всi}$ для каждой линии тока вдоль всасывающей кромки согласно формуле (11). Вместе с тем, следует добиваться небольшого изменения угла. Второе условие, которое необходимо соблюдать, это получение примерно одинакового статического момента меридиональной проекции втулочного профиля и периферийного:

$$S = \int_{r_{вс}}^{r_{нап}} r ds .$$

Это необходимо для того, чтобы обеспечить одинаковое равенство перепадов давления на профилях [9].

Результаты работы. Для повышения эффективности проектирования проточной части обратимой гидромашины была реализована программа «Полость», выполняющая построения очертаний меридианной проекции рабочего колеса в зависимости от коэффициента быстроходности в насосном режиме $n_{sн}$. Построения производятся для напорного диаметра $D_{нап} = 1$м и являются первым приближением. На выходе имеем очертания меридиональной проекции, относительный диаметры $D_{вс}$, относительную ширину колеса $b_{нап}$ и координаты точек для построения основного и покрывающего диска. Графический интерфейс программы представлен на рис. 5.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективным дальнейшее совершенствование аналитической методики определения меридиональной проекции рабочего колеса насос-турбины, которая удобна для выполнения расчётов первого приближения. Для этого требуется проведение численных расчетов, базирующихся на методах их математического моделирования с уточнением характеристик, полученных на ос-

нове пространственного расчета течения жидкости в её полости.

Выводы. Рассмотрен и проанализирован метод аналитического определения меридиональной проекции рабочего колеса обратимой гидромашины. Приведенные рекомендации для определения угла на напорной стороне $\beta_{нап}$ показывают наличие различных подходов при решении данного вопроса. Реализована программа для построения очертаний меридианной проекции рабочего колеса насос-турбины в зависимости от коэффициента быстроходности в насосном режиме $n_{sн}$.

Список литературы

1. *Ландау Ю. А., Осадчий С. Д.* Значение ГАЭС на современном этапе развития электроэнергетики // Вестник национального университета водного хозяйства. – 2015. – № 3 (71). – С. 185 – 189.
2. *Синюгин В. Ю., Магрук В. И. , Родионов В. Г.* Гидроаккумулирующие электростанции в современной электроэнергетике. – М. : ЭНАС, 2008. – 352 с.
3. *Bovet Th.* Contribution a l'etude du trance d'aubage d'une turbine a reaction du tupe Francise // Information technique Charmilles. – 1963. – № 9. – P. 47 – 70.
4. *Барлит В. В., Бородаевский В. В., Душин В. А.* Пути улучшения энергетических и кавитационных показателей высоконапорных радиально-осевых рабочих колес на напоры 400–600 м // Гидравлические машины. – 1975. – № 9. – С. 3 – 11.
5. *Федулов Ю. И., Дедков В. Н.* Расчет полости рабочего колеса радиально-осевых обратимых гидромашин // Проблемы машиностроения. – 1984. – № 22. – С. 20 – 32.
6. *Алексапольский Д. Я.* К профилированию полости рабочего колеса радиально-осевой насос-турбины // Гидравлические машины. – 1989. – № 23. – С. 115 – 117.
7. *Михайлов А. К., Малюшенко В. В.* Лопастные насосы. Теория, расчет и конструирование. – М. : Машиностроение, 1977. – 288 с.
8. *Siervo F., Lugaresi A.* Modern trends in selecting and designing reversible Francis pump–turbine // Water Power & Dam Construction. – May 1980. – P. 33 – 42.
9. *Грянко Л. П., Зубарев Н. И., Умов В. А., Шумилин С. А.* Обратимые гидромашины. – Л. : Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1981. – 255 с.
10. *Ломакин А. А.* Центробежные и осевые насосы. – М. : Машиностроение, 1966. – 357 с.
11. *Алексапольский Д. Я.* К вопросу выбора угла лопасти на внешнем диаметре рабочего колеса насос-турбины радиально осевого типа // Гидравлические машины. – 1980. – № 14. – С. 3 – 9.

References (transliterated)

1. Landau Ju. A., Osadchiy Ju. A. Znachenie GAJeS na sovremennom yetape razvitiya yelektroenergetiki [The value of PSP at the present stage of development of the electric power]. *Vestnik nacional'nogo universiteta vodnogo hozjajstva* [Bulletin of National University of Water Management]. Rovno, 2015, vol. 71, no. 3, pp. 185–189.
2. Sinyugin V. Ju., Magruk V. I., Rodionov V. G. *Gidroakkumuliruyushhie yelektrostantsii v sovremennoy yelektroenergetike* [Pumped Storage Power Station in modern electric power industry]. Moscow, JeNAS Publ., 2008. 352 p.
3. *Bovet Th.* Contribution a l'etude du traяcnce d'aubage d'une turbine a reaction du tupe Francise. *Information technique Charmilles*. 1963, no. 9, pp. 47–70.
4. Barlit V. V., Borodaevskiy V. V., Dushin V. A. Puti uluchsheniya energeticheskikh i kavitacionnykh pokazateley vysokonapornykh radial'no-osevykh rabochikh koles na napory 400–600 m [Ways to improve the energy and cavitation performance of high-pressure radial-axial impellers for heads of 400-600 m.]. *Gidravlicheskie mashiny* [Hydraulic machines]. 1975, no. 9, pp. 3–11.
5. Fedulov Ju. I., Dedkov V. N. Raschet polosti rabochego kolesa radial'no-osevykh obratimykh gidromashin [Calculation of the cavity of the Francis reversible hydraulic machine impeller]. *Problemy mashinostroenija* [Engineering Challenges]. Kharkiv, 1984, no. 22, pp. 20–32.
6. Aleksapol'skiy D. Ya. K profilirovaniyu polosti rabochego kolesa radial'no-osevoy nasos-turbiny [On profiling the cavity of the radial-axial turbine pump impeller]. *Gidravlicheskie mashiny* [Hydraulic machines]. 1989, no. 23, pp. 115–117.
7. Mikhaylov A. K., Malyushenko V. V. *Lopastnye nasosy. Teoriya, raschet i konstruirovanie* [Vane pumps. Theory, calculation and designing]. Moscow, Mashinostroenie, Publ., 1977. 288 p.
8. Siervo F., Lugaresi A. Modern trends in selecting and designing reversible Fransis pump–turbine. *Water Power & Dam Construction*. 1980, pp. 33–42.
9. Gryanko L. P., Zubarev N. Y., Umov V. A., Shumilin S. A. *Obratimye gidromashiny* [Reversible hydraulic machines]. Leningrad, Mashinostroenie, Leningr. otd-nie, Publ., 1981. 255 p.
10. Lomakin A. A. *Centrobezhnye i osevye nasosy.* [Centrifugal and axial pumps]. Moscow, Mashinostroenie, Publ., 1966. 357 p.
11. Aleksapol'skiy D. Ja. K voprosu vybora ugla lopasti na vneshnem diametre rabochego kolesa nasos-turbiny radial'no osevogo tipa [On the problem of choosing the angle of the blade at the outer diameter of the impeller of a radial axial pump-turbine]. *Gidravlicheskie mashiny* [Hydraulic machines]. 1980, no. 14, pp. 3–9.

Поступила (received) 15.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

До розрахунку проточних частин високонапірних радіально-осьових оборотних гідромашин / В. Е. Дранковський, М. Ю. Хавренко, О. Л. Шудрик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 31 – 36. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

К расчету проточных частей высоконапорных радиально-осевых обратимых гидромашин / В. Э. Дранковский, М. Ю. Хавренко, А. Л. Шудрик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 31 – 36. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

On calculating flowing parts of high-pressure reversible Francis pump-turbine / V. E. Drankovskij, M. Ju. Khavrenko, A. L. Shudrik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 31 – 36. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Дранковський Віктор Едуардович – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 651-48-84; e-mail: drankovskiy@rambler.ru.

Дранковский Виктор Эдуардович – кандидат технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 651-48-84; e-mail: drankovskiy@rambler.ru.

Drankovskij Viktor Eduardovich – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (050) 651-48-84; e-mail: drankovskiy@rambler.ru.

Хавренко Михайло Юрійович – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (050) 056-67-94; e-mail: khavrenkom@mail.ru.

Хавренко Михаил Юрьевич – аспирант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; тел.: (050) 056-67-94; e-mail: khavrenkom@mail.ru.

Khavrenko Mihail Juryevich – Graduate student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; tel.: (050) 056-67-94; e-mail: khavrenkom@.mail.ru.

Шудрик Олександр Леонідович – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 454-03-87; e-mail: sasha.okht.ua@mail.ru.

Шудрик Александр Леонидович – аспирант, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 454-03-87; e-mail: sasha.okht.ua@mail.ru.

Shudrik Aleksandr Leonidovich – Graduate student, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; Kharkov; tel.: (095) 454-03-87; e-mail: sasha.okht.ua@mail.ru.

УДК 519.6 + 624.01

Д. Г. ЗЕЛЕНЦОВ, О. Р. ДЕНИСЮК

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ КОРРОЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС В ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Запропоновано алгоритм розв’язання систем диференціальних рівнянь, які модулюють процес зміни у часі напружено-деформованого стану статично невизначених шарнірно-стержневих конструкцій під впливом агресивних середовищ. Алгоритм заснований на декомпозиції системи – перетворенні вихідних рівнянь шляхом введення в них функцій, що описують вплив окремих рівнянь, та подальшому розв‘язанні одного з них. Результатом є визначення довговічності кородуючих конструкцій. Результати чисельних експериментів підтверджують ефективність и точність алгоритму.

Ключові слова: агресивне середовище, процес корозійного деформування, система диференціальних рівнянь, декомпозиційний метод.

Предлагается алгоритм решения систем дифференциальных уравнений, моделирующих процесс изменения во времени напряжённо-деформированного состояния статически неопределимых шарнирно-стержневых конструкций вследствие воздействия агрессивных сред. Алгоритм основан на декомпозиции системы – преобразовании исходных уравнений путём введения в них функций, описывающих влияние остальных уравнений, и последующем решении одного из этих уравнений. Результатом является определение долговечности корродирующих конструкций. Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность и точность алгоритма.

Ключевые слова: агрессивная среда, процесс коррозионного деформирования, система дифференциальных уравнений, декомпозиционный метод.

The paper proposes an algorithm for solving systems of differential equations that model the process of change in time of stress-strain state of statically indeterminate hinged-rod structures due to exposure to aggressive media. The algorithm is based on decomposing the system of the differential equations namely transforming the original equations by introducing into them the functions describing the influence of the remaining equations and subsequent solving one of these equations. The result is determination of the durability of corroding structures which is the time of work until the exhaustion of bearing capacity. The results of numerical experiments confirm the efficiency and accuracy of the algorithm.

Key words: aggressive environment, process of corrosive deformation, system of differential equations, decomposition method.

© Д. Г. Зеленцов, О. Р. Денисюк, 2016

Введение. При решении практических задач, связанных с моделированием процесса коррозионного деформирования и прогнозированием долговечности металлических конструкций, функционирующих в агрессивных средах (АС), особое значение приобретает проблема точности и эффективности вычислительных методов и алгоритмов. В общем случае моделирование процесса изменения напряжённо-деформированного состояния конструкции во времени вследствие происходящих в её элементах физико-химических процессов предполагает численное решение *задачи Коши* для систем дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих процесс накопления геометрических повреждений. Повышение точности за счёт увеличения количества узлов временной сетки приводит к резкому увеличению вычислительных затрат. В настоящей работе предлагается и обосновывается алгоритм решения СДУ, основанный на декомпозиции системы и позволяющий достигнуть высокой точности численного решения при минимальных вычислительных затратах.

Анализ последних исследований. На начальном этапе развития механики корродирующих конструкций, как самостоятельного направления строительной механики, проблеме анализа точности получаемых результатов в большинстве работ внимания практически не уделялось. В лучшем случае, указывался лишь метод решения СДУ. В частности, в монографии [1] в разделе, посвящённом решению задачи долговечности стержневых элементов при одноосном напряженном состоянии, указывается, что «для решения применяются или *метод Эйлера* с итерациями, или методы Рунге-Кутта, или Кутта-Мерсона». Там же, при решении задачи изгиба балки с учётом воздействия АС: «для решения используется численный подход». Такое пренебрежение к численным методам, и, тем более, оценке их точности, объясняется, видимо, тем, что авторов интересовали лишь качественные оценки.

Одной из первых работ, в которой приводятся рекомендации по выбору параметров численного решения СДУ при исследовании корродирующих пластин, следует считать [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. В ней предлагалось принимать длину шага интегрирования по времени не более 1/200 отношения толщины пластины к скорости коррозии при отсутствии напряжений. Обобщить эти рекомендации на случай стержневых конструкций не представляется возможным, поскольку они не учитывают такие важные факторы, влияющие на погрешность численного решения, как периметр сечения стержня и значение напряжения в начальный момент времени. Кроме того, следование указанным рекомендациям может приводить к чрезмерным вычислительным затратам при исследовании многоэлементных конструкций, особенно при решении оптимизационных задач.

В более поздних работах повышение эффективности и точности вычислительных алгоритмов осуществлялось посредством их модификации, в том числе – с использованием аналитических зависимостей между параметрами сечения и агрессивной среды, напряжением, предельным значениям глубины коррозии и временем [3 – 5]. Однако количественных оценок погрешностей решения в этих работах приведено не было.

Очевидно, одной из первых работ, посвящённой повышению эффективности численного интегрирования систем дифференциальных уравнений, следует считать [6]. В данной работе применялся *метод динамического программирования* к задаче минимизации числа арифметических операций при интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений n – го порядка за счёт регулирования длины шага интегрирования.

Более перспективным представляется подход, основанный на формализации информации о влиянии на погрешность решения (помимо величины шага интегрирования) таких факторов, как начальные значения напряжений в элементе, для стержневых конструкций – характеристики его сечений (формы, площади, периметра) и параметров агрессивной среды. Такая формализация была осуществлена с помощью *искусственных нейронных сетей* (ИНС) [7, 8] при исследовании шарнирно-стержневых конструкций (ШСК).

При очевидных преимуществах данного подхода остался открытым вопрос о влиянии изменения во времени внутренних усилий в стержневых элементах на точность получаемого решения.

Обоснование и описание алгоритма. Математические модели поведения многоэлементных металлических конструкций, эксплуатирующихся в агрессивных средах и подвергающихся коррозионному разрушению, включают в себя две связанные между собой группы уравнений. Первая представляет собой уравнения механики деформированного твёрдого тела – *уравнения равновесия* и *совместности деформаций*, *соотношения Коши* и физические соотношения (для упругих тел – *закон Гука*).

Для шарнирно-стержневых конструкций матрица жесткости конечного элемента имеет вид [9]:

$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где E, A, L α – модуль упругости, площадь сечения, длина и угол наклона стержневого элемента.

Элементы матрицы жесткости конструкции определяются путем суммирования соответствующих элементов матриц жесткостей элементов по алгоритму, представленному в [9].

Узловые перемещения определяются из уравнения:

$$\bar{R} = K^{-1}\cdot\bar{u}\,, \quad (2)$$

где $\overline{R}, \overline{u}$ – векторы узловых нагрузок и перемещений. Напряжения в стержневых элементах определяются через удлинения стержней, которые, в свою очередь вычисляются с учётом перемещений их узлов.

Поскольку площади сечений элементов изменяются в процессе коррозионного износа, то элементы матрицы жесткости конструкции, а, следовательно, и напряжения в элементах, являются переменными во времени.

Площади элементов являются функциями глубин коррозионного поражения δ. Определение этих параметров предполагает решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \cdot \Phi\left(\sigma_i\left(\overline{\delta}\right)\right); \ \delta_i\Big|_{t=0} = 0; \ i = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Здесь δ_i – глубина коррозионного поражения (параметр повреждённости); t – время; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; N – количество стержневых элементов.

Функции правых частей СДУ $\Phi(\sigma)$ зависят от уровня механических напряжений. Поскольку процедура определения напряжений в элементах является вычислительным алгоритмом, система (3) может быть решена только численно, причём вычисление напряжений осуществляется в каждом узле временной сетки. Именно это определяет уровень вычислительных затрат, который нелинейно возрастает при увеличении размерности задачи и, как следствие, размерности СДУ.

Некоторые наиболее распространённые модели коррозионного разрушения приведены, например, в [1]. Большое количество таких моделей делает проблематичным создание единого подхода к решению задачи определения долговечности корродирующих конструкций. В [5] приводится обоснование возможности использования для исследований модели, предложенной в [10] и имеющей вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot (1 + k\sigma), \tag{4}$$

где k – коэффициент влияния напряжения на скорость коррозионного процесса.

В данной работе будет использована эта модель.

Очевидно, на изменения напряжений в стержневых элементах будут влиять два фактора: изменение площади сечений и изменение внутренних усилий. Первый фактор учесть относительно несложно, поскольку величина коррозионного поражения в элементе, от которого и зависит площадь сечения, определяется величиной напряжения только в этом элементе. При постоянном значении усилий СДУ вида (3) при этом вырождается в простую совокупность несвязанных дифференциальных уравнений, отличающихся лишь параметрами:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \cdot \left[1 + k\sigma_i\left(A_i\left(\delta_i\right), Q_i\right)\right]; \ \delta_i\Big|_{t=0} = 0; \ i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Долговечность любого конструкционного элемента может быть определена аналитически, то есть точно (в рамках принятой модели коррозионного износа). Таким образом, решение задачи прогноза долговечности статически определимых шарнирно-стержневых конструкций сводится к решению независимых дифференциальных уравнений. Это решение может также служить приближённой оценкой долговечности статически неопределимых конструкций. Его погрешность будет определяться степенью изменения усилий в стержневых элементах.

В статически неопределимых конструкциях усилие в данном элементе зависит от изменяющихся во времени жесткостных характеристик всех элементов. Именно это определяет связь между уравнениями системы (3):

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \cdot \left[1 + k\sigma_i\left(A_i\left(\delta_i\right), Q_i\left(\overline{\delta}\right)\right)\right]; \ \delta_i\Big|_{t=0} = 0; \ i = \overline{1, N}. \tag{6}$$

На характер изменения усилий во времени кроме параметров коррозионного износа оказывает влияние большое количество факторов, в том числе топология конструкции и её начальные геометрические параметры, граничные условия и условия нагружения, количество элементов системы. Идея предлагаемого авторами алгоритма заключается в построении функции изменения усилия во времени, что позволит рассмотреть вместо СДУ (6) отдельное дифференциальное уравнение, поскольку эта функция даст возможность учесть влияние остальных уравнений.

Если зависимость усилия в элементе, который определяет долговечность конструкции в целом, от времени будет формализована, то вместо системы уравнений (3) достаточно получить численное решение единственного уравнения, причём, с любой степенью точности, поскольку для вычисления напряжений уже не требуется решать задачу определения напряжённого состояния для всей конструкции. Это позволит многократно снизить вычислительные затраты, а расхождение между гипотетическим точным решением СДУ (3) и решением одного уравнения будет определяться только погрешностью аппроксимации зависимости усилия от времени. С другой стороны, функция, аппроксимирующая зависимость внутреннего усилия в стержне от времени, может быть построена только в результате решения СДУ вида (3).

Исходя из этого, решение задачи предлагается проводить в два этапа.

Первый этап предполагает численное решение СДУ с минимальным количеством узловых точек для определения номера элемента, определяющего долговечность конструкции, и построения для него аппроксимирую-

щей функции изменения усилия во времени. В результате реализации первого этапа определяется приближённое значение долговечности конструкции $\tilde{t}$.

Результаты численных экспериментов позволили сделать вывод о том, что полином третьей степени весьма точно аппроксимирует закон изменения внутреннего усилия. Следовательно, на временном интервале $[0;\tilde{t}]$ достаточно четырёх узловых точек. Таким образом, на первом этапе задача определения напряжённого состояния решается только четыре раза.

На втором этапе происходит преобразование дифференциального уравнения, описывающего коррозионный процесс в элементе с наименьшей долговечностью, путём ввода в его правую часть полученной аппроксимирующей функции $Q = Q(t)$ и его численное решение с необходимой точностью. Его решением будет уточнённое значение долговечности конструкции.

Остановимся на алгоритме численного решения задачи Коши для СДУ вида (3).

В большинстве известных работ для решения СДУ использовались одношаговые *численные методы типа Рунге-Кутты*, чаще всего – *метод Эйлера*. Недостатки этих методов, помимо низкой эффективности, достаточно полно изложены в [5].

Главным неудобством используемых методов является то, что абсцисса точки пересечения графика функции $\sigma = \sigma(t)$ с линией $\sigma^* = \sigma^*(t)$ неизвестна; её определение является результатом решения задачи прогноза долговечности. Произвольное назначение длины шага интегрирования (расстояния между узлами временной сетки) не только не позволяет контролировать точность численного решения, но и не всегда обеспечивает выполнение условия его существования для всех возможных параметров СДУ.

В настоящей статье для численного решения СДУ (3) предлагается использовать *модифицированный алгоритм метода Эйлера* с переменным шагом интегрирования по аргументу (рис. 1). Предлагается задавать приращение функции $\Delta\sigma_S = const$, а соответствующее значение приращения аргумента Δt_S определять по формуле, вывод которой приведен в [5]:

$$\Delta t_S = \frac{\Delta\delta_S}{v_0} - \frac{2kQ}{v_0 d}\ln\left\{\frac{(2a\cdot\Delta\delta_S + b - d)(b+d)}{(2a\cdot\Delta\delta_S + b + d)(b-d)}\right\}. \quad (7)$$

В (7) приняты следующие обозначения: a – коэффициент формы сечения; s – номер временного интервала; Q – величина осевого усилия; k – коэффициент влияния напряжения на скорость коррозии; $b = -P_{S-1}$; $c = A_{S-1} + kQ$; $d = \sqrt{b^2 - 4ac}$; A_{S-1}, P_{S-1} – площадь и периметр сечения в $(s-1)-$й момент времени. Приращение параметра повреждённости $\Delta\delta_S$, соответствующее приращению напряжения $\Delta\sigma_S$, определяется как решение уравнения:

$$A_{S-1} - P_{S-1}\cdot\Delta\delta_S + a\cdot\Delta\delta_S^2 = \frac{Q}{\sigma_{S-1} + \Delta\sigma_S}. \quad (8)$$

В качестве параметра вычислительной процедуры выступает количество равноотстоящих узловых точек интервала $[\sigma_0;\sigma^*]$. В этом случае условие существования численного решения выполняется для всей области определения параметров СДУ.

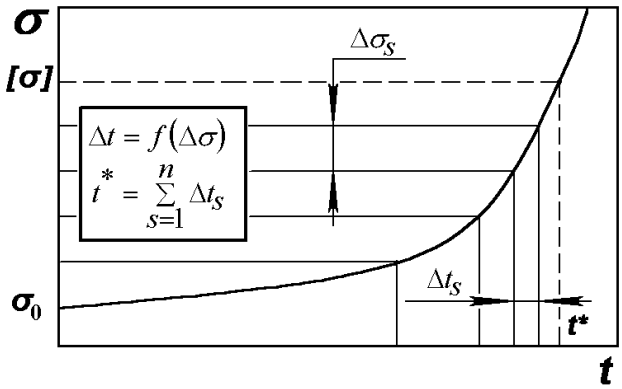


Рис. 1 – Графическая иллюстрация вычислительного алгоритма.

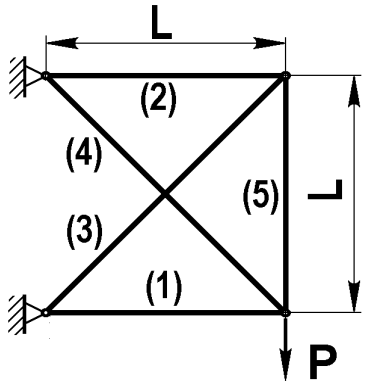


Рис. 2 – Расчётная схема ШСК.

Численная иллюстрация. Для иллюстрации предложенного метода в качестве модельной конструкции рассмотрим статически неопределимую 5-стержневую ферму (рис. 2). Параметры конструкции и агрессивной

среды принимались следующие: $L = 100$ см; $P = 200$ кН; $[\sigma] = 240$ МПа; $v_0 = 0{,}1$ см/год; $k = 0{,}003$ МПа$^{-1}$. Сечения элементов соответствуют стандартным уголковым профилям: (1) – 160×100×10; (2) и (3) – 100×63×8; (4) – 110×110×8 и (5) – 180×110×12.

Для получения эталонного решения использовался метод Эйлера с пересчётом. Расстояние между узлами временной сетки принималось равным $\Delta t = 0{,}005 \cdot \tilde{t}$, где $\tilde{t} = \min(\tilde{t}_1; \tilde{t}_2; ...; \tilde{t}_5)$ – приближённое значение долговечности конструкции; $\tilde{t}_1; \tilde{t}_2; ...; \tilde{t}_5$ – значения долговечности стержневых элементов, найденные с использованием формул (7) и (8) при $\Delta\sigma = [\sigma] - \sigma_0$ и постоянном значении внутренних усилий. Найденное таким образом значение определялось долговечностью четвёртого элемента и составило $\tilde{t} = 2{,}512$ года, расстояние между узлами $\Delta t = 0{,}0125$ года.

Абсолютные значения усилий и напряжений (в скобках) в элементах фермы в различные моменты времени представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты решения методом Эйлера с постоянным шагом по времени

t, *лет*	Q_i, кН (σ_i, МПа)				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,0	144,69 (57,88)	55,16 (44,49)	55,14 (44,47)	77,90 (45,94)	205,01 (61,46)
0,5	146,44 (66,83)	53,40 (50,66)	53,37 (50,64)	75,39 (52,23)	207,54 (69,74)
1,0	148,71 (79,24)	51,10 (58,96)	51,07 (58,93)	72,13 (60,69)	210,82 (79,98)
1,5	151,83 (97,76)	47,93 (70,82)	47,90 (70,78)	67,63 (72,79)	215,35 (94,66)
2,0	156,52 (128,93)	43,18 (89,52)	43,14 (89,45)	60,89 (91,90)	222,17 (116,84)
2,5	164,77 (195,15)	34,80 (124,93)	34,77 (124,78)	49,03 (128,30)	234,19 (155,47)
2.66	168,79 (233,86)	30,71 (143,44)	30,69 (143,23)	43,24 (147,65)	240,08 (173,85)

Как следует из приведенных данных, в элементах (2), (3) и (4) происходит уменьшение внутренних усилий, а в элементах (1) и (5) – их увеличение. Поэтому в действительности долговечность конструкции будет определять первый элемент.

Эталонное значение долговечности составило $t_{et} = 2{,}67596$ года. Уточнение решения для трёх последних узлов временной сетки осуществлялось методом парабол. Для получения эталонного решения задача расчёта напряжённого состояния конструкции решалась 214 раз.

В табл. 2 приведены абсолютные значения усилий и напряжений (в скобках) в элементах конструкции, полученные при реализации первого этапа декомпозиционного алгоритма.

Изменение усилий в первом элементе конструкции аппроксимировалось полиномом третьей степени, при этом использовались данные первых четырёх строк таблицы.

Таблица 2 – Результаты решения методом Эйлера с переменным шагом по времени

t, *лет*	Q_i, кН (σ_i, МПа)				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,0	144,69 (57,88)	55,16 (44,49)	55,14 (44,47)	77,90 (45,94)	205,01 (61,46)
1,685	153,00 (103,09)	46,75 (74,34)	46,72 (74,29)	65,96 (76,34)	217,76 (99,05)
2,339	160,37 (152,48)	39,27 (103,41)	39,24 (103,31)	55,35 (106,02)	227,76 (133,03)
2,681	167,38 (208,77)	32,15 (133,05)	32,12 (132,88)	45,28 (136,49)	237,98 (164,89)
2,904	174,93 (281,64)	24,48 (167,60)	25,45 (166,88)	34,43 (172,16)	249,04 (198,09)

На втором этапе численно решалось дифференциальное уравнение, описывающее процесс коррозионного разрушения в первом элементе, при формализованной зависимости внутреннего усилия от времени:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot \left(1 + k\frac{Q_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3}{A_0 - P_0\delta + a\delta^2}\right), \tag{9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – коэффициенты полинома; A_0, P_0 – площадь и периметр сечения при $t = 0{,}0$.

Численное решение уравнения (9) было получено при использовании метода Эйлера с пересчётом при $\Delta t = 0,0125$ года. Полученное значение долговечности составило $t^* = 2,69374$ года. Погрешность решения задачи относительно эталонного решения составила 0,66 %. При этом задача расчёта напряжённого состояния решалась пять раз, то есть вычислительные затраты уменьшились более чем в 40 раз.

В табл. 3 приведены результаты решения задачи прогноза долговечности для пятистержневой фермы с элементами одинакового сечения.

Таблица 3 – Результаты решения задачи прогноза долговечности

Профиль	t_{et}, лет	n	t^*, лет	ε %
Уголок 125×125×9	2,32173	206	2,30548	0,70
Уголок 140×90×10	2,59140	206	2,57318	0,70
Двутавр 160×81	1,57270	207	1,56206	0,68
Швеллер 180×70	1,66593	206	1,65450	0,69
Швеллер 200×76	1,83823	205	1,82510	0,71

В столбцах таблицы указаны профили стержней, эталонное значение долговечности, количество шагов интегрирования СДУ при получении эталонных решений, значение долговечности, полученное с помощью декомпозиционного алгоритма, и погрешность этого решения относительно эталона. Из приведенных данных следует, что показатель эффективности алгоритма не зависит от формы и размеров сечений стержневых элементов.

Выводы и перспективы. Приведенный в статье декомпозиционный алгоритм решения систем дифференциальных уравнений, моделирующих процесс коррозионного деформирования шарнирно-стержневых конструкций, может быть обобщён на другие классы конструкций. Наиболее перспективным использование данного алгоритма, по мнению авторов, представляется при решении задач оптимального проектирования конструкций при ограничениях по долговечности. В этом случае задача определения долговечности решается на каждой итерации поиска оптимального проекта, что приводит к большим вычислительным затратам. Применение декомпозиционного алгоритма позволит решить задачу с минимальными вычислительными затратами и высокой точностью.

Список литературы

1. *Петров В. В., Овчинников И. Г., Шихов Ю. М.* Расчёт элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов : Сарат. ун-т, 1987. – 288 с.
2. *Карпунин В. Г., Клещев С. И., Корнишин М. С.* К расчёту пластин и оболочек с учетом общей коррозии // Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Тбилиси : Мецниереба, 1975. – Т. 1. – С. 166 – 174.
3. *Зеленцов Д. Г.* Об одном алгоритме решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений. – Придніпровський науковий вісник. Фізико-математичні науки. – 1998. – № 112 (179). – С. 31 – 37.
4. *Zelentsov D. G., Pochtman Yu. M.* Use of the analytical formulas of longevity in problems of optimal design of multielements structures under corrosion wear // Lightweight Structures in Civil Engineering. – Warsaw – Cracow, 2000. – P. 156 – 157.
5. *Зеленцов Д. Г., Ляшенко О. А., Науменко Н. Ю.* Информационное обеспечение расчётов корродирующих объектов. Математические модели и концепция проектирования систем. – Днепропетровск : УГХТУ, 2012. – 264 с.
6. *Коротченко А. Т.* О применении метода динамического программирования к оптимальному интегрированию системы дифференциальных уравнений // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всесоюзн. межвуз. сб. – Горький : ГГУ, 1976. – Вып. 4. – С.95 – 97.
7. *Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И.* Использование нейронных сетей при решении задач долговечности корродирующих конструкций // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М.Остроградського. – Кременчук : КрНУ, 2011. – Вип. 3 (68), част. 1. – С. 24 – 27.
8. *Зеленцов Д. Г., Науменко Н. Ю., Новикова Л. В.* Алгоритм управления точностью численного решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 5 (82). — С. 71 – 79.
9. *Горбачев К. П.* Метод конечных элементов в расчетах прочности. – Л. : Судостроение, 1985. – 156 с.
10. *Долинский В. М.* Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1975. – Вып. 21. – С.16 –19.

References (transliterated)

1. Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Shikhov Yu. M. *Raschyot ehlementov konstruktsiyi, vzaimodeystvuyushhikh s agressivnoy sredoy* [Computing structure elements interacting with aggressive medium]. Saratov, Sarat. un-t Publ., 1987. 288 p.
2. Karpunin V. G., Kleshhyov S. I., Kornishin M. S. K raschyotu plastin i obolochek s uchetom obshhey korrozii [On computing plates and shells considering general corrosion]. *Trudy X Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the X-th all-union conference on

shells and plates]. Tbilisi, Metsniereba Publ., 1975, pp. 166–174.

3. Zelentsov D. G. Ob odnom algoritme resheniya nekotorykh klassov sistem differentsial'nykh uravneniy [On an algorithm for solving several classes of systems of differential equations]. *Pridniprovs'kiy naukovyy visnyk. Fizyko-matematychni nauky* [Pridneprovsky scientific bulletin. Physical and mathematical sciences]. No. 112 (179), 1998, pp. 31–37.

4. Zelentsov D. G., Pochtman Yu. M. Use of the analytical formulas of longevity in problems of optimal design of multielements structures under corrosion wear. *Lightweight Structures in Civil Engineering*. Warsaw – Cracow, 2000, pp. 156–157.

5. Zelentsov D. G., Lyashenko O. A., Naumenko N. Yu. *Informatsionnoe obespechenie raschyotov korrodiruyushhikh ob"ektov. Matematicheskie modeli i koncepciya proektirovaniya system* [Information support for computing corroding objects. Mathematical models and system design concept]. Dnepropetrovsk, UGXTU Publ., 2012. 264 p.

6. Korotchenko A. T. O primenenii metoda dinamicheskogo programmirovaniya k optimal'nomu integrirovaniyu sistemy differencial'nykh uravneniy [On applying dynamical programming method for optimal integrating systems of differential equations]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Vsesoyuzn. mezhvuz. sb.* [Applied problems of durability and elasticity. All-union interuniversity collection of works]. Gorky, GGU Publ., vol. 4, 1976, pp. 95–97.

7. Zelentsov D. G., Korotkaya L. I. Ispol'zovanie neyronnykh setey pri reshenii zadach dolgovechnosti korrodiruyushhikh konstrukciy [Using neuron networks for solving corroding structure durability problem]. *Visnyk Kremenchuc'kogo natsional'nogo universytetu im. M.Ostrograds'kogo* [Bulletin of the M. Ostrogradsky Kremenchug National University]. Kremenchuk, KrNU Publ., 2011, vol. 3 (68), part. 1, pp. 24–27.

8. Zelentsov D. G., Naumenko N. Yu., Novikova L. V. Algoritm upravleniya tochnost'yu chislennogo resheniya nekotorykh klassov sistem differencial'nykh uravneniy [Algorithm for controlling accuracy of numerical solution for some classes of systems of differential equations]. *Systemni tekhnologiyi. Regional'nyy mizhvuzivs'kyy zbirnyk naukovykh prats'* [System Technologies. Regional interuniversity collection of scientific papers]. Dnipropetrovsk, 2012, vol. 5 (82), pp. 71–79.

9. Gorbachev K. P. *Metod konechnykh ehlementov v raschetakh prochnosti* [Finite element method in durability calculations]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1985. 156 p.

10. Dolinskiy V. M. Izgib tonkikh plastin, podverzhennykh korrozionnomu iznosu [Bending of thin plates subjected to corrosive wear]. *Dinamika i prochnost' mashin* [Dynamics and durability of machines]. Kharkov, 1975, vol. 21, pp. 16–19.

Поступила (received) 26.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Алгоритм розв’язання систем диференціальних рівнянь, що моделюють корозійний процес у шарнірно-стержневих конструкціях / Д. Г. Зеленцов, О. Р. Денисюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 36 – 42. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Алгоритм решения систем дифференциальных уравнений, моделирующих коррозионный процесс в шарнирно-стержневых конструкциях / Д. Г. Зеленцов, О. Р. Денисюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 36 – 42. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Algorithm for solving systems of differential equations modeling corrosion process in hinged-rod structures / D. G. Zelentsov, O. R. Denysiuk // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 36 – 42. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Зеленцов Дмитро Гегемонович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем Українського державного хіміко-технологічного університету, м. Дніпро; тел.: (066) 797-52-77; e-mail: dmyt_zel@mail.ru.

Зеленцов Дмитрий Гегемонович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем Украинского государственного химико-технологического университета, г. Днепр; тел.: (066) 797-52-77; e-mail: dmyt_zel@mail.ru.

Zelentsov Dmytriy Gegemonovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Informational Systems Department, Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro; tel.: (066) 797-52-77; e-mail: dmyt_zel@mail.ru.

Денисюк Ольга Ростиславівна – аспірант, Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро; тел.: (095) 941-32-75, e-mail: denolga91@rambler.ru.

Денисюк Ольга Ростиславовна – аспирант, Украинский государственный химико-технологический университет, г. Днепр; тел.: (095) 941-32-75, e-mail: denolga91@rambler.ru.

Denysiuk Olga Rostyslavivna – PhD student, Ukrainian State University of Chemical Technology, Dnipro; tel.: (095) 941-32-75, e-mail: denolga91@rambler.ru.

УДК 621.67

И. А. КОВАЛЁВ, А. В. РАТУШНЫЙ, Н. В. СЕМЁНОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАБОТЫ КОНТРРОТОРНОЙ ЛОПАСТНОЙ СИСТЕМЫ ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

В даний час в багатьох галузях промисловості виникла проблема підвищення економічності відцентрових насосів, які забезпечують підвищення напірні при відносно невеликих подачах. Рішення подібних завдань багато в чому слід шукати в збільшенні інтенсивності енергопередачі в системі «робочий орган насоса - перекачується рідина». Реалізація даної ідеї призведе до можливості застосування одноступінчастого відцентрового насоса замість багатоступінчастого або істотного скорочення кількості ступенів останнього, що дозволить вирішувати не менш актуальне завдання сьогоднішнього насособудування - зниження масо-габаритних параметрів насосів. Одним з напрямки вирішення даної проблеми є подальші продовження наукових пошуків для створення насосного обладнання з новими принципами дії, в тому числі і ускладнення робочого процесу гідромашини, ановим оригінальним способом вирішення є застосування контрроторной лопатевої системи в відцентровому насосі. Представлена конструктивна схема і теоретичний опис роботи таких грат.

Ключові слова: підвищення напору; контрроторна лопатева система; відцентровий насос.

В настоящее время во многих отраслях промышленности возникла проблема повышения экономичности центробежных насосов, обеспечивающих повышение напорности при относительно небольших подачах. Решение подобных задач во многом следует искать в увеличении интенсивности энергопередачи в системе «рабочий орган насоса – перекачиваемая жидкость». Реализация данной идеи приведёт к возможности применения одноступенчатого центробежного насоса вместо многоступенчатого или существенного сокращения количества ступеней последнего, что позволит решать не менее актуальную задачу сегодняшнего насосостроения – снижение массо-габаритных параметров насосов. Одним из направления решения данной проблемы являются дальнейшие продолжение научных поисков для создания насосного оборудования с новыми принципами действия, в том числе и усложнения рабочего процесса гидромашины, а новым оригинальным способом решения является применение контрроторной лопастной системы в центробежном насосе. Представлена конструктивная схема и теоретическое описание работы такой решетки.

Ключевые слова: повышение напора; контрроторная лопастная система; центробежный насос.

Currently, many industries face a problem of increasing efficiency of centrifugal pumps that provide increase in pressure at relatively low feed rates. Solution to such problems is found in increasing the intensity of the energy transmission in the system “working pump - pumped fluid”. Implementation of this idea will lead to the possibility of using a single-stage centrifugal pump instead of a multi-stage one or will lead to the significant reduction in the number of steps in the latter that will solve another urgent problem of pump engineering – reduction in the weight and size parameters of pumps. One of the ways to solve this problem is the further continuation of scientific research to create the pumping equipment with new principles of action, including the complexity of the working process of hydraulic machines. A new original way to address the problem is the use of the counter-rotor blade system in the centrifugal pump. Design scheme and the theoretical description of such a grating are presented.

Key words: increase of pressure; counter-rotor blade system; chempump.

Введение. По данным Европейской организации производителей насосного оборудования «EuroPump» в различных отраслях промышленности энергопотребление насосов является достаточно высоким и составляет в среднем 25 – 60 % от всей затрачиваемой мощности. При этом почти ¾ энергозатрат приходится на динамические насосы [1, 2]. В связи с этим в ЕС разработана директива значительного снижения энергопотребления насосным оборудованием (до 40 %) [3, 4].

Одним из направления решения данной проблемы являются дальнейшие продолжения научных поисков для создания насосного оборудования с новыми принципами действия, в том числе и усложнения рабочего процесса гидромашины.

Анализ последних исследований. В практике насосо- и авиастроения известны осевые агрегаты с так называемой *контрроторной лопастной решеткой* [5 – 7].

Под контрроторностью понимают принцип компоновки динамической лопастной машины, согласно которому два ротора с лопастными решетками и общей осью обращения приближенны один к одному и вращаются в противоположных направлениях. При этом каждый ротор опирается на свои опоры и имеет отдельную систему подведения (или отвода) механической энергии.

Такая конструкция позволяет существенно повысить интенсивность энергопередачи лопастных систем или значительно увеличить осевую силу взаимодействия роторной части и движущейся через неё жидкости. Следует отметить, что использование принципа контрроторности в целом и особенно применительно к центробежным насосам [8] в частности на данный момент широкого распространения не получило. Это связано с основной проблемой – недостаточным проведением теоретического и экспериментального исследования особенностей рабочего процесса в таких лопастных системах, их преимуществ и недостатков, а также сложностями при конструировании и изготовлении.

Таким образом, необходимо проведения комплексного исследования возможности применения контрро-

© И. А. Ковалёв, А. В. Ратушный, Н. В. Семёнова, 2016

торных лопастных систем, которое бы дало возможность оценить перспективы их внедрения в практику насосостроения. На кафедре ПГМ Сумского государственного университета был выполнен первый этап подобных исследований – теоретическое описание работы контрроторной лопастной системы центробежного насоса.

Постановка задачи. Проведенный анализ позволяет следующим образом сформулировать цель данной работы: аналитическим способом объяснить основные физические принципы работы контрроторных центробежных лопастных систем, в том числе кинематику течения и принципы энергопередачи от лопастной решетки к жидкости и наоборот (насосный и турбинный режимы).

Материалы и методы исследования. Рассмотрим теоретические предпосылки работы контрроторной центробежной лопастной системы. Независимо от типа (осевая, диагональная, радиальная, центробежная, центростремительная), лопастная решетка при своём взаимодействии с проходящим через неё потоком жидкости совершает одинаковый физико-механический процесс изменения интегрального значения момента количества движения от входа в решетку до выхода из неё. При этом можно считать несущественным те или иные особенности каждой решетки (наличие или отсутствие поля центробежных сил, движение жидкости против поля этих сил, конфузорность или диффузорность относительных течений, наличие вихревых зон в межлопаточных каналах).

Для анализа контрроторной конструкции определим следующие термины и индексы:

– первый (I) ротор – это первая лопастная решетка, в которую входит поток жидкости непосредственно из подвода;
– второй (II) ротор – это вторая лопастная решетка, которая воспринимает поток жидкости на выходе из первого ротора и после его прохождения направляет на выход из контрроторной конструкции.

При этом соотношения угловых скоростей роторов ω_I и ω_{II} могут быть различными:

- вращение решеток в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью;
- вращение решеток в противоположных направлениях с различными угловыми скоростями;
- вращение решеток в одном направлении с различными угловыми скоростями;
- вращение первой и второй решеток с варьируемыми угловыми скоростями.

На рис. 1 показан один из возможных вариантов центробежного насоса с контрроторной лопастной системой. При этом индексом «1» будем обозначать все параметры течения и геометрические размеры, относящиеся к входу в первую лопастную решетку. Аналогично, индексом «2» будем использовать для параметров на выходе из первой решетки, индексы «3» и «4» – для параметров на входе и выходе второй решетки соответственно. На рис. 2 показана кинематика течения в этих лопастных решетках.

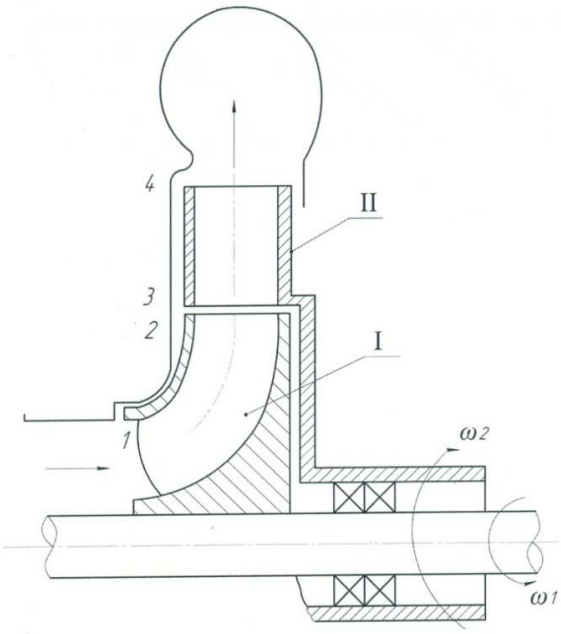


Рис. 1 – Схема центробежного контрроторного насоса.

Для удобства восприятия решетки были разнесены на расстояние «а». Векторы скоростей и их составляющие представлены для осесимметричной схемы течения и условия $\omega_I = -\omega_{II}$ (решетки вращаются в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью). Кроме того, на входе в каждую решетку выбраны условия безциркуляционного натекания. При этом следует отметить, что если для первой решетки это условие ($\upsilon_{u1} = 0$) не сложно обеспечить за счет конструкции подвода, то обеспечить условие $\upsilon_{u3} = 0$ на входе во вторую решетку будет значительно сложнее. Добиться этого можно только благодаря соответствующей комбинации геометрических и кинематических параметров причём, как первой, так и второй решеток. Рекомендации для выбора таких параметров могут быть установлены аналитически с привлечением экспериментальных данных по воздействию на интегральные параметры контрроторной системы реальных параметров лопастных решеток. В данной работе такое задание не ставилось.

Исходя из приведённой на рис. 2 кинематики течения жидкости через две контрроторные решетки, установим ме-

ханизм существенного повышения напора такой системой. Для этого воспользуемся основным уравнением рабочего процесса лопастных машин [9].

Для первой решетки будем иметь:

$$H_{T\infty}(I) = \frac{\omega_I}{g}\left(\upsilon_{u2} \cdot r_2 - \upsilon_{u1} \cdot r_1\right). \quad (1)$$

При $\upsilon_{u1} = 0$ выражение (1) примет вид:

$$H_{T\infty}(I) = \frac{\omega_I}{g}\left(\upsilon_{u2} \cdot r_2\right). \quad (2)$$

Для второй решетки

$$H_{T\infty}(II) = \frac{\omega_{II}}{g}\left(\upsilon_{u4} \cdot r_4 - \upsilon_{u3} \cdot r_3 - \left(-\upsilon_{u2} \cdot r_2\right)\right). \quad (3)$$

При условии $\upsilon_{u3} = 0$ имеем:

$$H_{T\infty}(II) = \frac{\omega_{II}}{g}\left(\upsilon_{u4} \cdot r_4 + \upsilon_{u2} \cdot r_2\right). \quad (4)$$

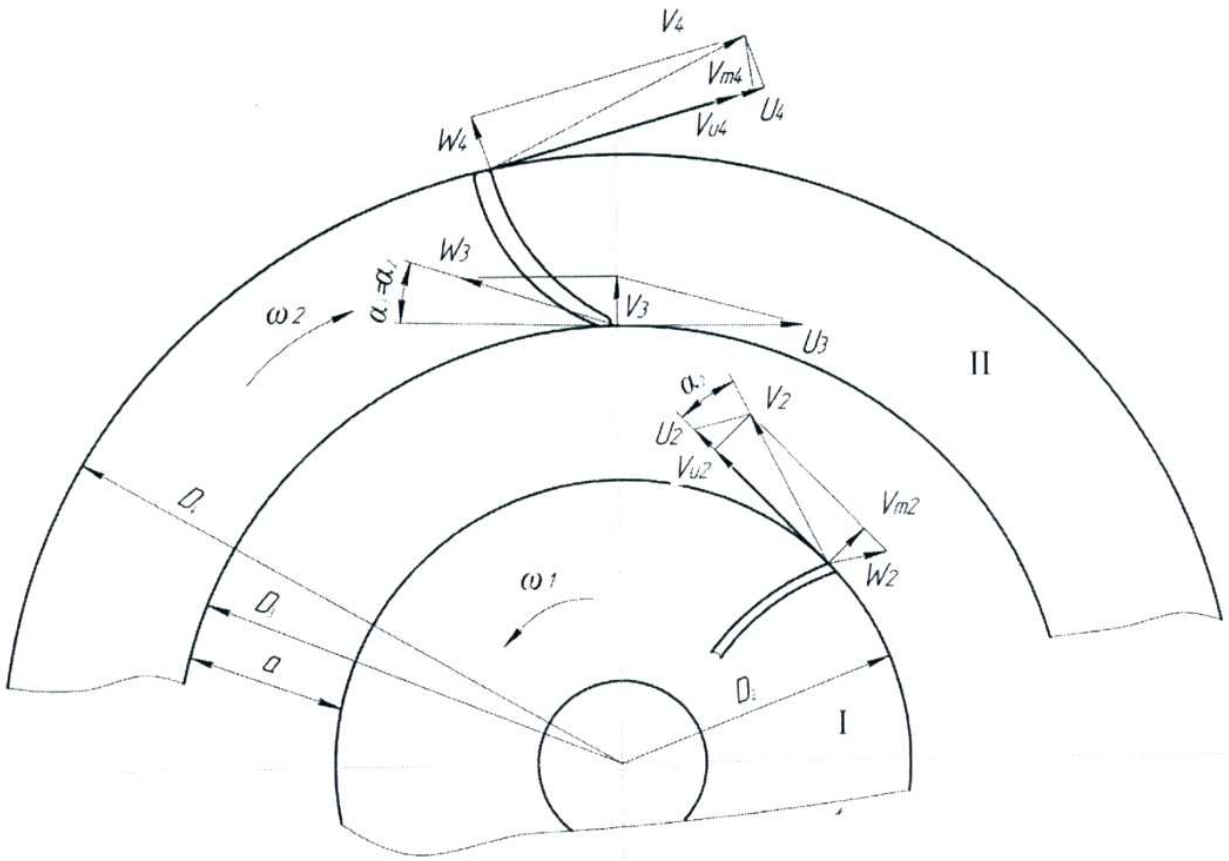


Рис. 2 – Кинематика течения в контрроторных центробежных решетках.

Заметим, что выражение (4) получено на основании того, что на входе во вторую решетку течение, вышедшее из первой, имеет значительный момент количества движения (закрутку), созданный первой решеткой ($\upsilon_{u2} \cdot r_2$). При этом его направление противоположно направлению вращения второй решетки. И хотя вектор $\overline{\upsilon}_3$ закрутки не создаёт ($\upsilon_{u3} = 0$), закрутка $\upsilon_{u2} \cdot r_2$ является реальной отрицательной циркуляцией на входе во вторую решетку и должна учитываться в основном уравнении.

В случае реальной лопастной решетки циркуляция Γ_4 на выходе из второго ротора при $\omega_I = -\omega_{II}$ никогда не может быть нулевой, исходя из очевидных геометрических соотношений ($r_4 > r_2$). Именно поэтому теоретический напор для второго ротора необходимо рассчитывать, учитывая собственные циркуляции Γ_4 (на выходе), Γ_3 (на входе) и Γ_2, созданные предыдущим, первым центробежным ротором, то есть

$$H_{T\infty}(II) = \frac{\omega_{II}}{2\pi g}\left(\Gamma_4 - \Gamma_3 - \left(\Gamma_2\right)\right). \quad (5)$$

В случае, когда $\Gamma_3 = 0$ для обеспечения бесциркуляционного входа и повышения теоретического напора

$$H_{T\infty}(II) = \frac{\omega_{II}}{2\pi g}\left(\Gamma_4 + \Gamma_2\right). \quad (6)$$

Общий напор обеих решеток будет равен сумме напоров каждой из них

$$H_{T\infty} = H_{T\infty}(I) + H_{T\infty}(II) = \frac{\omega}{g}\left(\upsilon_{u4} \cdot r_4 + \upsilon_{u2} \cdot r_2\right) \quad (7)$$

при условии, что угловые скорости каждой решетки одинаковы по модулю и различны по направлению:

$$\omega = \omega_I = -\omega_{II}.$$

Следует также обратить внимание на то, что лопасти второй решетки двигаются навстречу течению, выходящему из первой решетки, изменяя его момент количества движения за очень короткое время. А это, согласно *теореме импульсов*, обуславливает резкое возрастание силы взаимодействия между твёрдой поверхностью лопасти и набегающим на неё течением. Что, очевидно, приводит к существенному возрастанию интенсивности процесса энергопередачи.

Рассматривая рабочий процесс контрроторной лопастной системы и, в первую очередь, работу второй решетки, приходим к предположению, что первая решетка, создавая на входе во вторую течение со значительной отрицательной циркуляцией Γ_2, создаёт тем самым интенсивное встречное течение для лопастей второго яруса, с которым они активно взаимодействуют. Очевидно, что кинетическая энергия этого течения быстро переходит в состояние энергии давления, что напоминает рабочий процесс в гидромашинах активного принципа действия (например, в струйных ковшовых турбинах) [10].

Как уже отмечалось выше, в радиальных контрроторных решетках необходимо ожидать взаимодействия сильно закрученного течения с движущимися ему навстречу лопастями второго ротора. Это, в свою очередь вызовет соответствующие негативные гидродинамические последствия. Чтобы их уменьшить, можно рекомендовать выход из первой решетки размещать на значительно меньшем радиусе, а необходимую величину напора добирать за счет второго ротора.

Выводы. Приведенные исследования особенностей рабочего процесса в контрроторных конструкциях позволяют в рамках идеальной осесимметричной схемы описать механизм энергопередачи (повышение напора) в первой и, особенно, во второй лопастных решетках, а также объяснить роль и место каждой из них в этом процессе. Сформулированы предпосылки для создания моделей соответствующих лопастных решеток для проведения численного моделирования и натурных исследований.

Список литературы

1. СИНТ'09 : материалы V международной конференции. – Воронеж : Научная книга, 2009. – 356 с.
2. Ecopump.ru'2009 : Тезисы докладов международной научно-технической конференции. – М. : Из-во РАПН, 2009. – 458 с.
3. *Караханьян В. К.* Итак, главные проблемы: энергосбережение и экология // Насосы и оборудование. – 2008. – № 4 – 5. – с. 4.
4. *Солодченков Б. Ж.* EuroPump 2010: Париж. Энергоэффективность. Инновации // Насосы и оборудование. – 2010. – № 3. – С. 8 – 12.
5. *Брусиловский И. В.*, *Клеников И. В.*, *Левин Е. М.* Осевой вентилятор встречного вращения // Промышленная аэродинамика. – 1973. – № 29. – С. 113 – 121.
6. *Потетенко О. В.*, *Дранковский В. Э.*, *Ковалев С. М.* Тенденции продвижения горизонтальных прямоточных и вертикальных радиально-осевых гидротурбин на высокие напоры с широким диапазоном эксплуатации // Вісник Сумського державного університету. Серія: Технічні науки. – 2010. – № 3, Т. 1. – С. 125 – 135.
7. *Watanabe S.*, *Furukawa A.*, *Usami S.* Internal flow structure in real rotor of contra-rotation axial flow pump at partial flow rates // Materials of 9th Int. Symp. on exp. end computational aerothermodynamics of internal flow. – 2009 – p. 70 – 76.
8. *Traczyk J.*, *Brejnak J.*, *Kawalec K.* Пат. 134101 ПНР. № 232056. Центробежный проточный компрессор. – 1986.
9. *Михайлов А. К.*, *Малюшенко В. В.* Лопастные насосы. Теория, расчет и конструирование. – М. : Машиностроение, 1977. – 288 с.
10. *Кривченко Г. И.* Гидравлические машины. Турбины и насосы : учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 320 с.

References (transliterated)

1. *SINT'09 : materialy V mezhdunarodnoy konferentsii* [SyPT'09: proceedings of the V-th international conference]. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2009. 356 p.
2. *Ecopump.ru'2009 : Tezisy dokladov mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii* [Ecopump.ru'2009 : abstracts of international scientific and technical conference]. Moscow, Iz-vo RAPN Publ., 2009. 458 p.
3. Karahanyan V. K. Itak, glavnye problemy : energosberezhenie i ekologiya [So, the main problems: energy saving and ecology]. *Nasosy i oboru-*

dovanie [Pumps and equipment]. 2008, no. 4–5, p. 4.

4. Solodchenkov B. Zh. EuroPump 2010: Parizh. Energoeffektivnost. Innovatsii [EuroPump 2010: Paris. Energy efficiency. Innovations.]. *Nasosy i oborudovanie* [Pumps and equipment]. 2010, no. 3. pp. 8–12.

5. Brusilovskiy I. V., Klenikov I. V., Levin E. M. Osevoy vintelyator vstrechnogo vrascheniya [Counter-rotating axial pump]. *Promyishlennaya aerodinamika* [Industrial aerodynamics]. 1973, no. 29, pp. 113–121.

6. Potetenko O. V., Drankovskiy V. E., Kovalev S. M. Tendentsii prodvizheniya gorizontal'nykh pryamotochnykh i vertikal'nykh radial'no-osevykh gidroturbin na vysokie napory s shirokim diapazonom ekspluatatsii [Tendencies of forwarding horizontal tubular and vertical radial-axel hydroturbines for multiple purpose high pressures]. *Visnik Sums'kogo derzhavnogo universitetu. Seriya: Tehnichni nauky* [Bulletin of the Sumy National University. Series: Technical Sciences]. 2010, vol. 3, no. 1, pp. 125–135.

7. Watanabe S., Furukawa A., Usami S. Internal flow structure in real rotor of contra-rotation axial flow pump at partial flow rates. *Materials of 9th Int. Symp. on exp. end computational aerothermodynamics of internal flow*. 2009, pp. 70–76.

8. Traczyk J., Brejnak J., Kawalec K. *Tsentrobezhnyy protochnyy compressor* [Centrifugal flow compressor]. Patent 134101 PNR, no. 232056, 1986.

9. Mihaylov A. K., Malyushenko V. V. *Lopastnyie nasosy. Teoriya, raschet i konstruirovanie* [Vane pumps. Theory, computations and engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 288 p.

10. Krivchenko G. I. *Gidravlicheskie mashiny. Turbiny i nasosy : uchebnik. 2-e izd., pererab. i dop.* [Hydraulic machines. Turbines and pumps: textbook – 2nd ed.]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 320 p.

Поступила (received) 30.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Теоретичний опис роботи контрроторної лопатевої системи відцентрового насоса / І. А.Ковалёв, О. В. Ратушный, Н. В. Семенова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 43 – 47. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Теоретическое описание работы контрроторной лопастной системы центробежного насоса / И. А. Ковалёв, А. В. Ратушный, Н. В. Семёнова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 43 – 47. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Theoretical description of work of the counter-rotor blade system of chempump / I. A. Kovalyov, A. V. Ratushny, N. V. Semenova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 43 – 47. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ковальов Ігор Олександрович – кандидат технічних наук, професор кафедри Прикладної гідроаеромеханіки, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: i.kovalyov@pgm.sumdu.edu.ua.

Ковалёв Игорь Александрович – кандидат технических наук, профессор кафедры Прикладной гидроаэромеханики, Сумской государственный университет, г. Сумы; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: i.kovalyov@pgm.sumdu.edu.ua.

Kovalyov Igor Aleksandrovich – PhD in Engineering Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Hydroaeromechanics, Sumy State University, Sumy, Ukraine; tel.: (050) 999-79-65; e-mail: i.kovalyov@pgm.sumdu.edu.ua.

Ратушний Олександр Валерійович – кандидат технічних наук, асистент кафедри Прикладної гідроаеромеханіки, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (050) 139-40-96; e-mail: o.ratushnij@pgm.sumdu.edu.ua.

Ратушный Александр Валерьевич – кандидат технических наук, ассистент кафедры Прикладной гидроаэромеханики, Сумской государственный университет, г. Сумы; тел.: (050) 139-40-96; e-mail: o.ratushnij@pgm.sumdu.edu.ua.

Ratushnyi Aleksandr Valerievych – PhD in Engineering Sciences, Teaching Assistant of the Department of Applied Hydroaeromechanics, Sumy State University, Sumy, Ukraine; tel.: (050) 139-40-96; e-mail: o.ratushnij@pgm.sumdu.edu.ua.

Семенова Наталія Вікторівна – аспірант кафедри прикладної гідроаеромеханіки, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (096) 254-99-60; e-mail: nataliya.semenova.751@mail.ru.

Семёнова Наталия Викторовна – аспирант кафедры прикладной гидроаэромеханики, Сумской государственный университет, г. Сумы; тел.: (096) 254-99-60; e-mail: nataliya.semenova.751@mail.ru.

Semenova Nataliya Viktorovna – PhD student, Department of Applied Hydroaeromechanics, Sumy State University, Sumy, Ukraine; tel.: (096) 254-99-60; e-mail: nataliya.semenova.751@mail.ru.

УДК 004.94

Л. И. КОРОТКАЯ, Н. Ю. НАУМЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОРРОДИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПАРАМЕТРАХ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Проведено аналіз способів формалізації неповної або нечіткої інформації про параметри зовнішнього агресивного середовища при розв'язанні задач прогнозування довговічності та оптимального проектування конструкцій зі змінними геометричними характеристиками, що піддаються корозійному зносу. Для опису нечітких даних використано математичний апарат теорії нечітких множин та апарат інтервального аналізу. Розглянуто можливість використання запропонованих підходів. Проведено моделювання поведінки кородуючих конструкцій в умовах невизначеності.

Ключові слова: теорія нечітких множин, інтервальний аналіз, моделювання, прогнозування довговічності, оптимальне проектування.

Проведен анализ способов формализации неполной или неточной информации о параметрах внешней агрессивной среды при решении задач прогнозирования долговечности и оптимального проектирования конструкций с изменяющимися геометрическими характеристиками, подверженных коррозионному износу. Для описания нечётких данных использован математический аппарат теории нечётких множеств и аппарат интервального анализа. Рассмотрены возможности применимости предложенных подходов. Проведено моделирование поведения корродирующих конструкций в условиях неопределенности.

Ключевые слова: теория нечётких множеств, интервальный анализ, моделирование, прогнозирование долговечности, оптимальное проектирование.

The methods of formalization of incomplete or inaccurate information about the parameters of the external aggressive environment when solving problems of forecasting the durability and optimal design of structures with varying geometric characteristics subject to corrosive wear are analyzed. To describe the fuzzy data the mathematical apparatus of fuzzy set theory and interval analysis unit are used. The applicability of the proposed approaches is discussed. The behavior of corroding structures in undetermined conditions is simulated. The approaches allow to describe the environment close to the real conditions in which a mechanical system operates.

Key words: fuzzy set theory, interval analysis, modeling, durability forecasting, optimal design.

Введение. Механические системы с изменяющимися геометрическими характеристиками широко используются в различных отраслях промышленности и строительной индустрии, этим и обусловлена актуальность проблемы моделирования их поведения. Примером таких систем могут служить металлические конструкции, функционирующие в агрессивных внешних средах и подвергающиеся коррозионному износу.

Анализ последних исследований. Известные традиционные подходы решения рассматриваемого класса задач – детерминированный и вероятностно-стохастический – предполагают наличие полной информации о природе коррозионного процесса, либо знание законов и параметров его распределения. В реальных ситуациях такая информация отсутствует или имеет нечёткий характер.

Поэтому в работе предлагается рассматривать параметры агрессивной среды не постоянными, а величинами, которые могут изменяться в процессе функционирования системы. В качестве параметра агрессивной среды (АС) рассматривается *скорость коррозии*. Очевидно, что в процессе эксплуатации механической системы (в работе металлических конструкций) этот параметр зависит от ряда факторов, в том числе: влажности и температуры среды, степени нагрузок на элементы системы, насыщенности различными элементами внешней среды и пр. Диапазон изменения количественных характеристик указанных факторов достаточно велик, более того, весьма проблематично получить определенные их значения. Постановщику задачи, как правило, известен интервал изменения скорости коррозии, границы которого определяются значением лингвистической переменной – *степени агрессивности среды* [1, 3].

Следует отметить, что в работах, посвящённых прогнозированию долговечности и оптимальному проектированию корродирующих конструкций (КК), предлагались различные математические модели коррозионного износа, описывающие влияние внешней среды. Большое их количество делает проблематичным построение единого подхода к решению указанного класса задач. Однако следует отметить, что рассматриваемые модели феноменологически подобны, большая их часть может быть заменена единственной моделью, которая, при правильном выборе её параметров может рассматриваться как обобщение нескольких моделей [3]. Кроме того, следует отметить, что задача прогнозирования долговечности КК является частью более общей задачи оптимального проектирования, поэтому далее в работе они будут рассматриваться параллельно.

Предлагается исследовать стержневые конструкции с произвольной геометрией, граничными условиями и условиями нагружения. Внешними нагрузками являются сосредоточенные силы, приложенные в узлах. Предполагается также, что внешняя нагрузка носит детерминированный характер, а осевое усилие по длине элемента считается постоянной величиной. Под оптимальной конструкцией в данной работе понимается конструкция минимального объёма, которая удовлетворяет условиям прочности, устойчивости и конструктивным ограничени-

© Л. И. Короткая, Н. Ю. Науменко, 2016

ям, накладываемым на варьируемые параметры, и при этом она должна сохранять функциональную способность в течение заданного периода времени.

Постановка задачи. Для решения задачи прогнозирования долговечности КК традиционно применялся детерминированный подход (предполагалось, что скорость коррозии неизменная величина) и использовалась, так называемая, четкая постановка. При моделировании коррозионного процесса в работе учитывается влияние механических напряжений на скорость коррозии, что приводит к появлению обратной связи в схеме решения задачи прогнозирования долговечности [3, 4].

Долговечность системы в целом определяется по минимальному прогнозируемому значению долговечности одного из ее элементов с учетом изменения напряжений в них. Ввиду того, что информация о параметрах АС является неполной и скорость коррозии может быть задана некоторым интервалом $\tilde{v}_0 \in [v_0^-; v_0^+]$, границы которого определяются значением лингвистической переменной – степени агрессивности среды. Этот интервал трактуется как множество возможных значений, которые может принимать параметр скорость коррозии в процессе моделирования поведения корродирующей конструкции.

Нечёткая постановка задачи прогнозирования долговечности может быть записана так:

$$t^* = \min\{t_1, t_2, ..., t_N\};$$
$$t_i : [\sigma] - \sigma_i(t, \tilde{v}_0) = 0, \ i = \overline{1, N};$$
$$\sigma_j^* - \sigma_j(t, \tilde{v}_0) = 0, \ j \in J. \quad (1)$$

Здесь t^* – расчетное значение долговечности конструкции; N – количество элементов в системе; J – количество элементов, работающих на сжатие; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_i(t, \tilde{v}_0)$ – текущее напряжение в i – м элементе; $\sigma_j(t, \tilde{v}_0)$ – критическое напряжение потери устойчивости; $\tilde{v}_0$ – интервальная величина скорости коррозии ненагруженного материала.

Как отмечалось ранее, задача прогнозирования долговечности является подзадачей задачи оптимального проектирования. Рассмотрим ферму, состоящую из N элементов произвольного сечения, часть которых работает на растяжение, часть – на сжатие. Необходимо выбрать геометрические размеры сечений стержней таким образом, чтобы объём конструкции при этом был минимальным.

Постановки задачи оптимального проектирования (или задачи оптимизации) корродирующей системы в общем виде с учетом неполной информации о параметрах АС может быть представлена в следующем виде:

$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} l_i \cdot A_i(\bar{x}) \to \min;$$
$$\begin{cases} g_1 : [\sigma] - \sigma_i(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0) \geq 0, & i = \overline{1, N}; \\ g_2 : \sigma_j^*(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0) - \sigma_j(\bar{x}, t^*, \tilde{v}_0) \geq 0, & j \in J; \\ x_l \in [x_l^-; x_l^+], & l = \overline{1, L}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $V(\bar{x})$ – искомый оптимальный объём конструкции; $\bar{x}$ – вектор варьируемых параметров; l_i и $A_i(\bar{x})$ – длина и площадь сечения i – го стержня; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_i(\bar{x}, t^*, v_0)$ – текущее напряжение в i – м элементе; $\sigma_j^*(\bar{x}, t^*, v_0)$ – критическое напряжение потери устойчивости; N – количество элементов в системе; J – множество стержней, работающих на сжатие; L – количество варьируемых параметров; x_l^+, x_l^- – верхняя и нижняя границы изменения l – го варьируемого параметра; t^* – заданная долговечность; g_1 – ограничения по прочности; g_2 – ограничения по устойчивости.

Таким образом, отличие данной постановки задачи оптимизации от известных заключается в том, что скорость коррозии является нечёткой величиной и представляется в виде *кортежа*, то есть одномерного массива, над которым не определены операции векторной алгебры.

Постановка (2) является задачей нелинейного программирования. Методам и алгоритмам ее решения в условиях неопределенности посвящены [2, 3].

Математическая модель. Поведение корродирующей конструкции может быть исследовано путём решения системы дифференциальных уравнений (СДУ), описывающей коррозионный процесс. Процедура вычисления прогнозной долговечности элемента, подверженного коррозионному воздействию, или определение его напряженно-деформированного состояния (НДС) в какой-либо момент времени предполагает совместное исполь-

зование какого-либо численного метода расчёта НДС (в данной работе *метода конечных элементов* (МКЭ)) и численного метода решения *задачи Коши* для СДУ, описывающих коррозионный процесс. В качестве модели накопления геометрических повреждений рассматривается *модель В.М. Долинского* [2 – 4]:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \tilde{v}_0 \cdot \left[1 + k \cdot \sigma_i\left(\overline{\delta}\right)\right], \tag{3}$$

где δ_i − глубина коррозионного поражения $i-$го элемента $\left(i = \overline{1, N}\right)$; σ_i − абсолютное значение напряжения в $i-$м элементе; $\overline{\delta}$ – вектор глубин коррозии всех элементов; k − коэффициент, учитывающий влияние напряжённого состояния на скорость коррозии.

Напряжение $\sigma_i\left(\overline{\delta}\right)$ является нелинейной функцией от δ, которая зависит от вида напряженного состояния элемента и, в большинстве случаев, не может быть представлена в аналитическом виде.

Решение системы дифференциальных уравнений (3) возможно только численно, например, *методом Эйлера*, при этом решение задачи НДС осуществляется в каждом узле временной сетки [2, 3]:

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + \Delta t^s \cdot \tilde{v}_0 \cdot \left(1 + k \cdot \sigma_i^{s-1}\left(\overline{\delta}^{s-1}\right)\right). \tag{4}$$

Здесь s – номер итерации; Δt – шаг интегрирования.

Становится очевидным, что при решении указанного класса задач при нечеткой информации о параметрах АС традиционные подходы становятся малоэффективными. Альтернативными подходами являются математический аппарат *теории нечетких множеств* (ТНМ) или *интервального анализа* (ИА). Остановимся несколько подробней на каждом из них.

Как отмечалось в [4], использование интервалов оправдано в тех случаях, когда практически нет никакой экспертной информации о нечеткой величине (в работе о параметрах АС). Использование интервалов не требует знания законов или параметров распределения случайной величины. Интервальная величина может иметь, а может и не иметь на интервале распределение. Имеется достаточно большое количество интервальных методов численного решения систем уравнений [5] и СДУ в том числе. В результате применения математического аппарата ИА будет получено решение в виде интервала $[t^*_{\min};\ t^*_{\max}]$ и, возможно, для получения прогнозируемого значения долговечности использовать некоторые оценки, в том числе и усредненные. Следует отметить, что применение интервального анализа сопряжено с определенными вычислительными затратами и некоторыми специфическими особенностями, которые присущи указанным методам. Например, *эффект раскрутки Мура* или *эффект распаковывания*, который связан только с внутренними свойствами интервальных методов безотносительно к ошибкам численных решений [4, 5].

В том случае, когда имеется возможность получения экспертных оценок, то целесообразно их использовать. Для формализации нечеткой информации о параметрах агрессивной среды появляется возможность построения *функции принадлежности* $\mu(v_0)$ [1, 3, 6]. В работе использовался $\alpha-$*уровневый принцип обобщения*:

$$\tilde{v}_0 = \sum_{i=1}^{2\cdot N_\alpha - 1} \frac{\mu(v_0^i)}{v_o^i}, \quad v_0^i \in [v_0^-; v_0^+]; \tag{5}$$

$$\mu(v_0^i) = \begin{cases} 0, & v_0^i \notin [v_0^-; v_0^+]; \\ \cos\left(\pi \cdot \dfrac{v_{cp} - v_0^i}{v_0^+ - v_0^-}\right), & v_0^i \in [v_0^-; v_0^+], \end{cases} \tag{6}$$

где $v_{cp} = \dfrac{v_0^+ + v_0^-}{2}$; i – номер элемента кортежа; N_α – количество $\alpha-$уровней.

В формуле (5) символ $\sum$ обозначает дискретное нечёткое множество [6].

Скорость коррозии, как нечёткое число, представляется в виде разложения по $\alpha-$уровневым множествам (далее *операция фаззификации*):

$$\tilde{v}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left(v_0^-; v_0^+\right)$$

и будет представляться кортежем $\tilde{v}_0$, количество элементов v_0^i которого N_α определяется количеством $\alpha-$уровней. Таким образом, при решении задачи оптимизации при вычислении функций ограничений должны учитываться все значения кортежа $\tilde{v}_0$. Каждому элементу кортежа v_0^i будет соответствовать значение долговечности t^i, всё множество которых образует *кортеж долговечности* $\tilde{t}$.

Применение уровней множества даёт возможность получения не только интервала изменения значения

долговечности $t \in [t^*_{\min}; t^*_{\max}]$, но и получения дефаззифицированного [3, 4, 6] его значения $t_{деф}$ одновременно с соответствующим значением функции принадлежности $\mu(t)$, например, *центроидным методом*:

$$t = t_{деф} = \frac{\sum_{i=1}^{2\cdot N_\alpha - 1} t^i \cdot \mu(t^i)}{\sum_{i=1}^{2\cdot N_\alpha - 1} \mu(t^i)}, \qquad (7)$$

Численные результаты. Для численной иллюстрации рассматривается решение задачи прогнозирования долговечности стержня, растянутого силой Q. Исходные данные: $Q = 12$ кН; предельно допустимое напряжение $[\sigma] = 240$ МПа; начальные внешний и внутренний радиусы соответственно $R = 2,5$ см и $r = 1,25$ см; шаг интегрирования $\Delta t = 0,0001$ лет; коэффициент влияния напряжений $k = 0,003$ МПа$^{-1}$; заданное предельно допустимое значение погрешности численного решения $\varepsilon = 0,05$.

При решении задачи прогнозирования долговечности, во избежание описанных в [2, 3] нештатных ситуаций, был применён метод Эйлера. Количество α – уровней принималось равным шести.

Дефаззифицированное значение долговечности $t_{деф}$ при использовании теории нечётких множеств получено центроидным методом (7); $t_{ср}$ – среднее значение интервала долговечности $[t^*_{\min}; t^*_{\max}]$.

Для большей наглядности авторы преднамеренно приводят величину $t_{ср}$ с целью демонстрации того, что воспользоваться усреднённой оценкой получаемого прогнозируемого значения долговечности можно, но насколько это целесообразно или нет, следует определяться лицу, принимающему решение (табл. 1).

Очевидно, что при решении задачи определения оптимального объема конструкции вычислительные затраты при использовании предложенных способов формализации неполной информации о параметрах АС будут существенно возрастать. Некоторые аспекты повышения эффективности вычислительных методов решения указанной задачи рассмотрены в [2, 3].

Таблица 1 – Результаты численного решения задачи прогнозирования долговечности в различных постановках

v_0, см/год	t^*, лет	$t_{ср}$, лет	$t_{деф}$, лет
Чёткая постановка			
0,1	5,16	-	-
Нечёткая постановка (ИА)			
[0,90; 0,11]	[4,62; 5,68]	5,15	-
[0,08; 0,12]	[4,26; 6,41]	5,34	-
[0,07;0,13]	[3,93;7,34]	5,66	-
Нечёткая постановка (ТНМ)			
[0,90; 0,11]	[4,69; 5,74]	5,22	5,18
[0,08; 0,12]	[4,31; 6,46]	5,39	5,21
[0,07; 0,13]	[3,98; 7,38]	5,68	5,26

Предложенные в работе подходы позволяют формализовать неполную информацию о параметрах агрессивной среды и получить решение, соответствующее более реальным условиям эксплуатации механической системы. Выбор использования математического аппарата теории нечетких множеств или интервального анализа, безусловно, зависит от решаемой задачи. По своей сути метод интервального анализа достаточно хорошо формализован и алгоритмичен. Применение уровней множества даёт возможность получить дефаззифицированное значение долговечности с его функцией принадлежности $\mu(t)$, которая позволяет установить степень принадлежности $t_{деф}$ нечёткому множеству $\tilde{t}$. Ввиду того, что в работе рассматривается задача прогнозирования долговечности КК, как часть более общей задачи – оптимального проектирования, то приоритет остается за теорией нечетких множеств.

Выводы. Учет неполной или нечеткой информации о параметрах агрессивной среды отвечает реальным условиям функционирования механических систем, в том числе и металлических конструкций. Однако формализация такой информации требует дополнительных вычислительных и других затрат. Интерпретацию полученных результатов осуществляет лицо, принимающее решение – эксперт предметной области.

Список литературы

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – Москва : Мир, 1976. – 163 с.
2. *Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И.* Способы повышения эффективности численного решения некоторых классов систем дифференциальных

уравнений // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Сборник статей / Под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолтакевича. – Харьков, 2011. – С. 234 – 241.

3. *Зеленцов Д. Г., Короткая Л. И.* Использование принципа обобщения нечётких параметров агрессивной среды в моделях оптимизации конструкций // Математичне моделювання. – Вип. – 1 (24). – 2011. – С. 20 – 23.
4. *Короткая Л. И.* Способы формализации неточных данных в задачах прогнозирования долговечности корродирующих конструкций // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 5 (88). – 2013. – С. 98 – 105.
5. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. – Издательство «XYZ», 2010. – 597 с.
6. *Штовба С. Д.* Введение в теорию нечётких множеств и нечёткую логику / Винницкий технический университет. – 2014. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book2/index.php. – Дата обращения : 25 июня 2016.

References (transliterated)

1. Zadeh L. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy* [The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning]. Moscow, Mir Publ., 1976. p. 163.
2. Zelentsov D. G., Korotkaya L. I. Sposoby povysheniya effektivnosti chislennogo resheniya nekotorykh klassov sistem differentsial'nykh uravneniy [The methods for increasing the efficiency of solving numerically some classes of systems of differential equations]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki. Sbornik statey* [Contemporary problems of mathematics, mechanics, and informatics. Collection of papers]. Ed. Kizilova N. N., Zholtakevich G. N. Kharkov, 2011, pp. 234–241.
3. Zelentsov D. G., Korotkaya L. I. Ispol'zovanie printsipa obobscheniya nechyotkikh parametrov agressivnoy sredy v modelyakh optimizatsii konstruktsiy [Using principle of generalized fuzzy parameter of aggressive medium in design optimization models]. *Matematichne modelyuvannya* [Mathematical modelling]. 2011, no. 1 (24), pp. 20–23.
4. Korotkaya L. I. Sposoby formalizatsii netochnykh dannykh v zadachakh prognozirovaniya dolgovechnosti korrodiruyuschikh konstruktsiy [The methods of formalizing fuzzy data in the problems of predicting corroding structures durability]. *Systemni tekhnologiyi. Regiona'nyy mizhvuzivs'kyy zbirnyk naukovykh prats'* [System technologies. Regional interuniversity collection of works]. 2013, no. 5 (88), pp. 98–105 p.
5. Sharyy S. P. *Konechnomernyy interval'nyy analiz* [Finite-dimensional interval analysis]. Izdatel'stvo "XYZ" Publ., 2010. p. 597.
6. Shtovba S. D. Vvedenie v teoriyu nechyotkikh mnozhestv i nechyotkuyu logiku [Introduction to fuzzy set theory and fuzzy logic]. *Vinnitskiy tehnicheskiy universitet* [Vinnytsia National Technical University]. Available at : http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book2/index.php. (accessed 25.06.2016).

Поступила (received) 29.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання поведінки кородуючих конструкцій при неповній інформації про параметри агресивного середовища / Л. І. коротка, Н. Ю. Науменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 48 – 52. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование поведения корродирующих конструкций при неполной информации о параметрах агрессивной среды / Л. И. Короткая, Н. Ю. Науменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 48 – 52. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Modeling the behavior of corroding structures with incomplete information about the parameters of aggressive environment / L. I. Korotka, N. Yu. Naymenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 48 – 52. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Коротка Лариса Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Короткая Лариса Ивановна – кандидат технических наук, доцент, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Korotka Larysa Ivanovna – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, State Higher Educational Institution "Ukrainian State University of Chemical Technology", Dnipro city; tel.: (0562) 47-38-77; e-mail: korliv@hotmail.com.

Науменко Наталія Юріївна – кандидат технічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», м. Дніпро, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.

Науменко Наталья Юрьевна – кандидат технических наук, доцент, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», г. Днепр, тел.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.

Naymenko Natalya Yuriivna – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, State Higher Educational Institution "Ukrainian State University of Chemical Technology", Dnipro city; tel.: (0562) 47-38-77; e-mail: nay_nata@i.ua.

УДК 001.57

А. М. МАЦУЙ, В. О. КОНДРАТЕЦЬ

МОДЕЛЮВАННЯ ФОРМУВАННЯ ПІСКОВОГО ПОТОКУ У ПІСКОВОМУ ЖОЛОБІ МЕХАНІЧНОГО ОДНОСПІРАЛЬНОГО КЛАСИФІКАТОРА

Представлені результати моделювання формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. Встановлено, що в циклі розвантаження пісків за будь-яким параметром формується крива, яка має початкову, кінцеву точки, мінімум і максимум. Введені оцінки в даних точках характеризують рівномірність потоку пульпи. Ці оцінки дорівнюють нулю, якщо рух пульпи рівномірний. Показано, що в реальних умовах вони можуть приймати значення від 5 до 100%, що відповідає значним коливанням висоти потоку і швидкостей переміщення матеріалу. Це унеможливлює застосування і підвищення точності вимірювання об'ємної витрати пульпи традиційним підходом. При необхідності підвищення точності вимірювання технологічного параметра слід орієнтуватися на розробку нових підходів.

Ключові слова: односпіральний класифікатор, формування, пісковий потік, об'ємна витрата, точність вимірювання, оцінки.

Представлены результаты моделирования формирования пескового потока в песковом желобе механического односпирального классификатора. Установлено, что в цикле разгрузки песков по произвольному параметру формируется кривая, которая имеет начальную, конечную точки, минимум и максимум. Введенные оценки в данных точках характеризуют равномерность потока пульпы. Эти оценки равны нулю, если движение пульпы равномерное. Показано, что в реальных условиях они могут принимать значения от 5 до 100%, что соответствует значительным колебаниям высоты потока и скоростей перемещения материала. Это делает невозможным применение и повышение точности измерения объемного расхода пульпы традиционным подходом. При необходимости повышения точности измерения технологического параметра следует ориентироваться на разработку новых подходов.

Ключевые слова: односпиральный классификатор, формирование, песковый поток, объемный расход, точность измерения, оценки.

The results of modeling the formation of sand flow in the sand chute of a mechanical single-spiral classifier are presented. It is found that a curve is formed in the cycle of unloading sand by any parameter, which has start and end points, a minimum and a maximum. The estimates introduced at these points describe the slurry flow uniformity. These estimates are equal to zero, if pulp movement is uniform. It is shown that in the real world they can range from 5 to 100%, which corresponds to large fluctuations of flow velocity and height of the moving material. Thus it is impossible to use and improve the accuracy of measuring the volume flow of the pulp by traditional methods. If the accuracy of measuring the process variable is to be increased new approaches are to be developed.

Key words: single-spiral classifier, forming, sand flow, volume flow, the accuracy of the measurement, evaluation.

Вступ. Основною складовою сировини чорної металургії України є магнетитовий концентрат, який отримують збагаченням бідних залізних руд. Подрібнення вихідної руди в основному здійснюють у кульових млинах, які працюють у замкненому циклі з механічним односпіральним класифікатором. У наслідок значних перевитрат електричної енергії, сталевих куль і футеровки вітчизняний магнетитовий концентрат відрізняється підвищеною собівартістю порівняно з зарубіжними аналогами, що ставить його та продукцію з нього у нерівні умови на світовому ринку. Автоматизація даних процесів є одним з основних напрямів зменшення вказаних перевитрат [1], що неможливо без автоматичного контролю піскового потоку у пісковому жолобі класифікатора. Відсутність ефективних засобів автоматичного контролю піскового потоку стримує автоматизацію процесу подрібнення вихідної руди. Зважаючи на те, що дана робота спрямована на розв'язання задачі контролю піскового потоку класифікатора, її тема є актуальною.

Аналіз останніх досліджень. На важливість автоматизації перших стадій подрібнення і збагачення звертається увага в роботі [2]. В роботі [1] вказується на необхідність розробки інформаційних засобів, а в [3] відмічається відсутність надійних засобів контролю необхідної точності або значну їх вартість. Важливість автоматичного вимірювання витрати продуктів збагачення підкреслена в [4]. Проблема отримання необхідної точності привела до застосування алгоритмічних методів визначення значень технологічних параметрів у збагачувальній галузі [5, 6, 7]. Однак все більш зростаючі вимоги технологічного процесу до засобів автоматизації примушують підвищувати точність інформаційних пристроїв. У такій ситуації, зокрема, знаходяться засоби вимірювання об'ємної витрати пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора. Раніше запропоновані способи визначення піскової продуктивності механічних спіральних класифікаторів [8, 9, 10] в наслідок ряду притаманних вад не отримали розповсюдження у збагачувальній галузі. Перша пропозиція прямого вимірювання об'ємної витрати пульпи у пісковому жолобі розкрита в [11], в [12] розроблені теоретичні положення даного методу, які поглиблені в [13]. Математичним моделюванням рівномірного руху пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора [14] встановлено, що об'ємну витрату пульпи можливо достатньо точно визначати за висотою матеріального потоку. У роботі [15] встановлені умови формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора, однак сам змінний потік піскового продукту ніхто не досліджував і не оцінював його вплив на точність вимірювання об'ємної витрати.

© А. М. Мацуй, В. О. Кондратець, 2016

Постановка задачі. Метою даної роботи є моделювання формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора з оцінкою точності вимірювання об'ємної витрати пульпи.

Специфічні особливості формування потоку. Рівномірний рух пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора характеризується функціональною залежністю об'ємної витрати пульпи від її висоти [14]. При цьому з ростом висоти потоку середня швидкість руху пульпи збільшується, однак функціональна залежність між витратою і висотою зберігається. Це дозволяє визначати об'ємну витрату пульпи у пісковому жолобі за висотою шляхом використання скануючих пристроїв [12, 13]. Математичним моделюванням формування піскового тіла у міжвиткому просторі механічного односпірального класифікатора встановлено, що при розвантаженні тверде у пісковий жолоб подається нерівномірно [16]. В залежності від величини циркулюючого навантаження середня об'ємна витрата пісків буде різною. Сам же характер сходження змінюватись не буде. Для дові-

Рис. 1 – Розподіл об'єму твердого в елементарних стовпчиках довжиною Δl, розташованих вздовж піскових тіл: *1, 2* – відповідно перше і друге піскове тіло; a, b, m, c – характерні точки.

льного значення циркулюючого навантаження розподіл об'єму твердого вздовж елементарних стовпчиків довжиною $\Delta l = 0,05$ м піскового тіла у двох циклах сходження, що рядом розташовані, приведено на рис. 1. Дані відповідають односпіральному класифікатору 1КСН-30.

З рис. 1 видно, що при незмінному значенні циркулюючого навантаження графіки, що характеризують піскові тіла, які слідують одне за одним, однакові. Врахувавши час сходження через пісковий поріг у пісковий жолоб одного елементарного стовпчика довжиною $\Delta l = 0,05$, можливо перейти до об'ємної витрати пісків у пісковому жолобі. При обертах спіралі 3 об/хв. (0,05 об/с) цей час складає $\Delta t = 0,5555$ с. Враховуючи залежності, доведені в [15], можливо отримувати зміни висоти потоку пульпи та швидкості її переміщення у пісковому жолобі, приймаючи рух рівномірним.

Характерні точки a, b, m і c (рис. 1) визначають особливості потоку. Точка a відповідає початку циклу розвантаження, b – найменшому значенню в циклі, m – найбільшому, а точка c – кінцю циклу. Охарактеризувати цикл розвантаження пісків можливо відносними відхиленнями параметра в певних точках відносно максимального значення в точці m. Тоді можливо записати

$$\delta_{Vma} = \left[\left(V_m - V_a \right) / V_m \right] \cdot 100\,\% ; \tag{1}$$

$$\delta_{Vmb} = \left[\left(V_m - V_b \right) / V_m \right] \cdot 100\,\% ; \tag{2}$$

$$\delta_{Vmc} = \left[\left(V_m - V_c \right) / V_m \right] \cdot 100\,\% ; \tag{3}$$

$$\delta_{Vac} = \left[\left(V_a - V_c \right) / V_a \right] \cdot 100\,\% , \tag{4}$$

де V_m, V_a, V_b, V_c – відповідно об'єми пісків, що відповідають конкретним точкам.

Приведені залежності (1) – (4) однотипні, але вони по-різному характеризують процес розвантаження пісків. Мабуть, однією з найбільш важливих оцінок є δ_{Vmb}, яка відповідає найбільшому відхиленню параметра. При цьому найбільш складно вирівняти поверхню матеріального потоку. Оцінки δ_{Vma} і δ_{Vmc} є проміжними. Вони характеризують стан потоку на початковій і кінцевій фазах розвантаження пісків і також впливають на рівномірність поверхні рухомого матеріалу. Оцінка δ_{Vac} визначає умови формування рухомої поверхні на стику

двох сусідніх циклів розвантаження пісків (рис. 1, криві 1 і 2). Кожна з розглянутих оцінок має певний фізичний зміст. Якщо $V_m = V_a = V_b = V_c$, то всі оцінки дорівнюють нулю, що відповідає рівномірному руху потоку пульпи. За цих умов точність вимірювання об'ємної витрати пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора буде найвищою. Якщо оцінки будуть відмінними від нуля, це означає появу нерівномірності руху пульпи у пісковому жолобі і зменшення точності вимірювання. Суттєві значення даних оцінок підтверджують нерівномірність руху рідкого матеріалу, зміну епюри швидкостей на окремих ділянках потоку і, як наслідок, виникнення значних похибок при вимірюванні об'ємної витрати пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора.

Зважаючи на те, що при розвантаженні пісків механічного односпірального класифікатора вода, що подається у пісковий жолоб, ефективно проходить у пісковий продукт при співударянні пісків і дна піскового жолоба, тверде не розшаровується ні за крупністю, ні за концентрацією частинок. В процесі руху в наслідок турбулентності частинки твердого знаходяться в положенні рівномірного розташування у зваженому стані [15]. Піски спірального класифікатора несуть з собою 12 % води [17]. Подача додаткової води у пісковий жолоб для досягнення незмінної розрідженості пісків не змінює закономірностей розташування матеріалу, зображених на рис. 1. Враховуючи це, можливо в процесі моделювання розглядати лише пісковий продукт, викликаючи операцію його розрідження. При цьому вважається, що піски володіють текучістю, яка притаманна пульпам.

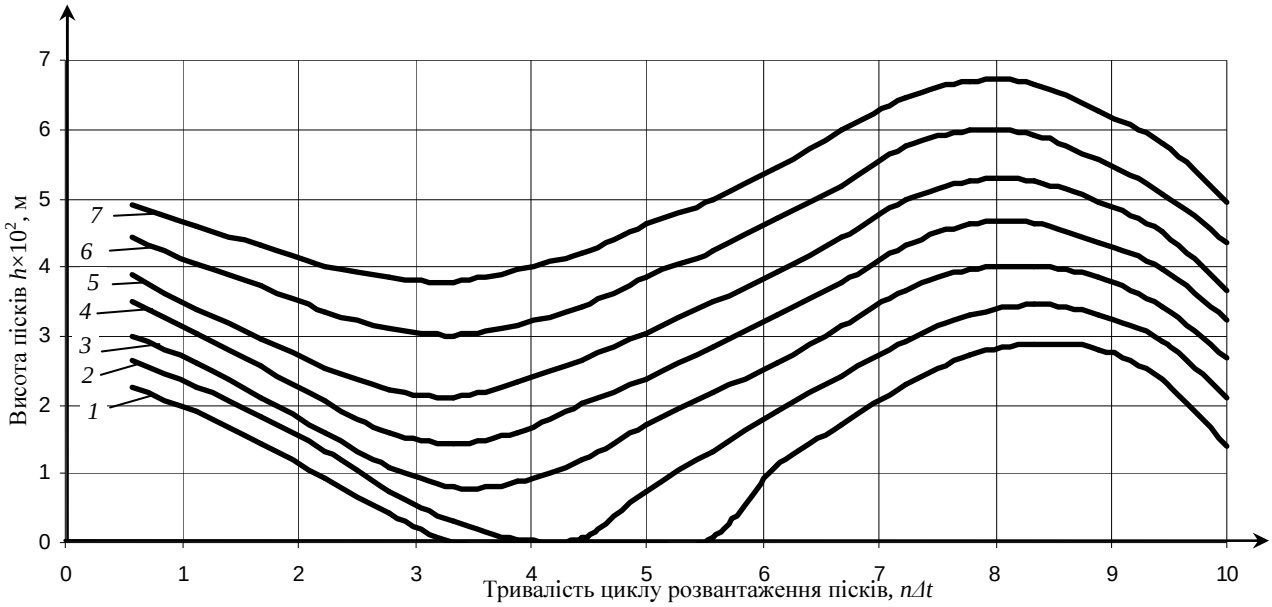


Рис. 2 – Миттєві значення висоти потоку в циклі розвантаження пісків при різній висоті піскового тіла:
1 – $5\Delta h$; 2 – $6\Delta h$; 3 – $7\Delta h$; 4 – $8\Delta h$; 5 – $9\Delta h$; 6 – $10\Delta h$; 7 – $11\Delta h$.

Цикли формування потоку. Моделювання формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора виконувалося для умов технологічного агрегату 1КСН-30, який має двозахідну спіраль діаметром 3 м і кроком 1,8 м. Піскове тіло – це піски, розташовані між двома сусідніми витками. Воно вздовж осі поділялось на елементарні складові $\Delta l = 0,05$ м, а вздовж вертикалі – на складові $\Delta h = 0,0318$ м. Вертикальні складові Δh створювали 11 горизонтальних шарів, що охоплюють всю висоту піскового тіла. При висоті піскового тіла $4\Delta h$ його об'єм незначний і не відповідає реальним циркулюючим навантаженням. Тому висота піскового тіла розглядалась в межах $5\Delta h ... 11\Delta h$. Крім того, піскове тіло подавалось вертикальними стовпчиками довжиною Δl, які мали різну ширину як в окремому шарі матеріалу, так і в різних шарах вздовж вертикалі. Окремий вертикальний стовпчик вздовж осі піскового тіла має за різних значень висоти, виражених у Δh, певний об'єм пісків, який і визначався в процесі моделювання. При обертанні спіралі, як звичайно це прийнято 3 об/хв (0,05 об/с), за час $\Delta t = 0,5555$ с сходить через пісковий поріг класифікатора у пісковий жолоб один вертикальний стовпчик з певним об'ємом твердого, формуючи пісковий потік. Зійшовший об'єм твердого ΔV за час Δt дозволяє визначати миттєве значення об'ємної витрати пісків у пісковому жолобі класифікатора, однак вона не дозволяє достатньо глибоко аналізувати процес формування потоку пульпи. Тому визначалися показники, що володіють більшою інформативністю – миттєві значення висоти потоку h і швидкості руху пісків. Миттєві значення висоти потоку в циклі розвантаження пісків при різних значеннях висоти піскового тіла приведені на рис. 2. З рис. 2 видно, що значення параметра в характерних точках a, b, m, c (рис. 1) різні. Це підтверджує,

що потік пісків буде нерівномірним, нерівномірність зростає при зменшенні висоти піскового тіла.

Миттєві значення швидкості руху пісків у пісковому жолобі в циклі розвантаження при різних висотах піскового тіла показані у вигляді графіків на рис. 3. Графіки зміни швидкості мають той же характер. Абсолютне значення миттєвих швидкостей зростає при збільшенні висоти піскового тіла. Вони мають ті ж характерні точки.

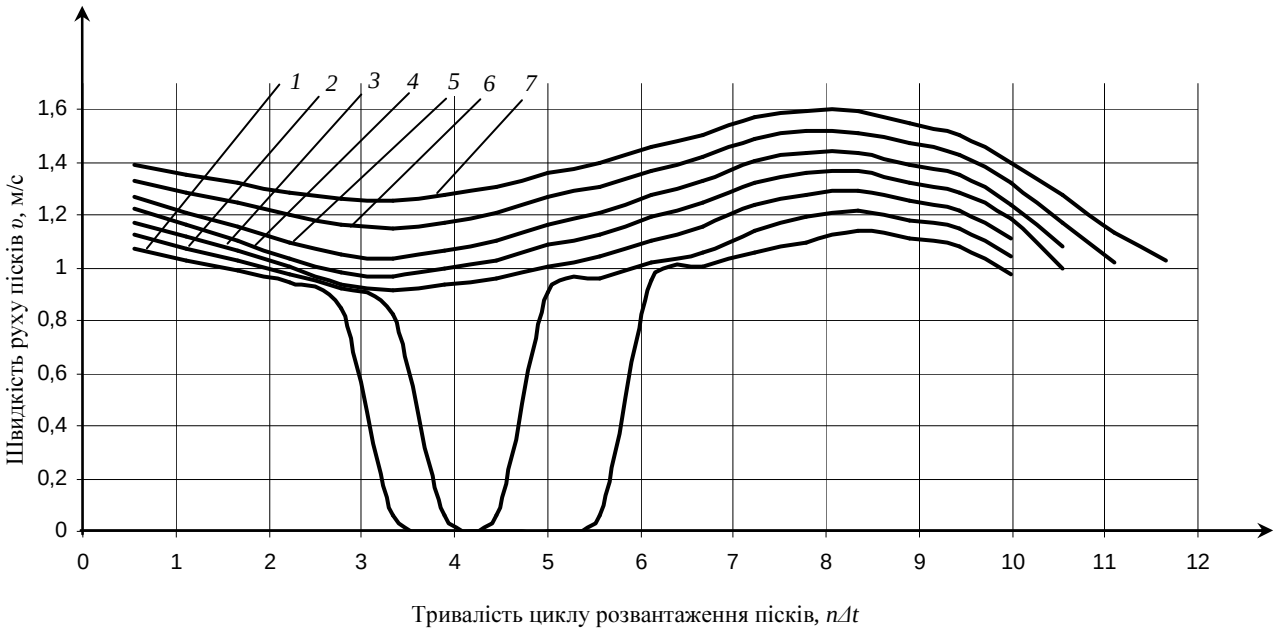


Рис. 3 – Миттєві значення швидкості руху матеріалу в циклі розвантаження пісків при різній висоті піскового тіла: 1 – $5\Delta h$; 2 – $6\Delta h$; 3 – $7\Delta h$; 4 – $8\Delta h$; 5 – $9\Delta h$; 6 – $10\Delta h$; 7 – $11\Delta h$.

Висота пісків h у пісковому жолобі сама не повністю характеризує формування матеріального потоку. Враховуючи, що при певній незмінній ширині піскового жолоба висота пісків h характеризує поперечний переріз потоку, добуток h на швидкість руху відповідає об'ємній витраті матеріалу. Тому доцільно розглянути поведінку пісків у пісковому жолобі, одночасно розглядаючи і висоту, і їх швидкість при певних $n\Delta h$. Аналізуючи, наприклад, залежності 4 на рис. 2 і рис. 3, можливо відмітити, що дія швидкості спричинює вирівнювання поверхні потоку, оскільки при найбільшій висоті пісків їм притаманна сама висока швидкість. Тобто, завдяки більшій швидкості накопичений матеріал за рахунок висоти у поперечному перерізі потоку зміщується на його ділянку з меншою висотою і швидкістю. Найгірші умови вирівнювання поверхні потоку будуть у зоні з найменшим значенням параметра. Такі процеси відбуваються і на стику циклів розвантаження пісків, оскільки значення рівня і швидкості в кінці циклу менші цих значень на його початку. Зрозуміло, що повного вирівнювання поверхні потоку тут не відбувається. Тому необхідно використовувати оцінки (1) – (4). Вони всі характеризують процес формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора, однак найбільш важливими слід визнати оцінки δ_{mb} і δ_{ac} .

Таблиця 1 – Оцінки, що характеризують висоту матеріалу у пісковому жолобі односпірального класифікатора в циклі розвантаження пісків

Висота піскового тіла класифікатора, виражена в умовних одиницях Δh	Відносне відхилення висоти матеріалу у пісковому жолобі в характерних точках циклу розвантаження пісків, %			
	δ_{hma}	δ_{hmb}	δ_{hmc}	δ_{hac}
$5\Delta h$	18,760	100,0	51,288	40,039
$6\Delta h$	20,900	100,0	40,043	24,201
$7\Delta h$	22,395	88,979	34,469	15,558
$8\Delta h$	24,021	72,303	65,003	53,939
$9\Delta h$	25,037	61,652	54,389	39,155
$10\Delta h$	26,123	50,253	68,857	57,845
$11\Delta h$	26,806	43,484	70,629	59,872

Тут використані розглянуті оцінки (1) – (4), але приведені відносно висоти h матеріалу у пісковому жолобі.

Аналіз отриманих результатів. Відповідно даним моделювання, які характеризуються залежностями, приведеними на рис. 2 і рис. 3, визначимо оцінки, що відповідають циклам розвантаження піскових тіл при різній їх висоті, вираженій у одиницях Δh. Значення оцінок стосовно висоти пісків у пісковому тілі класифікатора занесемо до табл. 1.

З даних табл. 1 слідує, що оцінка δ_{hma} нелінійно зростає, а δ_{hmb} нелінійно зменшується при збільшенні висоти піскового тіла. Оцінки δ_{hmc} і δ_{hac} спочатку зменшуються, а потім зростають. Значення оцінок високі. Особливо це стосується основної оцінки δ_{hmb}, де вона змінюється від 100 до 43,5 %. Достатньо високі значення і другої основної оцінки δ_{hac}, які змінюються в межах 15,6 … 59,9 %. Оцінка δ_{hmc} також приймає високі значення від 34,5 % до 70,6 %. Дещо менші значення 18,76 … 26,81 має δ_{hma}. При середніх значеннях циркулюючих навантажень оцінки також високі. Основна оцінка δ_{hma} тут змінюється в межах 61,6 … 89,0 %, а друга основна оцінка приймає значення 15,6 ... 53,9 % . Оцінка δ_{hmc} змінюється у більш широких межах 34,5 … 65,0 %, а δ_{hma} – у більш вузьких, але суттєвих межах – від 22,4 % до 25,0 %. Як видно, всі оцінки мають достатньо високі значення.

Значення оцінок, що стосуються швидкості руху матеріалу у пісковому жолобі класифікатора у характерних точках в циклі розвантаження пісків, приведені в табл. 2. Це будуть оцінки δ_{vma}, δ_{vmb}, δ_{vmc}, δ_{vac}.

Як видно з даних табл. 2, характер зміни оцінок практично однаковий з розглянутими раніше, однак як діапазон, так і величини цих оцінок менші. Вони суттєві за величиною. Основна оцінка δ_{vmb} висока, змінюється в межах 27,8…29,3 %. Основна оцінка особливо погіршується при зменшенні висоти піскового тіла (циркулюючих навантажень).

Таблиця 2 – Оцінки, що характеризують швидкість руху матеріалу у пісковому жолобі односпірального класифікатора в циклі розвантаження пісків

Висота піскового тіла класифікатора, виражена в умовних одиницях Δh	Відносне відхилення швидкості руху матеріалу у пісковому жолобі у характерних точках циклу розвантаження пісків, %			
	δ_{vma}	δ_{vmb}	δ_{vmc}	δ_{vac}
$5\Delta h$	5,783	100,0	14,449	9,198
$6\Delta h$	7,595	100,0	14,135	7,078
$7\Delta h$	9,027	29,230	13,802	5,249
$8\Delta h$	10,389	29,320	27,038	18,579
$9\Delta h$	11,330	27,836	24,796	15,187
$10\Delta h$	12,246	24,300	32,924	23,564
$11\Delta h$	12,779	21,536	35,488	26,036

Порівнюючи отримані дані, можливо відмітити, що як за рівнем матеріалу, так і за швидкістю його руху відхилення параметрів великі. Це вказує на суттєві коливання рівня і епюри швидкостей переміщення матеріалу на окремих ділянках потоку, що свідчить про несприятливі умови оцінювання об’ємної витрати пульпи в пісковому жолобі односпірального класифікатора за її висотою. У технологічних умовах, що потребують підвищення точності вимірювання цього параметра, необхідно відшукувати нові підходи його визначення.

Висновки. Моделюванням формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора встановлено, що в циклі розвантаження пісків за будь-яким параметром формується крива, яка має початкову, кінцеву точки, мінімум і максимум. Введені оцінки процесу в даних точках характеризують рівномірність потоку пульпи у пісковому жолобі. При рівномірному русі пульпи ці оцінки дорівнюють нулю. З ростом нерівномірності потоку вони збільшуються. Визначалися оцінки відносно миттєвих значень висоти пісків і швидкості їх переміщення. В реальних умовах ці оцінки значні і можуть приймати значення від 5 до 100 %. Це доводить великі коливання висоти потоку і швидкості переміщення матеріалу, що унеможливлює застосування і підвищення точності пристроїв оцінювання об’ємної витрати пульпи за висотою потоку. У технологічних умовах, де вимагається підвищення точності вимірювання об’ємної витрати пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора, слід орієнтуватися на розробку нових підходів вимірювання даного параметра.

Перспективою подальших досліджень є розробка нових, більш ефективних підходів вимірювання об’ємної витрати пульпи у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора.

Список літератури

1. *Пивняк Г. Г., Вайсберг Л. А., Кириченко В. И. и др.* Измельчение. Энергетика и технологии. – М. : Изд. дом «Руда и Металлы», 2007. – 296 с.

2. *Азарян А. А., Кириченко Ю. Ю., Кучер В. Г.* Автоматизация первой стадии измельчения, классификации и магнитной сепарации – реальный путь повышения эффективности обогащения железных руд // Вісник Криворізького національного університету : зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 36. – С. 276 – 280.

3. *Купін А. І.* Інтелектуальна ідентифікація та керування в умовах процесів збагачувальної технології. – Кривий Ріг : Видавництво КТУ, 2008. – 204 с.

4. *Морозов В. В., Топчаев В. П., Улитенко К. Я. и др.* Разработка и применение автоматизированных систем управления процессами обогащения полезных ископаемых. – М. : Издательский дом «Руда и Металлы», 2013. – 512 с.

5. *Кондратець В. О., Сербул О. М.* Ідентифікація співвідношення руда/вода на вході кульового млина // Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація : зб. наук. праць КНТУ. – 2006. – Вип. 17. – С. 265 – 272.

6. *Кондратець В. О., Мацуй А. М.* Ідентифікація співвідношення руда/вода в процесі подрібнення пісків класифікатора // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – №3. – С. 8 – 12.

7. *Кондратець В. О.* Ідентифікація розрідження пульпи у млині, що подрібнює піски класифікатора з додатковою рудою // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – № 3 (50). – С. 305 – 310.

8. А.с. 1269838 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения производительности спирального классификатора по пескам / *В. И. Дмитриев* (СССР). – № 3904014/22–03; заявл. 27.05.85; опубл. 15.11.86, Бюл. № 42.

9. А.с. 1530258 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ определения производительности спирального классификатора по пескам / *Е. Ф. Морозов* (СССР). – № 4385577/22–03; заявл. 29.02.88; опубл. 23.12.89, Бюл. №47.

10. А.с. 1659102 СССР, МКИ В 03 В 13/00. Способ оперативного определения производительности спирального классификатора по пескам / *В. И. Дмитриев* (СССР). – № 4645509/03; заявл. 19.12.88; опубл. 30.06.91, Бюл. № 24.

11. А.с. 570398 СССР, МКИ В 03 В 13/04. Устройство для измерения циркулирующей загрузки / *Ф. Н. Дегтярев, А. А. Мерзляков, В. А. Кондратец, Л. П. Байда, Н. В. Гончаров* (СССР). – № 1676560/03; заявл. 28.06.71; опубл. 30.08.77, Бюл. № 32.

12. *Кондратець В. О.* Теоретичне дослідження сканування поверхні відкритих матеріальних потоків променями незмінної довжини // Вісник Криворізького національного університету : зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 35. – С. 174 – 178.

13. *Кондратець В. О., Мацуй А. М.* Теоретичне дослідження активного і пасивного сканування поверхні відкритих матеріальних потоків // Гірничий вісник : наук.-техн. зб. ДВНЗ «КНУ». – 2015. – Вип. 100. – С. 52 – 57.

14. *Кондратець В. О., Мацуй А. М.* Математичне моделювання рівномірного руху пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора // Вісник Криворізького національного університету : зб. наук. праць. – 2016. – Вип. 41. – С. 6 – 12.

15. *Кондратець В. О., Мацуй А. М.* Дослідження умов формування потоку пульпи у пісковому жолобі односпірального класифікатора // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1178). – С. 24 – 30.

16. *Мацуй А. М.* Математичне моделювання формування піскового тіла у міжвитковому просторі механічного спірального класифікатора // Автоматизация технологических и бизнес процессов. – 2015. – Том 7. – Вип. 4. – С. 9 – 17.

17. *Кондратец В. А.* Исследование влагосодержания песков двухспиральных механических классификаторов в промышленных условиях // Вісник Криворізького національного університету : зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 36. – С. 168 – 172.

References (transliterated)

1. Pyvnyak G. G., Vaisberg L. A., Kirichenko V. I. et al. *Izmel'chenie, Energetika i tekhnologiya* [Grinding. Energy and technology]. Moscow, Izdatel'skiy dom "Ruda i Metally" Publ., 2007. 296 p.

2. Azaryan A. A., Kirichenko Yu. Yu., Kucher V. G. Avtomatizatsiya pervoy stadii izmel'cheniya, klassifikatsii i magnitnoy separatsii – real'nyy put' povysheniya effektivnosti obogashcheniya zheleznykh rud [Automation of the first grinding step, classification and magnetic separation - the real way to improve the efficiency of iron ore enrichment]. *Visnyk Kryvoriz'kogo nacional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2014, no. 36, pp. 276–280.

3. Kupin A. I. *Intelektual'na identyfikaciya ta keruvannya v umovakh protsesiv zbagachuval'noyi tekhnologiyi* [The intelligent identification and the management in terms of enrichment technology processes]. Kryvyi Rih, Vydavnyctvo KTU Publ., 2008. 204 p.

4. Morozov V. V., Topchaev V. P., Ulitenko K. Ya. et al. *Razrabotka i primenenie avtomatizirovannykh sistem upravleniya protsessami obogashcheniya poleznykh iskopaemykh* [Development and application of the automated control systems of mineral processing]. Moscow, Izdatel'skii dom "Ruda i Metally" Publ., 2013. 512 p.

5. Kondratec' V. O., Serbul O. M. Identyfikatsiya spivvidnoshennya ruda/voda na vkhodi kul'ovogo mlyna [Identification of ore / water ratio at the feed-in of ball mill]. *Tekhnika v sil's'kogospodars'komu vyrobnytstvi, galuzeve mashynobuduvannya, avtomatyzatsiya: zb. nauk. prac' KNTU* [Equipment for agriculture, mechanical engineering branch, automation: digest of scientific papers of the KNTU]. Kirovograd, 2006, no. 17, pp. 265–272.

6. Kondratec' V. O., Macuy A. M. Identyfikatsiya spivvidnoshennya ruda/voda v protsesi podribnennya piskiv klasyfikatora [Identification of ore / water ratio in the grinding of classifier sands]. *Visnyk Vinnyts'kogo politekhnichnogo instytutu* [Bulletin of the Vinnitsa Polytechnic Institute]. Vinnitsa, 2009, no. 3. pp. 8–12.

7. Kondratec' V. O. Identyfikatsiya rozridzhennya pul'py u mlyni, shho podribnyue pisky klasyfikatora z dodatkovoyu rudoyu [Identification of pulp dilution in a mill that grinds classifier sand with additional ore]. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Kherson National Technical University]. Kherson, 2014, no. 3. pp. 305–310.

8. Dmitriev V. I. *Sposob opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of determining the productiveness of a spiral classifier by sands]. SU patent no. 1269838. 15.11.1986.

9. Morozov E. F. *Sposob opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of determining the productiveness of a spiral classifier by sands]. SU patent no. 1530258. 23.12.1989.

10. Dmitriev V. I. *Sposob operativnogo opredeleniya proizvoditel'nosti spiral'nogo klassifikatora po peskam* [A method of determining the operational productiveness of a spiral classifier by sands]. SU patent no. 1659102, 30.06.1991.

11. Degtyarev F. N., Merzlyakov A. A., Kondratets V. A., Bayda L. P., Goncharov N. V. *Ustroistvo dlya izmereniya tsirkuliruyushchey nagruzki* [A device for measuring circulating load]. SU patent no. 570398. 30.08.1977.

12. Kondratec' V. O. Teoretychne doslidzhennya skanuvannya poverkhni vidkrytykh material'nykh potokiv promenyamy nezminnoyi dovzhyny [A theoretical study of scanning the surface of open material flow by rays of constant length]. *Visnyk Kryvoriz'kogo natsional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2013, no. 35, pp. 174–178.

13. Kondratec' V. O., Macuy A. M. Teoretychne doslidzhennya aktyvnogo i pasyvnogo skanuvannya poverkhni vidkrytykh material'nykh potokiv [Theoretical study of active and passive scanning of the surface of open material flow]. *Girnychyy visnyk* [Mining Journal]. Kryvyi Rih, 2015, no. 100, pp. 52–57.

14. Kondratec' V. O., Macuy A. M. Matematychne modelyuvannya rivnomirnogo rukhu pul'py u piskovomu zholobi odnospiral'nogo klasyfikatora [Mathematical modeling of uniform motion of pulp in the sand chute of a single spiral classifier]. *Visnyk Kryvoriz'kogo natsional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2016, no. 41, pp. 6–12.

15. Kondratec' V. O., Macuy A. M. Doslidzhennya umov formuvannya potoku pul'py u piskovomu zholobi odnospiral'nogo klasyfikatora [The study of the conditions of formation of pulp stream in the sand chute of a single spiral classifier]. *Visnyk Nacional'nogo tehnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnici ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, 2016, no. 6, pp. 24–30.

16. Macuy A. M. Matematychne modelyuvannya formuvannya piskovogo tila u mizhvytkovomu prostori mekhanichnogo spiral'nogo klasyfikatora [Mathematical modeling of forming sand body in the interturn space of a mechanical spiral classifier]. *Avtomatizatsiya tekhnologicheskikh i biznes protsessov* [Automation of technological and business processes]. Odesa, 2015, no. 4, pp. 9–17.

17. Kondratets V. A. Issledovanie vlagosoderzhaniya peskov dvukhspiral'nykh mekhanicheskikh klassifikatorov v promyshlennykh usloviyakh [The research of sand moisture content of double-mechanical classifiers in the industrial conditions]. *Visnyk Kryvoriz'kogo nacional'nogo universytetu* [Bulletin of the Kryvyi Rih National University]. Kryvyi Rih, 2014, no. 36, pp. 168–172.

Надійшла (received) 06.10.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Моделювання формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора / А. М. Мацуй, В. О. Кондратець // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 53 – 59. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Моделирование формирования пескового потока в песковом желобе механического односпирального классификатора / А. Н. Мацуй, В. А. Кондратец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 53 – 59. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Modeling formation of sand flow in sand chute of mechanical single spiral classifier / A. N. Matsui, V. A. Kondratets, // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 53 – 59. Bibliog.: 17 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мацуй Анатолій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград; тел.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Мацуй Анатолий Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Кировоградский национальный технический университет, г. Кировоград; тел.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Matsui Anatolii Nikolaevich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kirovohrad National Technical University, Kirovohrad; tel.: (050) 060-48-70, (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Кондратець Василь Олександрович – доктор технічних наук, професор, Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Кондратец Василий Александрович – доктор технических наук, профессор, Кировоградский национальный технический университет, г. Кировоград; тел.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

Kondratets Vasiliy Aleksandrovich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kirovohrad National Technical University, Kirovohrad; tel.: (0522) 56-70-91; e-mail: matsuyan@mail.ru.

УДК 629.017

В. И. НАЗАРОВ, А. И. НАЗАРОВ, И. А. НАЗАРОВ, Д. В. АБРАМОВ, А. И. ТИМЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОРТОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОРМОЗНОЙ СИЛЫ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ ЛЕГКОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ В ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ УСЛОВИЯХ С УЧЕТОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ

Запропоновано математичну модель екстреного гальмування легкового автомобіля в експлуатаційних умовах з урахуванням аеродинамічного опору, на підставі якої отримано аналітичні залежності розподілу гальмівних сил між колесами різних бортів. На прикладі легкових автомобілів Lanos, Lada Priora, Chevrolet Aveo, Forza розглянуто роботу створеного алгоритму, наведено результати роботи комп'ютерної програми і аналіз отриманих даних розрахункового експерименту. Проаналізовано перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: легковий автомобіль, бортовий розподіл гальмівної сили, експлуатаційні умови.

Предложена математическая модель экстренного торможения легкового автомобиля в эксплуатационных условиях с учетом аэродинамического сопротивления, на основании которой получены аналитические зависимости распределения тормозных сил между колесами различных бортов. На примере легковых автомобилей Lanos, Lada Priora, Chevrolet Aveo, Forza рассмотрена работа созданного алгоритма, приведены результаты работы компьютерной программы и анализ полученных данных расчетного эксперимента. Проанализированы перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: легковой автомобиль, экстренное торможение, бортовое распределение тормозной силы, эксплуатационные условия.

© В. И. Назаров, А. И. Назаров, И. А. Назаров, Д. В. Абрамов, А. И. Тимченко, 2016

A mathematical model of emergency braking of a vehicle in operational environment taking into account aerodynamic drag is presented. Based on the model analytical dependences of the distribution of braking forces between the wheels of different vehicle sides are obtained. Using the dependency ratios the dynamic changes of normal reactions and board unevenness of brake forces during emergency braking of the vehicle are obtained. It is possible to eliminate the uneven distribution of the brake force on the vehicle wheels by installing brake actuators, comprising regulators of brake forces and hydraulic feedback from the front end suspension and providing either side or combined braking actuator circuit. We demonstrate the created algorithm on the example of the Lanos, Lada Priora, Chevrolet Aveo, Forza vehicles; the results of the computer simulation are given and the experimental data are analyzed. Also the prospects for future research are studied.

Key words: car, brake force board distribution, operating conditions.

Введение. Следует четко понимать, что в процессе эксплуатации автомобиль является частью системы «автомобиль-водитель-дорога-среда» и его свойства проявляются во взаимодействии с элементами этой системы [1]. Поэтому значимость определенного эксплуатационного свойства зависит от условий, в которых данное свойство проявляется, то есть от условий эксплуатации.

В целом условия эксплуатации определяются дорожными, транспортными и природно-климатическими условиями [1].

В наибольшей степени на распределение тормозных сил между колесами легковых автомобилей влияют дорожные условия [1, 2]. К ним относят: элементы профиля и плана дорог, рельеф местности, вид покрытия и его неровности, интенсивность и режим движения по дороге.

Так, в соответствии с [3] поперечный уклон проезжей части, кроме участков, на которых предусмотрены виражи, назначается в зависимости от материала дорожного покрытия. На дорогах с асфальтобетонным и цементобетонным покрытием поперечный уклон проезжей части принимается 2,5 %. На дорогах со щебеночным покрытием поперечный уклон назначается от 2,5 % до 3,0 %, с грунтовым покрытием и брусчаткой 3,0 - 4,0 %. Этот же стандарт устанавливает и предельную скорость движения.

Однако не только дорожные условия влияют на перераспределение тормозных сил на колесах автомобиля при торможении. Существенное влияние оказывает и аэродинамическое сопротивление [4].

Анализ последних исследований. В научных трудах, которые считаются классическими, детально рассматриваются вопросы, связанные с перераспределением тормозных сил на осях автомобилей при торможении в связи с изменением их нормальных реакций. Однако классические выражения получены из условия затормаживания на ровной горизонтальной дороге (без учета поперечных и продольных уклонов дороги, радиуса кривизны и т.д.) и пренебрегают действием аэродинамического фактора [4] ввиду незначительности его действия.

Фактическая траектория движения при торможении легкового автомобиля, включая сопряженные прямолинейные и криволинейные участки дороги, при возмущающем воздействии дорожных неровностей и аэродинамических потоков [4], вызывает различие бортовых нормальных реакций, что требует динамического согласования тормозного усилия на педали с предельными тормозными силами на колесах [5].

В литературном источнике [4] указывается, что возмущающие факторы, вызывающие изменение показателей тормозных свойств легковых автомобилей, носят случайный характер и определяются их конструктивными и эксплуатационными параметрами. Наиболее важными из них являются значение коэффициента сцепления шины с опорной поверхностью дороги, коэффициент распределения тормозных сил, положение центра масс автомобиля, перераспределение нормальных реакций между колесами при торможении и особенности конструкции элементов их тормозных систем.

Следовательно, исследование влияния эксплуатационных факторов (дорожные условия и аэродинамическое сопротивление движению) на изменение тормозных сил на колесах автомобиля в процессе экстренного торможения является актуальным.

Постановка задачи. Целью работы является оценка изменения тормозных сил и нормальных реакций на колесах различных осей и бортов легкового автомобиля, совершающего экстренное торможение, при действии возмущающих эксплуатационных факторов.

Задача бортового распределения тормозной силы автомобиля заключается в том, что неравномерность перераспределения нормальных реакций на колесах его различных бортов в силу действия эксплуатационных факторов приводит к необходимости неравномерной реализации их предельных тормозных сил, считая коэффициент сцепления на всех колесах одинаковым. В таком случае появляется необходимость в регулировании тормозной силы между колесами правого и левого бортов автомобиля.

Работа выполнена согласно плану научно-исследовательских работ кафедры технологии машиностроения и ремонта машин ХНАДУ по направлению «Повышение эффективности и функциональной стабильности тормозных систем эксплуатируемых легковых автомобилей, не оборудованных АБС» номер государственной регистрации 0115u002656 и в соответствии с договором №3/КЕО от 20.06.2010 о творческом сотрудничестве между Харьковским национальным автомобильно-дорожным университетом и конструкторско-экспериментальным отделом Запорожского автомобилестроительного завода.

Методы исследования. В настоящей работе использовались методы классической механики, теории подобия и математического моделирования.

Математическая модель. Рассмотрим действие эксплуатационных факторов на перераспределение нормальных реакций (предельных тормозных сил) на колесах легкового автомобиля, движущегося по автомобильной дороге в общем случае (рис. 1).

Для оценки перераспределения нормальных реакций на колесах легкового автомобиля, движущегося по горизонтальной дороге с поперечным уклоном при действии продольной, вертикальной и поперечной составляющих аэродинамической силы, рассмотрим сумму моментов, действующих в поперечной плоскости автомобиля (рис. 1, *а*), относительно точки *M*.

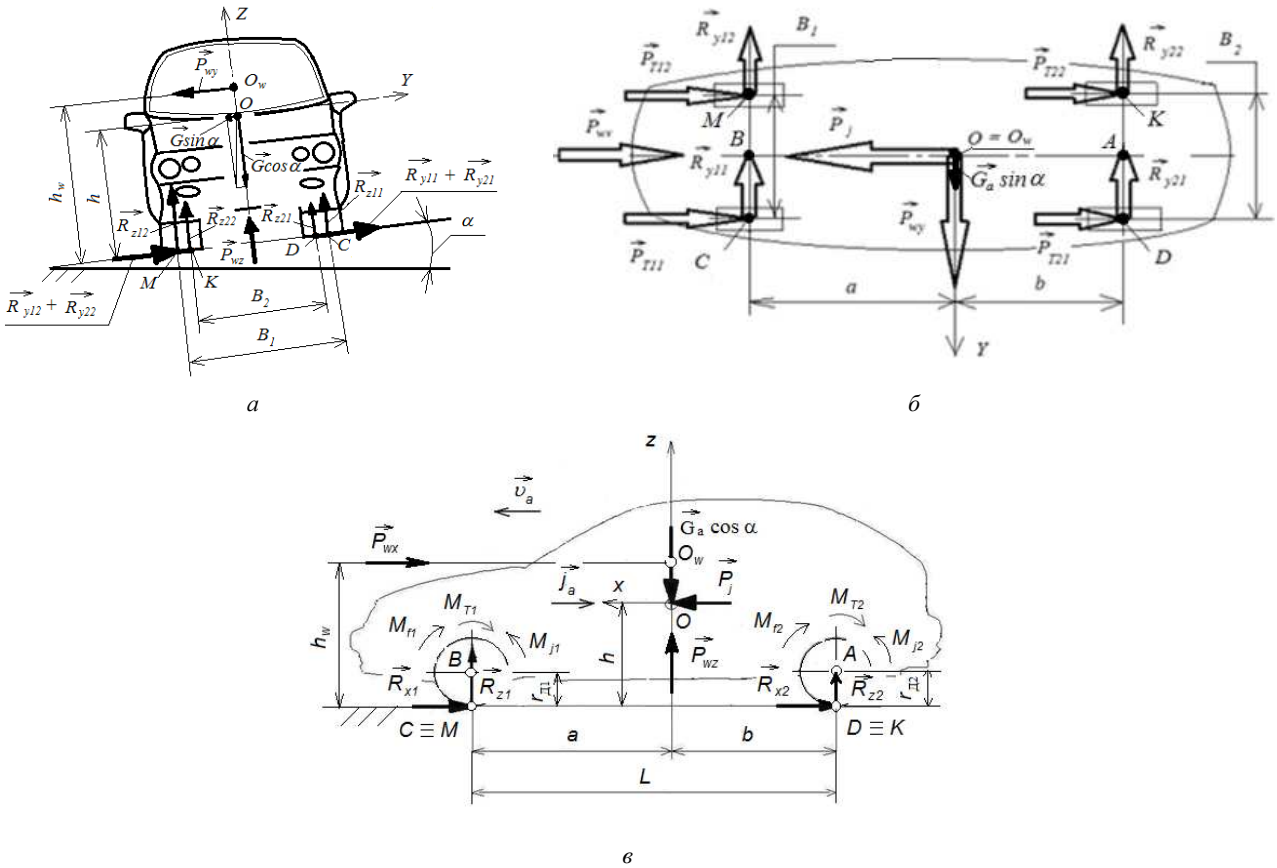


Рис. 1 – Схема сил, действующих на автомобиль при торможении:
а – вид спереди; *б* – вид сверху; *в* – вид сбоку.

В результате получим

$$R_{z11}\cdot B_1 + R_{z21}\cdot\left(B_2+0,5\left(B_1-B_2\right)\right)+0,5P_{wz}\cdot B_1-0,5G_a\cdot B_1\cdot\cos\alpha+$$
$$+G_a\cdot h\cdot\sin\alpha+P_{wy}\cdot h_w+0,5R_{z22}\cdot\left(B_1-B_2\right)=0, \qquad (1)$$

где R_{z11} – нормальная реакция на переднем левом колесе; R_{z21} и R_{z22} – нормальная реакция на заднем левом и правом колесах; B_1 и B_2 – колея передних и задних колес автомобиля; h и h_w – высота расположения центра масс и метацентра автомобиля; P_{wy} и P_{wz} – боковая и вертикальная составляющие аэродинамической силы; G_a – вес автомобиля; α – угол поперечного уклона дороги.

С учетом обозначения

$$A=0,5P_{wz}\cdot B_1-0,5G_a\cdot B_1\cdot\cos\alpha+G_a\cdot h\cdot\sin\alpha+P_{wy}\cdot h_w, \qquad (2)$$

получим выражение

$$R_{z11}\cdot B_1+R_{z21}\cdot\left(B_2+0,5\left(B_1-B_2\right)\right)+0,5R_{z22}\cdot\left(B_1-B_2\right)+A=0\,. \qquad (3)$$

Рассматривая сумму моментов, действующих в поперечной плоскости автомобиля, относительно точки K (рис. 1, *а*), получим

$$R_{z21}\cdot B_2+R_{z11}\cdot\left(B_2+0,5\left(B_1-B_2\right)\right)+0,5P_{wz}\cdot B_2-0,5G_a\cdot B_2\cdot\cos\alpha+$$
$$+G_a\cdot h\cdot\sin\alpha+P_{wy}\cdot h_w-0,5R_{z12}\cdot\left(B_1-B_2\right)=0, \qquad (4)$$

откуда

$$R_{z21}\cdot B_2+R_{z11}\cdot\left(B_2+0,5\left(B_1-B_2\right)\right)-0,5R_{z12}\cdot\left(B_1-B_2\right)+B=0, \qquad (5)$$

где R_{z12} – нормальная реакция на переднем правом колесе;

$$B = 0,5P_{wz} \cdot B_2 - 0,5G_a \cdot B_2 \cdot \cos\alpha + G_a \cdot h \cdot \sin\alpha + P_{wy} \cdot h_w.$$

Аналогично, рассматривая сумму моментов, действующих в горизонтальной плоскости автомобиля, относительно точек B и A (рис. 1, *б*), получим соответственно

$$-0,5P_{T12} \cdot B_1 + 0,5P_{T11} \cdot B_1 + R_{y21} \cdot L + R_{y22} \cdot L -$$
$$-0,5P_{T22} \cdot B_2 + 0,5P_{T21} \cdot B_2 - G_a \cdot a \cdot \sin\alpha - P_{wy} \cdot a = 0, \quad (6)$$
$$-0,5P_{T12} \cdot B_1 - 0,5P_{T22} \cdot B_2 - R_{y12} \cdot L - R_{y11} \cdot L +$$
$$+0,5P_{T11} \cdot B_1 + 0,5P_{T21} \cdot B_2 + G_a \cdot b \cdot \sin\alpha + P_{wy} \cdot b = 0, \quad (7)$$

где P_{T11} и P_{T12} – тормозная сила на переднем левом и правом колесе; R_{y11} и R_{y12} – боковая сила на переднем левом и правом колесе; P_{T21} и P_{T22} – тормозная сила на заднем левом и правом колесе; R_{y21} и R_{y22} – боковая сила на заднем левом и правом колесе; L – продольная база автомобиля.

Подставляя выражения для предельных тормозных сил на колесах автомобиля и их боковых реакций в зависимости (6) и (7), после преобразований получим соответственно

$$-R_{z11} \cdot \varphi \cdot B_1 + R_{z12} \cdot \varphi \cdot B_1 - R_{z21} \cdot (2f \cdot L + \varphi \cdot B_2) -$$
$$-R_{z22} \cdot (2f \cdot L - \varphi \cdot B_2) + C = 0, \quad (8)$$
$$-R_{z11} \cdot (\varphi \cdot B_1 - 2f \cdot L) - R_{z12} \cdot (\varphi \cdot B_2 + 2f \cdot L) +$$
$$+R_{z21} \cdot \varphi \cdot B_2 - R_{z22} \cdot \varphi \cdot B_2 + D = 0, \quad (9)$$

где φ – коэффициент сцепления в продольном направлении колеса; f – коэффициент сцепления в боковом направлении колеса;

$$C = 2a \cdot (P_{wy} + m_a \cdot g \cdot \sin\alpha); \; D = 2b \cdot (P_{wy} + m_a \cdot g \cdot \sin\alpha).$$

Решая совместно систему уравнений (3) и (5), (8) и (9), после преобразований получаем новую систему уравнений с двумя неизвестными.

Решая ее относительно R_{z12} и R_{z22}, получим выражения для нормальной реакции на переднем и заднем правом колесе в виде:

$$R_{z12} = \frac{1}{4B_1} \cdot \left[(3B_1 + B_2) \cdot R_{z1} + (3B_2 + B_1) \cdot R_{z2} - 4B_2 \cdot R_{z2} + 2C_3 \right]; \quad (10)$$

$$R_{z12} = \frac{2B_1}{3B_1 - B_2} \cdot \left[\left(\frac{B_1 - B_2}{8B_1 \cdot B_2} \cdot (B_1 + B_2) \cdot R_{z1} - (B_1 - 3B_2) \cdot R_{z2} + 2C_3 \right) - \frac{C_4}{2B_2} \right], \quad (11)$$

где $C_3 = 0,5 \cdot (B_1 + B_2) \cdot (P_{wz} - m_a \cdot g \cdot \cos\alpha) + 2P_{wy} \cdot h_w + 2m_a \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha$;

$C_4 = 0,5 \cdot (B_1 + B_2) \cdot (m_a \cdot g \cdot \cos\alpha - P_{wz}) + 2P_{wy} \cdot h_w + 2m_a \cdot g \cdot h \cdot \sin\alpha$.

Нормальная реакция на переднем и заднем левом колесах автомобиля определяется соответственно как

$$R_{z11} = R_{z1} - R_{z12}, \quad (12)$$
$$R_{z21} = R_{z2} - R_{z22}. \quad (13)$$

Принимая во внимание то, что в рассматриваемом случае (рис. 1) в поперечной плоскости автомобиля действуют вертикальная $G_a \cdot \cos\alpha$ и горизонтальная $G_a \cdot \sin\alpha$ составляющие веса автомобиля, то, следуя методике, представленной выше, получим выражения для определения суммарной нормальной реакции на передней и задней осях автомобиля:

$$R_{z1} = \frac{1}{L} \cdot \left[m_a \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (b + z \cdot h) - E \right]; \quad (14)$$

$$R_{z2} = \frac{1}{L} \cdot \left[m_a \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (a - z \cdot h) + E \right], \quad (15)$$

$$E = m_a \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (f_a \cdot r_{CT} + r_k \cdot (z - \varphi) + K),$$

$$K = K_0 \cdot F_w \cdot \vartheta_0^2 \cdot \left[h_w - r_k \cdot (1 - \lambda_z \cdot \varphi) - \lambda_z \cdot (a + f_a \cdot r_{CT}) \right] - \frac{z \cdot g}{r_k} \cdot \sum I_i,$$

где r_{CT} и r_k – статический и кинематический радиусы колеса; f_a – коэффициент сопротивления качению колеса; z – коэффициент торможения; λ_z – отношение вертикальной и продольной составляющих аэродинамической силы; K_0 – коэффициент обтекаемости кузова автомобиля; F_w – площадь лобового сопротивления авто-

мобиля (площадь Миделя); $\sum I_i$ – суммарный момент инерции вращающихся масс на колесах автомобиля.

При $\alpha = 0$ выражения (14) и (15) характеризуют осевые нормальные реакции на осях автомобиля при торможении на горизонтальном участке дороги с учетом аэродинамического сопротивления [6].

Как следует из (14) и (15), при экстренном торможении легкового автомобиля с учетом эксплуатационного фактора нормальные осевые реакции отличаются от тех же реакций, определенных по классическим зависимостям, не учитывающим действие эксплуатационного фактора [4], то есть при $E = 0$ и $\alpha = 0$.

Влияние эксплуатационного фактора легкового автомобиля будем оценивать относительным изменением нормальных реакций на осях, то есть коэффициентом динамического изменения нормальных реакций, которые представляют собой соотношение

$$m_{Ri} = \frac{R_{zi}}{R_{zi}^0}, \tag{16}$$

где R_{zi} – нормальная нагрузка на i – ой оси легкового автомобиля, определенная по зависимостям (14) и (15); R_{zi}^0 – нормальная нагрузка на i – ой оси легкового автомобиля, определенная по классическим формулам [4].

Неравномерность распределения суммарной тормозной силы по бортам легкового автомобиля будем характеризовать коэффициентом бортовой неравномерности тормозных сил

$$\delta = \frac{P_{T11} + P_{T21}}{P_{T12} + P_{T22}}, \tag{17}$$

где P_{T11} и P_{T12} - тормозные силы соответственно на переднем левом и правом колесах; P_{T21} и P_{T22} - тормозные силы соответственно на заднем левом и правом колесах.

Таблица 1 – Результаты расчетов при торможении на горизонтальной дороге

Автомобиль	Коэффициент бортовой неравномерности тормозных сил, δ_T	Коэффициент динамического изменения нормальной реакции, m_{Ri}	
		передняя ось	задняя ось
Lanos	1,0	0,915 - 0,88	1,23 - 1,49
	1,0	0,92 - 0,88	1,12 - 1,23
Lada Priora	1,0	0,94 - 0,91	1,16 - 1,33
	1,0	0,9 - 0,85	1,17 - 1,32
Chevrolet Aveo	1,0	0,914 - 0,875	1,24 - 1,53
	1,0	0,897 - 0,848	1,16 - 1,302
Forza	1,0	0,916 - 0,877	1,23 - 1,50
	1,0	0,903 - 0,86	1,17 - 1,32

Примечание. В числителе указаны значения для автомобиля со снаряженной массой, в знаменателе – с полной массой.

На основании предложенного выше алгоритма при помощи разработанной компьютерной программы получены расчетные значения нормальных осевых и колесных реакций, а также параметров торможения, определяемых по уточненной и классической теории для легковых автомобилей Lanos, Lada Priora, Chevrolet Aveo, Forza, при начальной скорости торможения 80 – 150 км/час на автомобильной дороге категории 1-а с сухим дорожным покрытием.

Результаты численного моделирования. На основании полученных расчетных данных определены коэффициенты изменения осевых нормальных реакций и бортовой неравномерности тормозных сил при экстренном торможении легкового автомобиля на горизонтальном участке дороги при действии продольной и вертикальной составляющих аэродинамической силы (табл. 1).

Анализ расчетных значений (табл. 1) показывает, что для легковых автомобилей Lanos, совершающих экстренное торможение на горизонтальной дороге, коэффициент динамического изменения нормальной нагрузки на задней оси увеличивается в следующих пределах [6]:

- со снаряженной массой – 1,23 - 1,49;
- с полной массой – 1,12 - 1,23.

Следовательно, в отличие от классической теории, с учетом аэродинамических сил сопротивления движению при увеличении начальной скорости торможения в начальный момент торможения имеет место увеличение реализуемой тормозной силы на задней оси автомобиля со снаряженной массой на 23 - 49 %, а с полной массой на 12 - 23 %.

Если учесть, что на момент экстренного торможения легковой автомобиль двигался по горизонтальной дороге с максимальным ускорением, то по данным [4] максимальный запас суммарной не реализованной тормозной силы (момента) на задних колесах легкового автомобиля может быть дополнительно увеличен на 12 %, и тогда может достигать 24 – 35 % для автомобиля с полной загрузкой.

Аналогично, для легковых автомобилей коэффициент динамического изменения нормальной нагрузки на задней оси увеличивается с ростом начальной скорости торможения и составляет [6]:

– для Lada Priora 39 – 44 %;
– для Chevrolet Aveo 28 – 42 %;
– для Forza 39 – 44 %.

Кроме того, следует заключить, что в случае торможения легковых автомобилей на ровной горизонтальной

дороге в их тормозном приводе должно быть осуществлено регулирование тормозных сил по предлагаемому способу [7], обеспечив осевую или диагональную схему включения контуров тормозного привода, поскольку бортовая неравномерность тормозных сил при этом отсутствует ($\delta_T = 1$, табл. 1).

В данном случае является возможным также осуществление бортовой или комбинированной схемы включения контуров тормозного привода.

Результаты расчетов при торможении на горизонтальной дороге с поперечным уклоном 3,5% представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты расчетов при торможении на дороге с поперечным уклоном (3,5 %)

Автомобиль	Коэффициент бортовой неравномерности тормозных сил, δ_T	Коэффициент динамического изменения нормальной реакции, m_{Ri}	
		передняя ось	задняя ось
Lanos	1,12 – 1,17	0,88 – 0,90	1,24 – 1,49
	1,04 – 1,05	0,88 – 0,90	1,22 – 1,23
Lada Priora	1,135 – 1,18	0,90 – 0,91	1,13 – 1,33
	1,04 – 1,05	0,85 – 0,90	1,13 – 1,32
Chevrolet Aveo	1,18 – 1,21	0,87 – 0,90	1,26 – 1,53
	1,06 – 1,08	0,85 – 0,90	1,13 – 1,30
Forza	1,16 – 1,18	0,88 – 0,90	1,23 – 1,51
	1,03 – 1,042	0,86 – 0,90	1,21 – 1,32

Примечание. В числителе указаны значения для автомобиля со снаряженной массой, в знаменателе – с полной массой.

Как показывает анализ расчетных значений (табл. 2) для легковых автомобилей, совершающих экстренное торможение на дороге с поперечным уклоном (3,5 %) при начальной скорости торможения 150 км/час, величина реализуемого тормозного момента на колесах задней оси, в сравнении с классической теорией, может быть увеличена на 32 – 53 %.

С учетом рекомендаций [4] запас максимальной суммарной не реализованной тормозной силы на задних колесах в таком случае может быть увеличен на 44 – 65 %.

Распределение тормозных сил во всех рассмотренных случаях может осуществляться по «восходящей» характеристике с компенсационной ветвью (*OMCHB*, рис. 3).

Для реализации указанной выше величины тормозного момента при торможении на горизонтальной дороге с поперечным уклоном в тормозном приводе легковых автомобилей должно быть обеспечено межбортовое регулирование тормозных сил, поскольку в таком случае бортовая неравномерность распределения тормозных сил составляет для автомобилей с полной загрузкой 3 – 8 % и в состоянии частичной загрузки 12 – 21 % (табл. 2).

Такая задача выполнима за счет установки разработанного тормозного привода [8], содержащего регуляторы тормозных сил и имеющих гидравлическую обратную связь с подвеской передних колес, при обеспечении бортовой (рис. 4, *а*) либо комбинированной (рис. 4, *б*) схемы включения контуров тормозного привода.

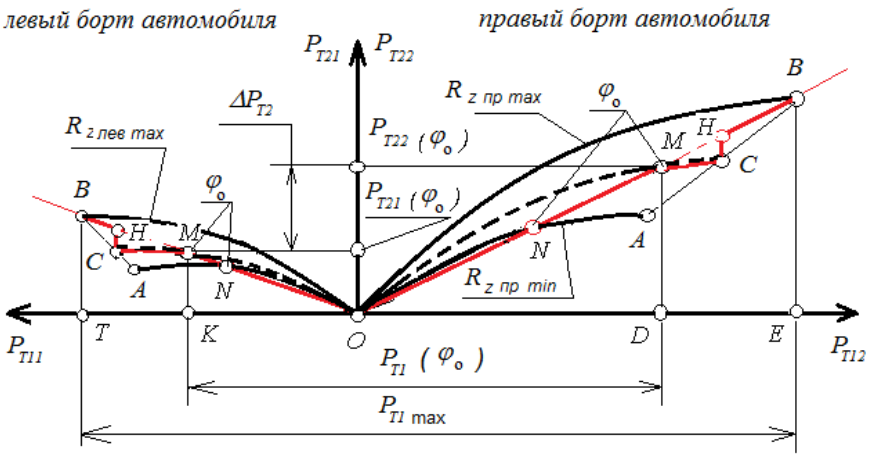
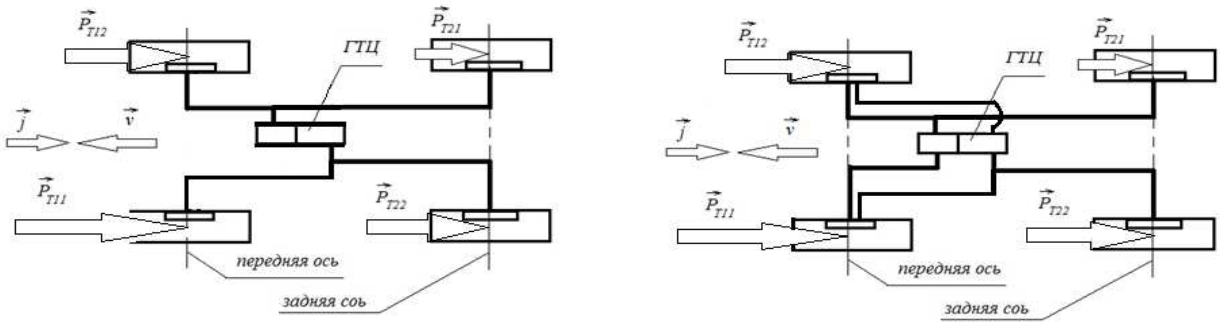


Рис. 3 – Схема бортового распределения тормозной силы [7].



а *б*

Рис. 4 – Схема включения контуров тормозного привода:
а – бортовая схема; *б* – комбинированная схема.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными направлениями исследований, связанных с разработкой тормозных приводов, имеющих обратную гидравлическую, электромагнитную, ультразвуковую или радиосвязь с подвижными элементами подвесок легковых автомобилей, тормозные системы которых не оборудованы электронными системами слежения за процессом торможения.

Выводы. Таким образом, в данной работе реализован алгоритм определения предельных тормозных сил на колесах легковых автомобилей, затормаживаемых в эксплуатационных условиях с учетом аэродинамического сопротивления движению, позволяющий обосновать минимальную величину не реализованного тормозного момента в пределах 24 – 35 %, реализация которого позволит повысить тормозные свойства.

Установлено, что реализовать бортовую неравномерность распределения тормозных сил на колесах легкового автомобиля можно за счет установки усовершенствованного тормозного привода.

Следует заметить, что в таком случае необходимо обеспечить бортовую либо комбинированную схему включения контуров.

Список литературы

1. *Бабков Н. Ф.* Дорожные условия и режимы движения автомобилей. – М. : Транспорт, 1967. – 323 с.
2. *Ярещенко Н. В.* Довгострокове прогнозування швидкостей руху на автомобільних дорогах : автореф. дис. на здобуття ступеня канд. техн. наук : спец. 05.22.11 «Автомобільні шляхи та аеродроми». – Харків, 1999. – 16 с.
3. Державні будівельні норми України. Споруди транспорту. Автомобільні дороги. Частина І. Проектування : ДБНВ. 2.3-4:2007. – [Чинні від 2008-03-01]. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2007. – 91 с.
4. *Агейкин Я. С., Вольская Н. С.* Теория автомобіля : учеб. пособ. – М. : МГИУ, 2008. – 318 с. – Режим доступа: http:/www.books.google.com.ua/books. – Дата звертання : 30 травня 2016.
5. *Shang M., Chu L., Guo J., Fang Y., Zhou F.* Braking force dynamic coordinated control for hybrid electric vehicles // in Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 10). – Shenyang, China. – 2010. – Vol. 4. - pp. 411 – 416.
6. *Назаров В. И.* Перераспределение вертикальных нагрузок при экстренном торможении легкового автомобиля, движущегося в воздушном потоке на горизонтальном участке дороги // Механіка та машинобудування. – Харків : НПКП «Механіка», 2014. – №1. – С. 102 – 110.
7. *Подригало М. А., Назаров В. І., Назаров О. І., Назаров І. О.* Пат. №75406 Україна, МПК 2012.01, B60T 11/00. Спосіб регулювання гальмівних сил між осями легкового автомобіля / *М. А. Подригало, В. І. Назаров, О. І. Назаров, І. О. Назаров* ; заявник і патентотримач Харків, національний автомобільно-дорожній університет № u201207282; заявл. 15.06.2012; опубл. 26.11.2012, Бюл. № 22.
8. *Подригало М. А., Назаров В. І., Назаров О. І., Назаров І. О.* Пат. №76189 Україна, МПК 2006.01, B60T 8/24. Пристрій для підвищення ефективності гальмування легкових автомобілів / *М. А. Подригало, В. І. Назаров, О. І. Назаров, І. О. Назаров* ; заявник і патентотримач Харків, національний автомобільно-дорожній університет № u201207284; заявл. 15.06.2012; опубл. 25.12.2012, Бюл. № 24.

References (transliterated)

1. Babkov N. F. *Dorozhnye usloviya i rezhimy dvizheniya avtomobiley* [Road conditions and car movement modes]. Moscow, Transport Publ., 1967. 323 p.
2. Yareshchenko N. V. *Dovgostrokove prognozuvannya shvydkostey rukhu na avtomobil'nykh dorogakh: avtoref. dis. na zdobuttya stupenya kand. tehn. nauk 05.22.11: "Avtomobil'ni shlyakhy ta aerodromy"* [Long-term prediction of traveling speed on highways: abstract of the Cand. Tech. Sc. thesis, 05.22.11: "Highways and aerodromes"]. Kharkiv, 1999. 16 p.
3. *Derzhavni budivel'ni normy Ukrayiny. Sporudy transportu. Avtomobil'ni dorogy. Chastyna I. Proektuvannya: DBNV.2.3-4:2007.* Chynni vid 2008-03-01 [State building codes Ukraine. Transport facilities. Highways. Part I. Design: DBNV.2.3-4:2007. 2008-03-01]. Kyiv, Minregionbud Ukrayiny Publ., 2007. 91 p.
4. Ageykin Ya. S., Vol'skaya N. S. *Teoriya avtomobilya: ucheb. posob.* [The theory of a vehicle: textbook]. Moscow, MGIU Publ., 2008. 318 p. Available at: http:/www.books.google.com.ua/books. (accessed 30.05.2016).
5. Shang M., Chu L., Guo J., Fang Y., Zhou F. Braking force dynamic coordinated control for hybrid electric vehicles. *In Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 10)*. Shenyang, China, 2010, vol. 4, pp. 411–416.
6. Nazarov V. I. Pereraspredelenie vertikal'nykh nagruzok pri ekstrennom tormozhenii legkovogo avtomobilya, dvizhushchegosya v vozdushnom potoke na gorizontal'nom uchastke dorogi [Redistribution of vertical loads in emergency braking of a vehicle, moving in the air flow in the horizontal section of a road]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and Mechanical Engineering]. Kharkov, NPKP "Mekhanika" Publ., 2014, no. 1, pp. 102–110.

7. Podrigalo M. A., Nazarov V. I., Nazarov O. I., Nazarov I. O. *Sposib regulyuvannya gal'mivnykh syl mizh osyamy legkovogo avtomobilya* [The method of adjusting braking forces between the axles of a vehicle]. Patent UA, no. 75406, MPK 2012.01, V60T 11/00, 2012.

8. Podrigalo M. A., Nazarov V. I., Nazarov O. I., Nazarov I. O. Prystriy dlya pidvyshchennya efektyvnosti gal'muvannya legkovykh avtomobiiiv [Device for improving vehicle braking performance]. Patent UA, no. 76189, MPK 2006.01, V60T 8/24, 2012

Поступила (received) 03.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Математичне моделювання бортового розподілу гальмівної сили під час гальмування легкових автомобілів у експлуатаційних умовах із врахуванням аеродинамічного опору руху / В. І. Назаров, О. І. Назаров, І. О. Назаров, Д. В. Абрамов О. І. Тимченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 59 – 66. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Математическое моделирование бортового распределения тормозной силы при торможении легковых автомобилей в эксплуатационных условиях с учетом аэродинамического сопротивления движению / В. И. Назаров, А. И. Назаров, И. А. Назаров, Д. В. Абрамов, А. И. Тимченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 59 – 66. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Mathematical modeling of board distribution of braking force during braking of vehicles in operational conditions, taking into account aerodynamic drag / V. I. Nazarov, A. I. Nazarov, I. A. Nazarov, D. V. Abramov, A. I. Timchenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 59 – 66. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Назаров Олександр Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, доцент кафедри технології машинобудування та ремонту машин, м. Харків; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Назаров Александр Иванович – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, доцент кафедры технологии машиностроения и ремонта машин, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Nazarov Alexander Ivanovich – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Kharkov National Automobile and Highway University, Associate Professor at the Department of Mechanical Engineering and Repair of Machines, Kharkov; tel.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Назаров Іван Олександрович – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Назаров Иван Александрович – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Nazarov Ivan Aleksandrovich – postgraduate student, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov, tel.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Назаров Володимир Іванович – провідний інженер, Запорізький автомобілебудівний завод, м. Запоріжжя; тел.: (0612) 286-10-34; e-mail: vladimir.nazarov@zaz.zp.ua.

Назаров Владимир Иванович – ведущий инженер, Запорожский автомобилестроительный завод, г. Запорожье; тел.: (0612) 286-10-34; e-mail: vladimir.nazarov@zaz.zp.ua.

Nazarov Vladimir Ivanovich – chief engineer, Zaporizhia Automobile Plant, Zaporozhye; tel.: (0612) 286-10-34; e-mail: vladimir.nazarov@zaz.zp.ua.

Абрамов Дмитро Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Абрамов Дмитрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Abramov Dmitry Vladimirovich – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-33; e-mail: hefer64@rambler.ru.

Тимченко Олексій Ігорович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: timocha230@rambler.ru.

Тимченко Алексей Игоревич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-33; e-mail: timocha230@rambler.ru.

Timchenko Aleksey Igorevic – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor, National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-33; e-mail: timocha230@rambler.ru.

УДК 519.6

О. П. НЕЧУЙВІТЕР

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТРІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ КУСКОВО-СТАЛОЇ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ

Робота присвячена розробці математичних моделей цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі побудови кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій трьох змінних. В статті розглядається кубатурна формула обчислення $3D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на площинах. Отримано оцінку похибки нанаближення кубатурної формули на класі диференційовнихфункцій.

Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, кубатурні формули, інтерфлетація функцій.

Работа посвящена усовершенствованию математических моделей цифровой обработки сигналов и изображений на примере построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных. В статье рассматривается кубатурная формула вычисления $3D$ интегралов от тригонометрических функций с использованием интерфлетации в случае, когда информация о функции задана ее следами на плоскостях. Получена оценка погрешности приближения кубатурной формулы на классе дифференцированных функций.

Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций трех переменных, кубатурные формулы, интерфлетация функций.

The paper deals with the improvement of mathematical models of digital signal and image processing on the example of constructing cubature formulas of approximate calculation of integrals of highly oscillating functions of three variables. The feature of the proposed cubature formulas is using the input information about the function as a set of traces of the function on planes or a set of traces of the function on lines or as a set of values of the function in points. The theory of interlineations and interflatation of functions is the most effective in this case. The estimate for the error of the cubature formula of approximate calculation of the integral of trigonometric functions of three variables is received in the case when the information about the function is its traces on perpendicular planes. The cubature formula is constructed using the interflatation operator; the example demonstrates the validity of the theorem about the error.

Key words: integrals of high oscillating functions of three variables, cubature formula, interflatation, the error of the method, irreducible error, the error of rounding.

Вступ. На даний час є математичні моделі, зокрема в цифровій обробці сигналів, комп'ютерній та сейсмічній томографії, які використовують нові інформаційні оператори. Так в теорії наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних побудовані кубатурні формули наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є з використанням *інтерлінації* та *інтерфлетації* функцій на *класі Ліпшиця, Гьольдера*, класі диференційованих функцій. В якості даних такі кубатурні формули використовують не лише значення функції у вузлових точках, а також *сліди функції* на лініях та сліди функцій на площинах. Сучасні математичні моделі вимагають розв'язання більш широкої задачі − наближеного обчислення інтегралу від функцій трьох змінних

$$\mathrm{I}(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin\big(\omega g(x,y,z)\big)\,dxdydz,\quad \omega\in R,\ |\omega|\ge 2\pi \tag{1}$$

у випадку, коли інформація про $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ задана як значеннями функції у вузлових точках, так і слідами на лініях та площинах. Тому актуальним є питання дослідження інтегралів від тригонометричних функцій у випадку різних інформаційних операторів.

Аналіз останніх досліджень. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних лініях та значеннями функції в точках, викладена в роботах [1 – 6]. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємно перпендикулярних площин. Однак в жодній з наведених робіт не досліджувалося питання наближеного обчислення інтегралів виду (1).

Постановка задачи. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій трьох змінних виду

$$J(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\omega g(x,y,z)\,dxdydz\ ,\quad \omega\in R,\ |\omega|\ge 2\pi \tag{2}$$

побудувати кубатурну формулу з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації. Інформація

© О. П. Нечуйвітер, 2016

про функцію $g(x, y, z)$ задана її слідами на взаємно-перпендикулярних площинах. На класі диференційовних функцій отримати оцінку похибки наближення кубатурної формули.

Кубатурна формула обчислення $3D$ інтегралу від тригонометричної функції на основі кусково-сталої сплайн-інтерфлетації.

Означення 1. Під слідом функції $t(x, y)$ на лініях

$$x_k = k\Delta - \Delta/2,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2,\ \ k, j = \overline{1, \ell},\ \Delta = 1/\ell$$

розуміємо відповідно функції однієї змінної $t(x_k, y),\ 0 \le y \le 1,\ t(x, y_j),\ 0 \le x \le 1$.

Означення 2. Під слідом функції $f(x, y, z)$ на площинах

$$x_k = k\Delta - \Delta/2,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2,\ \ z_s = s\Delta - \Delta/2,\ \ k, j, s = \overline{1, \ell},\ \Delta = 1/\ell$$

розуміємо відповідно функцію двох змінних

$$f(x_k, y, z),\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ f(x, y_j, z),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ f(x, y, z_s),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Сліди функції на лініях $t(x, y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \Delta/2,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2,\ \ k, j = \overline{1, \ell},\ \Delta = 1/\ell$ наведені на рис. 1, а площини $x_k = k\Delta - \Delta/2,\ \ y_j = j\Delta - \Delta/2,\ \ z_s = s\Delta - \Delta/2,\ \ k, j, s = \overline{1, \ell},\ \Delta = 1/\ell$, на яких задаються сліди функції $f(x, y, z)$, зображені на рис. 2.

Рис. 1 − Сліди функції $f(x, y, z)$.

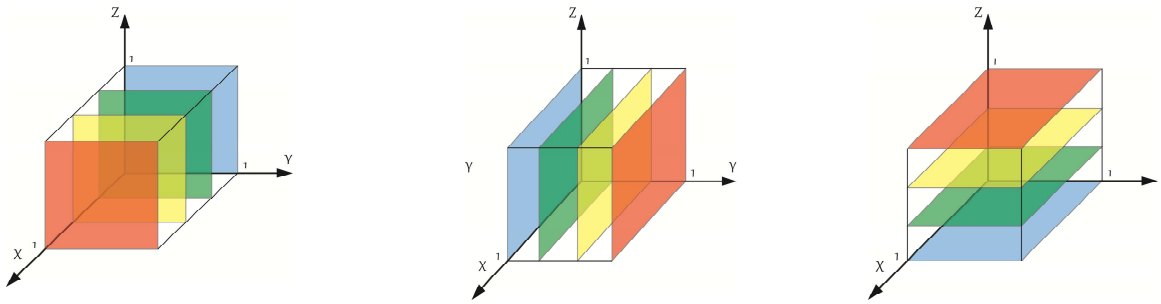


Рис. 2. − Площини, на яких задаються сліди функції $f(x, y, z)$.

Введемо позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}],\ Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],\ Z_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}];$$

$$h_{1k}^0(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k; \end{cases}\ \ h_{2j}^0(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j; \end{cases}\ \ h_{3s}^0(z) = \begin{cases} 1, z \in Z_s, \\ 0, z \notin Z_s; \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ \ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\ \ z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2},\ \ \Delta = \frac{1}{\ell},\ \ k, j, s = \overline{1, \ell}.$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}^0(x),\ J_2 f(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}^0(y),\ J_3 f(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}^0(z),$$

а також оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Ef(x, y, z) = J_1 f(x, y, z) + J_2 f(x, y, z) + J_3 f(x, y, z) -$$
$$-J_1 J_2 f(x, y, z) - J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_3 f(x, y, z) + J_1 J_2 J_3 f(x, y, z)$$

для якого виконуються властивості

$$Jf(x_k, y, z) = f(x_k, y, z),\ k = \overline{1, \ell},\ Jf(x, y_j, z) = f(x, y_j, z),\ j = \overline{1, \ell},\ Jf(x, y, z_s) = f(x, y, z_s),\ s = \overline{1, \ell}.$$

Теорема. *Нехай* $\left|g^{(1,1,1)}(x,y,z)\right| \le M$ *, тоді для кубатурної формули*

$$\Phi(\omega)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\omega E g(x,\,y,\,z)\right)dxdydz$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$\left|J(\omega)-\Phi(\omega)\right| \le \min\left(2;\,\frac{M\omega}{64}\Delta^3\right).$$

Доведення. Знайдемо оцінку похибки наближення для кубатурної формули $\Phi(\omega)$:

$$\left|J(\omega)-\Phi(\omega)\right| = \left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\omega g(x,\,y,\,z)dxdydz - \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin E\omega g(x,\,y,\,z)dxdydz\right| \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\sin\omega g(x,\,y,\,z)-\sin E\omega g(x,\,y,\,z)\right|dxdydz =$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left|2\cos\frac{\omega(g(x,\,y,\,z)+Eg(x,\,y,\,z))}{2}\sin\frac{\omega(g(x,\,y,\,z)-Eg(x,\,y,\,z))}{2}\right|dxdydz \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left|\sin\frac{\omega(g(x,\,y,\,z)-Eg(x,\,y,\,z))}{2}\right|dxdydz \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,\,y,\,z)-Eg(x,\,y,\,z)\right|}{2}\right)dxdydz \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\min\left(1;\frac{\omega}{2}\left|\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}\int_{z_s}^{z} g^{(1,1,1)}(x,\,y,\,z)dxdydz\right|\right)dxdydz \le$$

$$=2\min\left(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}dxdydz,\frac{M\omega}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\left(x-x_k\right)\left(y-y_j\right)\left(z-z_s\right)dxdydz\right)=$$

$$=2\min\left(\ell^3\Delta^3,\,\frac{M\omega}{2}\ell^3\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}\right)=2\min\left(1;\,\frac{M\omega}{128}\Delta^3\right)=\min\left(2;\,\frac{M\omega}{64}\Delta^3\right).$$

Теорему доведено.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованої кубатурної формули в системі комп'ютерної математики MathCad для функції $g(x,\,y,\,z)=xyz$.

Таблиця 1 – Обчислення $J(\omega)$ за формулою $\Phi(\omega)$ для $g(x,\,y,\,z)=xyz$

ℓ	ω	$J(\omega)$	$\Phi(\omega)$	$\left\|J(\omega)-\Phi(\omega)\right\|$	$\varepsilon=\frac{M\omega}{64}\Delta^3$
4	2π	0.401976638231533	0.401981946467004	0.000005308235471	0.001533980787886
10	2π	0.401976638231533	0.401976656796463	0.000000018564929	0.000098174770425
4	3π	0.377346418482445	0.377326229322215	0.00002018916023	0.002300971181828
10	3π	0.377346418482445	0.377346418482445	0.000000063025558	0.000147262155637
15	3π	0.377346418482445	0.37734641313773	0.000000005344716	0.0000436332313
4	4π	0.352153445506956	0.352226768977461	0.000073336870667	0.003067961575771
10	4π	0.352153445506956	0.352153432106794	0.000000164771075	0.000196349540849
15	4π	0.352153445506956	0.352153432106794	0.000000013400162	0.000058177641733

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядається кубатурна формула обчислення $3D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на площинах. Отримано оцінку похибки наближення кубатурної формули на класі диференційованих функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається її слідами на системі взаємно перпендикулярних ліній та значеннями функції в точках на різних класах функцій.

Висновки. На класі диференційованих функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій трьох змінних у випадку, коли інформація задавалась слідами функції на системі взаємно перпендикулярних площин. Кубатурна формула використовувала в своїй побудові оператор-інтерфлетант з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичний результат.

Список літератури

1. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x, y) \in C^2_{2,L,L,M}$ з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения / Ин-т математики НАН Украины. – К., 1999. – С. 166 – 169.
3. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. *Lytvyn Oleg N., Nechuyviter Olesya P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосциюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
8. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
10. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційованих функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.
11. *Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
12. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
13. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
14. *Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления $3D$ – интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34, № 5. – С. 206 – 217.
15. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.
16. *Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П.* Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P., Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky.* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
2. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy z vykorystannyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x, y) \in C^2_{2,L,L,M}$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud. Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999, pp. 166–169.
3. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal order of exactness cubature formula for computing double integrals of highly oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukraiini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, no. 6, pp. 9–13.
4. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya $2D$ – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi

funktsiy [On a cubature formula to calculate $2D$ – Fourier coefficients using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukraiini. Matematika. Prirodoznavstvo. Tehnichni nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.

5. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. $2D$ – koefitsienty Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [$2D$ – Fourier coefficients on a class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.

6. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology*. Novosibirsk, 2010, pp. 90–96.

7. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals of highly oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.

8. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriyskiy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.

9. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3 D - Fourier coefficients on a class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.

10. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interfletatsiyi na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using spline-interflatation on a class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 8, pp. 36–41.

11. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyuschikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate calculation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser.: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.

12. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of fast oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser.: Matematika. Fizika* [Scientific Statements of the Belgorod State University. Series: Mathematics and Physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.

13. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryokh zminnykh na klasi dyferentsiyovnih funktsiy [Approximate computation of Fourier coefficients of functions of three variables on a class of differentiable functions]. *Shtuchnyy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.

14. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya $3D$ – integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing $3D$ – integrals of highly oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.

15. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ – Fourier coefficients on the Gelder class of functions using piecewise constant spline-interflatation*]. Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.

16. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noy interfletatsii [Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables using Lagrange polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.

Надійшла (received) 20.05.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації / О. П. Нечуйвітер // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 67 – 71. Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2222-0631.

Вычисление тройных интегралов от тригонометрических функций с использованием кусочно-постоянной интерфлетации / О. П. Нечуйвитер // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 67 – 71. Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2222-0631.

Computing triple integrals of trigonometric functions using piecewise constant interflatation / O. P. Nechuiviter // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 67 – 71. Bibliog.: 16 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Нечуйвитер Олеся Петровна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

УДК 629.7.05

Ю. А. ПЛАКСІЙ

МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ ТРЬОХЧАСТОТНІ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропоновано нові неперервні еталонні моделі обертання твердого тіла, основані на трьохчастотному мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одномоментно змінюються у часі. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають таким обертальним рухам. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделей. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Запропоновані моделі використані в якості еталонних для оцінювання точності алгоритмів визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, еталонна модель, квазікоординати, алгоритми визначення орієнтації.

Предложены новые непрерывные эталонные модели вращения твердого тела, основанные на трехчастотном мультипликативном представлении кватерниона ориентации в функциях углов, одновременно изменяющихся во времени. Построены аналитические зависимости для квазикоординат на такте вычислений параметров ориентации и компонент кватерниона, соответствующих таким вращательным движениям. Для нескольких наборов параметров получены численные реализации моделей. Результаты представлены в форме зависимостей квазикоординат от времени и траекторий в конфигурационном пространстве для параметров ориентации. Предложенные модели использованы в качестве эталонных для оценивания точности алгоритмов определения ориентации.

Ключевые слова: кватернион, эталонная модель, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритмы определения ориентации.

A new continuous reference models of a rigid body rotation based on three-frequency multiplicative representation of the quaternion of orientation in functions of the angles simultaneously changing in time are offered. Analytical dependences for quasicoordinates on a step of calculations of the parameters of orientation and components of the quaternion corresponding to such rotations are constructed. For several sets of parameters numerical realization of models is received. Results are presented in the form of dependences of quasicoordinates on time and trajectories in configuration space for orientation parameters. The offered models are used as reference models for error analyses for algorithms of definition of orientation.

Key words: quaternion, reference model, quasicoordinates, trajectories in configuration space, algorithms of definition of orientation.

Вступ. Сучасні системи управління рухомих об’єктів основані на принципах безплатформеного управління. Постійне зростання вимог до якості безплатформених інерціальних навігаційних систем (БІНС) примушує розробників шукати шляхи поліпшення їх технічних характеристик за рахунок вдосконалення як приладної частини, так і спеціального алгоритмічного забезпечення. В задачі визначення орієнтації в БІНС алгоритмічний аспект відіграє провідну роль, бо в бортовому обчислювачі чисельно будується математичний образ інерціальної (опорної) системи координат. Оскільки алгоритми визначення орієнтації в БІНС виконують роль *аналітичної платформи* [1], до них пред’являються жорсткі вимоги мінімальної загрузки обчислювача на такті при точності визначення параметрів, достатній для виконання технічної задачі, що покладається на рухомий об’єкт. Для оцінювання точності і відпрацювання алгоритмів визначення орієнтації необхідно мати еталонні моделі обертання, які можуть бути *дискретними* або *неперервними*.

Дискретні еталонні моделі основані на результатах чисельного інтегрування рівнянь математичної моделі обертання об’єкта. Переваги дискретних моделей полягають в тому, що їх можна реалізувати для достатньо складних об’єктів, а недоліки зумовлені тим, що в отриманих на їх основі оцінках похибок алгоритмів невід’ємно присутні похибки від застосованого метода чисельного інтегрування.

Неперервні еталонні моделі зазвичай обмежені випадками існуючих точних розв’язків сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (*моделі конічного руху* [2] і *регулярної прецесії* [3]). В цих моделях кінематичні параметри і квазікоординати (прирости позірних поворотів на такті Δt) представляються неперервними явними функціями часу. Оскільки реальне обертання об’єкта не завжди відповідає конічному руху або регулярній прецесії, то задача побудування нових еталонних моделей, що описують більш складний рух об’єкта, є достатньо актуальною.

Постановка задачі. Алгоритми визначення орієнтації орієнтовані на використання первинної інформації про обертальний рух об’єкта у вигляді *квазікоординат* [4], що формуються на виході вимірювачів кутової швидкості на такті $[t_{n-1}, t_n]$:

$$\theta_{ni}^{*} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

де ω_i, $i = 1, 2, 3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об’єкта $\vec{\omega}$ на осі зв’язаної системи координат.

Для точносного аналізу алгоритмів необхідно мати в розпорядженні в кожний момент часу модельні (еталонні) значення параметрів орієнтації і квазікоординат, що приводять до такої орієнтації зв’язаних осей.

Оскільки неперервна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятим аналітичним пред-

© Ю. А. Плаксій, 2016

ставленням кватерніона орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$, то задача побудування еталонної моделі базується на вдалому представленні кватерніона орієнтації, яке автоматично забезпечує виконання умови його нормування $\|\Lambda(t)\| = 1$. В більшості випадків це забезпечується використанням в представленні компонент кватерніона орієнтації тригонометричних функцій кутів (синусів і косинусів). Після того, як кватерніон орієнтації $\Lambda(t)$ визначений, проекції вектора кутової швидкості твердого тіла, яким відповідає цей кватерніон орієнтації, знайдуться також в аналітичному вигляді з оберненого кінематичного рівняння [4]:

$$\omega(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \tag{2}$$

де $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$, $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон, $\dot{\Lambda}(t) = d\Lambda(t)/dt$.

Модельні значення квазікоординат (1) визначаться з формули:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

де $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t)dt$, $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t)dt$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти вектора *позірного повороту* $\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t)dt$, обчислені в моменти часу t_n і t_{n-1}.

Неперервні еталонні моделі обертання твердого тіла, відмінні від випадку класичної регулярної прецесії, представлені в роботах [5, 6, 7]. В даній роботі розглядаються три нових типа несиметричних трьохчастотних моделей обертання твердого тіла, основані на мультиплікативних аналітичних представленнях кватерніона орієнтації, що вперше були запропоновані в роботі [8] як елементи відповідних матриць для побудування апроксимуючих моделей обертання.

Мультиплікативні трьохчастотні кватерніонні моделі обертання твердого тіла. Розглянемо модель *першого типу*. Задамо компоненти кватерніона орієнтації моделі обертання у наступному вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos\varphi(t); \quad \lambda_1(t) = \sin\varphi(t)\cdot\sin\psi(t); \quad \lambda_2(t) = \sin\varphi(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t);$$
$$\lambda_3(t) = \sin\varphi(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t). \tag{4}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ – деякі кути, що неперервно змінюються з часом.

Для цього представлення кватерніона орієнтації згідно формул (2) проекції вектора модельної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\omega_1(t) = 2\dot{\varphi}(t)\sin\psi(t) + \dot{\psi}(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t) + 2\dot{\phi}(t)\sin^2\varphi(t)\cos^2\psi(t);$$
$$\omega_2(t) = 2\dot{\varphi}(t)\cos\psi(t)\sin\phi(t) - \dot{\psi}(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\sin\phi(t) - 2\dot{\psi}(t)\sin^2\varphi(t)\cos\phi(t) +$$
$$+\dot{\phi}(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\cos\phi(t) - \dot{\phi}(t)\sin^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\sin\phi(t);$$
$$\omega_3(t) = 2\dot{\varphi}(t)\cos\psi(t)\cos\phi(t) - \dot{\psi}(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\cos\phi(t) + 2\dot{\psi}(t)\sin^2\varphi(t)\sin\phi(t) -$$
$$-\dot{\phi}(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\sin\phi(t) - \dot{\phi}(t)\sin^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\cos\phi(t). \tag{5}$$

У випадку, коли кути $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ змінюються з часом лінійно, тобто $\varphi(t) = k_1 t$, $\psi(t) = k_2 t$, $\phi(t) = k_3 t$, кватерніон (4) приймає вигляд:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_1 t); \quad \lambda_1(t) = \sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t); \quad \lambda_2(t) = \sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t);$$
$$\lambda_3(t) = \sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t). \tag{6}$$

Для проекцій вектора модельної кутової швидкості з формул (5) будемо мати:

$$\omega_1(t) = 2k_1\sin(k_2 t) + k_2\sin(2k_1 t)\cos(k_2 t) + 2k_3\sin^2(k_1 t)\cos^2(k_2 t);$$
$$\omega_2(t) = 2k_1\cos(k_2 t)\sin(k_3 t) - k_2\sin(2k_1 t)\sin(k_2 t)\sin(k_3 t) - 2k_2\sin^2(k_1 t)\cos(k_3 t) +$$
$$+k_3\sin(2k_1 t)\cos(k_2 t)\cos(k_3 t) - k_3\sin^2(k_1 t)\sin(2k_2 t))\sin(k_3 t);$$
$$\omega_3(t) = 2k_1\cos(k_2 t)\cos(k_3 t) - k_2\sin(2k_1 t)\sin(k_2 t)\cos(k_3 t) + 2k_2\sin^2(k_1 t)\sin(k_3 t) -$$
$$-k_3\sin(2k_1 t))\cos(k_2 t)\sin(k_3 t) - k_3\sin^2(k_1 t)\sin(2k_2 t)\cos(k_3 t). \tag{7}$$

Компоненти вектора позірного повороту $\bar{\theta}(t)$ отримаємо, проінтегрувавши вирази для $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на інтервалі $[0, t]$. В результаті маємо:

$$\theta_1(t) = -2k_1(\cos(k_2 t) - 1)/k_2 - 0,5k_2(\cos((2k_1 + k_2)t) - 1)/(2k_1 + k_2) - 0,5k_2(\cos((2k_1 - k_2)t) - 1)/(2k_1 - k_2) +$$
$$+0,5k_3 t - 0,25k_3\sin(2k_1 t)/k_1 + 0,25k_3\sin(2k_2 t)/k_2 - 0,25k_3\sin((2k_1 + 2k_2)t)/(2k_1 + 2k_2) -$$
$$-0,25k_3\sin((2k_1 - 2k_2)t)/(2k_1 - 2k_2);$$
$$\theta_2(t) = -k_1(\cos((k_3 + k_2)t) - 1)/(k_3 + k_2) - k_1(\cos((k_3 - k_2)t) - 1)/(k_3 - k_2) - k_2\sin(k_3 t)/k_3 +$$

$$+0,25(k_2-k_3)(\cos((k_3+2k_1-k_2)t)-1)/(k_3+2k_1-k_2)+0,25(k_2-k_3)(\cos((k_3-2k_1+k_2)t)-1)/(k_3-2k_1+k_2)-$$
$$-0,25(k_2+k_3)(\cos((k_3+2k_1+k_2)t)-1)/(k_3+2k_1+k_2)-0,25(k_2+k_3)(\cos((k_3-2k_1-k_2)t)-1)/(k_3-2k_1-k_2)+$$
$$+0,5k_2\sin((2k_1+k_3)t)/(2k_1+k_3)+0,5k_2\sin((2k_1-k_3)t)/(2k_1-k_3)-0,25k_3\sin((2k_2-k_3)i)/(2k_2-k_3)+$$
$$+0,25k_3\sin((2k_2+k_3)i)/(2k_2+k_3)+0,125k_3\sin((2k_1+2k_2-k_3)t)/(2k_1+2k_2-k_3)+$$
$$+0,125k_3\sin((2k_1-2k_2+k_3)t)/(2k_1-2k_2+k_3)-0,125k_3\sin((2k_1+2k_2+k_3)t)/(2k_1+2k_2+k_3)-$$
$$-0,125k_3\sin((2k_1-2k_2-k_3)t)/(2k_1-2k_2-k_3)\,;$$
$$\theta_3(t)=k_1\sin((k_2+k_3)t)/(k_2+k_3)+k_1\sin((k_2-k_3)t)/(k_2-k_3)-k_2(\cos(k_3t)-1)/k_3-$$
$$-0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1-k_2-k_3)t)/(2k_1-k_2-k_3)+0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1+k_2+k_3)t)/(2k_1+k_2+k_3)-$$
$$-0,25(k_2-k_3)\sin((2k_1-k_2+k_3)t)/(2k_1-k_2+k_3)+0,25(k_2-k_3)\sin((2k_1+k_2-k_3)t)/(2k_1+k_2-k_3)+$$
$$+0,5k_2(\cos((k_3+2k_1)t)-1)/(k_3+2k_1)+0,5k_2(\cos((k_3-2k_1)t)-1)/(k_3-2k_1)+$$
$$+0,25k_3(\cos((2k_2+k_3)t)-1)/(2k_2+k_3)+0,25k_3(\cos((2k_2-k_3)t)-1)/(2k_2-k_3)-$$
$$-0,125k_3(\cos((2k_2+k_3+2k_1)t)-1)/(2k_2+k_3+2k_1)-0,125k_3(\cos((2k_2+k_3-2k_1)t)-1)/(2k_2+k_3-2k_1)-$$
$$-0,125k_3(\cos((2k_2-k_3+2k_1)t)-1)/(2k_2-k_3+2k_1)-0,125k_3(\cos((2k_2-k_3-2k_1)t)-1)/(2k_2-k_3-2k_1)\,. \quad (8)$$

Квазікоординати (1), яким відповідає модельний кватерніон орієнтації (4), отримуються в аналітичному вигляді за формулою (3) з використанням формул (8).

Розглянемо модель обертання *другого типу*. Кватерніон орієнтації для цієї моделі задамо у вигляді:

$$\lambda_0(t)=\cos\varphi(t)\cdot\cos\psi(t)\,;\quad \lambda_1(t)=\sin\varphi(t)\,;\quad \lambda_2(t)=\cos\varphi(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\cos\phi(t)\,;$$
$$\lambda_3(t)=\cos\varphi(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot\sin\phi(t)\,, \quad (9)$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ – неперервні функції часу.

Для цього кватерніона орієнтації згідно формул (2) відповідні проекції вектора модельної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі будуть мати вигляд:

$$\omega_1(t)=2\dot\varphi(t)\cos\psi(t)+\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)-2\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\sin^2\psi(t)\,;$$
$$\omega_2(t)=-2\dot\varphi(t)\sin\psi(t)\sin\phi(t)+\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\sin\phi(t)+2\dot\psi(t)\cos^2\varphi(t)\cos\phi(t)+$$
$$+\dot\phi(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\cos\phi(t)-\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\sin\phi(t)\,;$$
$$\omega_3(t)=2\dot\varphi(t)\sin\psi(t)\cos\phi(t)-\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\cos\phi(t)+2\dot\psi(t)\cos^2\varphi(t)\sin\phi(t)+$$
$$+\dot\phi(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\sin\phi(t)+\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\cos\phi(t)\,. \quad (10)$$

У випадку лінійної залежності кутів $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ від часу, а саме: $\varphi(t)=k_1t$, $\psi(t)=k_2t$, $\phi(t)=k_3t$, кватерніон (9) набуває наступного вигляду:

$$\lambda_0(t)=\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\,;\quad \lambda_1(t)=\sin(k_1t)\,;\quad \lambda_2(t)=\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\cdot\cos(k_3t)\,;$$
$$\lambda_3(t)=\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t)\cdot\sin(k_3t)\,. \quad (11)$$

Проекції вектора модельної кутової швидкості в цьому випадку згідно формул (10) представляються наступним чином:

$$\omega_1(t)=2k_1\cos(k_2t)+k_2\sin(2k_1t)\sin(k_2t)-2k_3\cos^2(k_1t)\sin^2(k_2t)\,;$$
$$\omega_2(t)=-2k_1\sin(k_2t)\sin(k_3t)+k_2\sin(2k_1t)\cos(k_2t)\sin(k_3t)+2k_2\cos^2(k_1t)\cos(k_3t)+$$
$$+k_3\sin(2k_1t)\sin(k_2t)\cos(k_3t)-k_3\cos^2(k_1t)\sin(2k_2t))\sin(k_3t)\,;$$
$$\omega_3(t)=2k_1\sin(k_2t)\cos(k_3t)-k_2\sin(2k_1t)\cos(k_2t)\cos(k_3t)+2k_2\cos^2(k_1t)\sin(k_3t)+$$
$$+k_3\sin(2k_1t))\sin(k_2t)\sin(k_3t)+k_3\cos^2(k_1t)\sin(2k_2t)\cos(k_3t)\,. \quad (12)$$

Компоненти вектора позірного повороту $\overline{\theta}(t)$ отримаємо в результаті інтегрування виразів для $\omega_i(t)$, $i=1,2,3$ на інтервалі $[0,t]$:

$$\theta_1(t)=2k_1\sin(k_2t)/k_2-0,5k_2\sin((2k_1+k_2)t)/(2k_1+k_2)+0,5k_2\sin((2k_1-k_2)t)/(2k_1-k_2)-$$
$$-0,5k_3t-0,25k_3\sin(2k_1t)/k_1+0,25k_3\sin(2k_2t)/k_2+0,25k_3\sin((2k_1+2k_2)t)/(2k_1+2k_2)+$$
$$+0,25k_3\sin((2k_1-2k_2)t)/(2k_1-2k_2)\,;$$
$$\theta_2(t)=k_1\sin((k_2+k_3)t)/(k_2+k_3)-k_1\sin((k_2-k_3)t)/(k_2-k_3)+k_2\sin(k_3t)/k_3+0,25k_3\sin((2k_2+k_3)t)/(2k_2+k_3)+$$
$$+0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1-k_2-k_3)t)/(2k_1-k_2-k_3)-0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1+k_2+k_3)t)/(2k_1+k_2+k_3)-$$
$$-0,25(k_2-k_3)\sin((2k_1-k_2+k_3)t)/(2k_1-k_2+k_3)+0,25(k_2-k_3)\sin((2k_1+k_2-k_3)t)/(2k_1+k_2-k_3)+$$
$$+0,5k_2\sin((2k_1+k_3)t)/(2k_1+k_3)+0,5k_2\sin((2k_1-k_3))/(2k_1-k_3)-0,25k_3\sin((2k_2-k_3)t)/(2k_2-k_3)-$$

$$-0{,}125k_3\sin((2k_1+2k_2-k_3)t)/(2k_1+2k_2-k_3)-0{,}125k_3\sin((2k_1-2k_2+k_3)t)/(2k_1-2k_2+k_3)+$$
$$+0{,}125k_3\sin((2k_1+2k_2+k_3)t)/(2k_1+2k_2+k_3)+0{,}125k_3\sin((2k_1-2k_2-k_3)t)/(2k_1-2k_2-k_3);$$
$$\theta_3(t)=-k_1(\cos((k_3+k_2)t)-1)/(k_3+k_2)-k_1(\cos((k_2-k_3)t)-1)/(k_2-k_3)-k_2(\cos(k_3t)-1)/k_3+$$
$$+0,25(k_2+k_3)(\cos((2k_1+k_2+k_3)t)-1)/(2k_1+k_2+k_3)+0,25(k_2+k_3)(\cos((2k_1-k_2-k_3)t)-1)/(2k_1-k_2-k_3)-$$
$$-0,25(k_3-k_2)(\cos((2k_1+k_2-k_3)t)-1)/(2k_1+k_2-k_3)-0,25(k_3-k_2)(\cos((2k_1-k_2+k_3)t)-1)/(2k_1-k_2+k_3)-$$
$$-0,5k_2(\cos((2k_1+k_3)t)-1)/(2k_1+k_3)-0,5k_2(\cos((k_3-2k_1)t)-1)/(k_3-2k_1)-$$
$$-0,25k_3(\cos((2k_2+k_3)t)-1)/(2k_2+k_3)-0,25k_3(\cos((2k_2-k_3)t)-1)/(2k_2-k_3)-$$
$$-0{,}125k_3(\cos((2k_1+2k_2+k_3)t)-1)/(2k_1+2k_2+k_3)-0{,}125k_3(\cos((2k_1-2k_2+k_3)t)-1)/(2k_1-2k_2+k_3)-$$
$$-0{,}125k_3(\cos((2k_2+2k_1-k_3)t)-1)/(2k_2+2k_1-k_3)-0{,}125k_3(\cos((2k_2-2k_1-k_3)t)-1)/(2k_2-2k_1-k_3). \quad (13)$$

Квазікоординати, яким відповідає модельний кватерніон орієнтації (11), отримуються в аналітичному вигляді на основі формул (3).

Розглянемо модель обертання *третього типу*. Задамо кватерніон орієнтації для цієї моделі у вигляді:

$$\lambda_0(t)=\cos\varphi(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\cos\phi(t);\quad \lambda_1(t)=\sin\varphi(t);\quad \lambda_2(t)=\cos\varphi(t)\cdot\sin\psi(t);$$
$$\lambda_3(t)=\cos\varphi(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot\sin\phi(t), \quad (14)$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ – неперервні функції часу.

Тоді для проекцій отримаємо вирази:

$$\omega_1(t)=2\dot\varphi(t)\cos\psi(t)\cos\phi(t)+\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\cos\phi(t)+2\dot\psi(t)\cos^2\varphi(t)\sin\phi(t)+$$
$$+\dot\phi(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\sin\phi(t)-\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\cos\phi(t);$$
$$\omega_2(t)=-2\dot\varphi(t)\cos\psi(t)\sin\phi(t)-\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\sin\psi(t)\sin\phi(t)+2\dot\psi(t)\cos^2\varphi(t)\cos\phi(t)+$$
$$+\dot\phi(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)\cos\phi(t)+\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\sin(2\psi(t))\sin\phi(t);$$
$$\omega_3(t)=2\dot\varphi(t)\sin\psi(t)-\dot\psi(t)\sin(2\varphi(t))\cos\psi(t)+2\dot\phi(t)\cos^2\varphi(t)\cos^2\psi(t). \quad (15)$$

У випадку, коли $\varphi(t)=k_1t$, $\psi(t)=k_2t$, $\phi(t)=k_3t$, кватерніон (14) набуває вигляду:

$$\lambda_0(t)=\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\cdot\cos(k_3t);\quad \lambda_1(t)=\sin(k_1t);\quad \lambda_2(t)=\cos(k_1t)\cdot\sin(k_2t);$$
$$\lambda_3(t)=\cos(k_1t)\cdot\cos(k_2t)\cdot\sin(k_3t), \quad (16)$$

а проекції вектора абсолютної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі згідно (15) будуть такі:

$$\omega_1(t)=2k_1\cos(k_2t)\cos(k_3t)+k_2\sin(2k_1t))\sin(k_2t)\cos(k_3t)+2k_2\cos^2(k_1t)\sin(k_3t)+$$
$$+k_3\sin(2k_1t)\cos(k_2t)\sin(k_3t)-k_3\cos^2(k_1t)\sin(2k_2t)\cos(k_3t);$$
$$\omega_2(t)=-2k_1\cos(k_2t)\sin(k_3t)-k_2\sin(2k_1t)\sin(k_2t)\sin(k_3t)+2k_2\cos^2(k_1t)\cos(k_3t)+$$
$$+k_3\sin(2k_1t)\cos(k_2t)\cos(k_3t)+k_3\cos^2(k_1t)\sin(2k_2t)\sin(k_3t);$$
$$\omega_3(t)=2k_1\sin(k_2t)-k_2\sin(2k_1t)\cos(k_2t)+2k_3\cos^2(k_1t)\cos^2(k_2t). \quad (17)$$

Компоненти вектора позірного повороту для цієї моделі мають вигляд:

$$\theta_1(t)=k_1\sin((k_3+k_2)t)/(k_3+k_2)+k_1\sin((k_2-k_3)t)/(k_2-k_3)-k_2(\cos(k_3t)-1)/k_3-$$
$$-0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1+k_2+k_3)t)/(2k_1+k_2+k_3)+0,25(k_2+k_3)\sin((2k_1-k_2-k_3)t)/(2k_1-k_2-k_3)+$$
$$+0,25(k_3-k_2)\sin((2k_1+k_2-k_3)t)/(2k_1+k_2-k_3)-0,25(k_3-k_2)\sin((2k_1-k_2+k_3)t)/(2k_1-k_2+k_3)-$$
$$-0,5k_2(\cos((2k_1+k_3)t)-1)/(2k_1+k_3)-0,5k_2(\cos((k_3-2k_1)t)-1)/(k_3-2k_1)+$$
$$+0,25k_3(\cos((2k_2+k_3)t)-1)/(2k_2+k_3)+0,25k_3(\cos((2k_2-k_3)t)-1)/(2k_2-k_3)+$$
$$+0{,}125k_3(\cos((2k_1+2k_2+k_3)t)-1)/(2k_1+2k_2+k_3)+0{,}125k_3(\cos((2k_2-2k_1+k_3)t)-1)/(2k_2-2k_1+k_3)+$$
$$+0{,}125k_3(\cos((2k_2+2k_1-k_3)t)-1)/(2k_2+2k_1-k_3)+0{,}125k_3(\cos((2k_2-2k_1-k_3)t)-1)/(2k_2-2k_1-k_3);$$
$$\theta_2(t)=k_1(\cos((k_2+k_3)t)-1)/(k_2+k_3)+k_1(\cos((k_3-k_2)t)-1)/(k_3-k_2)+k_2\sin(k_3t)/k_3+k_2\sin(k_3t)/k_3+$$
$$+0,5k_2\sin((2k_1+k_3)t)/(2k_1+k_3)+0,5k_2\sin((2k_1-k_3))/(2k_1-k_3)+0,25k_3\sin((2k_2-k_3)t)/(2k_2-k_3)+$$
$$+0,25(k_2-k_3)(\cos((2k_1+k_2-k_3)t)-1)/(2k_1+k_2-k_3)+0,25(k_2-k_3)(\cos((2k_1-k_2+k_3)t)-1)/(2k_1-k_2+k_3)-$$
$$-0,25(k_2+k_3)(\cos((2k_1+k_2+k_3)t)-1)/(2k_1+k_2+k_3)-0,25(k_2+k_3)(\cos((2k_1-k_2-k_3)t)-1)/(2k_1-k_2-k_3)-$$
$$-0,25k_3\sin((2k_2+k_3)t)/(2k_2+k_3)+0{,}125k_3\sin((2k_1+2k_2-k_3)t)/(2k_1+2k_2-k_3)+$$
$$+0{,}125k_3\sin((2k_1-2k_2+k_3)t)/(2k_1-2k_2+k_3)-0{,}125k_3\sin((2k_1+2k_2+k_3)t)/(2k_1+2k_2+k_3)-$$
$$-0{,}125k_3\sin((2k_1-2k_2-k_3)t)/(2k_1-2k_2-k_3);$$

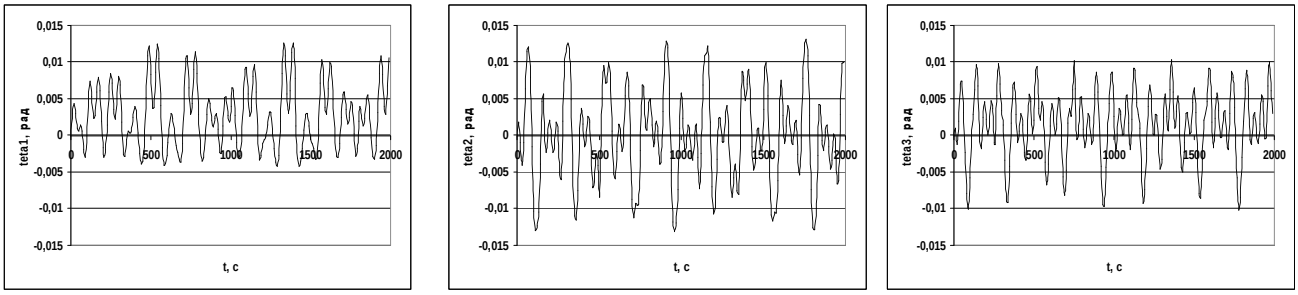
$$\theta_3(t) = -2k_1(\cos(k_2 t)-1)/k_2 + 0,5k_2(\cos((2k_1+k_2)t)-1)/(2k_1+k_2) + 0,5k_2(\cos((2k_1-k_2)t)-1)/(2k_1-k_2) +$$
$$+0,5k_3 t + 0,25k_3\sin(2k_2 t)/k_2 + 0,25k_3\sin(2k_1 t)/k_1 + 0,25k_3\sin((2k_1+2k_2)t)/(2k_1+2k_2) +$$
$$+0,25k_3\sin((2k_1-2k_2)t)/(2k_1-2k_2)\,. \qquad (18)$$

Аналітичні вирази для квазікоординат (1), яким відповідає модельний кватерніон (16), легко знаходяться на основі формул (3).

Значення частот k_1, k_2, k_3 в моделях можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимацій реального руху об'єкта. Надання параметрам k_1, k_2, k_3 певних значень перетворює опорну модель обертання на еталонну.

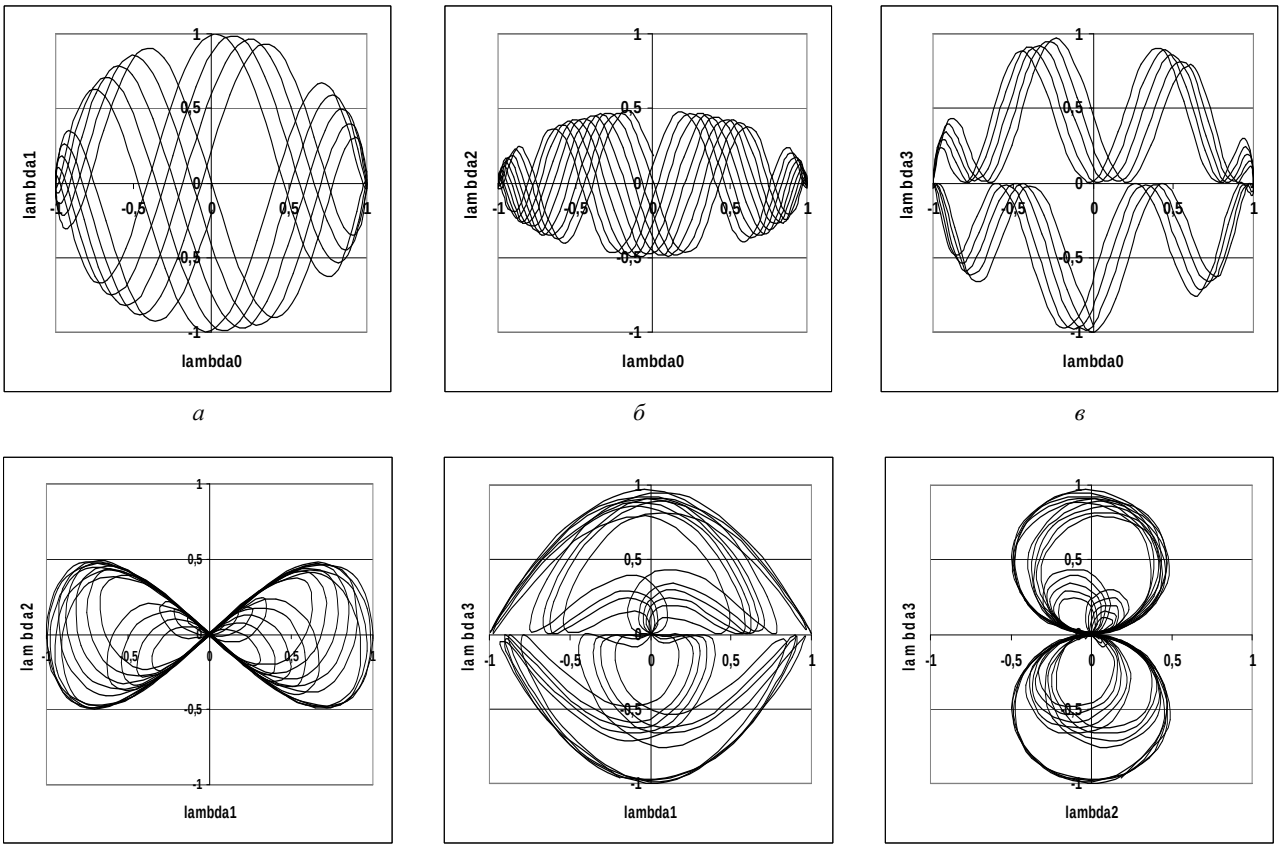
Чисельна реалізація мультиплікативних трьохчастотних еталонних моделей обертання. Побудуємо запропоновані трьохчастотні моделі для декількох значень параметрів k_1, k_2, k_3, такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с на інтервалі часу 2000 с.

Для значень параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = k_3 = 0,052$ результати реалізації моделі першого типу у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 1 та рис. 2 відповідно. Як видно з рис. 2, всі траєкторії $\lambda_j(\lambda_k)$, $j > k$ не мають осей симетрії.



а *б* *в*

Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі першого типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = k_3 = 0,052$:
а – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

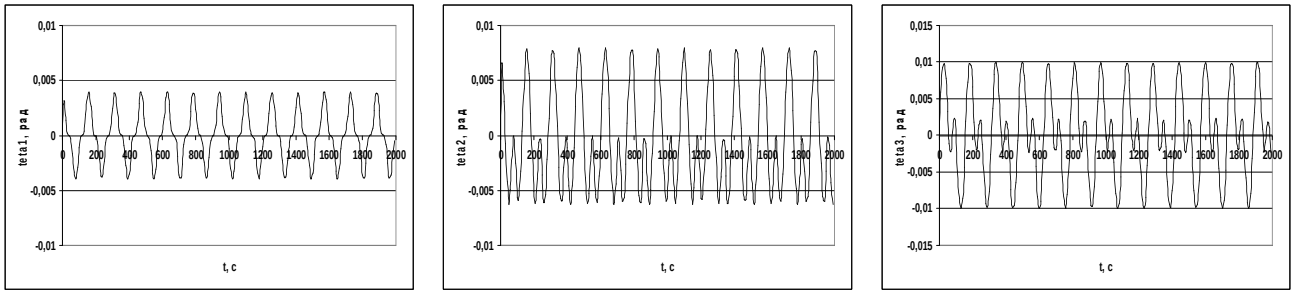


а *б* *в*

г *д* *є*

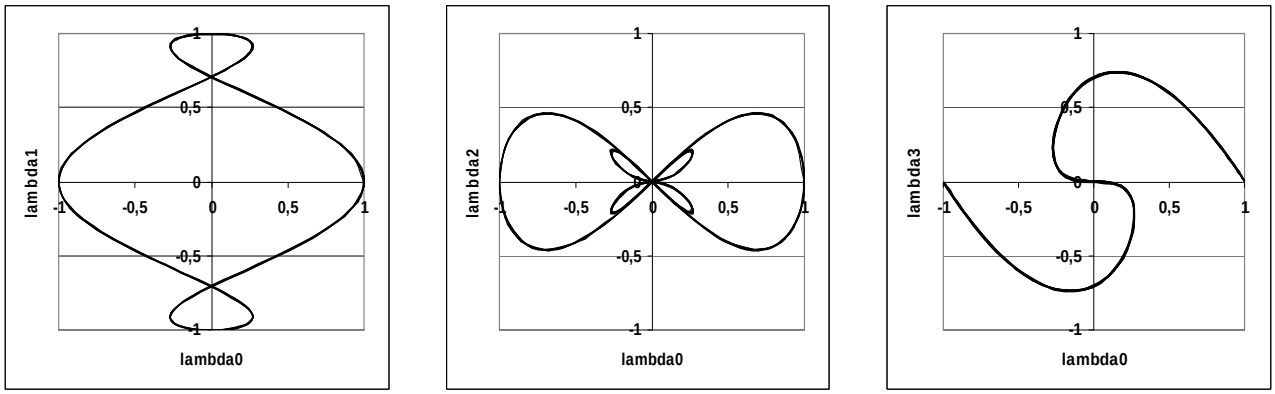
Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі першого типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = k_3 = 0,052$:
а – $\lambda_1(\lambda_0)$; б – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; *є* – $\lambda_3(\lambda_2)$.

Залежності від часу квазікоординат для моделі другого типу при значеннях параметрів $k_1 = 0,02$, $k_2 = k_3 = 0,04$ представлені на рис. 3. Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку приведені на рис. 4. На відміну від випадку моделі першого типу, отримані траєкторії $\lambda_1(\lambda_0)$, $\lambda_2(\lambda_0)$, $\lambda_3(\lambda_1)$, $\lambda_3(\lambda_2)$ мають осі симетрії, а траєкторії $\lambda_3(\lambda_0)$, $\lambda_2(\lambda_1)$ мають центральну симетрію.

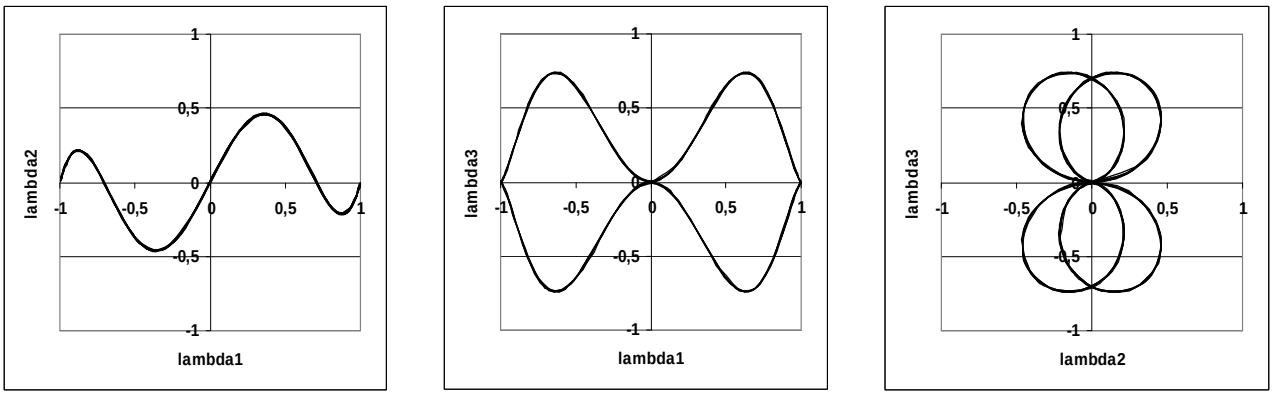


а *б* *в*

Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі другого типу при $k_1 = 0,02$, $k_2 = k_3 = 0,04$:
а – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

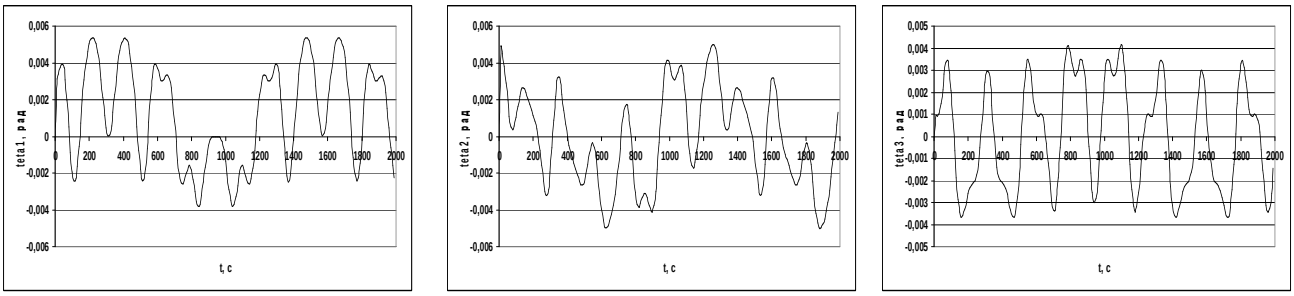


а *б* *в*



г *д* *є*

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі другого типу при $k_1 = 0,02$, $k_2 = k_3 = 0,04$:
а – $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; *є* – $\lambda_3(\lambda_2)$.

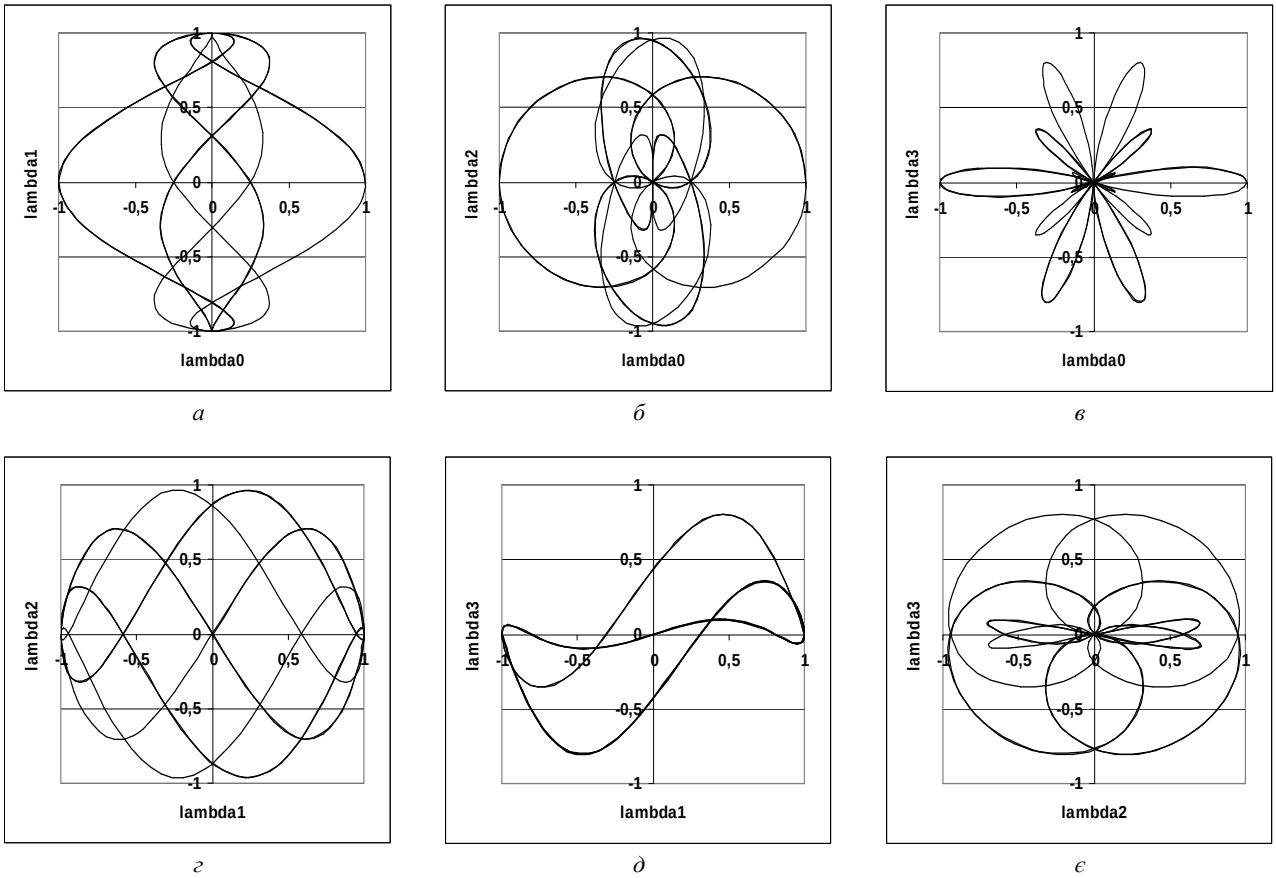


а *б* *в*

Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі третього типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:
а – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.

На рис. 5 представлені залежності від часу квазікоординат для моделі третього типу при значеннях параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$. На рис. 6 представлені отримані при цьому траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Всі траєкторії мають властивість симетрії.

В роботі [5] приведені результати реалізації еталонної моделі регулярної прецесії і наведені побудовані траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Порівняння результатів реалізацій запропонованих трьохчастотних моделей обертання з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропоновані модель суттєво відрізняється від моделі регулярної прецесії, при цьому охоплюють інші, більш складні обертальні рухи твердого тіла.



а *б* *в*

г *д* *є*

Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі третього типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$: *а* – $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – $\lambda_3(\lambda_0)$; *г* – $\lambda_2(\lambda_1)$; *д* – $\lambda_3(\lambda_1)$; *є* – $\lambda_3(\lambda_2)$.

Застосуємо побудовані чисельні реалізації мультиплікативних трьохчастотних моделей для точносного аналізу алгоритмів визначення орієнтації. Розглянемо два алгоритми визначення кватерніонів орієнтації, що мають третій порядок точності. У якості першого алгоритму візьмемо різницевий алгоритм, отриманий в [9], з кватерніоном повороту $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\vec{\lambda}_n^*)$ на такті $[t_{n-1}, t_n]$:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \quad \Delta\vec{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{24}(\vec{\theta}_{n-1}^* \times \vec{\theta}_n^*), \tag{19}$$

де $\theta_n^{*2} = \theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}$.

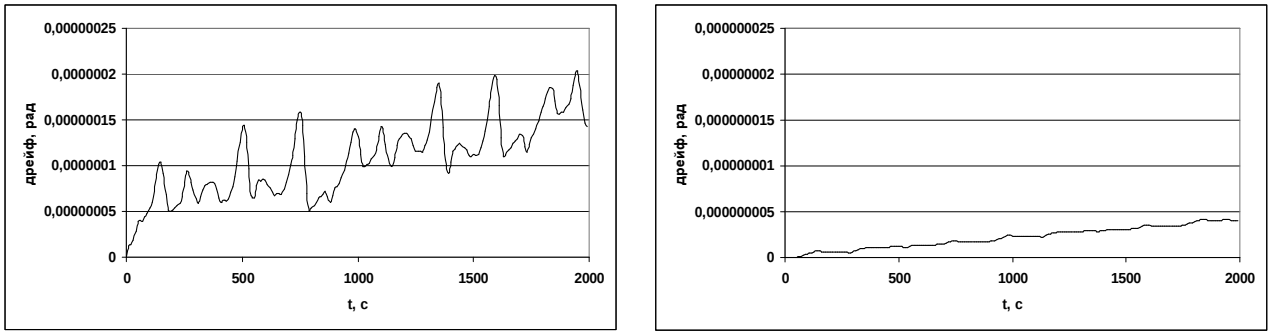
Другий алгоритм – це степеневий алгоритм з кватерніоном повороту [10]:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \quad \Delta\vec{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{3}(\vec{\theta}_{n-1/2}^* \times \vec{\theta}_n^*), \tag{20}$$

де $\vec{\theta}_{n-1/2}^* = \vec{\theta}^*(t_n + 0,5\Delta t)$.

В якості оцінок похибок алгоритмів будемо визначати неусувну похибку визначення орієнтації – накопичений малий кут повороту (дрейф) обчисленого базису відносно його істинного положення. Для цього використаємо методику визначення дрейфу, запропоновану в [9].

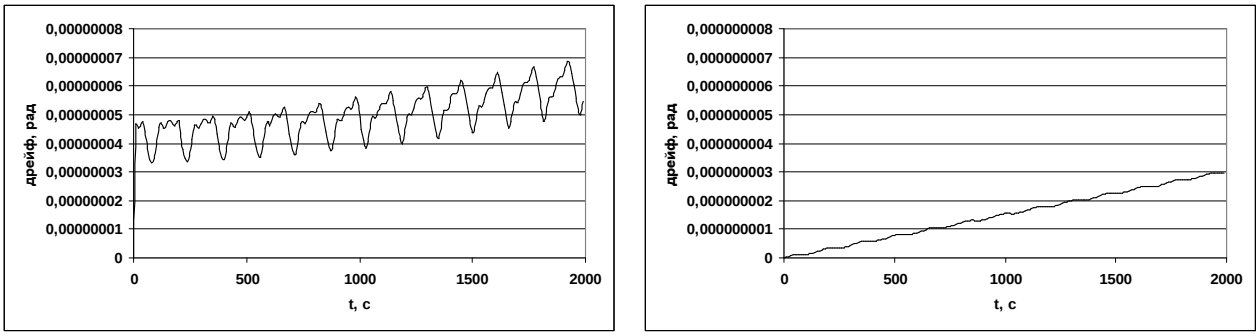
На рис. 7 показані залежності похибок дрейфу від часу для вищевказаних алгоритмів, які отримані на реалізації еталонної моделі першого типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = k_3 = 0,052$. Відзначимо, що за оцінкою похибки дрейфу другий алгоритм з кватерніоном повороту (20) має суттєві переваги в порівнянні з першим алгоритмом з кватерніоном повороту (19) (масштаби рис. 7, *а* і рис. 7, *б* по вертикальній осі різняться в 10 разів).



а *б*

Рис. 7 – Залежність похибки дрейфу від часу на моделі першого типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = k_3 = 0,052$:
а – для першого алгоритму; *б* – для другого алгоритму.

На рис. 8 наведені залежності похибок дрейфу від часу для вказаних алгоритмів, що отримані на реалізації еталонної моделі другого типу при $k_1 = 0,02$, $k_2 = k_3 = 0,04$. Як і у випадку моделі першого типу, степеневий алгоритм дає значно меншу похибку дрейфу, ніж різницевий алгоритм (по вертикальній осі масштаби рис. 8, *а* і рис. 8, б різняться в 10 разів).

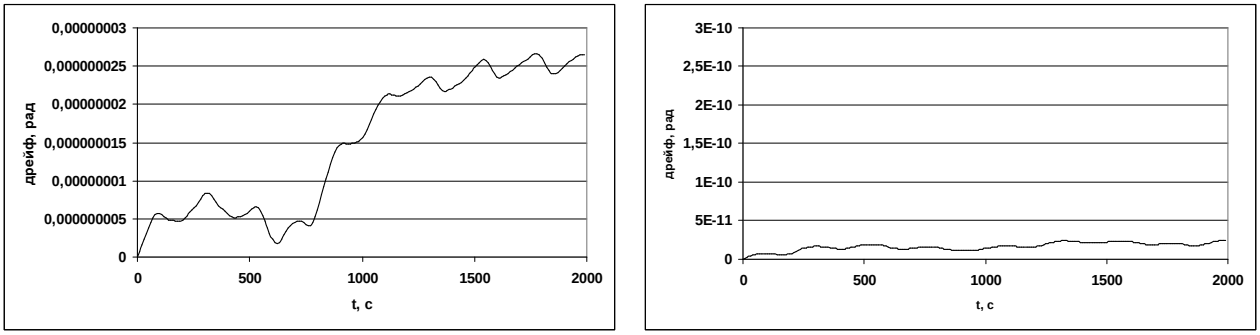


а *б*

Рис. 8 – Залежність похибки дрейфу від часу на моделі другого типу при $k_1 = 0,02$, $k_2 = k_3 = 0,04$:
а – для першого алгоритму; *б* – для другого алгоритму.

Залежності похибок дрейфу від часу для вибраних алгоритмів, що отримані на реалізації еталонної моделі третього типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$, показані на рис. 9. Для розглянутої реалізації моделі третього типу другий алгоритм також дає значно меншу похибку дрейфу, ніж перший алгоритм.

Таким чином за результатами чисельного експерименту можна зробити висновок, що на всіх розглянутих реалізаціях еталонних моделей за оцінкою похибки дрейфу степеневий алгоритм є більш прийнятним, ніж різницевий алгоритм.



а *б*

Рис. 9 – Залежність похибки дрейфу від часу на моделі третього типу при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:
а – для першого алгоритму; *б* – для другого алгоритму.

Висновки. Запропоновані три типа трьохчастотних неперервних моделей обертання твердого тіла, які основані на мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями кутів, що одномоментно змінюються у часі. Моделі включають в собі аналітичні залежності для компонент вектора позірного повороту, з яких можна отримати відповідні вирази для квазікоординат. Проведений чисельний експери-

мент показав, що при належному виборі параметрів моделей можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, що різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Результати реалізацій моделей представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі параметрів орієнтації. На декількох реалізаціях моделей проведений точносний аналіз двох вибраних алгоритмів визначення орієнтації.

Список літератури

1. *Mortensen R. E.* Strapdown Guidance Error Analysis // IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst. – 1974. – Vol. 10. – No. 4. – pp. 451 – 458.
2. *Ткаченко А. И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22.
3. *Панов А. П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
4. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
5. *Плаксий Ю. А.* Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37 (1010). – С. 141 – 147.
6. *Плаксій Ю. А.* Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – С. 175 – 185.
7. *Плаксій Ю. А.* Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2015. – № 41 (1150). – С. 111 – 119.
8. *Фролов Ю. А., Шипулина Л. В.* Аппроксимирующие модели вращения в параметрах Родрига-Гамильтона. – Харьков, 1982. – 11 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3398-82 Деп.
9. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
10. *Кузнецов Ю. А., Плаксий Ю. А.* Алгоритмы бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов : практические аспекты разработки, оценивания точности и реализации // Труды XXI Санкт-Петербургской Международной конференция по интегрированным навигационным системам (МКИНС 2014). – С.-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор». – 2014. – С. 300 – 303.

References (transliterated)

1. Mortensen R. E. Strapdown Guidance Error Analysis. *IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst.* 1974, vol. 10, no. 4, pp. 451–458.
2. Tkachenko A. I. O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientatsii ob"ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in algorithms of determination of the object orientation]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and computing technique]. Kyiv, 1970, no. 5, pp. 20–22.
3. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vyichislitelnaya tehnika* [Cybernetics and computing technique]. Kyiv, 1987, no. 73, pp. 3–9.
4. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inercial'nykh navigatsionnykh sistem* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
5. Plaksiy Yu. A. Etalonna trygonometrychna kvaternionna model' pretsesiynogo typu obertannya tverdogo tila [Reference trigonometrical quaternion precession type model of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no. 37 (1010), pp. 141–147.
6. Plaksiy Yu. A. Tryokhchastotni analitychni etalonni modeli obertannya tverdogo tila [Three-frequency reference analytical models of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 6 (11049), pp. 175–185.
7. Plaksiy Yu. A. Uzagal'nennya tryokhchastotnoyi trygonometrychnoyi kvaternionnoyi modeli obertannya tverdogo tila. Pershiy typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation. The first type of model]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 41 (1150), pp. 111–119.
8. Frolov Yu. A., Shipulina L. V. Approksimiruyushchie modeli vrashcheniya v parametrakh Rodriga-Gamil'tona [The approximating models of rotation in Rodrigues-Hamilton parameters]. Kharkiv, 1982, 11 p. Dep. v VINITI, no. 3398-82 Dep.
9. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Applying quaternions in problems of a rigid body orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.
10. Kuznetsov Yu. A., Plaksiy Yu. A. Algoritmy besplatformennykh inertsial'nykh sistem orientatsii podvizhnykh ob"ektov: prakticheskie aspekty razrabotki, otsenivaniya tochnosti i realizatsii [Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: practical aspects of development, error analysis and implementation]. *Trudy XXI Sankt-Peterburgskoy Mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* (MKINS 2014) [Proc. of the XXI St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. S.-Peterburg, TsNII "Elektropribor" Publ., 2014, pp. 300–303.

Надійшла (received) 07.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Мультиплікативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла / Ю. А. Плаксій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 72 – 81. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Мультипликативные трехчастотные модели вращения твердого тела / Ю. А. Плаксий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 72 – 81. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Multiplicative three-frequency models of rigid body rotation / Yu. A. Plaksiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 72 – 81. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Плаксій Юрій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

Плаксий Юрий Андреевич – кандидат технических наук, доцент, профессор НТУ «ХПИ», Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

Plaksiy Yuriy Andriyovych – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor NU "KhPI", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy_yu@gmail.com.

УДК 517.968.519.6

Т. С. ПОЛЯСКАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА $[-1,1]$ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Розглянуто інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, до якого наводить ряд задач дифракції хвиль. Проведена дискретизація цього рівняння на основі методу дискретних особливостей. Введені пари гільбертових просторів і оператори у них, відповідні заданій і дискретної задачам. З їх допомогою доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дано строге обґрунтування оцінки швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення інтегрального рівняння.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне ядро, метод дискретних особливостей.

Рассмотрено интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, к которому приводит ряд задач дифракции волн. Проведена дискретизация этого уравнения на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

We consider an integral equation of the first kind with a logarithmic kernel, which arises in a number of problems of wave diffraction. The equation is discretized using the method of discrete singularities. We introduce a pair of Hilbert spaces and operators in them, corresponding to the given and the discrete problems. With their help, we prove the unique solvability of the discrete problem and justify rigorously the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the integral equation.

Key words: integral equations, logarithmic kernel, the method of discrete singularities.

Введение. Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких систем интегральных уравнений на отрезке $[-1,1]$.

Основная идея метода дискретных особенностей заключается в следующем: решение интегрального уравнения ищем в специально выбраных точках, которые соответсвуют узлам квадратурных формул для интегралов с логарифмическими ядрами.Причём применяются две различные квадратурные формулы: одна для интеграла с логарифмическим ядром, другая для регулярной части уравнения (с теми же самыми узлами). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует заданное интегральное уравнение.

Постановка задачи. Рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x-x_0|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x_0,x)\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}=f(x_0),\ |x_0|<1 \qquad (1)$$

относительно неизвестной функции $u(x)$. Предполагается, что $f(x_0)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$, $K(x_0,x)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной.

Пусть $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ обозначает класс μ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, $\mu-$е производные которых удовлетворяют *условию Гёльдера* с показателем γ $(0<\gamma\le 1)$.

© Т. С. Полянская, 2016

Интерполяционные полиномы и квадратные формулы. Обозначим:

$$\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^n = \left\{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right\}_{k=1}^n$$

– нули *полинома Чебышева* первого рода $T_n(t) = \cos(n\arccos t)$; $(P_{n-1}^I g)(x)$ – интерполяционный *полином Лагранжа* функции $g(x)$ с узлами интерполирования $\left\{t_k^n\right\}_{k=1}^n$.

Пусть $v_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$, тогда имеют место квадратурные формулы [4]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_{n-1}\left(t_k^n\right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\left|x-x_0\right| v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_{n-1}\left(t_k^n\right)\left[\ln 2 + 2\sum_{p=1}^{n-1} T_p(x_0)\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p}\right], \tag{3}$$

причём фомула (2) остаётся верной для полиномов степени не выше $2n-1$.

Дискретизация уравнения. Приближённое решение уравнения (1) ищем в виде полинома $(n-1)$-й степени $u_{n-1}(x) \equiv (P_{n-1}^I u_{n-1})(x)$ из приближённого уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-x_0\right| dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}(x_0, x)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = f_{n-1}(x_0),\ \left|x_0\right| < 1, \tag{4}$$

где $K_{n-1}(x_0, x) = \left(P_{n-1,x_0}^I P_{n-1,x}^I K\right)(x_0, x)$, $f_{n-1}(x_0) = \left(P_{n-1}^I f\right)(x_0)$.

Рассматривая это уравнение в точках $\left\{t_i^n\right\}_{i=1}^n$, получаем эквивалентную ему систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-t_i^n\right| dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}\left(t_i^n, x\right)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = f_{n-1}\left(t_i^n\right),\ \ i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Вычисляя в (5) интегралы с помощью квадратурных формул (2) и (3) и перегруппировывая слагаемые, получаем, с учетом того, что

$$K_{n-1}\left(t_i^n, t_k^n\right) = \left(P_{n-1,x_0}^I P_{n-1,x}^I K\right)\left(t_i^n, t_k^n\right) = K\left(t_i^n, t_k^n\right),\ \ f_{n-1}\left(t_i^n\right) = \left(P_{n-1}^I f\right)\left(t_i^n\right) = f\left(t_i^n\right),\ i, k = \overline{1,n},$$

следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно значений приближённого решения $u_n(x)$ в узлах интерполирования

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n-1}\left(t_k^n\right)\left[-\ln 2 - 2\sum_{p=1}^{n-1} T_p\left(t_i^n\right)\frac{T_p\left(t_k^n\right)}{p} + K\left(t_i^n, t_k^n\right)\right] = f\left(t_i^n\right),\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Однозначная разрешимость системы (6) эквивалентна однозначной разрешимости уравнения (4).

Основные пространства и операторы в них. Обозначим: $L_{[-1,1]}^2$ – *гильбертово пространство функций* на $[-1, 1]$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)\overline{v}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$\|x\|$ – норма, порождённая этим скалярным произведением; $\Pi_{n-1}^I \subset L_{[-1,1]}^2$ – $n-$мерное подпространство всех алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. Введём операторы:

$$(Bu)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left|x-x_0\right| dx,\ \ (Ku)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x_0, x)\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\left(K_{n-1}u_{n-1}\right)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{n-1}(x_0, x)\frac{u_{n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Тогда уравнения (1) и (4) можно записать,соответственно, в виде

$$\left(B+K\right)u=f\ , \tag{7}$$

$$\left(B+K_{n-1}\right)u_{n-1}=f_{n-1}\,. \tag{8}$$

В рассматриваемых задачах оператор $B+K$ непрерывно обратим в паре пространств $\left(L^2_{[-1,1]},L^2_{[-1,1]}\right)$.

Имеют место соотношения [4]

$$B:T_0\left(t\right)\to\left(-\ln 2\right)T_0\left(t_0\right),\quad B:T_n\left(t\right)\to-\frac{T_n\left(t_0\right)}{n},\quad n=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Из (9) следует, что оператор B отображает Π_n^I в Π_n^I. Поэтому, в силу определения оператора K_{n-1}, оператор $B+K_{n-1}$ отображает Π_n^I в Π_n^I.

Доказательство однозначной разрешимости системы (6). Докажем, что оператор $B+K_{n-1}$ непрерывно обра-тим в паре пространств

$$\left(\Pi_{n-1}^I,\Pi_{n-1}^I\right) \tag{10}$$

и, следовательно, уравнение (8) и система (6) однозначно разрешимы. Для этого воспользуемся следующим результатом [5].

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $\tilde{X}\subset X$ и $\tilde{Y}\subset Y$ – их конечномерные подпространства одинаковой размерности. Рассмотрим два уравнения:

точное

$$Kx=y\quad\left(x\in X,y\in Y\right) \tag{11}$$

и приближённое

$$\tilde{K}\tilde{x}=\tilde{y}\quad\left(\tilde{x}\in\tilde{X},\tilde{y}\in\tilde{Y}\right), \tag{12}$$

где K и $\tilde{K}$ – линейные операторы, $K:X\to Y,\ \tilde{K}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) оператор K непрерывно обратим в паре пространств $\left(X,Y\right)$;

б) $p=\left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X}\left\|K-\tilde{K}\right\|_{\tilde{X}\to\tilde{Y}}<1$.

Тогда приближённое уравнение (12) имеет единственное решение $\tilde{x}^*\in\tilde{X}$ при любой правой части $\tilde{y}\in\tilde{Y}$, причём, если $x^*\in X$ – точное решение уравнения (11) и $\delta=\left\|y-\tilde{y}\right\|_Y$, то

$$\left\|x^*-\tilde{x}^*\right\|_X\le\left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X}\left(1-p\right)^{-1}\left[\delta-p\left\|y\right\|_Y\right].$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, нужно оценить $\left\|\left(K-K_n\right)u_n\right\|$ и $\left\|f-f_n\right\|$.

Лемма. *Пусть E_n – это наилучшее приближение функции $g(x)$ на $[-1,1]$ алгебраическими полиномами степени не выше n. Тогда*

$$\left\|P_n^I g-g\right\|\le 2E_n\sqrt{\pi}\,.$$

Оценки E_n для различных классов функций даются *теоремами Джексона* [6]. В частности, для $g(x)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ при $n>\mu$:

$$E_n\le\frac{C_\mu 2^{\mu+\gamma}}{n^{\mu+\gamma}}M\left(g\right),$$

где $C_\mu=12\dfrac{6^\mu\mu^\mu}{\mu!}\left(\dfrac{\mu+1}{2}\right)^\gamma$; $M(g)$ – константа в условии Гёльдера для $g^{(\mu)}(x)$.

Пользуясь этой леммой, получаем при $n-1>\mu$ следующие оценки:

$$\|f - f_{n-1}\| \le \frac{D(f)}{(n-1)^{\mu+\gamma}} \text{ и } \|K - K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} \le \frac{D(K)}{(n-1)^{\mu+\gamma}},$$

где $D(f)$ и $D(K)$ – константы, не зависящие от n. Тогда при $n-1>\mu$:

$$\|(B+K)-(B+K_{n-1})\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} = \|K-K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} \le D(K)(n-1)^{-\mu-\gamma}.$$

Выберем $N>\mu+1$ такое, чтобы при любом $n \ge N$ выполнялось неравенство

$$p_n = \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2} \|K-K_{n-1}\|_{\Pi^I_{n-1}\to\Pi^I_{n-1}} < 1.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что при любом $n \ge N$ оператор $B+K_{n-1}$ непрерывно обратим в паре пространств (10), то есть приближённое уравнение (4) имеет единственное решение $u_{n-1}(x)$. Кроме того, если $u(x)$ – точное решение уравнения (7), то имеет место оценка скорости сходимости приближённого решения к точному

$$\|u-u_n\| \le \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2} \frac{1}{1-p_n}\left[\frac{D(f)}{(n-1)^{\mu+\gamma}} + p_n\|f\|\right],$$

где $p_n \le \left\|(B+K)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2} \dfrac{D(K)}{(n-1)^{\mu+\gamma}} = \alpha_n$, $\alpha_n = \underline{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ при $n\to\infty$.

Отсюда следует, что $\|u-u_n\| \le \sigma_n$, где $\sigma_n = \underline{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ при $n\to\infty$.

Выводы. На основе численного метода дискретных особенностей приближенного решения интегральных уравнений построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая заданное интегральное уравнение с логарифмическим ядром. Доказано,что при некоторых предположениях гладкости ядра регулярной части и правой части интегрального уравнения соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближённого решения к точному в среднем.

Список литературы

1. *Tsalamengas J. L.* «Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I : TM-Case» IEEE Trans. Antennas Propagat., 2010, vol. 58, pp. 3265 – 3274.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярних интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995 – 520 с.
3. *Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних токов. Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
4. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92 с.
5. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.
6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.-Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.

References (transliterated)

1. *Tsalamengas J. L.* "Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case". IEEE Trans. Antennas Propagat. Publ., 2010, vol. 58, pp. 3265–3274.
2. *Lifanov I. K. Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislenniy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Open Company "Janus" Publ., 1995. 520 p.
3. *Gande'l Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. Математicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Ucheb. posobie. Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. PartII]. Kharkov, 1992. 145 p.
4. *Gandel Y. V. Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Ucheb. posobie. Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part 1]. Kharkov-Kherson, 2001. 92 p.
5. *Gabdulkhaev B. G. Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions for linear problems]. Kazan, Univ. Kazan. Universita Publ., 1980. 231p.
6. *Natanson I. P. Konstruktivnaya teoriya funktsyy* [Constructive theory of functions]. Moscow-Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688p.

Поступила (received) 11.07.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Інтегральне рівняння на $[-1,1]$ **з логарифмічним ядром / Т. С. Полянська** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 81 – 85. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Интегральное уравнение на $[-1,1]$ **с логарифмическим ядром / Т. С. Полянская** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 81 – 85. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Integral equation on $[-1,1]$ **with a logarithmic kernel / T. S. Polyanskaya** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 81 – 85. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Полянская Татьяна Семеновна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Polyanskaya Tatyana Semenowna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: 093- 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

УДК 621.224

А. В. РУСАНОВ, О. Н. ХОРЕВ, Д. Ю. КОСЬЯНОВ, С. А. РЯБОВА, П. Н. СУХОРЕБРЫЙ

ВЛИЯНИЕ ОСЕВОГО НАВАЛА ЛОПАСТЕЙ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ОСЕВОЙ ГИДРОТУРБИНЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ

Представлено результати чисельного дослідження впливу складного осьового навалу лопатей робочого колеса осьової гідротурбіни ПЛ20 на характеристики потоку в проточній частині. Моделювання течії виконано на основі чисельного інтегрування рівнянь Рейнольдса і двопараметричної моделі турбулентності Ментера (SST). Розрахунки проведені за допомогою програмного комплексу IPMflow. Наведено аналіз структури потоку в розрахунковій області, що включає направляючий апарат, робоче колесо і відсмоктувальну трубу; представлені залежності значень ККД, потужності і напору від величини навалу при оптимальному режимі роботи.

Ключові слова: осьова гідротурбіна, проточна частина, просторове профілювання, осьовий навал, робоче колесо, відсмоктувальна труба, гідродинамічне вдосконалення.

Представлены результаты численного исследования влияния сложного осевого навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 на характеристики потока в проточной части. Моделирование течения выполнено на основе численного интегрирования уравнений Рейнольдса и двухпараметрической модели турбулентности Ментера (SST). Расчеты проведены с помощью программного комплекса IPMflow. Приведен анализ структуры потока в расчетной области, включающей направляющий аппарат, рабочее колесо и отсасывающую трубу, представлены зависимости значений КПД, мощности и срабатываемого напора от величины навала при оптимальном режиме работы.

Ключевые слова: осевая гидротурбина, проточная часть, пространственное профилирование, осевой навал, рабочее колесо, отсасывающая труба, гидродинамическое совершенствование.

The results of numerical investigation of the influence of the complex axial offset of the runner blades of the Kaplan turbine PL20 upon flow characteristics in the flow part are presented. The flow simulation has been carried out on basis of numerical integration of the Reynolds equations and the two-parameter turbulence model of Menter (*SST*). The calculations have been conducted with the help of the software system *IPMFlow*. The analysis of the flow pattern in the computational region including guide vanes, runner and draft tube is presented; the dependences of the values of efficiency, capacity and actuated head on the offset value at optimum operating condition are shown. As a result of investigations it is established that the application of peripheral axial offset: 1) has little impact on the flow pattern in the area behind the guide vanes and in front of the runner and significant impact behind the runner at the entrance to the draft tube; 2) leads to changes of the form of pressure diagrams on the surfaces of the runner blades, especially in the area of the inlet edges; 3) makes it possible to align the distribution of total pressure across the channel width of the runner; 4) impacts on the flow pattern and energy loss in the draft tube; 5) impacts on integral parameters of flow part: efficiency, capacity, head; 6) makes it possible to increase the maximum values of efficiency and capacity at the optimum operating condition of modern high-performance flow part of the Kremenchug HPP.

Key words: Kaplan turbine, flow part, spatial profiling, axial offset, runner, draft tube, hydrodynamic improvement.

Введение. Повышение эффективности гидротурбинного оборудования ГЭС является важной научно-технической проблемой, решение которой приводит к необходимости совершенствования существующих методов расчета и анализа рабочего процесса гидротурбин [1]. Перспективным способом повышения эффективности проточных частей (ПЧ) гидромашин является их гидродинамическое усовершенствование за счет пространственного профилирования лопастных систем. В ИПМаш НАН Украины накоплен большой опыт по пространст-

© А. В. Русанов, О. Н. Хорев, Д. Ю. Косьянов, С. А. Рябова, П. Н. Сухоребрый, 2016

венного профилирования лопастных систем. В ИПМаш НАН Украины накоплен большой опыт по пространственному профилированию направляющих и рабочих лопаток паровых турбин [2, 3] с помощью *окружного* и *осевого навалов*. При навалах форма сечений лопастей остается неизменной, меняется только вид линии привязки и, как следствие, взаимное положение сечений в окружном или осевом направлениях. Схема сложных навалов у периферии и у втулки приведена на рис. 1. Сложный навал в окружном или осевом направлениях образуется за счет придания линии привязки лопасти формы кривой второго порядка, которая задается углом саблевидности $\gamma_{U,D}$ и относительной длиной изогнутого участка лопасти $\overline{l}_{U,D}$. Индексом D обозначены величины,

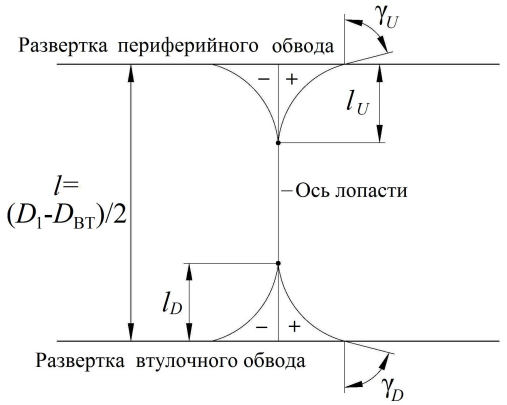


Рис. 1 – Схема сложного осевого навала лопасти рабочего колеса.

относящиеся к втулке, а индексом U – к периферии. Параметры $\overline{l}_U$ и $\overline{l}_D$ определяются по формулам:

$$\overline{l}_U = \frac{l_U}{l/2}\cdot 100\%;\ \overline{l}_D = \frac{l_D}{l/2}\cdot 100\%.$$

В рабочих колесах (РК) осевой гидротурбины в качестве линии привязки принимается ось поворота лопасти, после выполнения навалов в случае необходимости выбирается новая ось поворота. В исследованиях рассматривались варианты сложного осевого периферийного навала с постоянным значением $l_U = l/2$ и переменной величиной *угла саблевидности* γ_U.

Статья является продолжением исследований влияния навалов лопастей РК осевого типа на характеристики потока в ПЧ. В работах [4 – 6] рассмотрено влияние простого и сложного окружных навалов, в данной статье – осевого навала. В качестве объекта исследований принята ПЧ гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС [4 – 8]. Расчетная область включала лопастные системы направляющего аппарата (НА) и РК, а также отсасывающую трубу (ОТ). Автоматизированное построение геометрической модели РК с навалами и расчетной сетки, а также численное исследование потока вязкой несжимаемой жидкости проведено при помощи программного комплекса *IPMFlow*.

Математическая модель. Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в проточной части гидротурбины выполнено на основе численного интегрирования уравнений Рейнольдса с дополнительным членом, содержащим искусственную сжимаемость. Уравнения Рейнольдса с двухпараметрической моделью турбулентности k–ω, записанные в векторной форме в декартовой системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси x, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}Q + \frac{\partial}{\partial x}\left(E_i + E_v\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_i + F_v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(G_i + G_v\right) = H,$$

где $Q = \left(P/\beta,\ u, v, w, k, \omega\right)^T$; $P = \dfrac{p}{\rho_*}$; $H = \left(0,\ g,\ y\Omega^2 + 2w\Omega,\ z\Omega^2 - 2v\Omega,\ H_k,\ H_\omega\right)^T$; $H_k = \left(\tilde{P}_k - \varepsilon\right) f_6$;

$$H_\omega = \left[\frac{\gamma}{\nu_t}P_k - \beta\omega^2 f_4 + \left(1 - f_1\right)\frac{2}{\omega\sigma_{\omega 2}}C_D\right] f_7;\quad E_i = \left(u,\ u^2 + P,\ uv,\ uw,\ uk,\ u\omega\right)^T;$$

$$F_i = \left(v,\ vu,\ v^2 + P,\ vw,\ vk,\ v\omega\right)^T;\quad G_i = \left(w,\ wu,\ wv,\ w^2 + P,\ vw,\ wk,\ w\omega\right)^T;$$

$$E_v = \left(0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz}, -\chi_{kx}, -\chi_{\omega x}\right)^T;\quad F_v = \left(0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}, -\tau_{yz}, -\chi_{ky}, -\chi_{\omega y}\right)^T;$$

$$G_v = \left(0, -\tau_{zx}, -\tau_{zy}, -\tau_{zz}, -\chi_{kz}, -\chi_{\omega z}\right)^T;$$

$x,\ y,\ z,\ t$ – декартовы координаты и время; Q – вектор консервативных переменных; E_i, F_i, G_i – векторы потоков (невязкая часть); E_v, F_v, G_v – векторы потоков (вязкая часть); p, P, u, v, w – статическое и кинематическое давление, компоненты вектора скорости; k, ω – кинетическая энергия турбулентности, удельная скорость диссипации; ρ_* – плотность жидкости;

Коэффициент искусственной сжимаемости жидкости β для обеспечения высокой скорости сходимости рекомендуется выбирать из следующих соотношений:

$$\beta = \max(0.3, r(u^2 + v^2 + w^2)),\quad r = 1 \ldots 5,$$

или

$$\beta = \delta_1 a_*^2 + \delta_0,\ \delta_1 = 1 \ldots 5, 0 < \delta_0 << 1.$$

Для численного решения уравнений задаются дополнительные условия на границах расчетной области. На входе задаем распределение компонент вектора скорости, на выходе – распределение статического давления p, на стенках задается условие прилипания $\vec{V} = 0$.

Численное интегрирование уравнений проводится с помощью *неявной квазимонотонной схемы Годунова* второго порядка точности по пространству и времени. Более подробное описание математической модели и численного метода представлено в работах [9, 10].

Дискретизация исследуемой проточной части выполнена с помощью сетки с шестигранными ячейками общим числом ячеек 1.578 млн: один межлопаточный канал в решетке НА – 456 тыс., один межлопастной канал в решетке РК – 622 тыс., отсасывающая труба − 500 тыс.

Численные исследования проведены для модели с диаметром РК $D_1 = 1$ м, напоре $H = 1$ м при угле установки лопасти РК $\varphi_л = 15^\circ$ при оптимальном режиме: приведенный расход $Q_I^{'} = 1117,9$ л/с, приведенная частота вращения $n_I^{'} = 152,9$ мин$^{-1}$, открытие НА $a_0 = 56,52$ мм, угол потока на входе в расчетную область $\alpha_п = 38,9^\circ$ [7, 8].

Результаты расчетного исследования течения жидкости в проточной части. Проведен численный эксперимент для ПЧ с исходным РК ($\gamma_U = 0^\circ$) и лопастей рабочего колеса с осевым периферийным навалом при четырех значениях углов саблевидности γ_U: -20°; -10°; $+10^\circ$; $+20^\circ$. Осевой навал с положительными значениями угла саблевидности приводит к смещению периферийного участка лопасти вниз по потоку и, наоборот, с отрицательными – вверх. На рис. 2 приведены радиальные сечения лопастей РК, проходящие через ось поворота, при трёх разных значениях осевого периферийного навала.

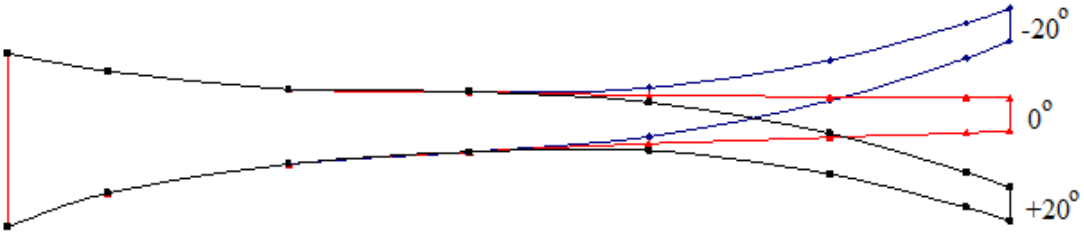


Рис. 2 – Радиальные сечения лопастей РК с навалами при углах саблевидности $\gamma_U = -20^\circ$; 0°; $+20^\circ$.

Влияние навала на структуру потока оценивалось по характеру распределения компонент скорости области за НА, перед и за РК, по эпюрам распределения давления вдоль сечений РК и по распределению полного давления по ширине канала в области рабочего колеса, а также характеристикам потокам в отсасывающей трубе.

Исследования показали, что применение осевого навала лопастей РК практически не оказывает влияния на распределение компонент скорости и угла потока за НА.

Осевой периферийный навал оказывает незначительное влияние на структуру потока в зоне перед РК. Небольшое отличие в распределении компонент скорости и тангенциального угла потока наблюдается только на периферийном участке.

На рис. 3 приведено распределение давления на поверхностях лопастей у втулки (10 % ширины канала), среднем сечении (50 %) и периферии (90 %) РК для пяти вариантов осевого навала. Как видим, применение осевого навала приводит к заметному изменению перепада давления вдоль сечений лопасти. Большее влияние навал оказывает на вид эпюр давления на напорной стороне: положительные углы саблевидности γ_U (и, соответственно, смещение периферийной части лопасти вниз по потоку) повышает уровень давления, отрицательные – понижают. На стороне разрежения навалы оказывают заметное влияние на величину давления только на периферии в области входной кромки: положительные углы саблевидности γ_U приводят к понижению давления, отрицательные – к повышению (рис. 3, *в*).

На рис. 4 показано распределение осредненного по шагу абсолютного полного давления (энергии) по ширине канала в среднем поперечном сечении межлопастного канала РК при разных значениях угла саблевидности γ_U. Из представленных результатов видно, что навалы заметно изменяют графики, распределяют энергии по ширине канала. Навалы с положительными значениями угла γ_U приводят к повышению значений энергии почти по всей ширине канала, начиная от втулки, а отрицательные понижают. На относительной ширине канала около 95 % значения полного давления выравниваются, и на периферии наблюдается обратная картина распределения. Таким образом, применяя осевой навал, можно добиться более равномерного распределения энергии по ширине канала РК.

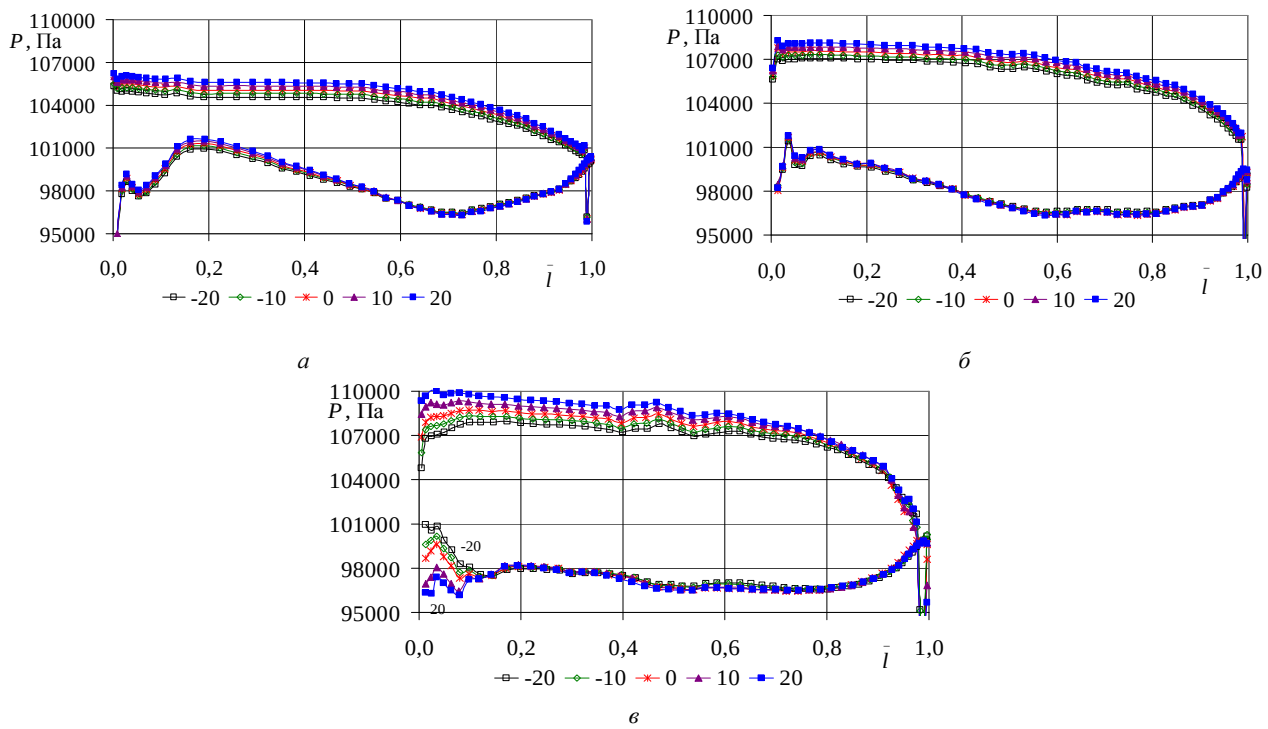


Рис. 3 – Распределение давления вдоль сечений лопасти РК при разных значениях угла саблевидности γ_U :
а – втулочное; *б* – среднее; *в* – периферийное.

На рис. 5 приведено распределение по ширине канала меридиональной (расходной) V_m и окружной скорости V_u, а также абсолютного угла потока α_2 за РК при разных значениях угла саблевидности γ_U. Эти данные необходимы для оценки эффективности работы РК и определения граничных условий на входе в отсасывающую трубу. Из рисунка видно, что применение осевого периферийного навала приводит к заметному перераспределению компонент скорости и угла потока по ширине канала. Навалы лопасти с положительными углами саблевидности приводят к повышению уровня расходной скорости во втулочной области, с отрицательными – к понижению. При относительной ширине канала 60 % эпюры практически сходятся в одной точке, после чего наблюдается обратная картина влияния навала. Наиболее равномерное распределение меридиональной скорости наблюдается в исходном варианте и при углах саблевидности γ_U, равных $+10^\circ$ и -10°.

Окружные скорости во втулочной зоне имеют небольшие отрицательные значения и при движении в сторону периферии плавно повышаются. Навалы с положительными углами саблевидности приводят к понижению значений окружной скорости практически по всей ширине канала.

Распределение абсолютного тангенциального угла потока за РК имеет такой же вид, как у окружной скорости.

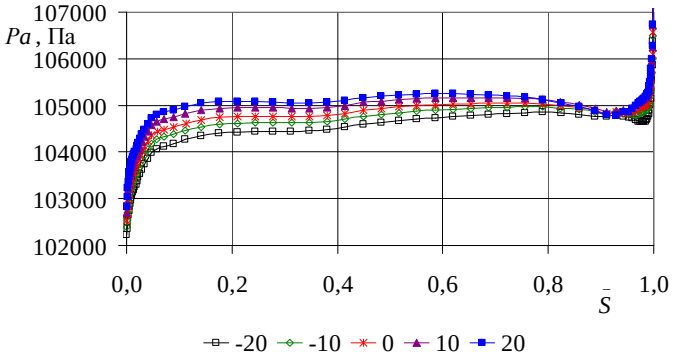


Рис. 4 – Распределение осредненного по шагу абсолютного полного давления по ширине канала в среднем поперечном сечении межлопастного канала РК при разных значениях осевого навала.

Проведенные исследования показали влияние осевого навала лопастей РК на характеристики потока в ОТ. На рис. 6 приведено расположение характерных сечений отсасывающей трубы и распределение относительной площади F^* поперечных сечений по длине в зависимости от их номера. Под относительной площадью понима-

ется отношение площади текущего сечения к площади входного в ОТ (сечение 1). Течение по всей длине, кроме сечения 5, диффузорное, что обеспечивает преобразование кинетической энергии потока в энергию давления.

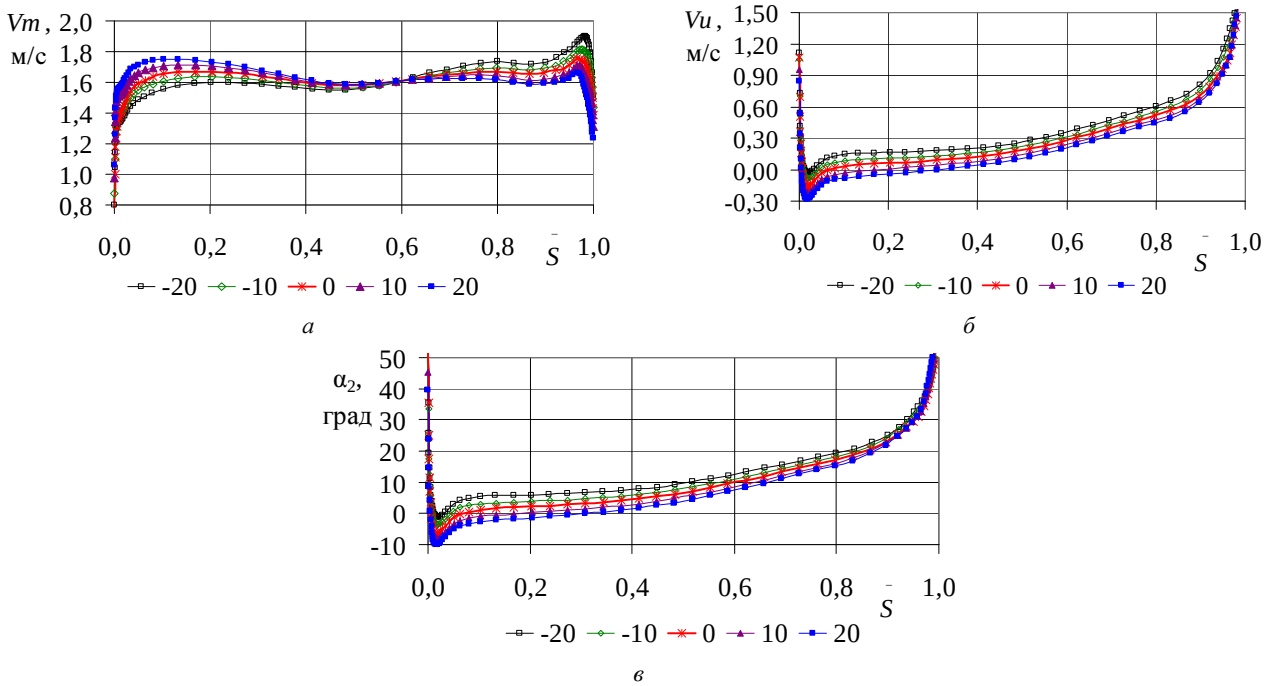


Рис. 5 – Распределение по ширине канала параметров потока за РК при разных значениях угла саблевидности γ_U : *а* – меридиональной скорости V_m ; *б* – окружной скорости V_u ; *в* – абсолютного угла потока α_2 .

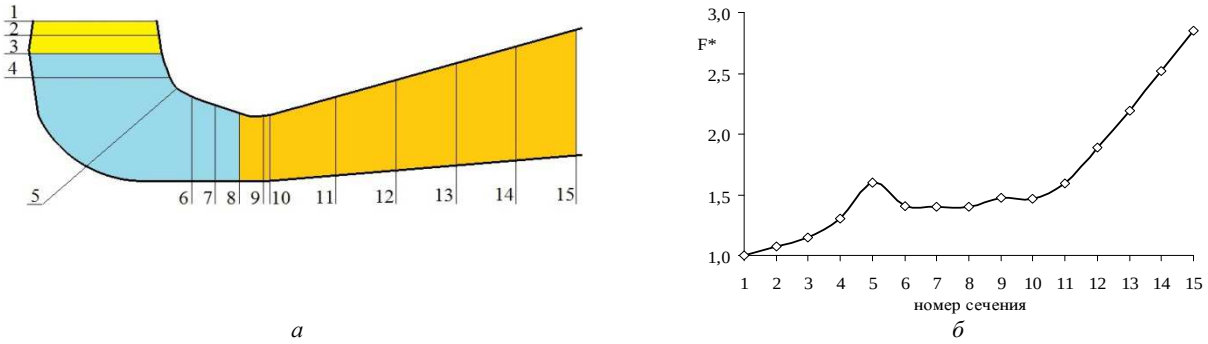
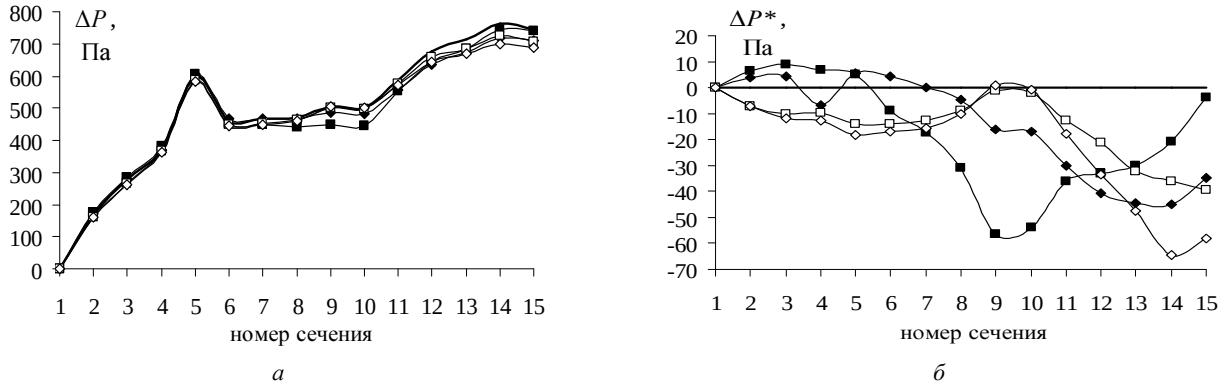


Рис. 6 – Отсасывающая труба Кременчугской ГЭС: *а* – характерные сечения для исследования структуры потока; *б* – изменение относительной площади сечений отсасывающей трубы.



$-\blacklozenge- -\ \gamma_U = -20^\circ$; $-\blacksquare- -\ \gamma_U = -10^\circ$; — $\gamma_U = 0^\circ$;

$-\square- -\ \gamma_U = +10^\circ$; $-\lozenge- -\ \gamma_U = +20^\circ$.

Рис. 7 – Распределение статического давления вдоль отсасывающей трубы: *а* – восстановление давления относительно значения на входном сечении; б – характер приращения статического давления в ОТ относительно варианта $\gamma_U = 0^\circ$.

На рис. 7, *а* показано изменение осредненного по площади статического давления (относительно величины давления на входе в ОТ, сеч. № 1) по сечениям при разных значениях навала лопастей РК. На рис. 7, *б* приведено изменение распределения давления в трубе относительно исходного варианта РК. Как видно, осевой навал лопасти не оказывает существенного влияния на характер графиков восстановления давления в ОТ. В диффузоре (сеч. 1 – 3) и в колене (сеч. 3 – 8) отличия минимальны, некоторые незначительные изменения происходит в отводящем диффузоре (сеч. 8 – 15).

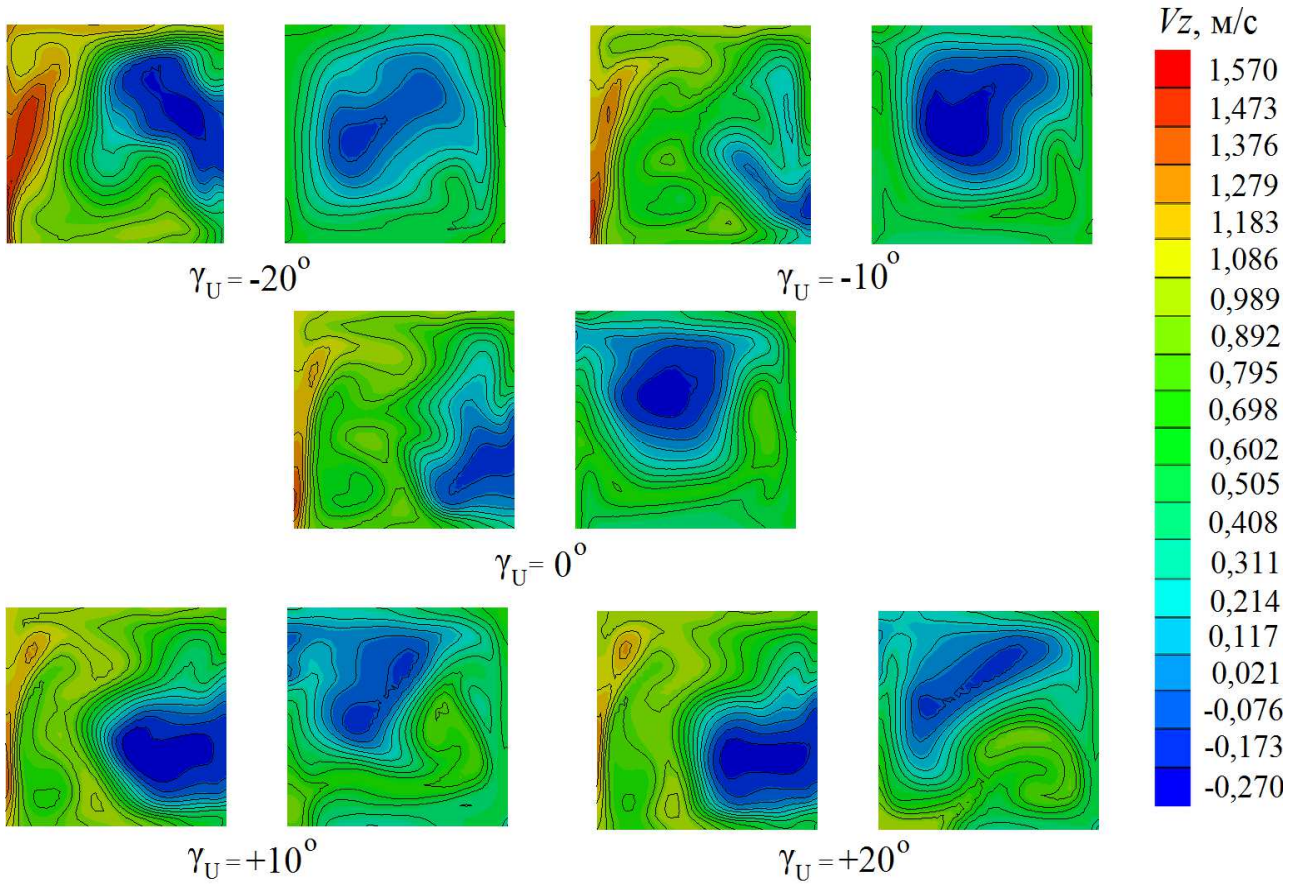


Рис. 8 – Изолинии расходной компоненты вектора скорости в выходном сечении отсасывающей трубы.

На рис. 8 приведено распределение изолиний расходной скорости в выходном сечении ОТ (сеч. 15) при разных значениях навалов лопастей РК. Как видно из рисунка, у всех вариантов ПЧ наблюдается заметная неравномерность распределения скорости – ее уровень в левом канале (по ходу течения) заметно выше, чем в правом. Во всех конструкциях на выходе из трубы присутствуют зоны с обратным течением причём, как в левом, так и правом канале. Максимальное значение скоростей наблюдается у левой стенки левого канала, ее уровень снижается при навале (то есть перемещении периферийного участка лопасти РК вниз по потоку).

Проведенные исследования дали возможность оценить зависимость энергетических показателей ПЧ от величины навала. На рис. 9 приведены зависимости потерь энергии в ОТ, относительных значений КПД, мощности и срабатываемого напора всей ПЧ от значения угла саблевидности. Под относительными КПД, мощностью и напором понимается отношение этого параметра в ПЧ с РК с навалами к соответствующим значениям исходного варианта ($\gamma_U = 0^\circ$) в процентах (кроме напора).

Минимум потерь энергии в отсасывающей трубе $h_{\text{ОТ}}$ получен у варианта ПЧ с РК при угле саблевидности $\gamma_U = +10^\circ$ и равен 1,82 %. В этой же ПЧ получено и максимальное значение относительного КПД: его повышение относительно исходного варианта составило 0,21 %.

Значения мощности и срабатываемого напора возрастают при смещении периферийного участка лопасти вниз по потоку. В оптимальной (с точки зрения значения КПД) ПЧ ($\gamma_U = +10^\circ$) в результате применения осевого навала удалось добиться повышения мощности более чем на 2,6 %.

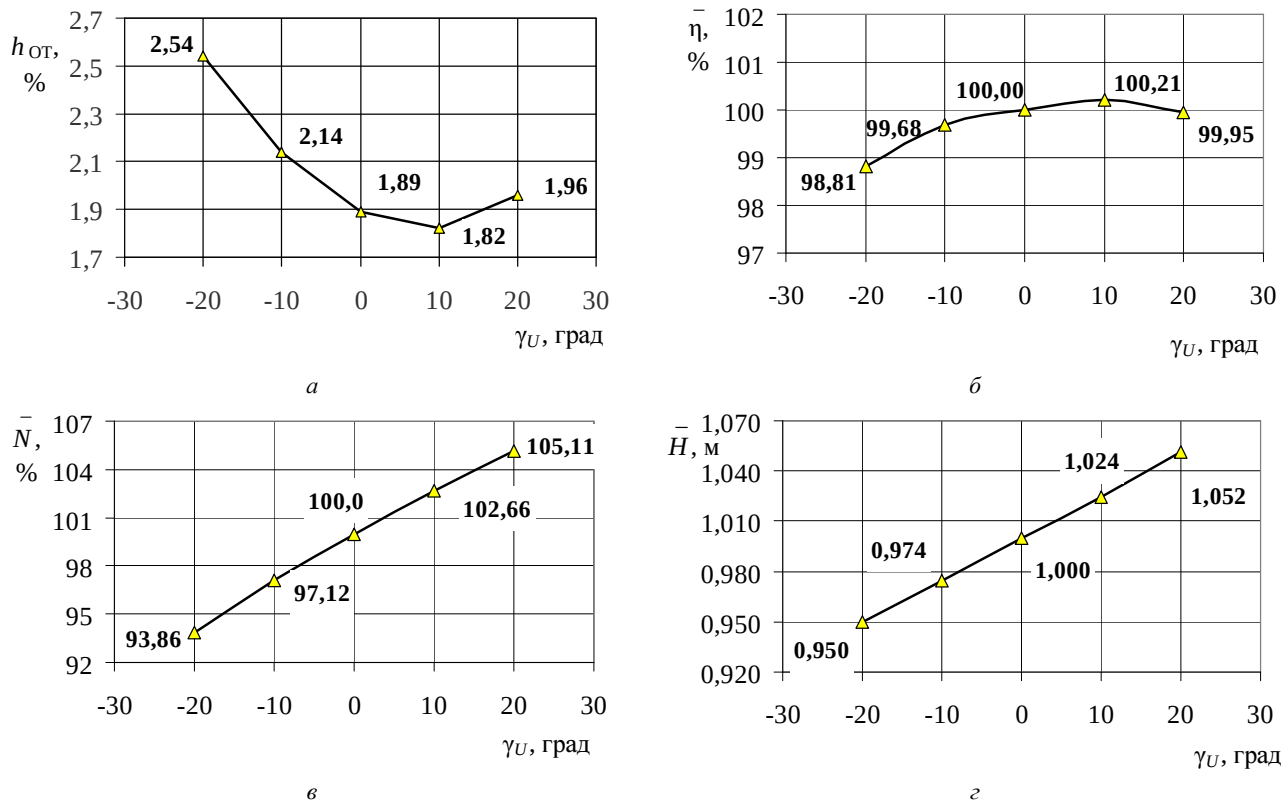


Рис. 9 – Зависимость энергетических показателей от величины навала лопастей РК:
а – потери в ОТ; *б* – КПД ПЧ; *в* – мощность; *г* – срабатываемый напор.

Выводы. Выполнено численное исследование влияния сложного осевого периферийного навала лопасти РК осевой гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС на характеристики потока в проточной части. В результате установлено, что применение периферийного осевого навала:

– оказывает незначительное влияние на структуру потока в области за НА и перед РК и существенное – за РК на входе в ОТ;

– приводит к изменению вида эпюр давления на поверхностях лопасти РК, особенно в районе входных кромок;

– дает возможность выровнять распределение полного давления по ширине канала;

– оказывает влияние на структуру потока и потери в отсасывающей трубе;

– влияет на интегральные характеристики ПЧ: КПД, мощность, срабатываемый напор;

– позволило добиться повышения максимального значения КПД и мощности при оптимальном режиме работы современной высокоэффективной проточной части Кременчугской ГЭС.

В дальнейшем планируется провести исследования ПЧ с РК с одновременным применением окружных и осевых навалов в широком диапазоне режимов работы.

Список литературы

1. *Семенова А. В., Чирков Д. В., Скороспелов В. А.* Применение метода многоцелевой оптимизации для проектирования формы лопасти рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины // Известия Самарского научного центра РАН. – 2013. – Т. 15. – № 4 (2). – С. 588 – 593.
2. *Русанов А. В., Волков Ю. П.* Влияние сложного навала рабочих и направляющих лопаток ЦВД паровой турбины на аэродинамические характеристики проточной части // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2008. – Вып. 3 (13). – С. 93 – 97.
3. *Русанов А. В., Левченко Е. В., Швецов В. Л., Пащенко Н. В.* Влияние пространственного профилирования направляющих лопаток на газодинамические характеристики ЦНД паровой турбины // Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов. – 2010. – № 7 (74). – С. 65 – 70.
4. *Русанов А. В., Хореев О. Н., Линник А. В., Сухоребрый П. Н.* Влияние простого окружного навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 на гидродинамические характеристики проточной части // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х. : НТУ «ХПІ», 2015. – Вип. 3 (1012). – С. 8 – 12.
5. *Русанов А. В., Хореев О. Н., Линник А. В., Сухоребрый П. Н.* Влияние сложного окружного навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины на структуру потока и энергетические характеристики проточной части // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2015. – Вип. 18 (1127). – С. 130 – 141.
6. *Русанов А. В., Хореев О. Н., Косьянов Д. Ю., Сухоребрый П. Н., Рябова С. А.* Влияние пространственного профилирования лопастей рабочего колеса на характеристики потока в проточной части осевой гидротурбины // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – Вип. 20 (1192). – С. 8 – 14.
7. *Русанов А. В., Линник А. В., Сухоребрый П. Н., Хореев О. Н., Рябов А. В.* Математическое моделирование течения жидкости и анализ характеристик потока в подводе гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія :

Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – Вип. 1 (1044). – С. 41 – 48.

8. *Русанов А. В., Хореев О. Н., Линник А. В., Сухоребрый П. Н., Косьянов Д. Ю.* Численное исследование течения жидкости в проточной части гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – Вип. 45 (1154) 2015. – С. 9 – 15.

9. *Русанов А. В., Косьянов Д. Ю.* Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. − 2009. − №5. − С. 4 − 7.

10. *Русанов А. В., Ершов С. В.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин // Монография. − Харьков : Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, 2008. − 275 с.

References (transliterated)

1. Semenova A. V., Chirkov D. V., Skorospelov V. A. Primenenie metoda mnogotselevoy optimizatsii dlya proektirovaniya formy lopasti rabochego kolesa povorotno-lopastnoy gidroturbiny [Application of multi-objective optimization method for designing shape of runner blade of Kaplan turbine]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN* [Reports of the Samara scientific center of RAS]. 2013, vol. 15, no. 4(2), pp. 588–593.

2. Rusanov A. V., Volkov Yu. P. Vliyanie slozhnogo navala rabochikh i napravlyayushchikh lopatok CVD parovoy turbiny na ayerodinamicheskie harakteristiki protochnoy chasti [The impact of the complex offset of the runner and the guid CVP blades of a steam turbine on the aerodynamic characteristics of the flow part]. *Kompressornoe i yenergeticheskoe mashinostroenie* [Compressor and energy mechanical engineering]. 2008, no. 3 (13), pp. 93–97.

3. Rusanov A. V., Levchenko E. V, Shvecov V. L., Pashchenko N. V. Vliyanie prostranstvennogo profilirovaniya napravlyayushchikh lopatok na gazodinamicheskie kharakteristiki CND parovoy turbiny [Influence of spatial profiling of guide blades on the gas-dynamic characteristics of steam turbine low pressure cylinder]. *Dvigateli i yenergoustanovki ayerokosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Engines and power plants of aerospace and flying machines]. 2010, no. 7 (74), pp. 65–70.

4. Rusanov A. V., Khorev O. N., Linnik A. V., Sukhorebryy P. N. Vliyanie prostogo okruzhnogo navala lopastey rabochego kolesa osevoy gidroturbiny PL20 na gidrodinamicheskie kharakteristiki protochnoy chasti [The influence of a simple circular offset of the runner blades of the Kaplan turbine PL20 upon hydrodynamic characteristics of the flow part]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Gidravlichni mashyny ta gidroagregaty* [Bulletin of the National Technical University “KhPI”. Series: Hydraulic Machines and Aggregates]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, vol. 3 (1112), pp. 8–12.

5. Rusanov A. V., Khorev O. N., Linnik A. V., Sukhorebryy P. N. Vliyanie slozhnogo okruzhnogo navala lopastey rabochego kolesa osevoy gidroturbiny na strukturu potoka i yenergeticheskie kharakteristiki protochnoy chasti [The influence of the complex circular offset of the runner blades in Kaplan turbine upon the flow pattern and the hydrodynamic characteristics of the flow part]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, vol. 18 (1127), pp. 130–141.

6. Rusanov A. V., Khorev O. N., Kos'yanov D. Yu, Sukhorebryy P. N., Ryabova S. A. Vliyanie prostranstvennogo profilirovaniya lopastey rabochego kolesa na kharakteristiki potoka v protochnoy chasti osevoy gidroturbiny [Influence of spatial profiling of the runner blades on flow characteristics in the flow part of the Kaplan turbine]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: gidravlichni mashyny ta gidroagregaty* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic Machines and Aggregates]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, vol. 20 (1192), pp. 8–14.

7. Rusanov A. V., Linnik A. V., Sukhorebryy P. N., Khorev O. N., Ryabov A. V. Matematicheskoe modelirovanie techeniya zhidkosti i analiz kharakteristik potoka v podvode gidroturbiny PL20 Kremenchugskoy GYES [Mathematical modeling of fluid flow and analysis of flow characteristics in input of hydroturbine PL20 by Kremenchugskaya HPP]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Energetychni ta teplotekhnichni protsesy y ustatkuvannya* [Bulletin of the National Technical University “KhPI”. Series: Energy and termochemical processes and devices]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2014, vol. 1 (1044), pp. 41–48.

8. Rusanov A. V., Khorev O. N., Linnik A. V., Sukhorebryy P. N., Kos'yanov D. Yu. Chislennoe issledovanie techeniya zhidkosti v protochnoy chasti gidroturbiny PL20 Kremenchugskoj GYES [The numerical investigation of fluid flow in the flow part of the Kaplan turbine PL20 by Kremenchugskaya HPP**]**. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Gidravlichni mashyny ta gidroagregaty* [Bulletin of the National Technical University “KhPI”. Series: Hydraulic Machines and Aggregates]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2015, vol. 45 (1154), pp. 9–15.

9. Rusanov A. V., Kos'yanov D. Yu Chislennoe modelirovanie techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti s ispol'zovaniem neyavnoy kvazimonotonnoy skhemy Godunova povyshennoy tochnosti [Numerical simulation of viscous incompressible fluid flow using an implicit quasi-monotone high accuracy Godunov type scheme]. *Vostochno.-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European Journal of Advanced Technologies]. 2009, no. 5, pp. 4−7.

10. Rusanov A. V., Ershov S. V. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov v protochnykh chastyakh turbomashin. Monografiya.* [Mathematical modeling of unsteady gas-dynamic processes in flow parts of turbomachines. Monograph]. Kharkov, In-t probl. Mashinostroeniya NAN Ukrayiny Publ., 2008. 275 p.

Поступила (received) 21.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Вплив осьового навалу лопатей робочого колеса осьової гідротурбіни на характеристики течії в проточній частині / А. В. Русанов, О. М. Хорєв, Д. Ю. Косьянов, С. О. Рябова, П. М. Сухоребрий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 85 – 93. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Влияние осевого навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины на характеристики течения в проточной части / А. В. Русанов, О. Н. Хорев, Д. Ю. Косьянов, С. А. Рябова, П. Н. Сухоребрый // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 85 – 93. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

The influence of the axial offset of the runner blades of Kaplan turbine on flow characteristics in the flow part / A. V. Rusanov, O. N. Khoryev, D. Yu. Kosianov, S. A. Riabova, P. N. Sukhorebryi // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 85 – 93. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Русанов Андрій Вікторович – член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор, заступник директора ІПМаш НАН України з наукової роботи, м. Харків; тел.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

Русанов Андрей Викторович – член-корреспондент НАН Украины, доктор технических наук, профессор, заместитель директора ИПМаш НАН Украины по научной работе, г. Харьков; тел.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

Rusanov Andrey Viktorovich – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Professor, Deputy Director IPMach NAS of Ukraine for Science, Kharkiv; tel.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

Хорєв Олег Миколайович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, ІПМаш НАН України, м. Харків, старший науковий співробітник, м. Харків; тел.: (057) 349-47-91; e-mail: khorev@ipmach.kharkov.ua.

Хорев Олег Николаевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков, старший научный сотрудник, г. Харьков; тел.: (057) 349-47-91; e-mail: khorev@ipmach.kharkov.ua.

Khoryev Oleg Nikolayevich – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Senior Research Fellow, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv, Senior Researcher, Kharkiv; tel.: (057) 349-47-91; e-mail: khorev@ipmach.kharkov.ua.

Косьянов Дмитро Юрійович – кандидат технічних наук, докторант, ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (057) 349-47-91; e-mail: kosyanov@ipmach.kharkov.ua.

Косьянов Дмитрий Юрьевич – кандидат технических наук, докторант, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков; тел.: (057) 349-47-91; e-mail: kosyanov@ipmach.kharkov.ua.

Kosianov Dmitry Yurievich – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), doctorate, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv; tel.: (057) 349-47-91; e-mail: kosyanov@ipmach.kharkov.ua.

Рябова Світлана Олександрівна – інженер-конструктор гідротурбін ПАТ «Турбоатом», м. Харків; тел.: (057) 349-28-59; e-mail: office@turboatom.com.ua.

Рябова Светлана Александровна – инженер-конструктор гидротурбин ПАО «Турбоатом», г. Харьков; тел.: (057) 349-28-59; e-mail: office@turboatom.com.ua.

Riabova Svetlana Aleksandrovna – Design engineer of hydro turbines of PJSC «Turboatom», Kharkiv; tel.: (057) 349-26-59; e-mail: office@turboatom.com.ua.

Сухоребрий Петро Миколайович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (0572) 94-17-06; e-mail: sukhor@ipmach.kharkov.ua.

Сухоребрый Петр Николаевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков; тел.: (0572) 94-17-06; e-mail: sukhor@ipmach.kharkov.ua.

Sukhorebryi Petr Nikolayevich – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Senior Research Fellow, IPMach NAS of Ukraine, Kharkiv; tel.: (0572) 94-17-06; e-mail: sukhor@ipmach.kharkov.ua.

УДК 519.23: 004.932.72’1

С. В. ХЛАМОВ, В. Е. САВАНЕВИЧ, А. Б. БРЮХОВЕЦКИЙ, С. С. ОРЫШИЧ

МЕТОД НАТУРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ОБНАРУЖЕНИЯ ОКОЛОНУЛЕВОГО ВИДИМОГО ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА СЕРИИ CCD-КАДРОВ

Розроблено метод натурного моделювання дослідження показників якості виявлення близьконульового видимого руху об’єкта на серії CCD-кадрів. У якості натурних даних використовуються вимірювання положення об’єктів, включених у внутрішній каталог (ВК) об’єктів, нерухомих на серії кадрів. Даний метод враховує основні особливості процесу формування CCD-вимірювань положення об'єктів на кадрах і особливості натурного моделювання при використанні різних методів виявлення близьконульового видимого руху досліджуваного об’єкта на серії CCD-кадрів. Так само в роботі наведені результати дослідження показників якості виявлення об'єктів з близьконульовим видимим рухом розробленим методом натурного моделювання.

Ключові слова: серія CCD-кадрів, натурне моделювання, внутрішній каталог об’єктів, нерухомих на серії CCD-кадрів, показники якості виявлення близьконульового видимого руху об’єкта, МНК-оцінка параметрів видимого руху об’єкта, вимірювання положення об’єкта, f – критерій Фішера.

© С. В. Хламов, В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, С. С. Орышич, 2016

Разработан метод натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров. В качестве натурных данных используются измерения положения объектов, включенных во внутренний каталог (ВК) объектов, неподвижных на серии кадров. Данный метод учитывает основные особенности процесса формирования CCD-измерений положения объектов на кадрах и особенности натурного моделирования при использовании различных методов обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров. Так же в работе приведены результаты исследования показателей качества обнаружения объектов с околонулевым видимым движением разработанным методом натурного моделирования.

Ключевые слова: серия CCD-кадров, натурное моделирование, внутренний каталог объектов, неподвижных на серии CCD-кадров, показатели качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта, МНК-оценка параметров видимого движения объекта, измерение положения объекта, f – критерий Фишера.

A method of natural modeling of research of quality indicators of detection of the object's near-zero apparent motion on a series of CCD-frames is developed. Measurements of the positions of the objects included in the internal catalog (IC) of objects fixed on the frame series are used as input data for the method of natural modeling. This method takes into account the main features of the formation of the measurement position of an object and the features of natural modeling when using various methods of detection of near-zero apparent motion of an object on a series of CCD-frames. Natural modeling can be used for detecting the actual distribution of measurement errors of the object position on a series of CCD-frames. The results of the research of quality indicators of detection of objects with near-zero apparent motion by the developed natural modeling method are also provided in this article.

Key words: series of CCD-frames, natural modeling, internal catalog of objects fixed on the frame, quality indication, near-zero apparent motion, OLS parameter estimation, f – test.

Введение. Осознание человечеством астероидно-кометной опасности [1] в настоящее время продолжает расти. Вместе с этим растет и интерес к методам автоматической обработки кадров астероидных обзоров [2, 3]. Небесные объекты Солнечной системы (ССО), как правило, имеют ненулевую скорость видимого движения, а объекты, не принадлежащие Солнечной системе (звезды, галактики), имеют нулевую скорость видимого движения. Большое количество потенциально опасных объектов [4] могут являться астероидами с околонулевым видимым движением. За счёт этого существенно снижаются показатели качества обнаружения таких объектов с помощью традиционных методов обнаружения.

Актуальным является исследование показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта с помощью натурного моделирования. Исследование позволяет определить, какой из существующих вычислительных методов [5, 6, 7] обнаружения обладает наибольшей условной вероятностью правильного обнаружения (при заданной условной вероятности ложного обнаружения) околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров. При этом натурное моделирование позволяет использовать при моделировании процесса обнаружения реальные распределения ошибок измерений положения объектов на кадрах.

Цель работы. Целью статьи является разработка метода натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров.

Данный метод должен учитывать основные особенности процесса формирования CCD-измерений положения объектов на кадрах и условия натурного моделирования при исследовании различных методов обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров [5, 6].

Постановка задачи. Показателями качества обнаружения принято считать условную вероятность ошибок первого α (условная вероятность ложной тревоги, УВЛТ, $F_{false} = \alpha$) и второго β (пропуск объекта с заданными свойствами, в данном случае – объекта с ненулевым (околонулевым) видимым движением) рода [8, 9]. В работе вместо условной вероятности пропуска объекта с ненулевым (околонулевым) видимым движением (ошибки второго β рода) будет использоваться условная вероятность D_{true} правильного обнаружения (УВПО), дополняющая до единицы условную вероятность ошибки второго рода $D_{true} = 1 - \beta$.

Так как обнаружение ненулевого видимого движения исследуемого объекта производится на серии N_{fr} CCD-кадров, то характеристики показателей качества обнаружения исследуются на серии кадров, а не на одном кадре.

Необходимо провести исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров методом натурного моделирования при использовании известных методов обнаружения ненулевого (околонулевого) видимого движения астероида [5, 6].

Исследуются как подстановочные методы максимально правдоподобного обнаружения [5], так и двухкоординатные методы с использованием критерия значимости общей скорости видимого движения на основе f – *критерия Фишера* [6].

Часто на практике не известно аналитическое представление закона распределения входных параметров используемых вычислительных методов. В исследуемом случае не возможно полностью восстановить реальный закон распределения ошибок измерений. В этой связи уместен метод натурного моделирования.

Множество объектов с практически нулевым видимым движением в рамках проекта CoLiTec [10] названо

внутренним каталогом (ВК) объектов, неподвижных на серии кадров. Для исследования в качестве натурных данных были выбраны именно объекты, включённые в ВК объектов, неподвижных на серии кадров [11].

Поскольку объекты ВК имеют неизменное положение, то возможно отклонения оценок положений объектов ВК от их среднего значения считать реализациями ошибок этих оценок и использовать эти реализации в натурном моделировании. При этом к реализациям отклонений оценок положений объектов ВК, полученным из натурных данных, необходимо добавлять детерминированные значения перемещений объектов в соответствии с исследуемыми значениями скоростей их видимого движения.

Таким образом, с помощью натурного моделирования появляется возможность использования реальных законов распределения ошибок измерений положения объектов при исследовании их обнаружения с использованием различных вычислительных методов.

Анализ литературы. Известны методы обнаружения движущихся объектов на серии CCD-кадров [5, 6, 8, 12] с проверкой гипотез о нулевом (H_0) и околонулевом (H_1) видимом движении исследуемого объекта. Данные методы делятся на две группы. Большая часть известных методов основана на использовании критерия *максимального правдоподобия* [8, 13] или какого-либо другого *критерия байесовской группы* [14]. Вторая группа методов обнаружения околонулевого видимого движения объекта [6] в решающих правилах использует *критерии согласия* для проверки значимости скорости как параметра регрессионной модели [15].

Исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров уже проводилось с помощью метода статистического моделирования [16]. Однако наибольший интерес представляет исследование закона распределения натурных данных (измерений положения исследуемого объекта), полученных с телескопов на серии CCD-кадров.

Известны методы для формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров [11]. Среди них метод взаимного отождествления кадров серии и метод рекуррентного отождествления кадров серии [11]. При использовании любого из указанных методов на первом шаге формируются группы близких объектов каждого кадра. Вычислительный метод формирования данных групп изложен в статье [17].

Процедуре формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров, предшествуют процедуры отождествления [18, 19] измерений (звезд кадра) и формуляров каталога (звезд каталога). В результате этого формируются постоянные пластинки [20] и с их использованием координаты объектов в системе координат (СК) любого CCD-кадра могут быть пересчитаны в СК любого другого CCD-кадра серии.

При формировании внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров, все измерения серии кадров пересчитываются в СК одного кадра, который можно назвать *базовым кадром*.

Исследуемые методы обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров методом натурного моделирования. При неизвестной дисперсии измерений положения объекта на кадрах подстановочный вычислительный метод максимально правдоподобного обнаружения ненулевого видимого движения исследуемых объектов [5] имеет вид:

$$\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^2 \cdot R_1^2} \geq \frac{\ln(\lambda_{cr})}{A \cdot N_{mea}}, \tag{1}$$

где

$$R_0^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{\bar{x}})^2 + (y_k - \hat{\bar{y}})^2 \right); \tag{2}$$

$$R_1^2 = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \left((x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2 + (y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2 \right) \tag{3}$$

– остаточные суммы квадратов отклонений [21] положения исследуемого объекта в предположении истинности гипотез о нулевом (H_0) и ненулевом (H_1) видимом движении соответственно на данной серии измерений; x_k, y_k – неизвестные значения истинного положения исследуемого объекта на время τ_k привязки измерений;

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k(\hat{\theta}_x) = \hat{x}_0(\hat{\theta}_x) + \hat{V}_x(\hat{\theta}_x) \cdot (\tau_k - \tau_0); \tag{4}$$

$$\hat{y}_k = \hat{y}_k(\hat{\theta}_y) = \hat{y}_0(\hat{\theta}_y) + \hat{V}_y(\hat{\theta}_y) \cdot (\tau_k - \tau_0) \tag{5}$$

– интерполированные оценки координат положения исследуемого объекта на $k-$м кадре серии [8];

$$\hat{x}_0 = \frac{D \cdot A_x - C \cdot B_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \tag{6}$$

$$\hat{y}_0 = \frac{D \cdot A_y - C \cdot B_y}{N_{mea} \cdot D - C^2} \tag{7}$$

– МНК-оценки положения исследуемого объекта на момент τ_0 привязки базового кадра [8];

$$\hat{V}_x = \frac{N_{mea} \cdot B_x - C \cdot A_x}{N_{mea} \cdot D - C^2}; \tag{8}$$

$$\hat{V}_y = \frac{N_{mea} \cdot B_y - C \cdot A_y}{N_{mea} \cdot D - C^2} \tag{9}$$

– МНК-оценки скоростей видимого движения исследуемого объекта вдоль каждой координаты [8];

$$A_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} x_k \; ; \; A_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} y_k \; ; \; B_x = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} x_k \; ; \; B_y = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} y_k \; ; C = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k} \; ; \; D = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \Delta_{\tau k}^2 \; ;$$

$\Delta_{\tau k} = (\tau_k - \tau_0)$ – разница между временем привязки τ_0 базового кадра и временем τ_k кадра, на котором сформировано $k-$е измерение;

$$\hat{\bar{x}} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \hat{x}_k \Big/ N_{mea} \; , \; \hat{\bar{y}} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} \hat{y}_k \Big/ N_{mea}$$

– средние значения оценок координат неизменного положения объекта с нулевым видимым движением; $A = 2\left(N_{mea} - m\right)$; $m = 2$ – количество оцениваемых параметров видимого движения исследуемого объекта вдоль каждой координаты на серии измерений; λ_{cr} – заданное предельно допустимое (критическое) значение оценки отношения правдоподобия для обнаружения ненулевого видимого движения исследуемого объекта; N_{mea} – количество измерений положения исследуемого объекта на N_{fr} кадрах.

При известной дисперсии σ^2 измерений положения объекта на кадрах подстановочный вычислительный метод максимально правдоподобного обнаружения ненулевого видимого движения исследуемых объектов [5] имеет вид:

$$R_0^2 - R_1^2 \geq 2\sigma^2 \cdot \ln(\lambda_{cr}) . \tag{10}$$

Если в этом используется внешняя оценка дисперсии $\hat{\sigma}_{out}^2$ измерений положения объекта на кадрах, то неравенство (10) имеет вид [5]:

$$\frac{R_0^2 - R_1^2}{\hat{\sigma}_{out}^2} \geq 2\ln(\lambda_{cr}) . \tag{11}$$

Например, внешняя (относительно выборки, используемой для обнаружения видимого движения объекта) оценка дисперсии оценок положения может быть получена на других измерениях каталогизированных объектов исследуемых кадров. Тогда значение искомой оценки является, например, значением оценки дисперсии всех измерений положения объектов астрометрического каталога на CCD-кадре.

Также существуют методы обнаружения околонулевого видимого движения объекта [6], которые основаны на использовании критериев согласия [15]. Например, двухкоординатный вычислительный метод проверки статистической значимости фактора скорости видимого движения объекта на исследуемой серии измерений с использованием $f-$критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ [6] приводит к неравенству:

$$\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2} \geq \frac{w f_{cr}}{N_{mea} - r} , \tag{12}$$

где w – количество исследуемых факторов линейной регрессионной модели (в исследуемом случае этим фактором является скорость видимого движения); r – ранг матрицы частных производных F_x ($rang\, F_x = r \leq \min(m, N_{mea})$) [6]; f_{cr} – предельно допустимое (критическое) табличное значение [6, 21] статистики распределения Фишера с (w, $N_{mea} - r$) степенями свободы.

Также известен эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров [7], который включает в себя использование предельно допустимых значений для оценок параметров движения, а также $f-$критерий Фишера $f(\Omega_{set})$ [6]. Данный метод формально можно представить следующим образом:

$$\left[\hat{V} > \hat{V}_{\min}\right] \& \& \left\{ \left(\left[\hat{\sigma}^2_{resx} < \hat{\sigma}^2_{resx\max} \right] \& \& \left[\hat{\sigma}^2_{resy} < \hat{\sigma}^2_{resy\max} \right] \& \& \left[\hat{\sigma}^2_{resxy} < \hat{\sigma}^2_{resxy\max} \right] \& \& \left[f(\Omega_{set}) > f_{cr} \right] \right) \| \right.$$

$$\left. \| \left(\left[\hat{\sigma}^2_{resxy} < \hat{\sigma}^2_{resxy\max} \cdot k_{\sigma\min} \right] \& \& \left[f(\Omega_{set}) > f_{\min} \right] \right) \| \left(\left[\hat{\sigma}^2_{resxy} < \hat{\sigma}^2_{resxy\max} \cdot k_{\sigma\max} \right] \& \& \left[f(\Omega_{set}) > f_{\max} \right] \right) \right\}, \quad (13)$$

где $\hat{V} = \sqrt{\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2}$ – оценка модуля скорости видимого движения объекта (оценки скоростей $\hat{V}_x$ и $\hat{V}_y$ видимого движения исследуемого объекта вдоль координат x и y определяются согласно выражений (8) и (9) соответственно); $\hat{V}_{\min}$ – предел минимальной допустимой оценки скорости видимого движения околонулевого видимого движения у исследуемого объекта;

$$\hat{\sigma}^2_{resx} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} (x_k - \hat{x}_k(\hat{\theta}_x))^2, \ \hat{\sigma}^2_{resy} = \sum_{k=1}^{N_{mea}} (y_k - \hat{y}_k(\hat{\theta}_y))^2$$

– остаточные дисперсии оценок координат x и y исследуемого объекта; $\hat{\sigma}^2_{resxy} = \hat{\sigma}^2_{resx} + \hat{\sigma}^2_{resy}$ – суммарная остаточная дисперсия оценки положения исследуемого объекта; $\hat{\sigma}^2_{resx\max}$, $\hat{\sigma}^2_{resy\max}$ – заданные предельно допустимые значения остаточных дисперсий оценок координат x и y исследуемого объекта; $\hat{\sigma}^2_{resxy\max}$ – заданное предельно допустимое значение суммарной остаточной дисперсии оценки положения исследуемого объекта; $k_{\sigma\min}$, $k_{\sigma\max}$ – минимальный и максимальный множители, определяющие предельно допустимые значения остаточных дисперсий оценок координат исследуемого объекта в условиях больших и малых значений критерия Фишера (12), соответственно; $f_{\min}$, $f_{\max}$ – минимальное и максимальное допустимые значения f – критерия Фишера значимости общей скорости видимого движения.

Исследуемый эвристический вычислительный метод (13) обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров подробно изложен, а значения его констант приведены в работе [7].

Таким образом, в работе проводится исследование показателей качества некоторых методов обнаружения околонулевого видимого движения астероида:

1. подстановочного вычислительного метода максимально правдоподобного обнаружения околонулевого видимого движения объектов при следующих дополнительных условиях:

- неизвестной дисперсии измерений положения объекта на кадрах с помощью выражения (1);
- известной дисперсии измерений положения объекта на кадрах с помощью выражения (10);
- использовании внешней оценки дисперсии измерений положения объекта на кадрах с помощью выражения (11);

2. двухкоординатного вычислительного метода обнаружения околонулевого видимого движения астероида с применением f – критерия Фишера из выражения (12);

3. эвристического вычислительного метода обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров из выражения (13).

Условия наблюдения объектов с околонулевым видимым движением. Наблюдение ССО осуществляется с помощью телескопа, оснащенного CCD-матрицей [24]. В качестве натурных данных (измерения положений исследуемых объектов) были выбраны серии CCD-кадров, полученные в обсерваториях ISON-NM (код MPC H15) [25] и ISON-Kislovodsk (код MPC D00) [26]. Обсерватория ISON-NM находится на *горе Джой* (*Мейхилл*), *Нью-Мексико*, *США* и использует 40-см телескоп SANTEL-400AN и CCD-матрицу FLI ML09000-65 (3056×3056 пикселей, размер пикселя 12 мкм). Время экспозиции составляло 150 с. Обсерватория ISON-Kislovodsk расположена в 20 км от *города Кисловодска* (*плато Шаджатмаз*), *РФ* и использует 19,2-см. широкопольный телескоп GENON (VT-78) [27] и CCD-матрицу FLI ML09000-65 (4008×2672 пикселей, размер пикселя 9 мкм). Время экспозиции составляло 180 с.

Небесные объекты, не принадлежащие Солнечной системе, имеют нулевую скорость видимого движения (проекции траектории объекта на фокальную плоскость телескопа). Результатом наблюдений является серия цифровых кадров, содержащая изображения небесных объектов, сформированных в фокальной плоскости телескопа. Один из кадров серии называется базовым со временем привязки τ_0.

В работе используется прямоугольная система координат (СК) CCD-кадра с центром в левом верхнем углу CCD-кадра. Считается, что все измерения положения исследуемого объекта предварительно приведены в СК базового CCD-кадра. Моделью видимого движения любого ССО за время формирования исследуемой серии измерений достоверно считать модель прямолинейного и равномерного движения объекта вдоль каждой координаты

независимо:

$$x_n(\theta_x) = x_0 + V_x(\tau_n - \tau_0)\,; \tag{14}$$

$$y_n(\theta_y) = y_0 + V_y(\tau_n - \tau_0)\,, \tag{15}$$

где x_0, y_0 – координаты положения исследуемого объекта на момент привязки базового кадра τ_0; $x_n(\theta_x)$, $y_n(\theta_y)$ – координаты положения исследуемого объекта в момент времени τ_n; V_x, V_y – скорости видимого движения исследуемого объекта по соответствующим координатам; $\theta_x = (x_0, V_x)^T$, $\theta_y = (y_0, V_y)^T$ – параметры видимого движения исследуемого объекта по каждой координате.

В процессе внутрикадровой обработки [28] исследуемых кадров выявлено изображение объекта. Результаты внутрикадровой обработки по одному объекту одного кадра представляются в виде измерения Y_{in} ($i-$е измерение $n_{fr}-$го кадра). В общем случае $i-$е измерение $n_{fr}-$го кадра содержит оценки координат $Y_{Kin} = \{x_{in}; y_{in}\}$ и блеска A_{in} объекта: $Y_{in} = \{Y_{Kin}; A_{in}\}$. Измерения положения исследуемого объекта могут формироваться не на всех N_{fr} кадрах, а лишь на N_{mea}, где $N_{mea} \le N_{fr}$. При этом серия измерений (не более чем по одному с кадра) исследуемого объекта, гипотетически принадлежащих одному объекту, примет следующий вид:

$$\Omega_{set} = (Y_{K1(i,1)}, \ldots, Y_{Kk(i,n)}, \ldots, Y_{KNmea(i,Nfr)}) = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_{Nmea}, y_{Nmea}))\,, \tag{16}$$

где $k(i,n) = k$ – номер измерения в серии измерений исследуемого объекта, которое является $i-$м измерением $n_{fr}-$го кадра серии, гипотетически принадлежащего исследуемому объекту; x_k, y_k – измерение положения объекта, оценка положения объекта, содержащаяся в $k-$м измерении серии.

При наблюдении объектов с околонулевым видимым движением считается, что за время наблюдения исследуемого объекта условия наблюдения практически неизменны. Соответственно, отношение сигнал/шум изображения небесного объекта на кадрах серии практически не меняется, а СКО оценок координат на разных кадрах практически одинаковы. Таким образом, оценки координат небесного объекта на исследуемых кадрах можно считать равноточными. Считается, что отклонения оценок различных координат объекта, содержащиеся в измерениях, независимы между собой как внутри одного измерения, так и между измерениями разных кадров. Отклонения оценки координаты x объекта распределены по нормальному закону [8] с неизвестной дисперсией σ_x^2 и нулевым математическим ожиданием.

Предпосылки, используемые при исследовании показателей качества обнаружения ненулевой (околонулевой) скорости видимого движения объекта методом натурного моделирования. Дополнительно к предпосылкам, которые используются при синтезе решающих правил обнаружения околонулевой скорости видимого движения объекта, при исследовании показателей качества обнаружения методом натурного моделирования используются следующие.

1. Считается, что предварительно в процессе внутрикадровой обработки для всех N_{fr} кадров исследуемой серии (не более одного на каждом кадре) выявлено изображение объекта. Для данного изображения исследуемого объекта со всех N_{fr} кадров сформированы измерения, составляющие серию Ω_{set} (16), с координатами в системе координат (СК) базового кадра.

2. В соответствии с количеством N_{fr} кадров исследуемой серии определено количество N_{mea} измерений положения исследуемого объекта на серии кадров по формуле $N_{mea} = 2N_{fr}$ (положение объекта задаётся двумя координатами x и y).

3. Также считается, что все объекты N_{VK}, принадлежащие ВК объектов, неподвижных на серии кадров, имеют нулевое видимое движение ($V = 0$), что соответствует условиям гипотезы H_0. Таким образом, измерения положения данных объектов могут учитываться при натурном моделировании в условиях гипотезы H_0.

4. Значение модуля приведенной скорости V видимого движения задается в относительных величинах – оценке СКО $\hat{\sigma}$ отклонений измерений положения исследуемого объекта, полученной по ВК объектов, неподвижных на серии CCD-кадров ($V = k\hat{\sigma}$), где k – коэффициент, который задаётся при моделировании. Выражение для модуля приведенной скорости V видимого движения исследуемого объекта имеет следующий вид:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,. \tag{17}$$

5. Также при моделировании задаётся угол γ видимого движения исследуемого объекта. Используя его значение и значение модуля скорости V видимого движения, определяются проекции скорости V_x и V_y видимого движения исследуемого объекта по соответствующим координатам:

$$V_x = V \sin\gamma, \tag{18}$$

$$V_y = V \cos\gamma. \tag{19}$$

Для исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта с использованием всех перечисленных подстановочных методов (1), (10), (11) максимально правдоподобного обнаружения используются соответствующие им предельно допустимые (критические) значения λ_{cr}.

Данные значения определяются в соответствии с наперед заданным уровнем значимости α при моделировании гипотезы H_0 ($V = 0$). Для этого все полученные для N_{VK} объектов ВК значения оценок отношений правдоподобия $\hat{\lambda}(\Omega_{set})$ для каждого синтезированного подстановочного метода максимально правдоподобного обнаружения отдельно заносятся во множество $\Omega_{\hat{\lambda}}$. Элементы данного множества упорядочиваются по возрастанию. Соответствующие предельно допустимые (критические) значения решающей статистики λ_{cr} для каждого метода определяются как элементы упорядоченного множества $\Omega_{\hat{\lambda}}$, находящиеся на позиции с номером $N_{VK} - N_{VK} * \alpha$:

$$\lambda_{cr} = \Omega_{\hat{\lambda}} \left[N_{VK} - N_{VK} * \alpha \right]. \tag{20}$$

В процессе натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения с использованием двухкоординатного метода (12) обнаружения околонулевого видимого движения астероида с применением $f-$критерия Фишера использовалось табличное критическое значение f_{cr} для распределения Фишера с (w, $N_{mea} - r$) степенями свободы [6, 21], где w – количество исследуемых факторов линейной регрессионной модели (в исследуемом случае этим фактором является скорость видимого движения), гипотеза о которых проверяется, а r – ранг матрицы частных производных F_x [5, 6]. В качестве альтернативного варианта критическое значение f_{cr} Фишера также определялось в соответствии с наперед заданным уровнем значимости α при моделировании гипотезы H_0 ($V = 0$).

Используемые описанные выше методы обнаружения околонулевого видимого движения астероида были исследованы на одних и тех же выборках натурных данных.

Константы метода натурного моделирования. При проведении исследований процесса обнаружения околонулевой скорости видимого движения объекта использовались следующие значения констант вычислительного метода. Количество N_{fr} кадров исследуемой серии CCD-кадров равно $N_{fr} = 4$. Количество исследуемых факторов w линейной регрессионной модели (в исследуемом случае этим фактором является скорость видимого движения), гипотеза о которых проверяется, равно $w = 1$ [6]. Ранг r матрицы частных производных F_x [5] равен $r = 4$. Количество оцениваемых параметров движения исследуемого объекта равно $m = 2$ (рассматриваемая модель видимого движения имеет два параметра – начальное положение и скорость). При $\alpha = 10^{-3}$ предельно допустимое (критическое) табличное значение статистики распределения Фишера с $(1, 4)$ степенями свободы составляет $f_{cr} = 74.13$, а при $\alpha = 10^{-4}$ – $f_{cr} = 241.62$ [6, 22]. Также в качестве альтернативного варианта при моделировании гипотезы H_0 ($V = 0$) в соответствии с наперед заданным уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$ было определено критическое значение f_{cr} Фишера.

Метод натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров. В данной работе проводится натурное моделирование, в котором в качестве натурных данных используются измерения положений исследуемых объектов ВК, неподвижных на серии CCD-кадров.

Метод натурного моделирования заключается в следующей последовательности операций.

1. Задаются параметры эксперимента. Для каждого кадра рассматриваемой серии выбираются координаты x_k и y_k положения исследуемого объекта ВК объектов, неподвижных на серии CCD-кадров.

2. Каждый исследуемый объект ВК объектов является реализацией эксперимента в условиях гипотезы H_0 о нулевом видимом движении исследуемого объекта ($V = 0$). Для данного эксперимента выполняется следую-

щая последовательность операций.

2.1. Производится МНК-оценка положения $\hat{x}_0$ и $\hat{y}_0$ исследуемого объекта на базовом кадре и скорости $\hat{V}_x$ и $\hat{V}_y$ его видимого движения (оценка параметров $\hat{\theta}_x$ и $\hat{\theta}_y$ видимого движения исследуемого объекта) вдоль каждой координаты с помощью выражений (6) – (9).

2.2. Определяются интерполированные оценки координат $\hat{x}_k$ и $\hat{y}_k$ исследуемого объекта на моменты привязки всех кадрах исследуемой серии с помощью выражений (4) и (5).

2.3. Определяются значения остаточных сумм R_0^2 и R_1^2 квадратов отклонений положения исследуемого объекта в предположении истинности гипотез о нулевом (H_0) и околонулевом (H_1) видимом движении соответственно на данной серии измерений с помощью выражений (2) и (3).

2.4. Определяются значения оценок отношений правдоподобия для всех исследуемых подстановочных методов максимально правдоподобного обнаружения околонулевого видимого движения объектов. Для этого используются: выражение (1) – при неизвестной дисперсии измерений положения объекта на кадрах; выражение (10) – при известной дисперсии; выражение (11) – при использовании внешней оценки дисперсии измерений положения исследуемого объекта.

2.5. Определяется значение f – критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ значимости общей скорости видимого движения с помощью выражения (12).

3. На основе заданного уровня значимости (*условной вероятности ложной тревоги*, УВЛТ) α обнаружения определяются (20) предельно допустимые (критические) значения ℓ_{cr}, которые соответствуют всем исследуемым (1), (10) и (11) подстановочным методам максимально правдоподобного обнаружения. Также определяется критическое значение f_{cr} Фишера в соответствии с наперед заданными уровнями значимости $\alpha = 10^{-3}$ и $\alpha = 10^{-4}$.

4. Задаётся модуль приведенной скорости V и направление γ видимого движения исследуемого объекта, определяются значения скоростей V_x и V_y видимого движения исследуемого объекта с помощью выражений (18) – (19). Также задаётся оценка СКО $\hat{\sigma}$ отклонений измерений положения исследуемого объекта, полученная по ВК объектов, неподвижных на серии CCD-кадров.

Для каждого исследуемого объекта ВК с учётом заданного значения времени между кадрами, модуля приведенной скорости и направления видимого движения определяются координаты положения $x_k(\theta_x)$ и $y_k(\theta_y)$ исследуемого объекта в момент времени τ_k в соответствии с выражениями (14) и (15).

5. С учётом рассчитанных в блоке 4 координат x_k и y_k положения для каждого исследуемого объекта ВК выполняется последовательность операций, описанная в пунктах **2.1** – **2.5** этого перечня.

6. Полученные в блоке 5 значения оценок отношений правдоподобия для всех синтезированных подстановочных методов максимально правдоподобного обнаружения сравниваются с полученными в блоке 3 предельно допустимыми (критическими) значениями λ_{cr}, которые соответствует им.

7. Полученные в блоке 5 значения f – критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ значимости общей скорости видимого движения сравнивается с предварительно заданным табличным предельно допустимым (критическим) значением статистики распределения Фишера с (w, $N_{mea} - r$) степенями свободы [6, 22]. Также полученные значения f – критерия Фишера $f(\Omega_{set})$ сравниваются с полученным на основе натурных данных в блоке 3 критическим значением f_{cr} Фишера в соответствии с наперед заданными уровнями значимости $\alpha = 10^{-3}$ и $\alpha = 10^{-4}$.

8. Основываясь на результатах экспериментов, определяется условная вероятность правильного обнаружения (УВПО) [21]. Она дополняет до единицы условную вероятность ошибки второго рода β (пропуска объекта с околонулевым видимым движением при условии справедливости гипотезы H_1).

УВПО также является оценкой вероятности по частоте превышения предельно допустимого (критического) значения λ_{cr} полученными в блоке 5 значениями оценок отношений правдоподобия $\hat{\lambda}(\Omega_{set})$ для всех синтезированных подстановочных методов максимально правдоподобного обнаружения:

$$D_{true} = N_{exc} / N_{VK} \ , \tag{21}$$

где N_{exc} – количество превышений критического значения λ_{cr} для подстановочных методов максимально правдоподобного обнаружения или f_{cr} для двухкоординатного вычислительного метода обнаружения с применени-

ем f – критерия Фишера.

УВПО определяется для разных значений модуля приведенной скорости V видимого движения исследуемого объекта и количества N_{fr} кадров. Исследования проводились с использованием ПО CoLiTec [10, 12, 29].

Результаты исследований методом натурного моделирования. На рис. 1, 2 приведены кривые обнаружения при использовании подстановочного метода максимально правдоподобного обнаружения с применением внешней оценки СКО (11) (кривая № 1), двухкоординатного метода обнаружения с применением f – критерия Фишера (12) (кривая № 2) и эвристического вычислительного метода обнаружения (13) (кривая № 3).

Основываясь на данном исследовании, самым чувствительным к изменениям значения модуля скорости видимого движения методом обнаружения является двухкоординатный вычислительный метод обнаружения с применением f – критерия Фишера (12). Так, например, при четырех кадрах в исследуемой серии уже при $V = 0.5\sigma$ (σ – СКО ошибок оценок координат небесных объектов) значение УВПО для данного метода начинает возрастать, когда для других методов обнаружения для этого необходимо значение модуля скорости видимого движения не менее $V = 1.25\sigma$.

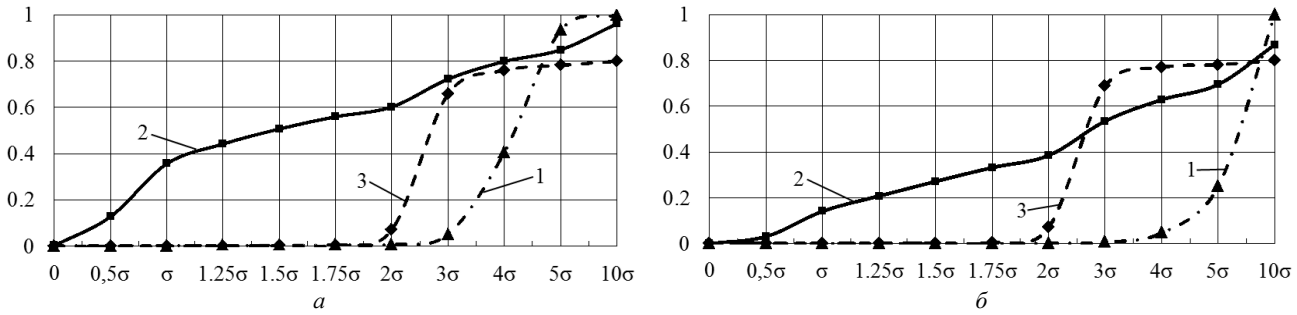


Рис. 1 – Кривые обнаружения телескопа SANTEL-400AN: *а* – УВЛТ $\alpha = 10^{-3}$; *б* – УВЛТ $\alpha = 10^{-4}$.

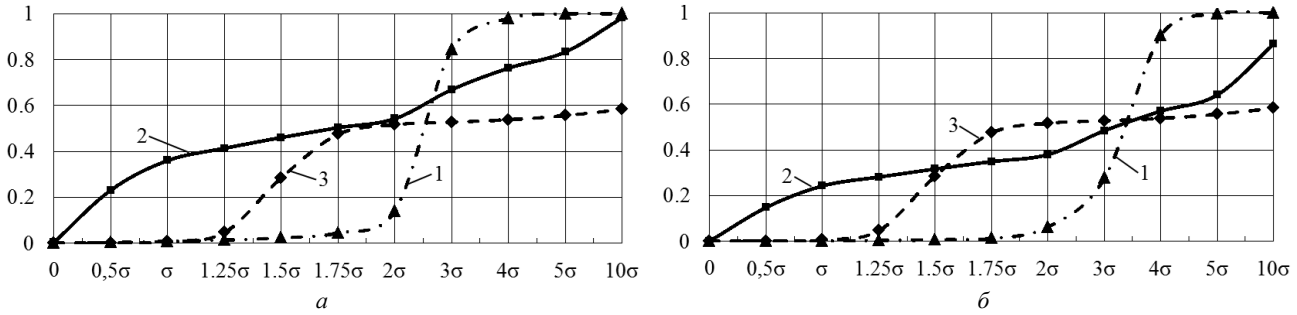


Рис. 2 – Кривые обнаружения телескопа GENON (VT-78): *а* – УВЛТ $\alpha = 10^{-3}$; *б* – УВЛТ $\alpha = 10^{-4}$.

Исследования показали, что эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров (13) является не достаточно эффективным по данным натурного моделирования. Кроме того, с использованием данного метода невозможно стабилизировать УВЛТ на заданном уровне.

Очевидно, что идею одновременного использования статистик остаточных дисперсий измерений положения объекта на CCD-кадрах и f – критерия Фишера следует считать непродуктивной. Кроме того, данная идея не вытекает из каких-либо теоретических построений; тем самым она не является теоретически обоснованной.

Во время исследований для двухкоординатного вычислительного метода обнаружения с применением f – критерия Фишера (12) использовались предварительно заданные табличные предельно допустимые (критические) значения статистики распределения Фишера с (w, $N_{mea} - r$) степенями свободы [6, 22]. Определение по результатам натурного моделирования критических значений f_{cr} Фишера в соответствии с наперед заданными уровнями значимости $\alpha = 10^{-3}$ и $\alpha = 10^{-4}$ приводит практически к тем же критическим значениям решающей статистики.

Кроме того, рис. 3 свидетельствует, что двухкоординатный вычислительный метод обнаружения с применением f – критерия Фишера (12) устойчив к смене оборудования, в данном случае, телескопа. Следовательно, нет необходимости принимать дополнительные меры для выбора критического значения решающей статистики при смене оборудования и условий наблюдения.

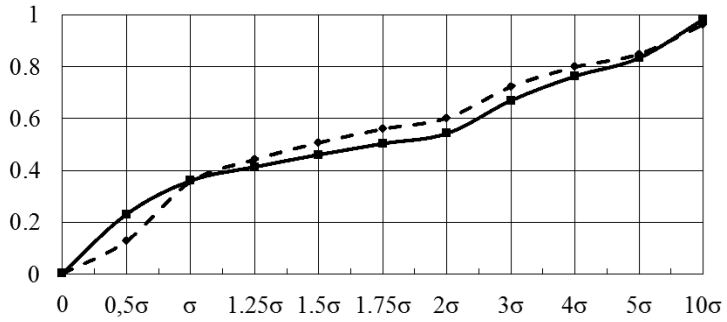


Рис. 3 – Кривые обнаружения при использовании двухкоординатного метода с применением f – критерия Фишера ($\alpha = 10^{-3}$) телескопов GENON (VT-78) (сплошная линия) и SANTEL-400AN (штрих).

С другой стороны, при использовании других описанных выше методов обнаружения возникают трудности при определении критического значения (рис. 4, 5). Прежде всего, не ясно как разделить смесь звёзд и объектов с околонулевым видимым движением для определения критического значения используемой решающей статистики. Так же сам по себе процесс определения предельно допустимого значения является очень трудоёмким, ресурсно-затратным и методически не простым в условиях быстрой смены условий наблюдения, характерных для современных астероидных обзоров.

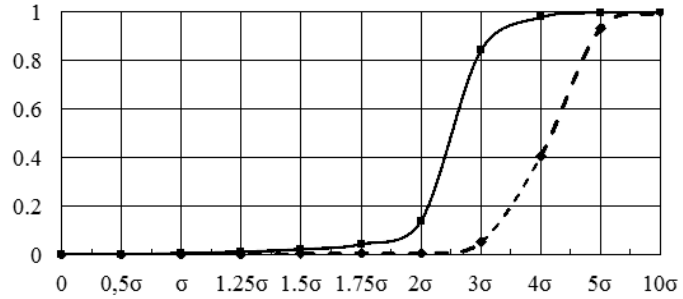


Рис. 4 – Кривые обнаружения при использовании подстановочного метода максимально правдоподобного обнаружения с применением внешней оценки СКО ($\alpha = 10^{-3}$) телескопов GENON (VT-78) (сплошная линия) и SANTEL-400AN (штрих).

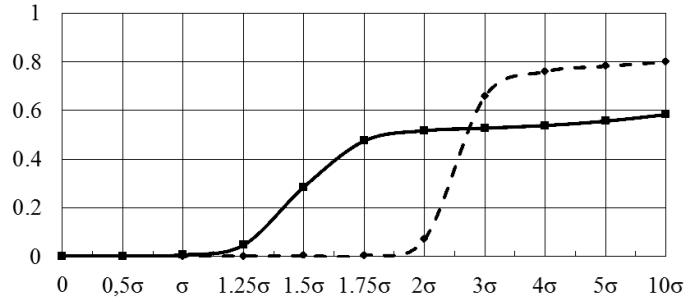


Рис. 5 – Кривые обнаружения при использовании эвристического вычислительного метода ($\alpha = 10^{-3}$) телескопов GENON (VT-78) (сплошная линия) и SANTEL-400AN (штрих).

Выводы. В статье разработан метод натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров. В качестве натурных данных использовались измерения положения представителей внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии CCD-кадров [23]. Проведенное натурное моделирование позволило определить зависимость условной вероятности правильного обнаружения от используемого вычислительного метода обнаружения, его параметров и условий наблюдения исследуемых объектов.

Самым эффективным методом обнаружения околонулевого (когда скорость не превышает 3 СКО ошибок определения координат за кадр) видимого движения при малом количестве кадров (рис. 1 – 3) является двухкоординатный вычислительный метод обнаружения с применением f – критерия Фишера (12). Однако при снижении УВЛТ (рис. 1, *б*, 2, *б*) предпочтительность данного метода обнаружения падает. Но в этом случае предпочтительность всех других описанных выше методов также неочевидна.

В свою очередь, для обнаружения ненулевого видимого движения рекомендуется использовать подстано-

вочный метод максимально правдоподобного обнаружения с применением внешней оценки СКО (11) (рис. 4). У данного метода при больших значениях модуля скорости видимого движения значение УВПО больше по сравнению с другими методами обнаружения (рис. 1 – 2).

Так же установлено, что двухкоординатный вычислительный метод обнаружения с применением f – критерия Фишера (12) устойчив к смене оборудования, в данном случае, телескопа (рис. 3), чего нельзя сказать о других исследованных методах (рис. 4, 5).

Дальнейшие исследования целесообразно сконцентрировать на исследовании показателей качества обнаружения объектов при длинных сериях наблюдений.

Список литературы

1. *Dearborn D. P. S., Miller Paul L.* Defending Against Asteroids and Comets // Springer International Publishing. Handbook of Cosmic Hazards and Planetary Defense. – 2014. – С. 1 – 18.
2. LSST The Large Synoptic Survey Telescope / LSST // LSST. – 01 серпня 2014. – Режим доступу: http://www.lsst.org. – Дата звертання: 13 липня 2016.
3. *Ory M., Daassou A., Colas F.*, et.al. THE MOROCCO OUKAIMEDEN SKY SURVEY, THE MOSS TELESCOPE // Asteroids, Comets, Meteors. – 2012. – С. 76 – 77.
4. *Kortencamp Steve* Asteroids, Comets, and Meteorids // Capstone Press. – Mankato, MN. – 2012. – 65 с.
5. *Хламов С. В., Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Орышич С. С.* Разработка подстановочных вычислительных методов максимально правдоподобного обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров // Технологический аудит и резервы производства. – 2016. – № 4/3 (30). – С. 19 – 26. DOI : 10.15587/2312-8372.2016.75793.
6. *Khlamov S. V., Savanevych V. E., Briukhovetskyi O. B., Oryshych S. S.* Development of computational method for detection of the object's near-zero apparent motion on the series of CCD-frames // EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Volume 2, Issue 9 (80). – pp. 41 – 48.
7. *Хламов С. В., Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б.* Эвристический вычислительный метод обнаружения околонулевого видимого движения объектов на серии CCD-кадров // Вестник ХНУ. Серия : «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2016. – Выпуск 29. – С. 21 – 34.
8. *Кузьмин С. З.* Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С. З. Кузьмин. – К. : Издательство КвіЦ, 2000. – 428 с.
9. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с. – ISBN 5-9221-0707-0.
10. *Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н., Власенко В. П.* Программа CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском // Космічна наука і технологія. – 2012. – Т. 18 (1). – С. 39 – 46.
11. *Саваневич В. Е., Мовсесян Я. С., Дихтяр Н. Ю.* Метод формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 14 (179). – С. 45 – 58.
12. *Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н.* Метод обнаружения астероидов, основанный на накоплении сигналов вдоль траекторий с неизвестными параметрами // Системи обробки інформації. : Зб. наук. праць. Харків. – 2011. – Вип. 2. – С. 137 – 144.
13. *Myung I. J.* Tutorial on maximum likelihood estimation // Journal of Mathematical Psychology. – 2003. – Vol. 47. – С. 90 – 100.
14. *Masson M. E. J.* A tutorial on a practical Bayesian alternative to null-hypothesis significance testing // Behavior Research Methods. – 2011. – Vol. 43. – С. 679 – 690.
15. *Draper N. R., Smith H.* Applied regression analysis // Business & Economics. – 1998. – Vol. 1. – С. 706. – ISBN 0-471-17082-8.
16. *Хламов С. В., Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Орышич С. С.* Метод статистического моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения исследуемого объекта на серии CCD-кадров // Радиоэлектронные и компьютерные системы : науч.-техн. журнал Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт». – Х., 2016. – Вып. 76 (2). – С. 51 – 61.
17. *Дихтяр Н. Ю., Мовсесян Я. С., Саваневич В. Е., Диков Е. Н.* Декомпозиция общей задачи отождествления астрономических кадров со звездными каталогами на совокупность частных задач // Системи обробки інформації. – 2015. – Вип. 9 (134). – С. 24 – 29.
18. *Дихтяр Н. Ю., Мовсесян Я. С., Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б.* Метод отождествления астрономических измерений CCD-кадра с формулярами звездного каталога // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт». – Х., 2015. – Вып. 67. – С. 197 – 215.
19. *Lang D., Hogg D. W., Mierle K. et. al.* Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images // Astronomical Journal. – 2010. – Vol. 139. – I. 1782. – С. 46.
20. *Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Кожухов А. М., Диков Е. Н* Оценка экваториальных координат астероида по оценкам его координат на ПЗС-кадре // Системи обробки інформації : Зб. наук. пр. – Харків: ХУПС, 2010. – Вип. 6(87). – С. 172 – 179.
21. *Ермаков С. М., Жиглявский А. А.* Математическая теория оптимального эксперимента. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
22. *Phillips P. C. B.* The true characteristic function of the F distribution // Biometrika. – № 69. – 1982. – С. 261 – 264.
23. *Guy Mélard.* On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2010 // Journal of Computational Statistics and Data Analysis. – 2014. – Vol. 29. – I. 5. – С. 1095 – 1128.
24. *George E. Smith* The invention and early history of the CCD // Rev. Mod. Phys. – 2010. – V. 3, № 82. – С. 2307 – 2312.
25. *Молотов И. Е., Агапов В. М., Куприянов В. В. и др.* Научная сеть оптических инструментов для астрометрических и фотометрических наблюдений // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. – 2009. – № 219. – Вып. 1. – С. 233 − 248.
26. *Молотов И. Е.* Первый свет новой обсерватории под Кисловодском // Новости проекта ISON, Астрономия и телескопостроение. – Astronomer, 12 січня 2012. – Режим доступу : http://astronomer.ru/publications.php?act=view&id=17. – Дата звертання (13 липня 2016).
27. *Борисов Г.* Телескопы Genon // Genon. – 1 січня 2013. – Режим доступу: http://www.genon.info/ru. – Дата звертання (13 липня 2016).
28. *Savanevych V. E., Briukhovetskyi O. B., Sokovikova N. S., Bezkrovny M. M., Vavilova I. B., Ivashchenko Yu. M., Elenin L. V., Khlamov S. V., Movsesian Ia. S., Dashkova A. M., Pogorelov A. V.* A new method based on the subpixel Gaussian model for accurate estimation of asteroid coordinates // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – № 451 (3). – 2015. – С. 3287 – 3298.
29. *Savanevych V. E., Briukhovetskyi A. B., Ivashchenko Yu. N., Vavilova I. B., Bezkrovniy M. M., Dikov E. N., Vlasenko V. P., Sokovikova N. S., Movsesian Ia. S., Dikhtyar N. Yu., Elenin L. V., Pohorelov A. V., Khlamov S. V.* Comparative analysis of the positional accuracy of CCD measurements of small bodies in the solar system software CoLiTec and Astrometrica // Kinematics and Physics of Celestial Bodies – 2015. – T. 31 (6). – P. 302 – 313.

References (transliterated)

1. Dearborn D. P. S., Miller Paul L. Defending Against Asteroids and Comets. Springer International Publishing. *Handbook of Cosmic Hazards and Planetary Defense*, 2014, pp 1–18.
2. LSST The Large Synoptic Survey Telescope. Available at: http://www.lsst.org. (accessed 13.07.2016).
3. Ory M., Daassou A., Colas F. et.al. THE MOROCCO OUKAIMEDEN SKY SURVEY, THE MOSS TELESCOPE. *Asteroids, Comets, Meteors*, 2012, pp. 76–77.
4. Kortencamp Steve. *Asteroids, Comets, and Meteorids*. Mankato, MN, Capstone Press Publ., 2012. 65 p.
5. Khlamov S. V., Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B., Oryshich S. S. Razrabotka podstanovochnykh vychislitel'nykh metodov maksimal'no pravdopodobnogo obnaruzheniya okolonulevogo vidimogo dvizheniya ob"ektov na serii CCD-kadrov [Developing wildcard computing methods for detecting near-zero apparent motion of objects on a series of CCD-frames in a way closes to natural]. *Tekhnologicheskiy audit i rezervy proizvodstva* [Technological audit and production reserves]. 2016, vol. 4/3 (30), pp 19–26.
6. Khlamov S. V., Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B., Oryshich S. S. Development of computational method for detection of the object's near-zero apparent motion on the series of CCD-frames. *EasternEuropean Journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 2, Issue 9 (80), pp. 41–48.
7. Khlamov S. V., Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B. Yevristicheskiy vychislitel'nyyj metod obnaruzheniya okolonulevogo vidimogo dvizheniya ob"ektov na serii CCD-kadrov [Heuristic computing method for detecting near-zero apparent motion of objects on a series of CCD-frames]. *Vestnik KhNU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tekhnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravleniya* [Bulleting of the KhNU. Series: Mathemetical modeling. Informational technologies. Automatic control systems]. 2016, vol. 29, pp. 21–34.
8. Kuz'min S. Z. *Tsyfrovaya radiolokatsyya. Vvedenye v teoriyu* [Digital radiolocation. Introduction to the theory]. Kiev, Izdatel'stvo KviTs Publ., 2000. 428 p.
9. Kobzar' A. I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2006. 816 p. ISBN 5-9221-0707-0.
10. Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B., Kozhukhov A. M., Dikov E. N., Vlasenko V. P. Programma CoLiTec avtomatizirovannogo obnaruzheniya nebesnykh tel so slabym bleskom [CoLiTech software for automatic detection of faintly shining celestial bodies]. *Kosmichna nauka i tekhnologiya* [Space science and technology]. 2012, vol. 18 (1), pp. 39–46.
11. Savanevich V. E., Movsesyan Ya. S., Dikhtyar N. Yu. Metod formirovaniya vnutrennego kataloga ob"ektov, nepodvizhnykh na serii kadrov [A method of forming an internal catalog of objects fixed on a series of frames]. *Systemy obrobky informatsiyi* [Information processing systems]. 2016, vol. 14 (179), pp. 45–58.
12. Savanevich V. E., Bryukhovetskiy A. B., Kozhukhov A. M., Dykov E. N. Metod obnaruzheniya asteroidov, osnovannyy na nakoplenii sygnalov vdol' traektoriy s neizvestnymi parametrami [Asteroid detection method based on accumulating signals along the trajectory with unknown parameters]. *Systemy obrob. Informatsiyi: zb. nauk. prats'* [Information processing systems: collected works]. Kharkiv, 2011, vol. 2, pp. 137–144.
13. Myung, I. J. Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*. 2003, vol. 47, pp. 90–100.
14. Masson M. E. J. A tutorial on a practical Bayesian alternative to null-hypothesis significance testing. *Behavior Research Methods*. 2011, vol. 43, pp. 679–690.
15. Draper, N. R., Harry Smith. Applied regression analysis. *Business & Economics*, Vol. 1, 1998, 706 p., ISBN 0-471-17082-8.
16. Khlamov S. V., Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B., Oryshich S. S. Metod statisticheskogo modelirovaniya dlya issledovaniya pokazateley kachestva obnaruzheniya okolonulevogo vidimogo dvizheniya issleduemogo ob"ekta na serii CCD-kadrov [A method of statistic modelling the study of quality indicators of detection of near-zero apparent motion of the investigated object on a series of CCD-frames]. *Radioyelektronnye i komp'yuternye sistemy: nauch.-tehn. zhurnal Nac. ayerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «Khar'kovskiy aviatsionnyy institut»* [Radioelectronic and Computer Systems: Scientific and Technical Journal of the A.Ye. Zhukovskiy National Aerospace University “Kharkov Aerospace Institute”]. Kharkov, 2016, vol. 76 (2), pp. 51–61.
17. Dikhtyar N. Yu., Movsesyan Ia. S., Savanevich, V. E., Dikov E. N. Dekompozitsiya obshhey zadachi otozhdestvleniya astronomicheskikh kadrov so zvezdnymi katalogami na sovokupnost' chastnykh zadach [Decomposing the general problem of identifying astronomical frames with star catalogs into a series of partial problems]. *Systemy obrobky informatsiyi* [Information processing systems]. 2015, vol. 9 (134), pp. 24–29.
18. Dikhtyar N. Yu., Movsesyan Ia. S., Savanevich, V. E., Briukhovetskiy O. B. Metod otozhdestvleniya astronomicheskikh izmereniy CCD-kadra s formulyarami zvezdnogo kataloga [A method of identifying CCD-frame astronomic measurements with the star catalog logbooks]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologiyi: sb. nauch. tr. Nac. ayerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «Khar'kovskiy aviat-sionnyy. institut»* [Open information and computer integrated technologies : collection of scientific papers of the A.Ye. Zhukovskiy National Aerospace University "Kharkov Aerospace Institute"]. Kharkov, 2015, vol. 67, pp. 197–215.
19. Lang D., Hogg D. W., Mierle K. et. al. Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images. *Astronomical Journal*. 2010, vol. 139, I. 1782, 46 p.
20. Savanevich V. E., Bryukhovetskiy O. B., Kozhukhov A. M., Dikov E. N. Ocenka yekvatorial'nykh koordinat asteroida po otsenkam ego koordinat na PZS-kadre [Estimation of asteroid equatorial coordinates by its coordinates on a CCD-frame]. *Systemy obrobky informatsiyi: zb. nauk. prats'* [Information processing systems: collection of scientific papers]. Kharkiv, KhUPS Publ., 2010, vol. 6 (87), pp. 172–179.
21. Ermakov S. M., Zhyglyavskyy A. A. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [Mathematical theory of optimal experiment]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 320 p.
22. Phillips P. C. B. The true characteristic function of the F distribution. *Biometrika*, 1982, no. 69, pp. 261–264.
23. Guy Mélard. On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2010. *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*, 2014, vol. 29, I. 5, pp. 1095–1128.
24. George E. Smith. The invention and early history of the CCD. *Rev. Mod. Phys*. 2010, vol. 3, I. 82, pp. 2307–2312.
25. Molotov I. E., Agapov V. M., Kupriyanov V. V. et. al. Nauchnaya set' opticheskikh instrumentov dlya astrometricheskikh i fotometricheskikh nablyudeniy [Optical instrument scientific network for astrometric and photometric observations]. *Izvestiya Glavnoy astronomicheskoy observatorii v Pulkove* [Proceedings of the Main Astronomic Observatory in Pulkovo]. 2009, vol. 219, I. 1, pp. 233−248.
26. Molotov I. E. Pervyy svet novoy observatorii pod Kislovodskom. Astronomiya i teleskopostroenie [The first light of the new observatory near Kislovodsk. Astronomy and telescope building]. Available at: http://astronomer.ru/publications.php?act=view&id=17. (accessed 13.07.2016).
27. Borisov G. Teleskopy Genon [Genon Telescopes]. Available at: http://www.genon.info/ru. (accessed 13.07.2016).
28. Savanevych V. E., Briukhovetskyi O. B., Sokovikova N. S., Bezkrovny M. M., Vavilova I. B., Ivashchenko Yu. M., Elenin L. V., Khlamov S. V., Movsesian Ia. S., Dashkova A. M., Pogorelov A. V. A new method based on the subpixel Gaussian model for accurate estimation of asteroid coordinates. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015, vol. 451 (3), pp. 3287–3298.
29. Savanevych V. E., Briukhovetskyi A. B., Ivashchenko Yu. N., Vavilova I. B., Bezkrovniy M. M., Dikov E. N., Vlasenko V. P., Sokovikova N. S., Movsesian Ia. S., Dikhtyar N. Yu., Elenin L. V., Pohorelov A. V., Khlamov S. V. Comparative analysis of the positional accuracy of CCD measurements of small bodies in the solar system software CoLiTec and Astrometrica. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2015, vol. 31 (6), pp. 302–313.

Поступила (received) 06.10.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Метод натурного моделювання дослідження показників якості виявлення близьконульового видимого руху об'єкта на серії CCD-кадрів / С. В. Хламов, В. Є. Саваневич, А. Б. Брюховецький, С. С. Оришич // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 93 – 105. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

Метод натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров / С. В. Хламов, В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, С. С. Орышич // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 93 – 105. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

The method of natural modeling the research of quality indicators of detection of the close-to-zero apparent motion of an object on a series of CCD-frames / S. V. Khlamov, V. E. Savanevych, O. B. Briukhovetskyi, S. S. Oryshych // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 93 – 105. Bibliog.: 29 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хламов Сергій Васильович – аспірант кафедри електронних обчислювальних машин, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна; тел.: (095) 287-77-19; e-mail: sergii.khlamov@gmail.com.

Хламов Сергей Васильевич – аспирант кафедры электронных вычислительных машин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, Украина; тел.: (095) 287-77-19; e-mail: sergii.khlamov@gmail.com.

Khlamov Sergii Vasilevich – Postgraduate Student at the Dept. of Electronic computer, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkov, Ukraine; tel.: (095) 287-77-19; e-mail: sergii.khlamov@gmail.com.

Саваневич Вадим Євгенович – доктор технічних наук, професор кафедри інформаційних управляючих систем та технологій, Ужгородський національний університет, м. Ужгород, Україна; тел.: (095) 829-65-58; e-mail: vadym@savanevych.com.

Саваневич Вадим Евгеньевич – доктор технических наук, профессор кафедры информационных управляющих систем и технологий, Ужгородский национальный университет, г. Ужгород, Украина; тел.: (095) 829-65-58; e-mail: vadym@savanevych.com.

Savanevych Vadym Evgenievich – Doctor of Technical Sciences, Professor of Dept. of Informative and Operating Systems and Technologies, Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine; tel.: (095) 829-65-58; e-mail: vadym@savanevych.com.

Брюховецький Олександр Борисович – кандидат технічних наук, інженер, Харківське представництво генерального замовника Державного космічного агентства України, м. Харків, Україна; тел.: (099) 008-67-84; e-mail: izumsasha@gmail.com.

Брюховецкий Александр Борисович – кандидат технических наук, инженер, Харьковское представительство генерального заказчика Государственного космического агентства Украины, г. Харьков, Украина; тел.: (099) 008-67-84; e-mail: izumsasha@gmail.com.

Briukhovetskyi Olexsander Borisovich – PhD, Engineer of the Kharkiv General Customer Representative of the State Space Agency of Ukraine; tel.: (099) 008-67-84; e-mail: izumsasha@gmail.com.

Оришич Сергій Сергійович – студент кафедри програмного забезпечення систем, Ужгородський національний університет, м. Ужгород, Україна; тел.: (066) 973-29-93; e-mail: oryshych@gmail.com.

Орышич Сергей Сергеевич – студент кафедры программного обеспечения систем, Ужгородский национальный университет, г. Ужгород, Украина; тел.: (066) 973-29-93; e-mail: oryshych@gmail.com.

Oryshych Serhiy Serhievich – student at the Dept. of Software Systems, Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine; tel.: (066) 973-29-93; e-mail: oryshych@gmail.com.

ЗМІСТ

Ванин В. А., Светличный С. П. Численное исследование взаимодействия тела птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного методов 5

Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной 16

Гураль І. В. Макромоделювання стадії метаногенезу зброджування твердих побутових органічних відходів у біогазових установках 23

Дранковский В. Э., Хавренко М. Ю., Шудрик А. Л. К расчету проточных частей высоконапорных радиально-осевых обратимых гидромашин 31

Зеленцов Д. Г., Денисюк О. Р. Алгоритм решения систем дифференциальных уравнений, моделирующих коррозионный процесс в шарнирно-стержневых конструкциях 36

Ковалёв И. А., Ратушный А. В., Семёнова Н. В. Теоретическое описание работы контрроторной лопастной системы центробежного насоса 43

Короткая Л. И., Науменко Н. Ю. Моделирование поведения корродирующих конструкций при неполной информации о параметрах агрессивной среды 48

Мацуй А. М., Кондратець В. О. Моделювання формування піскового потоку у пісковому жолобі механічного односпірального класифікатора 53

Назаров В. И., Назаров А. И., Назаров И. А., Абрамов Д. В., Тимченко А. И. Математическое моделирование бортового распределения тормозной силы при торможении легковых автомобилей в эксплуатационных условиях с учетом аэродинамического сопротивления движению 59

Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації 67

Плаксій Ю. А. Мультиплікативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла 72

Полянская Т. С. Интегральное уравнение на $[-1, 1]$ с логарифмическим ядром 81

Русанов А. В., Хорев О. Н., Косьянов Д. Ю., Рябова С. А., Сухоребрый П. Н. Влияние осевого навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины на характеристики течения в проточной части 85

Хламов С. В., Саваневич В. Е., Брюховецкий А. Б., Орышич С. С. Метод натурного моделирования исследования показателей качества обнаружения околонулевого видимого движения объекта на серии CCD-кадров 93

CONTENTS

Vanin V. A., Svetlichniy S. P. Numerical study of the interaction of bird carcasses with an obstacle on the basis of the grid and gridless methods 5

Voropay A. V. Distribution of viscous and elastic components in the reaction of an additional viscoelastic support contacting a plate 16

Hural I. V. Macromodelling of methanogenesis stage of municipal solid organic waste fermentation at biogas plants 23

Drankovskij D. E., Khavrenko M. Ju., Shudrik A. L. On calculating flowing parts of high-pressure reversible Francis pump-turbine 31

Zelentsov A. G., Denysiuk O. R. Algorithm for solving systems of differential equations modeling corrosion process in hinged-rod structures 36

Kovalyov I. A., Ratushny A. V., Semenova N. V. Theoretical description of work of the counter-rotor blade system of chempump 43

Korotka L. I., Naymenko N. Ju. Modeling the behavior of corroding structures with incomplete information about the parameters of aggressive environment 48

Matsui A. N., Kondratets V. A. Modeling formation of sand flow in sand chute of mechanical single spiral classifier 53

Nazarov V. I., Nazarov A. I., Nazarov I. A., Abramov D. V., Timchenko A. I. Mathematical modeling of board distribution of braking force during braking of vehicles in operational conditions, taking into account aerodynamic drag 59

Nechuiviter O. P. Computing triple integrals of trigonometric functions using piecewise constant interflatation 67

Plaksiy Ju. A. Multiplicative three-frequency models of rigid body rotation 72

Polyanskaya T. S. Integral equation on $[-1, 1]$ with a logarithmic kernel 81

Rusanov A. V., Khoryev O. N., Kosianov D. Ju., Riabova S. A., Sukhorebryi P. N. The influence of the axial offset of the runner blades of Kaplan turbine on flow characteristics in the flow part 85

Khlamov S. V., Savanevych V. E., Briukhovetskyi O. B., Oryshych S. S. The method of natural modeling the research of quality indicators of detection of the close-to-zero apparent motion of an object on a series of CCD-frames 93

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 16 (1188) 2016

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;
e-mail: kpi_mmtt@mail.ru; kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: vestnik.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид № 30 – 16.

Підп. до друку 27.10.2016 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк. 8,75.
Тираж 300 пр. (1-й завод 1 – 100) Зам. № 1612206. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, віл Фрунзе, 21

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»
Ідент. код юридичної особи: 38093808
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42