



**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО**  
**УНІВЕРСИТЕТУ**  
**«ХПІ»**

**6'2015**

**Харків**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**  
**«ХПІ»**

*Серія: Математичне моделювання  
в техніці та технологіях*

№ 6 (1115) 2015

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2015

**Вісник Національного технічного університету «ХПІ».** Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2015. – № 6 (1115). – 228 с.

**Державне видання**

**Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України**  
**КВ № 5256 від 2 липня 2001 року**

Збірник виходить українською та російською мовами.

*Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).*

**Координаційна рада:**

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);  
К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);  
А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;  
Є. С. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;  
Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;  
А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;  
В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;  
В. В. ЄЛІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;  
П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;  
С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. М. КОШЕЛЬНИК, д-р техн. наук, проф.;  
В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.;  
О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.; В. І. НІКОЛАСЕНКО, канд. іст. наук, проф.;  
П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.; В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.;  
М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.;  
Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.;  
М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

**Редакційна колегія серії:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

**Заст. відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. В. Духопельников, канд. техн. наук, ст. викл.

**Члени редколегії:** Ю. В. ГАНДЕЛЬ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. ГЕВОРКЯН, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. ГРИГОР'ЄВ, д-р техн. наук, проф.; В. К. ДУБОВИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.; О. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф.; О. М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф.; О. Г. НІКОЛАЄВ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. НОВОЖИЛОВА, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Г. РУТКАС, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф.; О. М. ШЕЛКОВИЙ, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. ЯНЮТІН, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 3 від 26 березня 2015 р.

**П.М. АНДРЕНКО**, д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
**О.В. ДМИТРИЄНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**А.Ю. ЛЕБЕДЕВ**, аспірант, НТУ «ХПІ»

## БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЛАБІРИНТНО-ГВИНТОВОГО НАСОСУ

За результатами аналізу літературних джерел обґрунтовано вибір методу оптимізації лабіринтно-гвинтового насоса. Наведено методику та результати багатокритеріальної оптимізації його конструктивних та робочих параметрів. Проведено аналіз впливу форми робочих органів та газовмісту робочої рідини на основні характеристики лабіринтно-гвинтового насоса, які виражені у безрозмірних значеннях. Отримані дані дозволяють на етапі проектування такого насоса визначити його конструктивні параметри, які забезпечать раціональні значення потужності та максимальний ККД.

**Ключові слова:** лабіринтно-гвинтовий насос, робочі органи, гвинтова канавка, багатокритеріальна оптимізація, критерії якості.

**Вступ та постановка проблеми.** Одним із способів підвищення ефективності роботи занурювальних насосних агрегатів при роботі на рідинах з великим вмістом газоповітряної суміші є використання диспергаторів, які здрибнюють газові пухирці до отримання квазігомогенної суміші, або використання насосних ступенів, що добре працюють на газорідинних сумішах. Лабіринтно-гвинтові насоси (ЛГН), які є насосами тертя, завдяки особливостям робочому процесу можуть виконувати роль як диспергаторів так і насосних ступенів, добре працюючих на газорідинних сумішах. Процес проектування таких насосів передбачає розв'язання комплексу задач, пов'язаних з розрахунком їх конструктивних та робочих параметрів. Розширення області використання ЛГН лежить в площині розв'язання актуальної науково-технічної задачі з розвитку наукових положень та методологічного забезпечення, щодо удосконалення методів математичного моделювання і розрахунку його робочих характеристик, в тому числі і методів багатокритеріальної оптимізації параметрів.

**Аналіз публікацій.** Проведений нами аналіз літературних джерел дозволив встановити, що оптимізацію параметрів гідроагрегатів і їх елементів у більшості наукових робіт (наприклад, у статті [1]), виконують розглядаючи їх у складі гідравлічної системи чи гідроприводу та проводячи оптимізацію за одним критерієм. У роботі [2] задача визначення оптимальних площ дроселюючих щілин гідророзподільників розв'язана прямими аналітичними методами, а в роботі [3] визначення оптимальної відстані між кромками плунжера гідророзподільника проводиться графоаналітичним методом. Робота [4] присвячена проектуванню резонаторів з відгалуженням, математичні моделі робочого процесу яких побудовані з використанням *перетворень Фур'є*, які



можуть бути використані при визначенні їх раціональних, конструктивних і робочих параметрів. Слід відмітити, що в роботах [1 – 4] мова йде скоріше не про оптимізацію, а про раціональний вибір окремих параметрів гідроагрегатів та гідравлічних пристроїв, оскільки, в даних роботах не визначені критерії оптимальності, функціональні та критеріальні обмеження.

У роботі [5] проводиться порівняльний аналіз методів оптимізації гідроагрегатів, проте відсутні відомості, щодо вибору методу оптимізації групи спеціальних насосів, до яких належить ЛГН.

*Методом дослідження параметрів простору* проведена багатокритеріальна оптимізація конструктивних та робочих параметрів гідроагрегату верстату для намотування обмоток електродвигунів, яка наведена у роботі [6]. Цей метод використовується для багатокритеріальної оптимізації параметрів клапана з осциляцією [7] та гідравлічного гасителя пульсацій тиску [8]. На цих прикладах підтверджено, що застосування метода дослідження параметрів простору на базі ЛП<sub>τ</sub> послідовності [9] для багатокритеріальної оптимізації гідравлічних агрегатів та гідравлічних пристроїв є достатньо ефективним.

За аналізом літературних джерел встановлено, що на сьогодні відсутні роботи, в яких розглядається оптимізація конструктивних та робочих параметрів ЛГН, не розроблено загальної методики його багатокритеріальної оптимізації, не встановлені критерії оптимальності, параметричні та функціональні обмеження. Отже, розробка такої методики на базі запропонованих нами безрозмірних робочих параметрів ЛГН, які використовуються в якості критеріїв оптимальності, є актуальним науково-технічним завданням.

**Мета статті.** Визначення конструктивних параметрів ЛГН, які, при відомих вихідних параметрах: частоті обертання гвинта, тиску на вході в насос, газовмісту робочої рідини, навантаженні гідравлічної системи, забезпечать раціональні значення потужності на його виході та максимальний коефіцієнт корисної дії (ККД).

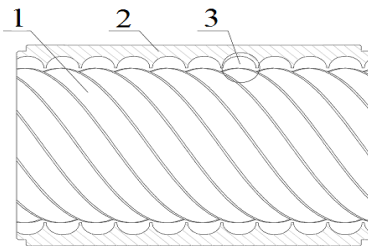


Рис. 1 – Схема робочих органів ЛГН:  
1 – гвинт; 2 – втулка; 3 – гвинтова канавка.

**Постановка задачі для багатокритеріальної оптимізації ЛГН.** Так оптимізація проводилась методом дослідження простору параметрів на базі ЛП<sub>τ</sub> послідовності [9]. Частоту обертання гвинта  $n$  обирали з розмірного ряду та вважали постійною. Основну увагу приділяли вибору конструктивних параметрів ЛГН, робочих параметрів на його вході і виході, які забезпечать раціональне значення його робочих характеристик та ККД.

Розглядали ЛГН, схема робочих органів якого наведена на рис. 1.

Теоретичною основою методики багатокритеріальної оптимізації ЛГН є розроблена нами теорія розрахунку його характеристик, наведена в статтях

[10 – 12]. Оптимізацію виконували за допомогою розробленої програми, яка здійснює складання таблиць досліджень, перевірку виконання функціональних та критеріальних обмежень, вибір оптимальної точки.

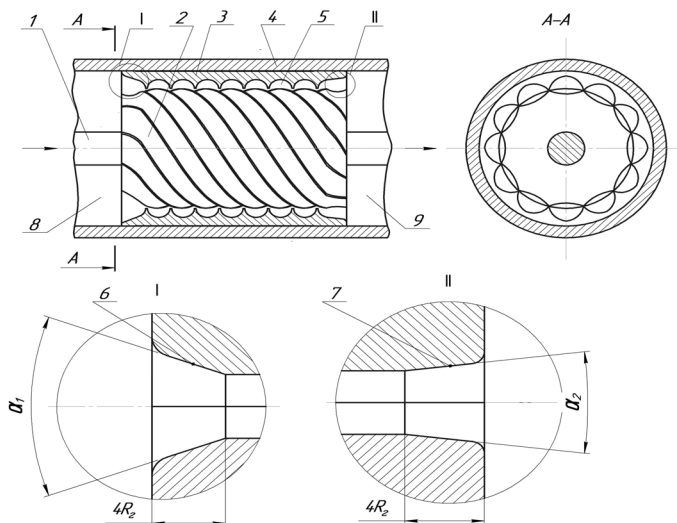


Рис. 2 – Удосконалені робочі органи ЛГН із статті [13]: 1 – привідний вал; 2 – гвинт; 3 – втулка; 4 – корпус; 5 – гвинтова канавка; 6 – гвинтова канавка на вході; 7 – гвинтова канавка на виході; 8 – камера підводу; 9 – камера відводу.

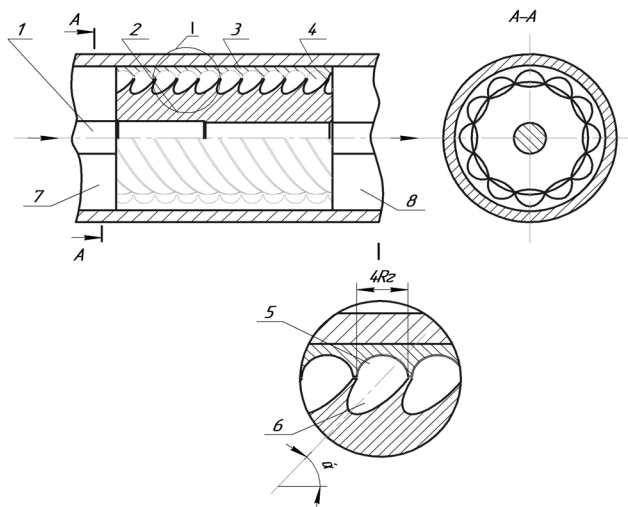


Рис. 3 – Удосконалені робочі органи ЛГН із статті [14]: 1 – привідний вал; 2 – гвинт; 3 – втулка; 4 – корпус; 5 – гвинтова канавка напівкруглої форми; 6 – гвинтова канавка довгастої форми; 7 – камера підводу; 8 – камера відводу.

При проведенні оптимізації вважали, що діаметри трубопроводів на вході і виході з насоса – стандартні та рівні між собою. Коефіцієнт нерівномірності подачі ЛГН  $\delta_{с.н.} = 0$ . Попередньо задавалися типом робочої рідини та її газовмістом. За базову модель брали насос з напівкруглими гвинтовими канавками, робочі органи яких наведені на рис. 1. Розглядали канавки напівкруглої форми, на вході і виході яких виконані фаски [13], рис. 2, а також канавки у формі еліпсу який забезпечує діодність [14], рис. 3.

Обирали варійовані параметри ЛГН:  $x_1 = R_r$  – гідравлічний радіус гвинтової канавки, м;  $x_2 = \delta$  – радіальний зазор, м;  $x_3 = s_{гв.в}$  – крок гвинтової канавки, м;  $x_4 = l_{гв}$  – довжина гвинта, м;  $x_5 = d_{гв}$  – зовнішній діаметр втулки, м;  $x_6 = \alpha$  – кут нарізок по відношенню до осі гвинта;  $x_7 = z$  – кількість нарізок.

Приймали наступні параметричні обмеження:

$$\begin{aligned} 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} \leq x_1 \leq 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} \leq x_2 \leq 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ 0,07 \text{ м} \leq x_3 \leq 0,072 \text{ м}; \quad 0,1 \text{ м} \leq x_4 \leq 0,145 \text{ м}; \quad 0,075 \text{ м} \leq x_5 \leq 0,08 \text{ м}; \\ 50^\circ \leq x_6 \leq 85^\circ; \quad 6 \leq x_7 \leq 12. \end{aligned} \quad (1)$$

Обмеження (1) виділяли у просторі параметрів  $D$  абстрактного  $n$ -вимірного простору паралелепіпед  $\Pi = \{x/(1)\}$ , де  $x$  – точка (вектор), яка відповідає набору параметрів  $(x_1, \dots, x_7)$ . У подальшому розглядали точки  $x$ , параметри яких задовольняють обмеженням (1).

Як функціональні обмеження приймали вирази, що визначають працездатність ЛГН та взаємозв'язки параметрів між собою. А саме:

- *функція обмеження коефіцієнта діодності:*

$$D = \xi_{пр} / \xi_{зв} \geq 1, \quad (2)$$

де  $\xi_{пр}$  – коефіцієнт місцевих витрат при течії рідини у прямому напрямі;  $\xi_{зв}$  – коефіцієнт місцевих витрат при течії рідини в зворотному напрямі.

- *функція обмеження критерію кавітації:*

$$\sigma = \frac{2(p_{вих} - p_{п})}{\rho_c v_{ср}^2} \geq \sigma_{кр}, \quad (3)$$

де  $p_{вих}$  – тиск на виході з ЛГН;  $p_{п}$  – тиск підпору на вході в ЛГН;  $\rho_c$  – густина робочої рідини;  $v_{ср}$  – середня швидкість в гвинтовій канавці ЛГН;  $\sigma_{кр}$  – критичне значення критерію кавітації, приймали  $\sigma_{кр} = 0,427$ ;

- *функція обмеження швидкості робочої рідини у гвинтовій канавці:*

$$v_{ср.вих} = \frac{q_{ср}}{4\pi R_r^2} \leq v_{ср.вих.кр}, \quad (4)$$

де  $q_{ср}$  – середня витрата ЛГН;  $v_{ср.вих.кр}$  – критичне значення швидкості робочої рідини у гвинтовій канавці, приймали  $v_{ср.вих.кр} = 8,838$  м/с;

- *функція обмеження ККД:*

$$\eta \geq 0,2, \quad (5)$$

де  $\eta$  – ККД ЛГН.

Сформулювали три критерії якості ЛГН, значення яких бажано збільшити:

1. питомий напір

$$\tilde{H} = \frac{H}{z l_B / R_T} \rightarrow \max, \quad (6)$$

де  $H$  – напір ЛГН;

2. питома витрата

$$\tilde{q} = \frac{q_{\text{сеп}}}{z l_B / R_T} \rightarrow \max; \quad (7)$$

3. питомий ККД

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta}{z l_B / R_T} \rightarrow \max. \quad (8)$$

Критеріальні обмеження обирали на етапі попереднього дослідження ЛГН, виходячи з фізики процесів, що відбуваються в ньому, та забезпечення максимальних значень усіх критеріїв якості і не пустоти множини допустимих точок в просторі параметрів  $D$ . Приймали, що питомий ККД  $\tilde{\eta} > 0$ . Таким чином, виключали з розгляду область непрацездатності ЛГН.

*Псевдокритерії.* Оскільки значення питомої потужності  $\tilde{P}$  залежить від витрати, напору ЛГН, та є важливим параметром, що забезпечує бажану якість його характеристик, розглядали його не як функціональне обмеження, а як псевдокритерій, який бажано мати найбільшим у вибраному варіанті.

Задавали вихідні дані:  $R_T = 2,25 \cdot 10^{-3}$  м;  $\delta = 0,7 \cdot 10^{-3}$  м;  $s_{\text{гв}} = 0,072$  м;  $l_{\text{гв}} = 0,112$  м;  $v_t = 30$  сСт;  $d_B = 0,075$  м;  $\alpha = 700$ ;  $z = 10$ ;  $n = 2900$  об/хв;  $\rho_c = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

**Етапи та результати оптимізації.** Знаходження оптимальних параметрів ЛГН проводили в три етапи відповідно до алгоритму методу дослідження простору параметрів. Розв'язували задачу знаходження оптимальних параметрів насоса при заданих функціональних та критеріальних обмеженнях. Задача розв'язувалася за допомогою розробленої програми у пакеті прикладних програм Mathcad. В результаті розв'язання оптимізаційної задачі отримали таблицю досліджень. За результатами розрахунків було взято  $N = 1024$  пробних точок. Функціональним обмеженням задовольняли  $N' = 235$  точок, що свідчить про ефективність відбору ( $\gamma = N' / N = 0,23$ ) [9]. Знаходили точки, в яких задовольняються критеріальні обмеження. Згідно з рекомендаціями [9], для отримання оптимальних параметрів ЛГН покращували значення оптимальної точки, отриманої на першому етапі. Деякі точки, які відповідають критеріям якості для ЛГН з різними формами робочих органів, наведені в табл. 1 – 3.

Таблиця 1 – Вибірка із таблиці досліджень параметрів ЛГН, що серійно випускається на ПАТ «ХЕМЗ-ІРЕС» (м. Харків)

| №<br>точ-<br>ки | Параметри лабіринтно-гвинтового насоса |                               |              |              |           |              |       | Критерії якості |             |                |        |
|-----------------|----------------------------------------|-------------------------------|--------------|--------------|-----------|--------------|-------|-----------------|-------------|----------------|--------|
|                 | $R_r \cdot 10^{-3}$<br>м               | $\delta \cdot 10^{-4}$ ,<br>м | $s_{гв}$ , м | $l_{гв}$ , м | $d_v$ , м | $\alpha$ , ° | $z$   | $\tilde{H}$     | $\tilde{q}$ | $\tilde{\eta}$ | $\eta$ |
| 1               | 1,77                                   | 6,18                          | 0,07         | 0,129        | 0,071     | 80,15        | 6,53  | 0,065           | 0,118       | 0,037          | 20,7   |
| 4               | 1,40                                   | 9,63                          | 0,071        | 0,116        | 0,075     | 83,22        | 10,48 | 0,072           | 0,129       | 0,062          | 21,5   |
| 7               | 2,02                                   | 8,94                          | 0,07         | 0,132        | 0,08      | 70,71        | 6,04  | 0,115           | 0,156       | 0,071          | 34,9   |
| 12              | 1,74                                   | 7,41                          | 0,07         | 0,128        | 0,074     | 51,81        | 11,22 | 0,125           | 0,144       | 0,092          | 36,8   |
| 16              | 1,02                                   | 5,64                          | 0,07         | 0,110        | 0,08      | 67,57        | 7,37  | 0,078           | 0,176       | 0,097          | 38,6   |

Таблиця 2 – Вибірка із таблиці досліджень параметрів удосконаленого ЛГН з фасками [13]

| №<br>точ-<br>ки | Параметри лабіринтно-гвинтового насоса |                               |              |              |           |              |       | Критерії якості |             |                |        |
|-----------------|----------------------------------------|-------------------------------|--------------|--------------|-----------|--------------|-------|-----------------|-------------|----------------|--------|
|                 | $R_r \cdot 10^{-3}$<br>м               | $\delta \cdot 10^{-4}$ ,<br>м | $s_{гв}$ , м | $l_{гв}$ , м | $d_v$ , м | $\alpha$ , ° | $z$   | $\tilde{H}$     | $\tilde{q}$ | $\tilde{\eta}$ | $\eta$ |
| 1               | 2,47                                   | 6,51                          | 0,072        | 0,140        | 0,070     | 83,29        | 6,13  | 0,097           | 0,154       | 0,068          | 24,3   |
| 3               | 2,43                                   | 5,68                          | 0,070        | 0,136        | 0,071     | 76,93        | 10,52 | 0,112           | 0,194       | 0,093          | 27,5   |
| 6               | 1,15                                   | 8,05                          | 0,071        | 0,105        | 0,074     | 80,08        | 10,03 | 0,114           | 0,190       | 0,101          | 29,1   |
| 10              | 2,02                                   | 8,94                          | 0,070        | 0,132        | 0,080     | 70,71        | 6,04  | 0,129           | 0,180       | 0,108          | 31,9   |
| 14              | 1,02                                   | 5,64                          | 0,070        | 0,11         | 0,080     | 67,57        | 7,37  | 0,08            | 0,210       | 0,115          | 46,1   |

Таблиця 3 – Вибірка із таблиці досліджень параметрів удосконаленого ЛГН з канавками, що утворюють резисторний діод [14]

| №<br>точ-<br>ки | Параметри лабіринтно-гвинтового насоса |                               |              |              |           |              |       | Критерії якості |             |                |        |
|-----------------|----------------------------------------|-------------------------------|--------------|--------------|-----------|--------------|-------|-----------------|-------------|----------------|--------|
|                 | $R_r \cdot 10^{-3}$<br>м               | $\delta \cdot 10^{-4}$ ,<br>м | $s_{гв}$ , м | $l_{гв}$ , м | $d_v$ , м | $\alpha$ , ° | $z$   | $\tilde{H}$     | $\tilde{q}$ | $\tilde{\eta}$ | $\eta$ |
| 1               | 2,43                                   | 7,31                          | 0,072        | 0,11         | 0,074     | 73,79        | 10,27 | 0,096           | 0,147       | 0,069          | 23,0   |
| 3               | 1,37                                   | 7,57                          | 0,071        | 0,12         | 0,074     | 77,00        | 8,90  | 0,099           | 0,157       | 0,075          | 24,8   |
| 4               | 1,40                                   | 9,63                          | 0,071        | 0,116        | 0,075     | 83,22        | 10,48 | 0,110           | 0,195       | 0,104          | 29,7   |
| 7               | 1,74                                   | 7,41                          | 0,070        | 0,128        | 0,074     | 51,81        | 11,22 | 0,113           | 0,199       | 0,115          | 42,3   |
| 9               | 1,02                                   | 5,64                          | 0,070        | 0,110        | 0,080     | 67,57        | 7,37  | 0,081           | 0,213       | 0,118          | 47,1   |

За аналізом зміни питомої витрати від питомого напору ЛГН, рис. 4, встановлено, що ця характеристика для ЛГН з усіма розглянутими робочими органами має явно виражену тенденцію зменшення напору при зміщенні в бік великих питомих витрат послідовно для насосів зі стандартними робочими органами, робочими органами з фаскою на вході і виході з робочої зони та робочих органів, що утворюють діод. Такий характер співпадає з уточненою нами фізичною моделлю робочого процесу насоса, наведеною у роботі [15].

Як видно з графіку залежності питомого ККД ЛГН від питомого напору, рис. 5, питомий ККД, незалежно від форми робочих органів, зі зменшенням питомого напору збільшується. При малих значеннях питомого напору зміна

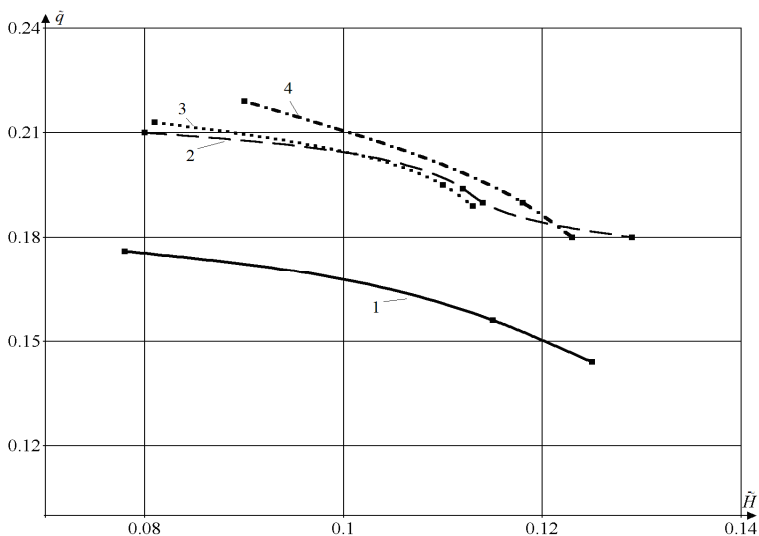


Рис. 4 – Залежність питомої витрати ЛГН від питомого напору: 1 – стандартні робочі органи ЛГН; 2 – ЛГН з фасками на вході і виході з робочої зони; 3 – ЛГН, канавки якого забезпечують діодність; 4 – ЛГН з фасками на вході і виході з робочої зони (експериментальні дані).

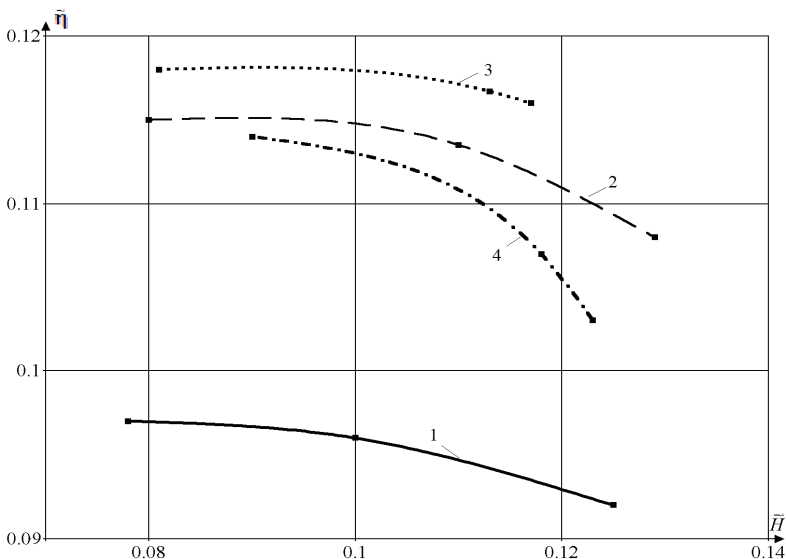


Рис. 5 – Залежність питомого ККД ЛГН від питомого напору: 1 – стандартні робочі органи ЛГН; 2 – ЛГН з фасками на вході і виході з робочої зони; 3 – ЛГН, канавки якого забезпечують діодність; 4 – ЛГН з фасками на вході і виході з робочої зони (експериментальні дані).

питомого ККД для насосів з різними робочими органами практично однако-  
ва, при цьому найбільший питомий ККД має насос, робочі органи якого  
утворюють діод.

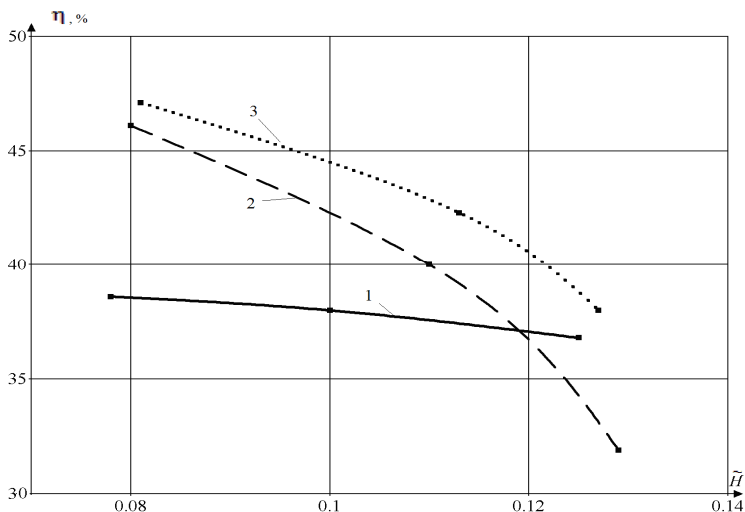


Рис. 6 – Залежність ККД ЛГН від питомого напору: 1 – стандартні робочі органи ЛГН; 2 – ЛГН з фасками на вході і виході з робочої зони; 3 – ЛГН, канавки якого забезпечують діодність.

Зміна реальних значень ККД відносно питомого напору для невеликих його значень має однаковий з питомими ККД характер. Далі, зі збільшенням питомого напору, відбувається покращення характеристик ЛГН зі стандартними робочими органами порівняно з удосконаленими конструкціями насосів. При цьому, найбільше значення ККД (близько 48%) має насос з робочими органами, що утворюють діод.

Порівняння значень робочих характеристик, отриманих для ЛГН з фасками в результаті багатокритеріальної оптимізації, зі значеннями отриманими за експериментальними дослідженнями, показало їх гарний збіг, рис. 4, 5. Слід зазначити, що характер зміни робочих характеристик, побудованих за результатами розв'язання оптимізаційної задачі, та характеристик, отриманих експериментальним шляхом, однаковий, а різниця між ними не перевищує 15%.

Проведений кореляційний аналіз між критеріями оптимальності для призначеного діапазону зміни параметрів дозволив встановити відсутність лінійного зв'язку між парами критеріїв та парами – критерій і параметр (добуток параметрів). Тобто, обрані критерії оптимізації є незалежними, і їх використання для оптимізації ЛГН є цілком правомірним.

**Висновки.** В результаті розв'язання оптимізаційної задачі вперше отримані значення оптимальних параметрів ЛГН, які дозволяють ще на попередньому етапі проектування проводити раціональний вибір конструкції їх ро-

бочих органів та параметрів, завдяки чому зменшується час на проектування, підвищуються показники технічного рівня. Уперше за результатами розв'язання оптимізаційної задачі побудовані графічні залежності зміни питомих параметрів ЛПН, аналіз яких дозволив обґрунтувати області ефективного використання ЛПН з різними робочими органами. Встановлено, що ЛПН з удосконаленими нами робочими органами мають кращі робочі характеристики та ККД у порівнянні зі стандартними.

**Список літератури:** 1. Попов Д.Н. Оценка эффективности и оптимальное проектирование гидрориводов // Вестник машиностроения, 1986. – № 9. – С. 20 – 23. 2. Навроцкий К.Л. Теория и проектирование гидро- и пневмоприводов: Учебник. – М.: Машиностроение, 1991. – 384 с. 3. Хохлов В.А. Электрогидравлический следящий привод. – М.: Наука, 1964. – 231 с. 4. Андренко П.М., Дмитрієнко О.В. Математичні моделі і розрахункові дослідження гідравлічних гасителів і підсилювачів пульсацій тиску // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Харків:– 2004. – № 5 (11). – С. 88 – 93. 5. Методичні вказівки до практичних занять на тему «Складання структурно-функціональних схем та графів причинно-наслідкових зв'язків гідроагрегатів» та «Оптимізація режимів технічного обслуговування і діагностування гідроприводів машин» з курсу «Діагностика і контроль гідропневмоприводів» / П.М. Андренко, О.В. Дмитрієнко, О.Б. Панарьова, М.С. Свиначенко. – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – 36 с. 6. Андренко П.М., Дмитрієнко О.В., Гречка І.П. Багатокритеріальна оптимізація параметрів гідроагрегату верстату для намотування обмоток електродвигунів / Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 4. – С. 53 – 60. 7. Андренко П.М. Багатокритеріальна оптимізація параметрів гідроапаратів з осциляцією / Промислова гідравліка і пневматика. – Вінниця: ВДАУ, 2008. – № 4 (22). С. 93 – 97. 8. Андренко П.М., Дмитрієнко О.В., Свиначенко М.С. Методика розрахунку та проектування гідравлічного гасителя пульсацій тиску у складі гідроагрегата / Вестник НТУ «ХПІ». – 2010. – №54. С. 4 – 9. 9. Соболев І.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями – М.: Наука, 1981. – 107 с. 10. Лебедев А.Ю., Андренко П.М. Визначення нерівномірності подачі лабіринтно-гвинтового насоса // Промислова гідравліка і пневматика. Вінниця: ВДАУ. – 2012. – № 3 (37). – С. 33 – 37. 11. Лебедев А.Ю. Визначення коефіцієнта втрат на тертя для розрахунку характеристики лабіринтно-гвинтового насоса // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь : ТДАУ, 2012. – Вип. 12. – Т. 3. – С. 215 – 219. 12. Лебедев А.Ю. Визначення критеріїв кавітації лабіринтно-гвинтового насоса // Вісник НТУ «ХПІ». Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – №5 (979). – С. 124 – 129. 13. Патент на корисну модель 68863 Україна, МПК F04D 3/00. Лабіринтно-гвинтовий насос / Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А.; заявник і патентовласник Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А. – № у 2011 12505; заявл. 25.10.2011; опубл. 10.04.2012, Бюл. №7. 14. Патент на корисну модель 73119 Україна, МПК F04D 3/00. Лабіринтно-гвинтовий насос / Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А.; заявник і патентовласник Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А. – № у 2012 02788; заявл. 12.03.2012; опубл. 10.09.2012, Бюл. №17. 15. Білокінь І.І. Вплив газовмісту рідини на характеристики лабіринтно-гвинтового насосу / І.І. Білокінь, Ю.М. Стеценко, В.А. Макогон, та ін. // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2011. – № 2/8 (50). – С. – 32 – 35.

**Bibliography (transliterated):** 1. Popov, D. N. "Ocenka jeffektivnosti i optimal'noe proektirovanie gidroprivodov." *Vestnik mashinostroenija*. No. 9. 1986. 20–23. Print. 2. Navrockij, K. L. *Teorija i proektirovanie gidro- i pnevmoprivodov*: Uchebnik. Moscow: Mashinostroenie, 1991. Print. 3. Mhlov, V. A. *Elektrogidravlicheskiy sledjashhij privod*. Moscow: Nauka, 1964. Print. 4. Andrenko, P. M., and O. V. Dmitrienko. "Matematychni modeli i rozrahunkovi doslidzhennja gidravlichnyh gasyteliv i pidsyljuvachiv pul'sacij tysku." *Shidno-Jevropejs'kyj zhurnal peredovyh tehnologij*. No. 5 (11). Kharkiv. 2004. 88–93. Print. 5. Andrenko, P.M., et al. *Metodychni vkazivky do praktychnyh zanjat' na temu "Skladannja strukturno-funkcional'nyh shem ta grafiv prychnynno-naslidkovykh zv'jazkiv gidroagregativ" ta "Optimizacija rezhimiv tehničnogo obsluguovannja i diagnostuvannja gidroprivodiv mashyn" z kursu "Diagnostyka i kontrol' gidropnevmopryvodiv"*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2008. Print. 6. Andrenko,



P. M., O. V. Dmytrijenko and I. P. Grechka. "Bagatokryterial'na optimizacija parametriv gidroagregatu verstatu dlja namotuvannja obmotok elektrodvyguniv." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 4. Kharkiv: NTU «KhPI». 2010. 53–60. Print. 7. Andrenko, P. M. "Bagatokryterial'na optimizacija parametriv gidroaparativ z oscyljacieju." *Promyslova gidravlika i pnevmatyka*. No. 4 (22). Vinnitsa: VDAU, 2008. 93–97. Print. 8. Andrenko, P. M., O.V. Dmytrijenko and M. S. Svyarenko. "Metodyka rozrahunku ta proektuvannja gidravlichnogo gasytelja pul'sacij tysku u skladi gidroagregata." *Vestnik NTU «KhPI»*. No. 54. 2010. 4–9. Print. 9. Sobol', I. M., and R. V. Statnikov. *Vybor optima'lnyh parametrov v zadachah so mnogimi kriterijami*. Moscow: Nauka, 1981. Print. 10. Lebedev, A. Y., and P. M. Andrenko. "Vyznachennja nerivnomirnosti podachi labirintno-gvyntovogo nasosa." *Promyslova gidravlika i pnevmatyka*. No. 3 (37). Vinnitsa: VDAU. 2012. 33–37. Print. 11. Lebedev, A. Y. "Vyznachennja koefficienta vtrat na tertja dlja rozrahunku charakterystyky labirintno-gvyntovogo nasosa." *Praci Tavrijs'kogo derzhavnogo agrotehnologichnogo universytetu*. No. 12. Vol. 3. Melitopol': TDAU, 2012. 215–219. Print. 12. Lebedev, A. Y. "Vyznachennja kryterija kavitaciji' labirintno-gvyntovogo nasosa." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnje modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 5 (979). 2013. 124–129. Print. 13. Andrenko, P.M., et al. Ukrai'na, assignee. Patent na korysnu model 68863 UA, MPK F04D 3/00. Labirintno-gvyntovyy nasos. № u 2011 12505; zayavl. 25.10.2011; opubl. 10.04.2012, Byul. №7. 14. Andrenko, P.M., et al. Ukrai'na, assignee. Patent na korisnu model 73119 UA, MPK F04D 3/00. Labirintno-gvyntovyy nasos. № u 2012 02788; zayavl. 12.03.2012; opubl. 10.09.2012, Byul. №17. 15. Bilokin', I. I., et al. "Vplyv gazovmistu ridyny na charakterystyky labirintno-gvyntovogo nasosa." *Shidno-Jevropeys'kyj zhurnalпередovyh tehnologij*. No. 2/8 (50). 2011. 32–35. Print.

Надійшло (received) 03.12.2014

УДК 661.152.3

**О.Р. БЕЛЯНСКА**, здобувач, ДДТУ, Дніпродзержинськ;  
**М.Д. ВОЛОШИН**, д-р техн. наук, проф., ДДТУ, Дніпродзержинськ;  
**В.В. КАРМАЗІНА**, канд. фіз.-мат. наук, проф., ДДТУ,  
 Дніпродзержинськ

## МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПОПЕРЕДНЬОГО ДИСПЕРГУВАННЯ В ТЕХНОЛОГІЇ ОДЕРЖАННЯ КОМПЛЕКСНОГО ДОБРИВА

Наведено математичний опис процесу попереднього диспергування і відстоювання складового компоненту комплексного добрива – активного мулу. Математичний опис дозволяє спрогнозувати, наскільки зменшиться залишковий об'єм активного мулу, та враховує температуру розчину, початкову вологість мулу, тривалість диспергування та частоту обертання ротору диспергатора. Розраховані параметри роторного диспергатора, що дозволять підібрати диспергатор для застосування у промислових умовах. Достовірність отриманих статистичних залежностей та параметрів оцінена за величиною відносної похибки розрахунків. Встановлено, що в результаті диспергування активного мулу руйнується його гідратна оболонка, колоїдно зв'язана вода вивільнюється, процес відстоювання інтенсифікується. Визначено, що при підтримці критерію Рейнольдса  $4,49 \cdot 10^4$ , частоті коливання рідини  $533 \text{ с}^{-1}$ , тривалості диспергування 4...6 хвилин об'єм активного мулу зменшується з 1000 до  $320 \text{ мл/дм}^3$ . Запропоновано принципову технологічну схему одержання комплексного добрива на основі техногенних відходів, перевагою якої є підвищення корисного об'єму біореактору за рахунок підвищення концентрації відстоюного диспергованого активного мулу.

**Ключові слова:** диспергування, активний мул, техногенні відходи, комплексне добриво.

**Вступ.** Застосування комплексного добрива, нового більш ефективного типу добрив, в структуру якого входять біологічно активні речовини у вигляді ферментів, підвищує засвоєння рослинами з добрива живильних речовин: нітрогену – від 20 до 50 %; фосфору – від 20 до 60 %; калію – від 10 до 40 %. Комплексні добрива є більш ефективною та екологічно досконалою формою мінеральних добрив [1]. Їх застосування дозволяє підвищити біологічну активність ґрунту, врожайність сільськогосподарських культур. Найбільш швидким методом розвитку виробничих ланцюжків і поліпшення продуктивності сільського господарства є розробка та впровадження технології одержання комплексних НРКСа-добрив на основі техногенних відходів, зокрема кальцієвмісного шламу теплоелектростанцій (ТЕС), активного мулу. Застосування місцевих техногенних відходів призведе до підвищення врожайності сільськогосподарських рослин та знизить витрати на придбання коштовної сировини.

**Аналіз останніх досліджень.** Відомі технології утилізації техногенних відходів в наш час використовуються частково. В ряді робіт [2 – 4] автори шляхом підбору різних поєднань НРК-вмісної мінеральної і органічної (бурого вугілля, лігніну, торфу та ін.) сировини, використання хімічних і технологічних прийомів доводять можливість і перспективність отримання на цій основі комплексних добрив. Можливо створювати нові види комплексних добрив шляхом утилізації осадів стічних вод [5, 6]. З метою створення ефективних технологій існують розробки з поєднання мінеральних і органічних компонентів речовин гумусової природи з меленим природним фосфоритом, фосфогіпсом, макро- і мікрокомпонентами [7, 8].

З'являються гранульовані комплексні добрива, такі як добриво «ОР-МІН», що містить органічні і мінеральні компоненти, полівініловий спирт, природний цеоліт та воду, а в якості органічного компоненту добриво містить компост із суміші 80 – 90 мас. % курячого посліду і 10 – 20 мас. % деревинної тирси. Такий склад добрива дозволяє мобілізувати комплекс природних компонентів макро- і мікроелементів [9], але потребують безперервного постачання курячого посліду в великих (до 90 %) об'ємах, що в свою чергу робить виробництво добрив вузького спектру застосування. Проте, активний мул має високу удобрювальну та меліоративну цінність. Встановлено, що ущільнений надлишковий активний мул є цінним комплексним органо-мінеральним добривом з високим вмістом N і P [10]. Активний мул являє собою суспензію, що важко піддається фільтруванню. В активному мулі міститься вільна і зв'язана вода. Вільна вода порівняно легко може бути видалена з нього, а зв'язана вода (колоїдно-пов'язана і гігроскопічна) – набагато важче. Колоїдно-зв'язана волога огортає частинки мулу гідратною оболонкою і перешкоджає їх з'єднанню в крупні сполуки [11]. Зруйнувати гідратну оболонку надлишкового активного мулу можна також за допомогою механічної обробки, зокрема короткочасного диспергування [12].

В традиційному процесі метанування збільшити навантаження на біореактора можливо лише за рахунок підвищення концентрації осаду [13]. Засто-

сування концентрованих осаdів дозволяє не тільки збільшити корисний об'єм метантенків, а й додатково скоротити витрати теплоти на їх підігрів. Для підвищення навантаження на метантенк використовують попереднє концентрування завантажувального осаду, тобто збільшення сухого залишку в сировині. Використання процесів метанового бродіння дозволяє отримувати екологічно чисті знезаражені добрива, в яких корисні речовини знаходяться у формі краще засвоюваної рослинами. Цей метод забезпечує найбільше знезараження та усунення патогенних мікроорганізмів в добривах. У працях [14, 15] йдеться про екологічні аспекти використання процесів метанового бродіння в технології отримання органо-мінеральних добрив. Попередня механічна, хімічна обробка суміші, що піддається метановому бродінню, дозволить отримувати добриво в менший інтервал часу. Мезофільний режим є менш енергоємним, проте не дозволяє застосовувати метантенки меншого об'єму. При використанні мезофільного режиму спостерігається низька швидкість розпаду органічних речовин, тривалість процесу бродіння досягає 50 діб, за рахунок чого збільшується необхідний об'єм споруд [15]. Використання процесів диспергування з подальшим відстоюванням для підвищення кількості сухого залишку в суміші, що підлягатиме метановому бродінню, дозволить прискорити процеси бродіння.

Враховуючи викладене вище, актуальними є задачі: а) математичного опису процесу попереднього диспергування і відстоювання активного мулу – складового компоненту комплексного добрива, що враховує температуру розчину, початкову вологість мулу, тривалість диспергування, частоту обертання ротору диспергатора; б) створення технології одержання комплексного НРКСа-добрива на основі таких техногенних відходів, як активний мул, кальцієвмісний шлам, в якій процес підвищення концентрації мулу буде інтенсифіковано.

**Постановка задачі.** Визначити методом регресійного аналізу і лабораторних досліджень технологічні параметри процесу диспергування активного мулу, що прискорюють його наступне відстоювання. Розробити принципову технологічну схему і параметри технологічного режиму одержання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів, зокрема кальцієвмісного шламу хімводопідготовки теплоелектростанцій і активного мулу.

**Математична модель і метод розрахунку.** Диспергування проводили за допомогою роторного диспергатора із фрезерним диском, що має 32 зазубрини, обертається з частотою  $17\text{с}^{-1}$  на вертикальному валу. Рух рідини в апараті відбувається в тангенціальному напрямі за рахунок тертя рідини об диск, причому диск створює також осьовий потік. Окружна швидкість дорівнює  $3,04\text{ м/с}$ , що при невеликих розмірах диску відповідає високим числам коливань рідини ( $533\text{с}^{-1}$ ). Вимірювання частоти обертання ротору диспергатора виконували безконтактним електронним тахометром DT – 2234C<sup>+</sup>.

Розрахунок похибки обчислень процесу відстоювання диспергованого активного мулу виконували згідно наступної методики [16]. При відстоюван-

ні диспергованого активного було визначено його середній об'єм за формулою:

$$V_{\text{сеп.}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n V_i, \quad (1)$$

та середнє квадратичне відхилення

$$S_V = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n V_i^2 - n \cdot V_{\text{сеп.}}^2 \right) / (n-1)}, \quad (2)$$

де  $V_{\text{сеп.}}$  – середній об'єм активного мулу, мл/дм<sup>3</sup>;  $V$  – об'єм активного мулу, мл/дм<sup>3</sup>;  $n$  – кількість значень об'єму активного мулу утвореного на дні циліндрів;  $S_V$  – середнє квадратичне відхилення.

Відхилення від істинного значення об'єму диспергованого активного мулу при його відстоюванні обчислювали за формулою:

$$\Delta_V = (t \cdot S_V) / \sqrt{n}, \quad (3)$$

де  $t$  – коефіцієнт Ст'юдента. Відносну похибку вимірювань обчислювали за формулою:

$$\Delta_e = (\Delta_V / V_{\text{сеп.}}) \cdot 100\%. \quad (4)$$

Таблиця 1 – Результати зміни об'єму активного мулу і розрахунки похибки обчислень отриманого об'єму активного мулу при початковій вологості мулу 99 %

| Тривалість диспергування, $\tau$ | Об'єм усе-реднений, $V_{\text{сеп}}$ | Середнє квадратичне відхилення, $S_V$ | Кількість значень для усереднення, $n$ | Коефіцієнт Ст'юдента | Відносна похибка, % |
|----------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|----------------------|---------------------|
| 0                                | 693,7                                | 29,2                                  | 15                                     | 2,13                 | 2,3                 |
| 0,5                              | 658                                  | 29,50                                 | 5                                      | 2,57                 | 5,2                 |
| 1                                | 572,2                                | 43,57                                 | 45                                     | 2,02                 | 2,3                 |
| 1,5                              | 501                                  | 15,17                                 | 5                                      | 2,57                 | 3,5                 |
| 2                                | 465                                  | 28,50                                 | 5                                      | 2,57                 | 7,0                 |
| 3                                | 412                                  | 31,14                                 | 5                                      | 2,57                 | 8,7                 |
| 4                                | 365                                  | 15,81                                 | 5                                      | 2,57                 | 5,0                 |
| 5                                | 344                                  | 15,17                                 | 5                                      | 2,57                 | 5,1                 |
| 6                                | 322                                  | 16,05                                 | 5                                      | 2,57                 | 5,7                 |
| 7                                | 312                                  | 5,10                                  | 5                                      | 2,57                 | 1,9                 |
| 8                                | 310                                  | 6,67                                  | 5                                      | 2,57                 | 2,5                 |

Досліджували зміну об'єму активного мулу при різній початковій вологості 99 %, 96 % і 92 % від часу диспергування після 1,5 год. відстоювання. Температура розчинів активного мулу становила 288 К. Результати зміни об'єму активного мулу і розрахунки похибки обчислень отриманого об'єму активного мулу при різній тривалості диспергування на частоті обертання ротору 17 с<sup>-1</sup> ( $Re = 42,4 \cdot 10^3$ ) після 1,5 годинного відстоювання представлено в табл. 1 для початкової вологості мулу 99 %, табл. 2 – при початковій воло-

гості мулу 96 % і табл. 3 – для початкової вологості активного мулу 92 %.

Таблиця 2 – Результати зміни об'єму активного мулу і розрахунки похибки обчислень отриманого об'єму активного мулу при початковій вологості мулу 96 %

| Тривалість диспергування, $\tau$ | Об'єм усереднений, $V_{сер}$ | Середнє квадратичне відхилення, $S_V$ | Кількість значень для усереднення, $n$ | Коефіцієнт Ст'юдента | Відносна похибка, % |
|----------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|----------------------|---------------------|
| 0                                | 741,3                        | 33,57                                 | 15                                     | 2,13                 | 2,5                 |
| 0,5                              | 652,0                        | 10,37                                 | 5                                      | 2,57                 | 1,8                 |
| 1                                | 522,5                        | 54,88                                 | 45                                     | 2,02                 | 3,2                 |
| 1,5                              | 560,0                        | 15,81                                 | 5                                      | 2,57                 | 3,2                 |
| 2                                | 555,0                        | 12,75                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,6                 |
| 3                                | 531,0                        | 14,32                                 | 5                                      | 2,57                 | 3,1                 |
| 4                                | 477,0                        | 12,04                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,9                 |
| 5                                | 450,0                        | 15,81                                 | 5                                      | 2,57                 | 4,0                 |
| 6                                | 468,0                        | 16,43                                 | 5                                      | 2,57                 | 4,0                 |

Таблиця 3 – Результати зміни об'єму активного мулу і розрахунки похибки обчислень отриманого об'єму активного мулу при початковій вологості мулу 92 %

| Тривалість диспергування, $\tau$ | Об'єм усереднений, $V_{сер}$ | Середнє квадратичне відхилення, $S_V$ | Кількість значень для усереднення, $n$ | Коефіцієнт Ст'юдента | Відносна похибка, % |
|----------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|----------------------|---------------------|
| 0                                | 782,3                        | 53,01                                 | 15                                     | 2,13                 | 3,7                 |
| 0,5                              | 760,0                        | 15,81                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,4                 |
| 1                                | 546,2                        | 176,65                                | 45                                     | 2,02                 | 9,7                 |
| 1,5                              | 701,0                        | 15,17                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,5                 |
| 2                                | 638,0                        | 25,88                                 | 5                                      | 2,57                 | 4,7                 |
| 3                                | 603,0                        | 12,04                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,3                 |
| 4                                | 656,0                        | 21,62                                 | 5                                      | 2,57                 | 3,8                 |
| 5                                | 660,0                        | 15,81                                 | 5                                      | 2,57                 | 2,8                 |
| 6                                | 671,0                        | 17,46                                 | 5                                      | 2,57                 | 3,0                 |

Можливості цих функцій дозволяють отримати допоміжну статистику та оцінити ступінь апроксимації:

для початкової вологості активного мулу 92 % отримано математичну модель з  $R^2 = 0,95$  вигляду

$$V = 7,73\omega - 7,87t + 4,77n - 12,78\tau; \quad (5)$$

для початкової вологості активного мулу 96 % – модель з  $R^2 = 0,98$  вигляду

$$V = 7,86\omega - 6,38t + 5,06n - 24,05\tau; \quad (6)$$

для початкової вологості активного мулу 99 % – модель з  $R^2 = 0,99$  вигляду

$$V = 7,5\omega - 5,58t + 7,31n - 149,25\tau; \quad (7)$$

за усіма даними отримано загальне рівняння з  $R^2 = 0,98$  такого вигляду:

$$V = 7,35\omega - 4,09t + 1,55n - 29\tau, \quad (8)$$

де  $\omega$  – вологість активного мулу, %;  $t$  – температура розчину, °C;  $\tau$  – тривалість диспергування, хв.;  $n$  – частота обертання ротора диспергатора, 1/с;  $V$  – об'єм активного мулу, мл/дм<sup>3</sup>.

Видно, що відносна похибка обчислень не перевищує 10 %, що свідчить про достовірність отриманих статистичних залежностей.

Доцільно визначити вплив технологічних параметрів на зміну залишкового об'єму активного мулу, таких як початкова вологість активного мулу, температура, тривалість диспергування і відстоювання, частота обертів ротора диспергатора. Такі багатofакторні моделі отримані для кожної вологості з використанням вбудованих функцій лінійної регресії в пакеті Microsoft Excel.

За наведеним математичним описом технології диспергування активного мулу з подальшим відстоюванням можна визначати залишковий об'єм активного мулу, при заданих технологічних параметрах для кожного типу початкової вологості за формулами (5) – (7) або за загальним рівнянням (8). Високий коефіцієнт апроксимації підтверджує адекватність моделей та дозволяє використовувати ці рівняння для прогнозних розрахунків.

Параметри окружної швидкості роторного диспергатора для частоти обертання ротору диспергатора 7, 12, 17 с<sup>-1</sup> представлені в табл. 4.

**Технологічна схема процесу.** Спираючись на отримані результати досліджень складено загальну технологічну схему отримання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів (рис. 1), яку можливо впровадити на базі класичних очисних споруд, де існує стадія біологічного очищення стічних вод.

Принципова технологічна схема одержання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів включає диспергатор 1, в якому диспергується активний мул, і диспергатор 2, в якому диспергується органо-мінеральна суміш (пташиний послід і фосфоровмісні осади, кальцієвмісні шлами хімводопідготовки ТЕС).

Таблиця 4 – Параметри окружної швидкості роторного диспергатора

| Найменування величин                             | Числове значення для частоти обертання ротора диспергатора, с <sup>-1</sup> |                    |                   |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|
|                                                  | 7                                                                           | 12                 | 17                |
| 1. Число Рейнольдса                              | $17,47 \cdot 10^3$                                                          | $29,93 \cdot 10^3$ | $42,4 \cdot 10^3$ |
| 2. Окружна швидкість диспергатора, м/с           | 1,25                                                                        | 2,14               | 3,04              |
| 3. Число Фруда                                   | 0,28                                                                        | 0,84               | 1,68              |
| 4. Число Ейлера                                  | $8,7 \cdot 10^3$                                                            | $1,7 \cdot 10^3$   | $0,6 \cdot 10^3$  |
| 5. Критерій потужності                           | $9,7 \cdot 10^3$                                                            | $1,9 \cdot 10^3$   | $0,7 \cdot 10^3$  |
| 6. Поправочний коефіцієнт                        | 1,118                                                                       | 1,118              | 1,118             |
| 7. Відношення діаметру апарату до діаметру фрези | 1,05                                                                        |                    |                   |

Критерій Рейнольдса для сировини с початковою вологістю близько 99 % повинен складати приблизно  $42,4 \cdot 10^3$ , тривалість диспергування – 4...6 хвилин; якщо вологість сировини буде близько 96 % – критерій Рейнольдса для процесу диспергування повинен зменшуватися до приблизно  $29,93 \cdot 10^3$ , диспергування триватиме 3...5 хвилин; а якщо вологість сировини, що потрібно диспергувати, буде близькою до 92 %, то критерій Рейнольдса для диспергатора 1,2 повинен становити близько  $17,47 \cdot 10^3$ , тривалість диспергування при таких умовах повинна бути в інтервалі 2...4 хвилини [17].

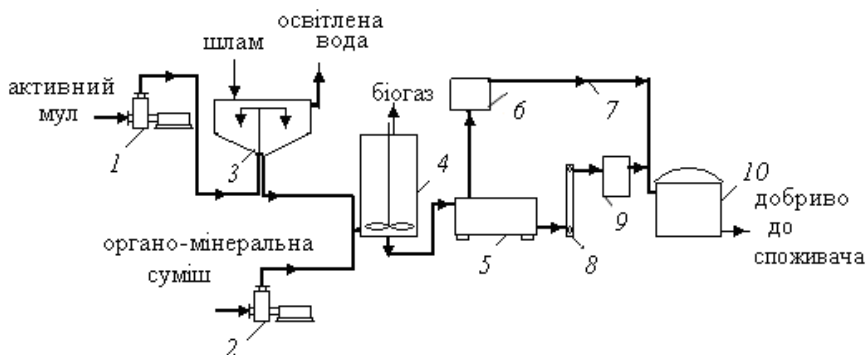


Рис. 1 – Принципова технологічна схема одержання комплексного NPKCa-добрива на основі техногенних відходів: 1, 2 – диспергатор; 3 – відстійник; 4 – біореактор; 5 – центрифуга; 6 – ділянка дозування і фасування рідких добрив; 7 – транспортувальна стрічка рідких добрив; 8 – елеватор; 9 – ділянка дозування і фасування комплексних NPKCa-добрив; 10 – склад готових добрив.

Диспергований активний мул потрапляє у відстійник 3. Для прискорення процесу відстоювання додається кальцієвмісний шлам хімводопідготовки дозою  $40 \text{ мг/дм}^3$ . У відстійнику 3 відбувається розшарування дисперсії активного мулу у воді. Процес відстоювання повинен тривати 2 – 2,5 годин [17].

Органо-мінеральну суміш, поєднання пташиного посліду і фосфоровмісного осаду, диспергують у 2 та одразу подають у біореактор 4. Фосфоровмісний осад утворюється при осадженні фосфатів у стічній воді кальцієвмісним шламом при таких дозах,  $\text{г/дм}^3$ : шлам цеху синтезу аміаку – 18 [18]; шлам цеху хімводопідготовки ТЕС – 12 [18]; фосфогіпс – 1,5 [19].

Утворений осад у відстійнику 3 відкачують в біореактор 4 для сумісного метанового зброджування всіх компонентів комплексного NPKCa-добрива. Рекомендовано використовувати мезофільний режим метанового бродіння, а тривалість процесу повинна становити близько 20 діб. По закінченні процесу бродіння зброжену суміш подають до центрифуги 5, де при обертанні ротора центрифуги в межах  $83 \dots 117 \text{ с}^{-1}$  протягом 260 – 280с відбувається знево-

днення комплексного НРКСа-добрива. Утворений фугат за складом має відповідати якості рідких добрив, тому його запропоновано дозувати і фасувати у пластикові баки на ділянці дозування і фасування рідких добрив 6. Розфасовані рідкі добрива транспортувальною стрічкою рідких добрив 7 транспортуються на склад готових добрив 10.

Зневоднене комплексне НРКСа-добриво елеватором 8 транспортується на ділянку дозування і фасування добрив 9, з якої добрива в поліетиленових мішках вивантажують на склад готових добрив 10.

**Аналіз отриманих результатів.** З таблиць 1 – 3 встановлено, що зі збільшенням часу диспергування активного мулу зменшується час його відстоювання. При збільшенні тривалості диспергування до 6 хвилин можливо зменшувати об'єм активного мулу з 1000 до 320 мл/дм<sup>3</sup>. Отже, інтервал часу для диспергування активного мулу вологістю 99 % становить 4 – 6 хвилин. При початковій вологості активного мулу 96 % і тривалості диспергування 3 – 5 хвилин можливо зменшити об'єм активного мулу після відстоювання з 1000 до 450 мл/дм<sup>3</sup>, а для активного мулу з початковою вологістю 92 % залишковий об'єм мулу після відстоювання зменшується з 1000 до 600 мл/дм<sup>3</sup> при тривалості диспергування 2 – 4 хвилини.

Виконано математичне описання кінетики відстоювання диспергованого активного мулу, за допомогою якого можливо спрогнозувати на скільки зменшиться залишковий об'єм активного мулу в процесі відстоювання при попередньому його диспергуванні і заданій початковій вологості мулу, температурі, тривалості диспергування і відстоювання, частоті обертів ротора диспергатора.

Отримані дані з табл. 4 допоможуть підібрати для розробленої технологічної схеми одержання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів промисловий роторний диспергатор, враховуючи фактичні умови диспергування активного мулу, надати практичні рекомендації щодо його придбання за параметрами гідравлічного перемішування.

Запропоновано технологічну схему одержання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів, в якій враховуються вищевикладені результати досліджень та вперше використовується процес диспергування для інтенсифікації процесів відстоювання активного мулу.

**Перспективи подальших досліджень.** Вважаємо перспективними напрямки досліджень з впливу зміни технологічних параметрів диспергатора та механізму перемішувального інструменту, встановленого на валу, на якість диспергування та швидкість відстоювання мулу. Такі дослідження дадуть змогу зменшити енергозатрати на процес диспергування та знизити вартість готового комплексного добрива на основі техногенних відходів.

**Висновки.** Наведено математичний опис процесу попереднього диспер-



гування і відстоювання активного мулу, що дозволяє спрогнозувати на скільки зменшиться залишковий об'єм активного мулу і враховує температуру розчину, початкову вологість мулу, тривалість диспергування, частоту обертання ротору диспергатора. Величина похибки розрахунків не більше 10 % свідчить про достовірність отриманих статистичних залежностей.

Виконані розрахунки параметрів роторного диспергатора, що дозволять підібрати диспергатор для промислових умов. Визначено, що при підтримці критерію Рейнольдса в межах  $39,9 \cdot 10^3 \dots 44,9 \cdot 10^3$ , частоті коливання рідини  $533 \text{ с}^{-1}$ , тривалості диспергування 4...6 хвилин можливо зменшити об'єм активного мулу з 1000 до  $320 \text{ мл/дм}^3$ . В процесі диспергування активного мулу утворюється високошвидкісний рух тіл і виникає кавітація, при якій руйнується зовнішня оболонка мікроорганізмів, що обумовлює прискорення наступного відстоювання мулу.

Складена принципова технологічна схема одержання комплексного НРКСа-добрива на основі техногенних відходів, що дозволяє використовувати кальцієвмісний шлам хімводопідготовки теплоелектростанцій, активний мул в якості вторинної сировини, а також підвищити корисний об'єм біореактора за рахунок підвищення концентрації відстоюного диспергованого активного мулу.

**Список літератури:** 1. Карпіщенко О.І., Карпіщенко О.О. Еколого-економічні проблеми використання мінеральних добрив // Вісник Сумського державного університету. Сер. Економіка. – 2013. – № 2. – С. 5 – 11. 2. Пат. 30651 Україна, МПК<sup>7</sup> C 05 D 3/00, C 05 F 3/00. Спосіб застосування органо-мінерального добрива із шламу хімводопідготовки ТЕЦ і пташиного посліду / Зюман Б.В., Пасенко А.В.; заявник та патентовласник Кременч. держ. політехн. унів. – № u200710598; заявл. 24.09.2007; опубл. 11.03.2008, Бюл. № 5. 3. Макаренко Н.О., Вакал С.В. Методи експериментальних досліджень ефективності екологічно безпечних мінеральних добрив // Вісник КрНУ ім. Михайла Остроградського. – 2011. – № 6 (71), Ч. 1. – С. 142 – 144. 4. Сучасний стан фосфатно-тукової промисловості України / Вакал С.В., Астрелін І.М., Трофименко М.О., Золотарьов О.Є. – Суми: Собор, 2005. – 80 с. 5. Ракиша Н.В., Тошинский В.И. Органо-минеральные удобрения из осадков сточных вод // Материалы VI Междунар. конф.: Сотрудничество для решения проблемы отходов. – Харьков, 2009. – С. 242. 6. Коваленко А.М. Отходы в аспекте экологических проблем Украины // Восточноевропейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 41. – С. 45 – 48. 7. Шевчук В.Я., Чеботько К.О., Разгуляев В.М. Біотехнологія одержання органо-мінеральних добрив із вторинної сировини. – Київ: УАННП «Фенікс», 2001. – 204 с. 8. Басистый В.П. Фосфорно-карбонатные руды и комплексное удобрение // Химия в сельском хозяйстве. – 1986. – № 2. – С. 35 – 37. 9. Пат. 6577 Україна, МПК<sup>6</sup> C 05 F 11/00. Гранульоване органо-мінеральне добриво «Ормін» / Н.В. Заїменко, С. М. Свєшніков, П.С. Яремов [та ін.], заявл. та патентовл. Держ. племінний птахів. завод «Полесский»; Інст. фіз. хімії ім. Л.В. Писаржевського НАН України; Центр. ботаніч. сад АН України. – № 4847697/SU; заявл. 24.04.90; опубл. 29.12.94, Бюл. № 8 – 1. 10. Чертес К.Л., Стрелков А.К., Биків Д.Е. Новий напрямок використання надлишкового активного мулу // Водопостачання й санітарна техніка. – 2001. – № 5. – С. 34 – 37. 11. Шлегель Г. Общая микробиология: пер. с нем. / Г. Шлегель; под. ред. Е.Н. Кондратьевой. – М.: Мир, 1987. – 567 с. 12. Аввакумов Е.Г. Механические методы активации химических процессов. – [2-е изд.]. – Новосибирск: Наука, 1986. – 306 с. 13. Долина Л.Ф. Очистка сточных вод от биогенных элементов: [монография] Л.Ф. Долина. – Днепропетровск: Континент, – 2011. – 198 с. 14. Скляр О.Г., Скляр Р.В. Основи біогазових технологій та параметри оптимізації процесу зброджування // Пра-

ці Таврійськ. держ. агротехнологічн. універ. – 2009. – Т. 1, Вип. 9. – С. 20 – 30. **15.** Волошин М.Д., Плахотнік О.М., Журавльова А.В. Дослідження осадів стічних вод з метою отримання органо-мінеральних добрив // Вопросы химии и химической технологии – 2004. – №2. – С. 210 – 213. **16.** Дорохов И.Н., Меньшиков В.В. Системный анализ процессов химической технологии. Интеллектуальные системы и инженерное творчество в задачах интенсификации химико-технологических процессов и производств. – М.: Наука, – 2005. – 583с. **17.** Очеретнюк О.Р. (Беляньська), Волошин М.Д., Іванченко А.В. Кінетичні закономірності зневоднення диспергованого активного мулу // Вопросы химии и химической технологии. – 2012. – № 7. – С. 116 – 120. **18.** Очеретнюк О.Р. (Беляньська), Волошин М.Д., Іванченко А.В., Бублик Ю.Н. Отримання лужного концентрату мікроелементів із осадів стічної води та шламів хімводопідготовки // Вопросы химии и химической технологии. – 2011. – № 3. – С. 116 – 120. **19.** Пат. 75630 України, МПК С 02 F 1/58. Спосіб очистки стічних вод від сполук фосфору / Очеретнюк О.Р. (Беляньська), Іванченко А.В., Волошин М.Д., Корогодін І.Ю., заявл. та патентовл. Дніпродзержинський держ. техн.-ун-т. – № u201205931; заявл. 15.05.2012; опубл. 10.12.2012, Бюл. № 23.

**Bibliography (transliterated):** 1. Karpishhenko, O. I., and O. O. Karpishhenko. "Ekologo-ekonomichni problemy vykorystannja mineral'nyh dobryv." *Visnyk Sum's'kogo derzhavnogo universytetu. Ser.: Ekonomika*. No. 2. 2013. 5–11. Print. 2. Zjuman, B. V., and A. V. Pasenko. Sposib zastosuvannja organo-mineral'nogo dobryva iz shlamu himvodopidgotovky TECz i ptashynogo poslidu. KDPU. Ukraïna, assignee. Patent UA 30651, MPK (2007) C 05 D 3/00, C 05 F 3/00. № u200710598. 11 March 2008. **3.** Makarenko, N. O., and S. V. Vakal. "Metody eksperymental'nyh doslidzhen' efektyvnosti ekologichno bezpechnykh mineral'nyh dobryv." *Visnyk KrNU im. Myhajla Ostrograd's'kogo*. No. 6 (71). 2011. 142–144. Print. **4.** Vakal, S. V., et al. *Suchasnyj stan fosfatno-tukovoi' promyslovosti Ukraïny*. Sumy: Sobor, 2005. Print. **5.** Raksha, N. V., and V. Y. Tshynskij. "Organo-mineral'nye udobrenija iz osadkov stochnyh vod." *Materialy VI Mezhdunar. konf.: Sotrudnichestvo dlja reshenija problemy othodov*. Kharkov. 2009. Print. **6.** Kovalenko, A. M. "Othody v aspekte jekologicheskikh problem Ukraïny." *Vostochnoevropejskij zhurnalпередovykh tekhnologij*. No. 41. 2009. 45–48. Print. **7.** Shevchuk, V. Ya., K. O. Chebot'ko and V. M. Razguljaev. *Bioteknologija oderzhannja organo-mineral'nyh dobryv iz vtorynnoi' syrovyny*. Kyiv: UANNP «Feniks», 2001. Print. **8.** Basistyj, V. P. "Fosforno-karbonatnye rudy i kompleksnoe udobrenie." *Himija v sel'skom hozjajstve*. No. 2. 1986. 35–37. Print. **9.** Zaimenko, N. V., et al. Granul'ovane organomineral'ne dobrovyo «Ormin». Ukraïna, assignee. Patent UA 6577, MPK (2006) C 05 F 11/00. № 4847697/SU. 29 December 1994. **10.** Chertes, K. L., A. K. Strelkov and D. E. Bykiv. "Novyj naprjamok vykorystannja nadlyshkovogo aktyvnogo mulu." *Vodopostachannja j sanitarna texnika*. No. 5 (2001). 34–37. Print. **11.** Shlegel', G. *Obshhaja mikrobiologija: per. s nem.* Ed. E. N. Kondrat'eva. Moscow: Mir. 1987. Print. **12.** Avvakumov, E. G. *Mehaničeskie metody aktivacii himičeskih processov*. Novosibirsk: Nauka, 1986. Print. **13.** Dolina, L. F. *Očistka stochnyh vod ot biogennyh elementov: monografija*. Dnepropetrovsk: Kontinent, 2011. Print. **14.** Skljär, O. G., and R. V. Skljär. "Osnovy biogazovyh tekhnologij ta parametry optymizacii' procesu zbrodzhuvannja." *Praci Tavrijs'k. derzh. agrotehnologičn. Univer.* No. 9. 2009. 20–30. Print. **15.** Voloshyn, M. D., O. M. Plahotnik and A. V. Zhurav'lova. "Doslidzhennja osadiv stichnyh vod z metoju otrymannja organo-mineral'nyh dobryv." *Voprosy himii i himičeskoj tekhnologii*. No. 2. 2004. 210–213. Print. **16.** Dorohov, Y. N., and V. V. Men'shykov. *Sistemnyj analiz processov himičeskoj tekhnologii. Intellektual'nye sistemy i inženernoe tvorčestvo v zadachah intensifikacii himiko-tehnologičeskikh processov i proizvodstv*. Moscow: Nauka, 2005. Print. **17.** Ocheretnjuk, O. R., M. D. Voloshin and A. V. Ivanchenko. "Kinetyčni zakonimirosti znevodnennja dyspergovanogo aktyvnogo mulu." *Voprosy himii i himičeskoj tekhnologii*. No. 7. 2012. 116–120. Print. **18.** Ocheretnjuk O. R., et al. "Otrymannja luzhnogo koncentratu mikroelementiv iz osadiv stichnoji vody ta shlamu himvodopidgotovky." *Voprosy himii i himičeskoj tekhnologii*. No. 3. 2011. 116–120. Print. **19.** Ocheretnjuk, O. R., et al. Sposib očystky stichnyh vod vid spoluk fosforu. DDTU. Ukraïna, assignee. Patent UA 75630, MPK C 02 F 1/58. № u201205931. 10 December 2012.

Надійшла (received) 03.02.2015

**В.Т. ГРИШАКИН**, канд. техн. наук, ХНАДУ, Харьков

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ БАЛКУ**

Работа представляет решение задачи по идентификации положения и амплитудного значения импульсной сосредоточенной нагрузки, действующей на шарнирно закрепленную балку. Решение построено как на модели балки Кирхгофа, так и на модели Тимошенко, с учетом диссипации энергии колебаний на основе соотношений Фойгта. Процедура идентификации предполагает минимизацию некоторой целевой функции, позволяющей на первом этапе определить приближенное положение точки приложения нагрузки, а на втором – вычислить ее приближенное амплитудное значение. При проведении численного эксперимента исходные данные были взяты с результатов моделирования методом конечных элементов колебаний балки, обусловленных импульсной нагрузкой. Показано, что использование модели Тимошенко обеспечивает более близкий к истинному значению результат идентификации с приемлемой для инженерной практики точностью.

**Ключевые слова:** идентификация, сосредоточенная нагрузка, диссипация, модель Фойгта, минимизация.

**Введение.** В последние десятилетия в связи с активным развитием теории и практики решения некорректных задач вычислительной математики наблюдается повышенный интерес к разработке эффективных подходов по идентификации действующих на элементы конструкции нестационарных механических нагрузок, в том числе импульсных. И к настоящему времени наиболее полно изучены подходы по восстановлению нагрузок в случае балочных элементов, как достаточно простой и распространенной расчетной механической системы. В ряде посвященных данной проблематике публикаций процедура идентификации построена на модальном анализе колебаний балки [2, 5, 6]. Однако, как показано в некоторых работах, более точные результаты идентификации могут быть получены на основе технологии временной области. Данная технология используется для приближенного восстановления закона изменения во времени сосредоточенной или распределенной известным образом по длине балке нагрузки [3], для определения положения точки приложения сосредоточенной нагрузки в предположении, что закон изменения ее во времени известен [1]. В работе [2] показана возможность реализации данной технологии для полной идентификации импульсной нагрузки (положение точки приложения и амплитудное ее значение) с учетом диссипации энергии колебаний балки. Вместе с тем полученное в данной работе решение построено на модели Кирхгофа и через введение критерия точности по частоте, что несколько сужает область полученных результатов. Настоящая работа обобщает результаты [2] через привлечение *модели Тимошенко* с учетом *соотношений Фойгта*, при этом сама процедура идентификации строится на принципиально ином подходе.

**Постановка задачи.** Рассматривается балка длиной  $l$  (рис. 1), изготовленная из материала с плотностью  $\rho$  и модулем упругости  $E$ . С балкой связана декартова система координат, начало которой совпадает с одним из торцов балки, а ось абсцисс направлена вдоль ее оси. Колебания возбуждаются импульсной сосредоточенной нагрузкой  $q(x, t)$ , точка приложения которой определяется координатой  $x = x_0$ .

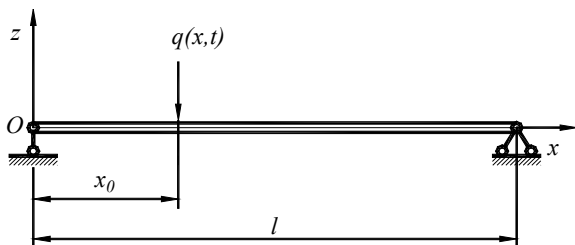


Рис. 1 – Описание модели балки.

В рамках *гипотез Кирхгофа-Лява* уравнение, описывающие нестационарное деформирование исследуемой балки с учетом диссипации энергии колебаний по *модели Фойгта*, имеют вид [3]:

$$\frac{EI}{\rho F} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho F} \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q. \quad (1)$$

Здесь  $w(x, t)$  – прогиб балки;  $q(x, t) = P_0 \delta(t) \delta(x - x_0)$ ;  $t$  – время;  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\delta$  – дельта-функция Дирака;  $F$ ,  $I$  – площадь поперечного сечения балки и осевой момент инерции (при прямоугольном поперечном сечении  $F = bh$  и  $I = bh^3/12$ , где  $h$  – толщина;  $b$  – ширина сечения).

В случае исследования переходных процессов на основании уточненной модели балки *С.П. Тимошенко* с учетом эффекта вязкоупругого затухания по *Фойгту* используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \chi^2 \left( 1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta^2 \left( 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ \alpha^2 \left( 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\psi$  – угол поворота нормали от изгиба к нейтральной линии балки;  $G = E/2(1 + \nu)$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha = \sqrt{k'G/\rho}$ ;  $\beta = \sqrt{k'GF/\rho I}$ ;  $\chi = \sqrt{E/\rho}$ ;  $k' = 6/5$  – коэффициент формы поперечного сечения;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – коэффициенты поперечного и вращательного затуханий (считается, что  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta/E$ ).

Для обеих моделей, граничные условия приняты в виде

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0; \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=0} = \partial^2 w / \partial x^2|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

соответствующие случаю шарнирного закрепления торцов.

Начальные условия – нулевые.

Задача заключается в приближенном восстановлении амплитудного значения внешней нагрузки  $P_0$  и положения точки ее приложения  $x_P$  в предположении, что известны прогибы балки  $w(x, t) = \tilde{w}(t)$  в точке  $x = x_1$ .

**Математическая модель.** Для решения рассматриваемой задачи рассмотрим на первом этапе так называемую прямую задачу о колебаниях исследуемой балки под действием единичной нагрузки, приложенной в некоторой точке  $x_i$ .

Традиционный метод решения прямой задачи строится на поиске функции  $w$  в виде разложения по формам свободных колебаний балки:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(\lambda_k x), \quad (4)$$

где  $a_k(t)$  – неизвестные коэффициенты;  $\lambda_k = k\pi/l$  – волновые числа.

Очевидно, что решение (4) обеспечивает удовлетворение граничных условий (3).

Функция внешней нагрузки  $q(x, t)$ , также раскладывается в ряд Фурье:

$$q(x, t) = \delta(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin(\lambda_k x_i) \sin(\lambda_k x). \quad (5)$$

Для отыскания коэффициентов, соответствующих модели (1), представление (4) подставляется в трансформированное по Лапласу уравнение (1) при нулевых начальных условиях. В результате получим

$$a_k^L(s) = c_k / (s^2 + 2n_k s + p_k^2), \quad (6)$$

где  $s$  – комплексный параметр преобразования;  $p_k^2 = (EI/\rho F)\lambda_k^4$ ;  $2n_k = (\eta I/\rho F)\lambda_k^4$ ;  $c_k = (2/\rho Fl)\sin(\lambda_k x_P)$ . Здесь учтено, что  $L\{\delta(t)\} = 1$ .

С использованием таблиц операционного исчисления в области оригиналов для искоемых коэффициентов  $a_k(t)$  будет справедливым следующее выражение

$$a_k(t) = L^{-1}\{a_k^L(s)\} = c_k e^{-n_k t} F_k(t), \quad (7)$$

$$\text{где } F_k(t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{p_k^2 - n_k^2}\right)}{\sqrt{p_k^2 - n_k^2}} \quad \text{при } p_k > n_k \quad \text{и} \quad F_k(t) = \frac{\text{sh}\left(t\sqrt{n_k^2 - p_k^2}\right)}{\sqrt{n_k^2 - p_k^2}} \quad \text{при}$$

$$p_k < n_k.$$

Заметим, что эти формулы позволяют вычислять прогибы балки без всяких ограничений на исходные данные.

С использованием изложенного в статье [3] подхода, несложно записать решение для трансформант  $a_k(t)$  в случае привлечения уточненной модели (2) для описания вязкоупругих колебаний балки

$$a_k^L(s) = ((s^2 + s\beta_{1,k} + \beta_{0,k})/(s^4 + \alpha_{3,k}s^3 + \alpha_{2,k}s^2 + \alpha_{1,k}s + \alpha_{0,k}))c_k, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_{0,k} &= \beta^2 + \chi^2 \lambda_k^2; \quad \beta_{1,k} = \beta^2 \varepsilon_2 + \chi^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2; \quad \alpha_{0,k} = \alpha^2 \chi^2 \lambda_k^4; \\ \alpha_{1,k} &= \beta_{0,k} \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \alpha^2 \lambda_k^2 \beta_{1,k} - 2\alpha^2 \beta^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2; \\ \alpha_{2,k} &= \beta_{1,k} \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_{0,k} \alpha^2 \lambda_k^2 (1 - \beta^2 \varepsilon_2^2); \quad \alpha_{3,k} = \alpha_{1,k} + \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2.\end{aligned}$$

Переход в область изображений для (8) также может быть выполнен аналитически [3] –

$$a_k(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{(\omega_{j,k}^2 + \beta_{1,k} \omega_{j,k} + \beta_{0,k}) e^{\omega_{j,k} t}}{4\omega_{j,k}^3 + 3\alpha_{3,k} \omega_{j,k}^2 + 2\alpha_{2,k} \omega_{j,k} + \alpha_{1,k}}. \quad (9)$$

Здесь  $\omega_{j,k}$  – корни полинома знаменателя уравнения (8).

Располагая выражениями для  $a_k(t)$  несложно на основании (4) вычислить прогибы балки в произвольной точке по ее длине, в том числе в точке  $x = x_w$ , при приложении единичной нагрузки в точке  $x_i$ . Эти перемещения  $w(x_i, t)$  обозначим далее через  $\hat{w}_i(t)$ . Очевидно, что при приложении импульсной нагрузки  $q(x, t) = q_0 \delta(t) \delta(x - x_i)$  перемещения в точке  $x = x_w$  с использованием принятых обозначений будут равны  $q_0 \hat{w}_i(t)$ .

Таким образом, рассматриваемую в настоящей работе задачу идентификации и сформулированную в ее первом пункте можно трактовать как отыскание таких  $q_0$  и  $x_i$ , при которых отклонение  $q_0 \hat{w}_i(t)$  от  $\tilde{w}(t)$  будет минимальным. Однако, ввиду того, что для современной практики как экспериментальных исследований, так и компьютерного моделирования, вместо непрерывных величин  $\tilde{w}(t)$  и  $\hat{w}(t)$ , как правило, имеют место дискретные, представляющие собой массивы значений соответствующих функций для равноотстоящих точек с шагом  $\Delta t$  исследуемого временного интервала  $(0; T)$ , то  $q_0$  и  $x_i$  должны минимизировать отклонения  $\tilde{\mathbf{w}}$  от  $q_0 \hat{\mathbf{w}}^{(i)}$ . Здесь  $\tilde{\mathbf{w}}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}^{(i)}$  – столбцовые матрицы с элементами  $\tilde{\mathbf{w}}_m = \tilde{w}(m\Delta t)$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} = \hat{w}_i(m\Delta t)$  ( $m = \overline{1, M}$ ;  $M = E(T/\Delta t)$ ,  $E(x)$  – целая часть аргумента).

Процедура вычисления  $q_0$  и  $x_i$  может быть построена на методе наименьших квадратов, когда эти величины принимаются такими, чтобы минимизировать квадратичную функцию  $J(q_0, x_i)$ :

$$J = \sum_{m=1}^M (\tilde{\mathbf{w}}_m - q_0 \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)})^2 = \|\tilde{\mathbf{w}} - q_0 \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)}\|_2^2.$$

Здесь  $\|\mathbf{X}\|_2$  – евклидова норма матрицы-столбца  $\mathbf{X}$ .

Для отыскания искомого значения  $q_0$  на первом этапе рассматривается задача  $\min_{q_0} J$ , которая эквивалентна решению уравнения  $dJ/dq_0 = 0$ . В результате несложных математических преобразований получим

$$q_0 = q_0(x_i) = \left( \sum_m \tilde{\mathbf{w}}_m \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \right) / \left( \sum_m \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \right) = (\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{w}}^{(i)}) / (\hat{\mathbf{w}}^{(i)T} \hat{\mathbf{w}}^{(i)}). \quad (10)$$

Использование аналитических подходов для последующего восстановления значения  $x_i$ , минимизирующего функцию  $J(q_0, x_i)$  при  $q_0(x_i)$ , определяемого равенством (10), достаточно затруднено. Поэтому поиск  $x_i$  осуществляется графически через построение графика  $J$  как функции  $x_i$ . Полученное значение  $x_i$ , соответствующее минимальному  $J$ , и будет представлять собой искомое  $x_p$ , а  $P_0$ , определяющее внешнюю нагрузку  $q(x, t) = P_0 \delta(t) \delta(x - x_p)$ , равно  $P_0 = q_0(x_p)$ .

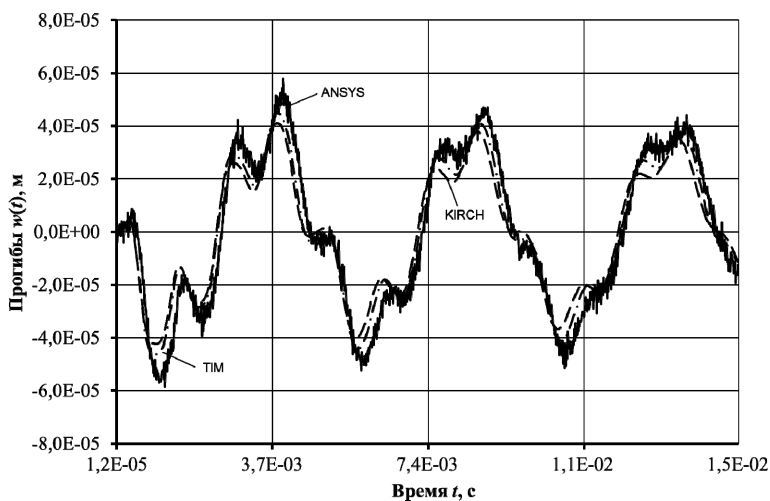


Рис. 2 – Прогиб балки  $w(x_w, t)$ .

**Результат работы программы.** Конкретные расчеты проводились для балки со следующими геометрическими параметрами и физическими характеристиками материала:  $l = 0,47$  м;  $b = 0,06$  м;  $h = 0,02$  м;  $\rho = 7890$  кг/м<sup>3</sup>;  $E = 2,07 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu = 0,3$ ;  $\eta = 10^6$  кг/м·с. Предполагалось, что идентификация импульсной нагрузки осуществляется по значениям прогибов балки  $\tilde{w}(t)$  в точке  $x_w = 3l/4$ . При этом функция  $\tilde{w}(t)$  была получена методом конечно-элементного моделирования колебаний балки, обусловленных приложением нагрузки  $\bar{P}(t) = P_0 \sin(\pi t / t_{im}) H(t_{im} - t)$  в точке  $x_p = l/4$ , где  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда;  $P_0 = 1.875$  кН,  $t_{im} = 207.5$  мкс. На результат моделирования были наложены случайные числа с нулевым математическим ожиданием и амплитудой в 5% от максимального значения  $\tilde{w}(t)$  на исследуемом временном интервале ( $t \in [0; 3t_0]$ ;  $3t_0 = 14.7325$  мс) для имитации ошибок измерения, передачи и обработки данных. Полученный результат моделирования как функция  $\tilde{w}(t)$  изображен кривой 1 на рис. 2. Шаг по времени  $\Delta t$  принят равным  $t_{im}/6$ .

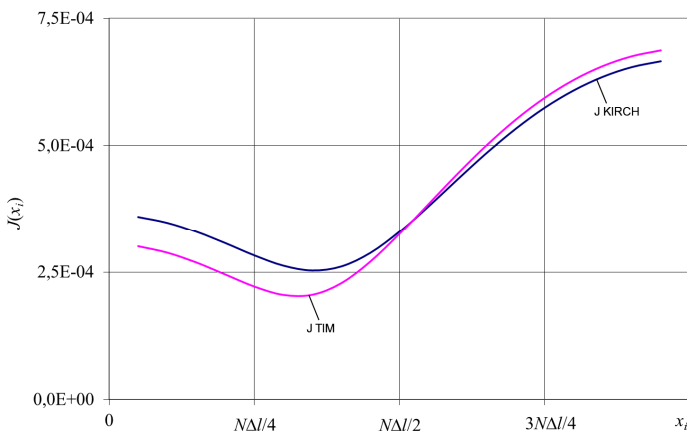


Рис. 3 – Функция  $J(x_i)$ .

На рис. 3 представлен график функции  $J(x_i)$ . Построение графика выполнено по конечному числу точек  $x_i = i \cdot \Delta l$ , где  $i = \overline{1, N-1}$ ;  $\Delta l = l/N$ ;  $N = 20$ . При этом кривая 1 соответствует случаю, когда коэффициенты  $a_k(t)$ , определяющие перемещения  $w(x_w, t)$ , вычислялись на основании (7) (модель Кирхгофа), а кривая 2 – на основании (9) (модель Тимошенко).

Очевидно, что для первой кривой минимальное значение функции  $J$  наблюдается при  $x_i = x_7 = 7\Delta l$ , а для второй – при  $x_i = x_6 = 6\Delta l$ . Следует отметить, что точное положение точки приложения нагрузки определяется координатой  $x_p = x_5 = 5\Delta l = l/4$ , то есть более точный результат восстановления значения  $x_p$  дает привлечение модели Тимошенко. Располагая значением  $x_i$  для обеих расчетных моделей, были вычислены значения  $q_0 = q_0(x_i)$  в соответствии с (10). И если усредненное значение импульса действующей нагрузки составляет 0,24 Нс, то восстановленное в рамках модели Кирхгофа значение равно 0,19 Нс, а в рамках модели Тимошенко –0,21 Нс. Таким образом и в контексте восстановления амплитудного значения импульсной нагрузки  $P_0$  расчетная модель Тимошенко дает лучший результат с погрешностью 15,2% против 22,5% для модели Кирхгофа.

Пересчитанные перемещения  $w$  в точке  $x = x_1$  представлены на рис. 2, при этом кривая 2 соответствует модели Кирхгофа, кривая 3 – модели Тимошенко.

Следует отметить, что несогласованность кривых обусловлена не только неточностью описания рассмотренной нагрузки  $\bar{P}(t)$  дельта-функцией Дирака, но и расхождением решений задач о колебаниях импульсно нагруженной балки методом конечных элементов и изложенным численно-аналити-



ческим.

К преимуществам изложенного метода по сравнению с изложенным в публикации [2] следует отнести простоту его реализации и меньшее количество вычислительных операций, обобщение подхода на случай уточненной модели балки, а также возможность его реализации для элементов конструкций более сложных геометрических форм.

**Закключение.** Работа представляет численно-аналитический подход к решению задачи идентификации импульсной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на шарнирно закрепленную балку. Расчетные соотношения записаны на основании моделей Кирхгофа и Тимошенко с учетом диссипации энергии колебаний по Фойгту. Процедура идентификации построена через введение квадратичной целевой функции, определяющей ошибку между прогнозированной и измеренной величиной, по значениям которой осуществляется идентификация. Искомые значения координаты точки приложения нагрузки и ее амплитудное значение обеспечивают минимизацию данной функции. Выполненный численный эксперимент показал, что исследование в рамках модели Тимошенко дает более точные результаты идентификации по сравнению с моделью Кирхгофа. При этом погрешности восстановления положения точки приложения импульсной нагрузки и ее амплитуды составили 5%/15,2% (модель Тимошенко). Следует отметить, что исходные данные к задаче были получены *методом конечных элементов*.

Изложенный в настоящей работе подход, может быть использован для других вариантов закрепления балки или обобщен на случай конструктивных элементов других форм.

**Список литературы:** 1. Янютин Е.Г., Егоров П.А. Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – №54 (1027). – С. 207 – 213. 2. Wang B.-T., Chiu Ch.-H. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2003. – Vol. 17, Iss. 3. – P. 683 – 704. 3. Янютин Е.Г., Гришакин В.Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязко-упругих балок // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – №47. – С. 178 – 184. 4. H. Inoue. Inverse analysis of the magnitude and direction of impact force. / H. Inoue, N. Ikeda, K. Kishimoto, T. Shibuya, T. Koizumi // JSME International Journal Series A 38. – 1995. – P. 84 – 91. 5. J. Zhu. A time domain method for identifying dynamic loads on continuous system. / J. Zhu, Z. Lu // Journal of Sound and Vibration 148. – 1991. – P. 137 – 146. 6. D. M. Liu. A new non-contact technique to identify impact force of beam structure (in Chinese) / D. M. Liu, C. Z. Tsai and E. Wu // Proceedings of 14th national Conference of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Taoguan, Taiwan. – 1997. – P. 347 – 354. 7. K. Choi. Identification of impact force and location using distributed sensors. / K. Choi, F. K. Chang // AIAA Journal 34. – 1996. – P. 136 – 142.

**Bibliography (transliterated):** 1. Janjutin, E. G., and P. A. Egorov. "Identifikacija parametrov nestacionarno kolebljushhejsja sistemy «balka-massa»." // *Visnyk NTU «HPI». Ser.: Matematychnie modeljuvanja v technici ta technologijach*. No. 54 (1027). 2013. 207–213. Print. 2. Wang, B.-T., and Ch.-H. Chiu. "Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam." *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 17. Iss. 3. 2003. 683–704. Print. 3. Janjutin, E. G., and V. T. Grishakin. "Identifikacija podvizhnoj nagruzki dlja vjazko-uprugih balok." *Vestnyk NTU «HPI»*. No. 47. 2008. 178–184. Print. 4. Inoue, H., et al. "Inverse analysis of the magnitude and direction of impact force." *JSME International Journal Series A* 38. 1995. 84–91. Print. 5. Zhu, J., and Z. Lu. "A time domain method for identifying dynamic loads on continuous system." *Journal of Sound and Vibration*. No. 148. 1991. 137–146. Print. 6. Liu, D. M., C. Z. Tsai and E. Wu. "A new non-contact technique to

identify impact force of beam structure (in Chinese)." *Proceedings of 14th national Conference of the Chinese Society of Mechanical Engineers*. Taoguan, Taiwan. 1997. 347–354. Print. 7. Choi, K., and F. K. Chang. "Identification of impact force and location using distributed sensors." *AIAA Journal*. No. 34. 1996. 136–142. Print.

Поступила (received) 27.02.2015

УДК 621.43.068.4

**А.Н. КОНДРАТЕНКО**, канд. техн. наук, ст. преп., НУГЗУ, Харьков

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФИЛЬТРА ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ДИЗЕЛЯ. ЧАСТЬ 3: КОМПОНОВОЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ**

Приведена и описана математическая модель гидравлического сопротивления ФТЧ в реальных условиях эксплуатации. Модель построена на основе расходной характеристики одного модуля ФТЧ, экспериментально полученной при постоянной температуре текучей среды, и данных стендовых испытаний автотракторного дизеля 2410,5/12, оснащенного полноразмерным ФТЧ. Модель позволяет учесть ряд факторов, характеризующих условия эксплуатации ФТЧ в составе выпускной системы этого дизеля. Учет этих факторов производится путем введения соответствующих коэффициентов. В данной части работы описан физический смысл и оценены значения компоновочного коэффициента модели, позволяющего учесть размещение ФТЧ по длине выпускного тракта дизеля, влияющего на максимальную температуру отработавших газов на входе в ФТЧ.

**Ключевые слова:** дизель, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление, математическая модель.

**Введение.** С 1 января 2011 г. на территории Украины введены в действие нормы токсичности стандартов Правил ЕЭК ООН №№ 49 и 96 уровня EURO III [1, 2]. В связи с этим научно-исследовательские работы, направленные на создание принципиально новых и совершенствование известных конструкций *фильтров твердых частиц* (ФТЧ), являются актуальными и экономически обоснованными.

**Анализ литературных источников.** В отделе *поршневых энергоустановок* (ПЭУ) *Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины* (ИПМаш НАНУ) разработан *фильтрующий элемент* (ФЭ) для ФТЧ новой конструкции, описанный в первой части исследования [3].

Выполнено физическое моделирование процесса движения *текучей среды* (ТС) в различных вариантах конструкции модуля разработанного ФТЧ на *безмоторной исследовательской установке* (БИУ). Экспериментальный образец – *прозрачный макет модуля* (ПММ) ФЭ, его особенности проведения моделирования описаны в Части 1 данного исследования [3]. В результате получены расходные характеристики ПММ ФЭ при неизменной температуре ТС  $t_{TC}$  – *изотермы зависимостей гидравлического сопротивления* (ГС) модуля ФЭ от потока ТС (для БИУ – воздуха)  $g_m$  в кг/(с·м<sup>2</sup>).

Для выявления особенностей функционирования разработанного ФТЧ в условиях выпускной системы дизеля (в реальных условиях эксплуатации) проведено экспериментальное исследование *действующих макетных образцов* ФЭ – ДМ (без насыпки из *природного цеолита* (ПЦ) в сетчатых кассетах) и ДМЦ (с насыпкой из ПЦ) ФЭ – на *моторном испытательном стенде* (МИС) лаборатории отдела ПЭУ ИПМаш НАНУ, оснащенного автотракторным дизелем 2Ч10,5/12 (Д21А1) [3 – 5]. Описание особенностей размещения на МИС и устройства экспериментальных образцов, методики испытаний и средств измерительной техники, а также подходов к анализу полученных данных приведены в Части 1 данного исследования [3].

Согласно разработанной программе, моторные испытания состояли из 4 этапов, каждый из которых проведен с целью определения физического смысла и значений соответствующих коэффициентов в формуле (1). В первой части исследования – сравнительной для ДМ и ДМЦ ФЭ и описывающей результаты анализа первого этапа моторных исследований – описан физический смысл и значения настроечного коэффициента  $k_0$ . Он позволяет связать результаты исследований на БИУ и МИС, а также учесть тип конструкции модуля ФЭ [3]. Во второй части исследования на основе анализа данных, полученных в ходе первого (снятие *внешней скоростной характеристики* (в.с.х.) дизеля 2Ч10,5/12 с ДМЦ ФЭ, размещенном на расстоянии  $L_{\text{вып}} = 0$  м от выпускного коллектора дизеля по длине выпускного тракта МИС) и третьего этапов моторных исследований (реализация адаптированной стандартизированной методики стационарных 13-ти и 8-ми режимных циклов [1, 2, 5] при рациональном значении  $L_{\text{вып}} = 5,0$  м), описан физический смысл и значения температурного коэффициента  $k_t$ . Он позволяет учесть влияние температуры *отработавших газов* (ОГ) дизеля на входе в ФТЧ  $t_{\text{ФТЧвх}}$  на его ГС  $\Delta P_{\text{ФТЧ}}$ , определяемой значением крутящего момента дизеля  $M_{\text{кр}}$  (или среднего эффективного давления  $P_e$ ) дизеля [3, 4, 6].

**Цель и постановка задач исследования.** Целью исследования является математическое описание выявленных экспериментальным путем аспектов влияния на гидравлическое сопротивление фильтрующего элемента фильтра твердых частиц дизеля эксплуатационных факторов.

Задачами исследования являются учет влияния на ГС разработанного ФТЧ следующих факторов:

1. конструктивных особенностей модуля ФЭ – наличие или отсутствие насыпки из ПЦ в сетчатых кассетах и соединительной пластины в модуле;
2. геометрических особенностей модуля ФЭ – площади входного отверстия модуля  $S_{\text{вх}}$ ;
3. рабочего объема цилиндров дизеля – соответствующего ему количества модулей в полноразмерном ФЭ  $z_m$  (для ДМЦ ФЭ  $z_m = 20$  шт.);
4. режима работы дизеля 2Ч10,5/12 – частоты вращения *коленчатого вала* (к.в.) дизеля  $n_{\text{кв}}$  (а фактически – потока ОГ  $g_{m,\text{ОГ}}$ ) и  $M_{\text{кр}}$  или  $P_e$  (а фактически –  $t_{\text{ФТЧвх}}$ ) на стационарном режиме его работы;

5. места установки ФТЧ по длине выпускного тракта дизеля – значения  $L_{\text{вып}}$  (а фактически – максимальной  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{ex}}}$  (или  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{exmax}}}$ ));

6. динамики засорения ФЭ – времени работы дизеля 2410,5/12 на стационарном режиме с  $M_{\text{крmax}}$ ,  $\tau_M$ , эффективной мощности дизеля на  $i$ -ом режиме  $N_{ei}$  и весового фактора этого режима  $WF_i$  в стационарном испытательном цикле, являющемся моделью эксплуатации такого типа дизеля [3, 4].

В данной части исследования отражены подходы к решению пятой задачи.

**Математическая модель гидравлического сопротивления ФТЧ дизеля в реальных условиях эксплуатации.** Ее особенности описаны в [3]. Модель имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta P_{\text{ФТЧ}} &= \Delta P_{\text{ПММ}}(g_{m\_OГi}; S_{\text{ex}}; z_M) \cdot k_0 \cdot k_t(t_{\text{ФТЧ}_{\text{ex}i}}) \cdot k_L(t_{\text{ФТЧ}_{\text{exmax}}}) \cdot k_\tau(\tau_M; N_{ei}; WF_i) = \\ &= \Delta P_{\text{ПММ}}(n_{\text{кв}i}; S_{\text{ex}}; z_M) \cdot k_0 \cdot k_t(M_{\text{кри}}) \cdot k_L(L_{\text{вып}}) \cdot k_\tau(\tau_M; N_{ei}; WF_i), \text{ Па}\end{aligned}$$

где индекс  $i$  соответствует текущему режиму работы дизеля;  $k_0$ ,  $k_t$ ,  $k_L$ ,  $k_\tau$  – настроенный, температурный, компоновочный и временной коэффициенты.

В данной части исследования представлены подходы и результаты экспериментального определения компоновочного коэффициента  $k_L$ .

**Определение компоновочного коэффициента.** Второй этап моторных испытаний на МИС дизеля 2410,5/12, оснащенного экспериментальным действующим образцом разработанного ФТЧ с насыпкой из ПЦ в сетчатых каскадах (то есть ДМЦ ФЭ), проводился с целью выявления влияния температуры ТЧ (для МИС – ОГ) на рабочие характеристики ФТЧ вообще, и в первую очередь, эффективности очистки им ОГ от ТЧ [5, 6].

Этот показатель работы ФТЧ характеризуется коэффициентом эффективности очистки  $K_{\text{ЭО}}(G_{\text{ТЧ}})$ , который равен отношению разности массового выброса ТЧ дизеля без ФТЧ  $G_{\text{ТЧ.ДВС}}$  и с ФТЧ  $G_{\text{ТЧ.ФТЧ}}$  к  $G_{\text{ТЧ.ДВС}}$  и выражается в процентах или долях единицы. При этом сами величины  $G_{\text{ТЧ}}$  получены не прямыми измерениями (например, гравиметрическим методом), а путем применения достоверной эмпирической формулы пересчета д-ра техн. наук, проф. И.В. Парсаданова [7]. В формуле учитываются данные прямых и косвенных измерений таких характеристик работы дизеля, как часовые массовые расходы топлива  $G_T$  и воздуха  $G_B$  (в кг/ч), а также таких характеристик дымности и токсичности ОГ, как коэффициент ослабления светового потока  $N_D$  (в %) и объемная концентрация  $\text{CH}_x$  в ОГ  $C_{\text{CH}}$  (в  $\text{млн}^{-1}$ ).

Такого эффекта – повышения  $K_{\text{ЭО}}(G_{\text{ТЧ}})$  при снижении  $t_{\text{ОГ}}$  – следовало ожидать, в основном, по следующим причинам. Во-первых, место установки МВ в составе выпускной системы МИС с  $L_{\text{вып}} = 0$  м характеризуется большими значениями температуры (605 °С) и скорости потока ОГ, проходящего сквозь ДМЦ ФЭ. Процессы, определяющие размеры ТЧ – конденсации несгоревших углеводородов топлива и масла на частицах сажи (аморфного

пористого углерода) и коагуляции самих ТЧ, находящиеся в логарифмической зависимости от температуры ОГ, в таких условиях далеко от своего завершения. В выпускном коллекторе дизеля ТЧ имеют размеры около 5 нм (при  $t_{OG} = 600$  °С), в сечении выпускного тракта на входе в глушитель шума ОГ ( $t_{OG} = 350...400$  °С) – около 0,1 мкм, а в сечении на выходе из выпускного тракта ( $t_{OG} = 200$  °С и ниже) – превышают 3 – 5 мкм [6, 8]. Таким образом, в функции температуры ОГ происходит рост размеров ТЧ и изменение их состава (счетного, химического и по размерам), структуры и формы. Во-вторых, в эксперименте использовался действующий макет с  $z_m = 20$  шт., в то время как для дизеля 2Ч10,5/12 было определено рациональное  $z_m = 30...50$  шт. (по соображениям обеспечения рациональных ГС и сажеемости ФЭ), что обеспечивает большую степень расширения потока ОГ при входе его в ФТЧ. Увеличение  $z_m$ , а с ним суммарного проходного сечения ФЭ  $z_m \cdot S_{ex}$ , способствует существенному снижению скорости потока ОГ в ФЭ. В-третьих, немаловажным является состояние насыпки из ПЦ в зависимости от ее температуры, способа и степени ее уплотнения при брикетировании в кассетах [6].

Изменение температуры ОГ на входе в корпус ФТЧ достигалось удлинением части выпускного тракте МИС, находящейся между выпускным коллектором дизеля и *макетоудерживающей вставкой* (МВ) с ДМЦ ФЭ в ней, набором гибких жаропрочных газопроводов длиной 1,5, 3 и 3,5 м (длины выбраны из технологических соображений). При этом поток ОГ охлаждался естественным образом, благодаря теплообмену с ОС и расширению в газопроводах. Таким образом, дополнительно организованы три положения МВ, характеризующиеся значениями  $L_{вып}$  1,5, 5,0 и 8,0 м соответственно. Сама МВ располагалась в вертикальном положении. В каждом из этих положений МВ снималась в.с.х. (для положения с  $L_{вып} = 0$  м в.с.х. уже имеется, получена в ходе I этапа моторных испытаний и описана в Части 1 этого исследования).

В ходе экспериментальной проверки эти предположения нашли свое подтверждение –  $K_{ЭО}(G_{ТЧ})$  ДМЦ ФЭ повысился от 40,1 % при  $L_{вып} = 0$  м до 86,8 % при  $L_{вып} = 8,0$  м на режиме с  $M_{кр\max}$ . На этом режиме наблюдается глобальный максимум  $G_{ТЧ.ФТЧ}$  и глобальный минимум  $G_{ТЧ.ДВС}$  и, соответственно, глобальный максимум  $K_{ЭО}(G_{ТЧ})$ . Однако рациональным является ограничение длины  $L_{вып} = 5,0$  м, поскольку больших значений достичь на практике затруднительно даже на большегрузных *автотранспортных средствах* (АТС). При этом значении  $L_{вып}$   $K_{ЭО}(G_{ТЧ})$  достигает 77,4 % [6].

Вместе с повышением эффективности очистки ОГ от ТЧ наблюдается уменьшение ГС экспериментального образца, МВ и других элементов выпускной системы МИС, находящихся за МВ. Это объясняется увеличением плотности ОГ  $\rho_{OG}$ , что при постоянстве секундного массового расхода ОГ  $G_{m.ОГ}$  приводит к уменьшению секундного объемного расхода ОГ  $G_{V.ОГ}$ ,

что при постоянстве проходного сечения ФЭ  $z_m \cdot S_{вх}$  приводит к уменьшению скорости движения потока ОГ  $V_{ОГ}$  сквозь ФЭ, от квадрата которой зависят линейные и местные потери напора потока ОГ.

Уменьшение величины перепада температуры ОГ на МВ  $\Delta t_{ФТЧ}$  с увеличением  $L_{вып}$ , также наблюдаемое в эксперименте и представленное на рис. 1, объясняется снижением интенсификации теплообмена в ФЭ с уменьшением температурного напора (разницы температур ОГ и окружающей средой (ОС)).

Вывявленные в ходе предыдущих этапов моторных исследований и описанные в Части 1 данного исследования соотношения между величинами  $t_{ОГ}$ ,  $t_{ФТЧвх}$  и  $t_{ФТЧвых}$ , а также величинами  $\Delta P_{ФТЧ}$ ,  $\Delta P_{вып}$  и  $\Delta P_{МВ}$  в качественном плане сохраняются для всех постоянных значений  $L_{вып}$  (рис. 1 и 2).

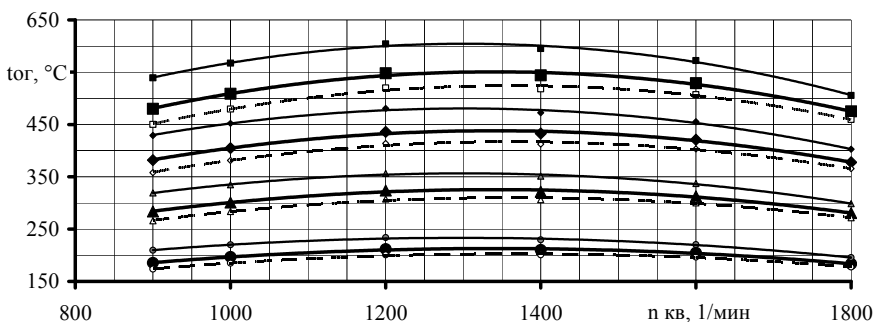


Рис. 1 – Распределение температуры ОГ по режимам в.с.х. для разных мест установки ДМЦ ФЭ: ■, □, ▣ –  $t_{ОГ} = 605$  °C; ♦, ◇, ▤ – 480 °C; ▲, △, ▴ – 355 °C; ●, ○, ◎ – 235 °C;  
■, ♦, ▲, ● –  $t_{ОГ}$ ; □, ◇, △, ○ –  $t_{ФТЧвх}$ ; ▣, ▤, ▴, ◎ –  $t_{ФТЧвых}$

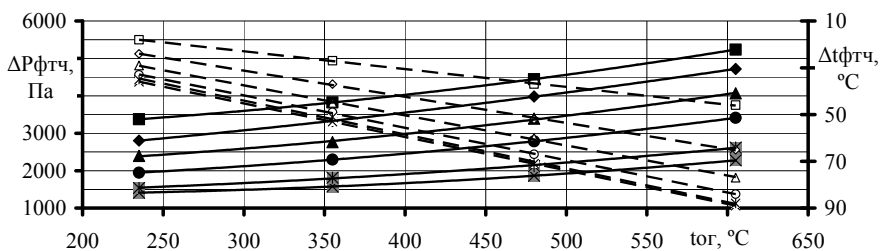


Рис. 2 – Зависимости ГС ФТЧ и перепада температуры ОГ на ФТЧ от максимальной температуры ОГ на входе в ФТЧ по в.с.х.:

■, ♦, ▲, ●, \* –  $\Delta P_{ФТЧ}$ ; □, ◇, △, ○, \* –  $\Delta t_{ФТЧ}$ ; ■, □ –  $n_{кв} = 1800$  мин<sup>-1</sup>; ♦, ◇ – 1600 мин<sup>-1</sup>; ▲, △ – 1400 мин<sup>-1</sup>; ●, ○ – 1200 мин<sup>-1</sup>; \* – 1000 мин<sup>-1</sup>; \* – 900 мин<sup>-1</sup>.

Зависимость величины  $t_{ФТЧвыхmax}$  (в °C) от  $L_{вып}$  (в м) для МИС является нелинейной и описывается формулой следующего вида:

$$t_{ФТЧвыхmax} = 2,176 \cdot L_{вып}^2 - 61,272 \cdot L_{вып} + 591,2; R^2 = 0,98621. \quad (1)$$

ГС ДМЦ ФЭ, как видно на рис. 2, изменяется как в функции  $L_{вып}$  (а зна-

чит и в функции  $t_{\Phi T^4_{ex\max}}$ ), так и в функции  $n_{кв}$  (а значит и в функции  $g_{m.ог}$ ) нелинейно (полиномы 2-й степени, получены методом линейной регрессии [9]). Тоже касается и величин  $\Delta P_{вып}$  и  $\Delta P_{MB}$ . Характер зависимостей подобен зависимости, полученной в ходе предыдущего этапа исследований при  $L_{вып} = 0$  м. Поэтому, для описания этих зависимостей пригоден предложенный ранее способ [3], но с дополнением, которое учитывает влияние величины  $L_{вып}$  на максимальное значение  $t_{\Phi T^4_{ex}}$  по в.с.х., наблюдаемое для всех  $L_{вып}$  (то есть всех мест установки МВ) на режиме с  $M_{кр\max}$  (рис. 3).

Такой учет предлагается проводить путем введения в математическую модель ГС ФТЧ соответствующего коэффициента – компоновочного  $k_L$ , равного соотношению ГС ДМЦ ФЭ на режиме с  $M_{кр\max}$  при текущем значении  $L_{вып}$  и при  $L_{вып} = 0$  м.

При анализе экспериментальных данных, полученных в ходе данного этапа исследований на МИС, значения компоновочного коэффициента  $k_L$  для различных мест установки МВ приняли следующие значения:

- при  $L_{вып} = 8,0$  м ( $t_{\Phi T^4_{ex\max}} = t_{\Phi T^4_{ex}}(M_{кр\max}) = 235$  °С)  $k_L = 0,571$ ;
- при  $L_{вып} = 5,0$  м ( $t_{\Phi T^4_{ex\max}} = t_{\Phi T^4_{ex}}(M_{кр\max}) = 355$  °С)  $k_L = 0,673$ ;
- при  $L_{вып} = 1,5$  м ( $t_{\Phi T^4_{ex\max}} = t_{\Phi T^4_{ex}}(M_{кр\max}) = 480$  °С)  $k_L = 0,816$ ;
- при  $L_{вып} = 0,0$  м ( $t_{\Phi T^4_{ex\max}} = t_{\Phi T^4_{ex}}(M_{кр\max}) = 605$  °С)  $k_L = 1,0$ .

Последнее обусловлено физическим смыслом данного коэффициента.

Зависимость  $k_L$  (в долях единицы) от  $L_{вып}$  (в м) и  $t_{\Phi T^4_{ex\max}}$  (в °С) выражается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} k_L &= 1,248 \cdot 10^{-6} \cdot t_{\Phi T^4_{ex\max}}^2 + 1,073 \cdot 10^{-6} \cdot t_{\Phi T^4_{ex\max}} + 0,478 = \\ &= 2,337 \cdot 10^{-6} \cdot L_{вып}^2 - 6,721 \cdot 10^{-2} \cdot L_{вып} + 0,959; \\ R^2(t_{\Phi T^4_{ex\max}}) &= 0,99996; R^2(L_{вып}) = 0,97920. \end{aligned} \quad (2)$$

Предложенный способ описания в данном случае предполагает получение расходных характеристик при  $t_{ог} = const$  для каждого значения  $L_{вып}$  путем умножения всех коэффициентов при  $t_{ог} = const$  при  $L_{вып} = 0$  м (полученной, в свою очередь, умножением значений расходной характеристики ПММ ФЭ на настроечный коэффициент  $k_0$ ), на компоновочный коэффициент  $k_L$ . И далее для получения прогнозируемых значений ГС ДМЦ ФЭ при  $t_{ог} \neq const$  можно использовать температурный коэффициент  $k_t$ .

Для уточнения такой расходной характеристики прогноза предлагается использовать значения прогнозируемого температурного коэффициента  $k_{t,прогн}$ , равного соотношению ГС ДМЦ ФЭ, определяемых по расходным характеристикам при  $t_{ог} = const$  для текущего значения  $L_{вып}$  и при  $L_{вып} = 0$  м. Такой подход, очевидно, может быть использован для описания экспериментальных данных, поскольку форма расходной характеристики при

$t_{OG} = const$ , полученной для ПММ ФЭ на БИУ, отражает сущность физических процессов, происходящих в модуле ФЭ, равно как и форма кривых семейства, полученных при использовании коэффициентов  $k_0$  и  $k_L$ .

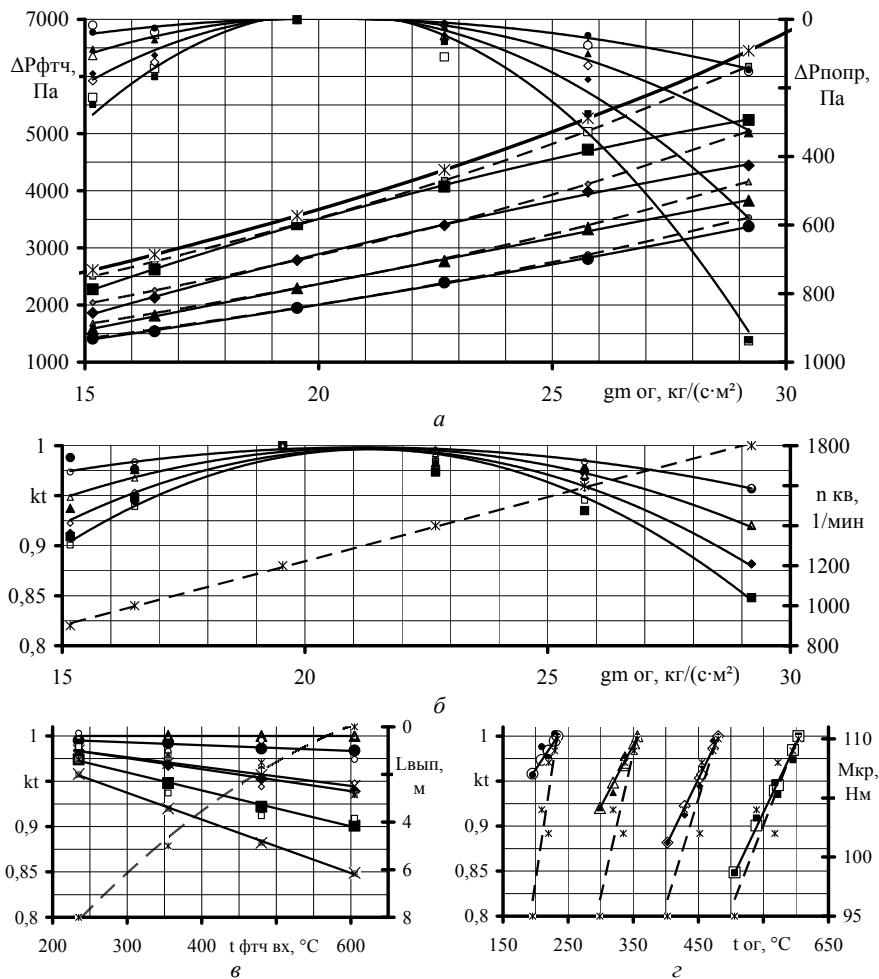


Рис. 3 – Влияние температуры ОГ режимов в.с.х. дизеля 2410,5/12 на ГС ДМЦ ФЭ:  
 Для а: \* – ПММ ФЭ 100 % Ц; ■, □, ▤ –  $t_{фтч\text{ вх max}} = 605^\circ\text{C}$ ; ♦, ◇, ▥ –  $480^\circ\text{C}$ ; ▲, △, ▧ –  $355^\circ\text{C}$ ; ●, ○, ▨ –  $235^\circ\text{C}$ ; ■, ▤, ▥, ▧, ▨ –  $\Delta P_{фтч\text{ эксп}}$ ; ▩, ▪, ▫, ▬ –  $\Delta P_{фтч\text{ прогр}}$ ; □, ◇, △, ○ –  $\Delta P_{фтч\text{ прогр}}$ ; для б, в, д: ●, ○ – при  $t_{фтч\text{ вх max}} = 235^\circ\text{C}$ ; ▲, △ –  $355^\circ\text{C}$ ; ♦, ◇ –  $480^\circ\text{C}$ ; ■, ▤ –  $605^\circ\text{C}$ ; ●, ▲, ♦, ■ – экспериментальные данные; ○, △, ◇, □ – спрогнозированные данные; для г: ■, □ – при  $n_{кв} = 900\text{ мин}^{-1}$ ; ♦, ◇ –  $1000\text{ мин}^{-1}$ ; ▲, △ –  $1200\text{ мин}^{-1}$ ; ●, ○ –  $1400\text{ мин}^{-1}$ ; \*, ▥ –  $1600\text{ мин}^{-1}$ ; ×, ▧ –  $1800\text{ мин}^{-1}$ ; ●, ▲, ♦, ■, \*, × – экспериментальные данные; ○, △, ◇, □, ▩, ▪ – спрогнозированные данные

Согласно этому подходу, при определении  $k_{t,прогр}$  выявлено, что значе-



ния этого коэффициента зависят не только от  $t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}$ , но и от  $n_{\text{кв}}$ , а значит и  $g_{m.OГ}$ . Эта уточненная зависимость для  $L_{\text{вып}} = \text{const}$  и  $t_{TC} = \text{const}$  (то есть для зависимостей, полученных для постоянной температуры ТС и пригодных, в связи с этим, для сравнения с расходной характеристикой ПММ ФЭ, полученной на БИУ) имеет вид:

$$k_{t.\text{прогн}} = \frac{\Delta P_{\Phi TЧ|t_{TC}}(n_{\text{кв}}|_{\Phi TЧ_{\text{вх}}})}{\Delta P_{\Phi TЧ|t_{TC}}(n_{\text{кв}}|_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}})} = 1 - \frac{\Delta P_{\text{нопр}}}{\Delta P_{\Phi TЧ|t_{TC}}(n_{\text{кв}}|_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}})} =$$

$$= (\Delta P_{\Phi TЧ|t=\text{const}}(L_{\text{вып}} = 0) - \Delta P_{\text{нопр}}) / \Delta P_{\Phi TЧ|t=\text{const}}(L_{\text{вып}} = 0) =$$

$$= 1 - \Delta P_{\text{нопр}} / \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}; \quad (3)$$

$$\Delta P_{\text{нопр.прогн}} = \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}) - \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}) =$$

$$= \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}) \cdot (1 - k_{t.\text{прогн}}) =$$

$$= (5,599 \cdot 10^{-6} \cdot n_{\text{кв}} - 1,773 \cdot 10^{-3}) \cdot (t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}^2 - t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}^2) \Big|_{n_{\text{кв}}=\text{const}} +$$

$$+ (2,048 \cdot 10^{-4} \cdot n_{\text{кв}} - 7,288 \cdot 10^{-2}) \cdot (t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}} - t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}) \Big|_{n_{\text{кв}}=\text{const}}; \quad (4)$$

$$\Delta P_{\text{нопр.эксп}} = \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}} - \Delta P_{\Phi TЧ_{\text{эксп}}} = \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}} \cdot (1 - k_{t.\text{эксп}}); \quad (5)$$

$$k_{t.\text{эксп}} = (1,119 \cdot 10^{-9} \cdot n_{\text{кв}}^2 + 2,903 \cdot 10^{-6} \cdot n_{\text{кв}} - 1,882 \cdot 10^{-3}) \cdot t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}} + 1,0. \quad (5)$$

$$k_{t.\text{прогн}} = \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}) / \Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}); \quad (6)$$

$$\Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(L_{\text{вып}} = 0) = k_L(t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}} = \text{const}) \cdot k_0 \cdot \Delta P_{\text{ПММ}100\%Ц}(g_{m.OГ}); \quad (7)$$

$$\Delta P_{\Phi TЧ.\text{прогн}}(L_{\text{вып}} \neq 0) = k_L(t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}) =$$

$$= \text{const}) \cdot k_0 \cdot \Delta P_{\text{ПММ}100\%Ц}(g_{m.OГ}) \cdot k_t(t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}). \quad (8)$$

где  $\Delta P_{\text{нопр}}$  – поправка значения ГС, Па.

По экспериментальным данным, полученным на этом этапе моторных исследований, рассчитаны экспериментальные значения  $\Delta P_{\text{нопр.эксп}}$  и  $k_{t.\text{эксп}}$  по формулам (3) и (4), вместе с прогнозными описаны методом линейной регрессии [9] и представлены на рис. 3. Отклонения экспериментальных значений  $\Delta P_{\text{нопр.эксп}}$  от прогнозных  $\Delta P_{\text{нопр.прогн}}$  находятся в диапазоне 19 – 37 % и уменьшаются с ростом  $t_{\Phi TЧ_{\text{вх max}}}$ , что объясняется особенностями распределения погрешности измерения  $t_{\Phi TЧ_{\text{вх}}}$  термопарами ТХА и прибором А566 в их рабочем диапазоне измерения. Для величины  $k_t$  отклонение практически не изменяется и составляет около 0,65 %.

Как следует из приведенных данных, а также это видно на рис. 3, предложенный подход пригоден для описания результатов моторных исследований, а предположения, положенные в его основу, нашли свое подтверждение.

Тогда далее между величинами  $\Delta P_{\text{нопр}}$  и  $k_t$ , обозначаемыми индексами *эксп.* и *прогн.*, различий в описании результатов экспериментов и математической модели ГС ФТЧ делаться не будет, сами индексы будут опускаться и под соответствующими величинами будут пониматься полученные с приме-

нением предложенного способа, то есть прогнозные. Для  $L_{вын} = 0$  м они описываются формулами (9) – (13), для  $L_{вын} = 1,5$  м – (14) – (18), для  $L_{вын} = 5,0$  м – (19) – (23) и для  $L_{вын} = 8,0$  м – (24) – (28). Зависимости от  $t_{ФТЧех}$  величин  $\Delta P_{ФТЧ}$ ,  $\Delta t_{ФТЧ}$  и  $k_t$  при постоянной  $n_{кв}$  описываются формулами (29) – (31) для  $n_{кв} = 900$  мин<sup>-1</sup>, (32) – (34) для  $n_{кв} = 1200$  мин<sup>-1</sup>, (35) – (37) для  $n_{кв} = 1800$  мин<sup>-1</sup>. Упомянутые зависимости имеют вид:

$$\Delta P_{ФТЧэксн} = 3,511 \cdot 10^{-4} \cdot n_{кв}^2 + 2,341 \cdot n_{кв} = -4,766 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 423,72 \cdot g_{m.ОГ} - 3061,2; \\ R^2(g_{m.ОГ}) = 0,99971; R^2(n_{кв}) = 0,99157; \quad (9)$$

$$\Delta P_{ФТЧпрогн} = 0,117 \cdot g_{m.ОГ}^3 - 1,868 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 166,77 \cdot g_{m.ОГ}; R^2 = 0,99998; \quad (10)$$

$$\Delta t_{ФТЧ} = -5,793 \cdot 10^{-5} \cdot n_{кв}^2 + 0,110 \cdot n_{кв} + 36,4; R^2 = 0,99804; \quad (11)$$

$$\Delta P_{нонр} = 11,654 \cdot g_{m.ОГ}^2 - 471,92 \cdot g_{m.ОГ} + 4755,1; R^2 = 0,98970; \quad (12)$$

$$k_t = -6,024 \cdot 10^{-7} \cdot n_{кв}^2 + 1,568 \cdot 10^{-3} \cdot n_{кв} - 2,319 \cdot 10^{-2} = \\ = -2,431 \cdot 10^{-3} \cdot g_{m.ОГ}^2 + 0,104 \cdot g_{m.ОГ} - 0,109 = 1,519 \cdot 10^{-3} \cdot t_{ОГ} + 7,960 \cdot 10^{-2}; \\ R^2(g_{m.ОГ}) = 0,98613; R^2(n_{кв}) = 0,99080; R^2(t_{ОГ}) = 0,99788; \quad (13)$$

$$\Delta P_{ФТЧэксн} = 4,12 \cdot 10^{-4} \cdot n_{кв}^2 + 1,783 \cdot n_{кв} = -3,274 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 331,96 \cdot g_{m.ОГ} - 2438,4 \\ R^2(n_{кв}) = 0,99304; R^2(g_{m.ОГ}) = 0,99937; \quad (14)$$

$$\Delta P_{ФТЧпрогн} = 9,557 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.ОГ}^3 - 1,539 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 136,07 \cdot g_{m.ОГ}; R^2 = 0,99998; \quad (15)$$

$$\Delta t_{ФТЧ} = -4,148 \cdot 10^{-5} \cdot n_{кв}^2 + 7,471 \cdot 10^{-2} \cdot n_{кв} + 37,4; R^2 = 0,99714; \quad (16)$$

$$\Delta P_{нонр} = 7,359 \cdot g_{m.ОГ}^2 - 297,69 \cdot g_{m.ОГ} + 2998,0; R^2 = 0,98910; \quad (17)$$

$$k_t = -1,879 \cdot 10^{-3} \cdot g_{m.ОГ}^2 + 8,007 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.ОГ} + 0,143 = \\ = -4,658 \cdot 10^{-7} \cdot n_{кв}^2 + 1,212 \cdot 10^{-3} \cdot n_{кв} + 0,210 = 1,491 \cdot 10^{-3} \cdot t_{ОГ} + 0,281; \\ R^2(n_{кв}) = 0,98882; R^2(g_{m.ОГ}) = 0,98366; R^2(t_{ОГ}) = 0,99791; \quad (18)$$

$$\Delta P_{ФТЧэксн} = 4,0 \cdot 10^{-4} \cdot n_{кв}^2 + 1,419 \cdot n_{кв} = -0,126 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 165,99 \cdot g_{m.ОГ} - 901,6 \\ R^2(n_{кв}) = 0,99938; R^2(g_{m.ОГ}) = 0,99935; \quad (19)$$

$$\Delta t_{ФТЧ} = -3,018 \cdot 10^{-5} \cdot n_{кв}^2 + 5,359 \cdot 10^{-2} \cdot n_{кв} + 28,5; R^2 = 0,99618; \quad (20)$$

$$\Delta P_{ФТЧпрогн} = 7,882 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.ОГ}^3 - 1,269 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 112,22 \cdot g_{m.ОГ}; R^2 = 0,99998; \quad (21)$$

$$\Delta P_{нонр} = 4,111 \cdot g_{m.ОГ}^2 - 166,32 \cdot g_{m.ОГ} + 1674,7; R^2 = 0,99070; \quad (22)$$

$$k_t = -1,272 \cdot 10^{-3} \cdot g_{m.ОГ}^2 + 5,421 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.ОГ} + 0,420 = \\ = -3,153 \cdot 10^{-7} \cdot n_{кв}^2 + 8,20 \cdot 10^{-4} \cdot n_{кв} + 0,465 = 1,362 \cdot 10^{-3} \cdot t_{ОГ} + 0,513; \\ R^2(n_{кв}) = 0,99056; R^2(g_{m.ОГ}) = 0,98589; R^2(t_{ОГ}) = 0,99782; \quad (23)$$

$$\Delta P_{ФТЧэксн} = 3,723 \cdot 10^{-4} \cdot n_{кв}^2 + 1,186 \cdot n_{кв} = 1,662 \cdot g_{m.ОГ}^2 + 66,459 \cdot g_{m.ОГ} + 11,22;$$

$$R^2(n_{\kappa\delta}) = 0,99809; R^2(g_{m.O\Gamma}) = 0,99955; \quad (24)$$

$$\Delta t_{\Phi T\check{C}} = -1,563 \cdot 10^{-5} \cdot n_{\kappa\delta}^2 + 2,218 \cdot 10^{-2} \cdot n_{\kappa\delta} + 28,6; R^2 = 0,99949; \quad (25)$$

$$\Delta P_{\Phi T\check{C}npozu} = 6,688 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.O\Gamma}^3 - 1,077 \cdot g_{m.O\Gamma}^2 + 95,22 \cdot g_{m.O\Gamma}; R^2 = 0,99998; \quad (26)$$

$$\Delta P_{nonp} = 1,780 \cdot g_{m.O\Gamma}^2 - 71,66 \cdot g_{m.O\Gamma} + 719,4; R^2 = 0,99210; \quad (27)$$

$$k_t = -6,442 \cdot 10^{-4} \cdot g_{m.O\Gamma}^2 + 2,734 \cdot 10^{-2} \cdot g_{m.O\Gamma} + 0,708 = \\ = -1,60 \cdot 10^{-7} \cdot n_{\kappa\delta}^2 + 4,145 \cdot 10^{-4} \cdot n_{\kappa\delta} + 0,730 = 1,079 \cdot 10^{-3} \cdot t_{O\Gamma} + 0,747;$$

$$R^2(n_{\kappa\delta}) = 0,98774; R^2(g_{m.O\Gamma}) = 0,98122; R^2(t_{O\Gamma}) = 0,99774; \quad (28)$$

$$\Delta P_{\Phi T\check{C}} = 3,867 \cdot 10^{-3} \cdot t_{O\Gamma}^2 - 0,919 \cdot t_{O\Gamma} + 1416,1; R^2 = 0,99998; \quad (29)$$

$$\Delta t_{\Phi T\check{C}} = 0,143 \cdot t_{O\Gamma} + 2,2; R^2 = 0,99998; \quad (30)$$

$$k_t = -1,983 \cdot 10^{-4} \cdot t_{O\Gamma} + 1,019; R^2 = 0,99675; \quad (31)$$

$$\Delta P_{\Phi T\check{C}} = 4,294 \cdot 10^{-3} \cdot t_{O\Gamma}^2 + 0,347 \cdot t_{O\Gamma} + 1630,0; R^2 = 0,99999; \quad (32)$$

$$\Delta t_{\Phi T\check{C}} = 0,138 \cdot t_{O\Gamma} + 0,3; R^2 = 0,99980; \quad (33)$$

$$k_t = 1,0 \cdot t_{O\Gamma} + 1,0; R^2 = 0,99999; \quad (34)$$

$$\Delta P_{\Phi T\check{C}} = 5,262 \cdot 10^{-3} \cdot t_{O\Gamma}^2 + 0,611 \cdot t_{O\Gamma} + 2942,2; R^2 = 0,99998; \quad (35)$$

$$\Delta t_{\Phi T\check{C}} = 7,611 \cdot 10^{-2} \cdot t_{O\Gamma} - 0,1; R^2 = 0,99962; \quad (36)$$

$$k_t = -2,955 \cdot 10^{-4} \cdot t_{O\Gamma} + 1,026; R^2 = 0,99833. \quad (37)$$

Таким образом, по результатам проведения данного этапа моторных исследований можно сделать следующий вывод: температура ОГ, как ТС, оказывает существенное влияние на все рабочие характеристики ДМЦ ФЭ. Ее снижение, достигнутое за счет перенесения ФТЧ по длине выпускного тракта дизеля, благоприятно сказывается как на эффективности очистки им ОГ от ТЧ, так и на его ГС. Причем это влияние тем сильнее, чем выше температура ОГ на входе в ФТЧ, и наоборот, при приближении ее значения к температуре ОС, тем менее значительный эффект достигается. В связи с вышесказанным, следует сделать вывод о том, что рациональное место размещения разработанного ФЭ по длине выпускного тракта МИС находится в окрестности значения  $L_{вып}$ , равного 5,0 м. Этот вывод также подкрепляется анализом геометрических параметров (в частности, длины) выпускных трактов существующих АТС, оснащенных автотракторными дизелями, у которых значение  $L_{вып}$ , превышающее 5,0 м, не нашло широкого распространения.

Следует заметить, что по сути температурный  $k_t$  и компоновочный  $k_L$  коэффициенты в представленной модели выполняют одинаковые функции – учет влияния температуры ОГ на ГС ФТЧ. В связи с этим, их можно было бы объединить в один – глобальный или абсолютный температурный коэффициент  $k_T$ , а коэффициент  $k_t$  приобретал бы функции учета локального или относительного изменения температуры ОГ (то есть, от режима к режиму в пределах одной в.с.х.). Однако при таком подходе теряется связь между самим изменением температуры ОГ и его причинами.

Определению физического смысла и значений временного коэффициента  $k_\tau$ , позволяющего учесть влияние на ГС ФТЧ динамики засорения его ФЭ в процессе эксплуатации, посвящена следующая, завершающая, часть данного исследования.

**Выводы.** Таким образом, разработана математическая модель связи между ГС модуля ФТЧ, исследуемым на безмоторной установке, и полноразмерного ФТЧ в реальных условиях эксплуатации. Она базируется на расходной характеристике модуля ФЭ при постоянной температуре ТС и использует набор коэффициентов, позволяющих учесть влияние ряда эксплуатационных факторов на ГС. Приведен и обоснован физический смысл компоновочного коэффициента, позволяющего учесть влияние на гидравлическое сопротивление ФТЧ места его размещения вдоль выпускного тракта дизеля, определяющего максимальную температуру ОГ на входе в его корпус. Экспериментально определены его значения для разных мест размещения ФТЧ.

**Список литературы:** 1. Regulation № 49. Revision 5. Uniform provision concerning the approval of compression ignition (C.I.) and natural gas (NG) engines as well as positive-ignition (P.I.) engines fuelled with liquefied petroleum gas (LPG) and vehicles equipped with C.I. and NG engines and P.I. engines fuelled with LPG, with regard to the emissions of pollutants by the engine. – United Nations Economic and Social Council Economics Commission for Europe Inland Transport Committee Working Party on the Construction of Vehicles. – E/ECE/TRANS/505. – 4 May 2011. – 194 p. 2. Regulation № 96. Uniform provision concerning the approval of compression ignition (C.I.) engines to be installed in agricultural and forestry tractors with the regard to the emissions of pollutants by the engine. Geneva, 1995. – 109 p. 3. Кондратенко А.Н. Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твердых частиц дизеля. Часть 1: настроечный коэффициент // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 68 – 80. 4. Кондратенко А.Н. Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твердых частиц дизеля. Часть 2: температурный коэффициент // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 80 – 89. 5. Вамболь С.О., Строков О.П., Кондратенко О.М. Стендові випробування автотракторного дизеля 2410,5/12 за стандартизованими циклами для визначення ефективності роботи ФТЧ // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Автомобіле- та тракторобудування. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 10 (1053). – С. 11 – 18. 6. Кондратенко О.М. Зниження викиду твердих частинок транспортних дизелів, що перебувають в експлуатації: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.05.03 «Двигуни та енергетичні установки» / О.М. Кондратенко. – Харків, 2013. – 20 с. 7. Парсаданов І.В. Підвищення якості і конкурентоспроможності дизелів на основі комплексного паливно-екологічного критерію: Монографія. – Харків: Видавничий центр НТУ «ХПІ», 2003. – 244 с. 8. Александров А.А. Альтернативные топлива для двигателей внутреннего сгорания / А.А. Александров, И.А. Ирхаров, В.В. Багров и др. Под ред. А.А. Александрова, В.А. Маркова. – М.: ООО НИЦ "Инженер", ООО "Онико-М", 2012. – 791 с. 9. Эберт К., Эдерер Х. Компьютеры. Применение в химии: Пер. с нем. – М.: Мир, 1988. – 416 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Regulation No. 49. Revision No. 5. *Uniform provision concerning the approval of compression ignition (C.I.) and natural gas (NG) engines as well as positive-ignition (P.I.) engines fuelled with liquefied petroleum gas (LPG) and vehicles equipped with C.I. and NG engines and P.I. engines fuelled with LPG, with regard to the emissions of pollutants by the engine.* United Nations Economic and Social Council Economics Commission for Europe Inland Transport Committee Working Party on the Construction of Vehicles. E.ECE.TRANS.505. 4 May 2011. Print. 2. Regulation No. 96. *Uniform provision concerning the approval of compression ignition (C.I.) engines to be installed in agricultural and forestry tractors with the regard to the emissions of pollutants by the engine.* Geneva, 1995. Print. 3. Kondratenko, A. N. "Matematicheskaja model' gidravlicheskogo soprotivlenija fil'tra tverdyh chastic dizelja. Chast' 1: nastroecnyj koeficient." *Visnyk NTU «KhPI»*.

Ser.: *Matematychnie modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 18 (1061). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 69–80. Print. 4. Kondratenko, A. N. "Matematicheskaja model' gidravlicheskogo soprotivlenija fil'tra tverdyh chastic dizelja. Chast' 2: temperaturnyj koeficient." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnie modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 18 (1061). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 80–89. Print. 5. Vambol', S. O., O. P. Stokov and O. M. Kondratenko. "Stendovi vyprobuvannja avtotraktornogo dyzelja 2Ch10.5/12 za standartyzovanymy cyklamy dlja vyznachennja efektyvnosti roboty FTCh." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Avtomobile- ta traktorobuduvannja*. No. 10 (1053). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 11–18. Print. 6. Kondratenko, O. M. *Znyzhennja vykydu tverdyh chastynek transportnyh dyzeliv, shho perebuvajut' v ekspluataciji*. *Avtoref. dys. na здобuttja nauk. stupenja kand. tehn. nauk*. Kharkiv, 2013. Print. 7. Parsadanov, I. V. *Pidvyshennja yakosti i konkurentospromozhnosti dyzeliv na osnovi kompleksnogo palyvno-ekologichnogo kryteriju*. *Monografija*. Kharkiv: Vydavnychij centr NTU «KhPI», 2003. Print. 8. Aleksandrov, A. A., et al. *Al'ternativnye topliva dlja dvigatelej vnutrennego sgoranja*. Ed. A. A. Aleksandrov, and V. A. Markov. Moscow: OOO NIC "Inzhener", OOO "Oniko-M", 2012. Print. 9. Jebert, K., and H. Jederer. *Komp'jutery. Primenenie v himii*. *Per. s nem.* Moscow: Mir, 1988. Print.

Поступила (received) 02.03.2015

УДК 621.646.942

**А.П. КОНОНЕНКО**, д-р техн. наук, проф., ДонНТУ, Донецк;  
**В.П. ОВСЯННИКОВ**, канд. техн. наук, доц., ДонНТУ, Донецк;  
**М.В. ОВЕРКО**, аспирант, ДонНТУ, Красноармейск

## **ВЫБОР ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВИХРЕВОГО ДИОДА ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ УДАРОВ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ**

Наиболее часто мощные вертикальные трубопроводы применяются на шахтных водоотливных установках. Опасный гидравлический удар возникает в них при внезапном отключении насоса. В этих условиях средством защиты от опасных колебаний давления может быть гидравлический диод, установленный, например, в середине трубопровода. Наиболее приемлемым типом диода выбран вихревой струйный диод. Трудностью при моделировании переходного процесса в вертикальном трубопроводе с вихревым диодом является его существенная инерционность. Задача была решена с помощью локальной системы координат, которая вводится в программу расчета на время существования обратного тока жидкости. Используя разработанную модель можно оп-ределить размеры вихревого диода и рассчитать энергетические потери, которые могут возникнуть при использовании данной схемы защиты.

**Ключевые слова:** водоотливная установка, защита, напорный трубопровод, моделирование, гидравлический удар, вихревой гидравлический диод.

**Введение.** Как показывают результаты моделирования динамических процессов в вихревом диоде, время его выхода на режим максимального обратного сопротивления зачастую соизмеримо с фазой гидравлического удара [1]. Это говорит о том, что при расчете колебательного процесса в напорном трубопроводе водоотливной установки его нельзя рассматривать как дискретный безынерционный модуль с двумя значениями гидравлического сопротивления. С другой стороны, эффективность защиты от гидравлического

удара зависит от диодности [2] устройства. И, хотя возможность использования диодов для защиты водоотливных установок (рис. 1) никем не оспаривается, отсутствие четких рекомендаций по выбору основных параметров тормозит их применение.

**Анализ последних исследований.** Как известно [3, 4], защита водоотливных установок от гидравлического удара является актуальной задачей. В работе [5] показано расчетами на модели, что гидравлический диод в принципе может служить средством защиты водоотливных установок от гидравлического удара. При этом предполагается, что сам диод является безынерционным звеном. Такое предположение вполне допустимо, когда речь идет о гидравлических диодах, сделанных, например, на базе обратного клапана. Время срабатывания обратного клапана в рассматриваемых условиях не превышает 0,1 с, что на порядок меньше фазы гидравлического удара и не влияет существенно на процесс. Постоянная времени вихревого диода [1] (рис. 2) может изменяться от 0,5 с до 1 с и более. Очевидно значимое влияние инерционности характеристики вихревого диода на качество переходного процесса. Кроме того, обычно пренебрегают прямым сопротивлением вихревого диода, которое может оказывать определенное влияние на параметры рабочего режима насоса (рис. 3) и экономическую целесообразность применения рассматриваемого метода защиты в целом.

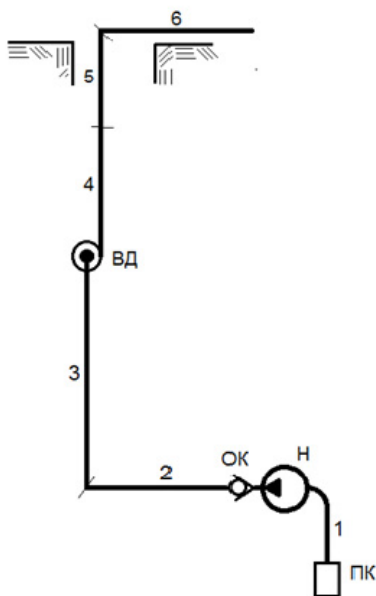


Рис. 1 – Схема водоотливной установки: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – участки водоотливного трубопровода, ВД – вихревой диод, ОК – обратный клапан, Н – насос, ПК – приемный клапан.

**Постановка задачи.** На основании изложенного была поставлена цель: установить на конкретном примере степень влияния инерционности и размеров вихревого диода на повышение давления при переходном процессе, а так же оценить энергетические потери при этом.

**Математическая модель и результаты моделирования.** Как отмечается в статье [2], вихревой диод, который используется в качестве средства защиты от гидравлических ударов, можно рассматривать как *черный ящик*, который характеризуется переменным гидравлическим сопротивлением и только двумя параметрами: максимальным сопротив-

лением при обратном течении жидкости  $a_{\max}$  и временем его достижения  $T_r$  (постоянная времени).

Качественный вид зависимости гидравлического сопротивления вихревого диода от времени показан на рис. 2 (кривая 1). Очевидно, что эта зависимость аппроксимируется ломаной линией, состоящей из двух участков, и её можно считать идеальной характеристикой вихревого диода, которая, как отмечалось выше, может быть задана величиной двух параметров –  $a_{\max}$ ,  $T_r$  и значением гидравлического сопротивления вихревого диода при прямом течении жидкости  $a_{\min}$ .

Для проведения дальнейшего анализа множество параметров  $a_{\min}$ ,  $T_r$ ,  $a_{\max}$  целесообразно заменить на эквивалентные параметры  $a_{\min}$ ,  $T_r$ ,  $D_{vd}$ , где  $D_{vd}$  – диодность вихревого гидравлического диода  $D_{vd} = a_{\max} / a_{\min}$ . Очевидно, что чем выше диодность  $D_{vd}$  и меньше  $T_r$ , тем эффективнее вихревой диод как средство защиты от гидравлических ударов. Однако, как отмечено выше и показано в результате имитационного моделирования [1], максимальное значение  $D_{vd}$  достигает сорока, а минимальное значение  $T_r$  равно 0,5 секунд.

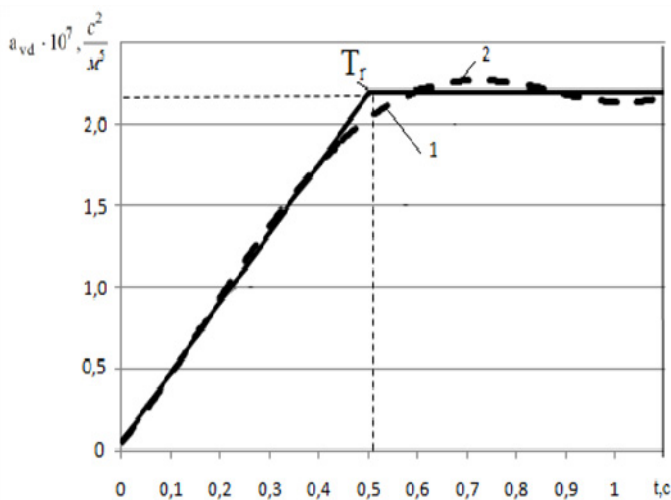


Рис. 2 – Зависимости гидравлического сопротивления вихревого диода с постоянной времени  $T_r = 0,5$  с и диодностью  $D_{vd} = 40$  от времени (1 – реальная характеристика; 2 – идеальная характеристика).

Прежде чем определить влияние этих параметров ( $D_{vd}$ ,  $T_r$ ) на характер динамических процессов в защищаемой водоотливной установке следует отметить, что величина  $a_{\min}$  влияет на параметры стационарного режима её работы. Чем меньше  $a_{\min}$ , тем меньше это влияние. Величину гидравличе-

ского сопротивления  $a_{\min}$  целесообразно определить через эквивалентный диаметр местного отверстия с сопротивлением, соответствующим гидравлическому сопротивлению вихревого диода при прямом течении жидкости  $D_{\min}$ .

Степень этого влияния можно оценить тремя безразмерными характеристиками:

- величиной относительного изменения стационарного расхода  $\Delta Q_0 = Q_0 / \overline{Q_0}$ , где соответственно  $\overline{Q_0}, Q_0$  стационарный расход в незащищенной и защищенной вихревым диодом водоотливной установке;
- величиной удельной энергии потока жидкости в трубопроводе водоотливной установки  $E_{\text{вд}} = N_0 \overline{Q_0} / Q_0 \overline{N_0}$ , где  $\overline{N_0}, N_0$  – мощности расходуемые на транспортировку жидкости в защищенной и незащищенной водоотливной установке в стационарном режиме работы;
- величиной относительного повышения давления при внезапном отключении насоса в защищенной вихревым диодом водоотливной установке  $\Delta p = p_{\max} / p_0$ , где  $p_{\max}, p_0$ , соответственно, максимальное давление при переходном процессе и давление в начале трубопровода в стационарном режиме работы.

На рис. 3 показаны соответствующие графики. Они получены для водоотливной установки с параметрами, приведенными в [2].

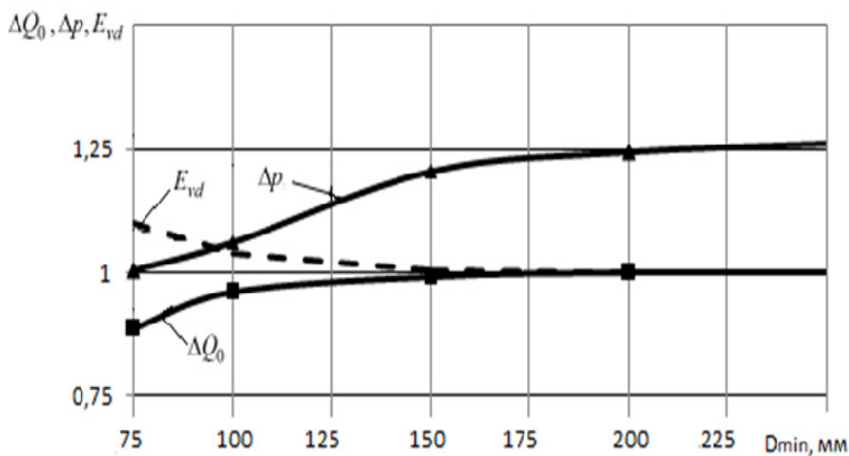


Рис. 3 – Зависимости величин  $\Delta Q_0, \Delta p, E_{\text{вд}}$  в защищенном вихревым диодом трубопроводе от его прямого гидравлического сопротивления с эквивалентным диаметром  $D_{\min}$  (диодность  $40T_r = 0,5$  с).

Графики на рис. 4 показывают, что вихревой диод с  $D_{\min} = 125$  мм обеспечивает снижение относительного повышения давления при внезапном отключении насоса водоотливной установки до допустимого уровня без замет-



ного влияния на параметры стационарного режима работы (рис. 2). Однако график на рис. 4 показывает, что качественного изменения характера переходного процесса в этом случае не происходит, хотя вихревой диод обладает максимально возможными параметрами ( $T_{vd} = 0,5$  с,  $D_{vd} = 40$ ). Поэтому при дальнейших расчетах рассматривается вихревой диод с  $D_{min} = 100$  мм, установка которого уменьшает расход в стационарном режиме работы на 5%, однако позволяет получить аperiодический переходный процесс в трубопроводе, а значит, обеспечить надежную защиту от гидравлического удара.

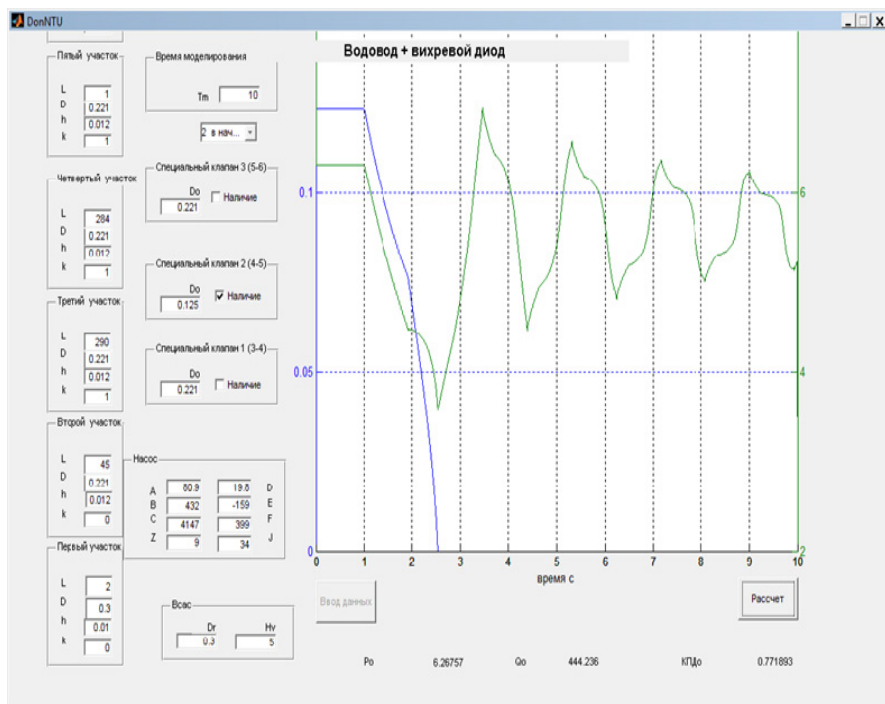


Рис. 4 – Изменение давления и расхода в начале трубопровода водоотливной установки (переходный процесс в защищенном трубопроводе  $T_{vd} = 0,5$  с,  $D_{vd} = 40$  ,  $D_{min} = 125$  мм).

Определим граничные условия в точке установки вихревого диода. При этом будем считать, что зависимость гидравлического сопротивления вихревого диода от времени, показанная на рис. 2 и полученная в стационарных режимах работы устройства будет справедливой и при быстрых изменениях расхода жидкости. Кроме того, будем предполагать, что при использовании вихревого диода для защиты водоотливных установок не возникают режимы работы, рассмотренные в [1], когда со значительным увеличением отрица-

тельного расхода сопротивление вихревого диода уменьшается, поскольку в трубопроводах водоотливных установок скорость течения жидкости не превышает 3 м/с [3, 4] и такие режимы не возникают.

Итак, с учетом принятых допущений получим искомую систему уравнений. Если  $vd$  номер участка, в конце которого установлен диод, а длина этого участка  $L_{vd}$ , тогда:

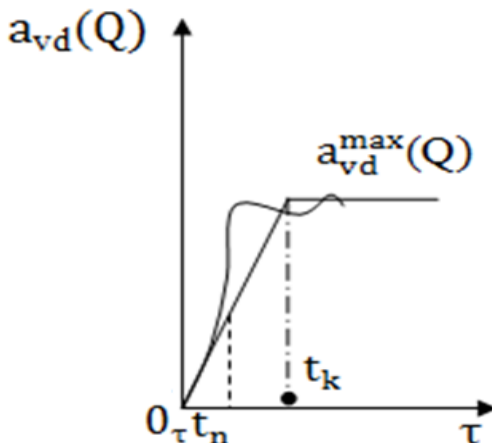


Рис. 5—Зависимости гидравлического сопротивления вихревого диода от времени в виртуальной системе координат.

$$Q_{vd}(L_{vd}, t) = Q_{vd+1}(0, t), \quad (1)$$

$$p_{vd}(L_{vd}, t) = \begin{cases} p_{vd+1}(0, 1) + a_{\min} Q_{vd+1}^2(0, 1), & \text{если } Q_{vd+1}(0, t) \geq 0; \\ p_{vd+1}(0, t) - a_{vd}(\tau) Q_{vd+1}^2(0, 1), & \text{если } Q_{vd+1}(0, t) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение (1) указывает на то, что мгновенные значения расхода до и после вихревого диода считаются одинаковым. Система уравнений (2) показывает, что прямое сопротивление вихревого диода при расчетах принимается равным  $a_{\min}$ , а для определения обратного сопротивления при каждом случае обратного течения жидкости, с учетом особенностей динамических процессов в вихревых диодах [1], вводятся локальные системы координат с осями координат —  $a_{vd}(\tau)$ , и осями абсцисс  $\tau$ . Момент времени  $\tau = 0$  определяется из условия —  $Q_{vd+1}(0, t) < 0$ .

Каждая такая локальная система координат существует в течении ограниченного интервала времени (3):

$$t_n \leq \tau \leq t_k. \quad (3)$$

Моменты  $t_n, t_k$  можно найти из условий (4):

$$Q_{vd+1}(0, t_n) < 0 \text{ и } Q_{vd+1}(0, t_n + t_k) \geq 0. \quad (4)$$

Таким образом, текущее значение величины сопротивления в локальной системе координат  $a_{vd}(\tau)$ , определяется либо из дифференциального уравнения

$$\frac{da_{vd}(\tau)}{d\tau} = a_{\min} \frac{D_{vd} - 1}{T_{vd}}, \quad (5)$$

а в случае, если сопротивления вихревого диода меньше максимально возможного, то из условий:

$$a_{vd}(\tau) < a_{\max} = a_{\min} D_{vd}, \quad (6)$$

$$\text{либо } a_{vd}(\tau) \equiv a_{\max}. \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения (5) может быть найдено следующим образом:

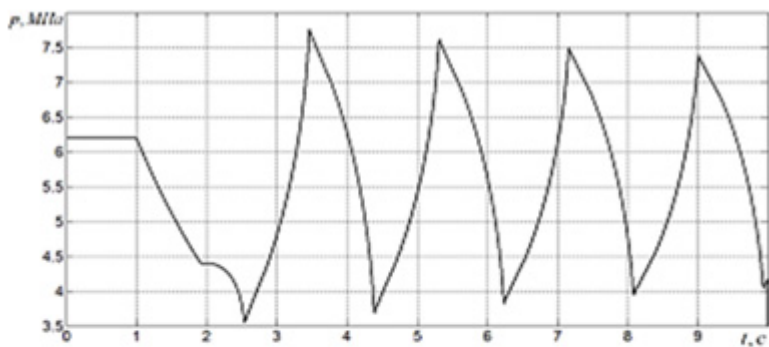
$$a_{vd}(\tau) = a_{vd}(\tau - \Delta t) + a_{\min} ((D_{vd} - 1) / T_{vd}) \Delta t.$$

Величина  $a_{vd}(\tau - \Delta t)$  известна из результатов расчетов, а  $a_{\min}$ ,  $D_{vd}$ ,  $T_{vd}$  могут быть найдены из зависимости гидравлического сопротивления вихревого диода от времени (рис. 2). Далее проверяется выполнение условия (6). Если оно не выполняется, то используется уравнение (7).

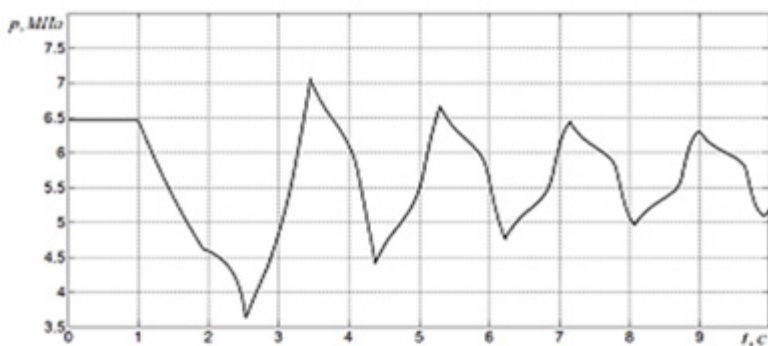
Таким образом, определяется текущее значение величины  $a_{vd}(\tau)$ , подставив которое в систему уравнений (1, 2) с учетом уравнений, описывающих состояние потока жидкости на прямой и обратной характеристиках [8], вычисляется состояние потока жидкости в точке установки вихревого диода.

Для следующего момента времени процедуры повторяется до тех пор, пока  $\tau \leq t_k$ . ( $\Delta t$  – шаг по времени в основной сетке характеристик при расчете гидравлического удара методом характеристик [8]).

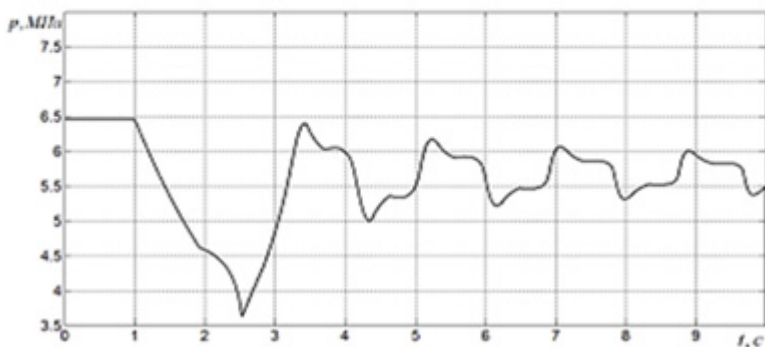
Из приведенной выше системы уравнений следует, что при выборе параметров вихревого диода для защиты какой-либо водоотливной установки от гидравлических ударов необходимо определить два параметра –  $T_{vd}$  и  $D_{vd}$ . Значимость влияния этих параметров на характер динамических процессов отражают графики, показанные на рис. 6. Из этих графиков видно, что вихревой диод с предельно достижимыми для устройств этого типа параметрами ( $T_{vd} = 0,5$  с,  $D_{vd} = 40$ ) с  $D_{\min} = 100$  мм обеспечивает эффективную защиту рассматриваемой водоотливной установки. Однако, создание такого диода проблематично. Кроме того, остаётся открытым вопрос о влиянии отклонения параметров вихревого диода на характеристики динамических процессов. Из рассмотренных выше уравнений следует, что величина относительного повышения давления при внезапном отключении насоса в защищенной вихревым диодом водоотливной установке зависит от диодности  $D_{vd}$  и времени разгона жидкости  $T_{vd}$  при определённом значении  $D_{\min}$ . На рис. 7 показаны линии уровня этой функции. Из этих графиков видно, например, что при увеличении времени разгона жидкости  $T_{vd}$  до 0,55 с и уменьшении диодности с 40 до 35 существенного изменения качества переходного процесса не происходит.



*a*



*б*



*в*

Рис. 6 – Изменение давления в начале трубопровода водоотливной установки *a* – гидравлический удар в незащищенном трубопроводе, *б* – гидравлический удар в защищенном трубопроводе  $T_{vd} = 0,9$  с,  $D_{vd} = 20$ , *в* – переходный процесс в защищенном трубопроводе  $T_{vd} = 0,5$  с,  $D_{vd} = 40$ .



нко А.П., Овсянников В.П., Оверко В.М., Оверко М.В. Предотвращение гидравлического удара расположением гидродиода на выходном участке вертикального трубопровода // Наукові праці Донецького державного технічного університету. – 2014. – Вип. (2) 28. – С. 226 – 233. 6. Кононенко А.П., Овсянников В.П., Оверко М.В. Анализ динамических процессов в параллельно включенных трубопроводах водоотливной установки // Наукові праці Донецького державного технічного університету. – 2010. – Вип. (18) 172. – С. 226 – 233. 7. Кононенко А.П., Овсянников В.П., Кулик С.И. Совершенствование гидроимпульсаторов изменением гидравлических параметров трубопровода / В.П.Овсянников,. – Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – №5 (979) – С. 119 – 123. 8. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах М.: Энергоиздат, 1981. – 248 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kononenko, A. P., and M. V. Overko. "Issledovanie dinamiki strujnogo dioda." *XIX mizhnarodna naukovu-tehnicna konferencija "Gidroaeromehanika v inzhenernij praktici."* Kirovograd. 2014. Print. 2. Overko, V. M., and V. P. Ovsjannikov. "Povyshenie nadezhnosti vodootlivnyh ustanovok, zashchishhajonnyh gidravlicheski diodami." *Naukovi praci Donec'kogo derzhavnogo tehnicnogo universitetu.* No. (18) 172. 2010. 226–233. Print. 3. Popov, V. M. *Rudnichnye vodootlivnye ustanovki.* Moscow: Nedra, 1972. Print. 4. Gejer, V. G., and G. M. Timoshenko. *Shahitnye ventiljatornye i vodootlivnye ustanovki. Uchebnik dlja vuzov.* Moscow: Nedra, 1987. Print. 5. Kononenko, A. P., et al. "Predotvrashhenie gidravlicheskogo udara raspolozheniem gidrodioda na vyhodnom uchastke vertikal'nogo truboprovoda." *Naukovi praci Donec'kogo derzhavnogo tehnicnogo universitetu.* No. (2) 28. 2014. 226–233. Print. 6. Kononenko, A. P., V. P. Ovsjannikov and M. V. Overko. "Analiz dinamicheskikh processov v paralel'no vkluchennyh truboprovodah vodootlivnoj ustanovki." *Naukovi praci Donec'kogo derzhavnogo tehnicnogo universitetu.* No. (18) 172. 2010. 226–233. Print. 7. Kononenko, A. P., V. P. Ovsjannikov and S. I. Kulik. "Sovershenstvovanie gidroimpulsatorov izmeneniem gidravlicheskih parametrov truboprovoda." *Visnyk NTU «HPI».* No. 5 (979). 2013. 119–123. Print. 8. Foks, D. A. *Gidravlichesij analiz neustanovivshegosja techenija v truboprovodah.* Moscow: Energoizdat, 1981. Print.

Поступила (received) 27.12.2014

УДК 621.65

**И.В. КРИШТОП**, аспирант, СумГУ, Сумы;  
**В.Ф. GERMAN**, канд. техн. наук, доц., СумГУ, Сумы;  
**А.Г. ГУСАК**, канд. техн. наук, доц., СумГУ, Сумы;  
**Л.М. САЛТАНОВА**, аспирантка, СумГУ, Сумы

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВИХРЕЙ НА ПРОЦЕССЫ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ В СВОБОДНОВИХРЕВОМ НАСОСЕ

Рассмотрено влияние поперечных вихрей на процесс передачи энергии жидкости в свободновихревом насосе. Представлены напорные и энергетические характеристики этих насосов при различных способах скругления торцов лопастей колеса, полученные экспериментальным путем. Приведены результаты численных исследований течения в межлопастных каналах, которые позволяют уточнить картину течения жидкости в проточной части насоса.

**Ключевые слова:** свободновихревой насос, поперечный вихрь, лопасть, межлопастной канал, численный эксперимент.

**Введение.** Свободновихревые насосы (СВН) являются одним из приоритетных видов насосного оборудования для перекачивания загрязненных жидкостей. Известно, что взаимодействие между рабочим колесом (РК) и камерой в СВН существенно влияет на характер течения перекачиваемой среды и характеристики насоса в целом. Сильное влияние оказывает меридианное течения жидкости, выходящего из колеса в камеру насоса, которое является причиной неравномерности потока как в области РК, так и в самой камере насоса.

Большинство исследований по влиянию геометрии проточной части СВН на его параметры, так и исследований рабочего процесса, проведены для конструктивной схемы насоса типа «Туго» (рис. 1). Особенностью данного насоса является утопленное в задней расточке корпуса РК. В этом случае камера насоса остается свободной от вращающихся частей колеса. Эта уникальная особенность данной конструкции насоса в дальнейшем определила и его область применения.

Рабочий процесс СВН исследовался многими учеными, результаты этих исследований описаны в работах [1 – 4]. Наличие сложного пространственного течения в проточной части СВН привело к многообразию гипотез рабочего процесса этих насосов. Проведем аналогию с центробежными насосами, передача энергии в которых происходит при непосредственном силовом взаимодействии протекающей жидкости с лопастями РК. При совершенной проточной части максимально возможный коэффициент полезного действия (КПД) рабочего процесса этих насосов в оптимальном режиме приближается к  $\eta_{pn} = 100 \%$ .

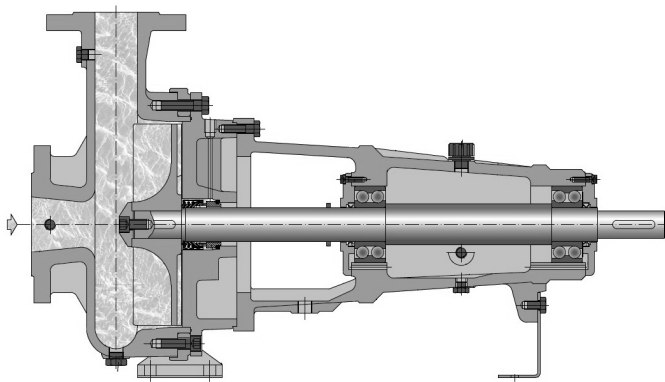


Рис. 1 – Конструкция свободновихревого насоса типа «Туго» [0].

Рабочий процесс СВН принципиально отличается от рабочего процесса центробежных насосов. В СВН процесс передачи энергии протекает в два этапа. На первом этапе, по аналогии с центробежными насосами, энергия передается от лопастей колеса протекающей через него жидкости. Далее, получившая приращение энергии жидкость, выходит из колеса и взаимодействует с потоком жидкости в свободной камере. Выходящий из колеса поток называют *меридианным* или *продольным вихрем*.

При смешении выходящего из колеса и входящего в камеру насоса потоков вся жидкость в камере закручивается в направлении движения колеса, образуя единую кольцевую или свободный вихрь. Затем под действием центробежных сил часть жидкости направляется в напорный патрубок, остальная возвращается к входу в рабочее колесо. Смешение потоков сопровождается интенсивным вихреобразованием. Поэтому большинство авторов в работах [3, 4, 5, 7] относят СВН к классу вихревых гидромашин, рабочий процесс которых непрерывно связан с большими потерями энергии.

Зависимость между повышением давления  $p_2 - p_1$  и потерями энергии  $\Delta h$  для вихревых насосов была получена С. С. Рудневым [13]:

$$(p_2 - p_1) / \rho g = \Delta h. \quad (1)$$

Исходя из анализа работ [1, 4, 5, 11], базовым в процессе передачи энергии как в СВН, так и в вихревом насосе является обмен количеством движения между продольным вихрем и потоком жидкости в свободной камере. Выходящие из рабочего колеса крупные вихри дробятся на более мелкие, их энергия переходит в энергию турбулентности и далее, вследствие вязкости, в тепловую энергию.

Исходя из закона сохранения момента количества движения и энергии в вихревом насосе, С. С. Руднев [13] ввел понятие КПД вихревого рабочего процесса  $\eta_{pn}$ :

$$\eta_{pn} = Q^* / S\omega, \quad (2)$$

где  $S = \int_f r df$  - статический момент площади  $f$  бокового канала;  $Q^*$  - расход жидкости;  $\omega$  - угловая скорость вращения РК насоса.

На основании данных работы [5] КПД вихревого рабочего процесса составляет  $\eta_{pn \max} = 0,6 - 0,63$ .

Максимальное значение КПД для насоса конструктивной схемы «Туго» на оптимальной режиме можно рассчитать по зависимости [10]:

$$\eta_{\max} = 1 / (-7,01 \cdot 10^{-3} \ln n_s + 1,97 / n_s + 302,42 \cdot 10^{-6} \cdot n_s), \quad (3)$$

где  $n_s$  - коэффициент быстроходности [0]:

$$n_s = (3,65 \cdot n \cdot \sqrt{Q}) / H^{3/4}, \quad (4)$$

где  $n$  - частота вращения насоса, об/мин;  $Q$  - подача насоса, м<sup>3</sup>/с;  $H$  - напор насоса, м.

Коэффициент полезного действия (КПД) современных СВН типа «Туго» находится в диапазоне  $\eta = 0,52 - 0,56$ . В СВН, кроме передачи энергии потоку жидкости за счет меридианных вихрей, в свободной камере не исключена возможность передачи энергии поперечными вихрями, возникающими за входной частью кромки лопастей колеса. Возникают эти вихри вследствие несоответствия углов натекания потока и установки лопастей колеса. Передача энергии поперечными вихрями (рис. 2) в вихревом насосе впервые была обнаружена Г. Березнюком и в дальнейшем описана О. В. Байбаковым [11].

Образовавшиеся поперечные вихри со временем отрываются от лопа-



стей колеса и уносятся потоком. Дополнительная передача энергии возможна только в случае, если поперечный вихрь будет унесен потоком непосредственно в свободную камеру. При этом, имея скорость больше, чем скорость жидкости в камере, он передает часть своей энергии (количество движения) жидкости в свободной камере. Если вихрь уносится внутрь РК, то дополнительная передача энергии отсутствует.

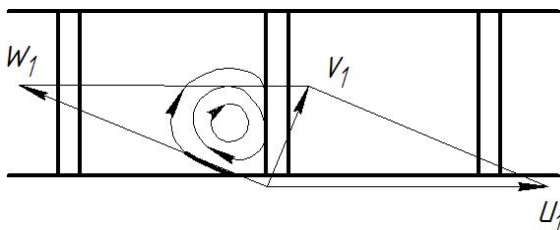


Рис. 2 – Поперечный вихрь.

**Основные результаты исследований.** Условия возникновения и отрыва поперечных вихрей, а также их влияние на характеристики насоса зависят от углов натекания потока, то есть от формы входной кромки лопастей РК. С целью проверки этого предположения выполнено ряд физических экспериментов. Эксперименты проводились на стенде кафедры прикладной гидроаэромеханики Сумского государственного университета (СумГУ). Экспериментальный насос (рис. 3) выполнен по консольной схеме компоновки и рассчитан на следующие параметры: подача  $Q = 60 \text{ м}^3/\text{ч}$ , напор  $H = 20$  м. Размеры насоса выбраны согласно методике [4].

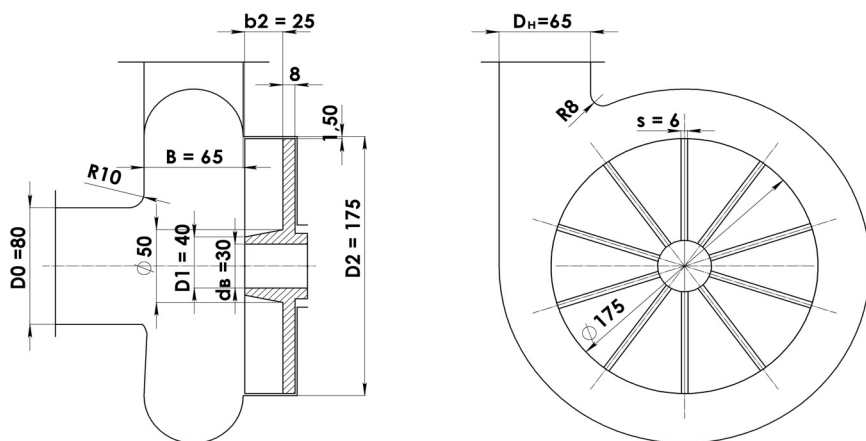


Рис. 3 – Экспериментальный СВН 60-20.

Исследования проводились на рабочих колесах с 10-ю радиальными лопастями. Угол установки лопастей колеса на выходе  $\beta = 90^\circ$ . Рабочая частота

та вращения насоса –  $n = 2250$  об/мин. Для данного РК поочередно выполнялись скругления его торцов со стороны, как свободной камеры, так и каналов колеса (рис. 4).

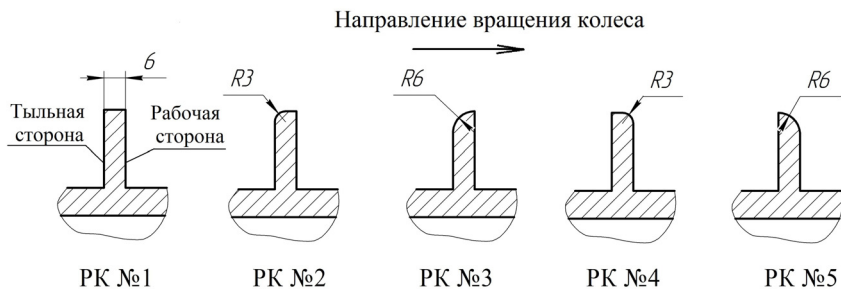


Рис. 4 – Варианты испытываемых рабочих колес.

Оценка погрешностей измерения параметров насоса проводилась согласно рекомендациям [6]. Предельная относительная погрешность измерения подачи составляла 0,4 %, напора – 0,7 %, мощности – 0,4 %, КПД – 0,9 %.

В процессе проведения физического эксперимента получены напорные и энергетические характеристики СВН типа «Туго», которые представлены на рис. 5.

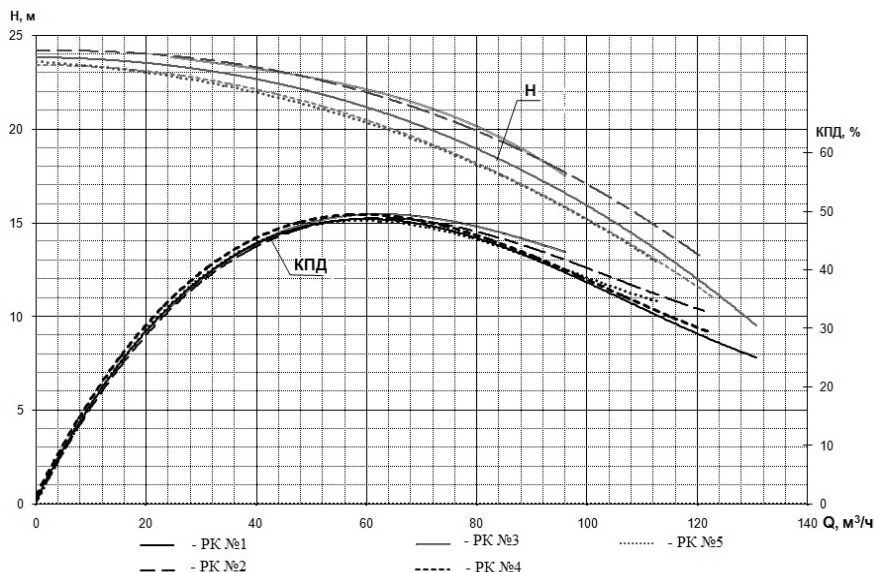


Рис. 5 – Характеристики СВН с различными вариантами скругления торцов лопастей РК.

Проанализировав полученные результаты, можно утверждать, что

скругление торцов лопастей колеса влияет на напорную и энергетическую характеристики насоса. Скругление лопастей с тыльной стороны (варианты колес № 2 и № 3) приводит к увеличению напора по отношению к исходному варианту РК № 1 на 3,6 %. При этом КПД для РК № 2 и № 3 увеличился на 3 %. В случае скругления острой кромки с рабочей стороны лопасти (РК № 4 и № 5), напор насоса снизился на 3,4 %. КПД для данных вариантов колес практически не изменился. При выполнении частичного (РК № 2) или полного (РК № 3) скругления острой кромки кривая КПД на подачах, больших оптимальной, имеет меньшую крутизну; это значит, что КПД насоса при работе на данных режимах будет выше. Это позволяет несколько расширить рабочую зону использования СВН. Скругление торцов лопастей полным или половинным радиусом толщины лопаток не оказывает заметного влияния на напорную характеристику насоса.

**Численное исследование срывающихся поперечных вихрей.** Расчетное исследование проводилось с помощью программного продукта ANSYS CFX университетской лицензии. Исследования [7, 8] указывают на хорошее совпадение результатов расчета насосов при помощи данного программного продукта с физическим экспериментом. Расчетная область насоса состояла из 2 подобластей: свободной камеры и рабочего колеса. Построение расчетной сетки выполнялось с помощью модуля CFX-Mesh в среде ICEM CFD. Расчетная сетка в свободной камере насчитывала 860 000 ячеек, в РК – 485 000 ячеек. При расчетах на входе в свободную камеру задавался расход, на выходе – статическое давление. Изменение положения границ входа и выхода не оказывало заметного влияния на результаты расчета.

Для замыкания *уравнений Рейнольдса* использована стандартная SST модель Менгера [9], которая обеспечивает повышенную точность при моделировании отрывных и закрученных течений.

Расчет течения проводился в нестационарной постановке. При этом шаг расчета был выбран таким, который позволял определять параметры течения при повороте РК на 5 градусов. Внутренние поверхности свободной камеры и РК не подвергались механической обработке. Высота неровностей шероховатости на всех твердых стенках проточной части насоса была принята равной 12,5 мкм.

В результате проведения численного эксперимента получены картины течения жидкости в межлопастных каналах колеса и свободной камере, которые представлены векторами относительной скорости (рис. 6). Развернутые картины течения в межлопастных каналах РК представлена в трех плоскостях: на входной части колеса –  $0,2R$ , в середине –  $0,5R$  и на выходе –  $0,8R$ .

Анализ полученной картины течения в межлопастных каналах РК СВН показывает, что для всех РК угол натекания потока на лопасти отличается от угла их установки, вследствие чего с тыльной стороны лопасти образуется поперечный вихрь, который закручен в сторону, противоположную движению выходящего из РК меридианного вихря. В исходном варианте РК № 1 образовавшийся поперечный вихрь направлен вглубь канала РК и не передает энергию потоку жидкости в свободной камере, а вызывает только допол-

нительное вихреобразование и потери энергии.

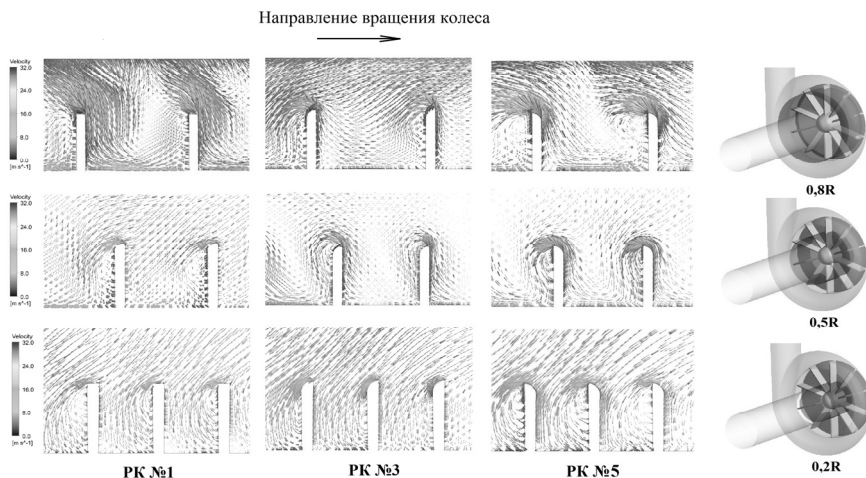


Рис. 6 – Картины течения жидкости в межлопастных каналах РК.

В РК № 3 скругление острой кромки с тыльной стороны лопасти благоприятно влияет на поток, входящий в межлопастные каналы РК. Образовавшийся при этом поперечный вихрь срывается с торцов лопастей колеса в свободную камеру. При этом в результате турбулентного обмена происходит дополнительная передача энергии потоку в свободной камере.

В случае скругления острой кромки лопастей с рабочей стороны (РК № 5), входящий в колесо поток захватывает поперечный вихрь и направляет его вглубь межлопастного канала РК. В этом случае поперечный вихрь не передает свою часть энергии, а приводит к дополнительным потерям.

**Выводы.** По результатам численного эксперимента СВН получены картины течения жидкости в межлопастных каналах РК, подтверждающие наличие поперечных вихрей с тыльной стороны лопастей колеса, которые оказывают влияние на процесс передачи энергии в СВН.

Проведенный физический эксперимент показал, что в случае скругления острых кромок с тыльной стороны лопастей колеса, образовавшиеся поперечные вихри направляются в свободную камеру и передают часть своей энергии. При этом происходит увеличение напора на 3,6 %, а КПД – на 3 %. Скругление острых кромок с рабочей стороны лопастей негативно влияет на напорную характеристику СВН, поскольку образовавшиеся в процессе работы поперечные вихри, устремляющиеся в межлопастные каналы колеса и не передают свою энергию, а только увеличивают долю потерь на вихреобразование. В СВН с такими колесами происходит снижение напора на 3,4 %.

**Список литературы:** 1. Пресман Л.С. Смерчевые (свободно-вихревые) насосы / Л.С. Пресман // Труды ВНИИГидромаша. – 1967. – № 36. – С. 46 – 65. 2. Ohba H. A Study of Internal Flow and Performance of a Vortex Pump. Part 1. Theoretical Analysis / H. Ohba, Y. Nakashima, K. Shiramoto // Bul-

letin of the JSME. – 1983. – Vol. 26, No. 216. – P. 999 – 1006. **3.** Grabow G. Einfluss der Beschau felung auf das Kennlinien Verhalten von Freistrompumpen / G. Grabow // Pumpen und Verdichter. – 1972. – No. 2. – S. 18 – 21. **4.** Герман В.Ф., Свободно-вихревые насосы: учеб. пособие / В.Ф. Герман, И.А. Ковалев, А.И. Котенко; под общ. ред. А.Г. Гусака. – 2-е изд., доп. и перераб. – Сумы: Сумской государственный университет, – 2013. – 159 с. **5.** Евтушенко А.А. Основы теории рабочего процесса вихревых гидромашин // Технологические системы. – 2002. – №2 (13). – С. 110 – 113. **6.** Яременко О.В. Испытания насосов: справочное пособие. – М.: Машиностроение. – 1976. – 225 с. **7.** Волков Н.И., Кочевский А.Н. Расчет внутренних течений жидкости в каналах с помощью пакета CFX // Вісник СумДУ: технічні науки. – Суми : СумДУ, – № 12 (84). – 2005. – С. 7 – 14. **8.** Кочевский А.Н. Возможности моделирования течений жидкости и газа с помощью современных программных продуктов // Вісник СумДУ: технічні науки. – Суми: СумДУ, – № 13 (72). – 2004. – С. 5 – 20. **9.** CFX-5 Solver Theory, – 2004. – 261 p. **10.** Соляник В.О. Робочий процес і енергетичні якості вільновихрових насосів типу «ТУРО»: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.05.17 / В.О. Соляник. – Суми, 1999. – 19 с. **11.** Байбаков О.В. Вихревые гидравлические машины. – М.: Машиностроение, 1981. – 197 с. **12.** Электронный ресурс. – Режим доступа: <http://www.pompegarbarino.com>. **13.** Руднев С.С. Основы рабочего процесса вихревых насосов // Труды ВНИИГидромаша. – 1972. – № 43. – С. 3 – 9. **14.** Михайлов А.К., Малюшенко В.В. Лопастные насосы. Теория, расчет и конструирование. – М.: Машиностроение, – 1977. – 288 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Presman, L. S. "Smerchevye (svobodno-vihrevye) nasosy." *Trudy VNIIGidromasha*. No. 36. 1967. 46–65. Print. **2.** Ohba, H., Y. Nakashima and K. Shiramoto. "A Study of Internal Flow and Performance of a Vortex Pump. Part 1. Theoretical Analysis." *Bulletin of the JSME*. Vol. 26. No. 216. 1983. 999–1006. Print. **3.** Grabow, G. "Einfluss der Beschau felung auf das Kennlinien Verhalten von Freistrompumpen." *Pumpen und Verdichter*. No. 2. 1972. 18–21. Print. **4.** German, V. F., I. A. Kovalev and A. I. Kotenko. *Svobodno-vihrevye nasosy: ucheb. posobie*. Ed. A. G. Gusak. Sumy: Sumskoj gosudarstvennyj universitet, 2013. Print. **5.** Evtushenko, A. A. "Osnovy teorii rabocheho processa vihrevykh gidromashin." *Tehnologicheskie sistemy*. No. 2 (13). 2002. 110–113. Print. **6.** Jaremenko, O. V. *Ispytanija nasosov: spravocnoe posobie*. Moscow: Mashinostroenie, 1976. Print. **7.** Volkov, N. I., and A. N. Kochevskij. "Raschet vnutrennih techenij zhidkosti v kanalah s pomoshh'ju paketa CFX." *Visnik SumDU. Ser.: tehnicni nauky*. No. 12 (84). Sumy: SumDU. 2005. 7–14. Print. **8.** Kochevskij, A. N. "Vozmozhnosti modelirovanija techenij zhidkosti i gaza s pomoshh'ju sovremennykh programmykh produktov." *Visnik SumDU. Ser.: tehnicni nauky*. No. 13 (72). Sumy: SumDU. 2004. 5–20. Print. **9.** *CFX-5 Solver Theory*. 2004. Print. **10.** Soljanik, V. O. *Robochyj proces i energetychni jakosti vil'novykhrovnykh nasosiv typu «TURO»*. Avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk. Sumy, 1999. Print. **11.** Bajbakov, O. V. *Vihrevye gidravlicheskie mashiny*. Moscow: Mashinostroenie, 1981. Print. **12.** Garbarino. Site. Web. 10 Desember 2014 <<http://www.pompegarbarino.com>>. **13.** Rudnev, S. S. "Osnovy rabocheho processa vihrevykh nasosov." *Trudy VNIIGidromasha*. No. 43. 1972. 3–9. Print. **14.** . Mihajlov, A. K., and V. V. Maljushenko. *Lopastnye nasosy. Teorija, raschet i konstruirovanie*. Moscow: Mashinostroenie, 1977. Print.

*Поступила (received) 02.12.2014*

УДК 539.3

**Л.В. КУРПА**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
**Т.В. ШМАТКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

## АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

© Л. В. Курпа, Т. В. Шматко, 2015

Для дослідження геометрично-нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною геометричною формою пропонується метод, що суттєво базується на використанні теорії  $R$  – функцій. Математична постановка задачі виконана в рамках уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації зсуву. Зведення вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь виконується в декілька етапів. Запропонований алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL, апробовано на тестових задачах та проілюстровано на прикладах оболонок зі складною формою плану.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали, геометрично-нелінійні коливання, теорія  $R$  – функцій, пологі оболонки зі складною формою плану.

**Вступ.** Широке застосування сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), які визначаються високою міцністю при наявності високотемпературних середовищ, спонукало науковців розробляти ефективні методи розрахунку елементів конструкцій, виготовлених з таких матеріалів. До актуальних питань, які виникають при експлуатації функціонально-градієнтних (ФГ) об'єктів, можна віднести дослідження вільних та вимушених коливань при наявності великих амплітуд, тобто при геометрично-нелінійному деформуванні об'єкту.

**Аналіз останніх досліджень.** Слід відзначити, що за останній час одержано досить великі досягнення в розв'язанні цього питання [5 – 10]. Але практично відсутні роботи, в яких було б проаналізовано коливання ФГ пологих оболонок зі складною формою плану. Раніше в роботах [2, 3] для дослідження геометрично нелінійних коливань багатошарових пологих оболонок та пластин було розроблено метод, що базується на використанні теорії  $R$  – функцій (RFM) [1, 4] та варіаційних методах. В даній роботі запропоновано розвинення цього підходу для розв'язання задачі про геометрично-нелінійні коливання ФГ пологих оболонок практично довільної геометричної форми і різних видів граничних умов.

**Математична постановка.** Розглянемо пологую оболонку, яка виготовлена із суміші металу та кераміки, враховуючи, що об'ємні частки кераміки або металу змінюються безперервно вздовж товщини за степеневим законом

$$V = \left( (2z + h) / 2h \right)^k,$$

де  $h$  – товщина оболонки;  $k$  – показник ступеня об'ємної частки матеріалу,  $(0 \leq k \leq \infty)$ .

Механічні властивості суміші з двох складових визначаються наступним чином:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (1)$$

Вираз (1) являє собою загальну формулу для визначення модуля пружності  $E$ , коефіцієнта Пуассона  $\nu$  і щільності  $\rho$  композиту,  $P_c, P_m$  – відповідні характеристики кераміки і металу.

Для дослідження нелінійних коливань ФГ пологих оболонок використано уточнену теорію першого порядку (типу теорії Тимошенка). Згідно цієї

теорії відносні деформації розтягу та зсуву  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T$  в серединній площині та відносні деформації згину та крутіння  $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$  задано наступними виразами:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND}, \quad (i, j = 1, 2), \\ \varepsilon_{11}^L &= u_{,x} + w/R_x, \quad \varepsilon_{22}^L = v_{,y} + w/R_y, \quad \varepsilon_{12}^L = u_{,y} + v_{,x}; \\ \varepsilon_{13} &= w_{,x} + \psi_x, \quad \varepsilon_{23} = w_{,y} + \psi_y, \quad \varepsilon_{11}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12}^{ND} = w_{,x} w_{,y}; \\ \chi_{11} &= \psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = \psi_{x,y} + \psi_{y,x};\end{aligned}$$

де  $u, v$  та  $w$  – переміщення оболонки в серединній площині в напрямках осей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно;  $\psi_x, \psi_y$  – кути повороту нормалі до серединної поверхні відносно осей  $Oy$  та  $Ox$ .

Надалі будемо розглядати матеріали, для яких коефіцієнт Пуассона не залежить від температури та є однаковим для кераміки і металу, тобто  $\nu_m = \nu_c$ . В цьому випадку зусилля  $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$  та моменти  $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$  в рамках обраної теорії визначаються як:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1-\nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}E_1 &= \left( E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)}; \\ E_3 &= \left( \frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.\end{aligned}$$

Щільність композиту  $\rho$  визначається за формулою:

$$\rho = (\rho_m + (\rho_c - \rho_m)/(k+1)) h.$$

Потенціальна та кінетична енергія визначаються наступним чином

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x(w_{,x} + \psi_x) + Q_y(w_{,y} + \psi_y)) d\Omega;\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \psi_{x,t} + v_{,t} \psi_{y,t}) + I_2 (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) dx dy,$$

де

$$I_0 = \left( \rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m) k}{2(k+1)(k+2)} h^2;$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz = \left( \frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Застосовуючи *принцип Остроградського-Гамільтона*, можна одержати рівняння руху, яке доповнюється відповідними граничними умовами.

**Метод розв'язання.** Для вирішення поставленої проблеми будемо використовувати підхід, запропонований у роботі [2]. Для реалізації цього підходу стосовно ФГ пологих оболонок, насамперед, необхідно вирішити лінійну задачу про вільні коливання пологої оболонки. Алгоритм розв'язання лінійної задачі за допомогою методу *R-функцій* (RFM) було описано в роботах [1, 3, 4]. Для вирішення нелінійної задачі представимо невідомі функції в наступному вигляді:

$$w = y(t) w_1^{(c)}(x, y), \quad \psi_x = y(t) \psi_{x1}^{(c)}(x, y), \quad \psi_y = y(t) \psi_{y1}^{(c)}(x, y), \quad (3)$$

$$u = y(t) u_1^{(c)}(x, y) + y^2(t) u_{11}, \quad v = y(t) v_1^{(c)}(x, y) + y^2(t) v_{11},$$

де  $w_1^{(c)}(x, y)$ ,  $u_1^{(c)}(x, y)$ ,  $v_1^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{x1}^{(c)}(x, y)$ ,  $\psi_{y1}^{(c)}(x, y)$  – власні функції лінійної задачі, а коефіцієнт  $y(t)$  залежить від часу.

Слід звернути увагу на те, що функції  $u_{11}, v_{11}$  повинні задовольняти наступній системі диференціальних рівнянь:

$$L_{11}(u_{11}) + L_{12}(v_{11}) = -N I_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}),$$

$$L_{21}(u_{11}) + L_{22}(v_{11}) = -N I_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \quad (4)$$

де

$$N I_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_{1j}^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{11} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{12} w_1^{(c)},$$

$$N I_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{12} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{22} w_1^{(c)}.$$

Оператори  $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$  в рівняннях (4) визначаються як:

$$L_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( ( )_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} ( )_{,yy} \right);$$

$$L_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} ( )_{,xx} + ( )_{,yy} \right); \quad L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1-\nu)} ( )_{,xy}.$$

Система рівнянь (4) може бути вирішена за допомогою RFM практично для довільної форми плану і різних видів крайових умов. Підставляючи вирази (3) для функцій в рівняння руху та застосовуючи *метод Бубнова-Гальоркіна*, отримаємо наступну систему нелінійних звичайних диферен-



ціальних рівнянь щодо невідомих функцій  $y(t)$  :

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \beta y^2(t) + \gamma y^3(t) = 0. \quad (5)$$

Вирази для коефіцієнтів  $\beta, \gamma$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,yy} + 2N_{12}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xy} + \right. \\ & \left. + M_{11}^{(NL)}_{,xx} + M_{22}^{(NL)}_{,yy} + 2M_{12}^{(NL)}_{,xy} - k_1 N_{11}^{(NL)} - k_2 N_{22}^{(NL)} \right) w_1^{(c)} d\Omega; \\ \gamma = & -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,yy} + \right. \\ & \left. + 2N_{12}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xy} \right) w_1^{(c)} d\Omega, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} N^{(L)} = & \left\{ N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)} \right\}^T = 1/(1-\nu^2) [C] \left( E_1 \varepsilon^{(L)} + E_2 \chi \right); \\ N^{(NL)} = & \left\{ N_{11}^{(NL)}; N_{22}^{(NL)}; N_{12}^{(NL)} \right\}^T = \frac{E_1}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)}; \\ M^{(NL)} = & \left\{ M_{11}^{(NL)}; M_{22}^{(NL)}; M_{12}^{(NL)} \right\}^T = \frac{E_3}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)}; \\ \varepsilon^{(L)} = & \varepsilon^{(L)}(u_1^{(c)}, v_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_1^{(c)})_{,x} + k_1 w_1^{(c)}; (v_1^{(c)})_{,y} + k_2 w_1^{(c)}; ((u_1^{(c)})_{,y} + (v_1^{(c)})_{,x}) \right\}^T; \\ \varepsilon^{(NL)} = & \varepsilon^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_{11})_{,x} + \frac{1}{2} ((w_1^{(c)})_{,x})^2; (v_{11})_{,y} + \frac{1}{2} ((w_1^{(c)})_{,y})^2; \right. \\ & \left. (u_{11})_{,y} + (v_{11})_{,x} + (w_1^{(c)})_{,x} (w_1^{(c)})_{,y} \right\}^T. \end{aligned}$$

Матриця  $C$  має такий вигляд:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи (5) може бути знайдено за допомогою різних наближених методів. У цій роботі був використаний *метод Рунге-Кутта*.

**Чисельні результати.** З метою перевірки вірогідності запропонованого підходу розглянемо рішення деяких тестових завдань. В якості ФГМ виберемо комбінацію  $Al / Al_2O_3$ . Механічні характеристики для матеріалів, що становлять такий сплав, представляються наступними параметрами [6, 8]:

$$\begin{aligned} Al: \quad E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,3, \quad \rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3; \\ Al_2O_3: \quad E_c = 380 \text{ GPa}; \quad \nu_c = 0,3; \quad \rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

**Аналіз лінійних коливань. Задача 1.** Розглянемо задачу про коливання ФГ пологої оболонки двоякої кривини з квадратним планом. Припустимо, що товщина оболонки дорівнює  $a/h = 5$ . Граничні умови відповідають умовам шарнірного закріплення, тобто мають наступний вигляд:

$$v = w = M_x = \psi_y = N_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm(a/2);$$

$$u = w = M_y = \psi_x = N_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm(a/2).$$

В якості структури розв'язку [4] поставленої задачі виберемо наступні вирази:

$$u = f_2 \Phi_1, \quad v = f_1 \Phi_2, \quad w = \omega \Phi_3, \quad \psi_x = f_2 \Phi_4, \quad \psi_y = f_1 \Phi_5,$$

де

$$\omega(x, y) = (f_1 f_2) / (f_1 + f_2), \quad f_1 = 0,5a(a^2 - x^2) \geq 0, \quad f_2 = 0,5b(b^2 - y^2) \geq 0;$$

$\Phi_i, i = \overline{1, 5}$  – невизначені компоненти, які представляються у вигляді розкладання в усічені ряди з якої-небудь повної системи функцій  $\{\varphi_k^{(i)}\}$ :

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{k=N_i} a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

Таблиця 1. Порівняння власних частот  $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$  ФГ ( $Al / Al_2O_3$ ) оболонок з квадратним планом з результатами роботи [8]

| $a/h = 5$ |         |       |         |           |         |         |          |              |
|-----------|---------|-------|---------|-----------|---------|---------|----------|--------------|
| $b/R_y$   | $a/R_x$ | Метод | $k = 0$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 4$ | $k = 10$ | $k = \infty$ |
| 0         | 0       | RFM   | 0,211   | 0,180     | 0,162   | 0,139   | 0,132    | 0,108        |
|           |         | [8]   | 0,212   | 0,182     | 0,164   | 0,138   | 0,131    | 0,108        |
| 0,5       | 0,5     | RFM   | 0,2297  | 0,196     | 0,177   | 0,150   | 0,141    | 0,117        |
|           |         | [8]   | 0,2301  | 0,200     | 0,182   | 0,151   | 0,142    | 0,117        |
| 1         | 1       | RFM   | 0,275   | 0,237     | 0,215   | 0,177   | 0,164    | 0,140        |
|           |         | [8]   | 0,274   | 0,243     | 0,223   | 0,186   | 0,169    | 0,139        |
| 0         | 0,5     | RFM   | 0,214   | 0,183     | 0,165   | 0,141   | 0,133    | 0,109        |
|           |         | [8]   | 0,215   | 0,186     | 0,168   | 0,141   | 0,133    | 0,110        |
| 0         | 1       | RFM   | 0,223   | 0,191     | 0,173   | 0,146   | 0,137    | 0,114        |
|           |         | [8]   | 0,224   | 0,194     | 0,177   | 0,148   | 0,138    | 0,114        |
| -0,5      | 0,5     | RFM   | 0,205   | 0,175     | 0,158   | 0,135   | 0,128    | 0,040        |
|           |         | [8]   | 0,206   | 0,177     | 0,160   | 0,135   | 0,127    | 0,105        |
| -1        | 1       | RFM   | 0,191   | 0,163     | 0,148   | 0,126   | 0,119    | 0,097        |
|           |         | [8]   | 0,192   | 0,165     | 0,149   | 0,125   | 0,118    | 0,098        |

У цій роботі в якості такої системи обрані степеневі поліноми. Після проведення обчислювального експерименту було встановлено, що збіжність

результатів, принаймні, в третьому знаку, настає при збереженні 9-го ступеня для поліномів  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4, \Phi_5$  і 10-го ступеня для полінома  $\Phi_3$ . Результати, представлені нижче, були отримані при зберіганні саме такої кількості координатних функцій. В табл. 1 представлено порівняння власних частот для пологих ФГ ( $Al / Al_2O_3$ ) оболонок двоякої кривини з результатами роботи [8] для товщини  $a/h = 5$ .

**Задача 2.** Тестування розробленого програмного забезпечення було виконано також для повністю вільних пластин і пологих оболонок з еліптичною формою плану. Геометричні параметри досліджуваної оболонки обрані наступними:

$$a/b = 2, h/2a = 0.01,$$

де  $a$  і  $b$  – піввіссі еліпса. Механічні характеристики розглянутого сплаву  $Al / Al_2O_3$  такі ж, як і в роботі [6]. Враховуючи симетрію задачі, інтегрування виконувалося тільки по 1/4 області. У табл. 2 представлено порівняння перших трьох власних частот  $\Omega_L = \lambda ab \sqrt{\rho_m h / D_m}$ , відповідних симетрично-симетричним формам коливань, для різних значень показника  $k$  об'ємної частки кераміки. Величина  $D_m$  визначається як

$$D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu_{mm}^2).$$

Таблиця 2. Порівняння значень параметра  $\Omega_L = \lambda ab \sqrt{\rho_m h / D_m}$  для основних частот еліптичних в плані ФГ ( $Al / Al_2O_3$ ) повністю вільних оболонок з результатами роботи [6]

| $a/R_x = 0$   |      |         |        |         |       |          |       |           |       |
|---------------|------|---------|--------|---------|-------|----------|-------|-----------|-------|
| $a/R_y$       | мода | $k = 1$ |        | $k = 4$ |       | $k = 10$ |       | $k = 100$ |       |
| -1;<br>0;1    |      | RFM     | [6]    | RFM     | [6]   | RFM      | [6]   | RFM       | [6]   |
|               | 1    | 10.00   | 10.17  | 8.688   | 8.839 | 8.346    | 8.492 | 7.042     | 7.164 |
|               | 2    | 41.52   | 42.27  | 36.06   | 36.73 | 34.63    | 35.28 | 29.22     | 29.77 |
|               | 3    | 47.14   | 47.93  | 40.94   | 41.65 | 39.32    | 39.99 | 33.18     | 33.27 |
| $a/R_x = 0.2$ |      |         |        |         |       |          |       |           |       |
| -1            | 1    | 11.94   | 12.17  | 10.21   | 10.41 | 9.626    | 9.811 | 8.187     | 8.342 |
|               | 2    | 46.92   | 47.76  | 40.15   | 40.88 | 37.94    | 38.65 | 32.23     | 32.83 |
|               | 3    | 49.50   | 50.35  | 42.72   | 43.47 | 40.76    | 41.47 | 34.49     | 35.09 |
| 0             | 1    | 10.12   | 10.30  | 8.786   | 8.945 | 8.421    | 8.579 | 7.110     | 7.240 |
|               | 2    | 47.21   | 48.037 | 40.91   | 41.67 | 38.64    | 39.36 | 32.45     | 33.46 |
|               | 3    | 48.09   | 48.88  | 41.09   | 41.79 | 39.58    | 40.06 | 33.24     | 33.81 |
| 1             | 1    | 10.51   | 10.70  | 9.090   | 9.262 | 8.881    | 8.848 | 7.343     | 7.481 |
|               | 2    | 47.89   | 48.72  | 41.42   | 42.18 | 39.35    | 40.11 | 33.41     | 34.04 |
|               | 3    | 49.51   | 50.38  | 42.20   | 42.95 | 40.00    | 40.69 | 33.90     | 34.48 |

**Аналіз нелінійних коливань. Задача 1.** Тестування запропонованого підходу для розв'язку нелінійних задач розглянемо на прикладі жорстко закріпленої сферичної оболонки, яка має еліптичний план. В роботі [3] ця задача була вирішена тільки в лінійній постановці та виконано порівняння для двох

сплавів:

**FG1** ( $Al / Al_2O_3$ ):

$$E_m / E_c = 70 / 380 \text{ GPa}; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 \text{ kg/m}^3; \quad (6)$$

**FG2** ( $Al / ZrO_2$ ):

$$E_m / E_c = 70 / 151 \text{ GPa}; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 \text{ kg/m}^3. \quad (7)$$

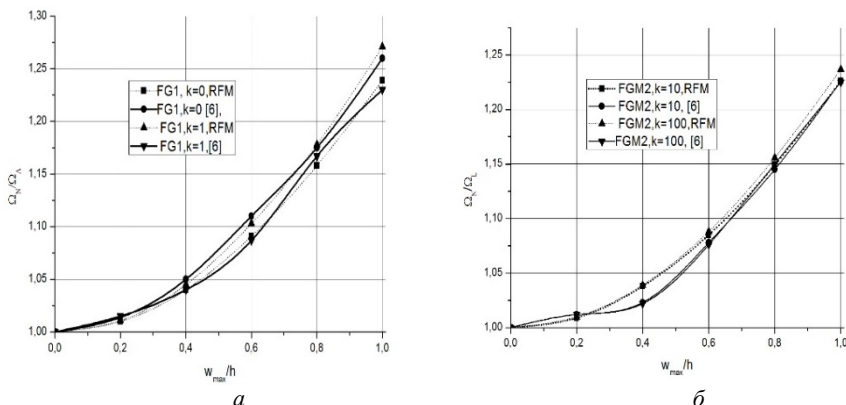


Рис. 1 – Порівняння скелетних кривих для сферичної оболонки з еліптичним планом з результатами роботи [6]:  
а – суміш FG1; б – суміш FG2.

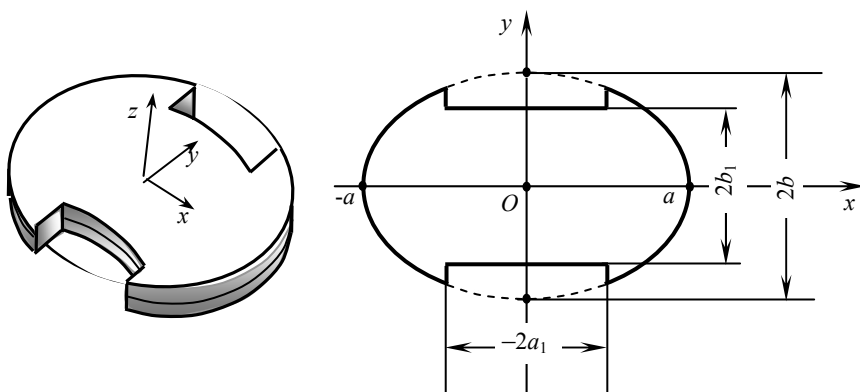


Рис. 2 – Геометрична форма сферичної оболонки та її плану.

Геометричні параметри досліджуваної оболонки були обрані наступними:

$$R_x / R_y = 1, \quad a / b = 2, \quad h / 2a = 0,1, \quad 2a / R_x = 0,2. \quad (8)$$

На рис. 1, а представлені результати дослідження геометрично нелінійних коливань цієї оболонки для суміші FG1 і двох значень параметра  $k = 0, k = 1$ .

На рис. 1, б представлені результати для суміші FG2 та значень параметра  $k = 10, k = 100$ . Порівняння скелетних кривих з результатами роботи [6] підтверджує достовірність запропонованого підходу. В рамках точності графіка отримані результати практично збігаються. Максимальне відхилення не перевищує 1.5%.

**Задача 2.** Для ілюстрації можливостей розробленого підходу розглянемо аналогічну задачу для сферичних оболонок, що мають план, представлений на рис. 2. Передбачається, що оболонка повністю жорстко закріплена. Для побудови системи координатних функцій будемо використовувати наступні структурні формули:

$$u = \omega\Phi_1, \quad v = \omega\Phi_2, \quad w = \omega\Phi_3, \quad \psi_x = \omega\Phi_4, \quad \psi_y = \omega\Phi_5.$$

Рівняння границі області  $\omega = 0$  побудуємо за допомогою теорії  $R$ -функцій:

$$\omega = (\bar{f}_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 f_3,$$

де  $f_1, f_2, f_3$  визначають наступні множини точок:

$$f_1 = ((a_1^2 - x^2)/2a_1) \geq 0; \quad f_2 = ((b_1^2 - y^2)/2b_1) \geq 0; \quad f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \geq 0.$$

Символи  $\wedge_0, \vee_0$  визначають  $R$ -операції:  $R$ -кон'юнкцію та  $R$ -диз'юнкцію відповідно [3]. Невизначені компоненти в структурних формулах апроксимувалися з урахуванням симетрії поставленого завдання щодо осей  $Ox$  та  $Oy$ , а саме:

$$\Phi_1, \Phi_4: x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, x^3y^4, xy^6, \dots;$$

$$\Phi_2, \Phi_5: y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, x^2y^5, y^7, \dots;$$

$$\Phi_3: 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \dots.$$

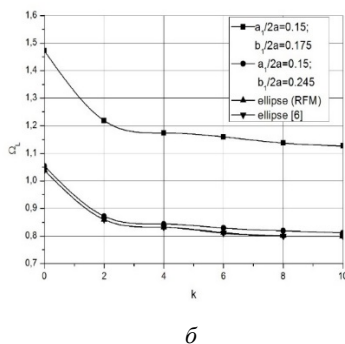
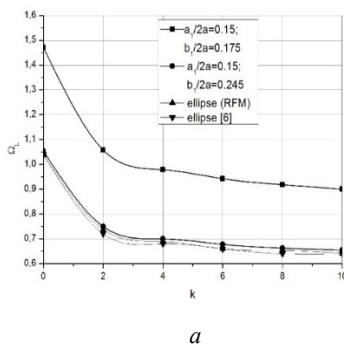


Рис. 3 – Залежність лінійної частоти від показника  $k$  – об'ємної долі кераміки:  $a$  – для суміші FG1;  $b$  – для суміші FG2.

Інтегрування виконувалося по  $1/4$  області. Результати розв'язку лінійної задачі для матеріалу FG1 представлені на рис. 3, а у вигляді залежностей

лінійної частоти  $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$  від значення показника  $k$  – об’ємної доли кераміки.

На рис. 3, б представлені залежності власних частот від параметра  $k$  для тієї ж оболонки, але для матеріалу FG2. При цьому було прийнято, що  $b_1 / 2a = 0.175$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ . Поряд з такими значеннями було розв’язано задачу для відношень  $b_1 / 2a = 0.245$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ . В останньому випадку геометрична форма плану (рис. 2) прямує до еліптичної і результати можна порівняти з результатами роботи [6]. З наведених графіків видно, що вони практично співпадають, що підтверджує вірогідність розв’язання лінійної задачі.

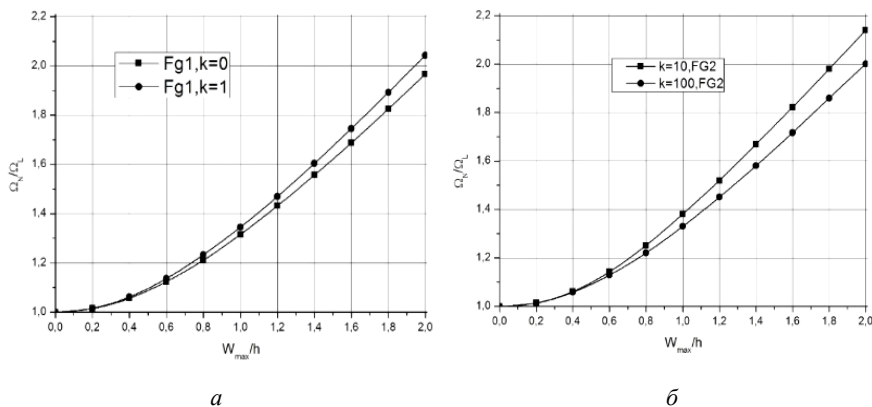


Рис. 4 – Скелетні криві для пологої сферичної оболонки:  
а – для суміші G1; б – для суміші FG2.

На рис. 4, а зображені скелетні криві для пологої сферичної жорстко зашкеленої оболонки, виготовленої з суміші FG1, для показників параметра  $k = 0; 1$ . Геометричні параметри співпадають з параметрами, обраними для лінійної задачі (6) та  $b_1 / 2a = 0.175$ ;  $a_1 / 2a = 0.15$ , На рис. 4, б наведено аналогічні залежності для досліджуваної оболонки, виготовленої з матеріалу FG2.

В обох випадках криві мають жорсткий характер, монотонно зростають, що характерно для помірно товстих жорстко закріплених оболонок ( $h / 2a = 0,1$ ).

При проведенні обчислювального експерименту було встановлено, що при прямуванні відношення  $b_1 / 2a \rightarrow 0,25$ , тобто,  $b_1 / b \rightarrow 1$ , скелетні криві збігаються з відповідними кривими для еліптичного плану, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

**Висновки.** Таким чином, в роботі запропоновано метод дослідження геометрично нелінійних вільних коливань функціонально-градієнтних пологих

оболонки зі складною формою плану. Розглянутий метод базується на використанні теорії  $R$  – функцій, *варіаційному методі Рітца, процедури Бубнова-Гальоркіна та методі Рунге-Кутта*. Для уточненої теорії пологих оболонок 1-го порядку запропонований підхід реалізовано в рамках системи POLE-RL. Проведене тестування для оболонок, що спираються на квадратний і еліптичний план, доводить достовірність та ефективність запропонованого методу, ілюстрація якого виконана для оболонок зі складною формою плану. В майбутньому розроблений метод планується застосовувати не тільки для граничних умов, що відповідають жорстко закріпленім ФГ оболонкам, а і для інших, в тому числі змішаних. Крім цього, цікаво було б застосувати розроблений підхід для математичної постановки задачі в змішаній формі, а не тільки в переміщеннях.

**Список літератури:** 1. Курпа Л.В. Метод  $R$  – функцій для рішення лінійних задач изгиба и колебаний пологих оболочек // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с. 2. Курпа Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51. №2. – С. 75 – 85. 3. Курпа Л.В., Шматко Т.В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып.8(54). – С. 77 – 85. 4. Рвачев В.Л. Теория  $R$  – функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с. 5. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells// Journal of Sound and Vibration. – 2011. – 330. – P. 1432 – 1454. 6. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures. – 2010. – 92. – P. 2573 – 2581. 7. Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int J Mech Sci. – 1999. – 41. – P. 309 – 324. 8. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // Composite Structures. – 2008. – 84. – P. 132 – 46. 9. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates // International Journal for numerical methods in engineering. – 2000. – N 47. – P.663 – 684. 10. Shen H.S. Functionally Graded Materials of Plates and Shells. – Florida: CPC Press. – 2009. – 266 p.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kurpa, L. V. *Metod  $R$  – funkcij dlja reshenija linejnyh zadach izgiba i kolebanij pologih obolochek*. Kharkov, NTU «KhPI». 2009. Print. 2. Kurpa, L. V. "Nelinejnye svobodnye kolebanija mnogoslajnyh pologih obolochek simmetrichnogo stroenija so slozhnoj formoj plana." *Mat. metody ta fiz.-meh. polja*. Vol. 51. No. 2. 2008. 75–85. Print. 3. Kurpa, L. V., and T. V. Shmatko. "Svobodnye kolebanija funkcional'no-gradientnyh pologih obolochek so slozhnoj formoj plana." *Teoret. i prikladnaja mehanika*. No. 8 (54). 2014. 77–85. Print. 4. Rvachev, V. L. *Teorija  $R$  – funkcij i nekotorye ejo prilozhenija*. Kiev: Nauk.dumka, 1982. Print. 5. Alijani, F., et al. "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells." *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 330. 2011. 1432–1454. Print. 6. Chorfi, S. M., and A. Houmat. "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form." *Composite Structures*. No. 92. 2010. 2573–2581. Print. 7. Loy, C. T, K. Y. Lam and J. N. Reddy. "Vibration of functionally graded cylindrical shells." *Int J Mech Sci*. No. 41. 1999. 309–324. Print. 8. Matsunaga, H. "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory." *Composite Structures*. No. 84. 2008. 132–46. Print. 9. Reddy, J. N. "Analysis of functionally graded plates." *International Journal for numerical methods in engineering*. No. 47. 2000. 663–684. Print. 10. Shen, H. S. *Functionally Graded Materials of Plates and Shells*. Florida: CPC Press, 2009. Print.

Надійшла (received) 06.10.2014

**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;  
**Ю.І. ПЕРШИНА**, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків  
**В.О. ПАСІЧНИК**, канд. техн. наук, доц., ГДАДМ, Харків

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ПЕРШОГО РОДУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розроблено та досліджено метод знаходження точок розриву та  $\varepsilon$  – розриву першого роду лінійної функції однієї змінної, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним лінійним сплайном. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття  $\varepsilon$  – неперервності функції однієї змінної. На його основі розроблено модифікований алгоритм виявлення розривів першого роду нелінійної функції однієї змінної, використовуючи розривний апроксимаційний лінійний сплайн. Розглянуто приклад, який підтверджує ефективність запропонованого методу. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** розривна лінійна інтерполяція, розривна лінійна апроксимація,  $\varepsilon$  – розрив.

**Вступ.** Задачі наближення розривних функцій виникають досить часто. Наприклад, в комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловин виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є те, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, що відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, глина, пісок, граніт тощо).

Тобто актуальною є задача розробки та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних сплайнів та розробка методів виявлення точок або ліній розриву функції для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта. Її розв'язанню присвячена дана стаття.

**Аналіз останніх досліджень.** Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Для того, щоб розв'язувати широке коло наукових та технічних задач, корисні рівномірні наближення негладкими та розривними функціями. В роботах *Попова Б.Я.* [1] та його учнів досліджуються наближення неперервних функцій за допомогою розривних сплайнів в



чебишевській нормі. В роботах Литвина О.М. [2] та його учнів досліджувалося питання наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталіми функціями.

В роботах [3] досліджується *розривний метод Гальоркіна* високого порядку. На відміну від класичного методу Гальоркіна, розривний метод апроксимує розривний розв'язок функціями, розривними на границях розрахункової сітки.

В роботах [4] – [7] запропоновані та дослідженні математичні моделі (нові класи крайових задач з розривними розв'язками), що описують процеси в неоднорідних середовищах з тонкими включеннями-тріщинами.

Для моделювання складних гладких фізичних явищ в якості потужної обчислювальної техніки використовуються Фур'є – спектральні методи [8]. Їх швидкість збіжності залежить від гладкості та періодичності функції в досліджуваній області. Якщо функція має розрив хоча б в одній точці, швидкість збіжності погіршується та поряд з розривами розвиваються коливання. Така поведінка називається *явищем Гібса*. Тобто, якщо функція є розривною, то її ряд Фур'є не є гарним наближенням функції. В роботі [9] використовуються фільтри у розкладі Фур'є розривних функцій. Але фільтрація не повністю знищує явище Гібса.

В роботах [10] – [12] авторами запропонований метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок  $\varepsilon$  – розриву. В даній роботі пропонується обґрунтування цього методу у вигляді теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення точки  $\varepsilon$  – розриву.

**Постановка задачі.** Нехай задана лінійна функція однієї змінної  $f(x)$  на інтервалі  $[0,1]$  з можливими розривами першого роду в точках  $x_k, k = \overline{1, n}$ . Задані вузли розбивають інтервал  $[0,1]$  на  $n-1$  частин. Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної функції  $f(x)$  та виявити точки  $\varepsilon$  – розриву.

### Метод виявлення точок $\varepsilon$ - розриву.

**Визначення 1.** Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку  $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$  функцію  $S(x) \in C^{-1}[a, b]$ , яка визначається наступним чином

$$S(x) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

де  $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$  – параметри сплайну  $S(x)$ , що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^+ = \lim_{x \rightarrow x_k + 0} f(x), \quad C_{k+1}^- = \lim_{x \rightarrow x_{k+1} - 0} f(x).$$

**Теорема 1.** Якщо  $f(x) \in C^{-1}[a, b]$ , яка є  $r$  раз диференційованою на кожному з інтервалів  $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}, r = 1, 2$ , то залишок  $Rf(x) =$

$= f(x) - S(x)$  наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд

$$R_k f(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \frac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \leq \xi \leq x, \\ -\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x \leq \xi \leq x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Далі пропонується алгоритм виявлення розривів функції однієї змінної та алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого сплайну, який сформулюємо по кроках.

**Визначення 2** Розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відріzkу  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  будемо називати розривну функцію, визначену формулою (1), де коефіцієнти  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$  сплайна знаходяться методом найменших квадратів в одній із наступних форм:

– дискретній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k + 0) - S_k(x_k + 0))^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k - 0) - S_k(x_k - 0))^2 \rightarrow \min_C;$$

– інтегральній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 dt \rightarrow \min_C. \quad (2)$$

**Визначення 3.** Якщо  $\left| \lim_{x \rightarrow x_q + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_q - 0} f(x) \right| < \varepsilon$ , то функцію  $f(x)$

будемо називати  $\varepsilon$  – неперервною в точці  $x_q$ .

Оптимальним набором вузлів будемо називати таку найменшу кількість вузлів, серед яких є точки  $\varepsilon$  – розриву функції, та таку, що розривний сплайн, побудований на їх основі, наближує функцію із заданою точністю.

Викладемо алгоритм наближення розривної функції покровоко.

**Крок 1.** Будемо розривний апроксимаційний сплайн  $S(x)$  на заданих вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ . Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор  $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, \dots, C_{n-1}^+, C_n^-)$  з умови (2). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1) отримаємо сплайн

$$S_k(x) = S_k(x, C^I), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1}.$$

**Крок 2.** На кожному з інтервалів  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  обчислюємо зна-

чення  $J_k^* = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} J_k(x)$ ,  $J_k(x) = |f(x) - S_k(x)|$ .

**Крок 3.** Якщо виконуються умови: 1)  $J_q < \delta$ ,  $J_{q+1} < \delta$ , де  $\delta$  – задана точність наближення; 2)  $S(x) \in \varepsilon$  – неперервною в точці  $x_{q+1}$ , то вузол  $x_{q+1}$  видаляємо з розгляду.

**Крок 4.** З усіх  $J_k^*$  обираємо максимальне значення  $M = \max_{1 \leq k \leq n} (J_k^*)$  та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

**Крок 5.** На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів  $C$ .

Перевіряємо виконання умови  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - Sp(x)| < \delta$ , де  $\delta$  – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.2

**Теорема 2.** Якщо  $f(x) \in C^{-1}[0; 1]$  є кусково-лінійною функцією і має одну точку розриву першого роду  $x^* = m/2^k$ ,  $m, k \in N$ ,  $m < 2^k$ , то можна її виявити не більше, ніж за  $k$  ітерацій.

Доведення будемо проводити методом математичної індукції.

Нехай  $k = 1$ ,  $m = 1$ , тобто  $x^* = 0,5$ .

**Крок 1.** В якості вузлів розривного лінійного сплайну  $S(x)$  вибираємо рівномірно розташовані вузли  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,5$ ,  $x_2 = 1$ . Будуємо розривний сплайн

$$S(x) = \begin{cases} C_1^+ \frac{x-0.5}{0-0.5} + C_2^- \frac{x-0}{0.5-0}, & x \in [0, 0.5]; \\ C_2^+ \frac{x-1}{0.5-1} + C_3^- \frac{x-0.5}{1-0.5}, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Для початкового наближення в якості параметрів  $C_k^\pm$  візьмемо односторонні значення функції  $f(x)$  у потрібних вузлах, тобто

$$C_k^\pm = \lim_{x \rightarrow x_k^\pm} f(x).$$

Для знаходження параметрів використовуємо метод найменших квадратів в інтегральній формі. Випишемо функціонал, який треба мінімізувати:

$$J(C) = \int_0^1 (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{0.5}^1 (f(x) - S(x))^2 dx. \quad (3)$$

Оскільки  $f(x)$  є кусково-лінійною розривною функцією, то  $f(x) - S(x) \equiv 0$ . Звідки отримуємо  $J(C) = 0$ .

Тобто для випадку, коли розривна лінійна функція має одну точку розриву  $x^* = m/2^k$ ,  $k = 1$ ,  $m = 1$ , то для відновлення такої функції достатньо од-

нієї ітерації.

Нехай  $k = 2$ . Для визначеності будемо вважати  $m = 1$ , тобто  $x^* = 1/2^2$ .

**Крок 2.** При побудові сплайну  $S(x)$  у запропонованому на кроці 1 вигляді функціонал буде мати вигляд

$$J(C) = \int_0^1 (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx \neq 0,$$

оскільки  $\int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx = 0$ , бо  $f(x)$  є лінійною неперервною функцією на інтервалі  $(0.5; 1)$ .

Інтервал, на якому  $J(C) \neq 0$ , ділимо навпіл, вводячи новий вузол  $x = 0,25$ . Тобто маємо новий набір вузлів  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2^2$ ,  $x_2 = 1/2^1$ . І, повторюючи крок 1, отримаємо:

$$J(C) = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx = 0.$$

Аналогічний результат буде у випадку  $m = 3$ ,  $k = 2$ .

Тобто для виявлення точки розриву  $x^* = m/2^k$ ,  $k = 2$  потрібні 2 ітерації.

Нехай для виявлення точки розриву  $x^* = m/2^k$ ,  $m = 1$ ,  $k = n$  потрібно  $n$  ітерацій, тобто на  $n$ -ій ітерації розривний сплайн  $S(x)$  будуємо на вузлах  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2^n$ ,  $x_2 = 1/2^{n-1}$  і мінімізуючий функціонал має вигляд

$$J(C) = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = 0,$$

оскільки функція є кусково-лінійною з єдиним розривом в точці  $x^* = 1/2^n$ .

Доведемо, що для виявлення точки розриву  $x^* = m/2^k$ ,  $m = 1$ ,  $k = n + 1$  потрібно  $n + 1$  ітерація. Для цього випадку функціонал

$$J(C) = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx \neq 0,$$

оскільки  $\int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = 0$ , бо  $f(x)$  є лінійною неперервною функцією на інтервалі  $(1/2^n, 1/2^{n-1})$ .

Інтервал, на якому  $J(C) \neq 0$ , ділимо навпіл, вводячи новий вузол  $x = 1/2^{n+1}$  (тобто робимо  $n + 1$ -у ітерацію). І, будуючи на новій трійці вузлів

$x_0 = 0, x_1 = 1/2^{n+1}, x_2 = 1/2^n$  розривний сплайн, отримаємо:

$$J(C) = \int_0^{1/2^{n+1}} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx = 0,$$

тому що точка  $x = 1/2^{n+1}$  є точкою розриву.

Тобто розрив виявлено за  $n+1$ -у ітерацію.

Теорема 2 доведена.

**Теорема 3.** Якщо  $f(x) \in C^{-1}[0; 1]$  – кусково-лінійна функція, що має одну точку розриву першого роду  $x^*$ , то виявити її можна за  $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$  ітерацій з похибкою  $\varepsilon$ .

**Доведення.** Опишемо алгоритм виявлення точки  $\varepsilon$ -розриву.

**Крок 1.** Обираємо рівномірне розбиття інтервалу  $[0; 1]$ :  $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ . І будуємо на цих вузлах розривний сплайн  $S(x)$ . Функціонал, який треба мінімізувати, має вигляд (3). Один з інтегралів в цьому виразі буде дорівнювати нулю, оскільки на інтервалі, по якому ведеться інтегрування, функція задається є неперервно і лінійною.

**Крок 2.** Інтервал, на якому  $J(C) \neq 0$ , ділимо навпіл. Нехай для визначеності це інтервал  $[0; 0.5]$  і обираємо вузли

$$x_0 = 0, x_1 = 1/2^2, x_2 = 1/2.$$

Знову ж будуємо сплайн на нових вузлах, і один з інтегралів в мінімізуючому функціоналі не буде дорівнювати нулю.

Знайдемо критерій зупинки ітераційного процесу.

Треба знайти такий найближчий до точки розриву інтервал  $(m/2^k, (m+1)/2^k)$ ,  $m \in N, m < 2^k$ , що виконується умова

$$\left| \frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k} \right| < 2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow k > \log_2 \frac{1}{2\varepsilon} = -\log_2(2\varepsilon).$$

Оскільки  $k \in N$ , то  $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$  – це номер ітерації (кроку), на якій потрібно зупинити ітераційний процес.

Число  $m$  задовольняє нерівностям

$$\frac{m}{2^k} < x^* < \frac{m+1}{2^k} \Rightarrow m < x^* \cdot 2^k, m > x^* \cdot 2^k - 1$$

Оскільки  $m \in N$ , то  $m = \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor$ .

Тобто на  $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$  – ітерації знайдемо точку  $\varepsilon$ -розриву  $x^*$ , яка потрапить в  $\varepsilon$ -інтервал  $\left( \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor / 2^k, (\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1) / 2^k \right)$ . Тобто  $x^* \in \left( \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor / 2^k, (\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1) / 2^k \right)$ .

Теорема доведена.

**Приклад 1.** Нехай розривна лінійна функція  $f(x)$  має розрив першого роду в точці  $x^* = \pi - 3 \approx 0.14159265$ . Складемо таблицю результатів виявлення точки  $\varepsilon$  – розриву, тобто  $\varepsilon$  – інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки  $\varepsilon$  (табл. 1).

Таблиця 1 – Результати розрахунку

| Похибка,<br>$\varepsilon$ | Номер ітерації,<br>$k$ | $\varepsilon$ – інтервал |
|---------------------------|------------------------|--------------------------|
| 0,01                      | 6                      | (0.140625; 0.15625 )     |
| 0,001                     | 9                      | (0.140625; 0.1425781)    |
| 0,0001                    | 13                     | (0.14147949; 0.1416016)  |

**Визначення 4.** Базисним розривним лінійним сплайном на інтервалі  $[0;1]$  будемо називати сплайн

$$B(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0;1]; \\ 0, & x \notin [0;1], \end{cases}$$

де  $h(x)$  – лінійний неперервний поліном.

**Теорема 4.** Довільну розривну лінійну функцію  $f(x)$  зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно завжди, знайдуться такі  $M \in N$  і параметри  $C_k^\pm$ , що лінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=1}^M B(Mx - k; C_k^\pm), \quad C_k^\pm = f\left(\frac{k}{M} \pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм наближення розривної лінійної функції покроково.

**Крок 1.** Будуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн  $S(x)$  на заданих вузлах  $x_k, k = \overline{1, n}$  (наприклад, рівномірно розташованих) за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами  $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{0, n-1}$ . Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор  $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, \dots, C_{n-1}^+, C_n^-)$  з умови (2), обчислюючи функціонал  $J(C)$ .

**Крок 2.** Знаходимо інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - Sp_k(t))^2 dt \neq 0, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Обчислюємо їх довжину  $d_k = x_{k+1} - x_k$ . Якщо  $d_k < 2\varepsilon$ , то інтервали  $(x_k, x_{k+1}) \in \varepsilon$  – околom точок розриву ( $\varepsilon$  – розривами) і ітераційний процес закінчено. Якщо ця умова не виконується, то знайдені інтервали ділимо навпіл. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки  $f(x) \in$  кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

**Крок 3.** В якості вузлів розривного сплайну обираємо кінці інтервалу  $(0; 1)$  та точки  $\varepsilon$ -розриву  $x_m^*, m = \overline{1, M}$ , враховуючи  $C_0^+ = f(0)$ ,  $C_m^\pm = f(x_m \pm \varepsilon)$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $C_{M+1}^- = f(1)$ .

**Приклад 2.** Нехай в області  $D = [0, 1]$  задана функція (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} -12x^2 + 2, & x \in (0, 0.4]; \\ 3 - x, & x \in (0.4, 0.7]; \\ 1, & x \in (0.7, 0.1]. \end{cases}$$

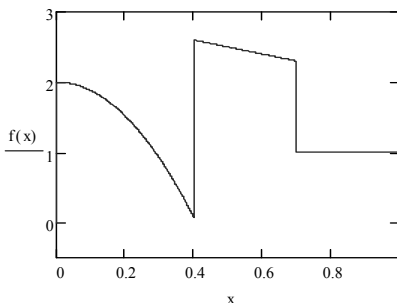


Рис. 1 – Графік функції.

Тобто ця функція має два розриви першого роду в точках  $x = 0.4$ ,  $x = 0.7$ . Задамо  $\varepsilon = 0.01$ . Оскільки задана функція нелінійна, а наближувати будемо лінійними розривними сплайнами, то потрібно задавати точність наближення  $\delta$ , наприклад  $\delta = 0.01$ . Адаптуємо наведений вище алгоритм.

На першому кроці будемо розривний апроксимаційний сплайн  $S(x)$  на вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  за форму-

лою (1) з невідомими коефіцієнтами  $C_k^+$ ,  $C_{k+1}^-$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ . Знаходимо вектор  $C$  з умови (2).

Далі на другому кроці на кожному з інтервалів  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  обчислюємо значення  $J_k^* = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} J_k(x)$ ,  $J_k(x) = |f(x) - Sp_k(x)|$ . І крок 3 зводиться до перевірки умов: 1)  $J_q < \delta$ ,  $J_{q+1} < \delta$ , де  $\delta$  – задана точність наближення; 2)  $S(x) \in \varepsilon$ -неперервною в точці  $x_{q+1}$ . Якщо ці умови виконані, то вузол  $x_{q+1}$  видаляємо з розгляду. З усіх  $J_k^*$  обираємо максимальне значення  $M = \max_{1 \leq k \leq n} (J_k^*)$  та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

На новій множині вузлів знову будемо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів  $C$ .

Перевіряємо виконання умови  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| < \delta$ , де  $\delta$  – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то ми отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Застосуємо цей алгоритм до заданої функції. Оберемо вузли сплайна:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.3$ ,  $x_3 = 0.6$ ,  $x_4 = 1$ . Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1). Задамо точність наближення  $\delta = 0.01$  та  $\varepsilon = 0.01$ . Наведемо деякі проміжні результати наближення

При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють  
 $x_1 = 0, x_2 = 0.075, x_3 = 0.15, x_4 = 0.225, x_5 = 0.3, x_6 = 0.375,$   
 $x_7 = 0.4, x_8 = 0.7, x_9 = 1.$

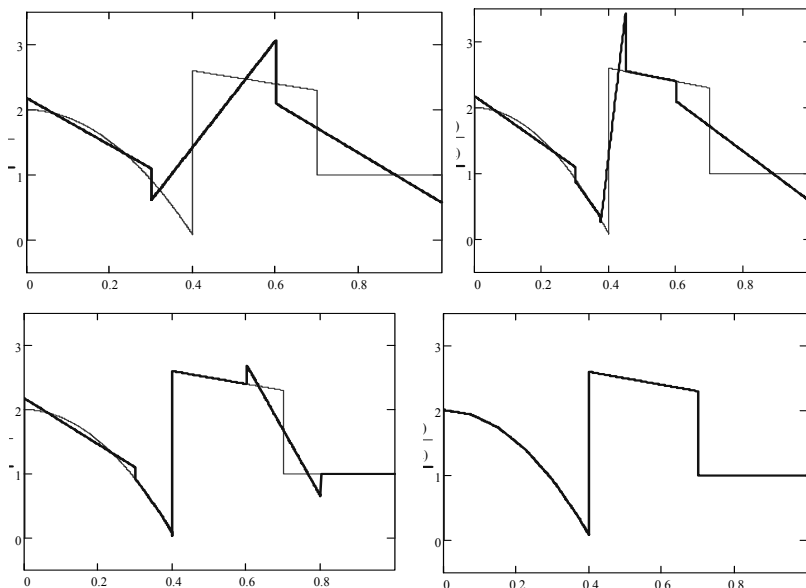


Рис.2 – Проміжні результати алгоритму виявлення точок розриву розривної функції шляхом наближення її розривним сплайном.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

Наступним кроком автори планують обґрунтувати метод відновлення розривних функцій двох змінних [13] та метод виявлення ліній та точок  $\varepsilon$ -розриву, використовуючи розбиття області визначення функції двох змінних на прямокутні елементи, з метою оптимізації кількості обчислень.

**Висновки.** В роботі введено поняття розривного лінійного апроксимаційного сплайну, та пропонується метод знаходження точок  $\varepsilon$ -розриву лінійної функції однієї змінної, інформацією про яку є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу  $[0; 1]$ . Цей метод може бути розповсюджений на випадок нелінійної розривної функції. І в



роботі запропонований модифікований метод знаходження точок розриву.

**Список літератури:** 1. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989. – 272с. 2. Литвин О.М. Интерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.; 3. Петровская Н.Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т.17, №1. – С. 79 – 92; 4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. Наукова Думка. – Киев. – 2007. – 703с. 5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, – 2001. – 606с. 6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, – 2003. – 506с. 7. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, – 2012. – 511с. 8. Abdul J. Jerri, Ed. Advances in the Gibbs Phenomenon // Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. –2011. – 424 pp. 9. Gottlieb S., Jae-Hun Jung, Kim S. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon // Commun. Comput. Phys. – Beijing. – Vol. 9, No. 3. – 2011. – P. 497 – 519. 10. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131. 11. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання процесів, які мають розриви, за допомогою розривних інтерполяційних сплайнів // Научно-технический журнал «Искусственный интеллект». – 2011. – №2. – С.152 – 158. 12. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції. – Інститут проблем математики і механіки // Праці ІПММ НАН України. – Т.24. – Донецьк, 2012. – С. 157 – 165. 13. Литвин О.Н., Першина Ю.И., Сергиенко И.В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). // Кибернетика и системный анализ, №4. – 2014. – С.126 – 134.

**Bibliography (transliterated):** 1. Popov, B. A. *Ravnomernoe priblizhenie splajnami*. Kiev: Nauk. dumka, 1989. Print. 2. Litvin, O. M. *Interlinacija funkcij ta dejaki i'i' zastosuvannja*. Kharkiv: Osнова, 2002. Print. 3. Petrovskaja, N. B. "Аппроксимация разрывных решений длja одного класса шем vysokого porjadka." *Matematicheskoe modelirovanie*. Moscow. Vol. 17. No. 1. 2005. 79–92. Print. 4. Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Analiz mnogokopponentnyh raspredeljonnyh sistem i optimal'noe upravlenie*. Kiev: Nauk. dumka. 2007. Print. 5. Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Modeli i metody reshenija zadach v neodnorodnyh sredah*. Kiev: Nauk. dumka, 2001. Print. 6. Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Optimal'noe upravlenie neodnorodnymi raspredeljonnymi sistemami*. Kiev: Nauk. dumka, 2003. Print. 7. Dejneka, V. S. and I. V. Sergienko. *Sistemnyj analiz uprugih i termouprugih neodnorodnyh tel*. Kiev: Nauk. dumka, 2012. Print. 8. Ed. Abdul, J. Jerri. *Advances in the Gibbs Phenomenon*. Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam: New York Copyright, 2011. Print. 9. Gottlieb, S., Jae-Hun Jung and S. Kim. "A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon." *Commun. Comput. Phys*. Vol. 9. No. 3. Beijing, 2011. 497–519. Print. 10. Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Nablyzhennja rozryvnoi' funkcii' za dopomogoju rozryvnyh splajniv." *Matematychnie ta komp'juterne modeljuvannja. Ser.: Fiziko-matematychni nauky: zb. nauk. prac'*. No. 3. Kam'janec' – Podil's'kyj, 2010. 122–131. Print. 11. Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Matematychnie modeljuvannja procesiv, jaki majut' rozryvy, za dopomogoju rozryvnyh interpoljacijnyh splajniv. Nauchno-tehnicheskij zhurnal «Iskusstvennyj intellekt»." No. 2. 2011. 152–158. Print. 12. Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Nablyzhennja rozryvnoi' funkcii' rozryvnym splajnom, koly vuzly splajna ne zbigajut'sja z rozryvamy funkcii'." *Praci IPMM NAN Ukrai'ny*. No. 24. Donec'k, 2012. 157–165. Print. 13. Litvin, O. N., Ju. I. Pershina and I. V. Sergienko. "Vosstanovlenie razryvnyh funkcij dvuh peremennyh, kogda linii razryva neizvestny (prjamougol'nye jelementy)." *Kibernetika i sistemnyj analiz*. No. 4. 2014. 126–134. Print.

Надійшла (received) 03.03.2015

**О.С. МЕЛЬНИК**, канд. техн. наук, доц., НАУ, Київ;

**Н.В. ТРОХИМЕНКО**, асистент, НАУ, Київ;

**А.О. СОБЧЕНКО**, студент, НАУ, Київ;

## НАНОПРИСТРІЙ З ПРОГРАМОВАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Реалізовано автоматизоване проектування наноелектронних схем з програмованими характеристиками на квантових мажоритарних компонентах. Запропоновані методи побудови арифметико-логічних обчислювальних пристроїв комбінаційного та послідовностного типів, які реалізують практично повну систему логічних функцій як в мажоритарному, так і в булевому базисах.

**Ключові слова:** квантові автомати, мажоритарний елемент, наносхеми з програмованими характеристиками (НСПХ).

**Вступ.** Усунути протиріччя між універсальністю і специфічністю функцій можна шляхом розробки наносхем з програмованими характеристиками (НСПХ), алгоритми роботи яких можуть бути змінені на вимогу розробника конкретної обчислювальної апаратури [1]. Одна програмована наносхема замінює від 30 до 150 інтегральних схем середнього ступеню інтеграції.

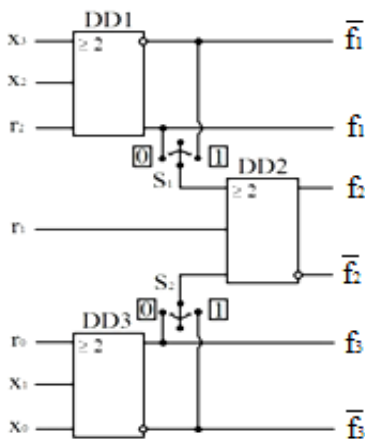


Рис. 1 – Структурна схема універсальної НСПХ.

подаються інформаційні ( $x_3, x_2, x_1, x_0$ ) і програмуючі ( $r_2, r_1, r_0$ ) сигнали [2].

За допомогою НСПХ такого типу можна реалізувати всі 16 і 256 функцій двох і трьох аргументів, в тому числі функції суми, різниці, добутку, переносу і займу, функції одного, двох і трьох елементів пам'яті, а також більшість функцій чотирьох і п'яти аргументів. Особливістю НСПХ являється те, що можна змінити по програмі її логічні можливості і зв'язки, що дозволяє використовувати її для побудови мажоритарних адаптивних систем. В табл. 1

**Основний матеріал.** Для реалізації адаптивних систем, необхідно мати можливість програмно змінювати їх технічні характеристики в процесі чи перед початком роботи. З точки зору здешевлення виробництва наноелектронних систем і підвищення надійності їх роботи доцільно виконувати їх на одному типі комірок з однаковою конфігурацією з'єднань між комірками.

В якості такої комірки для побудови мажоритарних адаптивних систем можна використовувати НСПХ, які складаються з трьох універсальних мажоритарних елементів (УМЕ), відповідним чином з'єднаних між собою (рис. 1). На входи НСПХ

наведені найбільш важливі функції в мажоритарному базисі, які реалізуються на базі НСПХ.

Таблиця 1 – Приклади найбільш важливих функцій, які можна реалізувати на наносхемах з запрограмованими характеристиками

| №  | $r_2$ | $r_1$ | $r_0$       | $f_1$                | $f_2$                                                    | $f_3$                      | Число вих. функцій       |
|----|-------|-------|-------------|----------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1  | 0     | 0     | 0           | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, x_1 x_0, 0)$                               | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 24                       |
| 2  | 0     | 0     | 1           | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, x_1 \vee x_0, 0)$                          | $maj(x_1, x_0, 1)$         | 24                       |
| 3  | 0     | 1     | 0           | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, x_1 x_0, 1)$                               | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 24                       |
| 4  | 0     | 1     | 1           | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, x_1 \vee x_0, 1)$                          | $maj(x_1, x_0, 1)$         | 24                       |
| 5  | 1     | 0     | 0           | $maj(x_3, x_2, 1)$   | $maj(x_3 \vee x_2, x_1 x_0, 0)$                          | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 24                       |
| 6  | 1     | 0     | 1           | $maj(x_3, x_2, 1)$   | $maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 0)$                     | $maj(x_1, x_0, 1)$         | 24                       |
| 7  | 1     | 1     | 0           | $maj(x_3, x_2, 1)$   | $maj(x_3 \vee x_2, x_1 x_0, 1)$                          | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 24                       |
| 8  | 1     | 1     | 1           | $maj(x_3, x_2, 1)$   | $maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 1)$                     | $maj(x_1, x_0, 1)$         | 24                       |
| 9  | 0     | 0     | $x_4$       | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, maj(x_1, x_0, x_4), 0)$                    | $maj(x_1, x_0, x_4)$       | 44                       |
| 10 | 0     | $x_4$ | 0           | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, x_1 x_0, x_4)$                             | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 40                       |
| 11 | 0     | $x_4$ | $x_5$       | $maj(x_3, x_2, 0)$   | $maj(x_3 x_2, maj(x_1, x_0, x_5), x_4)$                  | $maj(x_1, x_0, x_5)$       | 76                       |
| 12 | $x_4$ | 0     | 0           | $maj(x_3, x_2, x_4)$ | $maj(maj(x_3, x_2, x_4), x_1 x_0, 0)$                    | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 44                       |
| 13 | $x_4$ | 0     | $x_5$       | $maj(x_3, x_2, x_4)$ | $maj(maj(x_3, x_2, x_4), maj(x_1, x_0, x_5), 0)$         | $maj(x_1, x_0, x_5)$       | 48                       |
| 14 | $x_4$ | $x_5$ | 0           | $maj(x_3, x_2, x_4)$ | $maj(maj(x_3, x_2, x_4), x_1 x_0, x_5)$                  | $maj(x_1, x_0, 0)$         | 76                       |
| 15 | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$       | $maj(x_3, x_2, x_4)$ | $maj(maj(x_3, x_2, x_4), maj(x_1, x_0, x_6), x_5)$       | $maj(x_1, x_0, x_6)$       | 80                       |
| 16 | 1     | $f_2$ | 0           | $maj(x_3, x_2, 1)$   | $maj(x_3 \vee x_2, x_1 x_0, f_2)$                        | $maj(x_1, x_0, 0)$         | Тригер з управл. входами |
| 17 | $f_1$ | 0     | $f_3$       | $maj(x_3, x_2, f_1)$ | $maj(maj(x_3, x_2, f_1), maj(x_1, x_0, f_3), 0)$         | $maj(x_1, x_0, f_3)$       | Два тригери              |
| 18 | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$       | $maj(x_3, x_2, f_1)$ | $maj(maj(x_3, x_2, f_1), maj(x_1, x_0, f_3), f_2)$       | $maj(x_1, x_0, f_3)$       | Три тригери              |
| 19 | $f_2$ | $f_2$ | $\bar{f}_2$ | $maj(x_3, x_2, f_2)$ | $maj(maj(x_3, x_2, f_2), maj(x_1, x_0, \bar{f}_2), f_2)$ | $maj(x_1, x_0, \bar{f}_2)$ | Накоп. суматор           |

НСПХ являється функціонально повним пристроєм, так як до її склад входять функціонально повні УМЕ. Синтез мажоритарних систем на базі НСПХ рекомендується проводити в наступному порядку:

- задані чи отримані булеві функції представляються в мажоритарному базисі;
- проводиться мінімізація отриманої мажоритарної функції;
- в табл. 1 відшукується рядок, еквівалентний мінімальній формі мажоритарної функції;
- складається структурна схема заданої адаптивної системи з врахуванням можливостей НСПХ.

В табл. 1  $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$  – це вхідні інформаційні сигнали, представлені або в прямому, або в інверсному кодах;  $r_2, r_1, r_0$  – програмуючі сигнали;  $f_3, f_2, f_1$  – вихідні сигнали.

**Приклади моделювання.** Синтезуємо, наприклад, за допомогою САПР QCA Designer [3] логічну функцію:

$$f_2 = maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 0), \quad (1)$$

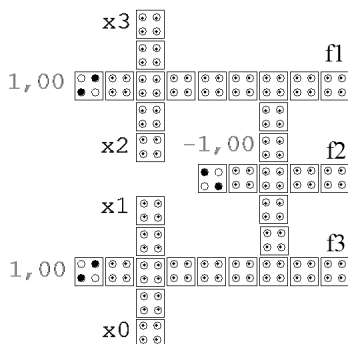
якій відповідає мажоритарний еквівалент у шостому рядку табл. 1.

На двох додаткових виходах НСПХ формуються функції логічного додавання попарно двох з чотирьох аргументів:

$$f_1 = x_3 \vee x_2 = maj(x_3, x_2, 1), \quad (2)$$

$$f_3 = x_1 \vee x_0 = maj(x_1, x_0, 1). \quad (3)$$

**Результати комп'ютерного проектування.** Для програмування функцій (1), (2) та (3) слід в структурній схемі ПНЕХ (рис. 1) ключі  $S_1$  та  $S_2$  переконутувати в стан 0, а на програмуючих входах встановити поляризації  $+P=1$  для входів  $r_2=r_0=1$ , та  $-P=-1$  для входу  $r_1=0$ .



а



б

Рис. 2 – Автоматизоване проектування НСПХ комбінаційного типу на квантових автоматах: а – наносхема; б – результати.

На рис. 2, а наведена НСПХ, яка побудована на робочому полі САПР QCA Designer [3]. Вона складається з 37 квантових комірок розміром  $18 \times 18$  нм з 4 квантовими точками діаметром 5 нм і відстанню між центрами 20 нм. Загальний розмір НСПХ  $(198 \times 218)$  нм<sup>2</sup>. Вона має чотири інформаційні входи  $x_3, x_2, x_1$  та  $x_0$ , три програмуючих входи з поляризаціями  $+P=1$  та  $-P=-1$  і три пари комплементарних виходів  $f_1, f_2$  і  $f_3$ .

Результати комп'ютерного моделювання часових характеристик НСПХ показані на рис. 2, б. Позитивним імпульсам відповідають позитивні поляризації  $+P=1$ , а негативним – від'ємні поляризації  $-P=-1$ . Відповідна табли-

ця істинності НСПХ для цього режиму програмування наведена в табл. 2.

Таблица 2 – Таблица істинності функцій  $maj(x_3, x_2, 1)$ ,  $maj(x_3 \vee x_2, x_1 \vee x_0, 0)$  та  $maj(x_1, x_0, 1)$

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |

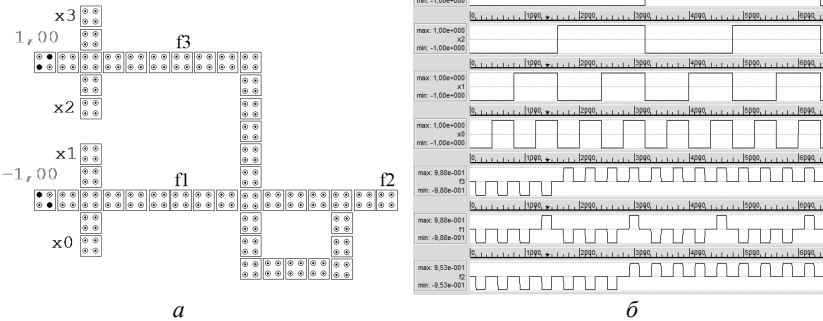


Рис. 3 – Комп’ютерне проектування послідовності НСПХ на КА:  
а – наносхема; б – результати.

За допомогою змін поляризації на входах  $r_2, r_1, r_0$  та перекомутації ключів  $S_1$  та  $S_2$  семивходову НСПХ (рис. 1) можна запрограмувати для отримання 192 логічних функцій дво- та чотиривходових комбінаційних схем.

Далі синтезуємо наприклад, послідовну схему 16-го варіанту з табл. 1 у складі двох мажоритарних елементів з роздільними входами  $x_3, x_2$  і  $x_1, x_0$ . Прямі виходи  $f_1$  і  $f_3$  цих мажоритарних елементів є входами RS-триггера, із зворотнім зв’язком  $f_2$ . На рис. 3, а побудована ця послідовна

наносхема у форматі системи QCADesigner, а результати моделювання її часових характеристик наведені на рис. 3, б. Вона має розмір  $(350 \times 240) \text{ нм}^2$  і складається з 48 квантових автоматів.

Перевірочна таблиця станів однотригерної НСПХ подана в табл. 3

Таблиця 3 – Таблиця істинності функції  $maj(x_3 \vee x_2, x_1x_0, f_2)$ .

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |

**Висновки.** У найближче десятиріччя напівпровідникові компоненти ВІС досягнуть квантово-термодинамічних обмежень і не зможуть відповідати наростаючим вимогам ефективності обчислювальної техніки. Тому так активно розробляються нові нанотехнології, які б забезпечили суттєво вищу ефективність. Однією з таких розробок є квантові коміркові автомати і створені на їх основі системи з програмованими характеристиками. Як вище доведено, саме такі пристрої забезпечать реалізацію повної системи логічних функцій як для комбінаційних, так і для послідовностних логікоарифметичних пристроїв.

**Список літератури:** 1. Пакулов Н.И., Уханов В.Ф., Чернышов П.Н. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. – М.: Сов. радио, 1974, – 184 с. 2. Melnyk O.S., Todavchych S.V. Synthesis programmable nanoelectronic divices. // Electronics and Control systems – 2013. – P. 89 – 94. 3. Walus K. QCA Designer: A Rapid Design and Simulation Tool for QCA. // Internet journal of Nanotech. and Appl. – 2005. – Vol. 2 – №1 – P. 1 – 7.

**Bibliography (transliterated):** 1. Pakulov, N. I., V. F. Uhanov and P. N. Chernyshov. // *Mazhoritarnyj princip postroenija nadezhnyh uzlov i ustrojstv CVM*. Moscow: Sov. radio, 1974, Print. 2. Melnyk, O. S., and S.V. Todavchych. "Synthesis programmable nanoelectronic divices." *Electronics and Control systems*. 2013. 89–94. Print. 3. Walus, K. "QCA Designer: A Rapid Design and Simulation Tool for QCA." *Internet journal of Nanotech. and Appl.* Vol. 2. No. 1. 2005. 1–7. Print.

Надійшла (received) 25.12.2014

**О.М. НАЗАРЕНКО**, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми;  
**О.М. НІКОЛАЄНКО**, студент, СумДУ, Суми

## ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОДЕЛІ СОЛОУ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації моделі Солоу макроекономічної системи, в якій інвестиції економіки в цілому зв'язані лінійним законом з випусками секторів. У ролі фазових координат виступають основні фонди, а керуваннями є випуски секторів. Траєкторії руху фазових координат розкладаються на трендову та періодичну складові. Поділ макроекономічної системи на сектори проводиться так, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштувалися на частоти, характерні для даної системи. Оскільки траєкторії випусків секторів невідомі, то диференціальне рівняння руху задовольняється в цілочисельних точках періоду ідентифікації. Невідомі параметри моделі оцінюються методами економетрики, причому замість основних фондів використовуються заміщуючі змінні – природи основних фондів, для яких відома статистична інформація. Апробація моделі проводиться на статистичних даних реальної макроекономічної динаміки. Економетричне моделювання дозволяє виділити значущі гармоніки, характерні для даної системи, і відновити невідомі статистичні дані по основним фондам та інвестиціям. Одержані траєкторії руху мають високі імітаційні та прогностичні властивості. Аналіз гармонічних хвиль, які присутні в розкладі модельних кривих, дозволяє встановлювати причини підйомів і спадів в економіці країни та прогнозувати подальший економічний розвиток.

**Ключові слова:** стеганографія, стеганологія, стегоповідомлення, контейнер, вейвлет-перетворення.

**Вступ.** Останнім часом, у зв'язку зі зростаючим впливом макроекономічної ситуації на всі сфери життя, зростає і зацікавленість дослідників у відтворенні функціонування макроекономічних систем. Значення математичного моделювання як методу досліджень визначається тим, що модель являє собою концептуальний інструмент, орієнтований на аналіз та прогнозування динамічних процесів. При практичних дослідженнях модельні динамічні системи подаються системою диференціальних рівнянь. Побудова моделей у задачах макроекономіки ґрунтується на ідентифікованих рівняннях руху, які отримуються із законів, властивих даним економічним процесам [1, 2].

Однак більшість об'єктів, що вивчаються економічною наукою, можна охарактеризувати поняттям «складна система» [3, 4]. З'ясувати усі можливі зв'язки між елементами такої системи практично неможливо. Тут закон руху  $\dot{x} = f(x)$  не може адекватно відображати динамічний процес, оскільки завжди будуть діяти невраховані фактори.

Отже, ключовою проблемою моделювання макросистем є ідентифікація рівнянь руху, оскільки на практиці вони не специфіковані. Дослідник має виходити лише зі статистичної інформації про значення фазових та керованих змінних у дискретні моменти часу із заданого проміжку. Економетрична побудова моделі оптимального керування проводиться в рамках моделі «сірого ящика» [5], коли за допомогою аналізу даних та деякого обґрунтованого підходу проводиться повна або часткова специфікація між входами, станами та виходами системи, а невідомі параметри системи оцінюються економетрич-

ними методами. Адекватність моделі та точність отриманих результатів перевіряються за допомогою статистичних тестів і коефіцієнтів детермінації [6].

Важливе місце в економіко-математичних дослідженнях посідають моделі економічного зростання. За дослідження моделей економічного зростання Р. Солоу став лауреатом Нобелівської премії з економіки 1987 року. *Моделі Солоу* [7] описує агреговану замкнену економіку і оптимізує економічне зростання одnoseкторної економіки.

Питання про те, які фактори впливають на економічне зростання, залишається одним із центральних питань макроекономіки. Більшість економістів, дотримуючись класичної роботи Р. Солоу [7], описують процес економічного зростання за допомогою факторів, що характеризують економіку країни в цілому. Ключові з цих факторів: технічний прогрес, накопичення капіталу і зростання трудових ресурсів [8]. Модель Солоу пояснює зростання ВВП (валового внутрішнього продукту) екзогенними параметрами, а саме екзогенним темпом технічного прогресу. Однак при цьому причина технічного прогресу залишається непоясненою. В 1980-х роках з'явилися нові теорії економічного зростання, які пропонують у якості пояснюючих змінних ендогенні змінні моделі. Нові моделі намагались пояснити технологічні зміни як результат ринкових взаємовідносин, а не як зовнішній вплив [9].

Інший підхід до моделювання економічного зростання базується на введенні в модель секторів макроекономічної системи. Так, *модель Леонтьєва* [10] описує динамічний міжгалузевий рівноважний баланс. На вхід системи тут подається невиробниче споживання секторів макроекономічної системи, а у ролі фазових координат виступають випуски цих секторів. Особливістю макроекономічних процесів, властивих розвинутим країнам Західної Європи, США, Канаді, Японії та іншим, є те, що вони відбуваються в умовах циклічності [11]. Як показують практичні дослідження (аналіз статистичних даних), фази підйому тут змінюються фазами спаду, після чого знову спостерігається зростання і так далі. Параметрична ідентифікація моделі Леонтьєва розглянута в [12]. У цій роботі показано, що економічне зростання і спад макросистеми можуть бути пояснені властивостями гармонічних хвиль, що розповсюджуються в даній системі.

У даній роботі методика, запропонована в [12], розповсюджується на модель Солоу. Процес економічного зростання можна вивчати шляхом встановлення взаємозв'язків між секторами макроекономічної системи. На вхід системи будемо подавати випуски секторів, які розглядаються у якості керувань, а фазовими координатами будуть ОФ (основні фонди).

**Постановка задачі.** У загальному випадку економіку країни в момент часу  $t \in [t_0, t_f]$  можна характеризувати обсягами основних фондів  $k(t)$  й інвестицій  $I(t)$  та внутрішнім валовим продуктом (ВВП) країни  $x(t)$ . Капітальні вкладення вимірюються швидкістю зміни основних фондів

$$\dot{k}(t) = dk(t)/dt.$$

Припустимо, що в кожен момент часу  $t$  необхідно замінити  $r(t)$  амо-



ртизованого капіталу. Тоді, якщо валові інвестиції  $I(t)$  економіки йдуть на чистий приріст існуючого капіталу та на заміну амортизованого капіталу, то динаміку зміни основних фондів можна описати диференціальним рівнянням

$$\dot{k}(t) + r(t) = I(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1)$$

При практичній реалізації ідентифікація моделі (1) спряжена з певними труднощами і має деякі недоліки.

1. Статистична інформація по амортизації ОФ та інвестиціям невідома. В [7] припускається, що амортизація макроекономічної системи пропорційна ОФ ( $\lambda$  – коефіцієнт амортизації), а інвестиції пропорційні ВВП ( $r$  – коефіцієнт інтенсивності вкладень інвестицій), тобто

$$\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + r x(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (2)$$

2. Модель (2) не враховує взаємозв'язок між секторами макроекономічної системи. У випадку  $n$  – секторної економіки інвестиції вкладаються у кожний сектор, і тому можна вважати, що  $I(t)$  залежить від випусків цих секторів  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Якщо залежність лінійна, то

$$I(t) = \mathbf{r}' \mathbf{x}(t), \quad (3)$$

де  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$  – вектор випусків секторів (*вектор керувань*);  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$  – вектор інтенсивностей вкладень інвестицій в сектори;  $r_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), оскільки збільшення випуску  $i$  – го сектора на практиці спонукає інвесторів збільшувати вкладення коштів в цей сектор.

Залежність (3) означає, що вплив випусків секторів на інвестиції відбувається необов'язково в однаковій пропорції. Якщо інвестиції в сектори вкладаються з однаковою інтенсивністю ( $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ ), то з моделі інвестицій  $n$  – секторної економіки буде впливати модель інвестицій економіки в цілому. Як показують практичні дослідження, інтенсивності вкладень інвестицій в сектори різняться. Тому введення в розгляд секторів макроекономічної системи значно розширює можливості математичного моделювання.

Отже, модель Солоу будемо подавати у вигляді

$$\dot{k}(t) = -\lambda k(t) + \mathbf{r}' \mathbf{x}(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (4)$$

3. Специфіка статистичних даних по основним фондам така, що відсутня інформація про обсяги ОФ, але відомі щорічні прирости ОФ

$$k_t - k_{t-1} = n_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Із (5) випливає, що приріст ОФ у момент часу  $t$  відносно значення  $k_0$  у момент  $t_0$  дорівнює  $k_t - k_0 = \sum_{i=1}^t n_i$ . Позначимо  $y_t = \sum_{i=1}^t n_i$ , тоді  $k_t = y_t + k_0$ .

Відносно  $y(t)$  маємо наступне диференціальне рівняння:

$$\dot{y}(t) = b_0 - \lambda y(t) + \mathbf{r}' \mathbf{x}(t), \quad b_0 = -\lambda k_0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (6)$$

або, в осередненому вигляді,

$$\dot{\bar{y}}(t) - \bar{y} = -\lambda(y(t) - \bar{y}) + \mathbf{r}'(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (7)$$

Порівнюючи (6) і (7), знаходимо

$$k_0 = -\bar{y} + \lambda^{-1}(\mathbf{r}'\bar{\mathbf{x}} - \bar{y}). \quad (8)$$

Отже, якщо нам вдасться реалізувати модель (8), то ми зможемо знайти значення  $k_0$  ОФ економіки в цілому в момент часу  $t = t_0$ . Це дозволить у випадку необхідності відновити статистичні дані відносно ОФ:

$$k_t = y_t + k_0, \quad t = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Для отримання однозначного розв'язку диференціального рівняння (7) його необхідно доповнити *граничною умовою*

$$y(t_*) = y_*, \quad t_* \in [t_0, t_f], \quad (10)$$

де  $t_*$  – точка відрізка  $[t_0, t_f]$ , в якій задається граничний стан.

Тоді сформульована *задача Коші* (7), (10) при заданих  $\lambda$ ,  $\mathbf{r}$  і  $y_*$  має єдиний розв'язок. Однак у реальних задачах параметри  $\lambda$  і  $\mathbf{r}$  диференціального рівняння (7) невідомі. Більше того, граничні умови також можуть бути не заданими, наприклад, у випадку, коли  $t_*$  – момент часу, що розділяє базовий період і період прогнозування. Тому виникає обернена задача ідентифікації невідомих параметрів задачі Коші (7), (10).

Нехай в  $N$  цілочисельних точках проміжку  $[t_0, t_1]$  з відрізка  $[t_0, t_f]$  відома статистична інформація  $\{y_t\}$  і  $\{x_t\}$  відносно показників  $y$  і  $x$ . Множини  $y$  і  $x$  необхідно розкласти на підмножини  $y_1, y_2, \dots, y_n$  і  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , для яких відомі статистичні дані  $\{y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tn}\}$  і  $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}\}$ ,  $t = \overline{1, N}$ , причому у всіх цих точках виконуються рівності  $\sum_{i=1}^n y_{it} = y_t$ ,  $\sum_{i=1}^n x_{it} = x_t$ .

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи. Тому граничну умову (10) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо  $t_* = t_1 = N + 1$ , тоді відрізок  $[1, N]$  будемо називати *періодом ідентифікації*, а відрізок  $[t_*, t_f]$  – *періодом прогнозування*. При оцінених значеннях  $\lambda, \mathbf{r}$  і  $y_*$  можна перевіряти імітаційні властивості моделі на проміжку  $[1, t_*)$  і встановлювати прогнозні властивості на відріжку  $[t_*, t_f]$ .

У даній роботі розв'язок задачі Коші (7), (10) будемо шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат (приростів ОФ секторів) на складові. Метою нашого дослідження є налаштування фазових координат на періодичні коливання навколо відповідних лінійних трендів [12]. Якщо імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій фазових координат нас влаштовують, то розв'язок вказаної задачі Коші дорівнює

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t).$$

Після встановлення значення розмірності  $n$  фазового простору і оптимального поділу макроекономічної системи на  $n$  секторів, відповідні випуски цих секторів будуть виступати у ролі керувань диференціального рівняння

(7). Припускаємо, що відносно вказаних випусків існують статистичні дані.

**Метод розв'язання задачі.** Для оцінювання диференціального рівняння (7) будемо користуватися *методами аналізу часових рядів* [13]. Припускаємо, що траєкторія руху динамічної системи подається адитивною комбінацією її складових. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Отже, регресійна модель траєкторій фазових координат (приростів ОФ секторів) має вигляд:

$$y_t - \bar{y} = c(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + \nu_t, \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (11)$$

де  $\omega_k$  – частота  $k$ -ї гармоніки;  $\alpha_k, \beta_k$  – вектори невідомих коефіцієнтів розкладу в *обрізаний ряд Фур'є*;  $\nu_t$  – вектор випадкових збурень. При вказаних значеннях частот вектор середніх значень залишків дорівнює нулю ( $\bar{\nu} = 0$ ).

Визначення періоду  $T$  коливань даної системи і встановлення частот із спектра (11), на які налаштовані гармонічні хвилі, будемо здійснювати за допомогою регресійної моделі, яка відповідає приросту ОФ всієї системи:

$$y_t - \bar{y} = c(t - \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) + \nu_t, \quad t = \overline{1, N}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{N}. \quad (12)$$

Фазові координати повинні бути обраними такими, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, ідентифіковані в (12). Оскільки кожний сектор має свою специфіку функціонування, то кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо вибраний сектор швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то йому відповідатиме максимальна кількість гармонік в розкладі (11), тобто  $n-1$  гармоніка. Мінімальна кількість гармонік буде відповідати тим секторам, які слабо реагують на зміни в інших секторах.

Метою даної роботи є ідентифікація моделі (7) і перевірка припущень Р. Солоу про пропорціональність інвестицій валовому випуску макроекономічної системи. Оскільки траєкторії випусків секторів нам невідомі, то будемо задовольняти диференціальне рівняння (7) в цілочисельних точках періоду ідентифікації. Для цього скористаємось статистичними даними по випускам секторів і складемо регресійну модель ( $h_t$  – випадкове збурення):

$$\dot{y}(t) - \bar{y} = -\lambda(y(t) - \bar{y}) + \mathbf{r}'(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}) + h_t, \quad t = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Якщо модель (7) буде оцінена, то тим самим ми можемо відновити статистичні дані по ОФ економіки в цілому. За допомогою (8) знаходимо значення ОФ  $k_0$  у початковий момент часу  $t_0$ , тоді співвідношення (9) дозволять відновити статистичну інформацію по ОФ на періоді ідентифікації. Крім того, якщо стануть відомими МНК-оцінки  $\hat{\mathbf{r}}$  вектора інтенсивностей  $\mathbf{r}$ , то за допомогою рівності

$$I_t = \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{x}_t \quad (14)$$

можна відновити невідомі статистичні дані про інвестування економіки.

**Практична реалізація алгоритму.** Апробація побудованої динамічної моделі Солоу проводилася на базі статистичних даних макроекономічного розвитку Франції [14]. Координатами фазового вектора у моделі є прирости ОФ секторів, а координати вектора керувань  $x$  – випуски секторів. Встановлено, що оптимальне значення об'єму вибірки  $N = 50$ , 1960 – 2009 рр. – період ідентифікації, 2010 – 2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності  $n$  фазового простору показує, що при рівні значущості  $\alpha = 0,005$  економіку Франції необхідно ділити на 5 секторів. У якості п'яти секторів вибиралися наступні: промисловість та сільське господарство (Industry; Agriculture); будівництво та транспорт (Construction; Transport); фінансовий сектор і нерухомість (Finance; Real estate); комунікації та наука (Communication; Science); сфера послуг (Service Industries).

Аналіз статистичної інформації показує, що економіка Франції розвивається циклічно (для всіх вказаних секторів і економіки в цілому фази підйому змінюються фазами спаду). Тому логічним є використання розкладання фазових координат на трендову та періодичну складові.

Чисельний експеримент підтверджує у випадку  $\alpha = 0,005$  наявність у макроекономіці Франції чотирьох значущих гармонік ( $k = 1, 2, 3, 6$ ). На прирости ОФ Франції суттєво впливають чотири основні гармоніки: *хвиля Кондратьєва* ( $k = 1$ ), *хвиля Кузнеця* ( $k = 3$ ), *хвиля Жугляра* ( $k = 6$ ) і проявляє себе також хвиля з періодом, що дорівнює половині періоду хвилі Кондратьєва ( $k = 2$ ).

Основним критерієм вибору п'яти секторів є присутність у траєкторіях приростів ОФ секторів вказаних чотирьох гармонік, причому гармонічні хвилі з іншими частотами повинні бути незначущими, оскільки вони є нехарактерними для макроекономіки Франції.

Оцінювання регресійної моделі приростів ОФ секторів дало такі значення коефіцієнтів  $R^2$  трендів, навколо яких відбуваються коливання (табл. 1).

Таблиця 1 – Коефіцієнти детермінації трендів

| № сектора | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | $\Sigma$ |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| $R^2$     | 0,8498 | 0,9335 | 0,9129 | 0,9459 | 0,8367 | 0,8910   |

Аналіз табл. 1 показує, що для деяких секторів (особливо для першого та п'ятого) і для економіки в цілому коливання ОФ навколо відповідного тренду є відчутними. Періодичні складові стають причиною підйому та спаду економіки, а їх взаємодія на певних проміжках часу приводить до кризових явищ. Тому є актуальним виділення характерних для даної системи гармонічних хвиль і дослідження їх впливу на економічний розвиток країни.

Частки дисперсій гармонік у загальній дисперсії коливань секторів ( $i = 1, n$ ) обчислюються за допомогою відповідних коефіцієнтів детермінації [12], значення яких наведені в табл. 2. Як бачимо, хвиля Кондратьєва ( $k = 1$ ) вносить основний вклад в коливання всіх секторів. Друга та третя хвилі впливають на коливальний процес секторів приблизно в однаковій мірі, а хвиля Жугляра ( $k = 6$ ) особливо проявляє себе у третьому секторі. Сумарний

вклад гармонік в дисперсію коливань приростів ОФ секторів становить від 93,88% (5-й сектор) до 98,52 (3-й сектор). Як бачимо, моделі коливань мають якісні імітаційні властивості, і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії приростів ОФ. Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій приростів ОФ приводяться в табл. 3.

Таблиця 2 – Коефіцієнти детермінації гармонік

| № сектора | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 6$ | $\Sigma$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 1         | 0,8882  | 0,0246  | 0,0258  | 0,0184  | 0,9570   |
| 2         | 0,9158  | 0,0304  | 0,0186  | –       | 0,9648   |
| 3         | 0,8775  | 0,0252  | 0,0120  | 0,0705  | 0,9852   |
| 4         | 0,8768  | 0,0340  | 0,0302  | 0,0175  | 0,9585   |
| 5         | 0,8894  | 0,0421  | 0,0073  | –       | 0,9388   |
| $\Sigma$  | 0,8915  | 0,0301  | 0,0274  | 0,0153  | 0,9643   |

Таблиця 3 – Якість модельних траєкторій приростів ОФ

| № сектора | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | $\Sigma$ |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| $R^2$     | 0,9999 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9999   |

Високі імітаційні властивості кривих приростів ОФ свідчать про адекватність одержаних модельних траєкторій статистичним даним, і тому можна переходити до параметричної ідентифікації моделі Солоу (7).

МНК-оцінювання регресійної моделі (13) дає наступні значення МНК-оцінок невідомих параметрів:

$$\hat{\lambda} = 0,0181, \quad \hat{r}_1 = 0,0818, \quad \hat{r}_2 = 0,1277, \quad \hat{r}_3 = 0,0957, \quad \hat{r}_4 = 0,0767, \quad \hat{r}_5 = 0,1162.$$

Отже, коефіцієнт амортизації економіки Франції становить 1,81%. Інтенсивності вкладень інвестицій у вибрані сектори суттєво різняться, вони змінюються від 0,0767 для 4-го сектора до 0,1277 для 2-го сектора. Це означає, що модель економічного зростання, запропонована Р. Солоу, потребує корегування. Поділ макроекономічної системи на сектори є доцільним, і тому виникає необхідність у побудові моделі Солоу  $n$  – секторної економіки.

Розроблений алгоритм параметричної ідентифікації моделі Солоу дозволяє оцінити невідоме значення ОФ економіки Франції у початковий момент часу  $t_0$ . Згідно формули (8) (одержуємо (в млн. євро):  $\hat{k}_0 = 2069860$ .

Отримані оцінки основних фондів у початковий момент часу дозволяють відновити статистичні дані ОФ, які нам були невідомі (відомі прирости ОФ). Тепер можна аналізувати траєкторії не приростів ОФ, а самих ОФ.

На рис. 1 приведені графіки модельної кривої ОФ та траєкторії відповідного коливання. Тут точками зображені відновлені статистичні дані на періодах ідентифікації (1960 – 2009 рр.) та прогнозування (2010 – 2011 рр. – дві останні точки), а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення у початковому 1960 році).

Аналіз рисунків свідчить про високоточні імітаційні властивості, а порівняння прогнозних значень з реальними даними (дві останні точки, що від-

повідують 2010 і 2011 рр.), – про високоточні прогностні властивості побудованої моделі Солоу.

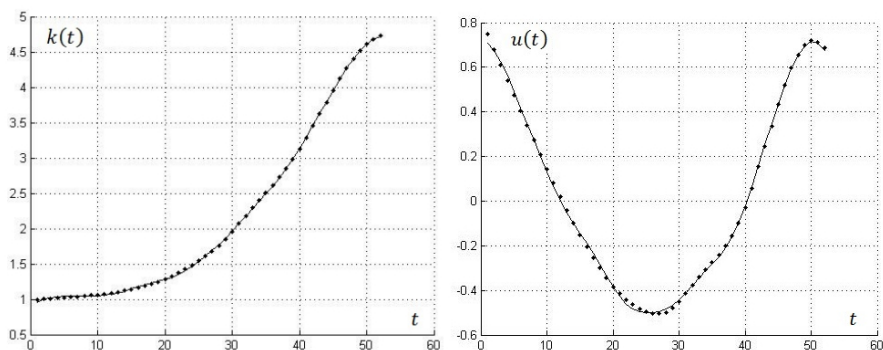


Рис. 1 – Модельні криві основних фондів та відповідних коливань.

Спробуємо спрогнозувати економічний розвиток Франції. Будемо виходити з модельної траєкторії ОФ (для зручності дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідне значення  $k_0$  у початковому 1960 році):

$$k(t)=2,0736+0,0744 t+0,5600 \cos (\omega_1 t)+0,0688 \sin (\omega_1 t)+0,0998 \cos (\omega_2 t)+ \\ +0,0011 \sin (\omega_2 t)+0,0478 \cos (\omega_3 t)-0,0121 \sin (\omega_3 t)+0,0068 \cos (\omega_6 t)+0,0026 \sin (\omega_6 t) .$$

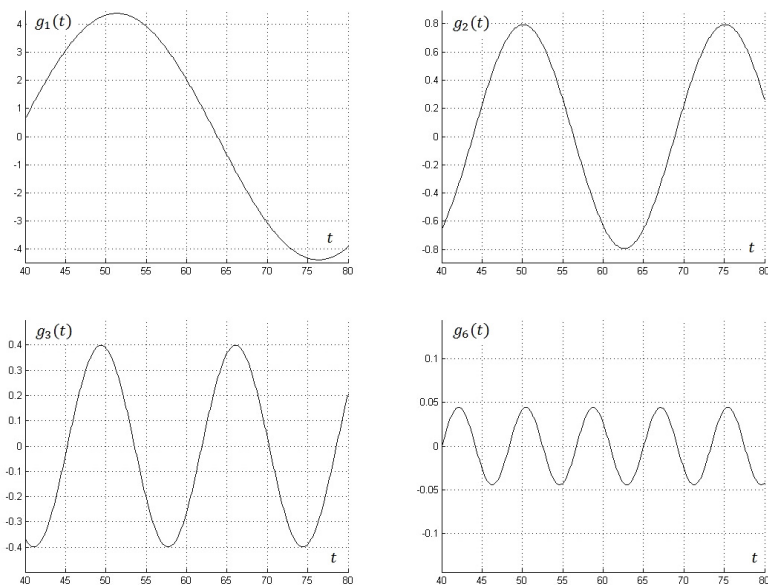


Рис. 2 – Модельні гармоніки, характерні для основних фондів.

На рис. 2 подані графіки всіх чотирьох гармонік за 1999 – 2039 рр. Аналіз показує, що починаючи з 1999 р. (рік введення євро) всі чотири гармоніки знаходяться у фазі підйому (вклад шостої гармоніки незначний, але фаза її спаду 2002 – 2006 рр. змінюється на фазу підйому 2006 – 2010 рр.). До 2008 р. включно всі гармоніки зростають, і тому період 1999 – 2008 рр. можна вважати «золотою ерою» Франції (і Західної Європи в цілому, оскільки Франція – одна з основних країн Євросоюзу).

Однак наприкінці 2008 р. надійшов сигнал від 3-ї гармоніки (вона вступила у фазу спаду). Аналогічні сигнали від 2-ї, 1-ї та 6-ї гармонік надійшли в 2009, 2011, 2011 рр. відповідно. Як наслідок, наприкінці 2008 р. почалася економічна криза, причиною якої стало те, що всі основні гармоніки вступили у фазу спаду. Обвалу економіки не відбувається, оскільки спочатку система рухається за інерцією (за рахунок тренду), а починаючи з кінця 2013 р. 6-а хвиля вступає у фазу підйому. З 2-ї половини 2016 р. починається фаза підйому хвилі Кузнеця, і тому слід очікувати поступового зростання економічного розвитку, яке посилиться починаючи з другої половини 2022 р. – входження 2-ї хвилі у фазу підйому. Отже, 2009 – 2022 рр. – не найкращі часи для Євросоюзу. А суттєвих змін слід очікувати починаючи з 2034 р., коли хвиля Кондратьєва увійде у фазу підйому.

**Висновки.** У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації модифікованої моделі Солоу макроекономічної динаміки. Аналіз імітаційних та прогнозних властивостей побудованої моделі вказує на її адекватність статистичним даним. Проводився аналіз і прогнозування розвитку макроекономічної системи за допомогою модельних гармонік, які характерні для основних фондів досліджуваної макроекономічної системи. У випадку макроекономіки Франції вказані причини економічної кризи 2008 – 2009 рр. і спрогнозовані подальші періоди економічного зростання.

Врахування взаємозв'язку підмножин динамічної системи розширює можливості математичного моделювання. У випадку макроекономічної динаміки виникає необхідність розглядати модель Солоу  $n$  – секторної економіки.

**Список літератури:** 1. *Колемаев В.А.* Математические методы в экономике. – М.: Юнити-Дана, 2005. – 297 с. 2. *Ramsay J.O., Hooker G., Campbell D., Cao J.* Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach // J. of the Royal Stat. Society. Series B. – 2007. – Part 5, No. 69. – P. 741 – 796. 3. *Горчаков А.А., Орлова И.В.* Компьютерные экономико-математические модели // Учебное пособие. – М. – Компьютер, Юнити, 1995. – 170 с. 4. *Альбрехт Э.Г.* Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2002. – Т.5. – С. 54 – 86. 5. *Juang J.N.* Applied System Identification // PTR Prentice Hall. Englewood Cliffs: NJ, 1994. – 394 p. 6. *Назаренко О.М.* Основы эконометрики // Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с. 7. *Solow R.M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – №70. – P. 65 – 94. 8. *Базилінська О.Я.* Макроекономіка // Вид. 2-ге, випр.: Навчальний посібник – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 442 с. 9. *Панорама экономической мысли конца XX столетия* под ред. Д. Гринзуэя, М. Блини, И. Стюарта // Перевод с английского под редакцией В.С. Автономова, С.А. Афонцева. – 2002. – Т.1. – 670 с. 10. *Leontief W.* Input-Output Economics // Oxford University Press, New York, 1986. – 436 p. 11. *Korotayev A.V., Tsirel S.V.* Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // Structure and Dynamics. – 2010. – Vol. 4. – No. 1. – P. 3 – 57. 12. *Назаренко О.М.* Ідентифікація та прогнозуван-

ня стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в  $n$  – вимірному просторі. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – № 37 (1010). – С. 90 – 104. **13.** Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики // М.: Юнити, 1998. – 1056с. **14.** INSEE. – <http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Kolemaev, V. A. *Matematicheskie metody v jekonomike*. Moscow: Juniti-Dana, 2005. Print. **2.** Ramsay, J. O., et al. "Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach." *J. of the Royal Stat. Society. Series B*. Vol. 5. No. 69. 2007. 741–796 Print. **3.** Gorchakov, A. A., and I. V. Orlova. *Komp'juternye jekonomiko-matematicheskie modeli: uchebnoe posobie*. Moscow: Komp'juter, Juniti, 1995. Print. **4.** Albrecht, Je. G. "Metodika postroenija i identifikacii matematicheskikh modelej makroekonomicheskikh processov." *Jelektronnyj zhurnal «Issledovan v Rossii»*. No. 5. 2002. 54–86. Print. **5.** Juang, J. N. *Applied System Identification*. PTR Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1994. Print. **6.** Nazarenko, O. M. *Osnovy ekonometriki*. Vyd. 2nd, pererob.: pidruchnyk. Kyiv: Centr navchal'noi' literatury, 2005. Print. **7.** Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics*. No. 70. 1956. 65–94 Print. **8.** Bazilins'ka, O. Ja. *Makroekonomika*. Vyd. 2nd, vypr.: navchal'nij posibnik. Kyiv: Centr uchbovoi' literatury, 2009. Print. **9.** *Panorama jekonomicheskoy mysli konca XX stoletija*. Ed. D. Grinjeujej, M. Blini, and I. Stjuart. Perevod s anglijskogo. Ed. V. S. Avtonomova, and S. A. Afonceva. Vol. 1. 2002. Print. **10.** Leontief, W. *Input-Output Economics*. New York: Oxford University Press, 1986. Print. **11.** Korotayev, A. V., and S. V. Tsirel. "Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis." *Structure and Dynamics*. Vol. 4. No 1. 2010. 3–57. Print. **12.** Nazarenko, O. M. "Identifikacija ta prognozuvannja stacionarnyh слабо formalizovanyh procesiv z efektom zapiznennja v  $n$  – vymirnomu prostori." *Visnyk NTU«KhPI»*. Ser.: Matematyčne modeljuvannja v tehničnii ta tehnologijah. No. 37 (1010). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 90–104 Print. **13.** Ajvazjan, S. A., and V. S. Mhitarjan. *Prikladnaja statistika i osnovy jekonomometriki*. Moscow: Juniti, 1998. Print. **14.** INSEE. "Banque de données macro-économiques." <INSEE>. Web. 02 March 2015 <<http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action>>.

Надійшла (received) 13.03.2015

УДК 629.083:621-113

**О.І. НАЗАРОВ**, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ, Харків;  
**Д.М. КЛЕЦ**, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ, Харків;  
**І.О. НАЗАРОВ**, аспірант, ХНАДУ, Харків

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗНОШУВАННЯ ДИСКОВИХ ГАЛЬМІВНИХ МЕХАНІЗМІВ ЛЕГКОВИХ АВТОМОБІЛІВ В УМОВАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Запропоновано математичну модель зношування поверхонь тертя дискових гальмівних механізмів легкового автомобіля під час екстрених гальмувань в експлуатаційних умовах. Для конкретних легкових автомобілів розглянуто роботу створеного алгоритму, наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту. Також розглянуто перспективи подальших досліджень для підвищення ресурсу дискових гальмівних механізмів.

**Ключові слова:** легковий автомобіль, дисковий гальмівний механізм, експлуатація.



**Вступ.** Практика експлуатації легкових автомобілів, а також аналіз причин виходу із ладу різних механізмів і вузлів достатньо впевнено свідчить про те, що більша їх частина втрачає працездатність не внаслідок поломок, а через зношування робочих поверхонь окремих деталей і спряжень. Багаточисленні дослідження [1] показали, що близько 70% виходу із ладу автомобілів під час експлуатації виникає через знос у вузлах тертя, особливо в гальмівних механізмах дискового типу, котрі в силу своєї високої швидкодії поглинають більшу частину кінетичної енергії автомобіля.

Безперервно зростаючі вимоги до якості ремонту автомобілів визначають необхідність підвищення ресурсу їх спряжених деталей.

Важливим для оцінки надійності гальмівних систем легкових автомобілів, що знаходяться в експлуатації, являється встановлення допустимого зносу окремих деталей і спряжень гальмівних механізмів із врахуванням їх довговічності. Оскільки найбільш відповідальна частина гальмівної системи автомобіля, якою є гальмівний механізм, працює в різних умовах зношування, то встановлення закономірності зносу спряжених деталей в залежності від зміни його геометричних параметрів і режимів роботи під час експлуатації являється актуальним.

**Аналіз останніх досягнень і публікацій.** В силу ряду причин (різні значення тисків та швидкостей відносного ковзання на поверхні тертя, неоднакове попадання абразиву під час експлуатації та ін.) знос деталей дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів може бути не рівномірним. Тому для повної характеристики величини зносу деталей необхідно знати його розподіл по поверхні тертя [2].

В результаті зносу спряження першої групи (накладка-диск) виникає зміна їх відносного положення, яку надалі будемо називати зносом спряження. Він є тією геометричною характеристикою, яка безпосередньо пов'язана із втратою автомобілем або його механізмом їх початкових службових властивостей.

**Мета роботи і постановка задачі.** Метою роботи є підвищення зносостійкості дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів, що експлуатуються. Для реалізації останнього слід оцінити параметри, якими можна характеризувати знос спряження, та зміну взаємного положення, до якого може призвести зношування їх поверхонь.

**Математична модель та алгоритм рішення задачі.** Щоб визначити параметри, якими можна характеризувати знос спряження, розглянемо, до якої зміни взаємного положення може призвести зношування їх поверхонь. При цьому велике значення мають конструктивні та кінематичні особливості даної пари, так як вони визначають характер і напрям можливого переміщення (зближення) деталей при зносі [2].

На рис. 1 показано схему для визначення зносу дискового гальмівного механізму, умовно розглядаючи знос спряжених деталей на одній поверхні тертя.

Перший випадок (рис. 1, а) характерний тим, що в деталей є напрямні,

які визначають напрям  $x-x$  можливого зближення спряжених деталей. Тому в даному випадку знос спряження може характеризуватись одним параметром  $U_{1-2}$  – величиною відносного зближення зношених деталей 1 і 2 в напрямку  $x-x$ .

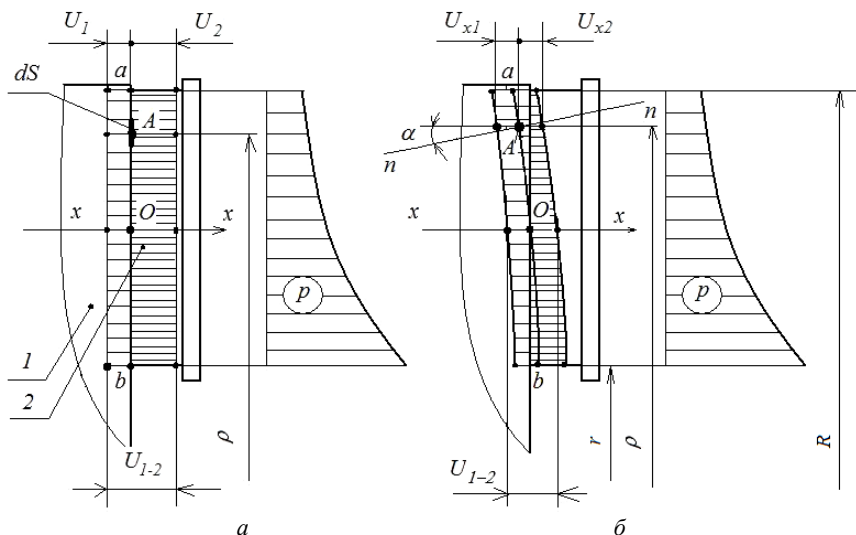


Рис. 1 – Схема для визначення зносу дискового гальмівного механізму: 1 – гальмівна колодка, 2 – гальмівний диск; а – перший випадок, б – загальний випадок.

Для того, щоб знайти залежність між зносом спряження  $U_{1-2}$  та лінійним зносом кожної деталі (гальмівного диска  $U_1$  і гальмівної колодки  $U_2$ ) в період експлуатації, розглянемо схему взаємного положення зношених деталей в період нормального зносу, коли має місце повне прилягання поверхонь.

Умовно зображено загальний випадок спряження поверхонь тертя після експлуатації з одного боку диска, що мають криволінійну твірну  $a-b$  із встановленою нормаллю до неї в точці  $A$  (рис. 1, б).

Якщо зближення деталей можливе лише в напрямі  $x-x$ , то сума зносів деталей, виміряна в напрямку можливого зближення, повинна бути постійною та дорівнювати зносу всього спряження

$$U_{1-2} = U_{x1} + U_{x2} = \text{const} . \quad (1)$$

Цю залежність [3] будемо називати *умовою контакту деталей*, так як вона характеризує одну важливу особливість протікання процесу зношування спряження під час експлуатації. Ця особливість полягає в тому, що при будь-якій формі зношеної поверхні деталей має місце повний контакт спряжених поверхонь. В силу цієї умови для будь-якої точки поверхні повинно бути справедливим співвідношення [3]

$$U_{1-2} = (U_1 + U_2) / \cos \alpha , \quad (2)$$

де  $\alpha$  – кут між нормаллю до поверхні тертя та напрямом можливого зближення деталей.

Якщо зобразити положення деталей після їх зношування, то графічно знос кожної з деталей буде представлено епюрою, розташованою в «тілі» другої деталі (рис. 1). Сумарна епюра буде являти собою деяку область взаємного врізання, обмежену кривими, які визначають форму спряжених поверхонь, а її площа характеризуватиме кількість зношеного матеріалу.

Область розділена на дві частини площиною, яка визначає форму поверхні тертя обох деталей до зношування, що дозволяє визначити величину зносу кожного тіла після експлуатації.

Залежність [3] між швидкостями зношування спряження  $\gamma_{1-2}$  та швидкостями зношування поверхонь тертя  $\gamma_1, \gamma_2$  слідує із (1) і (2):

$$\gamma_{1-2} = (\gamma_1 + \gamma_2) / \cos \alpha. \quad (3)$$

Властивість пари матеріалів під час зношування характеризуються співвідношенням їх швидкостей зношування  $\psi = \gamma_1 / \gamma_2 = U_1 / U_2$ , значення якого залежить від закону зношування та є функцією швидкостей ковзання і тиску на поверхнях тертя.

Тоді наступні залежності, одержані з урахуванням (3), враховуючі спільну дію спряжених поверхонь тертя та законів зношування матеріалів пари, будуть являтися основними під час розрахунку спряжень на знос [3]:

$$\gamma_1 = \gamma_{1-2} \cdot \cos \alpha (\psi / (1 + \psi)); \quad (4)$$

$$\gamma_2 = \gamma_{1-2} \cdot \cos \alpha (\psi / (1 + \psi)). \quad (5)$$

Закони зношування, знання яких необхідні для рішення поставленої задачі, повинні для даних умов визначати співвідношення між швидкістю зношування кожної із спряжених деталей  $\gamma_1, \gamma_2$ , тиском на поверхні тертя  $p$  та швидкістю відносного ковзання  $\mathcal{G}$ .

Із формул (4) і (5) слідує, що форма зношених поверхонь спряжених деталей, яка визначається значеннями зносів  $U_i = \gamma_i \cdot T$  в кожній точці поверхні тертя, залежить від кута  $\alpha$  та співвідношення зносів  $\psi$ .

Як показують дослідження [2], в багатьох випадках можуть бути прийнятими степеневі закони зношування в загальному вигляді

$$\gamma_1 = k_1 \cdot p^{m_{p1}} \cdot \mathcal{G}^{m_{v1}}; \quad (6)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cdot p^{m_{p2}} \cdot \mathcal{G}^{m_{v2}}, \quad (7)$$

де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти, що характеризують швидкість зношування контр тіл [2].

Для розгляданого випадку абразивного зношування величина зносу пропорційна тиску і шляху тертя, тобто  $m_{pi} = m_{vi} = 1$  [3], тоді залежності (6) і (7) мають вигляд

$$\gamma_1 = k_1 \cdot p \cdot \mathcal{G}; \quad (8)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cdot p \cdot \mathcal{G}. \quad (9)$$

В даному випадку властивості пари матеріалів під час зношування можуть характеризуватись співвідношенням швидкостей зношування

$$\psi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{k_1}{k_2} = const. \quad (10)$$

Якщо показники степенів ( $m_{pi} = m_{vi} \neq 1$ ) рівні для обох матеріалів, але не дорівнюють одиниці, то [2]

$$\gamma_1 = k_1 \cdot p^{m_{p1}} \cdot \mathcal{G}^{m_v}; \quad (11)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cdot p^{m_{p2}} \cdot \mathcal{G}^{m_v}. \quad (12)$$

В даному випадку співвідношення зносів матеріалів також зберігається постійним:  $\psi = const$ .

Але можливий випадок, коли лише два показники рівні між собою, наприклад,  $m_{p1} = m_{p2} = m_p$ , тоді маємо

$$\gamma_1 = k_1 \cdot p^{m_p} \cdot \mathcal{G}^{m_{v1}}; \quad (13)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cdot p^{m_p} \cdot \mathcal{G}^{m_{v2}}. \quad (14)$$

В такому разі співвідношення  $\psi = var$  зносів матеріалів являється змінним та залежить від швидкості відносного ковзання  $\mathcal{G}$ .

Коли, наприклад,  $m_{v1} = m_{v2} = m_v$ , то співвідношення  $\psi = var$  зносів матеріалів також не є постійним та залежить від тиску  $p$  на поверхні тертя.

Для заданої швидкості відносного переміщення спряжених деталей кожна точка А на поверхні тертя з координатами ( $\rho, x$ ) має свою кругову швидкість ковзання (рис. 1)

$$\mathcal{G} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \rho = \omega \cdot \rho, \quad (15)$$

де  $\omega = d\varphi/dt$  – кутова швидкість однієї з спряжених деталей (диск гальмівний) відносно іншої деталі (гальмівна колодка) на момент початку гальмування автомобіля;  $\rho$  – радіус обертання точки, яка розглядається (рис. 1).

Підставляючи (15) в (6) і (7), одержимо закон зношування спряжених деталей у вигляді функціональної залежності  $\gamma_i = f_i(\rho, p)$ , а використавши вираз (3), маємо залежність швидкості зношування спряження  $\gamma_{1-2} = F_1(p, \rho)$ .

Якщо закон зношування відповідає (8) і (9), то враховуючи залежність швидкості ковзання (15) від радіуса тертя та числа обертів, одержимо

$$\gamma_1 = \omega \cdot \rho \cdot k_1 \cdot p; \quad (16)$$

$$\gamma_2 = \omega \cdot \rho \cdot k_2 \cdot p. \quad (17)$$

Використовуючи формулу (3) та враховуючи, що для дискового гальмівного механізму  $\alpha = 0$ , одержимо

$$\gamma_{1-2} = \omega \cdot \rho \cdot (k_1 + k_2) \cdot p. \quad (18)$$

Звідки вираз для епюри тиску на поверхні колодки

$$p = \frac{\gamma_{1-2}}{\omega \cdot \rho \cdot (k_1 + k_2)}. \quad (19)$$

Залежність між приводною силою  $Q$  та епюрним тиском  $p$  і тиском гальмівної рідини  $p_1$  в колісному циліндрі діаметром  $d_u$  передніх коліс знайдемо, використовуючи формулу

$$Q = \int_S p \cdot dS = \frac{\pi d_u^2 \cdot p_1}{4} . \quad (20)$$

Підставляючи значення  $p$  із (19) та замість  $dS = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$ , маємо

$$Q = \frac{\gamma_{1-2}}{\omega \cdot (k_1 + k_2)} \int_r^R \frac{\rho \cdot d\rho}{\rho} = \gamma_{1-2} \cdot \frac{R - r}{\omega \cdot (k_1 + k_2)} , \quad (21)$$

де  $R$ ,  $r$  – зовнішній і внутрішній радіуси гальмівного диску.

Вирішуючи відносно  $\gamma_{1-2}$ , одержимо формулу для визначення швидкості зношування спряження в разі  $m_{pi} = m_{vi} = 1$  :

$$\gamma_{1-2} = \frac{(k_1 + k_2) \cdot \omega}{R - r} \cdot Q . \quad (22)$$

Після підстановки (22) у (19) та перетворень одержимо залежність розподілу тиску на поверхні тертя в разі  $m_{pi} = m_{vi} = 1$ , що має вигляд гіперболи (рис. 1)

$$p = \frac{Q}{R - r} \cdot \frac{1}{\rho} . \quad (23)$$

Значення зносів спряжених деталей (1 – колодка; 2 – диск, рис. 1) в кожній точці поверхні тертя та форму кривої одержимо за умови  $m_{pi} = m_{vi} = 1$ ,  $\psi = k_1 / k_2 = \text{const}$ ,  $\alpha = 0$ , приймаючи до уваги, що величина зносу пропорційна швидкості зносу,

$$U_i = k_i \cdot T_i \cdot (Q \cdot \omega) / (R - r) , \quad (24)$$

де  $T_i$  – час зношування або час гальмування до моменту блокування коліс автомобіля.

Кутова швидкість обертання гальмівного диска на момент початку гальмування може бути визначена за умови відсутності буксування колеса як

$$\omega = g_a / r_k , \quad (25)$$

де  $g_a$  – початкова швидкість гальмування легкового автомобіля;  $r_k$  – кінематичний радіус колеса.

Отже, з урахуванням (20) значення зносів спряжених деталей в кожній точці поверхні тертя дискового гальма визначимо за залежністю

$$U_i = k_i \cdot \frac{\pi d_{ui}^2 \cdot p_1 \cdot g_a}{2(D_i - d_i) \cdot r_{ki}} \cdot T_i , \quad (26)$$

де  $D_i$ ,  $d_i$  – зовнішній і внутрішній діаметри гальмівного диску.

Одержана закономірність (26) для визначення граничного зносу  $i$ -го контртіла дискового механізму дозволяє оцінювати його за будь-який період експлуатації за певних режимів роботи при екстрених гальмуваннях.

Час гальмування автомобіля визначається за умови погашення інерції

поступального і обертowego руху мас легкового автомобіля за рахунок гальмівних сил з урахуванням сили лобового опору:

$$0,5(m_a \cdot g_a^2 + \sum I_i \cdot \omega^2) = (P_{T1} + P_{T2} + P_{wx}) \cdot s_T, \quad (27)$$

де  $\sum I_i$  – сумарний інерційний момент обертowych мас на осях;  $m_a$  – маса легкового автомобіля;  $g_a$  – початкова швидкість гальмування автомобіля;  $P_{T1}, P_{T2}$  – осьові гальмівні сили;  $s_T$  – гальмівний шлях автомобіля;  $P_{wx}$  – сила лобового опору автомобіля, яка визначається як [4]

$$P_{wx} = K_0 \cdot F_w \cdot g_a^2, \quad (28)$$

$K_0$  – коефіцієнт обтічності кузова легкового автомобіля (для седанів приймається рівним  $0,35 \text{ кг/м}^3$ );  $F_w$  – площа лобового опору легкового автомобіля (приймається рівна добутку відповідних його габаритних розмірів).

Враховуючи те, що осьові гальмівні сили легкового автомобіля визначаються через конструктивні коефіцієнти гальмівних механізмів  $K_1, K_2$  і тиски гальмівної рідини у відповідних контурах, як  $P_{T1} = p_1 \cdot K_1$  і  $P_{T2} = p_2 \cdot K_2$ , то, гальмівний шлях автомобіля із (27)

$$s_T = \frac{0,5(m_a \cdot g_a^2 + \sum I_i \cdot \omega^2)}{p_1 \cdot K_1 + p_2 \cdot K_2 + K_0 \cdot F_w \cdot g_a^2}, \quad (29)$$

де  $p_1$  – тиск в контурі передніх коліс автомобіля, що визначається, як

$$p_1 = (m_a \cdot g \cdot \varphi) / (K_1 + K_2), \quad (30)$$

$\varphi$  – коефіцієнт зчеплення коліс із опорною поверхнею дороги;  $K_1, K_2$  – конструктивні коефіцієнти гальмівних механізмів;  $p_2$  – тиск в контурі задніх коліс автомобіля, що визначається, як

$$p_2 = p_{10} + (p_1 - p_{10}) \cdot k_0, \quad (31)$$

$p_{10}$  – тиск в першій точці характеристики регулювання;  $k_0$  – коефіцієнт підсилення тиску.

Враховуючи геометричні параметри дискових гальмівних механізмів, що застосовуються на передній осі, та параметри барабанних гальмівних механізмів, що застосовуються на задній осі легкових автомобілів, можна встановити, що визначені конструктивні коефіцієнти гальмівних механізмів становлять:

- для Lanos Daewoo  $K_1 = 8,47 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $K_2 = 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;
- для Lada Priora  $K_1 = 9,53 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $K_2 = 2,93 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;
- для Chevrolet Aveo  $K_1 = 9,94 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $K_2 = 3,41 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;
- для Kia Forza  $K_1 = 9,94 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $K_2 = 3,40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

З іншого боку гальмівний шлях автомобіля зв'язаний із часом гальмування та уповільненням відомою залежністю [4]

$$s_T = g_a \cdot T_i - 0,5j \cdot T_i^2, \quad (32)$$

де  $j$  – величина вповільнення легкового автомобіля в даних експлуатаційних умовах, що характеризуються коефіцієнтом зчеплення  $\varphi$  коліс із опорною поверхнею дороги,

$$j = \frac{1}{m_a} \cdot \left[ p_1 \cdot K_1 + p_2 \cdot K_2 + K_0 \cdot F_w \cdot g_a^2 \right]. \quad (33)$$

Вирішуючи (32) відносно  $T_i$ , одержимо залежність для часу гальмування у вигляді

$$T_i = (g_a \pm \sqrt{g_a^2 - 2j \cdot s_T}) / j, \quad (34)$$

причому повинна виконуватись нерівність  $s_T \leq g_a^2 / 2\varphi \cdot g$ .

В нашому випадку практичний інтерес має найбільше значення  $T_i$ .

**Результат моделювання.** Для порівнювання відносних зносів спряжених поверхонь дискових гальмівних механізмів двох різних моделей легкових автомобілів з різними законами регулювання приводного тиску застосуємо одержану формулу

$$\delta_i = \left( 1 - \frac{U_{1i}}{U_{2i}} \right) \cdot 100\% = \left( 1 - \left( \frac{d_{u1}}{d_{u2}} \right)^2 \cdot \frac{k_{1i}}{k_{2i}} \cdot \frac{T_{1i}}{T_{2i}} \cdot \frac{D_2 - d_2}{D_1 - d_1} \right) \cdot 100\%, \quad (35)$$

де  $U_{1i}, T_{1i}$  – знос та час зношування  $i$ -го елемента дискового гальмівного механізму легкового автомобіля, що порівнюється;  $U_{2i}, T_{2i}$  – знос та час зношування  $i$ -го елемента дискового гальмівного механізму легкового автомобіля, з яким порівнюється.

Таблиця 1 – Параметри легкових автомобілів

| Автомобіль     | Значення параметрів |                  |                                |               |               |               |                           |
|----------------|---------------------|------------------|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------------------|
|                | $m_a$ ,<br>кг       | $d_{ui}$ ,<br>мм | $\sum I_i$ , кг·м <sup>2</sup> | $r_k$ ,<br>мм | $d_i$ ,<br>мм | $D_i$ ,<br>мм | $F_w$ ,<br>м <sup>2</sup> |
| Daewoo Lanos   | 1595                | 48               | 0,654                          | 313           | 198           | 256           | 2,136                     |
| Lada Priora    | 1578                | 50               |                                |               | 174           | 260           | 2,118                     |
| Chevrolet Aveo | 1455                | 52               |                                |               | 156           | 236           | 2,225                     |
| Kia Forza      | 1575                | 54               |                                |               | 162           | 256           | 2,249                     |

Оскільки на даний момент часу не існує точних значень коефіцієнтів  $k_i$ , що характеризують швидкість зношування контртіл дискових гальмівних механізмів, то будемо визначати, застосовуючи одержану залежність (35), відносні зноси їх однойменних поверхонь тертя для автомобілів однієї моделі, але з різними законами регулювання приводного тиску, за спрощеною формулою

$$\delta_i = (1 - (T_{1i} / T_{2i})) \cdot 100\%. \quad (36)$$

Умови зношування: екстрене гальмування на сухій горизонтальній асфальтобетонній дорозі  $\varphi = 0,8$  при початковій швидкості гальмування 10 –

35 м/с.

В якості досліджуваних автомобілів приймемо Daewoo Lanos, Lada Priora, Chevrolet Aveo і Kia Forza з повною масою, обладнаними шинами 185/70 R14 та конструктивними параметрами, поданими у табл. 1, та розрахунковими значеннями зміни приводного тиску в залежності від застосовуваного закону розподілу гальмівних сил.

Для порівняння відносних зносів контртіл дискових гальмівних механізмів приймемо наступні закони зміни приводного тиску в контурах:

а) для легкового автомобіля з повною масою, що порівнюється, – новий закон [5], що забезпечує тиск в контурах гальмівного привода  $p_1 = p_2$  (табл. 2), визначений за (30);

б) для легкового автомобіля з повною масою, з яким порівнюється, – існуючий закон [6], що забезпечує зменшений тиск  $p_2$  в контурах задніх гальмівних механізмів, визначений за (31) при тиску в першій точці характеристики регулювання  $p_{10} = 3$  МПа і коефіцієнту підсилення тиску  $k_0 = 0,1$  (табл. 2).

Таблиця 2 – Розрахункові значення приводного тиску легкових автомобілів

| Закон зозподілу гальмівних сил | Легковий автомобіль                      |                              |                             |                             |
|--------------------------------|------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
|                                | Daewoo Lanos                             | Lada Priora                  | Chevrolet Aveo              | Kia Forza                   |
|                                | Тиск у контурах гальмівного привода, МПа |                              |                             |                             |
| новий                          | $p_1 = p_2 = 11,2$                       | $p_1 = p_2 = 10,1$           | $p_1 = p_2 = 8,7$           | $p_1 = p_2 = 9,5$           |
| існуючий                       | $p_1 = 11,2$<br>$p_2 = 3,82$             | $p_1 = 10,1$<br>$p_2 = 3,71$ | $p_1 = 8,7$<br>$p_2 = 3,57$ | $p_1 = 9,5$<br>$p_2 = 3,65$ |

Розрахункові значення, одержані за допомогою залежностей (32), (33), (34) і (36), зведено до табл. 3, де в чисельнику вказано значення параметрів за новим законом регулювання приводного тиску, а в знаменнику – за існуючим.

Таблиця 3 – Розрахункові дані

| Автомобіль     | Початкова швидкість гальмування автомобіля, $g_a$ |              |              |                   |                           |              |              |                   |
|----------------|---------------------------------------------------|--------------|--------------|-------------------|---------------------------|--------------|--------------|-------------------|
|                | 10 м/с (36 км/год)                                |              |              |                   | 15 (54 км/год)            |              |              |                   |
|                | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup>                         | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup> | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% |
| 1              | 2                                                 | 3            | 4            | 5                 | 6                         | 7            | 8            | 9                 |
| Daewoo Lanos   | 8,04                                              | 6,25         | 1,30         | 17,7              | 8,09                      | 13,95        | 2,05         | 18,0              |
|                | 6,69                                              | 7,50         | 1,58         |                   | 6,75                      | 16,74        | 2,50         |                   |
| Lada Priora    | 8,02                                              | 6,26         | 1,30         | 16,1              | 8,08                      | 13,98        | 2,06         | 15,6              |
|                | 6,84                                              | 7,35         | 1,55         |                   | 6,89                      | 16,39        | 2,44         |                   |
| Chevrolet Aveo | 8,04                                              | 6,25         | 1,31         | 16,0              | 8,10                      | 13,95        | 2,07         | 15,9              |
|                | 6,83                                              | 7,35         | 1,56         |                   | 6,90                      | 16,38        | 2,46         |                   |
| Kia Forza      | 8,05                                              | 6,23         | 1,31         | 16,0              | 8,12                      | 13,92        | 2,06         | 16,6              |
|                | 6,80                                              | 7,38         | 1,56         |                   | 6,86                      | 16,46        | 2,47         |                   |



Продовження табл. 3

| Автомобіль     | Початкова швидкість гальмування автомобіля, $g_a$ |              |              |                   |                           |              |              |                   |
|----------------|---------------------------------------------------|--------------|--------------|-------------------|---------------------------|--------------|--------------|-------------------|
|                | 20 м/с (72 км/год)                                |              |              |                   | 25 м/с (90 км/год)        |              |              |                   |
|                | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup>                         | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup> | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% |
| 1              | 2                                                 | 3            | 4            | 5                 | 6                         | 7            | 8            | 9                 |
| Daewoo Lanos   | 8,18                                              | 24,56        | 2,85         | 17,9              | 8,28                      | 37,88        | 3,68         | 18,2              |
|                | 6,83                                              | 29,40        | 3,47         |                   | 6,94                      | 45,23        | 4,50         |                   |
| Lada Priora    | 8,16                                              | 24,6         | 2,85         | 15,9              | 8,27                      | 37,95        | 3,69         | 15,9              |
|                | 6,98                                              | 28,8         | 3,39         |                   | 7,08                      | 44,31        | 4,39         |                   |
| Chevrolet Aveo | 8,20                                              | 24,5         | 2,87         | 16,3              | 8,32                      | 37,75        | 3,72         | 16,4              |
|                | 6,99                                              | 28,7         | 3,43         |                   | 7,11                      | 44,12        | 4,45         |                   |
| Kia Forza      | 8,20                                              | 24,48        | 2,85         | 16,9              | 8,32                      | 37,74        | 3,69         | 16,9              |
|                | 6,95                                              | 28,9         | 3,43         |                   | 7,06                      | 44,4         | 4,44         |                   |

Закінчення табл. 3

| Автомобіль     | Початкова швидкість гальмування автомобіля, $g_a$ |              |              |                   |                           |              |              |                   |
|----------------|---------------------------------------------------|--------------|--------------|-------------------|---------------------------|--------------|--------------|-------------------|
|                | 30 м/с (108 км/год)                               |              |              |                   | 35 м/с (126 км/год)       |              |              |                   |
|                | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup>                         | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% | $j$ ,<br>м/с <sup>2</sup> | $s_T$ ,<br>м | $T_i$ ,<br>с | $\delta_i$ ,<br>% |
| 1              | 2                                                 | 3            | 4            | 5                 | 6                         | 7            | 8            | 9                 |
| Daewoo Lanos   | 8,41                                              | 53,7         | 4,56         | 18,3              | 8,57                      | 71,8         | 5,48         | 18,5              |
|                | 7,07                                              | 63,95        | 5,58         |                   | 7,22                      | 85,2         | 6,72         |                   |
| Lada Priora    | 8,40                                              | 53,8         | 4,57         | 16,1              | 8,56                      | 71,93        | 5,49         | 16,3              |
|                | 7,21                                              | 62,67        | 5,45         |                   | 7,36                      | 83,53        | 6,56         |                   |
| Chevrolet Aveo | 8,46                                              | 53,41        | 4,62         | 16,5              | 8,64                      | 71,23        | 5,56         | 16,5              |
|                | 7,26                                              | 62,25        | 5,53         |                   | 7,44                      | 82,7         | 6,66         |                   |
| Kia Forza      | 8,45                                              | 53,46        | 4,58         | 17,0              | 8,62                      | 71,39        | 5,51         | 17,0              |
|                | 7,20                                              | 62,75        | 5,52         |                   | 7,36                      | 83,5         | 6,64         |                   |

За даними табл. 3 побудовано гістограму розподілу відносного зносу  $\delta_i$ , %, контртіл дискових гальм легкових автомобілів (рис. 2).

Аналіз гістограми (рис. 2) показує, що за рівних умов експлуатації легкових автомобілів при введенні регулювання гальмівних сил по новому закону в порівнянні із існуючим (компенсацією приводного тиску), відносний знос однойменних контртіл дискових гальмівних механізмів, встановлених на передній осі, може бути зниженим на 16,3 – 18,5%.

Отже, що є можливості для підвищення ресурсу дискових гальм легкових автомобілів, необладнаних протиблокувальними системами, із збереженням необхідної ефективності гальмування.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспектив-

ними напрямки досліджень, пов'язані зі збільшенням ресурсу контртіл дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів, що експлуатуються.

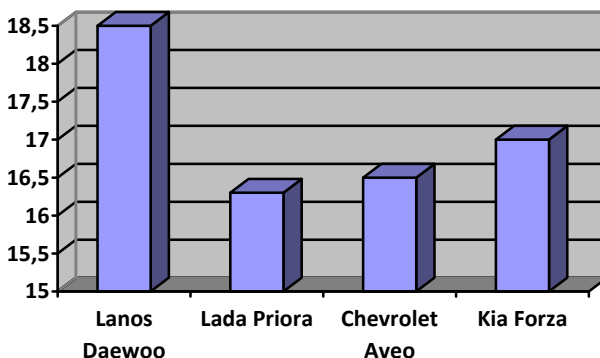


Рис. 2 – Гістограма розподілу відносного зносу контртіл дискових гальм легкових автомобілів.

**Висновки.** Отже, строк служби контртіл дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів, що експлуатуються, можна підвищити за рахунок установки динамічних регуляторів гальмівних сил, які реалізують новий спосіб [5] регулювання гальмівних сил між осями автомобіля, на 16,3 – 18,5%.

**Список литературы:** 1. Лудченко О.А. Технічне обслуговування та ремонт автомобілів: Підручник. – К.: Знання-Прес, – 2003. – 511 с. 2. Хрущов М.М. Повышение износостойкости и срока службы машин. Новые методы определения износа деталей машин. – М.: Машгиз, – 1953. – С. 22 – 26. 3. Расчетные методы оценки трения и износа: сб. научн. трудов. [ред. Крагельский И.В. и др.]. – Брянск: Приокское книжное изд-во, – 1975. – 234 с. 4. Агейкин Я.С., Вольская Н.С. Теория автомобиля: учеб. пособ. – М.: МГИУ, – 2008. – 318 с. 5. Подригало М.А., Назаров В.І., Назаров О.І., Назаров І.О. Спосіб регулювання гальмівних сил між осями легкового автомобіля. ХНАДУ. Україна. Патент на корисну модель. №75406. В60Т 11/00. Опубл. 26.11.12. – 4с. 6. Подригало М.А., Волков В.П., Карпенко В.А. и др. Стабильность эксплуатационных свойств колесных машин / под ред. М.А. Подригало. – Харьков: ХНАДУ, – 2003. – 614 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Ludchenko, O. A. *Tekhnichne obslugovuvannya ta remont avtomobiliv: pidruchnik*. Kyiv: Znannja-Pres, 2003. Print. 2. Hrushhlov, M. M. "Povyshenie iznosostojkosti i sroka sluzhby mashin. Nove metody opredelenija iznosa detalej mashin." Moscow: Mashgiz, 1953. 22–26. Print. 3. *Raschetnye metody ocenki trenija i iznosa: sb. nauchn. trudov*. Ed. I. V. Kragel'skij, et al. Bryansk: Priokskoe knizhnoe izd-vo, 1975. Print. 4. Agejkin, Ya. S., and N. S. Vol'skaja. *Teorija avtomobilja: ucheb. posob*. Moscow: MGIU, 2008. Print. 5. Podrygalo, M. A., et al. "Sposib reguljuvannja gal'mivnyh syl mizh osjamy legkovogo avtomobilja." Ukrai'na, assignee. Patent na korisnu model' UA № 75406. V60T 11/00. Opubl. 26 November 2012. 6. Podrigalo, M. A., et al. *Stabilnost' jekspluatacionnyh svojstv koljosnyh mashin*. Ed. M. A. Podrigalo. Kharkov: HNADU, 2003. Print.

Надійшла (received) 14.11.2014

**О.Б. ПАНАМАРЬОВА**, канд. техн. наук, викладач ХКТК НТУ «ХП»

## **ПРОЕКТУВАННЯ ДИСПЕРГУЮЧОГО ПРИСТРОЮ ДЛЯ ГІДРОАГРЕГАТИВ ЖИВЛЕННЯ ГІДРОСИСТЕМ**

Розглядається диспергуючий пристрій, застосування якого в гідроагрегатах живлення для гідросистем дозволяє підвищити ступінь очищення робочих рідин. Запропонована математична модель робочого процесу диспергуючого пристрою, на підставі якої проведені дослідження впливу його робочих параметрів на конструктивні. Результати моделювання профілю проточної частини диспергуючого пристрою дозволяють сформулювати рекомендації по вибору його раціональних параметрів, а наведена математична модель може бути застосована при моделюванні конструктивно подібних пристроїв.

**Ключові слова:** диспергуючий пристрій, робоча рідина, математична модель, робочий процес, гідроагрегат.

**Вступ.** Досвід використання об'ємних гідроагрегатів (ГА) свідчить про те, що при виконанні певних вимог до чистоти робочої рідини (РР) гідросистем вдається підвищити їх надійність, продовживши термін безвідмовної роботи, підвищити технічний рівень. Очищення масел за допомогою фільтрів (або інших очищувачів) є найбільш ефективним засобом забезпечення чистоти РР. Але фільтруючими елементами екстрагуються не всі механічні домішки, які виникають внаслідок спрацювання гідроапаратів, а встановлення фільтрів тонкої очистки знижує енергетичні показники гідроагрегатів живлення для гідросистем, а отже зменшують їх конкурентоспроможність. Застосування диспергуючих пристроїв (ДП) дозволяє суттєво підвищити ступінь очищення РР, а отже продовжити термін безвідмовної експлуатації ГА та підвищити їх технічний рівень. ДП в ГА живлення гідросистем виконують функцію диспергування механічних домішок, які не екстрагуються фільтруючими елементами та сприяють підвищенню активності присадок у гідравлічних маслах. Таким чином, проектування та раціональний вибір ДП для ГА живлення гідросистем є актуальним науковим завданням.

**Аналіз останніх досліджень.** Досить докладно питання доцільності та переваги використання ДП в об'ємних ГА розглянуті у роботах [1 – 3]. Зокрема у роботі [3] розглядається класифікація ДП залежно від принципу роботи, схем побудови, особливостям монтажу та експлуатації. Однак, в цій та інших роботах, де розглядаються ДП, не наведено математичних моделей їх робочих процесів, рекомендацій для вибору раціональних параметрів, профілювання проточної частини, що забезпечить зменшення непродуктивних втрат енергії.

В ній доведена доцільність використання ДП ударного принципу дії, у якому потік РР вдаряється об тверду, розташовану перпендикулярно вісі потоку рідини стінку і який не оказує шкідливого впливу на РР, на відміну від ДП, в яких відбувається руйнування механічних часток за рахунок створення активної кавітаційної зони, або за рахунок вібраційного впливу на РР. Слід

зазначити, що ДП ударного типу простий в експлуатації, однак потребує через 1000...1500 год. перевірку плоскостності ковадла, яка руйнується через абразивне зношення. В наведених літературних джерелах, як і в інших, нами не виявлено рекомендацій по проектуванню, розробці математичних моделей робочого процесу ДП.

**Постановка задачі.** Задача статі полягає у формулюванні рекомендацій по вибору раціональних параметрів ДП для гідросистем, на базі запропонованої математичної моделі його робочого процесу.

**Конструкція та принцип дії ДП.** Зазвичай ДП виконаний у вигляді розташованих у корпусі 1 (рис. 1) рухомого сопла 2 із ковадлом 3, в якому є отвір для відведення РР. У корпусі 1 розташована пружина 4, на яку спірається ковадло 3, і які разом утворюють переливний клапан.

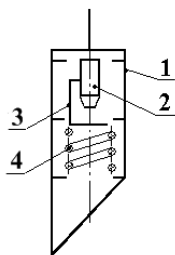


Рис. 1 – Схема ДП: 1 – корпус;  
2 – сопло; 3 – ковадло; 4 – пружина.

Працює ДП наступним чином: при надходженні до корпуса 1, РР отримує розгін у соплі 2 і вдарається об ковадло 3. У результаті чого механічні домішки диспергуються на частки розміром 5 – 6 мкм і менше, після чого РР відводиться до зливної частини баку через отвір у ковадлі 3. Якщо тиск перевищує зусилля налаштування пружини 4, то диспергатор, утворений соплом 2 і ковадлом 3, переміщується у бік пружини, і масло, мінаючи сопло, через отвір, що утворюється між ДП, надходить на

злив.

ДП встановлюється у допоміжну лінію гідросистеми (підживлення пристроїв регулювання, керування насосів та гідроапаратури). Також допускається його встановлення до основної лінії у випадку об'єднання процесів дроселювання та диспергування, які не викликають зміни характеристик навантаження, не впливають на швидкість виконавчого механізму та не створюють додаткових втрат потужності [4].

**Математична модель робочого процесу ДП для гідросистем.** Вибір раціональних конструктивних параметрів ДП проводять за математичною моделлю його робочого процесу.

При складанні математичної моделі ДП прийнято наступні припущення. Товщина стінок трубопроводу та каналу, яка визначена з умови їх міцності, достатньо велика, що дозволяє вважати, що їх діаметр не залежить від внутрішнього тиску, а їх пружні властивості враховуються приведеним модулем об'ємної пружності РР. Початковими ділянками трубопроводів та з'єднувальних каналів, на яких відбувається формування профілів швидкостей РР, нехтували, вважали, що довжина каналів та трубопроводів значно перевищує їх діаметр. Кавітація, резонанс і гідравлічний удар у ДП відсутні. РР вважали

ньютонівською. Відсутній розрив РР, швидкість звуку –  $c$ , з урахуванням пружних властивостей трубопроводів, значно більша за швидкість руху РР.

З урахуванням прийнятих припущень, математична модель ДП представлена рівняннями:

– руху рухомого елемента ДП

$$m_{\text{дп}} \ddot{x}_{\text{дп}} = A_c \Delta p_{\text{дп}}(t) + F_{\text{пр дп}}(t) + F_{\text{гд дп}}(t) + F_{\text{тр дп}}(t), \quad (1)$$

– нерозривності потоку

$$q_{\text{дп}}(t) = \begin{cases} q_c(t) = G_{\text{дп}} \sqrt{\Delta p_{\text{дп}}(t)}, & x_{\text{дп}} = 0 \\ q_c(t) + q_{\text{щ}}(t), & x_{\text{дп}} \neq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

– обмеження переміщення сопла ДП

$$0 < x_{\text{дп}}(t) \leq x_{\text{дп max}}, \quad (3)$$

де  $x_{\text{дп max}}$  – максимальне переміщення рухомого елемента ДП із соплом;

– зміни стану РР

$$T_a = \text{const}, \quad \rho_c(t), \quad (4)$$

До складу рівнянь (1) – (4) входять наступні складові:  $m_{\text{дп}}$  – маса рухомого елемента ДП;  $x_{\text{дп}}(t)$  – переміщення та максимальне переміщення рухомої частини ДП із соплом;  $A_c$  – площа горизонтальної проекції площі рухомого елемента ДП;  $\Delta p_{\text{дп}}(t)$  – перепад тиску РР на рухомій частині ДП із соплом;  $G_{\text{дп}}$  – провідність ДП,  $\text{м}^4 / \text{Н}^{0,5} \cdot \text{с}$ ;  $F_{\text{пр дп}}(t)$  – сила пружини ДП;  $F_{\text{гд дп}}(t)$  – гідродинамічна сила на рухомому елементі ДП із соплом;  $F_{\text{тр дп}}(t)$  – сила тертя;  $q_c(t)$  – витрата РР через сопло ДП;  $q_{\text{щ}}(t)$  – витрата РР через щілину рухомої частини ДП із соплом;  $q_{\text{дп}}(t)$  – витрата РР ДП;  $\rho_c(t)$  – густина РР із урахуванням газовмісту.

Силу пружини ДП обчислювали за формулою [5]

$$F_{\text{пр дп}}(t) = c_{\text{пр дп}} \cdot [x_{\text{пр 0 дп}} + x_{\text{дп}}(t)], \quad (5)$$

де  $c_{\text{пр дп}}$  – сумарна жорсткість пружини ДП;  $x_{\text{пр 0 дп}}$  – попередній підтиск пружини ДП;  $x_{\text{дп}}(t)$  – переміщення рухомої частини ДП із соплом.

Гідродинамічна сила визначається залежністю [6]

$$F_{\text{гд дп}}(t) = [p_{\text{дп}}(t) - p_{\text{зл}}] A_c + \frac{\rho_c(t) q_c(t)}{A_c} - \rho_c(t) l_c \frac{dq_c(t)}{dt}, \quad (6)$$

де  $p_{\text{дп}}(t)$  і  $p_{\text{зл}}$  – відповідно тиск РР у соплі та на злив із ДП;  $\rho_c(t)$  – густина РР із врахуванням газовмісту;  $A_c$  – площа поперечного перерізу сопла,  $A_c = \pi d_c^2 / 4$ ;  $q_c(t)$  – витрата через сопло ДП.

Витрату через сопло ДП визначається за залежністю

$$q_c(t) = \mu_c(\text{Re}) \pi d_c x_{\text{дп}}(t) \sqrt{2 [p_{\text{дп}}(t) - p_{\text{зл}}] / \rho_c(t)}, \quad (7)$$

де  $\mu_c(\text{Re})$  – коефіцієнт витрати ДП;  $d_c$  – діаметр сопла ДП;  $x_{\text{дп}}$  – перемі-

шення рухомої частини ДП із соплом;  $p_{\text{дп}}(t)$  і  $p_{\text{зп}}$  – відповідно тиск РР у соплі та на злив із ДП;  $\rho_c(t)$  – густина РР із врахуванням газовмісту.

В усталеному режимі руху РР  $dq_c(t)/dt$  гідродинамічна сила на ДП визначається за залежністю  $F_{\text{гд дп}} = [p_{\text{дп}}(t) - p_{\text{зп}}]A_c + \rho(t)q_c^2(t)/A_c$ . Максимальне значення гідродинамічна сила має при великій відстані між соплом та заслінкою  $F_{\text{гд дп max}}(t) = 2[p_{\text{дп}}(t) - p_{\text{зп}}]A_c$ , а мінімальне – коли заслінка повністю закриває сопло.

Сила тертя розраховується за залежністю [5]

$$F_{\text{тр дп}}(t) = F_{\text{тр 0}} \text{sign } \dot{x}_{\text{дп}}(t), \quad (8)$$

де  $F_{\text{тр 0}}$  – сила сухого тертя;  $\dot{x}_{\text{дп}}$  – переміщення рухомої частини ДП із соплом;  $\text{sign } \dot{x}_{\text{дп}}$  – функція Кронекера від  $\dot{x}_{\text{дп}}$ .

Витрату РР через щілину рухомої частини ДП із соплом визначали за залежністю

$$q_{\text{щ дп}}(t) = 1,75(\pi d_{\text{щ}} s_{\text{щ}}^3 \Delta p(t) / 12 \mu L), \quad (9)$$

де  $d_{\text{щ}}$  – середній діаметр щілини ДП;  $s_{\text{щ}}$  – товщина щілин;  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості РР;  $L$  – довжина потоку між корпусом та рухомих елементом ДП, в напрямі руху потоку РР.

Провідність щілини ДП знаходили за залежністю

$$G_{\text{щ дп}}(t) = \mu_{\text{дп}}(\text{Re}, x_{\text{дп}}(t)) A_{\text{щ дп}}(x_{\text{дп}}) \sqrt{2/\rho_c(t)}, \quad (10)$$

де  $A_{\text{щ дп}}(x_{\text{дп}})$  – площа перетину щілини ДП, в залежності від положення рухомого елемента із соплом;  $x_{\text{дп}}(t)$  – переміщення рухомої частини ДП із соплом;  $\rho_c(t)$  – густина РР із урахуванням газовмісту;  $\mu_{\text{дп}}(\text{Re}, x_{\text{дп}}(t))$  – коефіцієнт витрати дроселюючої щілини між корпусом та рухомих елементом ДП.

Коефіцієнт витрати дроселюючої щілини, який враховує геометричні розміри дроселюючої щілини ДП та режим течії РР через неї, визначається за залежністю

$$\mu_{\text{дп}} = \mu_c \cdot \sqrt{\text{Re}} / \sqrt{\text{Re}_{\text{дп}} + \text{Re}}, \quad (11)$$

де  $\mu_c$  – коефіцієнт витрати ДП у статичному режимі;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса РР.

Середню густину РР з урахуванням газовмісту та змінного в часі тиску в ДП розраховували за залежністю зі статті [7], яку представляли у вигляді:

$$\rho_c(t) = \rho_{\text{рр 0}} (1 - z(t)) \cdot \left[ 1 + \frac{p_{\text{дп}}(t) - p_0}{E_{\text{см}}} \right] + \rho_{\text{г 0}} z(t) \frac{p_{\text{дп}}(t)}{p_0}, \quad (12)$$

де  $\rho_{\text{рр 0}}$  і  $\rho_{\text{г 0}}$  – відповідно густина РР і газу при початковому тиску  $p_0$ ;  $p_{\text{дп}}(t)$  – тиск РР в ДП;  $z(t)$  – доля об'єму рідинно-газової суміші (середовища), зайнятої газом,

$$z(t) = V_{\text{г}}^*(t) / (V_{\text{п}} + V_{\text{г}}^*(t)), \quad (13)$$

$V_p$  – об’єму РР;  $V_p^*$  – відношення об’єму РР  $V_p$  до сумарного об’єму  $V_\Sigma$ ,  $V_\Sigma = V_p + V_\Gamma$ ;  $V_\Gamma^*$  – об’єм нерозчиненого повітря, приведений до нормальних умов,  $V_\Gamma^* = V_{\Gamma 0} / V_\Sigma$ ;  $V_{\Gamma 0}$  – об’єм газової фази РР, при початковому тиску.

Залежність для розрахунку модуля об’ємної пружності РР (формулу з роботи [8]) записували у вигляді

$$E_{\text{см}}(t) = E_p \frac{p_{\text{дп}}(t)^2 \left[ V_p^* + V_\Gamma^*(t)(p_0 / p_{\text{дп}}(t)) \right]}{V_p^* p_{\text{дп}}(t)^2 + V_\Gamma^*(t) E_p p_0}. \quad (14)$$

де  $V_p^*$  – відношення об’єму РР  $V_p$  до сумарного об’єму  $V_\Sigma$ ,  $V_\Sigma = V_p + V_\Gamma$ ;  $V_\Gamma^*$  – об’єм нерозчиненого повітря, приведений до нормальних умов,  $V_\Gamma^* = V_\Gamma / V_\Sigma$ .

Застосування ДП в об’ємних ГА дозволяє суттєво підвищити ступінь очищення РР, а також продовжити термін їх безвідмовної експлуатації.

**Результат моделювання течії РР у ДП.** З метою зменшення втрат тиску в ДП проведено моделювання швидкості руху РР та тиску в ньому, в програмному комплексі COSMOSFloWorks на базі САПР Solid Works 2008. При визначенні течії РР у ДП (рис. 2) приймали, що одна вісь системи координат співпадає з віссю ДП, а дві інші – взаємоперпендикулярні до неї. Розглядали просторову задачу течії в’язкої нестисливої РР ( $\rho = \text{const}$ ). При математичному моделюванні задавали геометрію проточної частини: внутрішній діаметр корпусу  $d_k = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , діаметр сопла  $d_c = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , діаметр перепускного отвору в ковадлі  $d_{\text{он}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ .

При розрахунку задавали початкові і граничні умови:  $p_{\text{дп}}(0) = p_{\text{дп}}(T)$ ,  $p_{\text{дп}}(0, t) = p_{\text{дп}}(t)$ ,  $T$  – період повторення циклу коливань. Вважали, що швидкість руху РР на вході в ДП має рівномірний розподіл, а на нерухомих його поверхнях дорівнює нулю. Тиск на виході з ДП дорівнює тиску РР в гідробаці і є величиною сталою. Задавали витрату РР через ДП, яка дорівнювала 5 л/хв.

Результати моделювання отримали у вигляді епюр швидкості та тиску РР, а також ліній току в різні проміжки часу (рис. 2). Проведені дослідження дозволили визначити області, в яких відбувається втрати тиску та спостерігається вихровий рух РР. Ці результати дозволяють профілювати проточну камеру ДП, яка б забезпечила мінімальні втрати потужності в ньому. Аналіз отриманих результатів дозволив сформулювати наступні рекомендації що до вибору конструктивних параметрів ДП:

- максимальні втрати непродуктивного тиску РР відбуваються в вихрових зонах ДП;
- кут входу потоку в сопло  $\alpha$  повинен обиратися з умов рівномірного сти-

снення потоку, та проточна частина ДП за соплом не повинна мати різких змін поперечного перетину;

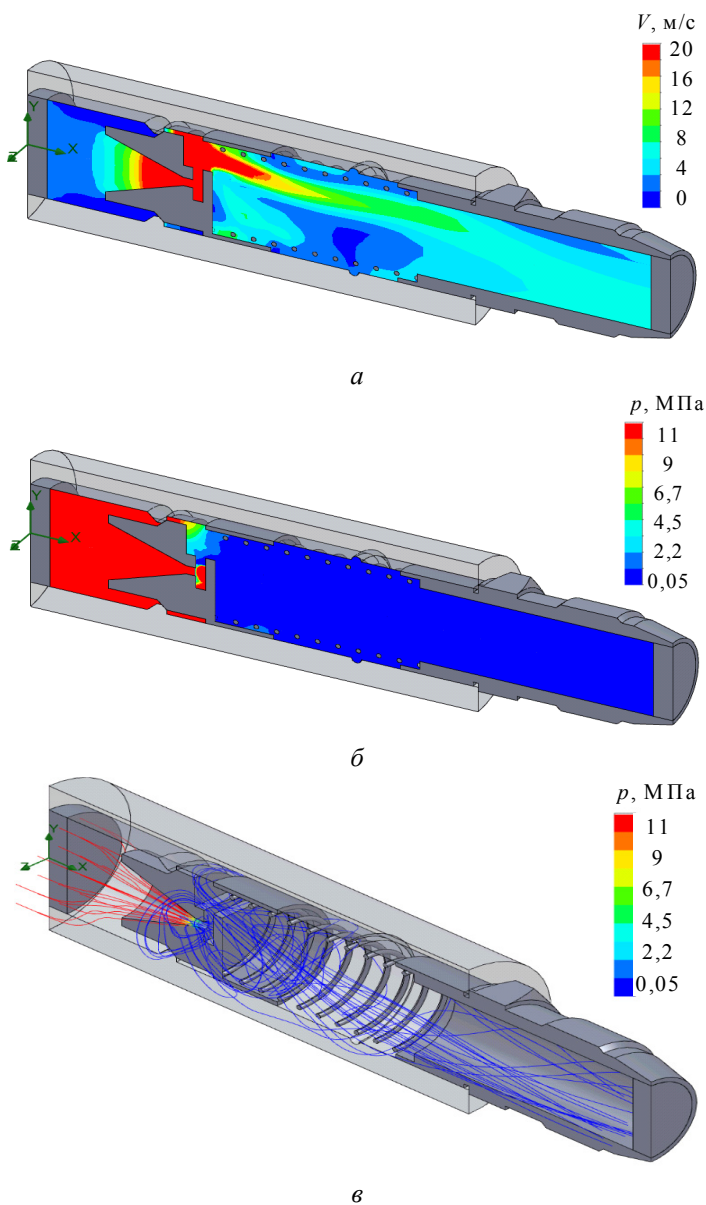


Рис. 2 – Графіки зміни параметрів ДП:  
*a* – швидкість руху РР; *б* – тиск РР; *в* – розподіл ліній тиску.



– гострі кромки – джерело виникнення вихрових зон, повинні бути округлені;

– діаметр умовного проходу повинен бути вибраний зі стандартного ряду та не менший, ніж розрахований.

Ці рекомендації можуть бути використані при проектуванні ДП для ГА живлення гідравлічних систем.

**Висновки.** Вперше наведена повна математична модель робочого процесу ДП, яка дозволяє проводити раціональний вибір його основних конструктивних параметрів.

За результатами моделювання робочих процесів в проточній частині ДП встановлені зони, в яких відбувається втрата потужності. Наведено рекомендації по вибору раціональних конструктивних параметрів ДП, зокрема його проточної частини. Розроблені рекомендації можуть бути використані й при проектуванні ДП, які за принципом та конструкцією роботи подібні до розглянутого.

**Список літератури:** 1. Техническая диагностика гидравлических приводов / Т.В. Алексеева, В.Д. Бабанская, Т.М. Башта и др.: Под общ. ред Т.М. Башты. – М.: Машиностроение. – 1989. – 264 с. 2. Коновалов В.М. Очистка рабочих жидкостей в гидроприводах станков / В.М. Коновалов, В.Я. Скрицкий, В.А. Рокшевский. – М.: Машиностроение. – 1976. – 288 с. 3. Скрицкий В.Я., Рокшевский В.А. Эксплуатация промышленных гидроприводов. – М.: Машиностроение. – 1984. – 170 с. 4. Гидропневмосмазочное оборудование. Диспергирующее устройство. Тип ГД. Листок-каталог. – М.: ВНИИТЭМР, 1985. – С. 2. 5. Андренко П.М. Гідравлічні пристрої мехатронних систем. Навч. Посіб. Х.: НТУ «ХПІ», 2012. – 188 с. 6. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: [учебник для вузов] / Д.Н. Попов. – М.: Машиностроение. – 1987. – 464 с. 7. Лурье З.Я., Федоренко И. Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металлургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2010. – Vol. 12 С. С. 10 – 25. 8. Данилов Ю.А., Кирилловский Ю.Л., Колпаков Ю.Г. Аппаратура объемных гидроприводов: Рабочие процессы и характеристики. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Alekseeva, T. V., et al. *Tekhnicheskaja diagnostika gidravlicheskih privodov*. Ed. T. M. Bashta. Moscow: Mashinostroenie, 1989. Print. 2. Konovalov, V. M., V. Ja. Skrickij and V. A. Rokshevskij. *Ochistka rabochih zhidkostej v gidroprivodah stankov*. Moscow: Mashinostroenie, 1976. Print. 3. Skrickij, V. Ja., and V. A. Rokshevskij. *Jekspluatacija promyshlennyh gidroprivodov*. Moscow: Mashinostroenie, 1984. Print. 4. *Gidropnevmosmazochnoe oborudovanie. Dispergirujushhee ustrojstvo. Tip GD. Listok-katalog*. Moscow: VNIITJeMR, 1985. Print. 5. Andrenko, P. M. *Gidravlichni prystroi' mehatronnyh system. Navch. Posib*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2012. Print. 6. Popov, D. N. *Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem: uchebnik dla vuzov*. Moscow: Mashinostroenie, 1987. Print. 7. Lur'e, Z. Ja., and I. Fedorenko. "Issledovanie rabocheho processa mehatronnogo gidroagregata sistemy smazki metalurgicheskogo oborudovaniya s uchetoм karakteristik dvuhfaznoj zhidkosti." *MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences*. Vol. 12 S. Lublin. 2010. 10–25. Print. 8. Danilov, Ju. A., Ju. L. Kirillovskij and Ju. G. Kolpakov. *Apparatura ob'jomnyh gidroprivodov: Rabochie processy i harakteristiki*. Moscow: Mashinostroenie, 1990. Print.

*Надійшла (received) 11.03.2015*

**Т.С. ПОЛЯНСКАЯ**, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА НА ОТРЕЗКЕ $[0, 2\pi]$ С ЛОГАРИФИЧЕСКИМ ЯДРОМ

Рассмотрена система интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром, к которой приводит ряд задач дифракции волн. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы, в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению системы интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

**Введение.** Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких систем интегральных уравнений на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Основная идея метода дискретных особенностей применительно к системе заключается в следующем: решение системы интегральных уравнений ищем в специально выбранных точках, которые соответствуют узлам квадратурных формул для интегралов с логарифмическими ядрами.

Причём применяются две различные квадратурные формулы: одна для интеграла с логарифмическим ядром, другая для регулярной части уравнения (с теми же самыми узлами). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует заданную систему интегральных уравнений.

**Постановка задачи. Операторные обозначения.** Рассматривается система интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| v_i(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} K_{ij}(\varphi_0, \varphi) v_j(\varphi) d\varphi = f_i(\varphi_0),$$

$$\varphi_0 \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{1, m} \quad (1)$$

относительно неизвестных функций  $v_i(\varphi)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Здесь  $K_{ij}(\varphi_0, \varphi)$ ,  $f_i(\varphi_0)$  –  $2\pi$  – периодические по всем переменным функции,  $f_i(\varphi_0) \in C_{[0, 2\pi]}^{\mu, \gamma}$ ,  $K_{ij}(\varphi_0, \varphi) \in C_{[0, 2\pi]}^{\mu, \gamma}$  по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной ( $i, j = \overline{1, m}$ ).

Через  $C_{[0, 2\pi]}^{\mu, \gamma}$  обозначен класс  $\mu$  раз непрерывно дифференцируемых на  $[0, 2\pi]$  функций,  $\mu$  – производные которых удовлетворяют условию Гёль-

дера с показателем  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ).

Введем вектор-функции  $\vec{v}(\varphi) = \{v_i(\varphi)\}_{i=1}^m$ ,  $\vec{f}(\varphi_0) = \{f_i(\varphi_0)\}_{i=1}^m$  и операторы

$$\begin{aligned} (\hat{L}\vec{v})(\varphi_0) &= \left\{ (Lv_i)(\varphi_0) \right\}_{i=1}^m \equiv \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| v_i(\varphi) d\varphi \right\}_{i=1}^m, \\ (\hat{K}\vec{v})(\varphi_0) &= \left\{ \sum_{j=1}^m (K_{ij} v_j)(\varphi_0) \right\}_{i=1}^m \equiv \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} K_{ij}(\varphi_0, \varphi) v_j(\varphi) d\varphi \right\}_{i=1}^m. \end{aligned}$$

С помощью этих обозначений систему (1) можно записать в виде операторного уравнения

$$(\hat{L} + \hat{K})\vec{v} = \vec{f}.$$

В рассматриваемых задачах оператор  $\hat{L} + \hat{K}$  непрерывно обратим в паре пространств

$$(\bar{L}_{[0,2\pi]}^2, \bar{L}_{[0,2\pi]}^2),$$

где  $\bar{L}_{[0,2\pi]}^2$  – гильбертово пространство вектор-функций  $\vec{u}(\varphi) = \{u_i(\varphi)\}_{i=1}^m$  со скалярным произведением  $(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^m \int_0^{2\pi} u_i(\varphi) \bar{v}_i(\varphi) d\varphi$ ,  $\|\vec{u}\|_I$  – норма, порождённая этим скалярным произведением.

**Дискретизация системы.** Обозначим  $(P_{n_i} u)(\varphi)$  – тригонометрический интерполяционный полином порядка  $n_i$  функции  $u(\varphi)$  с узлами интерполирования  $\{\varphi_{k_i}^{n_i}\}_{k_i=0}^{2n_i} = \{2\pi k_i / (2n_i + 1)\}_{k_i=0}^{2n_i}$ .

Приближённое решение системы (1) ищем в виде вектор-функции

$$\vec{v}_{\vec{n}}(\varphi) = \{v_{in_i}(\varphi)\}_{i=1}^m = \left\{ (P_{n_i} v_{in_i})(\varphi) \right\}_{i=1}^m, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m),$$

из системы приближенных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| v_{in_i}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} (P_{n_i \varphi_0} P_{n_j \varphi} K_{ij})(\varphi_0, \varphi) v_{jn_j}(\varphi) d\varphi = f_{in_i}(\varphi_0), \\ i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f_{in_i}(\varphi_0) = (P_{n_i} f_i)(\varphi_0)$ .

Рассматривая  $i$  – тое ( $i = \overline{1, m}$ ) уравнение системы (2) в узлах интерполирования многочлена  $(P_{n_i} f_i)(\varphi_0)$  – точках  $\{\varphi_{k_i}^{n_i}\}_{k_i=0}^{2n_i}$ , получаем систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_{k_i}^{n_i}}{2} \right| v_{in_i}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^{2\pi} (P_{n_i \varphi_0} P_{n_j \varphi} K_{ij})(\varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi) v_{jn_j}(\varphi) d\varphi =$$

$$= f_{in_i}(\varphi_{k_i}^{n_i}), \quad k_i = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Вычисляя здесь, с учетом тождества

$$\int_0^{2\pi} (P_n(uv))(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (P_n u)(\varphi) \cdot (P_n v)(\varphi) d\varphi,$$

интегралы с помощью квадратурных формул [4]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| (P_n u)(\varphi) d\varphi = \\ & = -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} (P_n u)(\varphi_k^n) \left[ \ln 2 + \sum_{p=1}^n \frac{\cos p(\varphi_0 - \varphi_k^n)}{p} \right], \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n u)(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} (P_n u)(\varphi_k^n), \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$(P_{n_i \varphi_0} P_{n_j \varphi} K_{ij}) \left( \varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{k_j}^{n_j} \right) = K_{ij} \left( \varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{k_j}^{n_j} \right) \text{ и } f_{in_i} \left( \varphi_{k_i}^{n_i} \right) = (P_{n_i} f_i) \left( \varphi_{k_i}^{n_i} \right) = f_i \left( \varphi_{k_i}^{n_i} \right)$$

получаем систему

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2n_i+1} \sum_{r_i=0}^{2n_i} v_{in_i} \left( \varphi_{r_i}^{n_i} \right) \left[ \ln 2 + \sum_{p=1}^{n_i} \frac{\cos p(\varphi_{k_i}^{n_i} - \varphi_{r_i}^{n_i})}{p} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2n_j+1} \sum_{r_j=0}^{2n_j} K_{ij} \left( \varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{r_j}^{n_j} \right) v_{jn_j} \left( \varphi_{r_j}^{n_j} \right) = f_i \left( \varphi_{k_i}^{n_i} \right) \end{aligned}$$

$k_i = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}$ . Перегруппировывая здесь слагаемые, окончательно получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений функций  $v_{in_i}(\varphi)$  в узлах интерполирования

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \frac{1}{2n_j+1} \sum_{r_j=0}^{2n_j} v_{jn_j} \left( \varphi_{r_j}^{n_j} \right) \left[ K_{ij} \left( \varphi_{k_i}^{n_i}, \varphi_{r_j}^{n_j} \right) - \delta_{ij} \left( \ln 2 + \sum_{p=1}^{n_i} \frac{\cos p(\varphi_{k_i}^{n_i} - \varphi_{r_i}^{n_i})}{p} \right) \right] = \\ & = f_i \left( \varphi_{k_i}^{n_i} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$k_i = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Очевидно, однозначная разрешимость СЛАУ (3) эквивалентна однозначной разрешимости системы приближённых интегральных уравнений (2).

### Доказательство однозначной разрешимости СЛАУ.

Обозначим  $(K_{ijn_i n_j} v_{jn_j})(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_{n_i \varphi_0} P_{n_j \varphi} K_{ij})(\varphi_0, \varphi) v_{jn_j}(\varphi) d\varphi$  и введем

дём оператор  $\hat{K}_{\bar{n}}$ :

$$(\hat{K}_{\bar{n}} \vec{v}_{\bar{n}})(\varphi_0) = \left\{ \sum_{j=1}^m (K_{ijn_j} v_{jn_j})(\varphi_0) \right\}_{i=1}^m.$$

Запишем систему (4) в виде операторного уравнения

$$(\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}) \vec{v}_{\bar{n}} = \vec{f}_{\bar{n}},$$

где  $\vec{f}_{\bar{n}}(\varphi_0) = \{f_{in_i}(\varphi_0)\}_{i=1}^m$ .

Оператор  $\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}$  действует из пространства  $\Pi_{\bar{n}}$  в пространство  $\Pi_{\bar{n}}$ , где  $\Pi_{\bar{n}} \subset \bar{L}_{[0, 2\pi]}^2$  – конечномерное подпространство, состоящее из всех вектор-функций вида [4]

$$\vec{u}_{\bar{n}}(\varphi) = \{u_{in_i}(\varphi)\}_{i=1}^m,$$

где  $u_{in_i}(\varphi) \in \Pi_{n_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Здесь  $\Pi_{\bar{n}} \subset \bar{L}_{[0, 2\pi]}^2$  – конечномерное подпространство всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Докажем, что оператор  $\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}$  непрерывно обратим в паре пространств

$$(\Pi_{\bar{n}}, \Pi_{\bar{n}}), \quad (4)$$

и оценим разность между точным решением  $\vec{v}(\varphi)$  системы (1) и приближённым решением  $\vec{v}_{\bar{n}}(\varphi)$ , найдённым из системы (2).

Для этого нам нужно оценить  $\|\vec{f} - \vec{f}_{\bar{n}}\|_I$  и  $\|(\hat{L} + \hat{K}) - (\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}})\|_{\Pi_{\bar{n}} \rightarrow \Pi_{\bar{n}}}$ .

Пусть  $n = \min\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ . Тогда, пользуясь теоремами Джексона [5], получаем: при  $n > \mu$

$$\|\vec{f} - \vec{f}_{\bar{n}}\|_I \leq D(\vec{f}) n^{-\mu-\gamma} \sqrt{m},$$

где  $D(\vec{f})$  – некоторая константа, не зависящая от  $\bar{n}$ .

Далее, в [3] с помощью теорем Джексона доказано, что при  $n > \mu$  выполняются неравенства

$$\|(K_{ij} - K_{ijn_j}) v_{jn_j}\| \leq D(\hat{K}) \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I,$$

где  $D(\hat{K})$  – некоторая другая константа, не зависящая от  $\bar{n}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m (K_{ij} - K_{ijn_j}) v_{jn_j} \right\| &\leq \sum_{j=1}^m \|(K_{ij} - K_{ijn_j}) v_{jn_j}\| \leq \sum_{j=1}^m D(\hat{K}) n^{-\mu-\gamma} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I = \\ &= D(\hat{K}) n^{-\mu-\gamma} m \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \left\| (\hat{L} + \hat{K}) - (\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}) \vec{v}_{\bar{n}} \right\|_I &= \left\| (\hat{K} - \hat{K}_{\bar{n}}) \vec{v}_{\bar{n}} \right\| = \left\{ \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^n (K_{ij} - K_{ijn_i n_j}) v_{jn_j} \right\|^2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^m (D(\hat{K}) n^{-\mu-\gamma} m \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I)^2 \right\}^{1/2} = D(\hat{K}) n^{-\mu-\gamma} m^{3/2} \|\vec{v}_{\bar{n}}\|_I. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left\| (\hat{L} + \hat{K}) - (\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}) \right\|_{\Pi_{\bar{n}} \rightarrow \Pi_{\bar{n}}} = \left\| \hat{K} - \hat{K}_{\bar{n}} \right\|_{\Pi_{\bar{n}} \rightarrow \Pi_{\bar{n}}} \leq D(\hat{K}) m^{\frac{3}{2}} n^{-\mu-\gamma}.$$

Выберем  $\bar{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_m\}$  такое, чтобы при

$$N = \min(N_1, N_2, \dots, N_m) > \mu$$

выполнялось неравенство

$$p_{\bar{N}} = \left\| (\hat{L} + \hat{K})^{-1} \right\|_{\bar{L}^2 \rightarrow \bar{L}^2} \left\| \hat{K} - \hat{K}_{\bar{N}} \right\|_{\Pi_{\bar{N}} \rightarrow \Pi_{\bar{N}}} < 1.$$

Тогда при любом  $\bar{n}$  таком, что  $n \geq N$ , выполнено неравенство

$$p_{\bar{n}} = \left\| (\hat{L} + \hat{K})^{-1} \right\|_{\bar{L}^2 \rightarrow \bar{L}^2} \left\| \hat{K} - \hat{K}_{\bar{n}} \right\|_{\Pi_{\bar{n}} \rightarrow \Pi_{\bar{n}}} < 1.$$

Теперь, пользуясь результатом, приведенным в [6, стр. 19], получаем, что при любом  $\bar{n}$  таком, что  $n \geq N$ , оператор  $\hat{L} + \hat{K}_{\bar{n}}$  непрерывно обратим в паре пространств (4), то есть система (2) имеет единственное решение  $\vec{v}_{\bar{n}}(\varphi)$ .

Кроме того, если  $\vec{v}(\varphi)$  – это точное решение системы (1), то имеет место оценка

$$\|\vec{v} - \vec{v}_{\bar{n}}\|_I \leq \left\| (\hat{L} + \hat{K})^{-1} \right\|_{\bar{L}^2 \rightarrow \bar{L}^2} \frac{1}{1 - p_{\bar{n}}} \left[ D(f) \frac{\sqrt{m}}{n^{\mu+\gamma}} + p_{\bar{n}} \|\vec{f}\|_I \right],$$

где  $p_{\bar{n}} = \left\| (\hat{L} + \hat{K})^{-1} \right\|_{\bar{L}^2 \rightarrow \bar{L}^2} D(\hat{K}) m^{3/2} n^{-\mu-\gamma} = \beta_{\bar{n}}$ ,  $\beta_{\bar{n}} = \underline{O}(1/n^{\mu+\gamma})$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Отсюда следует, что

$$\|\vec{v} - \vec{v}_{\bar{n}}\|_I \leq \sigma_{\bar{n}},$$

где  $\sigma_{\bar{n}} = \underline{O}(1/n^{\mu+\gamma})$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Выводы.** На основе численного метода дискретных особенностей приближенного решения интегральных уравнений построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая заданную систему интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Доказано, что при некоторых предположениях о гладкости ядер регулярных частей и правых частей уравнений этой системы интегральных уравнений соответствующая система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближённого решения к точному в среднем.

**Список литературы:** 1. Tsalamengas J.L. «Exponentially converging Nystrom methods in scattering

from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case», IEEE Trans. Antennas Propagat. Vol. 58, 2010. – P. 3265 – 3274. **2.** Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент – М.: ТОО «Янус», 1995 – 520 с. **3.** Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. Пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с. **4.** Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть 1. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков – Херсон, 2001 год. – 92 с. **5.** Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. Л.: ГТТИ, 1949. – 688 с. **6.** Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Tsalamengas, J. L. "Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case." *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 58. 2010. 3265–3274. Print. **2.** Lifanov, I. K. *Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij i chislennyj jeksperiment.* Moscow: TOO «Janus», 1995. Print. **3.** Gandel', Ju. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnyh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnyh osobennostej reshenija dvumernyh zadach difrakcii jelektromagnitnyh voln: uceb. posobie.* Vol. II. Kharkov, 1992. Print. **4.** Gandel', Ju. V. *Lekcii o chislennyh metodah dlja singuljarnyh integral'nyh uravnenij. Uchebnoe posobie.* Vol. 1. *Vvedenie v metody vychislenija singuljarnyh i gipersinguljarnyh integralov.* Kharkov – Kherson, 2001. Print. **5.** Natanson, I. P. *Konstruktivnaja teorija funkcij.* Moscow – Leningrad: GTTI, 1949. Print. **6.** Gabdulhaev, B. G. *Optimal'nye approksimacii reshenij linejnyh zadach.* Kazan': Izd. Kazansk. un-ta, 1980. Print.

*Поступила (received) 04.03.2015*

УДК 631.37

**А.Ю. РЕБРОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ТРАКТОРНЫХ ШИН ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ**

Предложен метод идентификации современных тракторных радиальных шин с использованием математической модели, построенной на универсальной характеристике шин. Метод позволяет идентифицировать шины по норме слойности и контурной площади пятна контакта, а также использовать математическую модель для теоретических исследований эффективности отечественных и зарубежных сельскохозяйственных тракторов, оборудованных современными радиальными шинами, в том числе категорий IF и VF. Для адекватного моделирования радиальной деформации и площади пятна контакта шин категорий IF и VF, которые характеризуются высокой эластичностью, предложено скорректировать математическую модель на основе универсальной характеристики шин.

**Ключевые слова:** радиальные тракторные шины, универсальная характеристика шин, норма слойности, контурная площадь пятна контакта.

**Введение.** Совершенствование сельскохозяйственных технологий неразрывно связано с внедрением инновационных технологий в различных сферах сельскохозяйственного производства. При создании новой тракторной техники, анализе и прогнозировании ее эффективности, крайне важны характеристики современных двигателей, трансмиссии и, несомненно, пнев-

© А. Ю. Ребров, 2015

матических шин. Обоснованию и выбору тракторных шин уделено крайне мало внимания, до сих пор нет теоретически обоснованной методики выбора шин для сельскохозяйственных тракторов. Развитие инновационных технологий в области производства тракторных шин позволяют обеспечить повышение технико-экономических показателей колесных тракторов. Это достигается за счет высокой эластичности шин, большой площади пятна контакта с опорным основанием и грузоподъемности.

Поэтому вопросы применения перспективных пневматических тракторных шин, изготовленных с использованием инновационных технологий, а также моделирования и прогнозирования технико-экономических показателей сельскохозяйственных тракторов, являются весьма актуальными. Для их реализации необходимо осуществить идентификацию сельскохозяйственных тракторных шин по ряду показателей для использования в математических моделях, описывающих процессы взаимодействия пневматической шины с деформируемой почвой.

**Анализ последних достижений и публикаций.** Одной из центральных задач при исследовании взаимодействия пневматической шины с недеформируемым опорным основанием является определение ее прогиба или радиальной деформации и площади пятна контакта. Впервые было установлено, что успеха в этом вопросе можно добиться, если использовать универсальную характеристику пневматической шины [1]. В работах [2, 3] приведена модель [1] в адаптированном для тракторных шин виде. Однако, учитывая постоянное повышение эксплуатационных характеристик тракторных шин, а также повсеместный переход на шины радиальной конструкции для применения в сельском хозяйстве, рассматриваемая модель [1 – 3] требует корректировки. В первую очередь это связано с тем, что в 2004 году на рынке появились инновационные тракторные шины, выполненные по технологии Michelin Ultraflex [4]. Это шины категорий IF (Improved Flexion – шины повышенной эластичности) и VF (Very High Flexion – шины очень высокой эластичности). В 2006 году шины категорий IF и VF были официально утверждены Европейской технической организацией по шинам и ободьям (ETRTO – European Tyre and Rim Technical Organization) [5]. Сегодня шины IF и VF в своей номенклатуре имеют всемирно известные бренды, выпускающие сельскохозяйственные шины, такие, как Michelin, Firestone (Bridgestone), Good Year, Trelleborg (Pirelli), Mitas. Такие шины обладают рядом преимуществ: большая площадь пятна контакта (до +24 % по сравнению с обычными радиальными шинами); меньшая глубина колеи (до –55 %) и сопротивление качению (до –20 %); выше касательная сила тяги при одинаковом буксовании (до +7 %) [4]. Поэтому их применение на существующих и вновь разрабатываемых тракторах, в том числе и отечественного производства, представляется перспективным.

**Постановка задачи.** Целью данной работы является идентификация численным методом тракторных сельскохозяйственных шин (в том числе категорий IF и VF), смоделированных с использованием известной математической модели тракторных шин *В. Л. Бидермана* [1 – 3], построенной на уни-



версальной нагрузочной характеристике шин. Идентификация позволит корректно моделировать шины и их взаимодействие с опорной поверхностью для анализа и теоретического обоснования перспективности применения на тракторах, в том числе и отечественного производства, шин разных категорий, конструкции и типоразмеров.

**Идентификация тракторных сельскохозяйственных шин численным методом.** В соответствии с работой [1] радиальная деформация или прогиб пневматической тракторной шины складывается из прогибов протектора и каркаса шины. Полная работа, затраченная на радиальный прогиб шины, представляет собой сумму работы, затраченной на деформацию каркаса шины и протектора, а также работу сжатия воздуха при прогибе. Работа деформации каркаса, протектора и сжатия воздуха в шине нелинейно зависят от радиального прогиба. С увеличением прогиба доля работы сжатия воздуха возрастет, в то время как при малых прогибах работа сжатия воздуха практически отсутствует, а доля работы деформации каркаса и протектора максимальна. В этом заключается основное различие автомобильных и тракторных сельскохозяйственных шин. У автомобильных шин, работающих при малых радиальных прогибах и заданном внутреннем давлении, больше доля работы деформации каркаса шины. У сельскохозяйственных тракторных шин, работающих при больших относительных радиальных деформациях (эластичные VF шины 27 – 31%, шины IF – 21 – 27%, шины традиционной технологии – 12 – 26%), определяющей является работа сжатия воздуха, которая пропорциональна избыточному внутреннему давлению и изменению объема шины. Поскольку при деформации внутреннее давление меняется незначительно, то процесс сжатия можно считать изобарным. Следует отметить, что радиальный прогиб и изменение объема шины нелинейно связаны, причем с повышением внутреннего давления изменение объема шины уменьшается. В работе [1] выдвигается гипотеза о том, что работа деформации каркаса также как и работа сжатия воздуха, пропорциональна изменению объема шины. Поэтому вводится постоянная для шины величина  $p_0$  – условное давление, характеризующее жесткость каркаса при нулевом внутреннем давлении (кПа) [1, 3].

Часть радиального прогиба  $f_k$ , обусловленная деформацией каркаса и сжатием воздуха при изменении объема, определяется зависимостью, м:

$$f_k = c_2 \cdot (G_k / (p_{\text{ш}} + p_0)), \quad (1)$$

где  $c_2$  – постоянный коэффициент, 1/м;  $G_k$  – радиальная нагрузка на шину, кН;  $p_{\text{ш}}$  – внутреннее давление воздуха в шине, кПа.

Часть радиального прогиба  $f_n$ , обусловленная деформацией протектора, определяется зависимостью, м:

$$f_n = c_1 \cdot (G_k / f_{\text{ш}}), \quad (2)$$

где  $c_1$  – постоянный коэффициент, м<sup>2</sup>/кН;  $f_{\text{ш}}$  – радиальный прогиб шины, м:

$$f_{\text{ш}} = f_n + f_k = c_1 \cdot (G_k / f_{\text{ш}}) + c_2 \cdot (G_k / (p_{\text{ш}} + p_0)). \quad (3)$$

Решением уравнения (3) относительно радиальной нагрузки является универсальная характеристика шины [1, 3]:

$$G_k = f_{\text{ш}}^2 / (c_1 + c_2 \cdot (f_{\text{ш}} / (p_{\text{ш}} + p_0))) . \quad (4)$$

В результате преобразований (4) получим:

$$f_{\text{ш}}^2 - \frac{G_k \cdot c_2}{p_{\text{ш}} + p_0} \cdot f_{\text{ш}} - c_1 \cdot G_k = 0 . \quad (5)$$

После отбрасывания лишнего корня, решение уравнения универсальной характеристики (5) относительно радиальной деформации  $f_{\text{ш}}$  получим в виде:

$$f_{\text{ш}} = \frac{c_2 \cdot G_k}{2 \cdot (p_{\text{ш}} + p_0)} + \sqrt{\left( \frac{c_2 \cdot G_k}{2 \cdot (p_{\text{ш}} + p_0)} \right)^2 + c_1 \cdot G_k} , \quad (6)$$

Выражение (6) является функциональной зависимостью между радиальной деформацией  $f_{\text{ш}}$ , радиальной нагрузкой  $G_k$  и внутренним давлением в шине  $p_{\text{ш}}$  с учетом свойств шины в виде постоянных коэффициентов  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ . Приведенная математическая модель обладает несомненным преимуществом, которое заключается в том, что коэффициенты  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  определяются из трех опытов, проведенных при двух различных внутренних давлениях [1]. Вторым вариантом определения этих коэффициентов может быть использование стандартов [2] или технических данных производителя на шину.

Если нет возможности определить коэффициенты  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  экспериментально, тогда наиболее корректным будет использование технической информации производителя, поскольку конструктивные размеры шин могут отличаться от данных стандартов.

Коэффициенты  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  зависят от ряда параметров шины. Это наружный диаметр ( $D$ ), ширина профиля шины ( $b$ ), статический радиус ( $r_c$ ), минимально допустимое давление в шине ( $p_{\text{ш.мин}}$ ), максимально допустимая нагрузка при минимально допустимом давлении ( $Q_{p\text{мин}}$ ), максимально допустимое давление в шине ( $p_{\text{ш.макс}}$ ), максимально допустимая нагрузка при максимально допустимом давлении ( $Q_{p\text{макс}}$ ), посадочный диаметр шины ( $D_{\text{п}}$ ) и норма слойности ( $n_c$ ):

$$p_0 = 16,7 \cdot n_c \cdot \sqrt{D/b} - 1,4 - 28 ; \quad (7)$$

$$c_1 = \frac{(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2)}{2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2} ; \quad (8)$$

$$c_2 = \frac{2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2) - (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)}{2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2} . \quad (9)$$

В соответствии с работой [2], коэффициенты  $x_1, x_2, y_1, y_2$  равны:

$$x_1 = \frac{f_{\text{ст}}}{p_{\text{ш. min}} + p_0}; \quad x_2 = \frac{f_{\text{ст}}}{p_{\text{ш. max}} + p_0}; \quad y_1 = \frac{f_{\text{ст}}^2}{Q_{p \text{ min}}}; \quad y_2 = \frac{f_{\text{ст}}^2}{Q_{p \text{ max}}}, \quad (10)$$

где  $f_{\text{ст}}$  – статический прогиб шины, м:

$$f_{\text{ст}} = D/2 - r_c. \quad (11)$$

Таким образом, для моделирования шины необходимо знать ее норму слойности  $n_c$ . Норма слойности является условным показателем и указывается только для диагональных шин, которые практически не применяются на тракторах сельскохозяйственного назначения, поскольку уступают по характеристикам радиальным шинам. Учитывая, что показатель нормы слойности в технических данных для радиальных шин не указывается, определить коэффициенты  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  модели тракторных шин можно следующим образом.

Для получения решения уравнения (5) в действительной области необходимо выполнение условия:

$$((c_2 \cdot G_k)/2 \cdot (p_{\text{ш}} + p_0))^2 + c_1 \cdot G_k \geq 0. \quad (12)$$

Коэффициенты  $p_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  функционально зависят от нормы слойности. Подставив их в (12) с учетом (7 – 10) получим громоздкое уравнение относительно нормы слойности  $n_c$ . Для его решения необходимо знать область, в которой будет моделироваться шина, и определиться со значениями радиальной нагрузки  $G_k$  и внутреннего давления  $p_{\text{ш}}$ . Для статической постановки задач можно взять достаточно ограниченную область значений, характерных для эксплуатации тракторных шин, при высоких радиальных нагрузках во всем интервале внутреннего давления. Для решения задач динамики область значений должна включать все возможные нагрузки и деформации от самых малых до превосходящих допускаясь во всем интервале внутреннего давления в шине. Такой подход позволяет использовать математическую модель для любых теоретических исследований. При решении (12) в качестве радиальной нагрузки принимается малая величина  $G_k$ , которая позволяет определить норму слойности шины при пренебрежимо малом значении радиального прогиба, обусловленного деформацией протектора  $f_{\text{п}}$ . Это вполне справедливо для тракторных шин, работающих в отличие от автомобильных при больших относительных радиальных деформациях, поскольку для них практически весь прогиб на эксплуатационных режимах нагружения колеса происходит за счет каркаса и изменения внутреннего объема шины. В тоже время при очень малых относительных радиальных прогибах тракторная шина деформируется в основном за счет протектора, а не каркаса. Поэтому норму слойности, полученную при решении (12), необходимо скорректировать на 5 – 6% в сторону уменьшения. Это позволит модели работать при очень малых относительных радиальных деформациях.

Доля деформации каркаса  $f_k$  при эксплуатационных нагрузках в области допустимых значений радиальной нагрузки составляет 90 – 98%. При нагружении шины на 15% от допустимой нагрузки доля деформации каркаса снижается до 80 – 90%.

Дальнейшая идентификация шины происходит на основании каталожного значения действительной контурной площади пятна контакта с жестким опорным основанием. Суть ее заключается в том, чтобы расчетная и действительная контурные площади пятна контакта шины с жестким основанием совпадали при нагружении шины по линии, соединяющей точки  $(p_{ш. \min}; Q_{p \min})$  и  $(p_{ш. \max}; Q_{p \max})$ . Для обычных радиальных шин расчетное и действительное (экспериментальное) значения контурной площади пятна контакта, как правило, достаточно близки и не требуют корректировки. Однако современные радиальные шины могут работать при относительных радиальных прогибах, существенно превышающих 18 – 22%. Это относится к шинам категории IF и VF, у которых погрешность расчета площади пятна контакта может достигать 24%. Поэтому далее определяется расчетное значение контурной площади пятна контакта:

$$F_k = \frac{\pi \cdot 10000}{2} \cdot \frac{20,5 / \sqrt{k_F}}{11,9 + \left| \frac{D}{b} - \frac{|n_c - 9|}{2} - 3 \right|} \cdot \sqrt{D \cdot f_{сш} - f_{сш}^2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{b + H}{2,5 \cdot k_F} \cdot f_{сш} - f_{сш}^2}, \quad (13)$$

где  $H$  – высота профиля шины:

$$H = (D - D_{\text{п}} \cdot 0,0254) / 2, \quad (14)$$

$D_{\text{п}}$  – номинальный посадочный диаметр обода в дюймах.

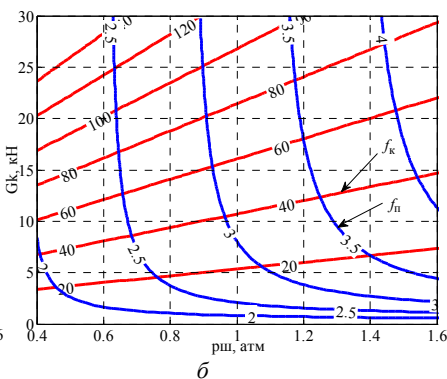
В формулу (13) введен поправочный коэффициент  $k_F$ , который первоначально принимается равным 1. После определения контурной площади пятна контакта шины с жестким основанием в соответствии с (13) определяется поправочный коэффициент  $k_F$ :

$$k_F = F_k / F_{\text{н}}, \quad (15)$$

где  $F_k$  – расчетная контурная площадь пятна контакта шины (13);  $F_{\text{н}}$  – номинальная контурная площадь пятна контакта шины по данным испытаний производителя.

**Анализ результатов исследования.** В качестве примера для идентификации была выбрана тракторная шина типоразмера 540/65 R30, выпущенная под брендом Michelin.

В результате расчетов идентифицирована норма слойности  $n_c = 4,585$  и коэффициент  $k_F = 1,094$ , полученный из условия:  $F_k = F_{\text{н}} = 1981 \text{ см}^2$ . Показатели тракторной шины Michelin 540/65 R30 в координатах «давление в шине ( $p_{\text{ш}}$ , атм) – радиальная нагрузка ( $G_k$ , кН)» приведены на рис. 1. Область значений внутреннего давления и радиальной нагрузки разделена линией **1**, соединяющей точки  $(p_{ш. \min}; Q_{p \min})$  и  $(p_{ш. \max}; Q_{p \max})$ , на две области **A** и **B** (рис. 1, а). В области **A** радиальная нагрузка превышает допускаемую (шина перегружена или недостаточно внутреннее давление). В зоне **B** радиальная нагрузка меньше допускаемой (шина недогружена или внутреннее давление больше необходимого). На линии **1** (рис. 1, а) прогиб шины равен статическому ( $f_{\text{ш}} / f_{\text{ст}} = 1$ ), и контурная площадь пятна контакта соответствует но-



а – изолинии равного прогиба шины ( $f_{\text{ш}} / f_{\text{ст}}$ ) и площади пятна контакта ( $F_k / F_n$ );  
 б – изолинии равного прогиба при деформации каркаса ( $f_k$ , мм) и протектора ( $f_{\text{п}}$ , мм).

**Выводы.** Математическая модель тракторной шины, предложенная Л. В. Бидерманом [1], наиболее полно отображает все показатели взаимодействия шины с жестким основанием с учетом ее характеристик, радиальной нагрузки и внутреннего давления. Для определения коэффициентов модели необходимо проводить идентификацию шины с учетом технических данных производителя. Предложенный метод позволяет идентифицировать тракторные шины и использовать рассматриваемую математическую модель во всем диапазоне радиальных нагрузок. Разность между расчетной и действительной контурной площадью пятна контакта с жестким основанием при номинальной нагрузке не превышает  $\pm 2 \text{ см}^2$ .

120

1985. – 304 с. **3.** Гуськов В.В. Тракторы: теория / Гуськов В.В., Велев Н.Н., Атаманов Ю.Е. и др.; под общ. ред. В.В. Гуськова. – М.: Машиностроение, 1988. – 377 с. **4.** [www.michelinag.com](http://www.michelinag.com). UN/ECE Regulation No.106.

**Bibliography (transliterated):** 1. Biderman, V. L., et al. *Avtomobil'nye shiny (konstrukcija, raschet, ispytaniya, ekspluatacija)*. Moscow: Goshimizdat, 1963. Print. 2. Ksenevich, I. P., V. A. Skotnikov and M. I. Ljasko. *Hodovaja sistema – pochva – urozhaj*. Moscow: Agropromizdat, 1985. Print. 3. Gus'kov, V. V., et al. *Traktory: teorija*. Ed. V. V. Gus'kov. Moscow: Mashinostroenie, 1988. Print. 4. Michelin Agricultural Tires. Change site. Web. 08 March 2015 <<http://www.michelinag.com>>. 5. UN/ECE Agreement. Addendum 105:Regulation No. 106. 16 April 2009. Web. 09 March 2015 <<http://www.unece.org>>.

*Поступила (received) 11.03.2015*

УДК 629.113

**В.В. РЕДЧИЦ**, канд. техн. наук, проф. КУЕИТУ, Кременчуг;  
**Б.И. КАЛЬЧЕНКО**, д-р. техн. наук, проф. КУЕИТУ, Кременчуг;  
**Е.В. ГОЛОВИНА**, доц. КУЕИТУ, Кременчуг

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ МАНЕВРЕ «ПОВОРОТ» НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

На базе доработанной математической модели криволинейного движения одиночного автомобиля предложен новый метод расчета параметров криволинейного движения двухзвеного автопоезда при маневре «поворот» с учетом времени запаздывания реакции автомобиля на управляющее воздействие, но без учета углов увода. Предложенный способ построения траектории движения двухзвеного автопоезда позволяет в первом приближении проводить имитацию маневра «поворот  $R_n = 35$  м» на жестких колесах и давать предварительную оценку управляемости и устойчивости транспортного средства на стадии проектирования. Метод в дальнейшем планирует использовать при исследовании динамики маневра «поворот».

**Ключевые слова:** кривизна траектории, угол складывания, время запаздывания, вход в поворот, управляемость, устойчивость.

**Введение.** Для сокращения сроков создания и доводки опытных образцов новых автопоездов конструктору необходимо еще на стадии проектирования провести оценку основных показателей управляемости и устойчивости в соответствии с нормативными документами.

Одним из таких показателей является нормативная максимальная скорость (42 км/ч), при которой автопоезд категории  $N3$  вписывается в габаритный коридор разметки участка маневра «поворот  $R_n = 35$  м».

**Анализ публикаций.** Анализ опубликованных работ за последние годы показывает, что все исследования по управляемости и устойчивости одиночных автомобилей и двух и трехзвенных автопоездов связаны с траекторией

движения, как кинематической, так и с учетом качения на эластичных шинах. Этому вопросу уделено много внимания в работах Я.Х. Закина, В.П. Сахно, Д.А. Антонова, М.А. Подрыгало, В.П. Волкова, Г.А. Смирнова, В.М. Полякова, В.А. Горелова, А.Г. Болдырева и др.

Авторам статьи неизвестны работы по определению параметров криволинейного движения двухзвенных автопоездов при маневре «поворот  $R_n = 35$  м» на стадии проектирования.

**Постановка задачи.** Целью данного исследования является определение параметров траектории и максимальной скорости выполнения маневра «поворот  $R_n = 35$  м» двухзвенным автопоездом на стадии проектирования.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать метод построения расчетной траектории движения двухзвенных автопоездов без учета углов увода при маневре «поворот»;
- усовершенствовать математическую модель одиночного автомобиля для двухзвенного автопоезда;
- подтвердить адекватность математической модели при испытании автопоезда 10×10 КрАЗ-6010 при маневре «поворот».

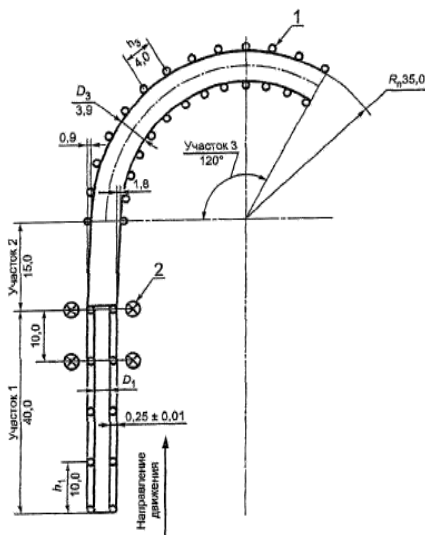


Рис. 1 – Разметка участка для маневра «поворот  $R_n = 35$  м»: 1 – вертикальные

ограничители разметки коридоров движения на участках 1, 2 и 3; 2 – датчики измерения скорости;  $h_1$  – шаг установки вертикальных ограничителей на участке 1;  $h_3$  – шаг установки вертикальных ограничителей на участке 3;  $D_1$  – ширина коридора на участке 1;  $D_3$  – ширина коридора на участке 3. Точность разметки ширины коридора  $D_1 \dots \pm 0,1$  м. Точность разметки ширины коридора  $D_3 \dots \pm 0,05$  м.

физические возможности водителя в системе «водитель – автомобиль – дорога», то есть указать вначале ту угловую скорость поворота управляемых колес (УК) и рулевого колеса (РК), при которой автопоезд должен вписаться в

**Математическая модель.** Для контроля параметров расчетных траекторий, вначале построим траекторию автопоезда на жестких колесах, то есть без учета внешних сил и моментов, но с учетом времени запаздывания  $t_3$ .

Для седельных автопоездов категории  $N3$  полной массой 20 т, максимальная скорость маневра не должна быть меньше 42 км/ч.

Разметка участка для маневра «поворот  $R_n = 35$  м» для транспортных средств категории  $N3$  с габаритной шириной больше 2,5 м представлена на рис. 1.

В соответствии с разметкой участка все условия для совершения маневра заданы. Остается определить

габаритный коридор участка с заданной скоростью движения.

Радиус  $R_n = 35$  м – это значение наружного радиуса разметки, а средний радиус коридора входа в правый поворот определяется по формуле (рис. 1):

$$\rho_k = R_n - \frac{D_3}{2} = 35 - \frac{3,9}{2} = 33,05 \text{ м.} \quad (1)$$

Нами принято условие, что положение педали подачи топлива при входе в поворот остается неизменным [1], то есть  $V_A = \text{const}$ .

Длина участка, на котором полуприцеп автопоезда должен вписаться в коридор  $R_n = 35$  м, составляет

$$S_n = S_2 + L - V_A \cdot t_3, \quad (2)$$

где  $S_2$  – длина второго участка (рис. 1);  $L = 7,5$  м – база полуприцепа;  $V = 42$  км/ч – заданная начальная скорость автопоезда;  $t_3$  – время запаздывания реакции автомобиля на поворот РК, секунд [1];

$$t_3 = (a_i + 2 \cdot V_A(\Delta t)) / V_A, \quad (3)$$

$a_i$  – длина продольной оси контактного отпечатка УК, м;  $\Delta t$  – время, в течение которого рассматривается неустановившийся процесс поворота.

Время входа в поворот до  $\rho_k = 33,05$  м определяется равенством:

$$t_n = S_n / V_A. \quad (4)$$

Количество положений звеньев автопоезда (точки  $A, A_n$ ) для построения траектории определяется по формуле:  $K = t_n / (\Delta t)$ .

Для того чтобы автопоезд на пути  $S_n$  вписался в габаритный коридор (рис. 2) должно быть выполнено условие:

$$\rho_{C1}^* = (C_1 A_n) = L_n / \operatorname{tg} \psi = 33,05 \text{ м.} \quad (5)$$

Из условия (5) имеем:

$$\operatorname{tg} \psi = L_n / 33,05. \quad (6)$$

$$\psi = \arctg(L_n / 33,05). \quad (7)$$

Угол  $\psi$  – это тот максимальный угол складывания, при котором автопоезд впишется в габаритный коридор маневра «поворот», определяемый из начальных условий маневра.

При входе в поворот угол складывания  $\psi_i^*$  зависит от скорости движения и радиуса кривизны траектории точки  $A$  тягача и определяется (8):

$$\psi_i^* = \sum_1^i (\Delta \psi_i); \Delta \psi_i = V_A(\Delta t) / \rho_{Ti}. \quad (8)$$

Радиус кривизны траектории тягача  $\rho_{Ti}$  описывается формулой:

$$\rho_{Ti} = \frac{L}{\operatorname{tg}(\alpha_g \cdot t_i)} + \frac{B}{2}. \quad (9)$$

где  $L$  – база тягача;  $B$  – колея;  $t_i$  – текущее время.



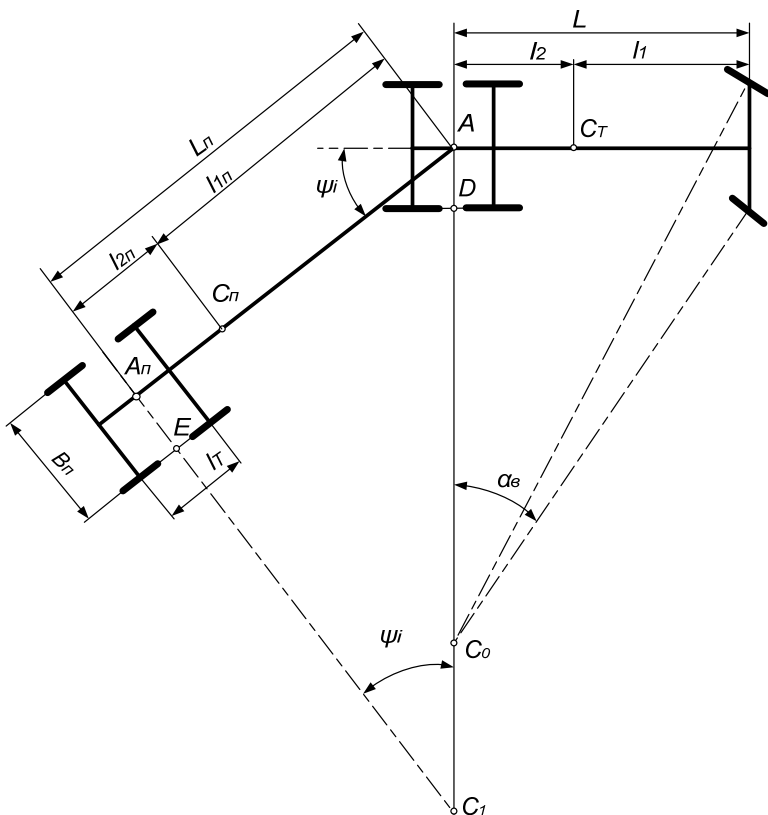


Рис. 2 – Расчетная схема входа в поворот двухзвенового автопоезда.

Из (8) и (9) следует, что для определения угла складывания  $\psi_i^*$  при движении по криволинейной траектории необходимо определить угловую скорость внутреннего (относительно центра поворота) УК, а следовательно, и угловую скорость поворота рулевого колеса.

Угловая скорость поворота внутреннего управляемого колеса определяется так:

$$\dot{\alpha}_g = (\omega_{pk} \cdot U_{Tp}) / i_{pm} \quad (10)$$

где  $U_{Tp} = var$  – передаточное число рулевой трапеции, так как правый поворот;  $i_{pm}$  – передаточное число рулевого механизма.

Для первого приближения принимаем  $\dot{\alpha}_g = const$ .

Учтём физическую возможность водителя обеспечить значение угловой скорости рулевого колеса в пределах  $\omega_{pk} = 7 \dots 9$  рад/с, [3].

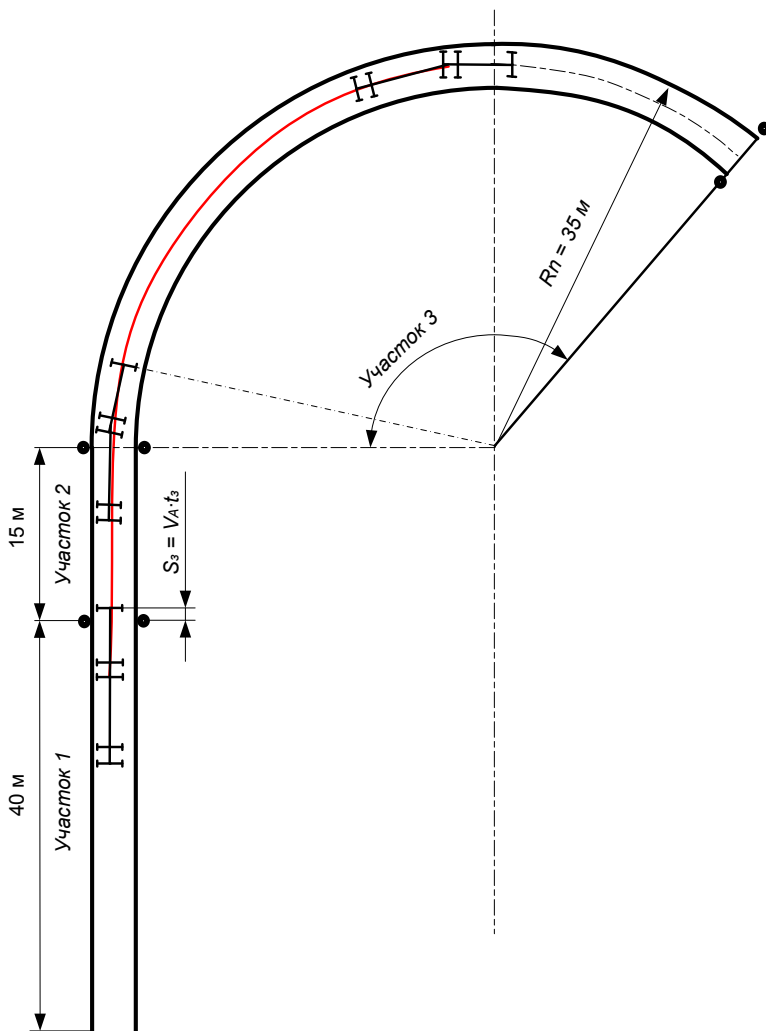


Рис. 3 – Траектория движения автопоезда КрАЗ-6010 при выполнении маневра «поворот  $R_n = 35$  м»

Вписываемость автопоезда будет обеспечена при:

$$\psi = \psi_i^* . \quad (11)$$

Условие  $\psi \leq \psi_i^*$  будет указывать на то, что угловую скорость рулевого колеса  $\omega_{pk}$  необходимо увеличить, а при условии  $\psi \geq \psi_i^*$  – уменьшить.

Средняя угловая скорость поворота внутреннего УК определяется из условия маневра, зависимость (9), при  $\rho_{Ti} = \rho_k = 33,05$  м и  $t_i = t_n = S_n / V_A$ :

$$\dot{\alpha}_6 = \frac{\arctg(L_{II}/(\rho_k - 0,5B))}{t_n}. \quad (12)$$

Определив необходимые исходные данные по (1) – (12), можно рассчитать кинематические радиусы тягача и полуприцепа, при этом проверяя выполнение условия (11).

Траектория автопоезда строится по расчетным радиусам  $\rho_{Ci} = (C_1 A)$ ,  $\rho_{Ti} = (C_0 A)$ ,  $\rho_{Ci}^* = (C_1 A_n)$  методом, предложенным в [1], [2].

**Пример расчёта.** На рис. 3 представлена траектория маневра «поворот  $R_n = 35$  м», выполненная автопоездом КрАЗ-6010 с такими техническими характеристиками: база тягача –  $L = 5,3$  м; колея тягача –  $B = 2,16$  м; полная масса тягача –  $m = 20071$  кг; база полуприцепа –  $L_{II} = 7,5$  м; база тележки –  $l_T = 1,4$  м; масса полуприцепа –  $m_{II} = 23547$  кг; нагрузка на переднюю ось тягача –  $R_{z(1-2)} = 56650$  Н; нагрузка на тележку тягача –  $R_{z(3-6)} = 144060$  Н; нагрузка на тележку полуприцепа –  $R_{zII} = 144060$  Н; положение центра масс тягача –  $l_1 = 3,76$  м,  $l_2 = 1,54$  м; по высоте –  $h_z = 1,19$  м; положение центра масс полуприцепа –  $l_{1II} = 4,59$  м,  $l_{2II} = 2,91$  м; по высоте полуприцепа –  $h_{zII} = 1,85$  м.

**Выводы.** Предложенный метод построения траекторий двухзвенного автопоезда позволяет в первом приближении проводить имитацию манёвра «поворот  $R_n = 35$  м» на жестких колесах.

Доработанная математическая модель движения одиночного автомобиля позволяет определять параметры криволинейного движения автопоезда при манёвре «поворот  $R_n = 35$  м» на жестких колесах.

**Список литературы:** 1. Редчиц В.В., Головина Е.В., Кораблёв А.Ф. Исследование управляемости трехосных автомобилей при маневре «переставка» // Нові технології. – 2011. – №4 (34). – С. 80 – 87. 2. Редчиц В.В., Головина Е.В., Редчиц С.В. Кинематика двухзвенного автопоезда при выполнении маневра «переставка» // Нові технології. – 2014. – № 3 – 4 (45 – 46 ). – с. 115 – 119. 3. Болдырев А.Г. Метод оценки энергетических затрат при функционировании всеколесного рулевого управления многоосных колесных машин на стадии проектирования : автореферат дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец 05.05.03 «Колесные и гусеничные машины» / А.Г. Болдырев – Москва, 2006. – 16 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Redchic, V. V., E. V. Golovina and A. F. Korabl'ov. "Issledovanie upravljajemosti trehosnyh avtomobilej pri manevre perestavka." *Novi tehnologii*. No. 4 (34). 2011. 80–87. Print. 2. Redchic, V. V., E. V. Golovina and S. V. Redchic. "Kinematika dvuhzvennogo avtopoezda pri vypolnenni manevra perestavka." *Novi tehnologii*. No. 3–4 (45–46). 2014. 115–119. Print. 3. Boldyrev, A. G. *Metod ocenki jenergeticheskikh zatrat pri funkcionirovanii vsekolosnogo rulevogo upravlenija mnogoosnyh kolesnyh mashin na stadii proektirovanija. Avtoref. dys. na zdobuttja nauk. stupenja kand. tehn. nauk.* Moscow, 2006. Print.

Поступила (received) 10.03.2015

**И.А. РЯБЕНКОВ**, канд. техн. наук, ГП ХМЗ «ФЭД», Харьков

## **УСЛОВИЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ И КАЧЕСТВА ОБРАБАТЫВАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ШЛИФОВАНИИ С ФИКСИРОВАННЫМ РАДИАЛЬНЫМ УСИЛИЕМ**

Разработана математическая модель процесса шлифования с фиксированным радиальным усилием и на ее основе определены условия повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей. Теоретически установлено, что в отличие от шлифования по жесткой схеме, при шлифовании с фиксированным радиальным усилием время обработки фактически не влияет на снижение показателей точности и качества обрабатываемых поверхностей в связи с исключением трения связки круга с обрабатываемым материалом. Это является важным фактором повышения эффективности обработки высокоточных деталей. При этом температура резания увеличивается не столь значительно по сравнению с шлифованием по жесткой схеме. Это допускает достаточно продолжительный контакт круга с обрабатываемой деталью, тогда как при шлифовании по жесткой схеме с целью снижения температуры резания возможен непродолжительный контакт.

**Ключевые слова:** шлифование, составляющие силы резания, энергоемкость обработки, коэффициент трения, производительность обработки, время обработки, температура резания.

**Введение.** При осуществлении финишной абразивной обработки постоянно возникают проблемы снижения силовой напряженности и повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей. В успешном решении этих проблем важная роль принадлежит применению прогрессивных кинематических схем шлифования, снижающих интенсивность трения связки круга с обрабатываемым материалом и обеспечивающих более полное использование режущих свойств шлифовального круга. К таким схемам следует отнести шлифование с фиксированным радиальным усилием [1], которое позволяет управлять радиальной составляющей силы резания и за счет этого обеспечивает повышение точности и качества обрабатываемых поверхностей. Поэтому обоснование условий эффективного применения данной схемы шлифования является актуальной задачей.

**Анализ последних достижений.** Изысканию технологических возможностей схемы шлифования с фиксированным радиальным усилием посвящены многочисленные исследования [2, 3]. Однако они, как правило, направлены на выбор оптимальных условий обработки на основе проведения экспериментальных исследований. Это не позволяет в полной мере раскрыть закономерности процесса шлифования и выявить его технологические возможности. В работе [4] предложен теоретический подход к анализу данного процесса шлифования, что позволило получить ряд важных теоретических решений, применяемых в машиностроительном производстве, в частности, при проектировании операций заточки твердосплавных режущих инструментов. Исходя из этого, представляется актуальным проведение дальнейших теоретических исследований по выявлению и обоснованию новых технологических возможностей рассматриваемого процесса шлифования.

**Постановка задачи.** Для определения условий повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей при шлифовании с фиксированным радиальным усилием в работе решается задача разработки математической модели рассматриваемого процесса и выбора на ее основе рациональных технологических параметров обработки.

**Математическая модель.** При шлифовании с фиксированным радиальным усилием  $P_y$  тангенциальная составляющая силы резания  $P_z$  аналитически описывается так (рис. 1) [5]:

$$P_z = P_{z_{рез}} + P_{z_{тр}} = K_{рез} \cdot P_{y_{рез}} + f_1 \cdot P_{y_{тр}} = (K_{рез} - f_1) \cdot P_{y_{рез}} + f_1 \cdot P_y, \quad (1)$$

где  $P_{z_{рез}}$ ,  $P_{z_{тр}}$ ,  $P_{y_{рез}}$ ,  $P_{y_{тр}}$  – тангенциальные и радиальные составляющие силы резания, обусловленные процессами «чистого» резания и трения связки круга с материалом, Н;  $f_1$  – коэффициент трения связки круга с материалом;  $K_{рез} = P_{z_{рез}} / P_{y_{рез}} = ctg(\psi + \gamma)$ ;  $\psi$  – условный угол трения зерна с материалом;  $\gamma$  – условный (отрицательный) передний угол режущего зерна.

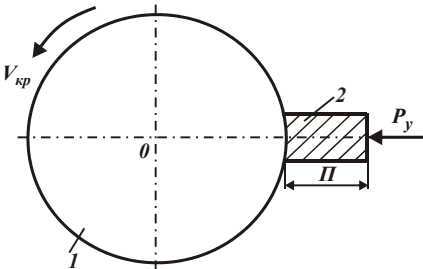


Рис. 1 – Схема шлифования с фиксированным радиальным усилием  $P_y$ : 1 – круг; 2 – деталь.

Соответственно коэффициент шлифования  $K_{ш}$  выразится формулой:

$$K_{ш} = \frac{P_z}{P_y} = (K_{рез} - f_1) \cdot \frac{P_{y_{рез}}}{P_y} + f_1. \quad (2)$$

В отличие от аналогичных зависимостей, приведенных в работе [5] применительно к процессу шлифования с фиксированной скоростью радиальной подачи (то есть при шлифовании по жесткой схеме), зависимости (1) и (2) не содержат время обработки  $\tau$ .

Следовательно, тангенциальная составляющая силы резания  $P_z$  не увеличивается с течением времени обработки  $\tau$ , что не приводит к повышению силовой и тепловой напряженности шлифования. С учетом равенства  $K_{рез} = P_{z_{рез}} / P_{y_{рез}} = ctg(\psi + \gamma)$  и  $f_1 = tg\psi_1$  зависимость (2) опишется так:

$$K_{ш} = [ctg(\psi + \gamma) - tg\psi_1] \cdot (P_{y_{рез}} / P_y) + f_1, \quad (3)$$

где  $\psi_1$  – условный угол трения связки круга с обрабатываемым материалом.

Для осуществления процесса шлифования должно выполняться условие:

$$ctg(\psi + \gamma) > tg\psi_1 \text{ или } tg(90^\circ - \psi - \gamma) > tg\psi_1, \text{ откуда } 90^\circ - \psi - \gamma > \psi_1 \text{ или}$$

$$\gamma < 90^\circ - \psi - \psi_1. \quad (4)$$

Для значений  $\psi = 10^\circ$  и  $\psi_1 = 20^\circ$  передний (отрицательный) угол режущего зерна  $\gamma$  должен быть меньше  $60^\circ$ , в противном случае процесс шлифо-

вания неосуществим – будет иметь место лишь процесс трения связки с обрабатываемым материалом. Этим показано, что увеличить  $K_{ш}$  и повысить эффективность шлифования можно за счёт повышения  $K_{рез}$  и  $P_{yрез}$ . Увеличение  $K_{рез}$  предполагает уменьшение углов  $\psi$  и  $\gamma$  за счет применения абразивных материалов, характеризующихся высокой остротой режущих кромок (СТМ). Увеличить  $P_{yрез}$  можно увеличением высот выступания зерен над уровнем связки круга, применяя методы правки круга, процесс алмазно-искрового шлифования, основанный на введении в зону резания дополнительной энергии в форме электрических разрядов.

В зависимости (1) и (2) входит неизвестная величина  $P_{yрез}$ , которая должна быть связана с фактической производительностью обработки  $Q = F \cdot V_{дем0}$ , где  $F$  – площадь поперечного сечения обрабатываемого прямолинейного образца,  $m^2$ ;  $V_{дем0}$  – фактическая линейная скорость съема материала,  $m/c$ . Для определения  $P_{yрез}$  следует представить  $P_{zрез} = K_{рез} \cdot P_{yрез}$  и  $P_{zрез} = \sigma \cdot (Q / V_{кр})$ , где  $\sigma$  – условное напряжение резания,  $H/m^2$ ;  $V_{кр}$  – скорость круга,  $m/c$ . Сравнивая эти две зависимости, получаем

$$P_{yрез} = \frac{\sigma}{K_{рез}} \cdot \frac{F \cdot V_{дем0}}{V_{кр}}. \quad (5)$$

Как видно, чем больше  $V_{дем0}$  и производительность обработки, тем больше  $P_{yрез}$ . При этом с уменьшением  $\sigma$  и увеличением  $K_{рез}$  и  $V_{кр}$  составляющая силы резания  $P_{yрез}$  уменьшается. Следовательно, достижение заданной скорости  $V_{дем0}$  происходит при меньшем значении  $P_{yрез}$ . Подставляя зависимость (5) в зависимости (1) и (2), получаем

$$P_z = \left(1 - \frac{f_1}{K_{рез}}\right) \cdot \frac{\sigma \cdot F \cdot V_{дем0}}{V_{кр}} + f_1 \cdot P_y; \quad (6)$$

$$K_{ш} = \left(1 - \frac{f_1}{K_{рез}}\right) \cdot \frac{\sigma \cdot F \cdot V_{дем0}}{V_{кр} \cdot P_y} + f_1. \quad (7)$$

С учетом соотношения [6]:  $\sigma = (2 \cdot \sigma_{сж}) / K_{рез}$  зависимость (7) принимает вид:

$$K_{ш} = \left(1 - \frac{f_1}{K_{рез}}\right) \cdot \frac{2 \cdot \sigma_{сж} \cdot F \cdot V_{дем0}}{K_{рез} \cdot V_{кр} \cdot P_y} + f_1, \quad (8)$$

где  $\sigma_{сж}$  – предел прочности на сжатие обрабатываемого материала,  $H/m^2$ .

**Результаты расчетов.** Из зависимости (8) вытекает, что с увеличением  $K_{рез}$  коэффициент шлифования  $K_{ш}$  будет увеличиваться. Это обусловлено

повышением режущей способности круга. Для оценки технологических возможностей шлифования необходимо провести анализ энергоемкости обработки  $\Theta$ , которая с учетом зависимости (5) может быть описана формулой

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{N}{Q} = \frac{(P_{z_{рез}} + P_{z_{мп}}) \cdot V_{кр}}{Q} = \frac{(\sigma + P_{z_{мп}}) \cdot \sigma}{K_{рез} \cdot P_{y_{рез}}} = \sigma \cdot \left[ 1 + \frac{(K_{ш} \cdot P_y - K_{рез} \cdot P_{y_{рез}})}{K_{рез} \cdot P_{y_{рез}}} \right] = \\ &= \sigma \cdot \left[ 1 + \left( \frac{K_{ш}}{K_{рез}} \cdot \frac{P_y}{P_{y_{рез}}} - 1 \right) \right] = \sigma \cdot \frac{K_{ш}}{K_{рез}} \cdot \frac{P_y}{P_{y_{рез}}} = \sigma \cdot \frac{P_z}{P_{z_{рез}}}. \quad (9)\end{aligned}$$

Из зависимости (9) вытекает важное соотношение:

$$\frac{\Theta}{K_{ш}} = \frac{\sigma}{K_{рез}} \cdot \frac{P_y}{P_{y_{рез}}} = \frac{\sigma}{K_{рез}} \cdot \frac{1}{\left( \frac{P_{y_{рез}}}{P_y} \right)} = \frac{\sigma}{K_{рез}} \cdot \frac{1}{\left( 1 - \frac{P_{ymp}}{P_y} \right)}. \quad (10)$$

Как следует из рис. 2, а, с увеличением отношения  $P_{y_{рез}}/P_y$  от 0 до 1 отношение  $\Theta/K_{ш}$  непрерывно уменьшается и принимает наименьшее значение  $\sigma/K_{рез}$ , соответствующее процессу «чистого» резания при шлифовании. Следовательно, чем больше отношение  $P_{ymp}/P_y$ , тем больше отношение  $\Theta/K_{ш}$ , которое может существенно превышать значения  $\sigma/K_{рез}$  (рис. 2, б). Это подтверждается известными экспериментальными данными, согласно которым отношение  $\Theta/K_{ш}$  может до 100 раз превышать  $\sigma/K_{рез}$ , например, при шлифовании алмазными кругами на прочных металлических связках, которые в процессе шлифования теряют режущую способность.

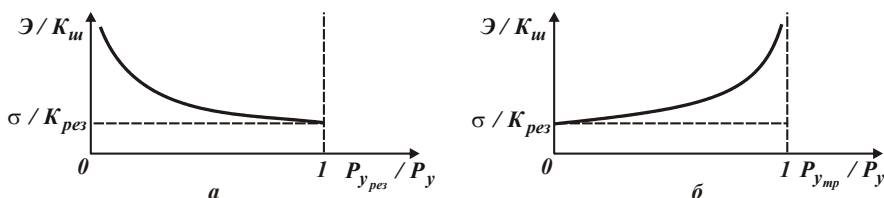


Рис. 2 – Зависимости: а –  $\Theta/K_{ш}$  от  $P_{y_{рез}}/P_y$ ; б –  $\Theta/K_{ш}$  от  $P_{ymp}/P_y$ .

Заслуживает внимания анализ закономерностей изменения температуры резания  $\theta$  при шлифовании по упругой схеме с учетом зависимости, приведенной в работе [6], и соотношения (6):

$$\theta = \frac{q \cdot l_2}{\lambda} = \frac{P_z \cdot V_{кр} \cdot l_2}{\lambda \cdot F} = \left[ \left( 1 - \frac{f_1}{K_{рез}} \right) \cdot \sigma \cdot V_{дем0} + \frac{f_1 \cdot P_y \cdot V_{кр}}{F} \right] \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}}, \quad (11)$$

где  $q = (P_z \cdot V_{кр})/F$  – плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  $l_2 = \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot \tau / (c \cdot \rho)}$  – глубина проникновения образуемого при шлифовании тепла в поверхность-

ный слой обрабатываемой детали, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности обрабатываемого материала, Вт/(м·К);  $c$  – удельная теплоемкость обрабатываемого материала, Дж/(кг·К);  $\rho$  – плотность обрабатываемого материала, кг/м<sup>3</sup>;  $F$  – площадь контакта шлифовального круга с обрабатываемым материалом, м<sup>2</sup>.

Из зависимости (11) следует, что температура резания  $\theta$  при шлифовании увеличивается с увеличением времени обработки  $\tau$  лишь за счет увеличения глубины  $l_2$  проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, то есть не столь значительно по сравнению со шлифованием по жесткой схеме (как показано в работе [5]). Это допускает достаточно продолжительный контакт круга с обрабатываемой деталью, тогда как при шлифовании по жесткой схеме с целью снижения температуры резания возможен непродолжительный контакт. Данная закономерность указывает на эффективность применения упругой схемы шлифования с точки зрения уменьшения температуры резания, несмотря на то, что при этом может значительно увеличиться параметр  $l_2$  по сравнению с жесткой схемой шлифования.

**Перспективы дальнейших исследований.** Автор считает перспективными направления исследований, связанные с разработкой на основе полученных теоретических решений эффективных технологических процессов финишной абразивной обработки ответственных деталей машин, в частности, высокоточных деталей гидроаппаратуры, обеспечивая высокие показатели точности, качества и производительности за счет снижения механических и температурных погрешностей обработки.

**Выводы.** Разработана математическая модель процесса шлифования с фиксированным радиальным усилием и на ее основе определены условия повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей. Теоретически установлено, что в отличие от шлифования по жесткой схеме, при шлифовании с фиксированным радиальным усилием время обработки фактически не влияет на снижение показателей точности и качества обрабатываемых поверхностей в связи с исключением трения между связкой круга и обрабатываемым материалом. Это является важным фактором повышения эффективности обработки высокоточных деталей. При этом температура резания увеличивается не столь значительно по сравнению со шлифованием по жесткой схеме. Это допускает достаточно продолжительный контакт круга с обрабатываемой деталью, тогда как при шлифовании по жесткой схеме с целью снижения температуры резания возможен непродолжительный контакт.

**Список литературы:** 1. Маслов Е.Н. Теория шлифования металлов. – М.: Машиностроение, 1974. – 319 с. 2. Робочі процеси високих технологій в машинобудуванні: навч. посібник / За редакцією А.І. Грабченко. – Харків: ХДПУ, 1999. – 436 с. 3. Попов С.А., Малевский Н.П., Терещенко Л.М. Алмазно-абразивная обработка металлов и твердых сплавов. – М.: Машиностроение, 1977. – 263 с. 4. Узунян М.Д. Алмазно-искровое шлифование твердых сплавов. – Харків: НТУ «ХПИ», 2003. – 359 с. 5. Рябенков И.А., Новиков Ф.В. Оценка влияния интенсивности трения связки круга с обрабатываемым материалом на эффективность процесса шлифования // Вісник НТУ «ХПИ». Збірник наукових праць. Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у ма-



шинобудуванні та металургії. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 43 (1086). – С. 143 – 147. 6. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф.В. Новикова, А.В. Якимова. В десяти томах. – Т. 4. Теория абразивной и алмазно-абразивной обработки материалов. – Одесса: ОНПУ. – 2002. – 802 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Maslov, E. N. *Teorija shlifovanija metallov*. Moscow: Mashinostroenie, 1974. Print. 2. *Robochi procesy vysokih tehnologij v mashynobuduvanni: navch. posibnyk*. Ed. A. I. Grabchenko. Kharkiv: KDPU, 1999. Print. 3. Popov, S. A., N. P. Malevskij and L. M. Tereshhenko. *Almazno-abrazivnaja obrabotka metallov i tverdyh splavov*. Moscow: Mashinostroenie, 1977. Print. 4. Uzunjan, M. D. *Almazno-iskrovoe shlifovanie tverdyh splavov*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2003. Print. 5. Rjabenkov, I. A., and F. V. Novikov. "Ocenka vlijanija intensivnosti trenija svjazki kruga s obrabatyvaemym materialom na effektivnost' processa shlifovanija." *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Innovaciyni tehnologii ta obladnannja obrobky materialiv u mashynobuduvanni ta metalurgii*. No. 43 (1086). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 143–147. Print. 6. *Fiziko-matematicheskaja teorija processov obrabotki materialov i tehnologij mashinostroenija*. Ed. F. V. Novikova, A. V. Yakimova. *V desjati tomah*. Vol. 4. "Teorija abrazivnoj i almazno-abrazivnoj obrabotki materialov." Odessa: ONPU, 2002. Print.

*Поступила (received) 18.03.2015*

УДК 625.282:625.032.07

**Е.С. РЯБОВ**, канд. техн. наук, ГП завод «Электротяжмаш», Харьков

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАКОПИТЕЛЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОПОДВИЖНОГО СОСТАВА С АСИНХРОННЫМ ТЯГОВЫМ ПРИВОДОМ В РЕЖИМЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ТОКА ТЯГОВОЙ СЕТИ**

Рассмотрено использование накопителей энергии в составе тягового электропривода электроподвижного состава. Показана целесообразность их использования в режиме ограничения тока тяговой сети при расположении накопителя энергии на подвижном составе. Предложен способ определения параметров накопителя при работе в режиме ограничения тока тяговой сети при его использовании в составе асинхронного тягового привода и получены аналитические расчетные выражения для определения параметров накопителя.

**Ключевые слова:** асинхронный тяговый привод, накопитель энергии, подвижной состав, тяговая характеристика.

**Введение.** Эффективным средством энергосбережения и повышения надежности работы электроподвижного состава является применение *накопителей энергии* (НЭ), которые позволяют аккумулировать энергию при торможении и обеспечивают ее отдачу в привод в тяговом режиме его работы [1]. Задача о выборе места расположения накопителя энергии – на транспортном средстве или на тяговой подстанции – очевидно, не может быть решена однозначно, поскольку накопитель может использоваться для разных целей. Между тем, в ряде работ, например, в [2], показано, что использование накопителей энергии на борту транспортного средства в целях аккумулирования энергии рекуперации имеет преимущества: во-первых, отсутствуют

потери при передаче энергии между транспортным средством и тяговой подстанцией в режиме рекуперации; во-вторых, создаются условия для параллельной работы тяговой сети и накопителя энергии, что позволяет осуществить ограничение тока контактной сети в режиме тяги. В результате этого достигается выравнивание тягового тока, что также вызывает снижение потерь энергии в тяговой сети. Недостатком расположения НЭ на транспортном средстве является увеличение массы транспортного средства и снижение его пассажировместимости.

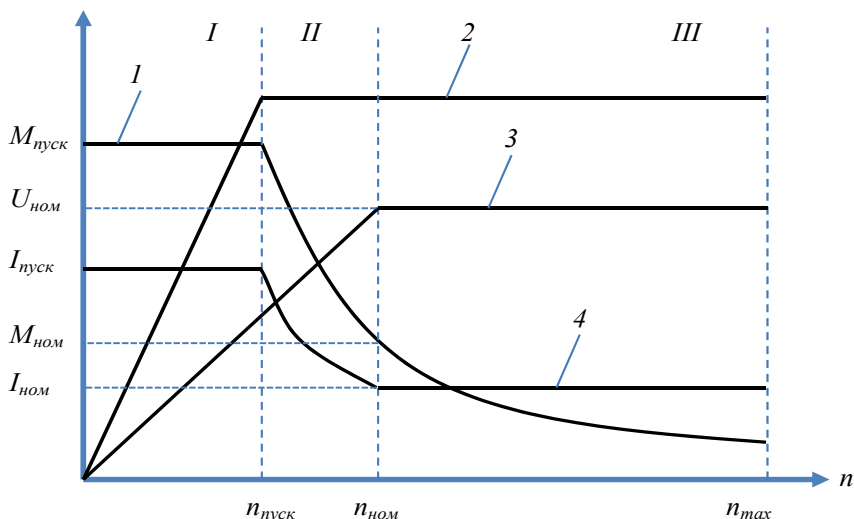


Рис. 1 – Характеристики тягового асинхронного электродвигателя  
 1 – зависимость момента от частоты вращения; 2 – зависимость мощности от частоты вращения; 3 – зависимость напряжения от частоты вращения; 4 – зависимость тока от частоты вращения;  $M_{\text{пуск}}$  – пусковой момент;  $U_{\text{ном}}$  – номинальное напряжение;  $I_{\text{пуск}}$  – пусковой ток;  $M_{\text{ном}}$  – номинальный момент;  $I_{\text{ном}}$  – номинальный ток;  $n_{\text{пуск}}$  – частота окончания пуска;  $n_{\text{ном}}$  – номинальная частота вращения;  $n_{\text{max}}$  – максимальная частота вращения.

**Анализ исследований.** На сегодняшний день уже существуют десятки успешно реализованных тяговых приводов транспортных средств самого различного назначения, в которых НЭ расположен на борту транспортного средства [2, 3]. Однако, как правило, в публикациях не приводятся исходные предпосылки, которыми оперировали разработчики при выборе параметров тягового привода в целом и НЭ в частности. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть варианты потенциального использования накопителей энергии, расположенных на подвижном составе, и разработать подходы к выбору параметров НЭ. Поскольку современный подвижной состав оснащается, в основном, асинхронным тяговым приводом, расчеты выполним с учетом особенностей тягового привода этого типа.

**Постановка задачи.** Как упомянуто выше, использование НЭ на борту транспортного средства позволяет осуществлять выравнивание тока тягового сети. Рассмотрим способ определения параметров накопителя энергии в составе асинхронного тягового привода для случая его работы в указанном режиме.

**Результаты исследований.** Типовая зависимость мощности, момента, напряжения и тока от частоты вращения тягового асинхронного двигателя приведена на рис. 1.

Особенностью представленных характеристик является то обстоятельство, что переход к режиму работы с постоянной мощностью на валу осуществляется при напряжении менее номинального. Это обусловлено требованием уменьшения массы и габаритов асинхронного электродвигателя или необходимостью вписать тяговый двигатель в определенный монтажный объем. Как следствие, имеет место увеличение фазного тока электро-двигателя при работе с частотами, ниже номинальной, то есть до выхода на номинальное напряжение (зоны I и II на рис. 1). При работе в зоне с постоянным моментом (зона I на рис. 1) фазный ток может достигать удвоенного номинального. Работа с током такой величины непродолжительна, однако, наличие такого режима работы требует соответствующего увеличения токовой нагрузки оборудования тяговой подстанции (или другого источника энергии). В связи с этим представляется целесообразным применение накопителей энергии, работающих в режиме ограничения тока тяговой сети: ту часть тока, которая «превышает» некоторый заданный ток тяговой сети, необходимо отбирать от НЭ.

Рассмотрим способ определения параметров накопителя для асинхронного тягового привода в режиме ограничения тока тяговой сети. Примем, что ток тяговой сети должен соответствовать номинальному фазному току электродвигателя. Это допущение целесообразно, поскольку при работе в режиме постоянства мощности при постоянном напряжении (зона III рис. 1) фазный ток асинхронного двигателя изменяется всего на несколько процентов от его номинального значения.

Определим полную энергию, необходимую для разгона транспортного средства до номинальной скорости, при которой асинхронный тяговый двигатель начинает работать с номинальным напряжением и током. Она будет равна сумме, определяемой как сумма изменения кинетической энергии транспортного средства и работы силы тяги по преодолению сопротивления движению.

Поскольку номинальная частота вращения находится на гиперболическом участке тяговой характеристики, то в этапе разгона необходимо выделить два участка: разгон с постоянной силой тяги (зона I на рис. 1) и разгон с постоянной мощностью (зона II на рис. 1).

Определим энергию, которую необходимо затратить на разгон транспортного средства. Используем для этого основные положения теории электрической тяги [5].

Сила тяги определяется по выражению

$$F_T = m(1 + \gamma) \frac{dV}{dt} + F_C, \quad (1)$$

где  $m$  – масса транспортного средства;  $(1 + \gamma)$  – коэффициент вращающихся масс,  $dV/dt$  – ускорение,  $F_C$  – сила сопротивления движению.

Работа силы тяги может быть определена по выражению

$$A_T = \int_{s_n}^{s_k} F_T ds. \quad (2)$$

Выражение (2) может быть представлено в виде

$$A_T = \frac{1}{2} m(1 + \gamma)(V_n^2 - V_k^2) + m \int_{s_n}^{s_k} F_C ds, \quad (3)$$

где  $V_n$ ,  $V_k$  – скорости начала и окончания пуска;  $s_n$ ,  $s_k$  – координата транспортного средства в начале и конце рассматриваемого режима соответственно.

Поскольку на этапе разгона выделено два участка, то выражение (3) следует применить для каждого из них.

Для участка разгона с постоянной силой тяги энергия определяется по выражению

$$A_I = \frac{1}{2} (1 + \gamma) V_I^2 + m \int_0^{s_I} F_C ds, \quad (4)$$

где  $V_I$  – скорость, при которой осуществляется переход от разгона с постоянной силой тяги к разгону с постоянной мощностью;  $s_I$  – путь, который проходит транспортное средство при разгоне с постоянной силой тяги.

Путь  $s_I$  определяется по выражению

$$s_I = m(1 + \gamma) \int_0^{V_I} \frac{V dV}{F_T - F_C}. \quad (5)$$

Для участка разгона с постоянной мощностью работа силы тяги определяется по выражению

$$A_{II} = \frac{1}{2} (1 + \gamma) (V_{II}^2 - V_I^2) + m \int_{s_I}^{s_{II}} F_C ds. \quad (6)$$

где  $V_{II}$  – скорость окончания пуска;  $s_{II}$  – путь, который проходит транспортное средство при разгоне с постоянной силой тяги.

Общая работа сил тяги равна сумме работ на каждом из участков

$$A_T = A_I + A_{II}. \quad (7)$$

Путь  $s_{II}$  определяется по выражению

$$s_{II} = m(1 + \gamma) \int_{V_I}^{V_{II}} V dV / (F_T - F_C), \quad (8)$$

при этом следует учитывать, что в диапазоне частот вращения от нуля до  $n_{\text{пуск}}$  сила тяги постоянна, а в диапазоне частот от  $n_{\text{пуск}}$  до  $n_{\text{ном}}$  определяется по выражению

$$F_T = P/V, \quad (9)$$

где  $P$  – мощность.

Электрическая энергия, подводимая к тяговому приводу, определяется суммой энергии, потребляемой из контактной сети, и энергии, получаемой от накопителя

$$A_{\Sigma} = A_{KC} + A_{H\Sigma}, \quad (10)$$

где  $A_{KC}$  – энергия, потребляемой из контактной сети;  $A_{H\Sigma}$  – энергия, забираемая от накопителя.

Энергия  $A_{KC}$  определяется по выражению

$$A_{KC} = \overline{\eta_{\text{ex}}} \int_{t_I}^{t_{II}} U_{KC} I_{KC} dt, \quad (11)$$

где  $\overline{\eta_{\text{ex}}}$  – среднее значение КПД входного преобразователя при работе в рассматриваемых режимах;  $U_{KC}$  – напряжение контактной сети;  $I_{KC}$  – ток контактной сети;  $(t_{II} - t_I)$  – время разгона транспортного средства до скорости  $V_{II}$ .

Если принять  $t_I$  равным нулю, то общее время разгона  $t_{II}$  может быть подсчитано по выражению

$$t_{II} = m(1 + \gamma) \int_0^{V_{II}} \frac{dv}{F_T - F_C}, \quad (12)$$

при этом следует учесть изменение выражения для силы тяги при скорости выше  $n_{\text{пуск}}$ .

Энергия, забираемая от накопителя, может быть определена по выражению

$$A_{H\Sigma} = \overline{\eta_{\text{cn}}} W, \quad (13)$$

где  $\overline{\eta_{\text{cn}}}$  – среднее значение КПД полупроводникового преобразователя, согласующего параметры электрической энергии, отдаваемой в тяговый привод;  $W$  – энергия накопителя.

Работы сил тяги и электрическая энергия, затраченная на разгон транспортного средства, связаны соотношением

$$A_T = \overline{\eta_{\text{мен}}} A_{\Sigma}, \quad (14)$$

где  $\overline{\eta_{\text{мен}}}$  – среднее значение общего КПД тягового привода (преобразователей, тяговых машин, редуктора) при работе в рассматриваемых режимах.

С учетом (7) – (14) энергия накопителя определяется по выражению

$$W = \frac{1}{\eta_{\text{cn}}} \left( \frac{A_I + A_{II}}{\overline{\eta_{\text{мен}}}} - A_{KC} \right). \quad (15)$$

Предложенный способ определения параметров НЭ для тягового асинхронного привода с ограничением тока тяговой сети может быть использован как для определения параметров накопителя энергии для его применения при модернизации существующих асинхронных тяговых приводов, так и с целью определения оптимальных параметров НЭ и асинхронного тягового привода для новых разработок.

**Выводы.** В статье рассмотрено использование асинхронного тягового привода с накопителем энергии для ограничения тока тяговой сети и предложен способ определения его параметров. Изложенный подход к определению параметров накопителя энергии может быть использован для других случаев его применения.

**Список литературы:** 1. Омеляненко В.И., Бондаренко В.Е., Омеляненко Г.В., Оверьянова Л.В. Накопители энергии – перспективная технология для железных дорог // Міжнародний інформаційний науково-технічний журнал «Локомотив-інформ». – Харків: Техностандарт. – 2011. – №4. – С. 4 – 9. 2. Спиридонов Е.А. Применение накопителей энергии для выравнивания нагрузок в системе электроснабжения городского электрического транспорта // Науч. проблемы трансп. Сибири и Дальнего Востока. – 2008. – № 1. – С. 258 – 262. 3. Экономия энергии на рельсовом транспорте Японии // Железные дороги мира – 2013. – №8. – С. 47 – 53. 4. Перспективы рынка дизельного подвижного состава в Европе // Железные дороги мира – 2012. – №1. – С. 38 – 42. 5. Осипов С.И. Теория электрической тяги [Текст]: Учебник для вузов ж.-д. транспорта / С.И. Осипов, С.С. Осипов, В.П. Феоктистов ; под. ред. С.И. Осипова – М.: Маршрут, – 2006.

**Bibliography (transliterated):** 1. Omel'janenko, V. I., et al. "Nakopiteli energii – perspektivnaja tehnologija dlja zheleznyh dorog." *Mizhnarodnyj informacijnyj naukovu-tehnicznyj zhurnal «Lokomotiv-inform»*. No. 4. 2011. Kharkiv: Tehnostandart. 4–9. Print. 2. Spiridonov, E. A. "Primenenie nakopitelej energii dlja vyravnivanija nagruzok v sisteme elektrosnabzhenija gorodskogo elektricheskogo transporta." *Nauch. problemy transp. Sibiri i Dalnego Vostoka*. No. 1. 2008. 258–262. Print. 3. "Ekonomija energii na rel'sovom transporte Japonii." *Zheleznye dorogi mira*. No. 8. 2013. 47–53. Print. 4. "Perspektivy rynka dizel'nogo podvizhnogo sostava v Evrope." *Zheleznye dorogi mira*. No. 1. 2012. 38–42. Print. 5. Osipov, S. I., S. S. Osipov and V. P. Feoktistov. *Teorija elektricheskoi tziagi. Uchebnik dlja vuzov zh.-d. transporta*. Ed. S. I. Osipov. Moscow: Marshrut, 2006. Print.

*Поступила (received) 02.03.2015*

УДК 629.113+629.331

**В.П. САХНО**, д-р техн. наук, проф., НТУ, Київ;  
**В.М. ПОЛЯКОВ**, канд. техн. наук, проф., НТУ, Київ;  
**О.М. ТІМКОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ, Київ;  
**О.С. ІВАНОВ**, аспірант, НТУ, Київ

**МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК АГРЕГАТИВ ГСУ  
ТА РЕЖИМІВ ЇХ РОБОТИ ДЛЯ ВАНТАЖНИХ АВТОМОБІЛІВ В  
ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД УМОВ ЕКСПЛУАТАЦІЇ**

Розроблена методика, яка дозволяє встановити вплив розподілу потужності між агрегатами гібридної силової установки (ГСУ), алгоритму керування та експлуатаційного маршруту руху на показники тягово-швидкісних властивостей і паливної економічності вантажних автомобілів. В якості оціночних критеріїв виступають показники тягово-швидкісних властивостей, паливної економічності та витрати електричної енергії автомобілем із ГСУ. Використаний ймовірнісний підхід до вибору раціональної величини потужності ГСУ, її розподілу між електродвигуном (ЕД) і двигуном внутрішнього згоряння (ДВЗ) та вибору режимів їх спільної роботи.

**Ключові слова:** автомобіль, алгоритм, потужність, електродвигун, тягово-швидкісні властивості, паливна економічність, енергія, маршрут руху, швидкість.

**Вступ.** В Україні питанням створення автомобіля з гібридними силовими установками (ГСУ) займаються *О.В. Бажинів, О.П. Смирнов, С.А. Серіков, О.М. Тімков* та інші вчені. Питання доцільності створення автомобілів з ГСУ розглянуто в роботах *А.В. Дубинена, А.А. Бикова, М.Г. Колобова, Н.О. Грищенко, П.М. Куркина, В.Х. Далека, В.Ф. Харченко, М.І. Шпіка* [1 – 10]. В роботах [3 – 6] автори основними причинами впровадження транспортних засобів (ТЗ) з ГСУ називають забруднення навколишнього середовища, надмірне споживання не відновлюваних природних ресурсів (нафта та газ) автомобільним транспортом. Автори відзначають, що впровадження автомобіля з ГСУ значно покращує екологічні та економічні показники ТЗ.

У роботі [6] наведено обґрунтування необхідності створення ТЗ для міських пасажирських перевезень з гібридною силовою установкою. Автори відзначають, що об'єднання позитивних якостей ДВЗ та тягового електроприводу на транспортному засобі дозволяє отримати переваги в порівнянні з традиційною конструкцією за рахунок підвищення екологічної чистоти, економії палива, поліпшення динамічних властивостей та підвищення ККД енергоустановки.

**Аналіз останніх досліджень.** Широке коло задач із дослідження систем керування ГСУ розглянуто *С.А. Серіковим* [7, 8 та ін.]. Він розглянув особливості послідовно-паралельної схеми ГСУ і трансмісії автомобіля з ГСУ як об'єкту керування за швидкістю руху. Була отримана математична модель силової установки для автомобілів з ГСУ з послідовно-паралельною схемою. Отримана модель використовується при оптимізації процесу перерозподілу потоків потужності між агрегатами ГСУ на різноманітних тягово-швидкісних режимах. Особливістю роботи [8] є те що, керування ГСУ в даному випадку здійснюється за допомогою наступних керуючих дій: положення органу керування потужністю ДВЗ (ступінь відкриття дросельної заслінки у %); струму оберненої електричної машини; передаточного відношення у трансмісії від ДВЗ до ведучих коліс; коефіцієнту, що враховує повноту вмикання зчеплення.

Висвітлені у відомих джерелах роботи не можна назвати висвітленими в плані постановки задачі щодо визначення параметрів вантажних автомобілів з ГСУ. На жаль, відсутня загальна методологія в моделюванні та проектуванні основних компонентів ГСУ. Алгоритм керування ГСУ та процес оптимізації алгоритму керування з визначенням оптимальних умов переходу між режимами роботи є унікальним у кожного автовиробника та засекреченим. У цій області все ще залишається багато невирішених питань. Вітчизняне автомобілебудування значно відстає у розробці та реалізації цього напрямку. В

зв'язку з цим дослідження в області створення вітчизняного автомобіля з ГСУ є актуальними.

**Постановка задачі.** Метою дослідження є розробка методики з наступною реалізацією у вигляді комп'ютерної програми, яка дозволяє методом чисельного експерименту встановити вплив розподілу потужності між агрегатами ГСУ, алгоритму керування та експлуатаційного маршруту руху на показники тягово-швидкісних властивостей і паливної економічності вантажних автомобілів. В якості оціночних критеріїв виступають показники тягово-швидкісних властивостей, паливної економічності та витрати електричної енергії автомобілем із ГСУ.

**Математична модель.** Модель автомобіля можливо описати математичними формулами на основі загальних принципів механіки. Моделювання автомобіля з ГСУ ускладнюється тим, що він являє собою складну мехатронну систему, в якій необхідно організовувати сумісну роботу електричних, механічних та теплових агрегатів. При моделюванні автомобіля з ГСУ важливо, щоб моделювання об'єкта керування і алгоритму керування проходило в єдиному середовищі, що дає можливість оптимізувати всю систему в цілому. Для ефективного моделювання важливо зберігати баланс між точністю розрахунку та швидкістю моделювання. На деяких етапах розробки потрібні швидкі ітерації, тобто не дуже точні, для швидкого виконання моделі. Існує декілька підходів до моделювання. Один з них, це моделювання від енергетичної установки (ЕУ) до приводу ведучих коліс (ПВК) [11]. Такий підхід запозичений з практики розробки електропередат тепловозів та може використовуватися для проектування приводів автомобілів з ГСУ. Принцип моделювання від ЕУ до ПВК показаний схематично на рис. 1.

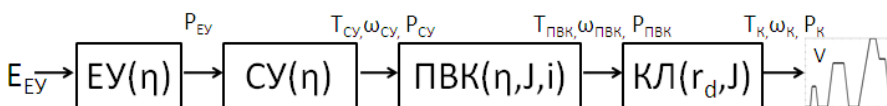


Рис. 1 – Схема моделювання від ЕУ до ПВК.

Задавши енергією, якою володіє енергетична установка ( $E_{EY}$ ), враховуючи коефіцієнт корисної дії (ККД), визначається потужність ( $P_{EY}$ ) яку може надати ЕУ. Далі задавши ККД силової установки (СУ) та передаточною функцією, що описує залежність між вхідними та вихідними параметрами, визначається потужність, яку надає СУ, а також крутний момент та частота обертання вихідного валу СУ. Потім, задавши ККД, моментом інерції, передаточним відношенням ( $i$ ) (або зміною передаточних чисел) ПВК, визначаємо потужність, крутний момент і частоту обертання на валу ПВК. Далі, задавши динамічним радіусом колеса (КЛ) та моментом інерції колеса, визначаємо швидкість руху транспортного засобу. В деяких випадках, коли неможливо задатися умовами експлуатації автомобіля, а за умовами уніфікації або з інших причин, вибір енергоустановки здійснений, тобто відома потужність ЕУ, що використовується на створення сили тяги, такий підхід є єдино



МОЖЛИВИМ.

У випадках, коли на початковій стадії проектування відомі експлуатаційні умови, задані у вигляді зміни швидкості руху в часі, на базі відомих залежностей з теорії руху автомобіля можливо обґрунтувати загальні вимоги до електричних, механічних, теплових агрегатів та системи керування силовою установкою автомобіля. Також можливо прогнозувати енергетичні та техніко-економічні показники. Більш раціональним є моделювання за методом від ПВК до ЕУ, показаний схематично на рис. 2.

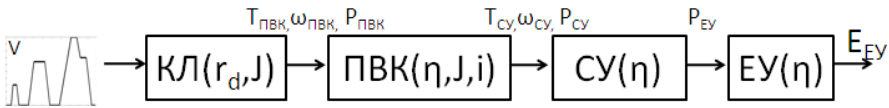


Рис. 2 – Схема моделювання від ПВК до ЕУ.

Задавшись режимом експлуатації, наприклад, у вигляді зміни швидкості автомобіля в часі та динамічним радіусом колеса, можливо визначити потужність, крутний момент та кутову швидкість, що повинні бути створені на валу ПВК для забезпечення заданого режиму експлуатації. В подальшому, задавшись значенням ККД трансмісії, моментом інерції валів, передаточним відношенням (або рядом передаточних відношень) ПВК, – визначається потужність, крутний момент та частота обертання, що повинна створити СУ автомобіля. Далі, прийнявши попередні значення ККД СУ, визначаємо потужність, яку повинна надати ЕУ. Отримане значення потужності ЕУ дозволяє обрати оптимальні параметри розподілу потужності між агрегатами ЕУ для задоволення заданого режиму експлуатації. Такий підхід до проектування автомобілів з ГСУ методологічно більш виправданий. Крім цього, це дозволяє мінімізувати кількість варіантів розрахунків і виключити ряд невизначеностей, які ускладнюють процес проектування.

Розглянемо в роботі саме такий підхід до визначення бажаних характеристик автомобіля при відомих умовах експлуатації. Властивості автомобіля залежать від його здатності набирати швидкість, долати підйоми та зупинятися до певної швидкості за необхідний проміжок часу. В нормальних умовах руху максимальні можливості автомобіля використовуються рідко, протягом тривалого часу силова установка завантажена лише частково. Реальне тягове зусилля і швидкість автомобіля змінюються в широких межах, які визначаються прискоренням, сповільненням, ухилом або підйомом тощо. Ці зміни пов'язані з дорожньою обстановкою та типом автомобіля. Режим руху автомобіля в місті або поза містом також дуже сильно впливає на такі його характеристики, як ступень завантаження. Все це дуже складно впливає на тягове зусилля і зміну швидкості автомобіля в реальних дорожніх умовах. Однак, деякі типові їздові цикли можуть бути використані для моделювання типових дорожніх умов. Ці їздові цикли представляють звичайно у вигляді залежності швидкості автомобіля від часу руху по горизонтальній дорозі. Їздові цикли використовують для оцінки паливної економічності. Переваги гібридного автомобіля краще всього реалізуються при русі у міському циклі з великою кількістю зупинок та гальмувань.

З рівняння динаміки руху автомобіля в поздовжньому напрямку (1), рів-

няння динаміки руху автомобіля в поздовжньому напрямку представляється як:

$$M\delta \frac{dV}{dt} = (F_{tf} + F_{tr}) - F_w - F_f \pm F_g \sin \alpha, \quad (1)$$

де  $M$  – маса автомобіля;  $\delta$  – це коефіцієнт, що враховує обертові маси;  $dV/dt$  – лінійне прискорення автомобіля в поздовжньому напрямку руху;  $F_f$  – сила опору коченню;  $F_w$  – аеродинамічна сила опору;  $F_g$  – сила тяжіння від повної маси автомобіля;  $\alpha$  – кут нахилу дорожнього покриття;  $F_{tf}, F_{tr}$  – тягова сила відповідно на передньої та задньої осях.

Необхідне тягове та гальмівне зусилля, потрібне для виконання режиму експлуатації автомобіля, можна записати у вигляді:

$$F_{tb} = F_f + F_w \pm M\delta \frac{dV}{dt} \pm F_g \sin \alpha, \quad (2)$$

де  $F_{tb}$  – сила тяги на ведучих колесах.

Це рівняння у випадку ГСУ паралельного типу з приводом на різні осі складається з потрібного тягового та гальмівного зусилля на передній та задній осях автомобіля відповідно:

$$F_{tb} = F_{tb_f} + F_{tb_r}. \quad (3)$$

Підставивши складові сили опору в (2) отримаємо:

$$F_{tb} = Mgf_r \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho A_f C_D V^2 \pm M\delta \frac{dV}{dt} \pm F_g \sin \alpha. \quad (4)$$

Прискорення автомобіля  $dV/dt$  розраховується ітераційним методом за відомою залежністю швидкості автомобіля від часу в характерних умовах руху. Збільшуючи швидкість від  $V_k$  до  $V_{k+1}$  на кожному кроці визначається значення прискорення, як показано на рис. 3, за формулою (5):

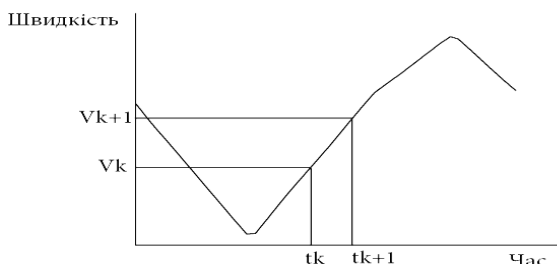


Рис. 3 – Зміни швидкості у часі.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_{k+1} - V_k}{t_{k+1} - t_k} (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

де  $n$  – кількість точок розрахунку.

Крутий момент на колесах автомобіля може бути розрахований за формулою:

$$T_w = \left( T_p - J_p \frac{d\omega_p}{dt} \right) u_{FB} u_0 \eta_t - \sum_{i=1}^n J_w \frac{d\omega_w}{dt}, \quad (6)$$

де  $T_p$  – крутний момент, що створюється ГСУ;  $d\omega/dt$  – кутове прискорення вихідного валу трансмісії;  $n$  – кількість коліс автомобіля;  $d\omega_w/dt$  – кутове прискорення колеса;  $J_p$  – приведений момент інерції трансмісії;  $u_{FB}$  – передаточне відношення коробки передач;  $u_0$  – передаточне відношення головної передачі;  $\eta_t$  – коефіцієнт корисної дії трансмісії;  $J_w$  – момент інерції колеса.

Тягове зусилля на ведучих колесах може бути розраховано за формулою:

$$F_t = \frac{\left( T_p - J_p \frac{d\omega_p}{dt} \right) u_{FB} u_0 \eta_t - \sum_{i=1}^n J_w \frac{d\omega_w}{dt}}{r_d}, \quad (7)$$

де  $r_d$  – це динамічний радіус колеса.

З рівняння (7) отримаємо крутний момент ГСУ:

$$T_p = \frac{F_t r_d - \sum_{i=1}^n J_w \frac{d\omega_w}{dt}}{u_{FB} u_0 \eta_t} - J_p \frac{d\omega_p}{dt}. \quad (8)$$

Кутова швидкість коліс може бути розрахована як:

$$\omega_w = \frac{\omega_p}{u_{FB} u_0}, \quad (9)$$

де  $\omega_p$  – частота обертання вихідного валу ГСУ.

Лінійна швидкість центру колеса автомобіля може бути розрахована так:

$$V = \omega_w r_d. \quad (10)$$

Кутова швидкість вихідного валу силової установки розраховується за формулою:

$$\omega_p = \frac{V u_{FB} u_0}{r_d}. \quad (11)$$

Розглянемо баланс потужності при русі автомобіля. В тяговому режимі необхідна потужність еквівалентна потужності опору та потужності, втраченої в трансмісії, тяговому моторі, силовій електроніці, батареї. Втрати потужності можна врахувати через коефіцієнти корисної дії відповідних елементів  $\eta_t, \eta_m, \eta_{in}, \eta_{bat}$ . ККД акумуляторної батареї  $\eta_{bat}$  залежить від типу батареї. ККД сучасних свинцево-кислотних батареї 0,8 – 0,9 [12].

Потужність, яку повинні розвивати силові агрегати, визначається в залежності від режимів роботи. При цьому не враховується додаткове навантаження від кондиціонера, підсилювача рульового керування та ін.

В режимі руху від електродвигуна для визначення потрібної потужності силової установки необхідно визначити, яку потужність треба підвести до коліс автомобіля для виконання вимог експлуатаційного режиму. Розрахунок

проводиться за формулою:

$$P_m = \frac{V}{\eta_t} \left( M g f_r \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho A_f C_D V^2 \pm M \delta \frac{dV}{dt} \pm F_g \sin \alpha \right). \quad (12)$$

При цьому, розрахунок проводиться у випадках прискорення і руху з постійною швидкістю. Будеться залежність потрібної потужності від швидкості руху. Аналізуючи отримані данні можливо визначити доцільну потужність електродвигуна (ЕД).

В режимі руху за рахунок ДВЗ потужність, яку необхідно забезпечити, розраховується за формулою:

$$P_{out} = P_m. \quad (13)$$

Бажаний крутний момент визначається за формулою (8), кутова швидкість за формулою (9). Розрахунок здійснюється при зміні передаточних чисел коробки передач в залежності від швидкості, яка буде обумовлена умовами експлуатації.

Середня витрата палива протягом їздового циклу визначається за виразом:

$$G_f = \int_0^t \frac{V}{\eta_t \eta_e} Q \left( M g f_r \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho A_f C_D V^2 \pm M \delta \frac{dV}{dt} \pm F_g \sin \alpha \right) dt, \quad (14)$$

де  $Q$  – питома теплота згоряння палива (для бензину 34,5 МДж/л);  $\eta_e$  – ККД ДВЗ.

В режимі руху за рахунок ЕД і ДВЗ привід ведучих коліс одночасно здійснюється за рахунок ДВЗ та ЕД. Робота кожного приводу в складі гібридної силової установки у діапазоні своєї оптимальній ефективності має важливе значення для загальної ефективності транспортного засобу. ДВЗ, як правило, має кращу ефективність за повної потужності. Відхилення від цього діапазону призведе до різкої втрати ефективності. З іншого боку, втрата ефективності в електричного двигуна не така значна в порівнянні з ДВЗ, який працює далеко від оптимального режиму.

Навантаження на транспортний засіб випадковим чином змінюється в ході експлуатації через часті прискорення, сповільнення. Потужність навантаження складається з двох компонентів: постійна (середня) та динамічна потужність. У автомобіля з ГСУ один привід, який краще працює на стаціонарних режимах ДВЗ, може бути використаний для забезпечення середньої потужності. З іншого боку, електричний привід може бути використаний для забезпечення динамічної потужності [13].

Під час руху автомобіль має певну кількість кінетичної енергії. При гальмуванні за рахунок сил тертя кінетична енергія перетворюється в теплову та розсіюється в навколишнє середовище. Потужність, яку можливо отримати за рахунок рекуперації кінетичної енергії автомобіля протягом гальмування, розраховується за формулою:

$$P_{in} = F_{ib} V \eta_t \eta_m \eta_{in} \eta_{bat}. \quad (15)$$

При цьому розрахунок проводиться тільки при сповільненні. Кількість енергії, яка втрачається при виконанні їздового циклу, розраховується за формулою:

$$E = \int_0^t P_{out} dt + \int_0^t P_{in} dt. \quad (16)$$

Потужність генератора для здійснення регенеративного гальмування залежить від потужності, яка повинна бути на колесі автомобіля для здійснення їздового циклу. Розрахунок потужності проводиться за формулою (12), при цьому лише у випадках уповільнення.

Після визначення необхідної потужності для виконання їздового циклу визначається необхідна енергія та будується залежність розподілу необхідної енергії від швидкості автомобіля. Ця інформація є дуже корисною для проектування та керування системою рекуперативного гальмування. В діапазоні швидкостей, де розсіюється найбільша кількість енергії, гальмівна ефективність роботи електромотору, працюючого в режимі генератора, може бути найбільша. В інших швидкісних діапазонах рекуперативне гальмування можна не застосовувати.

Блок керування автомобілем з ГСУ реалізований з використанням *теорії кінцевих автоматів* [14]. Вхід автомата в кожен стан у відповідний момент часу визначається не тільки станом входів в даний момент часу, але і внутрішнім станом схеми в момент подачі входних сигналів. У свою чергу, внутрішній стан схеми залежить від стану її входів у попередній момент часу, а, отже, визначається послідовністю надходження входних сигналів. На входи комбінаційної схеми надходять зовнішні сигнали. Під впливом сигналів комбінаційна схема формує послідовність сигналів на виході. Загальна модель логіки керування представляється за допомогою моделі:

$$\begin{cases} S(t) = \phi[X(t-1); S(t-1)]; \\ Z(t) = \psi[S(t)], \end{cases} \quad (17)$$

де  $S(t)$ ,  $S(t-1)$  – стан автомата в момент часу  $t$  і  $t-1$ ;  $X(t-1)$  і  $Z(t)$  – входні та вихідні сигнали автомата в момент часу  $t$  і  $t-1$ .

Отже, стан  $S(t)$  автомата при його описі однозначно визначається входними сигналами  $X(t-1)$  і внутрішнім станом  $S(t-1)$  в попередній момент часу  $t-1$ . Сигнал на виході автомата  $Z(t)$  у розглянутий момент часу  $t$  в моделі Мура повністю визначається станом  $S(t)$  автомата в даний момент часу.

Логіка керування реалізується за допомогою інструменту Stateflow в середовищі MatLab Simulink. На рис. 4 зображена блок-схема алгоритму керування.

**Результат роботи програми.** Математична реалізація запропонованої методики реалізована в середовищі MatLab, для зручності проведення розрахунків було створено інтерфейс для введення вихідних даних для розрахунку (рис. 5).

Пошук раціональної величини факторів здійснюється за допомогою підпрограми циклічного моделювання, яка дозволяє досліджувати вплив одночасно двох будь-яких факторів на різних рівнях (рис. 6). Такий підхід дозволяє провести вибір та обґрунтування значень максимальної потужності сило-

[illegible][illegible]

В результаті розрахунків можуть бути отримані 3-D графічні залежності витрати палива, потужності електродвигуна, потужності ДВЗ, витрати електричної енергії в залежності від швидкості руху, до якої працює ЕД, та від співвідношення потужності агрегатів ГСУ. Для кожного графіка можна по-

будувати сімейство ізоклін, яке відповідатиме множині параметрів ГСУ та її системи керування, за яких буде виконуватись швидкісний режим руху на експлуатаційному маршруті руху, після чого постає питання обґрунтування і вибору остаточних величин цих параметрів на основі одержаних результатів.

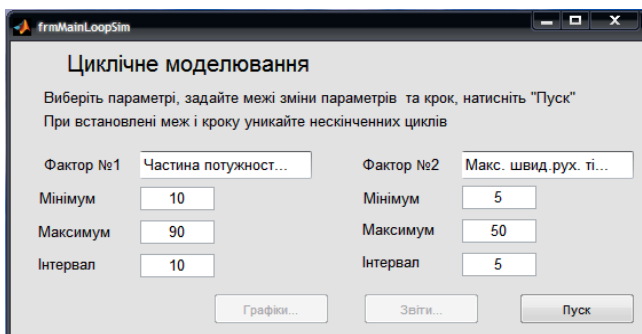


Рис. 6 – Модуль циклічного моделювання.

**Перспективи подальших досліджень.** При експертному оцінюванні властивостей автомобіля з ГСУ слід надавати більшу перевагу параметрам, які відповідають реальним умовам експлуатації ТЗ – їздовим циклам та/або експлуатаційним маршрутам. В подальшому планується провести обчислення параметрів ГСУ для вантажних автомобілів та провести перевірку адекватності розробленої методики експериментально.

**Висновки.** Розроблено математичну модель та програму розрахунку за нею в середовищі програмного продукту MatLab/Simulink, що дозволяє проводити в інтерактивному режимі розрахунки за різними їздовими циклами. За допомогою цієї програми можливо: змінювати значення вихідних параметрів, вибирати режим розрахунку, спостерігати поточну швидкість автомобіля та ступінь заряду батареї, одержати графічні результати розрахунків.

**Список літератури:** 1. Тімков О.М., Іванов О.С. Розподіл тягового та гальмівного зусилля на колесах автомобіля в різних їздових циклах // Харків: ХНАДУ. – Сб.наук. праць: Автомобільний транспорт. – Вип. № 29 – 2011. – С.220 – 223. 2. Череди́нченко Ю.И. Как выбирать параметры технических систем // «Грузовик &», 2001. – №3. С. 42 – 48. 3. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. – М.: Машиностроение, – 1990. – 352 с. 4. Далека В.Х., Харченко В.Ф., Шпіка М.І., Грищенко Н.О. Тяговий привід транспортних засобів з гібридною силовою установкою // Науково-технічний збірник. – 2010. – №97 – С. 226 – 331. 5. Дубинен А.В., Быков А.А., Колобов М.Г. Гибридный транспорт // Научно-технический сборник «Коммунальное хозяйство городов». – 2009. – №88. – С. 275 – 280. 6. Грищенко Н.О., Киркин П.М. Транспортні засоби для міських пасажирських перевезень з гібридною силовою установкою [Електронний ресурс] // Електромеханічні системи і комплекси транспортних засобів – 2011. – №122 – Режим доступу: [http://elm-dstu.edu.org.ua/konkurs/docs/pdf/ID\\_122-.pdf](http://elm-dstu.edu.org.ua/konkurs/docs/pdf/ID_122-.pdf) 7. Сериков С.А., Бороденко Ю.Н. Силовая установка гибридного автомобиля как объект управления // Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту. – 2009. – №3. – С. 45 – 30. 8. Сериков С.А., Бороденко Ю.Н. Гибридная силовая установка автомобиля как объект управления // ХНАДУ. – 2009. – №24. 9. Родзянов В.В. Аналіз методів визначення ємності акумуляторних батарей гібридних автомобілів // Вісник ХНАДУ. – 2009. – №45. – С. 97 – 100. 10. Смирнов О.П., Панікарський О.С., Боженов В.С., Смирнова А.О. Використання конденсаторів великої ємності для забезпечення оптимальних параметрів роботи акумуляторних батарей гібридних автомобілів // Вісник Донецького інституту автомобільного

транспорту. – 2009. – №3 – С. 50 – 54. **11.** Теория и расчет тягового привода электромобилей / И.С. Ефремов, А.П. Пролыгин, Ю.М. Андреев, А.Б. Миндлин. – М.: Высшая школа, 1984. **12.** Свинцово-кислотный аккумулятор [Электронный ресурс] / Режим доступа: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Свинцово-кислотный\\_аккумулятор](http://ru.wikipedia.org/wiki/Свинцово-кислотный_аккумулятор). **13.** Hybrid Electric and Fuel Cell Vehicles / [Mehrddod Ehsani, Yimin Gao, Ali Emadi]. – Taylor & Francis Group – 2010. – 519с. **14.** Введения в теорию автоматов, языков и вычислений, 2-е изд. / [Хопкрофт Д.С., Мотвани Р.У., Ульман Д.Д.]. – Пер. С англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 528 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Timkov, O. M., and O. S. Ivanov. "Rozpodil tjavovogo ta gal'mivnogo zusyllja na kolesah avtomobilja v riznyh izdovyh cyklah." Kharkiv: HNADU. *Sb. nauk. prac': Avtomobil'nyj transport*. No. 29. 2011. 220–223. Print. **2.** Cherednichenko, Ju. I. "Kak vybirat' parametry tehniceskikh sistem." «Gruzovik &», 2001. No. 3. 42–48. Print. **3.** Smirnov, G. A. *Teorija dvizhenija kolesnyh mashin*. Moscow: Mashinostroenie, 1990. Print. **4.** Daleka, V. H., et al. "Tjavovyj pryvid transportnyh zasobiv z gibrydnoju sylovoju ustanovkoju." *Naukovo-tehnichnyj zbirnik*. No. 97. 2010. 226–331. Print. **5.** Dubinen, A. V., et al. "Gibridnyj transport." *Nauchno-tehnicheskij sbornik «Komunal'noe hozjajstvo gorodov»*. No. 88. 2009. 275–280. Print. **6.** Grishhenko, N. O., and P. M. Kirkin. "Transportni zasoby dlja mis'kyh pasazhyr'skyh perevezenn' z gibrydnoju sylovoju ustanovkoju." *Elektromechanichni systemy i kompleksy transportnyh zasobiv*. No. 122. 2011. Web 04 March 2015 <[http://elm-dstu.edu.org.ua/konkurs/docs/pdf/ID\\_122.-pdf](http://elm-dstu.edu.org.ua/konkurs/docs/pdf/ID_122.-pdf)>. **7.** Serikov, S. A., and Ju. N. Borodenko. "Silovaja ustanovka gibridnogo avtomobilja kak ob'ekt upravlenija." *Visnyk Donec'kogo instytutu avtomobil'nogo transportu*. No. 3. 2009. 45–30. Print. **8.** Serikov, S. A., and Ju. N. Borodenko. "Gibridnaja silovaja ustanovka avtomobilja kak ob'ekt upravlenija." No. 24. HNADU. 2009. Print. **9.** Rodzjanov, V. V. "Analiz metodiv vyznachennja jemnosti akumuljatornyh batarej gibrydnyh avtomobiliv." *Visnyk HNADU*. No.45. 2009. 97–100. Print. **10.** Smirnov, O. P., et al. "Vykorystannja kondensatoriv velykoi jemnosti dlja zabezpechennja optymal'nyh parametriv roboty akumuljatornyh batarej gibrydnyh avtomobiliv." *Visnyk Donec'kogo instytutu avtomobil'nogo transportu*. No. 3. 2009. 50–54. Print. **11.** Efremov, I. S., et al. *Teorija i raschet tjavovogo privoda jelektromobilej*. Moscow: Vysshaja shkola, 1984. Print. **12.** "Svincovo-kislotnyj akkumuljator." Web. 03 March 2015 <[http://ru.wikipedia.org/wiki/Свинцово-кислотный\\_аккумулятор](http://ru.wikipedia.org/wiki/Свинцово-кислотный_аккумулятор)>. **13.** Mehrddod Ehsani, Yimin Gao and Ali Emadi. *Hybrid Electric and Fuel Cell Vehicles*. Taylor & Francis Group. 2010. Print. **14.** Hopcroft, D. С., R. U. Motvani and D. D. Ul'man. *Vvedenija v teoriju avtomatov, jazykov i vycheslenij, 2nd ed. Per. s angl.* Moscow: Izdatel'skij dom «Vil'jams», 2002. Print.

Надійшла (received) 06.03.2015

УДК 532.5:518.5

**А.Н. СЕМКО**, д-р техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк;  
**Н.И. ЯГУДИНА**, ассист., ДонНУ, Донецк

## ОСОБЕННОСТИ ПУЛЬСИРУЮЩИХ СТРУЙ ЖИДКОСТИ ВЫСОКОЙ СКОРОСТИ

В работе в акустической и газодинамической постановках исследованы процессы в импульсном генераторе струй жидкости. В акустической постановке рассматривалась одномерная задача без учета движения поршня и истечения струи. В газодинамической постановке численно решалась одномерная и осесимметричная задача с учетом движения поршня, истечения струи и кавитации жидкости. Проведено сравнение результатов расчетов для разных моделей движения жидкости, сделаны соответствующие выводы. Показано, что пульсации скорости струи связаны с волновыми процессами в установке.

**Ключевые слова:** пульсирующие струи жидкости, жидкие диски, импульсный генератор струй, кавитация, численное моделирование.

© А. Н. Семко, Н. И. Ягудина, 2015



**Введение.** Исследование пульсирующих струй жидкости показало, что их истечение сопровождается образованием в струе периодически возникающих утолщений – пучностей или жидких дисков [1]. Эти пучности возникают, когда скорость истечения струи скачком возрастает. При этом участок струи с большей скоростью набегаает на участок струи с меньшей скоростью. В зоне контакта этих участков возникает область повышенного давления, которая приводит к возникновению радиального течения и образованию *жидкого диска*. Из закона сохранения осевой составляющей импульса следует, что жидкий диск движется со скоростью

$$v_d = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Таким образом, при пульсирующем характере истечения струи на струе образуются жидкие диски, которые хорошо видны при скоростной видеосъемке [1].

На рис. 1 приведены высокоскоростные фотографии пульсирующей струи воды в воздухе, взятые из работы [2]. На теле струи хорошо видны жидкие диски, возникающие при пульсациях скорости истечения. Максимальная скорость струи в эксперименте достигала 500 м/с. Ореол в головной части струи связан с интенсивным аэродинамическим взаимодействием струи с воздухом.

Наличие жидких дисков для пульсирующих струй жидкости высокой скорости были зафиксированы в экспериментальных исследованиях Edney B., Daniel I.M., Field J.E [3 – 7]. Образование высокоскоростных первичных кумулятивных струй и чередование периодических кольцевых выбросов, зарегистрированное в экспериментах для электрического генератора струй с электродной системой направленного воздействия, объяснялось вихревой природой течения в установке [8].

Периодическая структура пульсирующей струи жидкости исследовалась при помощи генератора импульсных струй с поршневым приводом в работе [9]. В экспериментах проводилось фотографирование струи высокоскоростной камерой. Теоретические исследования выполнены при помощи преобразования Лапласа по времени для волнового уравнения линейной акустики для неподвижного поршня и отсутствия истечения струи. Получено аналитическое решение для давления на торце камеры и скорости истечения струи

$$p_c = 2p_0(e^{-\alpha t} + \sum_{n=1} e^{-\alpha(t-n t_0)}), \dots, v_c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}(1 - e^{-\alpha t})(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)^{-1/2}.$$

Здесь  $p_0 = \rho_0 v_1 c_0$  – давление гидроудара;  $t_0 = 2H_0/c_0$  – характерное время, равное времени распространения волны сжатия от поршня до торца и обратно;  $\alpha = F_c \rho_0 c_0 / m$  – постоянная прибора.

В данной работе в акустической и газодинамической постановках ис-

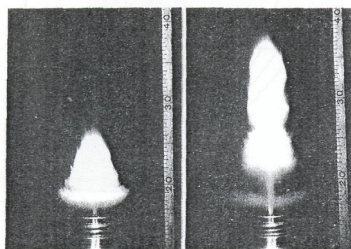


Рис. 1 – Фотографии импульсной струи жидкости в воздухе.

следовались процессы в импульсном генераторе струй жидкости, описанном в [9]. В акустической постановке рассматривалась одномерная задача без учета движения поршня и истечения струи, как это сделано аналитически в работе [9]. В газодинамической постановке численно решалась одномерная и осесимметричная задача с учетом движения поршня, истечения струи и кавитации жидкости. Проведено сравнение результатов расчетов для разных моделей движения жидкости, сделаны выводы.

**Постановка задачи.** На рис. 2 представлена схема генератора пульсирующих струй жидкости из работы [9]. Исследуемая установка состоит из цилиндра 3 диаметром  $D$  и длиной  $L$ , который вместе с поршнем 1, расположенным в нижней части, образует камеру 2, заполненную водой. В верхнем торце камеры имеется отверстие малого диаметра  $d$ , из которого истекает импульсная струя жидкости 6. Поршень через шток соединен с рычагом 5 с плечами  $l_1$  и  $l_2$ , на другом конце которого закреплен груз 8 массой  $m_2$  для уравнивания системы. Над грузом 8 на высоте  $H$  находится ударник 4 массой  $m_3$ . Импульсная струя жидкости создается при ударе о конец рычага ударника 4, который падает с заданной высоты  $H$ .

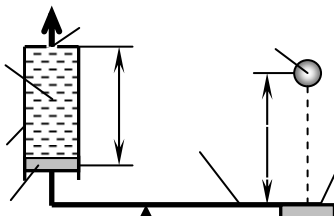


Рис. 2 – Схема установки

При исследовании импульсного генератора струй сделаем следующие допущения. Жидкость считаем идеальной и сжимаемой, трением поршня о цилиндр и массой рычага пренебрегаем, удар груза о рычаг считаем неупругим. В начальный момент жидкость покоится, ее давление равно нулю, начало координат совмещено с поршнем в момент удара. Движение жидкости рассматривается в рамках одномерной линейной акустики, одномерной газовой динамики с учетом кавитации и осесимметричной газовой динамики.

Параметры исследуемой установки, взятые из работы [9], следующие:

$$D = 25 \text{ мм}, d = 2,5 \text{ мм}, L = 75 \text{ мм}, H = 450 \text{ мм}, l_1 / l_2 = 0,5, m_2 = 0,1 \text{ кг}, \\ m_3 = 0,2 \text{ кг}, m_g = 36,8 \text{ г}, m_p = 13,2 \text{ г}, v_3 = 2,97 \text{ м/с}, v_1 = 3,37 \text{ м/с}.$$

**Акустическая модель для одномерной задачи.** В принятой постановке при давлениях до 300 МПа [11] движение жидкости в генераторе можно описать волновым уравнением линейной акустики для потенциала скорости  $\varphi$  со следующими начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=x_p} = v_p, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

где  $c_0$  – скорость звука в воде;  $x_p$  и  $v_p$  – координата и скорость поршня.

Потенциал скорости связан со скоростью и давлением соотношениями

$$v = \partial \varphi / \partial x, \quad p = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  – плотность воды.

Движение поршня описывается уравнениями с начальными условиями

$$m \frac{dv_p}{dt} = -F_c p_p, \quad \frac{dx_p}{dt} = v_p; \quad v_p(0) = v_{p0}, \quad x_p(0) = 0, \quad (4)$$

где  $F_c$  и  $m$  – площадь и приведенная масса поршня,  $v_{p0}$  – начальная скорость поршня.

**Газодинамическая модель для одномерной задачи.** В этом случае одномерное движение идеальной сжимаемой жидкости описывалось системой уравнений нестационарной газовой динамики со следующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$p = B \left[ (\rho / \rho_0)^n - 1 \right]; \quad (6)$$

$$v(0, x) = 0, \quad p(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad (7)$$

$$v(t, x_p) = v_p, \quad v(t, L) = 0.$$

Здесь  $n = 7,15$ ,  $B = 304,5$  МПа и  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – постоянные в *уравнении состояния воды в форме Тэа*. Движение поршня описывалось уравнением (4).

Скорость истечения струи  $v_s$  определялась по *уравнению Бернулли* для несжимаемой жидкости

$$v_s = \sqrt{2p(t, L) / \rho}. \quad (8)$$

Система (5 – 7) интегрировалась численно *методом Годунова* [10 – 12] на подвижной регулярной сетке размером до 5000 ячеек.

**Газодинамическая модель с учетом кавитации.** Известно, что вода практически не выдерживает растягивающих напряжений, и в ней возникает кавитация. Для обычной водопроводной воды кавитация возникает при давлении насыщающих паров, которое составляет около 0,002 МПа [14, 15]. Поскольку характерные давления для данной задачи составляют 10 МПа, то давление насыщающих паров не учитывалось, и считалось, что кавитация наступает, если расчетное давление становилось отрицательным ( $p \leq 0$ ). При расчете течений с кавитацией методом Годунова существенно усложняется алгоритм расчета [14, 15]. Однородная разностная схема с искусственной вязкостью позволяет относительно просто учесть кавитацию жидкости, что значительно упрощает алгоритм расчета [16, 17].

Уравнения движения с искусственной вязкостью в *лагранжевой форме* с начальными и граничными условиями запишем в виде [16 – 18]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + q)}{\partial x}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{(p + q)}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (9)$$

$$v(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0, \quad e(0, x) = 0, \quad x_p \leq x \leq L;$$

$$v(t, x_p) = v_p, \quad v(t, L) = v_L.$$

Здесь  $e$  – удельная внутренняя энергия,  $v_L$  – скорость жидкости, осредненная по торцу с учетом истечения струи,  $q$  – вязкое давление, которое представим суммой членов с линейной  $q_1$  и квадратичной  $q_2$  вязкостью [18]. Квадратичная вязкость  $q_2$  включается на ударных волнах, а линейная вязкость  $q_1$  сглаживает пульсации.

Уравнение состояния воды взято в форме, учитывающей кавитацию жидкости [12]

$$p = \begin{cases} nB(\rho/\rho_0 - 1) + \rho(n-1)e, & \text{если } p > p_{кр}; \\ p_{кр}, & \text{если } p \leq p_{кр}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $p_{кр}$  – критическое давление, при котором возникает кавитация (в расчетах  $p_{кр} = 0$ ).

**Обсуждение результатов расчетов для одномерных моделей.** Ниже приведены некоторые результаты расчетов по предложенным моделям. На рис. 3 представлены графики зависимости давления на поршне от времени для разных моделей генератора струй. Истечение струи при этих расчетах не учитывалось. Кривая 1 – аналитическое решение [9], кривая 2 – численный расчет методом с искусственной вязкостью, 3 (кружочки) – расчет методом потенциала, 4 (крестики) – расчет методом Годунова.

Как видно, процессы в установке носят ярко выраженный волновой характер. Давление на поршне изменяется скачком через характерное время  $t_0 = 2L/c_0 \approx 0,102$  мс. В принятой постановке скачок давления  $\Delta p$  на поршне практически не зависит от количества отражений и равен удвоенному значению давления гидроудара  $\Delta p = 2\rho_0 c_0 v_{p0} \approx 10$  МПа. При численном решении к моменту времени  $t \approx 250$  мкс (после второго отражения волны от поршня) возле поршня и торца начинается кавитация жидкости – давление здесь падает до нуля (кривая 2).

Понижение давления и возникновение кавитации связано с торможением поршня и испусканием им волн разрежения. Аналитическое решение (кривая 1) дает завышенное значение давления и не приводит к кавитации, поскольку при аналитическом решении не учитывается движение поршня и истечение струи. Численный расчет выполнен по единому алгоритму, и все отражения учитываются автоматически. С появлением кавитации численный расчет проводился только методом с искусственной вязкостью, который

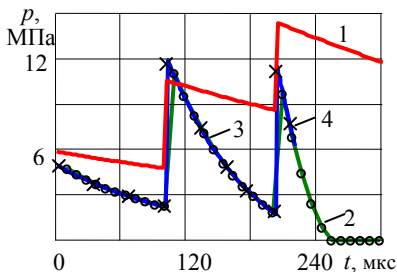


Рис. 3 – Давление на поршне.

учитывал кавитацию жидкости по описанному выше алгоритму. Хорошее совпадение результатов расчетов, выполненных разными численными методами, подтверждает их достоверность.

На рис. 4 приведены графики зависимости давления на поршне и на торце камеры, скорости поршня и струи от времени, полученные при расчете методом с искусственной вязкостью (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Давление на поршне и на торце изменяется скачкообразно. Поршень быстро тормозится, испуская волны разрежения. К приходу отраженной от торца волны давление на поршне уменьшается почти в два раза, а затем падает более интенсивно, чем до прихода отраженной волны (кривая 1). Из графиков видно, что к моменту времени  $t \approx 250$  мкс на торце и на поршне возникает кавитация. Таким образом, на струе можно зарегистрировать экспериментально не более 3 пульсаций. Поршень к этому моменту движется в обратном направлении, его скорость немного меньше начальной скорости удара. Изломы на графике скорости поршня соответствуют приходу очередной волны сжатия.

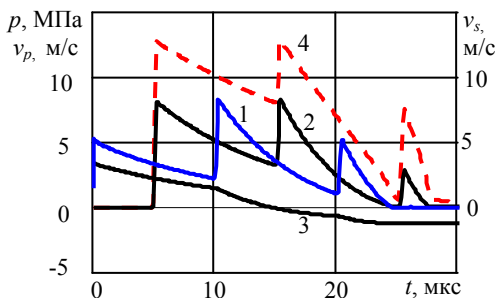


Рис. 4 – Результаты расчетов методом с искусственной вязкостью.

Можно отметить, что давление на торце и на поршне до прихода очередной волны сжатия, изменяется по экспоненциальному закону  $p = p_a e^{-\alpha t}$ , который широко используется при аналитических исследованиях динамического воздействия на преграды в жидкостях и газах. Например, для первой волны на торце  $p_a = \Delta p$ ,  $\alpha = 8,32 \text{ мс}^{-1}$ , а время отсчитывается в миллисекундах с момента отражения волны. Аппроксимация расчетной зависимости  $p_c(t)$  по методу наименьших квадратов дает значение  $\alpha = 8,32 \text{ мс}^{-1}$ , что хорошо совпадает с теорией для первой волны.

**Осесимметричная модель генератора.** В рамках этой модели осесимметричное движение жидкости описывалось уравнениями газовой динамики в следующей дивергентной форме [19 – 21]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} &= -\frac{\rho v}{y}; \\ \frac{\partial pu}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial puv}{\partial y} &= -\frac{\rho uv}{y}; \\ \frac{\partial pv}{\partial t} + \frac{\partial puv}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} &= -\frac{\rho v^2}{y}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  и  $y$  – осевая и радиальная координаты,  $u$  и  $v$  –

осевая и радиальная компоненты скорости. Уравнение состояния воды использовалось в форме Тэта (14).

Начальные и граничные условия следующие:

$$u(0, x, r) = 0, \quad v(0, x, r) = 0; \quad p(0, x, r) = p_a, \quad x, r \in G; \quad (12)$$

$$v|_{S_{cyl}} = 0, \quad p|_{S_{in}} = p_a, \quad u|_{S_{tor}} = 0. \quad (13)$$

Здесь  $G$  – область, занятая жидкостью,  $S_{cyl}$  – боковая поверхность цилиндрической камеры,  $S_{in}$  – площадь поверхности отверстия в торце камеры,  $S_{tor}$  – площадь торца камеры без отверстия. На поршне ставилось условие равенства скоростей поршня и осевой компоненты жидкости. Закон движения поршня определялся уравнениями (4). Поставленная задача решалась численно методом Годунова на регулярной сетке, максимальный размер которой составлял  $1800 \times 300$  ячеек по осям  $x$  и  $r$ .

Расчеты, выполненные в осесимметричной постановке, позволили оценить адекватность одномерной модели импульсного генератора струй и исследовать особенности пространственного течения вблизи отверстия, из которого истекала импульсная струя жидкости.

На рис. 5 приведены зависимости параметров импульсного генератора струй от времени, полученные при расчете в двумерной постановке: 1 – давление на поршне, 2 – давление в центре отверстия из которого истекает струя, 3 – давление в углу рабочей камеры, 4 – скорость истечения в центре струи.

Давление на поршне для двумерной и одномерной моделей имеет ярко выраженный волновой характер. Пульсации давления происходят с периодом около 0,102 мс, что соот-

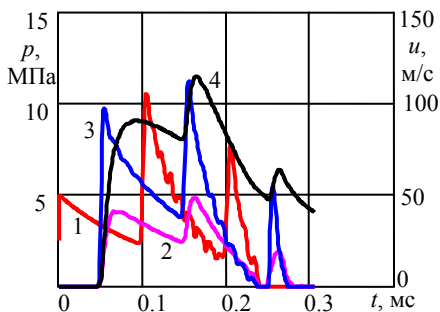


Рис. 5 – Зависимость параметров от времени.

ответствует времени распространения волны от поршня до торца и обратно. Но для двумерной модели на графиках давления видны пульсации с периодом около 11 мкс, которых нет на для одномерной модели. Эти пульсации обусловлены не продольными, как для одномерной модели, а поперечными волнами. Эти волны возникают, когда начинается истечение импульсной струи, и распространяются в поперечном направлении от отверстия до боковой поверхности рабочей камеры и обратно. Время распространения поперечных волн, рассчитанное по геометрическим размерам установки, соответствует периоду пульсаций на графиках давления. Скорость истечения струи в центре отверстия (кривая 4) так же носит пульсирующий характер, полностью повторяя график изменения давления со временем (кривая 4). При первой пульсации скорость истечения струи достигает 90 м/с, а при второй – 120 м/с, что является максимальным значением для генератора данной конструкции. В дальнейшем скорость истечения струи быстро уменьшается, продолжая пульсировать согласованно с волновыми процессами в установке.

Для двумерной постановки давление на поршне практически одинаково по всему поперечному сечению. А вот на торце рабочей камеры давление сильно изменяется по поперечному сечению (кривые 2 и 3). В центре отверстия давление значительно меньше, чем в углу камеры генератора. Давление в углу камеры близко к давлению, рассчитанному по одномерной модели. Поэтому расчеты скорости струи в одномерной постановке по уравнению Бернулли дают завышенное значение, поскольку они соответствуют максимальному давлению на торце рабочей камеры.

На рис. 6 приведено распределение параметров течения в торцевом сечении рабочей камеры генератора по радиусу на момент времени  $t = 0,1$  мс, близкий к характерному времени процесса. Здесь: 1 – давление, 2 – осевая скорость, 3 – радиальная компоненты скорости. На графиках четко видна зона резкого изменения параметров течения вблизи отверстия, граница которого отмечена штрихом на рисунке. Профиль осевой скорости в поперечном сечении отверстия хорошо заполненный (кривая 2), осевая скорость достигает 90 м/с. Давление на торец рабочей камеры (кривая 1) почти постоянное и резко изменяется при переходе в отверстие. Радиальная скорость (кривая 3) направлена к оси установки, максимального значения около 25 м/с достигает на границе отверстия. Внутри отверстия радиальная скорость уменьшается при приближении к оси симметрии практически линейно.

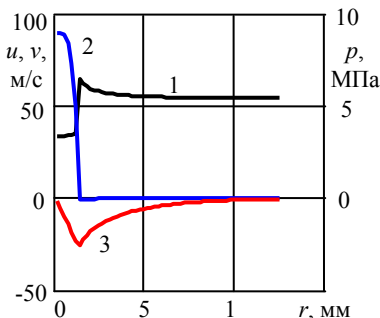


Рис. 6 – Распределение параметров по радиусу на торце.

**Вывод.** Численно исследовано течение жидкости в импульсном генераторе струй в одномерной и двумерной постановке с учетом истечения струи, движения поршня и кавитации жидкости. Для расчета течений с кавитацией развит метод с искусственной вязкостью.

Показано, что процессы в генераторе носят ярко выраженный волновой характер, который приводит к пульсациям давления, скорости истечения струи и возникновению кавитации жидкости. Расчеты в одномерной постановке для разных моделей хорошо совпадают, что указывает на адекватность этих моделей. Аналитическое решение удовлетворительно описывает только начальную стадию процесса.

Расчеты в осесимметричной постановке хорошо согласуются с одномерными моделями. Поэтому основные гидродинамические параметры импульсного генератора (скорость истечения струи, давление внутри установки, период пульсаций) можно рассчитывать в одномерной постановке. В осесимметричной постановке обнаружены поперечные волны, амплитуда которых на порядок меньше амплитуды продольных волн.

**Список литературы:** 1. Dunne B., Cassen B. Velocity discontinuity instability of liquid jet // Journal of Applied Physics. 1956. Vol. 27, № 6. P. 577 – 582. 2. Noumi M., Yamamoto K. Flow characteristics and impact phenomena of pulsed water jets // Proceeding of the Third Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology, Tainan, Taiwan, Nov. 30 – Dec. 2, 1992, pp. 47 – 58. 3. Edney B. Ex-

perimental studies of pulsed water jets // *Proceeding of the 3rd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Chicago, Illinois: May, 1976), paper B2, 11 – 26. **4.** *Daniel I.M.* et al. Photoelastic study of water jet impact // *Proceeding of the 2nd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Cambridge, England: 2nd-4th April, 1974). – Paper A1, pp. A1 – 1, A1 – 18. **5.** *Daniel I.* Experimental studies of water jet impact on rock and rocklike materials. // *Proceeding of the 3rd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Chicago, Illinois: May, 1976), paper B3, 27 – 46. **6.** *Field J.E.* Stress waves, deformation and fracture caused by liquid impact. – *Phil Trans. A*, 1966, vol. 260, N1110, p. 86 – 93. (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*). **7.** *Field J.E., Lesser M. B.* On the mechanics of high speed liquid jets // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1977. – A357, № 1689. – P. 143 – 162. **8.** *Малюшевский П.П.* О механизме формирования кумулятивных струй при метании жидкости плазменным ускорителем // *Механика жидкости и газа*. 1988. – №5. – С. 39 – 44. **9.** *Поздеев В.А.* Нестационарная периодическая структура струи, вызванная импульсным движением поршня в струйном генераторе // *Механика жидкости и газа*. 1996. – №4. – С. 172 – 178. **10.** *Атанов Г.А.* Обобщение метода С. К. Годунова на расчет течений с отколом // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1978. – №6. – С. 1607 – 1612. **11.** *Атанов Г. А.* Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. К.: Вища школа, 1987. – 155 с. **12.** *Семко А.Н.* Импульсные струи жидкости высокого давления. – Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007. – 149 с. **13.** *Бирнгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964. – 466 с. **14.** *Галиев Ш. У.* Динамика гидроупругопластических систем. – Киев: Наук. Думка. – 1981. – 276 с. **15.** *Semko A.N.* Non-stationary cavitation of a liquid in pulse processes // *Proceedings of International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics»* (HSH 2002, June 16 – 23, 2002). – Cheboksary, Russian/ Washington, USA: Cheboksary, Russian, 2002. P. 377 – 381. **16.** *Atanov G., Rusanova O., Semko A.* Unsteady cavitation in the impulse and wave processes // *Fifth International Symposium on Cavitation (cav2003)*. Osaka, Japan, November 1 – 4, 2003. – P. 1 – 7. Paper Cav03-OS-7-002. **17.** *Русанова О.А., Семко А.Н.* Моделирование нестационарной кавитации // *Вісник Донецького університету, Серія А. Природничі науки*. – 2003. – Вип. 1. – С. 148 – 156. **18.** *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго пластических течений // *Вычислительные методы в гидродинамике*. – М: Мир, 1967. – С. 212 – 264. **19.** *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 687 с. **20.** *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. – 840 с. **21.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. Годунова С.К.-М.: Наука, 1976. – 400 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Dunne, B., and B. Cassen. "Velocity discontinuity instability of liquid jet." *Journal of Applied Physics*. Vol. 27. No. 6. 1956. 577–582. Print. **2.** Noumi, M., and K. Yamamoto. "Flow characteristics and impact phenomena of pulsed water jets." *Proceeding of the Third Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology* (Tainan, Taiwan, Nov. 30–Dec. 2) (1992): 47–58. Print. **3.** Edney, B. "Experimental studies of pulsed water jets." *Proceeding of the 3rd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Chicago, Illinois, May) B2 (1976): 11–26. Print. **4.** Daniel, I. M., et al. "Photoelastic study of water jet impact." *Proceeding of the 2nd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Cambridge, England: 2nd-4th April) A1 (1974): 1–18. Print. **5.** Daniel, I. "Experimental studies of water jet impact on rock and rocklike materials." *Proceeding of the 3rd International Symposium on Jet Cutting Technology* (Chicago, Illinois, May) B3 (1976): 27–46. Print. **6.** Field, J. E. "Stress waves, deformation and fracture caused by liquid impact." *Phil Trans. A*. Vol. 260. No. 1110. 1966. 86–93. Print. **7.** Field, J. E., and M. B. Lesser. "On the mechanics of high speed liquid jets." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Vol. A357. No. 1689. 1977. 143–162. Print. **8.** Malushevskij, P. P. "O mehanizme formirovaniia kumulativnykh strui pri metanii zhidkosti plazmennym uskoritelem." *Fluid Mechanics*. No. 5. 1988. 39–44. Print. **9.** Pozdeev, V. A. "Nestacionarnaja periodicheskaja struktura strui, vyzvannaja impul'snym dvizheniem porshnja v strujnom generatore." *Fluid Mechanics*. No. 4. 1996. 172–178. Print. **10.** Atanov, G. A. "Obobshenie metoda S. K. Godunova na raschet techenij s otkolom." *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* No 6 (1978): 1607–1612. Print. **11.** Atanov, G. A. *Gidroiimpul'snye ustanovki dlja razrushenija gornyh porod*. Kiev: Vyshha shkola, 1987. Print. **12.** Semko, A. N. *Impul'snye strui zhidkosti vysokogo davlenija*. Donetsk: Veber, 2007. Print. **13.** Birngof, G., and Je. Sarantonello. *Strui, sledy i kaverny*. Moscow: Mir, 1964. Print. **14.** Galiev, Sh. U. *Dinamika gidrouprugoplasticheskikh sistem*. Kiev: Naukova Dumka, 1981. Print. **15.** Semko, A. N. "Non-stationary cavitation of a liquid in pulse processes." *Proceedings of International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics»* (HSH 2002, Cheboksary, Russian / Washington, USA, June 16–23) (2002): 377–381. Print. **16.** Atanov, G., O. Rusanova and A. Semko. "Unsteady cavitation in the impulse and wave processes." *Fifth International*



*Symposium on Cavitation (Osaka, Japan, November 1–4) (2003): Cav03-OS-7-002. 1–7. Print.* **17.** Rusanova, O. A., and A. N. Semko. "Modelirovanie nestacionarnoj kavitacii." *Bulletin of Donetsk National University: Ser.: A. Natural sciences*. Vol. 1. 2003. 148–156. Print. **18.** Wilkins, M. L. *Raschet uprugo plasticheskikh techenij. Vychislitelnye metody v gidrodinamike*. Moscow: Mir, 1967. Print. **19.** Rozhdestvenskij, B. L., and N. N. Janenko. *Sistemy kvazilinejnyh uravnenij*. Moscow: Nauka, 1978. Print. **20.** Lojčanskij, L. G. *Mechanika zhidkosti i gaza*. Moscow: Nauka, 1987. Print. **21.** *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki*. Ed. S. K. Godunov. Moscow: Nauka, 1976. Print.

*Поступила (received) 16.12.2014*

УДК 621.646.42

**С.А. ШЕВЧЕНКО**, аспирант, ведущий инж.-констр. ГП «КБ «Южное»,  
Днепропетровск;  
**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**М.С. СТЕПАНОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## **УТОЧНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДАХ ПНЕВМОСИСТЕМЫ ЗАПУСКА РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ**

Выполнен анализ процессов теплообмена газа со стенками в магистральных, подающих газ к турбонасосному агрегату, и в трубопроводах управления клапанами пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения. Показано, что течение газа по расходным магистральям допустимо считать адиабатическим, а по трубопроводам управления – изотермическим. Выполнено уточнение метода инвариантов Римана, позволяющее учесть неизоэнтропийный характер течения в выпускной магистрали, а также газодинамическое сопротивление трубопроводов.

**Ключевые слова:** газодинамический расчёт; континуальные модели трубопроводов; одномерные течения; фактор газодинамического сопротивления; пневмосистема запуска.

**Введение и задачи исследования.** В жидкостных ракетных двигателях (ЖРД) многократного включения для верхних ступеней ракет-носителей разработки ГП «Конструкторское бюро «Южное» применяются системы запуска, в которых раскрутка турбонасосного агрегата осуществляется сжатым газом. В этих системах используются высокорасходные пневмоуправляемые регуляторы давления, которые поддерживают постоянное давление газа на входе в коллектор пусковой турбины. Регулятор является основным агрегатом, определяющим переходные процессы в пневмосистеме запуска при её вступлении в работу и при выключении. Для выбора оптимальных конструктивных параметров регулятора на стадии проектирования важной задачей является разработка математической модели, описывающей динамические характеристики всей пневмосистемы запуска.

В работах [1, 2] эта задача рассмотрена на примере двигателя РД861К (рис. 1), в систему запуска которого кроме регулятора 5 входят шаробаллон высокого давления 1, трубопроводы 2 и 6 и пневмоклапан 4, установленный на входе в регулятор 5. Давление в управляющие полости пневмоклапана 4 и регулятора 5 подается от линии управляющего давления, которая включает в

себя шаробаллон управляющего давления 10, регулятор управляющего давления 9, электропневмоклапан 8 и трубопроводы. Шаробаллоны заправляют гелием. Пневмосистема запуска вместе с относящейся к ней частью линии управляющего давления содержит 7-мь подвижных элементов (поршни и клапаны), а также более 20-ти обособленных полостей, соединяемых посредством 15-ти дросселированных отверстий и 8-ми трубопроводов различного диаметра и протяженности. Трубопроводы изготовлены из нержавеющей стали с соблюдением высоких требований к шероховатости внутренней поверхности. Пневмосистема обеспечивает пять включений двигателя. По мере израсходования гелия давление в обоих шаробаллонах снижается почти в 4 раза, но, благодаря работе регуляторов, остаётся стабильным на входе в турбину (рис. 2), что необходимо для обеспечения идентичности процессов запуска при всех пяти включениях двигателя.

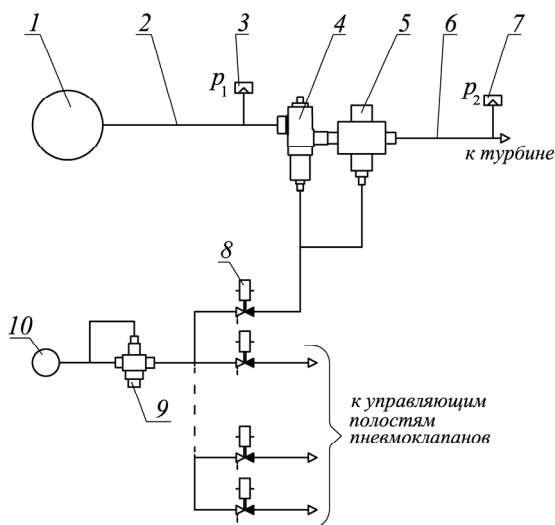


Рис. 1 – Схема пневмосистемы запуска: 1, 10 – шаробаллон; 2, 6 – входной (впускной) и выходной (выпускной) трубопроводы; 3, 7 – первичный преобразователь давления; 4 – пневмоклапан; 5 – регулятор давления; 8 – электропневмоклапан; 9 – регулятор управляющего давления.

В [1, 2] была представлена дискретная математическая модель системы запуска в составе испытательного стенда, которая описывает динамику регулятора и агрегатов, участвующих в формировании переходных процессов. В модели учтены сжимаемость газа в полостях и некоторые особенности схемы, в частности возможность отрыва подвижных элементов регулятора друг от друга при их движении между упорами, а также газодинамические силы, действующие на регулирующий орган при малых зазорах. Приведенное в [2]

сопоставление расчётных данных с результатами экспериментов выявило их хорошее совпадение для полостей, расположенных за клапаном регулятора. В то же время в эксперименте на испытательном стенде и при огневых испытаниях двигателя были зарегистрированы высокоамплитудные колебания давления в полостях, располагающихся до регулятора 5 (рис. 2); дискретная модель из [1, 2] такие колебания не описывала.

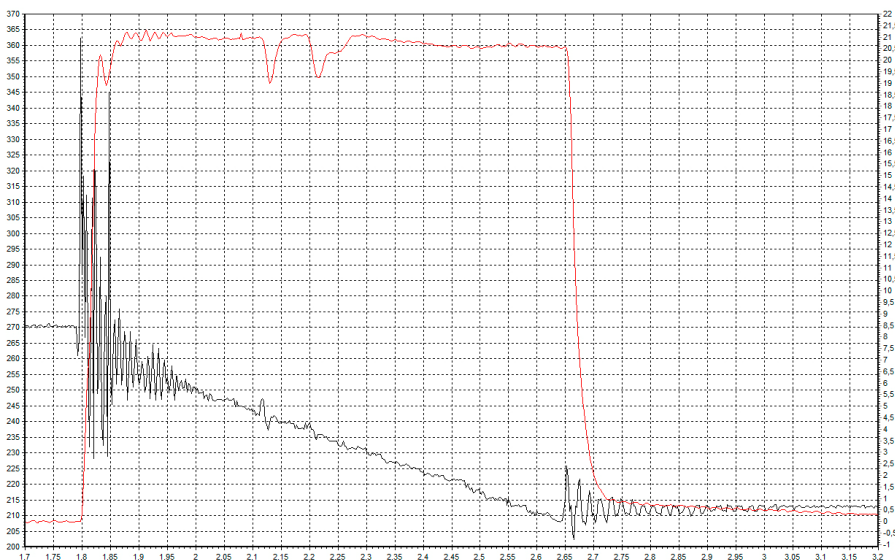


Рис. 2 – Колебания давления до и после регулятора при огневом испытании на 2-м включении двигателя (нижняя кривая и шкала слева отвечают входному, а верхняя кривая и шкала справа – выходному трубопроводу).

При уточнении модели для расчёта трубопроводов были учтены важные особенности работы пневмосистемы. На начальном и конечном этапах, составляющих около 0.2 сек (рис. 2), исследуемый процесс является переходным, и здесь необходимость учёта динамических эффектов очевидна. Но на большей части рабочего цикла процесс подачи газа близок к установившемуся, и здесь, как это кажется на первый взгляд, динамическими эффектами можно пренебречь. Известно, что классические методы расчёта динамики столбов газа в трубопроводах (напр., *метод характеристик* или *метод инвариантов* [3]) эффективны для коротких промежутков и при большом наблюдательном времени теряют устойчивость (если не применять специальные меры, которые снижают эффективность). Обозначенную проблему можно решить за счёт перехода к комбинированной модели – на одних промежутках времени использовать, напр., метод инвариантов, а на других – известную *формулу Т.М. Баиты* [4], описывающую установившиеся течения по трубопроводу. Однако специфика описываемого процесса не позволяет это сделать.

*Пневмосистема запуска ракетного двигателя работает вблизи границы динамической неустойчивости*, и если при выборе математической модели допущены ошибки, то расчёт может показать автоколебания, которых на самом деле нет, или, что ещё хуже, получить затухающие колебания там, где на самом деле проявляется неустойчивость. Кроме того, на процесс подачи газа оказывают влияние (через общую линию управления) и другие агрегаты двигателя, включающиеся параллельно (этим объясняется небольшой провал давления на промежутке 2.1–2.3 сек, рис. 2). Следовательно, на всех этапах расчёта динамические эффекты, в том числе колебания параметров газа в трубопроводах, должны учитываться в полном объёме, и такой учёт для трубопроводов, в которых существенное влияние оказывают не только сжимаемость и инерционность, но и газодинамическое сопротивление, конвекция и теплообмен, возможен лишь при использовании континуальных моделей.

Поэтому было принято решение для уточнения результатов расчёта перейти от дискретной к дискретно-континуальной модели пневмосистемы, в рамках которой на всем рабочем цикле высокорасходные и управляющие трубопроводы рассматриваются как элементы с распределёнными параметрами и описываются уравнениями в частных производных.

**Краткий обзор моделей одномерной газовой и гидродинамики, используемых для расчёта трубопроводов тепловых двигателей.** Основу для указанного выше перехода должны были составить известные уравнения одномерной газовой динамики [5], имеющие следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (1/\rho) \partial P / \partial x = -2KU; \\ \partial \rho / \partial t + U \partial \rho / \partial x + \rho \partial U / \partial x = 0; \\ \partial T / \partial t + U \partial T / \partial x + (k-1)T \partial U / \partial x = -[\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R)] \cdot (T - T_{cm}), \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $U, P, \rho, T$  – скорость, давление, плотность и температура газа в сечении трубопровода  $x$  в момент времени  $t$ ;  $K$  – фактор газодинамического сопротивления, который зависит от числа Рейнольдса  $Re = Ud/\nu$  и относительной шероховатости поверхности  $\Delta$ ;  $d$  – внутренний диаметр трубопровода;  $\mu, \nu$  – динамическая и кинематическая вязкость газа,  $\nu = \mu/\rho$ ;  $\alpha_{om}, T_{cm}$  – коэффициент теплоотдачи от газа к внутренней поверхности стенки и её температура;  $k, R$  – показатель адиабаты и газовая постоянная.

Системой вида (1) моделируют неизоэнтропийные течения газа по трубе, когда можно пренебречь внутренним теплообменом между соседними сечениями и теплом, выделенным силами трения.

Параметры газа связаны законом Клапейрона  $P = \rho RT$ , что позволяет исключить из рассмотрения один из параметров (например, давление), и получить систему для трёх независимых переменных –  $U, \rho, T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (RT/\rho) \partial \rho / \partial x + R \cdot \partial T / \partial x = -2KU; \\ \partial \rho / \partial t + U \cdot \partial \rho / \partial x + \rho \cdot \partial U / \partial x = 0; \\ \partial T / \partial t + U \cdot \partial T / \partial x + (k-1) \cdot T \cdot \partial U / \partial x = -[\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R)] \cdot (T - T_{cm}). \end{array} \right.$$

К сожалению, в случае граничных условий общего вида точное решение

такой системы не выражается через инварианты и его находят сеточными методами (напр., по *схеме распада разрыва* [6]), которые сложны и для той задачи, что решается, как будет показано далее, являются избыточными.

Если допустимо пренебречь теплообменом со стенками, то есть выполняется неравенство

$$|[\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R)] \cdot (T - T_{cm})| \ll [dT/dt], \quad (2)$$

то из системы (1) исключают температуру. Для этого второе и третье уравнения преобразуют к виду

$$\partial \ln \rho / \partial t + U \partial \ln \rho / \partial x + \partial U / \partial x = 0, \quad \partial \ln T / \partial t + U \partial \ln T / \partial x + (k-1) \partial U / \partial x = 0,$$

и суммируют их правые и левые части. Получают новое уравнение

$$\partial \ln P / \partial t + U \partial \ln P / \partial x + k \partial U / \partial x = 0$$

и новую систему уравнений

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (1/\rho) \partial P / \partial x = -2KU; \\ \partial P / \partial t + U \partial P / \partial x + kP \partial U / \partial x = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $kP$  – модуль упругости газа;  $kP = a^2 \rho$ ;  $a = \sqrt{kRT}$  – это скорость звука в столбе газа при адиабатическом (не обязательно изэнтропийном) течении.

В другом крайнем случае теплообмен со стенками преобладает над изменением внутренней энергии газа, то есть

$$|[\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R)] \cdot (T - T_{cm})| \gg [dT/dt]. \quad (4)$$

Здесь третье уравнение системы (1) заменяется условием  $T(x, t) = const$  (и давление газа во всём трубопроводе изменяется пропорционально плотности), а первые два уравнения образуют следующую систему:

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (1/\rho) \partial P / \partial x = -2KU; \\ \partial P / \partial t + U \partial P / \partial x + P \partial U / \partial x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) описывает колебания при изотермическом течении газа; скорость звука для таких колебаний определяется формулой  $a_{из} = \sqrt{RT}$  и, при одинаковой температуре гелия, оказывается меньше адиабатической скорости  $a$  примерно в 1.3 раза.

Заметим, что колебания *столба жидкости* в трубопроводе обычно близки к изотермическим, и описываются системой уравнений, сходной с (5):

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (1/\rho) \partial P / \partial x = -2KU; \\ \partial P / \partial t + U \partial P / \partial x + (a^2 \rho) \partial U / \partial x = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где скорость звука  $a$  и плотность  $\rho$  являются известными функциями текущего давления жидкости  $P$  и её начальной температуры.

Системы (3), (5) или (6) проще системы (1) и, напр., часто используются при моделировании систем поршневых тепловых двигателей, в том числе благодаря широкой известности их *приближённых аналитических решений* в форме прямых и обратных волн с затухающими амплитудами [7]. Для систем питания дизелей опыт получения и использования *точных аналитических решений* системы (5) описан в [8], а *точные численные решения* системы вида (1), составленной для дизельного топлива, получали по схеме распада разрыва в [9].

Расчёт гидромагистралей, установленных в системах питания ракетных двигателей, традиционно производится с использованием *дискретной модели В.Ф. Приснякова* [10]. Модель включает *уравнения динамики и неразрывности течения жидкости* следующего вида:

$$J \ddot{m} = p_{вх} - p_{вых} - (\xi / \rho) \cdot \dot{m}^2, \quad C \dot{p} = \Delta \dot{m} + (l / a) \ddot{m}. \quad (7)$$

Здесь  $J = l / f$  – коэффициент инерционных потерь;  $m = \rho l f$  – масса жидкости в рассматриваемом отрезке магистрали, имеющем длину  $l$  и площадь поперечного сечения  $f$ ;  $\rho = m / V$  – её плотность;  $C = \rho V / E$  – коэффициент ёмкостных потерь (акустическая податливость объёма жидкости  $V$ );  $E$  – модуль сжатия жидкости, определяемый с учётом податливости стенок магистрали;  $a$  – скорость распространения звуковой волны по столбу жидкости в трубопроводе;  $p, p_{вх}, p_{вых}$  – давления жидкости на данном и соседних участках магистрали;  $\Delta \dot{m}$  – изменение расхода рабочего тела;  $\xi$  – коэффициент гидравлических потерь, учитывающий распределённые  $\xi_{тр}$  и местные  $\xi_M$  сопротивления,  $\xi = \xi_{тр} + \xi_M$ .

Следует заметить, что уравнение неразрывности в системе (7) носит эвристический характер и даёт хорошее приближение к результатам использования уравнений гидромеханики (6) лишь в области малых частот и больших длин волн, превышающих длину магистрали в 10 и более раз. Указанное ограничение, напр., выполняется для маршевых двигателей верхних ступеней ракет-носителей (РН) среднего класса, где *время срабатывания клапанов* в 20...50 раз превышает время распространения звуковой волны по магистрали. Что позволило в [11] с успехом использовать дискретную модель при разработке ЖРД *VG 143 РН «Вега»*. С другой стороны, проводить здесь гидродинамический расчёт, интегрируя уравнения гиперболического типа методом характеристик (при котором этот процесс будет длительное время находиться на границе устойчивости), затруднительно и неэффективно.

Но для двигателей малой тяги, используемых в системах ориентации космических аппаратов, время срабатывания клапанов уменьшается на порядок, и это требует изменения используемых методов расчёта. В перспективных образцах таких ЖРД оно снижается до 1...2мс (то есть до уровня, который давно достигнут в топливных системах высокооборотных дизелей, и можно использовать накопленный там опыт). Заметим, что в системах дизелей дискретные модели трубопроводов ещё в 1960-е годы были отброшены как недостаточно точные и заменены на континуальные модели. Но в силу известной специфики систем питания ЖРД (напр., существенного влияния местных сопротивлений, а также наличия начального свободного объёма магистрали, не заполненного нагнетаемой жидкостью) эти континуальные модели могут быть использованы только лишь после соответствующей доработки. Некоторые результаты доработки моделей и их апробация на примере расчёта дизельной топливной аппаратуры приведены в [12].

Для уточнения расчёта пневмосистемы запуска ракетного двигателя уравнения модели (7) не могут быть использованы ещё и по той причине, что они не учитывают эффекты конвективного переноса массы и импульса.

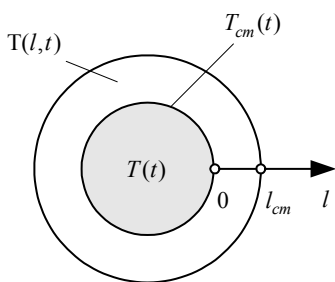


Рис. 3 – Температура газа  $T(t)$  и осесимметричное поле температур  $T(l, t)$  в материале стенки трубопровода.

ла стенки;  $l$  – координата цилиндрического сечения стенки;  $l_{cm}$  – толщина стенки (рис. 3).

Кривизну стенки уравнение (8) не учитывает, но это упрощение, как станет ясно из результатов дальнейшего анализа, не повлияет на его выводы.

Первое граничное условие означает, что потоком тепла через внешнюю поверхность трубопровода пренебрегаем, а второе является обозначением. Для системы соотношений (8), (9) рассмотрим три вспомогательные задачи.

**Задача 1. Проанализируем переходной процесс.** В этой задаче система (8), (9) рассматривается при начальном условии  $T(l, 0) = T_{cm}(0)$ . Решение будем искать в форме интеграла Дюамеля, для чего определим температуру на стенке равенством  $T_{cm}(t) = T_{cm}(0) + \Delta T \cdot \chi(t)$ , где  $\Delta T$  – некоторая постоянная величина, а  $\chi(t)$  – это ступенчатая функция Хэвисайда.

Применим преобразование Лапласа и получим формулу для изображения поля изменения температур:

$$\Delta T(l, s) = \frac{\Delta T}{s} ch \sqrt{s(l_{cm} - l) / \alpha_{cm}} / ch \sqrt{s l_{cm} / \alpha_{cm}},$$

где  $s$  – это переменная Лапласа.

Продифференцируем эту формулу по координате  $l$  и найдём изображение для искомого градиента температур:

$$-grad T(s) = \frac{\Delta T}{\sqrt{s \alpha_{cm}}} th \sqrt{s l_{cm} / \alpha_{cm}} = \frac{\Delta T}{\sqrt{s \alpha_{cm}}} \cdot [1 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-j \cdot \sqrt{s l_{cm} / \alpha_{cm}})].$$

Обратное преобразование выполняется по таблицам преобразования Лапласа из [13] и даёт искомую связь между значениями градиента температур  $\partial T(0, t) / \partial l$  на внутренней поверхности трубы и изменением её температуры:

**Конкретизация модели для описания движения газа по трубопроводам пневмосистемы.** Чтобы выбрать конкретную модель для описания колебаний газа в трубопроводе необходимо оценить влияние теплообмена со стенками на общий энергетический баланс. В системе (1) энергетический баланс описывает третье уравнение. Дополним его уравнением, описывающим распространение тепла в материале стенки трубопровода:

$$\rho_{cm} c_{cm} \partial T / \partial t = \lambda_{cm} \partial^2 T / \partial l^2, \quad (8)$$

и граничными условиями

$$\partial T(l_{cm}, t) / \partial l = 0, \quad T(0, t) = T_{cm}(t), \quad (9)$$

где  $\rho_{cm}$ ,  $c_{cm}$ ,  $\lambda_{cm}$  – плотность, удельная теплоёмкость и теплопроводность материала

$$\partial T(0, t) / \partial l = \int_0^t WT(t - \tau) \cdot T'_{cm}(\tau) d\tau,$$

где разностное ядро имеет вид

$$WT(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_{cm} t}} \cdot \left[ 0.5 - \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-(l_{cm} j)^2 / (\alpha_{cm} t)) \right], \quad (10)$$

$\alpha_{cm}$  – коэффициент температуропроводности для материала стенки,

$$\alpha_{cm} = \lambda_{cm} / (\rho_{cm} c_{cm}).$$

Анализ функции (10), проведенный для известных физических характеристик материала трубопроводов, показал, что в интересующем нас диапазоне времени  $t \in [0 \dots 1.5 \text{ с}]$ , отвечающему одному циклу работы устройства, выполнено условие

$$WT(t) \approx 0.5 / \sqrt{\pi \alpha_{cm} t},$$

то есть *наружная поверхность трубопровода не успевает оказать заметного влияния на изменение температуры вблизи внутренней поверхности.*

Это обстоятельство облегчит дальнейший анализ процесса теплообмена.

**Задача 2.** Проанализируем установившиеся колебания температуры в материале стенки. Будем изменять температуру внутренней поверхности трубопровода по правилу  $\Delta T_{cm}(t) = \Delta \hat{T}_{cm} \cos(\omega t)$  и при условии  $l_{cm} \rightarrow \infty$ , которое следует из результатов решения задачи 1, найдём соответствующее периодическое решение уравнений (8), (9). Подобная задача решена в [14, с.243], решение имеет вид *температурной волны*

$$\Delta T(l, t) = \Delta \hat{T}_{cm} \cdot \exp(-l \sqrt{0.5 \omega / \alpha_{cm}}) \cdot \cos(l \sqrt{0.5 \omega / \alpha_{cm}} - \omega t). \quad (11)$$

Отметим, что в трубопроводе, изготовленном из нержавеющей стали, температурная волна затухает очень быстро. Так при частоте колебаний 50 Гц на глубине  $l = 1 \text{ мм}$  амплитуда составляет менее 0.025% от величины  $\Delta \hat{T}_{cm}$ , то есть практически всё переданное тепло аккумулируется в тонком пристеночном слое. Но поскольку плотность металла в сотни раз больше плотности газа, то указанный резервуар тепла имеет немалую ёмкость и, априори, пренебрегать теплообменом газа со стенкой нельзя.

Поэтому мы продолжим анализ. Дифференцируя (11) по координате  $l$ , найдём значения градиента температур на внутренней поверхности трубы:

$$\text{grad } T(t) = -\hat{T}_{cm} \sqrt{\omega / \alpha_{cm}} \cos(\pi / 4 - \omega t). \quad (12)$$

**Задача 3.** Проанализируем связанные гармонические колебания температуры газа и стенки. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{om}$  от газа к стенке в этой задаче считаем постоянной величиной, вычисляемой по формуле Нуссельта [3], применяемой для турбулентного течения в области  $\text{Re} > 10^5$ :

$$\alpha_{om} = 0.021 \cdot \text{Re}^{0.8} \cdot \text{Pr}^{0.43} \cdot \lambda / d,$$

где  $\text{Pr} = c_p \mu / \lambda$  – число Прандтля;  $\lambda$  – теплопроводность гелия;  $c_p$  – его



теплоёмкость при постоянном давлении,  $c_p = [k/(k-1)] \cdot R$ ; а температуры газа и стенки являются переменными величинами, изменяющимися с одной круговой частотой  $\omega$ , но разными фазами. Плотность теплового потока между газом и стенкой трубопровода описывается *законом Ньютона – Рихмана*

$$\alpha_{om} \cdot (T(t) - T_{cm}(t)) = -\lambda_{cm} \cdot \text{grad } T(t), \quad (13)$$

откуда, с учетом результата решения *задачи 2*, получаем

$$T(t) - T_0 = \hat{T}_{cm} \cos(\omega t) + (\lambda_{cm} / \alpha_{om}) \hat{T}_{cm} \sqrt{\omega / \alpha_{cm}} \cos(\pi/4 - \omega t) = A \hat{T}_{cm} \cos(\omega t - \phi),$$

где амплитудный множитель  $A$  и фаза  $\phi$  определяются формулами

$$A = [1 + (\lambda_{cm} / \alpha_{om})^2 \cdot 0.5 \omega / \alpha_{cm} + (\lambda_{cm} / \alpha_{om}) \sqrt{2 \omega / \alpha_{cm}}]^{0.5},$$

$$\phi = \arcsin((\lambda_{cm} / \alpha_{om}) \sqrt{\omega / \alpha_{cm}} / A).$$

Упростим полученные выражения, используя специфику анализируемой пневмосистемы. Для этого учтём, что характерное значение коэффициента теплоотдачи для её трубопроводов составляет  $\alpha_{om} = 5 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , и для частот, превышающих 1 Гц,

$$(\lambda_{cm} / \alpha_{om}) \sqrt{\omega / \alpha_{cm}} \gg 1.$$

Получаем  $A \approx (\lambda_{cm} / \alpha_{om}) \sqrt{0.5 \omega / \alpha_{cm}} \gg 1$ ,  $\phi \approx \pi/4$ , то есть:

- поток тепла от газа к стенке имеет практически ту же фазу, что и колебание температуры газа,
- амплитуда колебаний температуры внутренней поверхности трубопровода значительно меньше амплитуды колебаний температуры газа внутри трубопровода.

Теперь мы сможем произвести обоснованный выбор модели для расчёта динамических параметров газа в трубопроводе. При гармоническом изменении температуры газа условия (2) и (4) примут вид

$$[\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R\omega)] \ll 1 \quad \text{и} \quad [\alpha_{om}(k-1)/(4d\rho R\omega)] \gg 1,$$

соответственно. Проверка этих асимптотических условий показала, что

- высокорасходные трубопроводы, подающие газ от шаробаллона к турбине, удовлетворяют первому условию, и *здесь следует использовать адиабатическую модель (3)*,
- трубопроводы линии управления удовлетворяют второму условию, и *здесь следует использовать изотермическую модель (5)*.

Различие результатов объясняется тем, что высокорасходные трубопроводы имеют в 4 – 7 раз большие внутренние диаметры, а характерные частоты колебаний газа в этих трубопроводах превышают аналогичные значения для трубопроводов линии управления в 10 – 20 раз.

Проблема выбора модели решена. Но анализ теплообмена газа со стенкой трубопровода будет неполным, если мы не решим ещё одну задачу.

**Задача 4. Монотонное снижение температуры стенки.** По мере расходования газа из шаробаллона уменьшается не только его давление, но и температура. Выясним, насколько быстро будет при этом снижаться температура внутренней поверхности стенки высокорасходного трубопровода.

Для этого равенства (8) и (13) дополним условиями

$$\partial T(l_{cm}, t) / \partial l = 0, \quad T(0, t) = T(0), \quad T(t) = T(0) + \Delta T \cdot \chi(t),$$

где  $\Delta T$  – скачок температуры газа, и применим к этой системе уравнений преобразование Лапласа. В результате несложных преобразований получим формулу для изображения температуры внутренней поверхности стенки

$$T_{cm}(s) = \frac{\Delta T}{s} \cdot \frac{ch(l_{cm} \sqrt{s / \alpha_{cm}})}{ch(l_{cm} \sqrt{s / \alpha_{cm}}) + (\lambda / \alpha_{om}) \sqrt{s / \alpha_{cm}} ch(l_{cm} \sqrt{s / \alpha_{cm}})}.$$

В этой формуле, в силу результатов решения задачи 1, толщину стенки можно неограниченно увеличивать, что упрощает правую часть:

$$T_{cm}(s) = \frac{\Delta T}{s} \cdot \frac{1}{1 + (\lambda / \alpha_{om}) \sqrt{s / \alpha_{cm}}}.$$

Найдём изображение по Лапласу для разности температур

$$\frac{\Delta T}{s} - T_{cm}(s) = \frac{\Delta T}{s} \cdot \frac{(\lambda / \alpha_{om}) \sqrt{s / \alpha_{cm}}}{1 + (\lambda / \alpha_{om}) \sqrt{s / \alpha_{cm}}} = \frac{\Delta T}{\sqrt{s} \cdot (\sqrt{s} + \sqrt{\beta})},$$

где  $\beta = \alpha_{cm}(\alpha_{om} / \lambda)^2$ , и выполним обратное преобразование по таблицам [13]:

$$\begin{aligned} T(t) - T_{cm}(t) &= \Delta T e^{\beta t} \operatorname{erfc}(\sqrt{\beta t}) = \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\sqrt{\beta t}}^{\infty} e^{\beta t - \tau^2} d\tau = \left\| \begin{array}{l} \beta t - \tau^2 = -u^2 \\ d\tau = du / \sqrt{\beta t + u} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\beta t + u}} du < \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi \beta t}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{\Delta T}{\sqrt{\pi \beta t}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для исследуемой пневмосистемы коэффициент  $\beta \approx 4 \cdot 10^3$  [1/сек]. Поэтому из оценки (14) следует, что уже через 0.25 сек разница температур между газом и стенкой будет составлять менее 2% от величины скачка  $\Delta T$ .

Уменьшение перепада температур ограничивает теплообмен и является дополнительным аргументом в пользу того, что для расчёта высокорасходных трубопроводов пневмосистемы используется адиабатическая модель.

### Функции давления для адиабатической и изотермической модели.

Как указано в [3, §33], функция давления удовлетворяет уравнению

$$d\varepsilon(P) = (a\rho)^{-1} dP$$

и может быть получена в тех случаях, когда температура и плотность газа определяются величиной его давления.

Адиабатическая модель применяется для двух трубопроводов – входного (между шаробаллоном и пневмоклапаном) и выходного (между регулятором и турбиной). Входной трубопровод соединяет шаробаллон с пневмоклапаном и имеет относительно большую длину. Эта магистраль не содержит дросселирующих каналов, приводящих к появлению критических течений, поэтому (если пренебречь потерями на преодоление трения, которые малы) газ в любой её точке имеет одинаковую энтропию, а *его параметры нахо-*

дятся на одной адиабате

$$\rho = \rho_0 \cdot (P / P_0)^{1/k}, \quad T = T_0 \cdot (P / P_0)^{1-1/k},$$

где  $P_0, \rho_0, T_0$  – начальные значения давления, плотности и температуры газа в шаробаллоне и входной магистрали в начале рабочего цикла.

Как видим, внутренняя энергия газа в этой части системы определяется его давлением, и мы без труда получим так называемую *функцию давления* в её классической форме, известной ещё *Бернхарду Риману*.

В этом пункте мы не будем учитывать газодинамическое сопротивление трубопроводов, поэтому система (3) примет вид

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (1 / \rho) \partial P / \partial x = 0; \\ \partial P / \partial t + U \partial P / \partial x + a^2 \rho \partial U / \partial x = 0. \end{cases}$$

Перепишем её так:

$$\{(1/a) dU / dt + (1/a\rho) \partial P / \partial x = 0; (1/a)(1/a\rho) dP / dt + \partial U / \partial x = 0,$$

и выражение  $(1/a\rho)$ , являющееся функцией давления  $P$ , внесём под дифференциал. В результате получим систему

$$\{(1/a) dU / dt + \partial \varepsilon(P) / \partial x = 0; (1/a) d\varepsilon(P) / dt + \partial U / \partial x = 0, \quad (15)$$

где функция давления

$$\varepsilon(P) = \int_{P_0}^P \frac{dp}{a\rho} = \frac{2a(P_0)}{k-1} \left[ (P/P_0)^{(k-1)/2k} - 1 \right] = \frac{2}{k-1} \cdot [a(P) - a(P_0)],$$

$a(P)$  – скорость звука при давлении  $P$  и температуре  $T = T_0 (P/P_0)^{1-1/k}$ .

Система (15) имеет решения в форме *инвариантов Римана*, о чём мы напомним далее. А сейчас перейдём к анализу выпускного трубопровода.

Течение газа по выпускному трубопроводу имеет высокие скорости, и, несмотря на существенно меньшую длину трубы и значительно меньшую плотность газа, инерцию этого столба газа также нужно учитывать. Причем, уже в *методике первого приближения* приходится учитывать конвекцию. Кроме того, существенно возрастает фактор газодинамического сопротивления (по сравнению с впускным трубопроводом), поэтому пренебрегать его влиянием, даже в методике первого приближения, не желательно.

Но использовать для расчёта выпускного трубопровода ту же функцию давления, что и для впускного трубопровода, невозможно, что объясняется кардинальным изменением граничных условий. Критическое течение газа через клапан регулятора не является изэнтропийным. Газ, прошедший через клапанную щель со скоростью звука, в дальнейшем расширяется и восстанавливает свою температуру до так называемой *температуры торможения*  $T_0$ :

$$T_0 = T_{кр} + 0.5a_{кр}^2 / c_p = T_{кр} + 0.5kRT_{кр} / c_p = T_{кр} (1 + 0.5(k-1)) = T_{кр} \cdot (k+1) / 2,$$

где  $T_{кр}$  – температура в критическом сечении,  $T_{кр} = T_{нач} / 2 / (k+1)$ ;  $a_{кр}$  – скорость звука в этом сечении,  $a_{кр}^2 = kRT_{кр}$ .

Получается, что температура торможения равняется температуре  $T_{нач}$  в

полости перед клапанной щелью:

$$T_0 = T_{кр} \cdot (k+1)/2 = T_{нач} \cdot [2/(k+1)] \cdot [(k+1)/2] = T_{нач}.$$

Температура  $T_{нач}$  в ходе описываемого процесса изменяется незначительно, а скорость газа в выпускном трубопроводе велика (она практически всё время превышает уровень 100 м/с, и за 15 мсек газовый «заряд» в этом трубопроводе полностью обновляется). Новая порция газа как бы переносит вдоль трубопровода своё начальное значение температуры. Поэтому для выпускного трубопровода уравнение состояния газа можно принять в форме

$$P = (RT_0) \cdot \rho, \quad T = T_0 = const. \quad (16)$$

Используя соотношения (16), получаем новую формулу для функции давления:

$$\varepsilon_{вып}(P) = \int_{P_a}^P \frac{dp}{a\rho} = \int_{P_a}^P \frac{adp}{a^2\rho} = a \int_{P_a}^P \frac{dp}{kp} = (a/k) \cdot \ln(P/P_a),$$

где  $P_a$  – начальное давление в этом трубопроводе (оно равняется давлению в дренажной полости за турбиной);  $a$  – адиабатическая скорость звука, отвечающая температуре  $T_0$ .

Как видим, *не смотря на использование изотермического уравнения состояния (16), модель выпускного трубопровода остаётся адиабатической*. Кажущееся противоречие снимается, если вспомнить о высокой скорости переноса, которая и стабилизирует значения температуры.

Завершая анализ выпускного трубопровода, заметим, что в действительности температура газа меньше температуры торможения  $T_0$  на величину

$$\Delta T_{вып} = 0.5 U_{вып}^2 / c_p = 0.5 \cdot (k-1) M_{вып}^2 \cdot T_0,$$

но число Маха  $M_{вып}$  для выпускного трубопровода не превышает 0.15, поэтому значение этой поправки не велико и мы им пренебрегли.

В трубопроводах линии управления, где используется изотермическая модель (5), формула для функции давления является классической и в уточнении не нуждается:

$$\varepsilon_{из}(P) = \int_{P_a}^P \frac{dp}{a_{из}\rho} = \int_{P_a}^P \frac{a_{из} dp}{a_{из}^2 \rho} = a_{из} \int_{P_a}^P \frac{dp}{P} = a_{из} \cdot \ln(P/P_a).$$

**Адиабатические и изотермические инварианты Римана.** Система (15), в которой мы не учитываем газодинамическое сопротивление трубопровода, допускает исключение давления и плотности, после чего получают *одномерное волновое уравнение для скорости*:

$$(1/a^2) \partial^2 U / \partial t^2 = \partial^2 U / \partial x^2. \quad (17)$$

Даламбер нашёл *общее аналитическое решение* уравнения (17) в форме суммы прямой  $F$  и отражённой  $W$  волны:

$$U(x, t) = F(x - at) - W(x + at),$$

где  $F(t), W(t)$  – произвольные функции, которые находятся из граничных условий на концах трубопровода и в момент  $t$  формируются в её соответствующих сечениях: прямая волна – на левом, а обратная – на правом конце.

Риман нашёл аналогичное решение для системы уравнений (15):

$$\begin{aligned} U(x, t) &= F(x - (a + U)t) - W(x + (a - U)t), \\ \varepsilon(P(x, t)) &= F(x - (a + U)t) + W(x + (a - U)t), \end{aligned}$$

где  $F(t), W(t)$  – это так называемые *инварианты Римана*,

$$F = 0.5\varepsilon(P) + 0.5U, \quad W = 0.5\varepsilon(P) - 0.5U, \quad (18)$$

$\varepsilon(P)$  – функция давления для адиабатической и изоэнтروпийной модели, описанная выше. Прямой инвариант  $F(t)$  формируется в сечении трубопровода у шаробаллона, для чего используется первое равенство из (18), а обратный инвариант  $W(t)$  – у входной полости пневмоклапана, для чего используется второе равенство.

Аналогичные соотношения (но с другими обозначениями функции давления и/или скорости звука) справедливы для трубопроводов линии управления и выпускного трубопровода.

**Учет входного и местного сопротивления.** Моделирование входного сопротивления трубопровода основывается на классических формулах, которые можно, напр., найти в [3, §25]. Из этих формул следует равенство:

$$M = U/a = \sqrt{\frac{2}{k-1}[(P_{\text{ex}}/P)^{(k-1)/k} - 1]}, \quad (19)$$

где  $U, a$  – скорость газа и скорость звука во входном сечении;  $P, P_{\text{ex}}$  – давление в трубопроводе и в его впускной полости;  $M$  – *число Маха*.

Из (19) получаем:

$$1 + [(k-1)/2]M^2 = (P_{\text{ex}}/P)^{(k-1)/k}, \quad P_{\text{ex}}/P = \left(1 + [(k-1)/2] \cdot M^2\right)^{k/(k-1)}.$$

В результате уточняются формулы для функции давления на входном конце трубопровода, используемые для вычисления инвариантов:

$$\varepsilon(P_{\text{ex}}) = \frac{2a(P_0)}{k-1} \left[ (P_{\text{ex}}/P_0)^{(k-1)/2k} / \sqrt{1 + [(k-1)/2] \cdot M^2} - 1 \right],$$

$$\varepsilon_{\text{вып}}(P_{\text{ex}}) = (a/k) \cdot \ln((P_{\text{ex}}/P_a) / (1 + [(k-1)/2] \cdot M^2)^{k/(k-1)}),$$

$$\varepsilon_{\text{уз}}(P_{\text{ex}}) = a_{\text{уз}} \cdot \ln((P_{\text{ex}}/P_a) / (1 + [(k-1)/2] \cdot M^2)^{k/(k-1)}).$$

Если кроме входного сопротивления на этом же конце трубопровода имеется дополнительное местное сопротивление с коэффициентом  $\xi_{\text{ex}}$ , то влияние сопротивлений суммируется, напр.,

$$\varepsilon(P_{\text{ex}}) = (2a(P_0)/(k-1)) \left[ (P_{\text{ex}}/P_0)^{(k-1)/2k} / \sqrt{1 + [(k-1)/2] \cdot M^2(1 + \xi_{\text{ex}})} - 1 \right].$$

Если местное сопротивление расположено на выходном конце, то уточнение формул производится по аналогичному правилу, напр.,

$$\varepsilon_{\text{выл}}(P_{\text{выл}}) = (a/k) \cdot \ln((P_{\text{выл}}/P_a) / (1 + [(k-1)/2] \cdot M^2 \varepsilon_{\text{выл}})^{k/(k-1)}).$$

### Ограничения скоростей и инвариантов при залповом вбросе газа.

Отметим, что для выпускного трубопровода и некоторых трубопроводов линии управления существенные проблемы вызывает моделирование процессов *залпового вброса* газа в практически пустую магистраль (в ней начальная плотность газа меньше рабочей плотности в десятки раз). Чтобы метод инвариантов работал нормально, течение газа должно оставаться дозвуковым, кроме того, траектории инвариантов из одного семейства не должны пересекаться. В нашем методе в тех трубопроводах, где происходит залповый вброс, скорость газа в начальном и конечном сечении на каждом расчётном шаге сравнивается со скоростью звука и, если наблюдается превышение, то эта скорость и инвариант, формируемый в данном сечении, корректируются. Принятый порядок корректировки соответствует тому, что был описан в [5].

Чтобы не допустить пересечения траекторий инвариантов достаточно ограничить средние скорости (и средние ускорения) газа, усредняемые по длине трубопровода и некоторому характерному промежутку времени (обычно он выбирается равным или кратным времени распространения звуковой волны по трубопроводу). Указанное усреднение является обязательным элементом принятого в нашей работе метода учёта газодинамического сопротивления, и, как показала практика, оно обеспечивает устойчивую работу компьютерной программы при прохождении участков залпового вброса газа.

**Уточнение метода инвариантов при учёте газодинамического сопротивления.** В этом пункте мы научимся учитывать распределённое сопротивление при динамическом расчёте трубопровода. Обычно этот эффект учитывается как затухание волн - инвариантов при их распространении по трубопроводу. Для этого вычисляют коэффициенты затухания

$$K_{\text{зам.F}} = \exp(-K \tau_F), \quad K_{\text{зам.W}} = \exp(-K \tau_W),$$

и умножают амплитуду волны на соответствующий коэффициент, то есть

$$F(t) = F(t - \tau_F) \cdot K_{\text{зам.F}}; \quad W(t) = W(t - \tau_W) \cdot K_{\text{зам.W}}$$

где  $\tau_F = L_{\text{мп}}/(a + U_{\text{cp}})$ ,  $\tau_W = L_{\text{мп}}/(a - U_{\text{cp}})$  – продолжительности распространения прямого и обратного инвариантов по трубопроводу длиной  $L_{\text{мп}}$ ;  $U_{\text{cp}}$  – средняя скорость движения газа в период прохождения волн.

Фактор газодинамического сопротивления для высокорасходных трубопроводов, учитывая высокую чистоту их внутренней поверхности, можно вычислять с использованием *формулы для гидравлически гладких труб* из [15]

$$K = 0.25 \cdot \lambda_{\text{распр}} / d \approx 0.25 \cdot (0.01 \cdot |U| / d), \quad (20)$$

а для трубопроводов линии управления, где относительная шероховатость в силу объективных причин выше, с использованием формулы для так называемой *переходной области*:

$$K = 0.25 \cdot \lambda_{\text{распр}} / d \approx 0.25 \cdot (0.025 \cdot |U| / d).$$

Кроме того, для начальной и конечной фазы подачи газа, где скорость газа  $U \approx 0$ , этот же фактор определялся с использованием формулы для ламинарного режима:

$$K = 0.25 \cdot \lambda_{распр} / d = 16\mu / (\rho d^2).$$

Заметим, что метод учёта сопротивления посредством затухающих экспоненциальных множителей прошел многолетнюю проверку в практике гидродинамических расчётов топливных систем дизелей и до сих пор считается там надёжным и эффективным. Однако *использование такого метода для расчёта пневмосистемы запуска ракетного двигателя привело к ошибочным результатам*: давление в линии управления не возрастало до проектных значений, и это приводило к нарушениям работы регулятора.

Для устранения этой неожиданно возникшей проблемы были проанализированы (и частично реализованы на практике) четыре возможности.

1. *Отказ от учёта газодинамического сопротивления для тех трубопроводов, где это приводит к очевидной ошибке.* Кстати говоря, такой рекомендации нередко следовали и при расчёте трубопроводов высокооборотных дизелей, считая присоединение к классическим инвариантам Римана затухающих экспоненциальных множителей недостаточно обоснованными [9].

2. *Замена распределённого сопротивления двумя сосредоточенными.* В рамках этого метода по формуле  $\xi = \lambda_{распр} \cdot L_{mp} / d$  вычислялся общий коэффициент сопротивления трубопровода и значения  $0.5\xi$  разносились по его конечным сечениям в качестве местного сопротивления. Заметим, что такой способ снимал возникающую проблему, но его применение для многометрового трубопровода вносило несомненную погрешность в расчёт.

3. *Переход от метода инвариантов к методу характеристик.* В топливной аппаратуре дизелей такой способ реализуют при расчёте длинных трубопроводов. Метод характеристик – это простейший сеточный метод, но его эффективность связана с тем, что он не учитывает конвективный перенос массы и импульса. Поэтому для целей нашего исследования он не пригоден.

4. *Использование дополнительных инвариантов, формируемых сопротивлением промежуточных сечений трубопровода.* Для систем дизелей такой метод был описан в [8], но он, как и метод характеристик, не учитывал скорости переноса; кроме того, он создавался для моделирования переходных процессов при малом наблюдательном времени и поэтому имел неверную асимптотику. Однако эти недостатки удалось устранить, и в доработанном виде уточнённый метод дополнительных инвариантов использовался далее при расчёте всех трубопроводов пневмосистемы запуска ракетного двигателя.

Поясним содержание этого нового метода на примере расчёта выпускного трубопровода. Для этого мы опять начнём рассматривать систему (3) и перейдём от давлений  $P$  к функции давления  $\varepsilon_{вып}(P) = (a/k) \cdot \ln(P/P_a)$  (её индекс, чтобы не потерять общность с другими случаями, далее опускаем).

В результате получим

$$\begin{cases} \partial \varepsilon / \partial t + U \partial \varepsilon / \partial x = -a \cdot \partial U / \partial x; \\ \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x = -a \partial \varepsilon / \partial x - 2KU. \end{cases} \quad (21)$$

Теперь запишем те условия, которым подчиняются прямой и обратный инварианты Римана при влиянии сопротивления:

$$\begin{cases} \partial F / \partial t + (U + a) \cdot \partial F / \partial x = -K \cdot U; \\ \partial W / \partial t + (U - a) \cdot \partial W / \partial x = K \cdot U, \end{cases} \quad (22)$$

где, напомним,

$$F + W = \varepsilon, \quad F - W = U. \quad (23)$$

Если сложить уравнения (22), то получим первое уравнение системы (21), а если вычесть – то получим второе уравнение системы (21). Таким образом, при условии (23) системы (21) и (22) эквивалентны друг другу.

С учётом равенства  $U = F - W$  систему (22) можно переписать так:

$$\begin{cases} \partial F / \partial t + (U + a) \cdot \partial F / \partial x + K \cdot F = K \cdot W; \\ \partial W / \partial t + (U - a) \cdot \partial W / \partial x + K \cdot W = K \cdot F. \end{cases} \quad (24)$$

Уравнения (24) интегрируются при нулевых начальных условиях вида

$$F(t, x) = 0, \quad W(t, x) = 0 \quad \text{при } t \leq 0,$$

поэтому их можно решать методами операционного исчисления.

Скорости  $U$ ,  $a$  и фактор сопротивления  $K$  будем в этом пункте считать константами. Применим к уравнениям (24) преобразование Лапласа по времени  $t$ ; изображения функций будем обозначать так же, как и оригиналы:

$$\begin{cases} (s + K) \cdot F + (U + a) \cdot \partial F / \partial x = K \cdot W; \\ (s + K) \cdot W + (U - a) \cdot \partial W / \partial x = K \cdot F, \end{cases}$$

где  $s$  – переменная Лапласа.

Функции  $F(s, x)$  и  $W(s, x)$  будем искать в следующем виде:

$$F(s, x) = F(s) \cdot \exp(\lambda \cdot x), \quad W(s, x) = W(s) \cdot \exp(\lambda \cdot x),$$

в результате получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (s + K) \cdot F + (U + a) \cdot \lambda \cdot F = K \cdot W; \\ (s + K) \cdot W + (U - a) \cdot \lambda \cdot W = K \cdot F. \end{cases} \quad (25)$$

Её определитель обязан быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} s + K + (U + a) \cdot \lambda & -K \\ -K & (s + K) \cdot W + (U - a) \cdot \lambda \cdot W \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение для волнового числа  $\lambda$ :

$$\lambda^2 \cdot (a^2 - U^2) - 2 \cdot \lambda \cdot (s + K) \cdot U - s \cdot (s + 2K) = 0,$$

или

$$\lambda^2 \cdot (1 - M^2) - 2 \cdot \lambda \cdot [(s + K) / a] \cdot M - s \cdot (s + 2K) / a^2 = 0.$$

Получаем два решения:

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{M(s + K) + \sqrt{s^2 + 2sK + M^2 K^2}}{1 - M^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{s + K}{1 + M} + K \cdot \Phi(K / s) \quad (26)$$

и

$$\lambda_2(s) = \frac{1}{a} \cdot \frac{M(s + K) - \sqrt{s^2 + 2sK + M^2 K^2}}{1 - M^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{s + K}{1 - M} - K \cdot \Phi(K / s), \quad (27)$$



где

$$\Phi(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots -$$

– это сумма бесконечного ряда; коэффициенты  $b_j$  зависят от числа Маха  $M$ , но конкретный вид зависимостей не важен. Важно другое: и после учёта сопротивления сохраняется запаздывание прямых и обратных волн на величины

$$\tau_F = L_{mp} / (a + U) \quad \text{и} \quad \tau_W = L_{mp} / (a - U)$$

соответственно, где  $L_{mp}$  – это длина трубопровода.

В дальнейших выкладках (когда это упрощает результат) квадратом числа Маха будем пренебрегать, что позволяет применять при преобразованиях приближённые равенства  $1/(1-M) = 1+M$ ,  $1/(1+M) = 1-M$ .

Прямой волне отвечает волновое число  $\lambda_2(s)$ . Подставим (27) в первое равенство системы (25) и, после несложных преобразований, получим:

$$(s + K - \sqrt{s^2 + 2sK + M^2 K^2}) \cdot F_{np}(s) = K(1-M) \cdot W_{np}(s); \quad (28)$$

$$K(1+M) \cdot F_{np}(s) = [s + K + \sqrt{s^2 + 2sK + M^2 K^2}] \cdot W_{np}(s), \quad (29)$$

где в обозначении подчёркнуто, что эти волны являются прямыми.

Аппроксимируем выражение в прямых скобках из (29) линейной функцией, сохраняющей значения пределов при стремлении  $s \rightarrow +0$  и  $s \rightarrow +\infty$ , чему, в силу известных *предельных теорем операционного исчисления*, отвечают значения времени  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow +0$  для оригиналов. В результате приходим к равенству

$$K(1+M) \cdot F_{np}(s) = [2s + K(1+M)] \cdot W_{np}(s),$$

которому отвечает дифференциальное уравнение для оригиналов:

$$dW_{np}(t)/dt + 0.5K(1+M) \cdot W_{np}(t) = 0.5K(1+M) \cdot F_{np}(t). \quad (30)$$

Следовательно, вместе с прямым инвариантом Римана

$$F(t, x) = F_{np}(t - x/(a + U))$$

по трубопроводу в том же направлении (рис. 4) распространяется *дополнительный инвариант*  $W_{np}(t - x/(a + U))$ , который в соотношениях (18) присутствует как часть обратной волны; этот дополнительный инвариант вычисляется при интегрировании уравнения (29) с начальным условием  $W_{np}(0) = 0$ .

Аналогичное рассмотрение для числа  $\lambda_1(s)$  привело к уравнению

$$dF_{об}(t)/dt + 0.5K(1-M) \cdot F_{об}(t) = 0.5K(1-M) \cdot W_{об}(t). \quad (31)$$

Следовательно, вместе с обратным инвариантом Римана

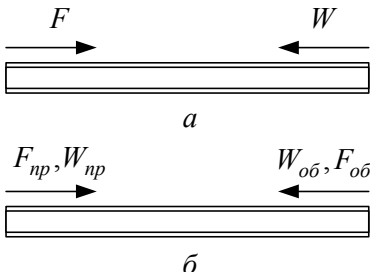


Рис. 4 – Прямые  $F$  и обратные  $W$  инварианты ( $а$  – классический,  $б$  – уточненный метод).

$$W(t, x) = W_{o\delta}(t + (x - L_{mp})/(a - U))$$

по трубопроводу в том же направлении распространяется *дополнительный инвариант*  $F_{o\delta}(t + (x - L_{mp})/(a - U))$ , который в соотношениях (18) присутствует как часть прямой волны; его получают интегрированием (31) при условии  $F_{o\delta}(0) = 0$ .

Выясним, каким искажениям подвергаются эти 4-ре инварианта при распространении по трубопроводу. Напомним, что переменная Лапласа принимает не только комплексные, но и вещественные значения, причём положительные величины  $s$  и  $K$  имеют физическую размерность [1/сек] и их можно трактовать как частоты некоторых апериодических колебаний. Если для характерных частот  $s$  и фактора сопротивления  $K$  выполнено условие

$$s \gg K, \quad (32)$$

то в формулах (26), (27) значением  $K \cdot \Phi(K/s)$  можно пренебречь, и мы получим

$$\lambda_1(s) = (s + K)/(a + U), \quad \lambda_2(s) = (s + K)/(a - U).$$

Это означает, что указанные инварианты будут распространяться без искажения формы, запаздывая на промежутки времени  $\tau_F, \tau_W$  и уменьшая амплитуду на коэффициент  $\exp(-K\tau_F)$  или  $\exp(-K\tau_W)$ , соответственно.

В анализируемой пневмосистеме условия (32) выполнены для всех трубопроводов, кроме выпускного, и использование описанной выше теории привело к полной нормализации результатов расчёта линии управления. Поэтому дальнейшее развитие теории и практики, описываемое в статье, к этим трубопроводам не относится.

В выпускном трубопроводе переходной процесс заканчивается максимальным успокоением колебаний, поэтому, априори, его нужно правильно моделировать и в области предельно малых частот. К тому же, расчёт выпускного трубопровода по приведенному выше методу привёл к заметной погрешности в определении давления у соплового аппарата турбины, и для этого случая метод пришлось уточнять.

Запишем равенства

$$F_{np}(s, L_{mp}) = F_{np}(s) \cdot \exp(\lambda_2(s) \cdot L_{mp}), \quad W_{o\delta}(s, 0) = W_{o\delta}(s) \cdot \exp(\lambda_1(s) \cdot L_{mp}),$$

$$W_{np}(s, L_{mp}) = W_{np}(s) \cdot \exp(\lambda_2(s) \cdot L_{mp}), \quad F_{o\delta}(s, 0) = F_{o\delta}(s) \cdot \exp(\lambda_1(s) \cdot L_{mp}),$$

и, используя формулу (27), выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda_2(s)L_{mp}) &= \exp(-(s + K)\tau_F) \cdot (\exp((s + K - \sqrt{s^2 + 2sK + M^2K^2})\tau_F)) = \\ &= \exp(-(s + K)\tau_F) \cdot (\exp([s + K + \sqrt{s^2 + 2sK + M^2K^2}]^{-1} K^2 \tau_F)) \approx \\ &\approx \exp(-(s + K)\tau_F) \cdot (1 + [2s + K(1 + M)]^{-1} K^2 \tau_F), \end{aligned}$$

где для выражения, размещённого в квадратной скобке, была выполнена та же самая линейная аппроксимация, что и выше.

После перехода к оригиналам, получаем значения основного и дополнительного инвариантов на другом конце трубопровода:

$$F_{np}(t, L_{mp}) = (F_{np}(t - \tau_F, 0) + K\tau_F F L_{np}(t - \tau_F)) \cdot \exp(-K\tau_F), \quad (33)$$

$$W_{np}(t, L_{mp}) = (W_{np}(t - \tau_F, 0) + K\tau_F \cdot WL_{np}(t - \tau_F)) \cdot \exp(-K\tau_F), \quad (34)$$

где

$$d FL_{np}(t) / dt + 0.5K(1 + M) \cdot FL_{np}(t) = 0.5K(1 + M) \cdot F_{np}(t, 0), \quad FL_{np}(0) = 0, \quad (35)$$

$$d WL_{np}(t) / dt + 0.5K(1 + M) \cdot WL_{np}(t) = 0.5K(1 + M) \cdot W_{np}(t, 0), \quad WL_{np}(0) = 0. \quad (36)$$

Сравнивая уравнения (30), (35) замечаем, что они идентичны. Следовательно,  $FL_{np}(t) \equiv W_{np}(t)$ , и функцию  $FL_{np}(t)$  из дальнейшего рассмотрения можно исключить. Кроме того, учитывая приближённое равенство

$$\exp(-K\tau_F) \approx 1 - K\tau_F$$

для суммы прямых инвариантов, используемых в расчёте, получили следующий результат:

$$F_{np}(t, L_{mp}) + W_{np}(t, L_{mp}) \approx F_{np}(t - \tau_F, 0) \cdot \exp(-K\tau_F) + \\ + W_{np}(t - \tau_F, 0) + WL_{np}(t - \tau_F) \cdot \exp(-K\tau_F),$$

то есть в этой сумме амплитуда дополнительного инварианта при распространении по трубопроводу не затухает, а (за счёт третьего слагаемого) растёт. Отметим, что такой характер изменения отвечает физической природе этой волны – дополнительный инвариант является частью обратной волны и суммирует в себе обратные волны, генерируемые газодинамическим сопротивлением в промежуточных сечениях трубопровода.

Таким образом, уравнение (35) в том варианте, который был реализован на практике, вообще не рассматривалось, а формулы типа (33), (34), составленные для пары обратных инвариантов, приобрели следующий вид:

$$W_{o\bar{o}}(t, 0) = (W_{o\bar{o}}(t - \tau_W, L_{mp}) + K\tau_W F_{o\bar{o}}(t - \tau_W, L_{mp})) \cdot \exp(-K\tau_W),$$

$$F_{o\bar{o}}(t, 0) = (F_{o\bar{o}}(t - \tau_W, L_{mp}) + K\tau_W \cdot FL_{o\bar{o}}(t - \tau_W)) \cdot \exp(-K\tau_W),$$

где

$$d FL_{o\bar{o}}(t) / dt + 0.5K(1 - M) \cdot FL_{o\bar{o}}(t) = 0.5K(1 + M) \cdot F_{o\bar{o}}(t, L_{mp}), \quad WL_{np}(0) = 0.$$

Уточнённый указанным образом метод расчёта выпускного трубопровода устранил отмеченное выше искажение результатов расчёта.

**Дальнейшее уточнение расчётных формул метода.** Переход к оригиналам можно было выполнить раньше, ещё в соотношении (28), до его линейной аппроксимации. В результате приходим к следующему равенству:

$$W_{np}(t) = \int_0^t F_{np}(t - \tau) \cdot \Omega(\tau) d\tau, \quad (37)$$

где ядро свёрточного интеграла (37) определяется по таблицам преобразования Лапласа [13] формулой

$$\Omega(t) = K(1 + M) \cdot \exp(-Kt) \cdot I_1(K(1 + M)t) / (K(1 + M)t), \quad (38)$$

$I_1(t)$  – модифицированная функция Бесселя первого порядка.

И для амплитудного множителя  $\exp(\lambda_2(s) \cdot L_{mp})$  можно было сразу найти оригинал, использующий цилиндрические функции:

$$\exp(\lambda_2(s) \cdot L_{mp}) \doteq K\tau_F \cdot \exp(-K\tau_F) \cdot \Psi(t - \tau_F, \tau_F),$$

где

$$\Psi(t, \tau) = \delta(t) + K(1+M) \cdot \exp(-Kt) \cdot \frac{I_1(K(1+M)\sqrt{t(t+2\tau)})}{K(1+M)\sqrt{t(t+2\tau)}} \chi(t), \quad (39)$$

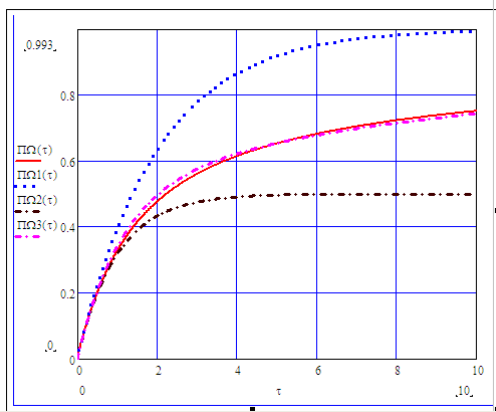


Рис. 5 – Ядро интеграла Дюамеля и его экспоненциальные аппроксимации (аргумент  $\tau = K(1+M)t$ ).

$\delta(t)$  – обобщённая функция Дирака;  $\chi(t)$  – ступенчатая функция Хэвисайда.

Для анализируемой пневмосистемы запаздыванием  $\tau$  в (39) допустимо пренебрегать (в силу большого наблюдательного времени), в результате между ядрами возникает линейная связь:

$$\Psi(t, \tau) = \delta(t) + K\tau \cdot \Omega(t).$$

Заметим, что метод, описанный в предыдущем пункте, получается из результатов (38), (39), если вместо цилиндрической функции (38) используется её экспоненциальная аппроксимация

$$\Omega(t) \approx \Omega_1(t) = 0.5K(1+M) \exp(-0.5K(1+M)t).$$

Когда в переходном процессе анализируемая система выходит на установившийся режим, и общее *наблюдательное время* велико, то ядра свёрточных интегралов сравнивают по величине их первообразных

$$\Pi\Omega(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau, \quad \Pi\Omega_1(t) = \int_0^t \Omega_1(\tau) d\tau, \quad \text{и так далее.}$$

Такое сравнение выполнено на рис. 5. Там же представлено ядро

$$\Omega_2(t) = 0.5K \cdot \exp(-Kt),$$

использованное в [8] при моделировании переходных процессов в топливной системе дизелей. Как видим, оно имеет другую асимптотику, но лучшую аппроксимацию при малой величине  $Kt$ .

Заметим, что экспоненциальная аппроксимация ядра имеет преимущества перед другими способами приближения функции, поскольку трудоёмкая процедура вычисления свёрточного интеграла (37) заменяется решением простейшего дифференциального уравнения. Например, как несложно проверить, интеграл вида (37) с ядром  $\Omega_1(t)$  удовлетворяет уравнению (30), а с ядром  $\Omega_2(t)$  и при условии  $M = 0$  – уравнению

$$dW_{np}(t)/dt + K \cdot W_{np}(t) = 0.5K \cdot F_{np}(t),$$

которое решалось в [8]. В гидромеханике такой подход к аппроксимации первым применил В. Зилке (фирма «Боинг»); в [16] он приблизил ядро, опи-

сывающее сопротивление трубопровода при нестационарном ламинарном режиме течения жидкости, суммой из 5-ти экспонент.

В нашей работе мы аппроксимировали ядро  $\Omega(t)$  суммой 2-ух экспонент

$$\Omega_3(t) = 0.041 \cdot K \cdot \exp(-0.12 \cdot Kt) + 0.459 \cdot K \cdot \exp(-0.91 \cdot Kt),$$

чего оказалось достаточно для всего промежутка изменения безразмерной величины  $\tau = K(1 + M)t$ , используемого при моделировании пневмосистемы (рис. 5). Однако после анализа результатов практического применения этой аппроксимации от неё пришлось отказаться, потому что достижение необходимой точности ядра вступило в противоречие с *принципом максимальной локализации сопротивления*.

Поясним подробнее. Формулы, полученные в этом и предыдущем пунктах статьи, предполагали постоянство скорости газа  $U$ , скорости звука  $a$  и фактора сопротивления  $K$ . Ясно, что эти величины не могут оставаться постоянными на протяжении всего расчёта, но этого, на самом деле, и не требовалось: достаточно, чтобы на том промежутке времени, где формируется величина интеграла (37), они изменялись незначительно. Этот промежуток зависит от скорости убывания ядра, и, как следствие, от использованной аппроксимации.

Ядро  $\Omega(t)$  имеет быстрое убывание, и для него указанный промежуток времени  $\Delta t$  ограничивается условием  $\Delta t \leq 2/K$ , что для трубопроводов пневмосистемы составляет величину порядка 20...60 мсек. Усреднение характеристик по малому промежутку времени, выполняемое по специальному алгоритму (см. следующий пункт), является приемлемым, поскольку не оказывает заметного влияния на результат.

Аппроксимация ядра двумя экспонентами увеличила промежуток  $\Delta t$  примерно в 10 раз, что исказило результат действия других факторов, напр., влияние скорости переноса на процесс колебаний параметров газа.

Использование вместо простого метода затухающих множителей более сложных преобразований инвариантов (35), (36) приводит к уточнению результата, но промежуток усреднения  $\Delta t$  нужно увеличивать в 2 – 3 раза. Поэтому соответствующее изменение алгоритма выполнено только для выпускного трубопровода, где оно было необходимым и оказалось достаточным.

Практика показала, что величину промежутка усреднения  $\Delta t$  для каждого трубопровода нужно определять особо с учетом характерных частот колебаний газа, то есть она является элементом настройки модели. Рекомендованное значение  $\Delta t$  определяется равенством

$$\Delta t = L_{mp} / a,$$

но при возникновении неустойчивости расчётной схемы его нужно увеличивать в  $n_{\Delta t}$  раз, где  $n_{\Delta t} \in \overline{2, 10}$ .

**Алгоритмы усреднения характеристик газа.** Как это следует из описания уточненного метода расчёта, в нём выполняется усреднение величин скорости и модуля скорости газа, причём как по длине трубопровода, так и по предшествующему промежутку времени  $[t - \Delta t, t]$ .

Чтобы минимизировать ресурсы компьютера, затрачиваемые на усреднение, использовался алгоритм, который, напр., применяют в электронных регуляторах дизеля для усреднения угловой скорости вращения коленчатого вала [17]. Алгоритм основан на решении дифференциального уравнения

$$dy_{cp}(t)/dt = \Delta t^{-1} \cdot (y(t) - y_{cp}(t)) \text{ при начальном условии } y_{cp}(0) = 0,$$

где  $y(t)$ ,  $y_{cp}(t)$  – усредняемая величина и результат усреднения.

Указанный алгоритм, кроме усреднения, играет роль фильтра и «обрезает» амплитуды для частот, величина которых значительно выше, чем  $\Delta t^{-1}$ .

В частности, для усреднения скорости и модуля скорости газа в выпускном трубопроводе используются уравнения

$$dU_{cp}(t)/dt = \Delta t^{-1} \cdot [0.5(U(t, 0) + U(t, L_{mp})) - U_{cp}(t)];$$

$$dmU_{cp}(t)/dt = \Delta t^{-1} \cdot [0.5(|U(t, 0)| + |U(t, L_{mp})|) - mU_{cp}(t)],$$

заметим, что в силу колебаний газа и особенностей усреднения величины

$$|U_{cp}(t)| \text{ и } mU_{cp}(t)$$

принимают, вообще говоря, разные значения, но для выпускного трубопровода, где направление течения не изменяется, они совпадают.

В принципе, такой же алгоритм усреднения можно было применить и для температуры газа в трубопроводе, по значению которой вычисляется скорость звука. Но в выпускном трубопроводе и трубопроводах управления, как это следует из выбранных моделей, газ температуру не меняет, и нужды в её усреднении

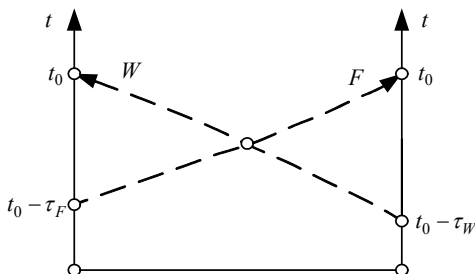


Рис. 6 – Траектории инвариантов.

нет (уточнение этого тезиса приведено в следующем пункте).

Во впускном трубопроводе температура, а значит и скорость звука, изменяется в зависимости от изменения давления. Если следовать классическому методу инвариантов или его модернизированному варианту, использующему затухающие множители, то усреднять скорость звука следует вдоль траекторий используемых инвариантов. На практике усреднение обычно проводят по трём точкам – двум крайним и средней, расположенной на пересечении траекторий (рис. 6); при этом для скорости звука в средней точке используют формулу:

$$a_{cp} = a + \frac{k-1}{k} [\sqrt{K_{zam.F}} \cdot F(t_0 - \tau_F) + \sqrt{K_{zam.W}} \cdot W(t_0 - \tau_W)].$$

Авторы использовали такую схему усреднения для расчёта пневмосистемы, но, после перехода к уточненному методу инвариантов, от неё отказались, поскольку высокочастотные колебания скорости звука приводили к неустойчивости решения уравнений (30), (31) и расчёта в целом. Учитывая не-

высокую амплитуду этих колебаний, мы также отказались от поиска других методов усреднения, и перешли к так называемому *акустическому приближению*. То есть для промежутка времени, на котором осуществлялся очередной запуск двигателя, скорость звука во выпускном трубопроводе считается постоянной, а при переходе к расчёту следующего запуска она изменяется в зависимости от уменьшения температуры гелия в шаробаллоне.

Таким образом, в уточнённом методе инвариантов скорость звука изменяется ступенчато.

**Фактор изменения температуры.** При моделировании выпускного трубопровода выше было принято условие, что в пределах одного цикла подачи газа к турбине его температура, а значит и скорость звука  $a$ , остаются постоянными. На самом деле, температура газа за один запуск уменьшается примерно на 10 – 12 %, и в этом пункте мы научимся учитывать это изменение.

Вернёмся к уравнениям адиабатической модели (3) и преобразуем их к следующему виду:

$$\begin{cases} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + (a^2(t)/(kP)) \partial P / \partial x = -2KU; \\ (a(t)/(kP))(\partial P / \partial t + U \partial P / \partial x) + a(t) \partial U / \partial x = 0, \end{cases} \quad (40)$$

где особо подчёркнуто, что скорость звука  $a$  изменяется во времени вместе с уменьшением температуры (синхронно для всех сечений трубопровода  $x$ ).

Определим для этого случая функцию давления формулой

$$\varepsilon = (a(t)/k) \cdot \ln(P/P_0),$$

в результате систему (40) можно записать так:

$$\begin{cases} \partial \varepsilon / \partial t + U \partial \varepsilon / \partial x + a \cdot \partial U / \partial x = -2L\varepsilon; \\ \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + a \cdot \partial \varepsilon / \partial x = -2KU, \end{cases} \quad (41)$$

где  $L = -0.5 \cdot (da/dt)/a = -0.5 \cdot d \ln a / dt = -0.25 \cdot d \ln T / dt$ .

По аналогии с фактором сопротивления  $K$  величину  $L$  назовём *фактором изменения температуры*.

Далее можно по стандартной схеме перейти к инвариантам и получить вместо (41) новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial F / \partial t + (U + a) \cdot \partial F / \partial x = -K \cdot U - L \cdot \varepsilon; \\ \partial W / \partial t + (U - a) \cdot \partial W / \partial x = K \cdot U - L \cdot \varepsilon, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \partial F / \partial t + (U + a) \cdot \partial F / \partial x + (K + L) \cdot F = (K - L) \cdot W; \\ \partial W / \partial t + (U - a) \cdot \partial W / \partial x + (K + L) \cdot W = (K - L) \cdot F. \end{cases} \quad (42)$$

Система (42) отличается от (24) видом постоянных коэффициентов: вместо пары одинаковых чисел  $(K, K)$  используется пара  $(K + L, K - L)$ , причём если температура уменьшается (как в случае выпуска газа из шаробаллона), то коэффициент  $K + L > K > 0$ . Поэтому далее можно использовать тот же метод решения, что был описан выше. Уравнения (30) и (33) для дополнительных инвариантов принимают следующий вид:

$$dW_{np}(t)/dt + 0.5(K + L) \cdot W_{np}(t) = 0.5(K - L) \cdot (1 + M) \cdot F_{np}(t),$$

$$d F_{об}(t) / dt + 0.5(K + L) \cdot F_{об}(t) = 0.5(K - L) \cdot (1 - M) \cdot W_{об}(t) ,$$

а затухающие множители находятся по формулам

$$K_{зам.F} = \exp(-(K + L)\tau_F) \text{ и } K_{зам.W} = \exp(-(K + L)\tau_W) .$$

Если судить по известным литературным источникам, *система (41) получена впервые*. В её уравнениях проявилась симметрия, присущая не только основным законам механики (к этой симметрии уже все привыкли), но и отдельным положениям термодинамики (как раз на её примерах в научной и учебной литературе постоянно подчеркивается асимметрия и необратимость).

Тем самым сделан шаг в развитии теории, но его практическое значение для анализируемой пневмосистемы невелико. Здесь фактор  $L$  оказался в 50 раз меньше фактора  $K$ ; чтобы объяснить причины столь большого различия мы решим ещё одну вспомогательную задачу.

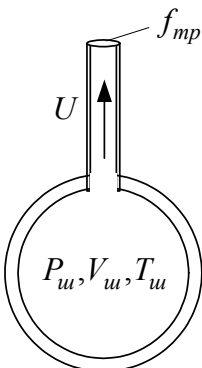


Рис. 7 – Схема выпуска газа для модельной задачи.

**Задача 5. Соотношение факторов температуры и сопротивления при выпуске газа из шаробаллона.** Будем считать, что выпускной трубопровод подключен непосредственно к шаробаллону (рис. 7), и запишем уравнение сжимаемости газа для его полости, а также формулу для фактора сопротивления:

$$(V_u / (kP)) \cdot dP_u / dt = -f_{mp} \cdot U , \quad K = 0.25 \cdot (0.01 \cdot U / d)$$

то есть

$$d \ln P_u^{1/k} / dt = -f_{mp} \cdot 400 \cdot d \cdot K / V_u . \quad (43)$$

Процессы в шаробаллоне адиабатические, поэтому

$$P_u^{1/k} \sim T_u^{1/(k-1)} \text{ и } (\ln P_u^{1/k})' = (\ln T_u)' / (k-1) = -4 \cdot L / (k-1) .$$

Подставляем в (43):

$$-4 \cdot L / (k-1) = -f_{mp} \cdot 400 \cdot d \cdot K / V_u ,$$

откуда

$$L / K = 100 \cdot (k-1) \cdot (\pi d^2 / 4) \cdot d / (\pi d^3 / 6) = 100 \cdot (d / D_u)^3 \approx (4.6 \cdot d / D_u)^3 ,$$

где  $D_u$  – это диаметр шаробаллона.

В конструкции анализируемой пневмосистемы  $d / D_u \approx 0.05$ , и при расчёте трубопровода фактор изменения температуры можно не учитывать.

**Результаты моделирования и перспективы дальнейших исследований.** Использование уточненного метода инвариантов для расчёта трубопроводов анализируемой пневмосистемы позволило добиться удовлетворительного соответствия между результатами расчёта и эксперимента. Особо следует подчеркнуть практическое совпадение этих результатов для частот и амплитуд колебаний давления, наблюдаемых во время переходных процессов. Некоторые различия между кривыми изменения давления, представленными на рис. 2 и 8, объясняются изменением управляющего давления при параллельном включении других пневмоклапанов двигателя (в расчете не учитывалось). Успешное решение поставленной задачи по моделированию



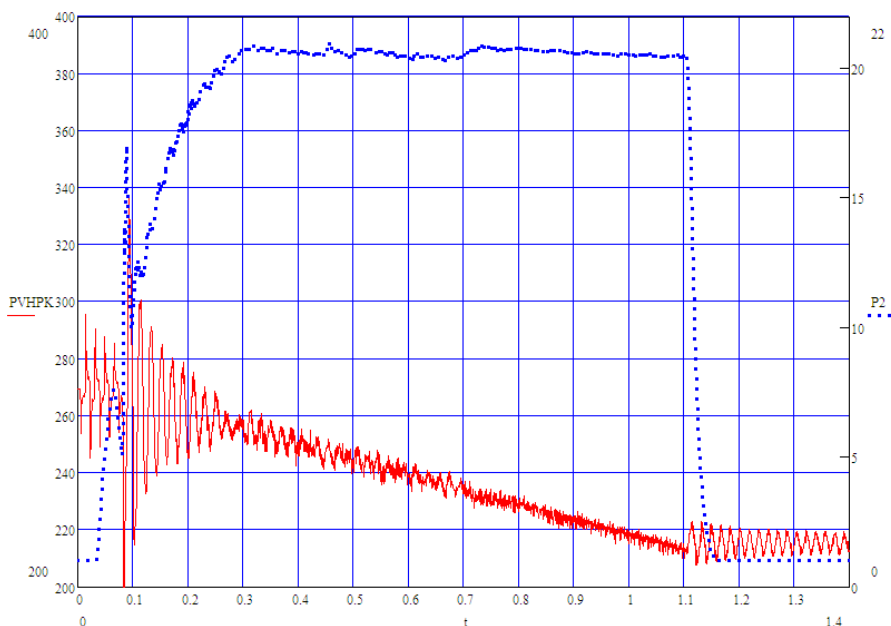


Рис. 8 – Колебания давления до и после регулятора; расчёт второго запуска.

колебаний параметров газа в трубопроводах пневмосистемы открыло возможность для реализации целого комплекса других уточнений её исходной математической модели, нацеленного на максимальное увеличение надёжности, точности и информативности получаемых результатов; отчёт об этой части исследования составит предмет отдельной публикации.

**Выводы.** Выполнен анализ процессов теплообмена газа со стенками в магистралях, подающих газ к турбонасосному агрегату, и в трубопроводах линии управления клапанами пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения. При использовании методов моделирования теплового потока и температурного поля в стенке трубопровода установлено, что течение газа по магистралям допустимо считать адиабатическим, а по трубопроводам управления – изотермическим.

Выполнено уточнение метода инвариантов Римана, позволяющее учесть неизоэнтропийный характер течения в выпускной магистрали при высокой скорости переноса, а также газодинамическое сопротивление трубопроводов. В частности, были уточнены формулы для функции давления и получены дифференциальные уравнения для расчёта дополнительных инвариантов, используемых при учёте сопротивления.

Впервые для газодинамического расчёта трубопровода составлены уравнения математической модели, в которой наряду с фактором сопротивления симметричным образом учтен фактор изменения температуры газа.

Теоретические результаты и соответствующие алгоритмы этой работы

стали причиной и основой глубокой модернизации разработанной ранее модели пневмосистемы запуска ракетного двигателя и её программной реализации в диалоговой среде MathCAD.

**Список литературы:** 1. Шевченко С.А., Валивахин С.А. Математическая модель регулятора давления газа // Вестник НТУ «ХПИ». – 2014. – № 18 (1061). – С. 195 – 209. 2. Шевченко С.А., Валивахин С.А. Результаты математического моделирования переходных процессов в регуляторе давления газа // Вестник НТУ «ХПИ». – 2014. – № 39 (1082). – С. 198 – 206. 3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. – 736 с. 4. Башта Т.М. Гидропривод и гидропневмоавтоматика. – М.: Машиностроение, 1972. – 320 с. 5. Атанов Г.А. Основы одномерной нестационарной газодинамики. – К.: Вища школа, 1979. 6. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, А.Н. Иванов и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с. 7. Астахов И.В., Трусов В.И., Хачиян А.С. и др. Подача и распыливание топлива в дизелях. – М.: Машиностроение, 1972. 8. Григорьев А.Л. Использование интегралов Дюамеля для расчёта импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2013. – № 54 (1027). – С. 63 – 86. 9. Грехов Л.В. Топливная аппаратура и системы управления дизелем / Л.В.Грехов, Н.А.Иващенко, В.А.Марков. – М.: Легион-Автodata, 2004. – 344 с. 10. Присняков В.Ф. Динамика жидкостных ракетных двигательных установок. – М.: Машиностроение, 1983. – 248 с. 11. Бойко В.С. Усовершенствование электромагнитных клапанов жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей. – Дис...канд. тех. наук. – Днепропетровск, 2013. – 186 с. 12. Григорьев А.Л. Модернизация метода характеристик для расчёта интенсивных импульсов нагнетания жидкости // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2014. – №6 (1049). – С. 42 – 58. 13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1977. 14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 15. Справочник по гидравлике / Под редакцией В.А. Большакова. – К.: Вища школа, 1984. 16. Зилке В. Трение, зависящее от частоты, при неустановившемся течении в трубопроводе // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1968. – №1. – С. 120 – 127. 17. Прохоренко А.А. Научные принципы разработки систем управления дизелей с электрогидравлической топливной аппаратурой. – Дис. ... д-ра тех. наук. – Харьков, 2013.

**Bibliography (transliterated):** 1. Shevchenko, S. A., and S. A. Valivahin. "Matematicheskaja model' reguljatora davljenja gaza." *Vestnik NTU «KhPI»*. No. 18 (1061). Kharkiv, 2014. No. 195–209. Print. 2. Shevchenko, S. A., and S. A. Valivahin. "Rezultaty matematicheskogo modelirovanija perehodnyh processov v reguljatore davljenja gaza." *Vestnik NTU «KhPI»*. No. 39 (1082). Kharkiv, 2014. 198–206. Print. 3. Lojczanskij, L. G. *Mehanika zhidkosti i gazov*. Moscow: Nauka, 1978. Print. 4. Bashta, T. M. *Gidropriwod i gidropnevmoavtomatika*. Moscow: Mashinostroenie, 1972. Print. 5. Atanov, G. A. *Osnovy odnomernoj nestacionarnoj gazodinamiki*. Kiev: Vishha shkola, 1979. Print. 6. Godunov, S. K., et al. *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki*. Moscow: Nauka, 1976. Print. 7. Astahov, I. V., et al. *Podacha i raspylivanie topliva v dizeljah*. Moscow: Mashinostroenie, 1972. Print. 8. Grigor'ev, A. L. "Ispolzovanie integralov Djuamelja dlja raschjota impul'sov davljenja i skorosti techenija vjazkoj zhidkosti po truboprovodu." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 54 (1027). Kharkiv, 2013. 63–86. Print. 9. Grehov, L. V., N. A. Ivachenko and V. A. Marcov. *Toplivnaja apparatura i sistemy upravlenija dizelem*. Moscow: Legion-Avtodata, 2004. Print. 10. Prisnjakov, V. F. *Dinamika zhidkostnyh raketnyh dvigatelej*. Moscow: Mashinostroenie, 1983. Print. 11. Bojko, V. S. *Usovershenstvovanie jelektromagnitnyh klapnov zhidkostnyh raketnyh dvigatelej verhnih stupeney raket-nositeljev*. Dis ... kand. tehn. nauk. Dnepropetrovsk, 2013. 12. Grigor'ev, A. L. "Modernizacija metoda harakteristik dlja raschjota intensivnyh impul'sov nagnetanija zhidkosti." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 6 (1049). Kharkiv, 2014, 42–58. Print. 13. Korn, G., and T. Korn. *Spravochnik po matematike (dlja nauchnyh sotrudnikov i inzhenerov)*. Moscow: Nauka, 1977. Print. 14. Tihonov, A. N., and A. A. Samarskij. *Uravenenija matematicheskij fiziki*. Moscow: Nauka, 1966. Print. 15. Bol'shakov, V. A. *Spravochnik po gidravlike*. Kiev: Vishha shkola, 1984. Print. 16. Zilke, V. "Trenie, zavisjashhee ot chastoty, pri neustanovivshemsja techenii v truboprovode." *Teoreticheskie osnovy inzhenernyh raschetov*. No. 1. 1968. 120–127. Print. 17. Prohorenko, A. A. *Nauchnye principy razrabotki sistem upravlenija dizelej s jelektrogidravlicheskoj toplivnoj apparaturou*. Dis. ... d-ra tehn. nauk. Kharkov, 2013. Print.

Поступила (received) 23.03.2015

**С.Н. ШУКЛИНОВ**, д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Харьков;  
**М.Ю. ЗАЛОГИН**, аспирант, ХНАДУ, Харьков

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО МЕХАНИЗМА ОПРОКИДЫВАНИЯ КАБИНЫ ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ**

Приведено математическое описание динамических процессов гидравлического механизма опрокидывания кабины грузового автомобиля. Математическое описание характеризует динамические процессы гидравлического привода механизма опрокидывания кабины с гидравлическим цилиндром двухстороннего действия и движение центра масс кабины относительно оси поворота при ее опрокидывании. Математическое описание гидропривода включает уравнение движения поршня насоса, движение жидкости в трубопроводе, зависимости, определяющие изменения давления жидкости в узлах, и уравнение движения штока гидроцилиндра. Уравнение движения поршня насоса представлено в виде синусоидального закона в функции времени и линейной частоты ее рукоятки. Скорость перемещения жидкости в трубопроводе определена из уравнения баланса давлений. Обобщенная нагрузка, действующая на выходное звено гидроцилиндра, определена из дифференциального уравнения движения кабины для случая линейной обобщенной координаты. Уравнение движения кабины в обобщенных координатах получено из уравнения Лагранжа второго рода, описывающее движение центра масс кабины относительно оси поворота для принятой плоской кинематической схемы механизма опрокидывания кабины.

**Ключові слова:** математическое описание, динамика, механизм опрокидывания кабины, рабочий процесс, податливость, гидравлическая цепь, оператор.

**Введение.** Гидравлический привод нашел широкое применение на подъемно-транспортных и других грузоподъемных механизмах различного технологического назначения. На грузовых автомобилях гидравлический привод применяется в системах подъема грузовой платформы, а также в механизмах опрокидывания кабин. При опрокидывании кабины, основным звеном, задающим ее движение, являются подвижные части гидравлического цилиндра, а основным источником энергии сжатия рабочей жидкости является гидравлический насос ручного действия. Привод гидравлического насоса приводится в движение непосредственно мускульной силой оператора (водителя).

**Анализ последних исследований.** Исследование рабочего процесса опрокидывания кабины грузового автомобиля составляет условие рационального проектирования гидравлического механизма опрокидывания кабины.

Известно [1], что в частном случае управление опрокидыванием кабины ограничивается воздействием мускульной силы оператора (водителя) на рукоятку насоса. Следует отметить, что математическое описание рабочих процессов структурных компонентов гидравлического механизма опрокидывания кабины разработано ограничено. В работе [2] было сделано допущение, что уравнение, описывающее движение кабины, представляет собой кусочно-линейную функцию.

**Цель и постановка задачи.** Целью данной работы является разработка

математического описания динамических процессов гидравлического механизма опрокидывания кабины грузового автомобиля.

Задачей работы является математическое описание гидродинамических процессов и уравнения движения центра масс кабины относительно оси поворота.

Схемы механизмов опрокидывания кабины грузовых автомобилей достаточно разнообразны. Принципиальная гидравлическая схема, представленная на рис. 1, отражает структуру и функциональные связи механизма опрокидывания кабины с гидравлическим цилиндром двухстороннего действия.

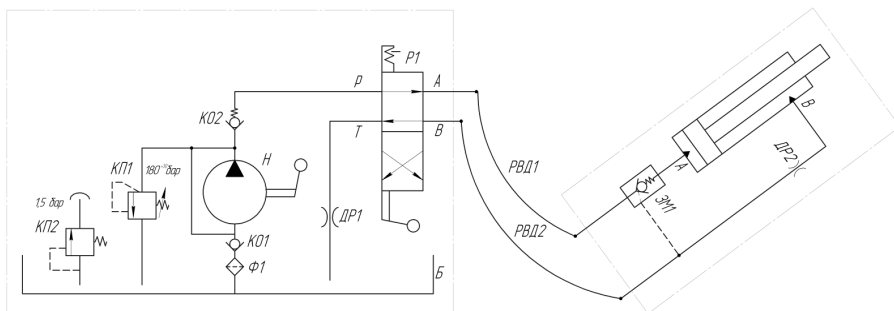


Рис. 1 – Принципиальная гидравлическая схема механизма опрокидывания кабины:  
Н – насос; Б – бак; КО1, КО2 – обратные клапана; КП1, КП2 – предохранительные клапана; Р1 – распределитель; Ф1 – фильтр;  $p$  – линия нагнетания;  $T$  – линия слива;  
А, В – места подключения насоса к гидроцилиндру; ДР1, ДР2 – дроссели;  
ЗМ1 – гидравлический замок; РВД1, РВД2 – рукава высокого давления.

**Математическое описание гидродинамических процессов.** В соответствии с принципиальной гидравлической схемой механизма опрокидывания кабины составлена динамическая схема гидравлического привода (рис. 2), состоящая из насоса, трубопровода и гидроцилиндра. При этом предполагается, что в гидравлической цепи объем жидкости рабочей полости насоса до клапана КО2 сосредоточен в узле  $Y_n$ . Жидкость в нагнетательном трубопроводе поровну сосредоточена в узлах  $Y_1$  и  $Y_2$ . Объем жидкости рабочей полости гидроцилиндра сосредоточен в узле  $Y_3$ . В узле  $Y_{cl}$  сосредоточен объем жидкости штоковой полости гидроцилиндра и трубопровода. Сжимаемость пузырьков нерастворенного воздуха в узлах  $Y_n$ ,  $Y_1$ ,  $Y_3$  и  $Y_{cl}$  характеризуется коэффициентами податливости  $\psi_n(p_n)$ ,  $\psi_1(p_1)$ ,  $\psi_3(p_3)$  и  $\psi_{cl}(p_{cl})$ . В линии нагнетания податливость трубопровода и сжимаемость жидкости учитывается коэффициентом податливости  $\psi_2(p_2)$ .

При рассмотрении динамических процессов были сделаны следующие допущения: волновые процессы в гидравлической цепи не влияют на переходной процесс; вязкость, плотность, температура рабочей жидкости и количество нерастворенного воздуха в ней не изменяются с течением времени; отсутствуют утечки рабочей жидкости.



данный объем жидкости сосредоточен в узле  $Y_H$ , в котором скорость изменения давления жидкости определяется балансом подачи и расхода жидкости в трубопровод:

$$\frac{dp_H}{dt} = \frac{S_{\Pi} \cdot \dot{y} - Q_{K02}}{S_{\Pi}(A - y) + V_0} \cdot E_{\text{см}}, \quad (2)$$

где  $\dot{y}$  – скорость перемещения поршня насоса;  $E_{\text{см}}$  – объемный модуль упругости рабочей жидкости;  $V_0$  – объем жидкости до клапана КО2;  $Q_{K02} = f_{K02} \mu_{K02} \sqrt{2|p_H - p_1| / \rho_{\text{ж}}} \cdot \text{sign}(p_H - p_1)$  – расход жидкости через клапан КО2 [4]; ( $\rho_{\text{ж}}$  – плотность рабочей жидкости;  $\mu_{K02}$  – коэффициент расхода;  $f_{K02}$  – площадь проходного сечения клапан КО2).

Объемный модуль упругости рабочей жидкости  $E_{\text{см}}$ , содержащей нерастворенный воздух, зависит от давления жидкости и количества нерастворенного воздуха в ней [3]. Это справедливо при допущении, что воздушные пузырьки при сжатии не растворяются:

$$E_{\text{см}} = \frac{V_f / V_a + 1}{V_f / V_a + E_{\text{ж}} \cdot p_0 / p^2}, \quad (3)$$

где  $E_{\text{ж}}$  – объемный модуль упругости чистой жидкости, не содержащей нерастворенного воздуха;  $V_f$  – объем жидкости в жидкостно-воздушной смеси при заданном давлении  $p$ ;  $V_a$  – объем воздуха в смеси с жидкостью при атмосферном давлении  $p_0$ .

Движение рабочей жидкости в трубопроводе определяет перепад давлений в узлах  $Y_1$  и  $Y_2$  и параметры трубопровода. Давление в узле  $Y_1$  зависит от расхода через клапан КО2 и скорости движения жидкости и определяется зависимостью:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{Q_{K02} - S_{\text{тр}} \cdot \dot{x}}{0,5 \cdot S_{\text{тр}} l_{\text{тр}}} \cdot E_{\text{см}}. \quad (4)$$

Скорость перемещения жидкости в трубопроводе на участке  $Y_1 - Y_2$  определяется на основании уравнения баланса давлений по методике, изложенной в работе [5]:

$$p_j + p_l + p_M + p_1 = p_2, \quad (5)$$

где  $p_j$  – инерционные потери давления;  $p_l$  – потери давления по длине;  $p_M$  – потери давления в местных сопротивлениях.

Раскрывая компоненты уравнения (5) и решая его относительно второй производной от перемещения столба жидкости, имеем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{p_1 - p_2 - 27,5 \frac{\rho_{\text{ж}} v l_{\text{тр}}}{S_{\text{тр}}} - 0,443 \frac{k_{\xi} \rho_{\text{ж}} l_{\text{тр}}}{\sqrt{S_{\text{тр}}}} - 0,5 \zeta \rho_{\text{ж}} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}{\rho_{\text{ж}} l_{\text{тр}}}, \quad (6)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости;  $k_{\xi}$  – коэффициент аппроксимации;  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления.

При этом скорость изменения давления в узле  $Y_2$  определяется зависимостью:

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{S_{\text{тр}} \cdot \dot{x} - Q_{3\text{М1}}}{0,5 \cdot S_{\text{тр}} l_{\text{тр}}} \cdot E_{\text{пр}}, \quad (7)$$

где  $Q_{3\text{М1}} = f_{3\text{М1}} \mu_{3\text{М1}} \sqrt{2|p_2 - p_3|/\rho_{\text{ж}}} \cdot \text{sign}(p_2 - p_3)$  – расход жидкости через гидрозамок 3М1;  $\mu_{3\text{М1}}$  – коэффициент расхода;  $f_{3\text{М1}}$  – площадь проходного сечения гидрозамок 3М1;  $E_{\text{пр}}$  – приведенный модуль упругости.

Для определения приведенного модуля упругости воспользуемся известной зависимостью:

$$E_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{см}}}{1 + \frac{E_{\text{см}}}{E_{\text{тр}}} \cdot \frac{d_{\text{вн}}}{\delta}}, \quad (8)$$

где  $E_{\text{тр}}$  – модуль упругости материала трубопровода;  $d_{\text{вн}}$  – внутренний диаметр трубопровода;  $\delta$  – толщина стенки трубопровода.

Давление в узле  $Y_3$ , в котором сосредоточен объем жидкости рабочей полости гидроцилиндра в основном определяется параметрами гидроцилиндра и внешней нагрузкой, при этом скорость изменения давления в данном узле определяется зависимостью:

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{Q_{3\text{М1}} - S_{\text{ц}} \cdot \dot{z}}{S_{\text{ц}} (z_{\text{min}} + z)} \cdot E_{\text{см}}, \quad (9)$$

где  $\dot{z}$  – скорость движения поршня гидроцилиндра;  $Z_{\text{min}}$  – минимальное расстояние между поршнем гидроцилиндра и его дном.

Кинематика механизма опрокидывания кабины должна обеспечивать движение центра масс кабины через зону неустойчивого равновесия. При этом должно быть обеспечено плавное запрокидывание кабины. Скорость запрокидывания кабины не должна превышать максимальную скорость, установленную нормативными документами [7]. Для ограничения максимальной скорости целесообразно применить гидравлический тормоз. Его функцию выполняет дроссель ДР2 (рис. 1). При этом расход через него можно определить по известной зависимости:

$$Q_{\text{др}} = f_{\text{др}} \mu_{\text{др}} \sqrt{2|p_{\text{сл}} - p_{\text{б}}|/\rho_{\text{ж}}} \cdot \text{sign}(p_{\text{сл}} - p_{\text{б}}), \quad (10)$$

где  $p_{\text{б}}$  – давление в баке насоса;  $p_{\text{сл}}$  – давление в сливной магистрали;  $\mu_{\text{др}}$  – коэффициент расхода через дроссель;  $f_{\text{др}} = \pi d_{\text{вн}}^2/4 \cdot (1 - \dot{z}/\dot{z}_{\text{кр}})$  – площадь проходного сечения дросселя; ( $\dot{z}$  – текущая скорость движения штока гидроцилиндра;  $\dot{z}_{\text{кр}} \leq r/R_{\text{уд.т}} \cdot v_{\text{max}}$  – критическая скорость движения штока гидроцилиндра;  $R_{\text{уд.т.}}$  – расстояние от оси поворота кабины до наиболее удален-

ной точки кабины;  $v_{\max}$  – допустимая максимальная линейная скорость наиболее удаленной точки кабины [7]).

В зависимости от скорости движения штока гидроцилиндра  $\dot{z}$ , площади, ограничиваемой параметрами дросселя ДР2, в узле  $Y_{\text{сл}}$  изменяется давление в соответствии с выражением:

$$\frac{dp_{\text{сл}}}{dt} = \frac{(S_{\text{ц}} - S_{\text{шт}}) \cdot \dot{z} - Q_{\text{др}}}{(S_{\text{ц}} - S_{\text{шт}}) \cdot (z_{\text{н}} - z)} \cdot E_{\text{см}}. \quad (11)$$

Уравнение движения центра масс кабины предполагает знание величины и характера изменения нагрузки, действующей на выходное звено гидроцилиндра. В большинстве случаев величина указанной нагрузки является функцией времени, режима работы и положения выходного звена гидроцилиндра, определяемого движением центра масс кабины относительно оси поворота. При описании движения центра масс кабины относительно оси поворота примем допущение, что зазоры в местах сочленения отдельных звеньев механической части привода, включающей в себя гидроцилиндр, механические связи и кабину, пренебрежимо малы. Все звенья механической части привода являются абсолютно жесткими и имеют неизменные массу, положение центра масс (в системе координат, связанной со звеном) и момент инерции относительно своего центра масс, а механическая часть привода в целом приводится к плоской расчетной схеме, представленной на рис. 3.

Для математического описания движения центра масс кабины при ее опрокидывании примем следующие допущения:

- массы кабины и подвижных частей механизма приведем к штоку гидроцилиндра;
- массой корпуса и штока гидроцилиндра пренебрегаем.

При анализе геометрических параметров, можно сделать вывод, что геометрия механизма опрокидывания кабины определяется базой  $a = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ , углом ее наклона к горизонту  $y = \text{const}$  и плечом  $r = \text{const}$ .

При перемещении поршня  $z = \text{var}$ , углы  $\alpha$  и  $\beta$  можно определить по теореме косинуса:

$$\alpha(z) = \arccos \left( \frac{L_{\text{цил}}^2 + a^2 - r^2}{2 \cdot L_{\text{цил}} \cdot a} \right),$$

$$\beta(z) = \arccos \left( \frac{r^2 + a^2 - L_{\text{цил}}^2}{2 \cdot a \cdot r} \right). \quad (12)$$

Для составления дифференциального уравнения движения центра масс кабины, относительно оси поворота, воспользуемся *уравнением Лагранжа второго рода*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q, \quad (13)$$

где  $T = m_{\text{пр}} \cdot \dot{q}^2 / 2$  – кинетическая энергия;  $m_{\text{пр}}$  – приведенная масса;  $\dot{q}, q$  –



обобщенная скорость и координата;  $Q$  – обобщенная сила.

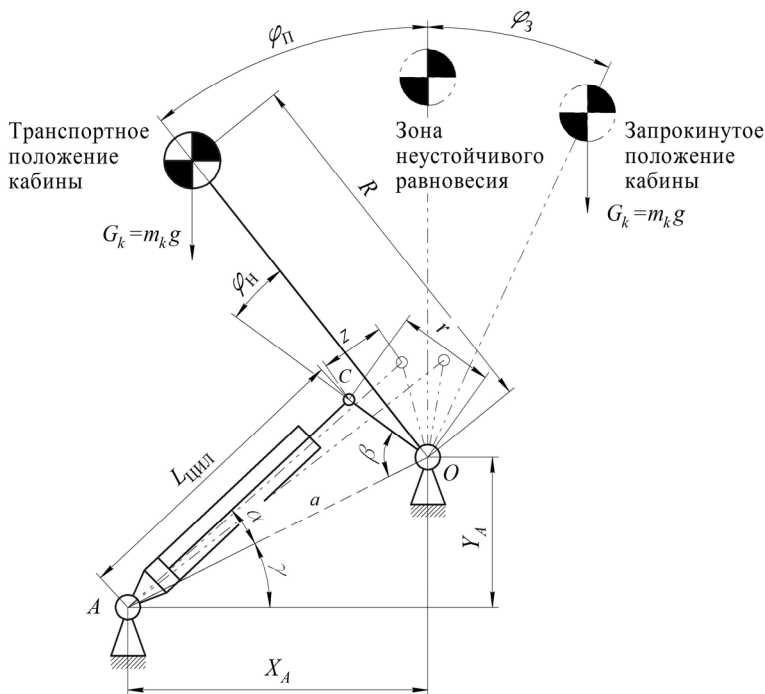


Рис. 3 – Кинематическая схема механизма опрокидывания кабины:  $X_A, Y_A$  – координаты оси крепления гидроцилиндра к раме автомобиля;  $O$  – ось поворота кабины;  $\gamma$  – угол наклона базы механизма к горизонту;  $\alpha$  – угол между штоком гидроцилиндра и базой механизма;  $\varphi_П, \varphi_З$  – угол опрокидывания и угол запрокидывания кабины соответственно;  $\beta$  – угол между рычагом  $r$  и базой механизма;  $r$  – расстояние между осью поворота кабины и осью крепления штока гидроцилиндра к кабине;  $\varphi_Н = 90 - \varphi_П + (\beta - \gamma)$  – начальный угол;  $z$  – ход штока гидроцилиндра;  $l_{ц}$  – длина корпуса гидроцилиндра;  $L_{цил} = l_{ц} + z$  – расстояние между точками  $A$  и  $C$  при  $z = 0$ ;  $R$  – расстояние от оси поворота до центра масс кабины;  $G_k$  – сила тяжести кабины.

В качестве обобщенной координаты целесообразно выбрать координату положения штока гидроцилиндра  $z$ .

Массу  $m_{пр}$  кабины и подвижных частей механизма приведенную к штоку гидроцилиндра, можно вычислить по формуле:

$$m_{пр} = 2T / \dot{z}^2, \quad (14)$$

где  $T = 0,5 J_k \dot{\beta}^2$  – кинетическая энергия кабины;  $J_k = m_k (R^2 + k^2)$  – момент

инерции кабины относительно оси поворота;  $m_k$  – масса кабины;  $k$  – радиус инерции кабины;  $\dot{\beta}$  – угловая скорость движения кабины.

Для определения угловой скорости  $\dot{\beta}$  продифференцируем уравнение (12):

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \cdot \frac{1}{2ar} - 2L_{\text{цил}} \dot{z} = \frac{L_{\text{цил}} \dot{z}}{ar\sqrt{1-B^2}}, \quad (15)$$

где  $B = \frac{r^2 + a^2 - L_{\text{цил}}^2}{2ar}$  – безразмерный коэффициент уравнения.

При подстановке компонентов в формулу (14), выражение, определяющее приведенную массу, приобретает вид:

$$m_{\text{пр}} = J_k \left( \frac{L_{\text{цил}} \dot{z}}{ar\sqrt{1-B^2} \dot{z}} \right). \quad (16)$$

Из [6] известно, что для случая линейной обобщенной координаты  $z$  уравнение движения кабины можно представить в виде:

$$m_{\text{пр}} \cdot \ddot{z} + \dot{z}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial m_{\text{пр}}}{\partial z} = Q. \quad (17)$$

При этом:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m_{\text{пр}}}{\partial z} = \frac{2L_{\text{цил}} \left( 4a^2 r^2 - (r^2 + a^2 - L_{\text{цил}}^2)^2 \right) - 4L_{\text{цил}}^3 (r^2 + a^2 - L_{\text{цил}}^3)}{(4a^2 r^2 - (r^2 + a^2 - L_{\text{цил}}^2)^2)^2}. \quad (18)$$

Выбирая за начало отсчета горизонтальную плоскость, проходящую через точку  $A$ , можно записать потенциальную энергию кабины  $\Pi$  в виде:

$$\Pi = G_k R \sin(\beta - \gamma) + G_k a \sin(\gamma). \quad (19)$$

Для определения приведенной к штоку гидроцилиндра силы тяжести  $G_{\text{пр}}$  воспользуемся выражением:

$$G_{\text{пр}} = -d\Pi / dz. \quad (20)$$

Вычислив первую производную выражения (19) и подставив ее в выражение (20), получим:

$$G_{\text{пр}} = -G_k R \cos(\beta - \gamma) \frac{d\beta}{dz}. \quad (21)$$

Обобщенную силу  $Q$  определяет уравнение, в первой части которого записаны силы, действующие на шток гидроцилиндра:

$$Q = p_3 S_{\text{ц}} - p_{\text{сл}} (S_{\text{ц}} - S_{\text{шт}}) + G_{\text{пр}} - F_{\text{тр}} \text{sign} \left( \frac{dz}{dt} \right). \quad (22)$$

Сила трения поршня о стенку гидроцилиндра в основном определяется уплотняющим элементом (манжетой) на поршне и штоке гидроцилиндра и зависит от их конструктивных параметров и материала. Как правило, для уплотняющих элементов применяют резинотехническую смесь, стойкую к рабочей жидкости. В этом случае усилие трения можно найти по формуле [8]:

$$F_{\text{тр}} = \pi D_{\text{м}} b_{\text{м}} f_{\text{тр}} (p_3 + p_{\text{к.ср}}). \quad (23)$$

где  $D_{\text{м}}$  – наружный диаметр манжеты;  $b_{\text{м}}$  – ширина контакта манжеты со стенкой цилиндра;  $f_{\text{тр}}$  – коэффициент трения материала манжеты о стенку цилиндра;  $p_{\text{к.ср.}}$  – среднее контактное давление уплотнительного элемента на стенку цилиндра.

**Перспективы дальнейших исследований.** В дальнейшем планируется дополнить математическое описание динамических процессов гидравлического механизма опрокидывания кабины зависимостями, характеризующими режим опускания ее в транспортное положение. Это позволит исследовать возможности совершенствования рабочего процесса механизма с целью рекуперации потенциальной энергии кабины и снижения энергетических затрат оператора на управление.

**Выводы.** Разработанное математическое описание позволяет исследовать динамические процессы гидравлического привода механизма опрокидывания кабины с гидравлическим цилиндром двухстороннего действия с учетом динамики движения центра масс кабины относительно оси поворота.

**Список литературы:** 1. Шуклінов С.М., Залогін М.Ю. Аналіз функціональних властивостей механізмів підйому кабін вантажних автомобілів // Сучасні технології та перспективи розвитку автомобільного транспорту: матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції, – Вінниця, ВНТУ, – 21 – 23 жовтня 2013 р. – С. 192. 2. Шуклинов С.Н., Залогин М.Ю., Бартош П.Р. Математическое моделирование рабочих процессов механизма подъема кабины грузового автомобиля. Праці одеського національного університету. – 2014. – № 2 (44). – С. 39 – 44. 3. Башута Т.М. Машиностроительная гидравлика: справочное пособие / Трифон Максимович Башута. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1971. – 672 с. 4. Попов Д.Н. Механика гидро- и пневмоприводов: учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 320 с. 5. Метлюк Н.Ф., Автушко В.П. Динамика пневматических и гидравлических приводов автомобилей. – М.: Машиностроение, 1980. – 231 с. 6. Гойдо М.Е. Проектирование объемных гидроприводов. – М.: Машиностроение, 2009. – 304с. 7. ГОСТ Р 53807-2010. Автомобильные транспортные средства. Гидроцилиндры и насосы гидравлических механизмов опрокидывания кабин. Технические требования и методы испытаний. Москва: Национальный стандарт Российской Федерации, 2010. 8. Токаренко В.М., Терских В.З., Столяров А.Л. Гидропривод и гидрооборудование автотранспортных средств; учебное пособие. – К.: Лыбидь, 1991. – 232 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Shuklinov, S. M., and M.Yu. Zalogin. "Analiz funktsional'nykh vlastyivostey mekhanizmiv pidjomu kabin vantazhnykh avtomobiliv." *Suchasni tehnologii' ta perspektyvy rozvittu avtomobil'nogo transportu. Materialy VI Mizhnarodnoi' naukovy-praktychnoi' konferencii*. Vinnytsa: VNTU, 2013. Print. 2. Shuklinov, S. N., M. Yu. Zalogin and P. R. Bartosh. "Matematicheskoe modelirovanie rabochih processov mekhanizma pod"joma kabiny gruzovogo avtomobilja." *Praci odeskogo nacional'nogo universytetu*. No. 2 (44). 2014. 39–44. Print. 3. Bashta, T. M. *Mashinostroitel'naja gidravlika: spravocnoe posobie*. 2<sup>nd</sup> ed. izd., pererab. i dop. Moscow: Mashinostroenie, 1971. Print. 4. Popov, D. N. *Mekhanika gidro- i pnevmoprivodov: ucbebnik dlja vuzov*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Bauman, 2001. Print. 5. Metljuk, N. F., and V. P. Avtushko. *Dinamika pnevmaticheskikh i gidravlicheskih privodov avtomobilej*. Moscow: Mashinostroenie, 1980. Print. 6. Goido, M. E. *Proektirovanie ob"jomnyh gidroprivodov*. Moscow: Mashinostroenie, 2009. Print. 7. *GOST R 53807-2010. Avtomobil'nye transportnye sredstva. Gidrocilindry i nasosy gidravlicheskih mekhanizmov oprokidyvanja kabin. Tehnicheskie trebovanija i metody ispytanj*. Moscow: Nacional'nyj standart Rossijskoj Federacii, 2010. Print. 8. Tokarenko, V. M., V. Z. Terskih and A. L. Stoljarov. *Gidroprivod i gidrooborudovanie avtotransportnyh sredstv: ucbebnoe posobie*. Kiev: Lybid', 1991. Print.

*Поступила (received) 15.12.2014*

**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;

**П.А. ЕГОРОВ**, ассист., ХНАДУ, Харьков

## **НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЛИНЕЙНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ (ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ)**

Приводится исследование нестационарного деформирования шарнирно-опертой изотропной пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости. На примере механической системы, состоящей из шарнирно-опертой пластины и подпирающей ее балки, построено решение прямой и обратной задач. Достоверность полученных результатов исследуется путем сопоставления с результатами, полученными другими авторами, при предельном переходе. Также приводится сопоставление аналитического решения задачи с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Некорректность поставленных задач (прямой и обратной) преодолевается с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова.

**Ключевые слова:** пластина, ребро жесткости, ряд Фурье, преобразование Лапласа, условие контакта, уравнение Вольтерра, метод регуляризации.

**Введение и анализ последних исследований.** Системы, которые могут быть представлены в виде пластин, подпертых линейными ребрами жесткости, широко используются в технике и строительстве. Обеспечение безопасности таких конструкций вызывает необходимость изучения их деформирования под действием нестационарных нагрузок (решение прямой задачи). Решение обратной задачи позволяет восстановить причины и факторы, характерные процессу деформирования, по дополнительной информации о нем.

Среди работ, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния шарнирно-опертой пластины, выделим [1] и [2]. В [1] приводится решение прямой задачи для пластины, лежащей на упругом основании, при этом колебания пластины описываются на основе системы трех уравнений. На основе одного разрешающего уравнения в [2] исследовано нестационарное деформирование шарнирно-опертой пластины. С использованием *дискретных функций Грина* в [3] исследуются частоты и формы колебаний шарнирно-опертой вдоль линии пластины. В [4] приведены исследования колебаний пластины, подпертой ребрами жесткости, посредством метода конечных элементов.

Исследование поперечных нестационарных колебаний пластины, подпертой линейными ребрами жесткости, как и решение задачи по восстановлению нагрузки, воздействующей на такую систему, представляют интерес.

**Постановка прямой задачи.** Исследуемая система состоит из шарнирно-опертой изотропной прямоугольной пластины и закрепленного на ней без проскальзывания ребра жесткости (рис. 1). К срединной плоскости пластины приложено нестационарное воздействие. В начальный момент времени в системе отсутствуют возмущения. Необходимо изучить колебания пластины под

действием заданной динамической нагрузки.

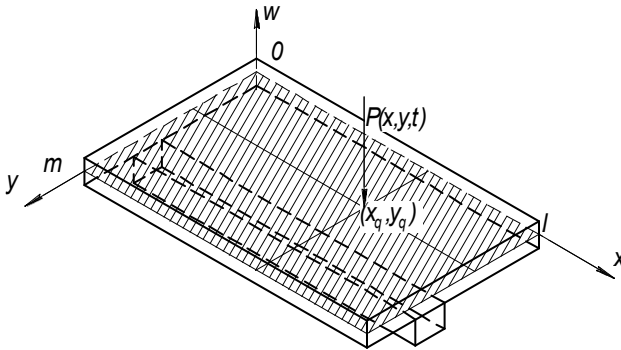


Рис. 1 – Схема исследуемой системы.

**Решение прямой задачи.** Исследование нестационарных колебаний пластины, подкрепленной ребром жесткости в виде балки, под действием сосредоточенной нагрузки  $P(x, y, t)$  будем осуществлять на основе одного разрешающего уравнения в рамках уточненной теории типа Тимошенко. Для исследования поперечных колебаний балки под действием неизвестных контактных сил воспользуемся уточненной теорией, соответствующей модели балки типа Тимошенко. Неизвестные контактные силы, возникающие между ребром жесткости и пластиной, найдем из условия равенства перемещений точек пластины перемещениям соответствующих точек балки. Предполагается, что упомянутые контактные силы, действующие на балку и пластину, равны по величине.

Разрешающее уравнение для пластины может быть записано в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w - \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho_p h_p}{D_p} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ = \frac{P(x, y, t)}{D_p} + \frac{1}{k'_p G_p h_p} \left( \frac{\rho_p I_p}{D_p} \frac{\partial^2 P(x, y, t)}{\partial t^2} - \Delta P(x, y, t) \right) - \\ - \sum_{j=1}^J \left[ \frac{R_j(x, y, t)}{D_p} + \frac{1}{k'_p G_p h_p} \left( \frac{\rho_p I_p}{D_p} \frac{\partial^2 R_j(x, y, t)}{\partial t^2} - \Delta R_j(x, y, t) \right) \right]. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ,  $w(x, y, t)$  – прогиб срединной поверхности пластины;  $c_1^2 = E_p / [\rho_p (1 - \nu_p^2)]$ ,  $c_2^2 = 2G_p / (3\rho_p)$  – скорости распространения волн деформации в пластине;  $\rho_p$  – плотность материала;  $h_p$  – толщина пластины;  $I_p = h_p^3 / 12$ ;  $D_p = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  – цилиндрическая жесткость;  $k'_p$  – коэффициент сдвига;  $G_p = E / [2(1 + \nu)]$  – модуль Юнга;  $R_j(x, y, t)$  –

контактные силы, возникающие на поверхности контакта пластины с ребром жесткости;  $j = 1 \dots J$ ;  $J$  – количество точек контакта, в которых предполагается выполнение контактных условий.

Примем, что нагрузка и контактные силы приложены в точках  $(x_q, y_q)$ ,  $(x_j, y_j)$  соответственно на срединной плоскости пластины, тогда

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= q(t)\delta(x - x_q)\delta(y - y_q); \\ R_j(x, y, t) &= r_j(t)\delta(x - x_j)\delta(y - y_j), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q(t)$ ,  $r_j(t)$  – интенсивности воздействия возмущающей нагрузки и контактных сил.

Решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях ( $w(x, y, 0) = \partial w(x, y, 0) / \partial t = 0$ ) будем искать с использованием разложения искомой функции в ряды Фурье. Упомянутое разложение согласно выбранной схеме закрепления краев пластины может быть записано как следующее:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{k,n}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_p} \sin \frac{n\pi y}{m_p}. \quad (3)$$

Произведем также разложение в двойные ряды Фурье функций нагрузки и контактных сил и будем иметь:

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{k,n}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_p} \sin \frac{n\pi y}{m_p}; \\ R_j(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{jk,n}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_p} \sin \frac{n\pi y}{m_p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для коэффициентов разложения  $P_{k,n}(t)$ ,  $R_{jk,n}(t)$  могут быть найдены из (4) с учетом (2), как  $P_{k,n}(t) = C_{qk,n} \cdot q(t)$ ;  $R_{jk,n}(t) = C_{jk,n} \cdot r_j(t)$ , где

$$C_{qk,n} = \frac{4}{l_p m_p} \sin \frac{k\pi x_q}{l_p} \sin \frac{n\pi y_q}{m_p}, \quad C_{jk,n} = \frac{4}{l_p m_p} \sin \frac{k\pi x_j}{l_p} \sin \frac{n\pi y_j}{m_p}.$$

Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций, в результате чего получим соотношение следующего вида:

$$\begin{aligned} \lambda_{k,n}^4 w_{k,n}(t) + \left( \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \lambda_{k,n}^2 + \frac{\rho_p h_p}{D_p} \right) \frac{\partial^2 w_{k,n}(t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 w_{k,n}(t)}{\partial t^4} = \\ = \frac{P_{k,n}(t)}{D_p} + \frac{1}{k'_p G_p h_p} \left( \frac{\rho_p I_p}{D_p} \frac{\partial^2 P_{k,n}(t)}{\partial t^2} + \lambda_{k,n}^2 P_{k,n}(t) \right) - \\ - \sum_{j=1}^J \left[ \frac{R_{jk,n}(t)}{D_p} + \frac{1}{k'_p G_p h_p} \left( \frac{\rho_p I_p}{D_p} \frac{\partial^2 R_{jk,n}(t)}{\partial t^2} + \lambda_{k,n}^2 R_{jk,n}(t) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_{k,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$ .

Решение полученного уравнения относительно неизвестных  $w_{k,n}(t)$  будем искать с использованием интегрального преобразования Лапласа. Для корректного перехода в пространство изображений примем, что нагрузка и контактные силы, а также их производные по времени, при  $t=0$  равны нулю ( $P(x, y, 0) = 0$ ,  $R_j(x, y, 0) = 0$ ,  $\partial P(x, y, 0) / \partial t = 0$ ,  $\partial R_j(x, y, 0) / \partial t = 0$ ), благодаря чему обеспечиваются равенства  $\partial^2 w(x, y, 0) / \partial t^2 = 0$  и  $\partial^3 w(x, y, 0) / \partial t^3 = 0$ . Аналогичный подход был применен в работе [2]. Выражение для  $w_{k,n}(s)$  в пространстве изображений может быть представлено как следующее:

$$w_{k,n}^L(s) = \left( P_{k,n}^L(s) - \sum_{j=1}^J R_{jk,n}^L(s) \right) \frac{a_{3k,n}^2 s^2 + a_{4k,n}}{s^4 + a_{1k,n} s^2 + a_{2k,n}}, \quad (6)$$

где  $a_{1k,n} = (c_1^2 + c_2^2) \lambda_{k,n}^2 + \frac{\rho_p h_p}{D_p} c_1^2 c_2^2$ ,  $a_{2k,n} = c_1^2 c_2^2 \lambda_{k,n}^4$ ,  $a_{3k,n} = \frac{\rho_p I_p c_1^2 c_2^2}{k'_p G_p h_p D_p}$ ,

$$a_{4k,n} = c_1^2 c_2^2 \left( \frac{1}{D_p} + \frac{\lambda_{k,n}^2}{k'_p G_p h_p} \right).$$

Для нахождения искомой функции в пространстве оригиналов воспользуемся теоремой о свертке и второй теоремой разложения [6]:

$$w_{k,n}(t) = \int_0^t \left( C_{qk,n} \cdot q(\tau) - \sum_{j=1}^J C_{jk,n} \cdot r_j(\tau) \right) \sum_{v=1}^V \frac{A_1(s_v)}{A_2'(s_v)} \cdot e^{s_v(t-\tau)} d\tau, \quad (7)$$

где  $A_1(s_v)$  – полином числителя дроби;  $A_2'(s)$  – производная по  $s$  полинома  $B$  – ой степени знаменателя дроби;  $s_v$  – корни уравнения  $A_2(s) = 0$ .

Вводя замену  $s^2 = -\omega^2$ , найдем корни биквадратного уравнения  $s^4 + a_{1k,n} s^2 + a_{2k,n} = 0$ . Таковыми будут являться следующие числа:

$$s_{1k,n} = i\omega_{1k,n}; s_{2k,n} = -i\omega_{1k,n}; s_{3k,n} = i\omega_{2k,n}; s_{4k,n} = -i\omega_{2k,n},$$

где  $\omega_{1,2k,n} = \left| 0.5 \left( -a_{1k,n} \pm \sqrt{a_{1k,n}^2 - 4a_{2k,n}} \right) \right|$ .

В пространстве оригиналов будем иметь:

$$w_{k,n}(t) = \int_0^t \left( C_{qk,n} \cdot q(\tau) - \sum_{j=1}^J C_{jk,n} \cdot r_j(\tau) \right) \sum_{b=1}^2 \frac{a_{4k,n} - a_{3k,n} \omega_{vk,n}^2}{\omega_{vk,n} (a_{1k,n} - 2\omega_{vk,n}^2)} \times \\ \times \sin \omega_{vk,n} (t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Таким образом перемещения точек пластины определяются следующей зависимостью:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left( C_{qk,n} \cdot q(\tau) - \sum_{j=1}^J C_{jk,n} \cdot r_j(\tau) \right) \sum_{v=1}^2 \frac{a_{4k,n} - a_{3k,n} \omega_{vk,n}^2}{\omega_{vk,n} (a_{1k,n} - 2\omega_{vk,n}^2)} \times \\ \times \sin \omega_{vk,n} (t - \tau) d\tau \cdot \sin(k\pi x / l_p) \sin(n\pi y / m_p). \quad (9)$$

Как было указано ранее, перемещения балки под действием системы контактных сил будем исследовать на основе модели балки типа Тимошенко:

$$\begin{cases} \rho_b F_b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k'_b \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) F_b G_b = \sum_{j=1}^J R_j(x, t); \\ E_b I_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k'_b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \psi \right) F_b G_b - \rho_b I_b \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $R_j(x, t) = r_j(t)\delta(x - x_j)$  – сосредоточенные контактные силы, действующие на поверхности балки.

Здесь принято, что  $u$  – прогиб балки. Описание остальных величин, входящих в (10), приведено в [7].

Примем, что начальные перемещения и скорости точек, а также перемещения и углы поворота на концах балки, равны нулю (шарнирное опирание на торцах):

$$u(0, t) = u(l_b, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad \partial u(x, 0)/\partial t = 0; \quad \partial \psi(0, t)/\partial x = \partial \psi(l_b, t)/\partial x = 0.$$

Решение разрешающих уравнений для балки будем производить методом, аналогичным приведенному ранее по отношению к соответствующему уравнению для пластины. Разложения искомых функций в ряды Фурье могут быть представлены в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l_b}; \quad \psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l_b}; \quad R_j(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}(t) \sin \frac{k\pi x}{l_b}.$$

Соответствующие коэффициенты разложения  $R_{jk}$  могут быть найдены, как  $R_{jk}(t) = C_{jk} \cdot r_j(t)$ , где  $C_{jk} = 2/l_b \cdot \sin(k\pi x_j / l_b)$ .

Используя принятые разложения функций  $u(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ ,  $R_j(x, t)$  и свойство ортогональности тригонометрических функций, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} + b_1 \lambda_k^2 u_k(t) - b_1 \lambda_k \psi_k(t) = \frac{1}{\rho_b F_b} \sum_{j=1}^J R_{jk}(t); \\ \frac{\partial^2 \psi_k(t)}{\partial t^2} + b_2 \lambda_k^2 \psi_k(t) + b_3 \psi_k(t) - b_3 \lambda_k u_k(t) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{где } \lambda_k = \frac{k\pi}{l_b}, \quad b_1 = \frac{k'_b G_b}{\rho_b}, \quad b_2 = \frac{E_b}{\rho_b}, \quad b_3 = \frac{k'_b G_b F_b}{\rho_b I_b}.$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (11) относительно коэффициентов разложения  $u_k(t)$  и  $\psi_k(t)$  воспользуемся операционным исчислением. Полученное решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \frac{1}{\rho_b F_b} \int_0^t \sum_{j=1}^J C_{jk} \cdot r_j(\tau) \sum_{b=1}^4 \frac{b_3 + b_2 \lambda_k^2 + s_{v_k}^2}{4s_{v_k}^3 + 2s_{v_k}^2 (\lambda_k^2 (b_1 + b_2) + b_3)} \cdot e^{s_{v_k}(t-\tau)} d\tau; \\ \psi_k(t) &= \frac{1}{\rho_b F_b} \int_0^t \sum_{j=1}^J C_{jk} \cdot r_j(\tau) \sum_{b=1}^4 \frac{b_3 \lambda_k}{4s_{v_k}^3 + 2s_{v_k}^2 (\lambda_k^2 (b_1 + b_2) + b_3)} \cdot e^{s_{v_k}(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$



где  $s_{v_k}$  – корни уравнения  $s^4 + s^2(\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3) + b_1b_2\lambda_k = 0$ .

Корни  $s_{v_k}$  записанного биквадратного уравнения являются мнимыми:

$$s_{1k} = i\varphi_{1k}; s_{2k} = -i\varphi_{1k}; s_{3k} = i\varphi_{2k}; s_{4k} = -i\varphi_{2k},$$

$$\text{где } \varphi_{1,2k} = \left| 0.5 \left( -(\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3) \pm \sqrt{(\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3)^2 - 4b_1b_2\lambda_k^4} \right) \right|.$$

Перемещения точек балки и углы поворота нормали к продольной ее оси с течением времени могут быть найдены по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} u_b(x, t) &= \frac{1}{\rho_b F_b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^J C_{jk} \cdot r_j(\tau) \sum_{v=1}^2 \frac{b_3 + b_2 \lambda_k^2 - \varphi_{v_k}^2}{\varphi_{v_k} (\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3 - 2\varphi_{v_k}^2)} \times \\ &\quad \times \sin \varphi_{v_k}(t - \tau) d\tau; \\ \psi_b(x, t) &= \frac{1}{\rho_b F_b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^J C_{jk} \cdot r_j(\tau) \sum_{v=1}^2 \frac{b_3 \lambda_k}{\varphi_{v_k} (\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3 - 2\varphi_{v_k}^2)} \times \\ &\quad \times \sin \varphi_{v_k}(t - \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (13)$$

На основании предположения о равенстве перемещений точек балки перемещениям соответствующих точек пластины запишем уравнения для нахождения неизвестных контактных сил  $r_j(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t q(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{qk,n} [\Omega_{1k,n}^P \cdot \sin \omega_{1k,n}(t - \tau) + \Omega_{2k,n}^P \cdot \sin \omega_{2k,n}(t - \tau)] \cdot \sin \frac{k\pi x_j}{l_p} \cdot \sin \frac{n\pi y_j}{m_p} d\tau = \\ = \int_0^t \sum_{j=1}^J r_j(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{C_{jk}}{\rho_b F_b} [\Omega_{1k}^b \cdot \sin \varphi_{1k}(t - \tau) + \Omega_{2k}^b \cdot \sin \varphi_{2k}(t - \tau)] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_{jk,n} [\Omega_{1k,n}^P \cdot \sin \omega_{1k,n}(t - \tau) + \Omega_{2k,n}^P \cdot \sin \omega_{2k,n}(t - \tau)] \sin \frac{n\pi y_j}{m_p} \right] \sin \frac{k\pi x_j}{l_p} d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } \Omega_{1k,n}^P = \frac{a_{4k,n} - a_{3k,n} \omega_{1k,n}^2}{\omega_{1k,n} (a_{1k,n} - 2\omega_{1k,n}^2)}, \quad \Omega_{2k,n}^P = \frac{a_{4k,n} - a_{3k,n} \omega_{2k,n}^2}{\omega_{1k,n} (a_{1k,n} - 2\omega_{2k,n}^2)},$$

$$\Omega_{1k}^b = \frac{b_3 + b_2 \lambda_k^2 - \varphi_{1k}^2}{\varphi_{1k} (\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3 - 2\varphi_{1k}^2)}, \quad \Omega_{2k}^b = \frac{b_3 + b_2 \lambda_k^2 - \varphi_{2k}^2}{\varphi_{2k} (\lambda_k^2(b_1 + b_2) + b_3 - 2\varphi_{2k}^2)}.$$

Отметим, что система (14) содержит  $J$  уравнений.

При условии известности функции  $q(t)$ , полученные уравнения относительно неизвестных  $r_j(t)$  являются уравнениями Вольтера первого рода, для решения которых воспользуемся одним из численных методов решения интегральных уравнений, состоящем в замене интегралов соответствующими суммами [8]. Развернутая запись этих уравнений не приводится в силу громоздкости. Упомянутые уравнения являются алгебраическими по отношению к  $r_{jm}$  и могут быть решены, например, с использованием обобщенного метода Гаусса. Следует отметить, что задача является некорректной, поэто-

му для получения устойчивого решения необходимо использовать сглаживающие алгоритмы. Для решения данной задачи при выполнении обратного хода согласно методу Гаусса воспользуемся *методом регуляризации А.Н. Тихонова*. Указанному решению будет подвергаться система уравнений, полученная на основе (14), матричного вида:

$$\begin{cases} \mathbf{A}r_{1,1} \cdot r_1 + \mathbf{A}r_{1,2} \cdot r_2 + \dots + \mathbf{A}r_{1,J-1} \cdot r_{J-1} + \mathbf{A}r_{1,J} \cdot r_J = \mathbf{A}p_1 \cdot P; \\ \vdots \\ \mathbf{A}r_{J,1} \cdot r_1 + \mathbf{A}r_{J,2} \cdot r_2 + \dots + \mathbf{A}r_{J,J-1} \cdot r_{J-1} + \mathbf{A}r_{J,J} \cdot r_J = \mathbf{A}p_J \cdot P. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, перемещения точек пластины могут быть найдены по формуле (9) с учетом найденных контактных сил  $r_j(t)$ .

Для проведения численного эксперимента примем следующие исходные данные:

- 1) характеристики пластины:  $E_p = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_p = 0.3$ ;  $\rho_p = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $k'_p = 0.85$ ;  $l_p = 0.6$  м;  $m_p = 0.4$  м;  $h_p = 0.01$  м;
- 2) характеристики ребра жесткости (балки):  $E_b = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_b = 0.3$ ;  $\rho_p = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $k'_b = 1.2$ ;  $l_b = 0.6$  м;  $b_b = 0.04$  м;  $h_b = 0.04$  м;
- 3) характеристики нагрузки: нагрузка сосредоточена в точке с координатами  $x_q = 0.3$  м,  $y_q = 0.2$  м, функция нагружения во времени описывается зависимостью  $q(t) = q_0(H(t) - H(t_0))$ , где интенсивность возмущающей нагрузки  $q_0 = 10^3$  Н;
- 4) параметры времени: интервал исследования  $T = 0.01$  с, вычислительный шаг по времени  $\Delta t = 10^{-5}$  с.

Число точек, в которых предполагается совпадение прогибов пластины и балки, было принято равным  $J = 10$ .

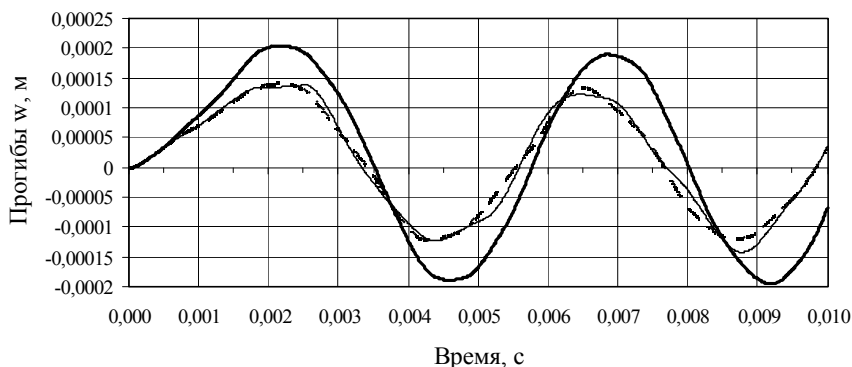


Рис. 2 – Графики перемещений точки пластины  $x_s = 0.25$  м,  $y_s = 0.15$  м.

В ходе численного эксперимента было установлено, что при учете 25 членов ряда в разложении исследуемых функций получаем решение с погрешностью менее 1% по отношению к решению, полученному при учете

125 членов ряда, поэтому для построения графиков зависимости прогибов от времени воспользуемся решением, учитывающим 25 членов ряда.

На рис. 2 в сравнении представлены графики изменения прогиба пластины во времени в точке  $x_s = 0.25$  м,  $y_s = 0.15$  м, для случаев наличия подкрепляющего ребра жесткости (сплошная тонкая кривая) и отсутствия такового (сплошная жирная кривая). Из приведенного сравнения можно сделать вывод о том, что введение подпирающего элемента с выбранной жесткостью снижает амплитуду колебаний системы в целом. Отметим, что при предельном переходе, когда толщина подкрепляющего ребра является малой по сравнению с толщиной пластины, прогибы точек исследуемой системы практически совпадают с прогибами шарнирно-опертой пластины без подпирающих элементов, полученными другими авторами [2]. Приведенная на рис. 2, штриховая жирная кривая соответствует решению, полученному методом конечных элементов. Аналитическое и решение по МКЭ согласуются в весьма хорошей степени. Исследования по МКЭ осуществлены на основе [9].

**Постановка обратной задачи.** К необходимости решения обратной задачи приходим в случае, если в постановке прямой задачи функция  $q(t)$  является неизвестной. В качестве исходных данных для решения обратной задачи необходимо иметь дополнительную информацию, например, такую как деформация или прогиб в какой-либо точке системы. Такая информация может быть получена при проведении соответствующего физического, численного эксперимента и тому подобное. Воспользуемся данными, полученными при решении прямой задачи, а именно зависимостью прогибов  $w_s(t)$  в точке  $x_s = 0.25$  м,  $y_s = 0.15$  м от времени. Соответствующая кривая приведена на рис. 2.

**Решение обратной задачи.** Для восстановления функций  $r_j(t)$  и  $q(t)$  необходимо решить систему из  $J+1$  интегральных уравнений Вольтерра. Упомянутая система будет включать  $J$  уравнений контакта пластины с подпирающей ее балкой и одно уравнение, описывающее прогиб пластины в точке с координатами  $x_s = 0.25$  м,  $y_s = 0.15$  м. Эта система имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^t q(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{qk,n} \left[ \Omega_{1k,n}^p \cdot \sin \omega_{1k,n}(t-\tau) + \Omega_{2k,n}^p \cdot \sin \omega_{2k,n}(t-\tau) \right] \sin \frac{k\pi x_j}{l_p} \sin \frac{n\pi y_j}{m_p} d\tau - \\ & - \sum_{j=1}^J \int_0^t r_j(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{C_{jk}}{\rho_b F_b} \left[ \Omega_{1k}^b \cdot \sin \varphi_{1k}(t-\tau) + \Omega_{2k}^b \cdot \sin \varphi_{2k}(t-\tau) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_{jk,n} \left[ \Omega_{1k,n}^p \cdot \sin \omega_{1k,n}(t-\tau) + \Omega_{2k,n}^p \cdot \sin \omega_{2k,n}(t-\tau) \right] \sin \frac{n\pi y_j}{m_p} \right] \sin \frac{k\pi x_j}{l_p} d\tau = 0; \quad (16) \\ & \int_0^t q(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{qk,n} \left[ \Omega_{1k,n}^p \cdot \sin \omega_{1k,n}(t-\tau) + \Omega_{2k,n}^p \cdot \sin \omega_{2k,n}(t-\tau) \right] \sin \frac{k\pi x_s}{l_p} \sin \frac{n\pi y_s}{m_p} d\tau - \\ & - \sum_{j=1}^J \int_0^t r_j(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{jk,n} \left[ \Omega_{1k,n}^p \cdot \sin \omega_{1k,n}(t-\tau) + \Omega_{2k,n}^p \cdot \sin \omega_{2k,n}(t-\tau) \right] \sin \frac{n\pi y_s}{m_p} \sin \frac{k\pi x_s}{l_p} d\tau = \\ & = w_s(t). \end{aligned} \right.$$

Приводя систему интегральных уравнений к системе алгебраических путем замены интегралов суммами, представим упомянутые зависимости в матричной форме [8]:

$$\begin{cases} \mathbf{A}r_{1,1} \cdot r_1 + \mathbf{A}r_{1,2} \cdot r_2 + \dots + \mathbf{A}r_{1,J-1} \cdot r_{J-1} + \mathbf{A}r_{1,J} \cdot r_J + \mathbf{A}p_1 \cdot P = 0; \\ \vdots \\ \mathbf{A}r_{J,1} \cdot r_1 + \mathbf{A}r_{J,2} \cdot r_2 + \dots + \mathbf{A}r_{J,J-1} \cdot r_{J-1} + \mathbf{A}r_{J,J} \cdot r_J + \mathbf{A}p_J \cdot P = 0; \\ \mathbf{A}r_{J+1,1} \cdot r_1 + \mathbf{A}r_{J+1,2} \cdot r_2 + \dots + \mathbf{A}r_{J+1,J-1} \cdot r_{J-1} + \mathbf{A}r_{J+1,J} \cdot r_J + \mathbf{A}p_{J+1} \cdot P = w_s(t). \end{cases} \quad (17)$$

Решение системы уравнений (17) можно произвести, например, с применением обобщенного метода Гаусса.

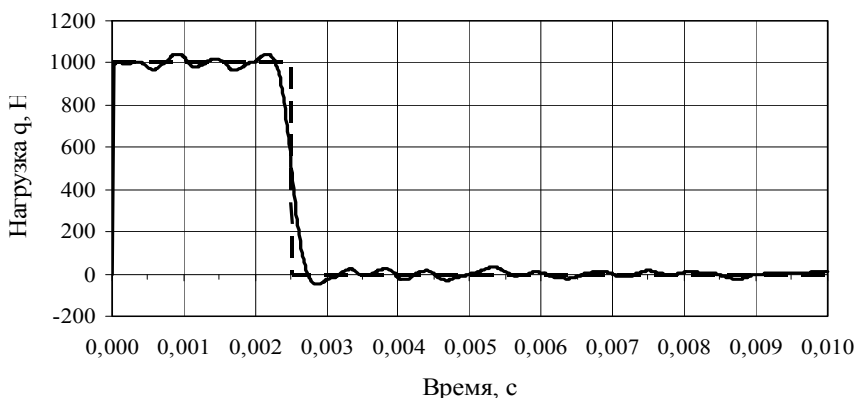


Рис. 3 – Графики приложенной и восстановленной нагрузок  $q(t)$ .

На рис. 3 представлены графики восстановленной (сплошная кривая) и приложенной (пунктирная кривая) нагрузок. Здесь под приложенной нагрузкой понимается известная нагрузка, необходимая для получения прогибов  $w_s(t)$  при решении прямой задачи. Для получения решения использовался метод регуляризации А.Н. Тихонова. Коэффициент регуляризации при этом составил  $\alpha = 10^{-24}$ .

Опираясь на информацию, представленную на рис. 3, можно сделать вывод о том, что используемый подход по восстановлению возмущающего воздействия может быть эффективно использован для идентификации динамических внезапно приложенных ступенчатых нагрузок. Не сложно показать, что идентификации могут подлежать нагрузки другого типа.

**Выводы.** Исследованы нестационарные колебания пластины, подкрепленной линейным ребром жесткости. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами исследований других авторов, а также полученными с использованием МКЭ. Достоверность решения обратной задачи подтверждается путем сопоставления с исходными данными прямой задачи.

Следует отметить, что используемый подход может быть применен к исследованию поперечных колебаний пластин, подкрепленных системой перекрещивающихся ребер, а также систем, в которых, в отличие от приведен-

ной постановки задачі, пластина являється підпираючим елементом (возмушаюча нагрузка воздействует на балку).

**Список літератури:** 1. Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В., Шупіков О.М., Бузько Я.П. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі // Вісник Харківського національного університету «ХПІ». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. – 2002. – № 19. – С. 68 – 72. 2. Янютин Е.Г., Воропай Н.И. Исследование динамического деформирования пластины на основе одного волнового уравнения // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – X., 2011. – №13. – С. 194 – 200. 3. Huang M. Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions / M. Huang, X.Q. Ma, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – V. 322. – P. 227 – 240. 4. Shahed Jafarpour Hamedani. Vibration analysis of stiff ened plates using Finite Element Method / Shahed Jafarpour Hamedani, Mohammad Reza Khedmati, Saeed Azkat // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2012. – V. 9. – P. 1 – 20. 5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. 6. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1967. – 444 с. 8. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с. 9. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC.visualNastran for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 448 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Smetankina, N. V., Ugrimov S.V., Shupikov A.N., Buz'ko Ja.P. "Dynamichnyj vidguk plastyn, jaki lezhat' na pruzhnyj osnovi." *Visnyk Kharkivs'kogo nacional'nogo universitetu «KhPI»*. Tem. vyp.: *Technologi'i v mashinobuduvanni*. No. 19. 2002. 68–72. Print. 2. Janjutin, Je. G., and N. I. Voropaj. "Issledovanie dinamicheskogo deformirovanija plastiny na osnove odnogo volnovogo uravnenija." *Vistnyk NTU «KhPI»*. Tem. vyp.: *Matematychnе modeluvannja v tehnicі ta tehnologijah*. No. 13. 2011. 194–200. Print. 3. Huang, M., et al. "Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions." *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 322. 2009. 227–240. 4. Hamedani, Shahed Jafarpour, Mohammad Reza Khedmati and Saeed Azkat. "Vibration analysis of stiff ened plates using Finite Element Method." *Latin American Journal of Solids and Structures*. Vol. 9. 2012. 1–20. Print. 5. Filippov, A. P. *Kolebanija deformirujemyh sistem*. Moscow: Mashinostroenie, 1970. Print. 6. Ditkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Vyshaja shkola, 1966. Print. 7. Timoshenko, S. P. *Kolebanija v inzhenernom dele*. Moscow: Fizmatgiz, 1967. Print. 8. Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija, metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie*. Kyiv: Naukova dumka, 1986. Print. 9. Shimkovich, D. G. *Raschjot konstrukcij v MSC.visualNastran for Windows*. Moscow: DMK Press, 2004. Print.

*Поступила (received) 27.02.2015*

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

**С.В. ЯРОЩАК**, канд. техн. наук, ст. викл., РДГУ, Рівне

## **ОДИН МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ У НЕОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВО ВИКРИВЛЕНИХ НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ**

Розроблено метод розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , відносно якої отримано усереднені по координаті  $\zeta$  рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

**Ключові слова:** багатозадачна фільтрація, квазіконформне відображення, числовий метод.

© С. В. Ярошак, 2015

**Вступ.** У роботах [1 – 3] запропоновано методику розв’язання задач нестационарної багатофазної фільтрації, що базується на ідеях *методу квазіконформного* відображення та поетапної фіксації характеристик середовища та процесу у випадку, коли фільтрація є плоскопаралельною (пласти є досить тонкими і мають постійну товщину). Проте у природних умовах досить часто доводиться мати справу з просторово викривленими пластами змінної потужності, де окрім складності, пов’язаної з проектуванням розстановки свердловин та дослідженням їх взаємодії, виникає також необхідність врахування перетоків між пропластками і величин відбору з кожного із них.

У цій роботі розширено розроблену методику дослідження фільтраційних процесів та побудовано підхід до розв’язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення [1 – 3]. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , відносно якої отримано усереднені по координаті  $\zeta$  рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

**Загальна постановка задачі.** Розглядається задача математичного моделювання процесу фільтрації (витіснення нафти підшвенною водою), породженого перепадом тиску  $\Delta P = P_* - P^*$  на досконалих по ступеню і характеру розкриття пласта  $G_r = A_* B_* C_* D_* A^* B^* C^* D^*$  експлуатаційних свердловинах  $L_i^*$  ( $i = \overline{1, n^*}$ ) та контурі живлення  $L_* = A_* A^* B_* B^* \cup B_* B^* C_* C^* \cup C_* C^* D_* D^* \cup D_* D^* A_* A^*$  (рис. 1, а). Відповідні закон руху та рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації  $\varphi = \varphi(x, y, z) = -p(x, y, z) + \tilde{p}$  ( $p(x, y, z)$  – тиск в точці  $(x, y, z)$ ,  $\tilde{p}$  – деяке характерне його значення), згідно з [4] представимо у вигляді:

$$\vec{v} = \frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{k}(x, y, z)}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

де  $\tilde{k}$  – коефіцієнт проникності ґрунту;  $\vec{v}$ ,  $\mu$  – вектор швидкості та коефіцієнт в’язкості відповідно.

При розв’язанні рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов виникають певні труднощі, в першу чергу, пов’язані з тривимірністю задачі та складністю геометрії пласта, одним із методів подолання яких є заміна дійсної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху. До таких схем варто віднести запропоновану в роботах [5 – 8] схему апроксимації реальної тривимірної фільтраційної течії течією по стаціонарних поверхнях струму, яка ґрунтується

на ідеях переходу до криволінійних (ортогональних) координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , у яких підосва  $A_*B_*C_*D_*$  та кривля  $A^*B^*C^*D^*$  пласта повинні співпадати з координатними поверхнями одного із трьох сімейств, наприклад,  $\zeta = \zeta_1 = const$  і  $\zeta = \zeta_2 = const$ , а закон Дарсі та рівняння нерозривності течії відносно цих координат мають вигляд:

$$\vec{v} = (v_\xi, v_\eta) = \left( \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu H_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{k(\xi, \eta, \zeta)}{\mu H_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right), \quad (1)$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left( \frac{\partial(H_2 H_3 v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_\eta)}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0. \quad (2)$$

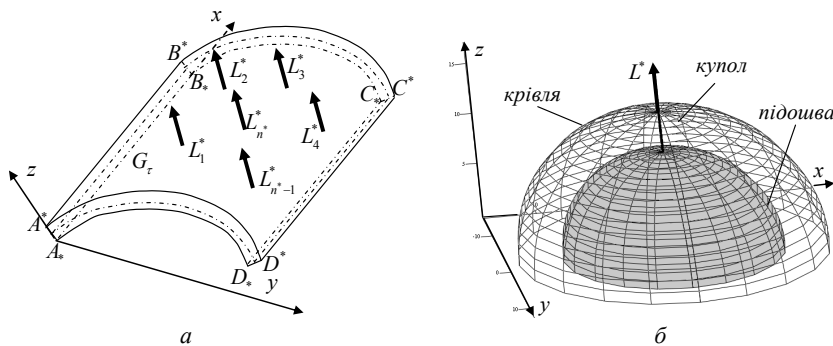


Рис. 1 – Нафтогазові пласти: а –  $G_r$ ; б – сферичний.

Тут  $k(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{k}(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$  – коефіцієнт проникності ґрунту,  $H_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2}$ ,  $H_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2}$ ,  $H_\zeta = \sqrt{x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2}$  – параметри Ламе,  $x = x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $z = z(\xi, \eta, \zeta)$  – задані неперервно-диференційовані функції, що пов'язують фізичні декартові координати з введеними криволінійними  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

Для спрощення викладок основної методики математичного моделювання фільтраційних процесів в просторово викривлених пластах розглядатимемо випадок сферичного пласта, що розробляється експлуатаційною свердловиною  $L^*$ , розташованою в його куполі (рис. 1, б), тоді мають місце наступні співвідношення:

$$H_\eta = R \left( 1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi, \quad H_\zeta = h, \quad H_\xi = R \left( 1 + \frac{\zeta h}{R} \right),$$

$$x(\xi, \eta, \zeta) = R \left( 1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi \cos \eta, \quad y(\xi, \eta, \zeta) = R \left( 1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \sin \xi \sin \eta,$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = R \left( 1 + \frac{\zeta h}{R} \right) \cos \xi, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

де  $R$ ,  $h$  – відповідно радіус підшови та потужність пласта.

Підставляючи (1) в (2) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка при відповідних крайових умовах описує процес фільтрації (витіснення) у сферичному просторово викривленому пласті:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( T(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( P(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad (4)$$

де  $T(\xi, \eta) = \bar{k}(\xi, \eta) \sin \xi$ ,  $P(\xi, \eta) = \sin \xi / \bar{k}(\xi, \eta)$ ,  $\bar{k}(\xi, \eta) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} k(\xi, \eta, \zeta) d\zeta$ ;

$f_*(\xi, \eta) = 0$ ,  $f^*(\xi, \eta) = 0$  – рівняння проєкцій свердловини та контуру живлення на координатну площину  $(\xi, \eta)$  відповідно, що визначають двозв'язну область  $G_z$ .

Введемо функцію усередненої течії  $\psi$ , що задовольняє співвідношення:

$$T(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad P(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (5)$$

при виконанні яких рівняння (3) перетворюється на тотожність. Система (5) визначає деяку функцію  $\omega = \omega(z) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$ , яка при виконанні умов:

$$\varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_-} = 0, \quad \psi|_{L_+} = Q \quad (6)$$

здійснює квазіконформне відображення [1] фізичної області зміни координат  $(\xi, \eta)$   $G_z$  на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\},$$

де  $Q$  – невідома фільтраційна витрата;  $L_-$ ,  $L_+$  – береги умовного розрізу області  $G_z$  вздовж деякої лінії  $\eta = const$ .

Відповідну нелінійну обернену задачу до (5) – (6) на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  отримаємо у вигляді:

$$T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad P(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (7)$$

$$\begin{cases} f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, \\ f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ \xi(\varphi, 0) = \xi(\varphi, Q), \\ \eta(\varphi, 0) = \eta(\varphi, Q), & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (8)$$

зокрема, як наслідок (7), маємо:



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( P(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( P^{-1}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T^{-1}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$P(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + T(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \partial G_\omega. \quad (10)$$

**Різницевий аналог задачі.** Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області  $G_\omega$  рівномірну ортогональну сітку

$$G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, j = \overline{0, m}\},$$

де  $n, m \in \mathbb{N}$  – параметри розбиття цієї області.

Рівняння (9) у внутрішності сіткової області  $G_\omega$ , крайові умови (8) з додатковими умовами для межових та приміжових вузлів (умовами ортогональності) (10) апроксимуємо так:

$$\begin{aligned} \eta_{i,j} &= \frac{\gamma^2 (T_{i,j+0.5} \eta_{i,j+1} + T_{i,j-0.5} \eta_{i,j-1}) + P_{i+0.5,j} \eta_{i+1,j} + P_{i-0.5,j} \eta_{i-1,j}}{\gamma^2 (T_{i,j+0.5} + T_{i,j-0.5}) + P_{i+0.5,j} + P_{i-0.5,j}}, \quad j = \overline{1, m-1}; \\ \xi_{i,j} &= \frac{\gamma^2 (P_{i,j+0.5}^{-1} \xi_{i,j+1} + P_{i,j-0.5}^{-1} \xi_{i,j-1}) + T_{i+0.5,j}^{-1} \xi_{i+1,j} + T_{i-0.5,j}^{-1} \xi_{i-1,j}}{\gamma^2 (P_{i,j+0.5}^{-1} + P_{i,j-0.5}^{-1}) + T_{i+0.5,j}^{-1} + T_{i-0.5,j}^{-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$f_*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, f^*(\xi_{n,j}, \eta_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m},$$

$$\xi_{i,0} = \xi_{i,m}, \eta_{i,0} = \eta_{i,m}, i = \overline{0, n}; \quad (12)$$

$$T_{n,j}(\eta_{n,j} - \eta_{n-1,j})(\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) + P_{n,j}(\xi_{n,j} - \xi_{n-1,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) = 0;$$

$$T_{0,j}(\eta_{1,j} - \eta_{0,j})(\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) + P_{0,j}(\xi_{1,j} - \xi_{0,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$T_{i,m}(\eta_{i+1,m} - \eta_{i-1,m})(\eta_{i,m} - \eta_{i,m-1}) + P_{i,m}(\xi_{i+1,m} - \xi_{i-1,m})(\xi_{i,m} - \xi_{i,m-1}) = 0;$$

$$T_{i,0}(\eta_{i+1,0} - \eta_{i-1,0})(\eta_{i,1} - \eta_{i,0}) + P_{i,0}(\xi_{i+1,0} - \xi_{i-1,0})(\xi_{i,1} - \xi_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (13)$$

де  $T_{i,j \pm 0.5} = (T_{i,j \pm 1} + T_{i,j})/2$ ,  $P_{i,j \pm 0.5} = (P_{i,j \pm 1} + P_{i,j})/2$ ,  $P_{i \pm 0.5,j} = (P_{i \pm 1,j} + P_{i,j})/2$ ,  $T_{i \pm 0.5,j} = (T_{i \pm 1,j} + T_{i,j})/2$ ,  $T_{i,j} = \bar{k}_{i,j} \sin \xi_{i,j}$ ,  $P_{i,j} = \sin \xi_{i,j} / \bar{k}_{i,j}$ ,  $\bar{k}_{i,j} = \bar{k}(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$ ,  $\eta_{i,j} = \eta(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $\xi_{i,j} = \xi(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $\gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi$  – квазіконформний інваріант.

Невідому витрату  $Q$  шукаємо за формулою  $Q = m\Delta\varphi / \gamma$ , величину  $\gamma$  одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1, m-1} (\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}) / (\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}), \quad (14)$$

де

$$\alpha_{i,j} = \sqrt{(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j})^2 + (\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{T_{i,j}^2 (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j})^2 + P_{i,j}^2 (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})^2}.$$

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (7) – (10) різницевою задачею в загальному випадку побудуємо шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma$ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності, а саме: задавши геометричну конфігурацію сферичного пласта та ввівши криволінійні координати (за наведеними вище формулами) переходимо до області зміни координат  $(\xi, \eta) \in G_z$ . Після цього задаємо кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  (параметри  $n$  та  $m$ ), параметри необхідної точності роботи алгоритму  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (12), та наближення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (14), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту  $\gamma^{(0)}$  та невідому величину витрати  $Q^{(0)} = (\varphi^* - \varphi_*)m / (n\gamma^{(0)})$ . Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів  $(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$  за формулами (11) (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх межових та примежових), використовуючи *різниці аналогії умов типу Коші-Рімана* (13). Використовуючи значення квазіконформного інваріанту (14), знаходимо нове наближення величини  $Q$ . Якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за  $\varepsilon_1$ , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(\xi_{i,j}^{(k)} - \xi_{i,j}^{(k-1)})^2 + (\eta_{i,j}^{(k)} - \eta_{i,j}^{(k-1)})^2}$$

– зміщення вузлів на границі за проведену  $k$ -ту загальну ітерацію. Якщо  $S > \varepsilon_2$ , то переходимо до уточнення вузлів. Значення швидкості у вузлах гідродинамічної сітки знаходимо аналогічно [1 – 7].

**Висновки.** Розроблено метод розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення. Варто відзначити, що розроблена методика дозволяє встановити час прориву підшовених вод до експлуатаційних свердловин та час повного обводнення пласта.

У перспективі дослідження – узагальнення запропонованої методології на випадки просторових пластів, які розробляються серією експлуатаційних та нагнітальних свердловин, розташованих певним регулярним чином, за

умов існування в присвердловинних ділянках тріщин гідророзриву.

**Список літератури:** 1. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу: Монографія / А. Я. Бомба, С.С. Кауштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с. 2. Бомба А.Я., Ярошак С.В. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34 – 40. 3. Bomba A.Ya., Yaroshchak S.V. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 184, No. 1, July, 2012 pp. 56 – 69. 4. Zhangxin C., Guanren H., Yuanle M. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering). Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp. 5. Ярошак С.В. Математичне моделювання двофазної фільтрації в просторово викривлених нафтогазових пластах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17) – Рівне : РДГУ, – 2011. – С. 241 – 248. 6. Бомба А.Я., Теребус А.В., Ярошак С.В. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в просторово викривлених нафтогазових пластах // Вісник Кременчуцького національного університету. – Кременчук. – 2011. – Вип. 5 (70). – С. 23 – 27. 7. Бомба А.Я., Теребус А.В., Ярошак С.В. Комплексний підхід до моделювання процесів багатофазної фільтрації під час проектування розробки нафтогазових родовищ // Нафтова і газова промисловість. – 2012. – № 1. – С. 48 – 52. 8. Толпаев В.А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / В.А. Толпаев. – Ставрополь. – 2004. – 38 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Bomba, A. Ja., et al. *Metody kompleksnogo analizu: Monografija*. Rivne: NUVGP, 2013. Print. 2. Bomba, A. Ja., and S. V. Jaroshhak. "Metod kvazikonformnyh vidobrazhen' rozv'jazannja model'nyh zadach dvofaznoi' fil'tracii'." *Dopovidi NAN Ukrainy*. No. 10. 2010. 34–40. Print. 3. Bomba, A. Ya., and S. V. Yaroshchak. "Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions." *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 184. No. 1. 2012. 56–69. Print. 4. Zhangxin, C., H. Guanren and M. Yuanle. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering)*. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic. 2006. Print. 5. Jaroshhak, S. V. "Matematyчне modeljuvannja dvofaznoi' fil'tracii' v prostorovo vykryvlenyh naftogazovyh plastah." *Volyns'kyj matematychnyj visnyk. Ser.: Prykladna matematyka*. Vol. 8 (17). Rivne: RDGU, 2011. 241–248. Print. 6. Bomba, A. Ja., A. V. Terebus and S. V. Jaroshhak. "Matematyчне modeljuvannja nelinejnyh procesiv vytisnennja v prostorovo vykryvlenyh naftogazovyh plastah." *Visnyk Kremenčuc'kogo nacional'nogo universytetu*. Vol. 5(70). Kremenčuk. 2011. 23–27. Print. 7. Bomba, A. Ja., A. V. Terebus and S. V. Jaroshhak. "Kompleksnyj pidhid do modeljuvannja procesiv bagatofaznoi' fil'tracii' pid chas proektuvannja rozrobky naftogazovyh rodovyssh." *Naftova i gazova promyslovist'*. No. 1. 2012. 48–52. Print. 8. Tolpaev, V. A. *Matematicheskie modeli dvumernoj fil'tracii v anizotropnyh, neodnorodnyh i mnogoslojnyh sredah. Avtoref. dis. na soiskanie uchenoj stepeni d-ra fiz.-mat. nauk*. Stavropol', 2004. Print.

Надійшла (received) 17.11.2014

## З М І С Т

|                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Андренко П. М., Дмитрієнко О. В., Лебедєв А. Ю.</b> Багатокритеріальна оптимізація параметрів лабіринтно-гвинтового насосу .....                                          | 3   |
| <b>Бєляньська О. Р., Волошин М. Д., Кармазіна В. В.</b> Моделювання впливу попереднього диспергування в технології одержання комплексного добрива .....                      | 12  |
| <b>Гришакин В. Т.</b> Идентификация импульсной нагрузки, воздействующей на вязко-упругую балку .....                                                                         | 22  |
| <b>Кондратенко А. Н.</b> Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твёрдых частиц дизеля. Часть 3: компоновочный коэффициент .....                         | 29  |
| <b>Кононенко А. П., Овсянников В. П., Оверко М. В.</b> Выбор основных параметров вихревого диода для предотвращения гидравлических ударов в вертикальных трубопроводах ..... | 40  |
| <b>Криштон И. В., Герман В. Ф., Гусак А. Г., Салтанова Л. М.</b> Оценка влияния поперечных вихрей на процессы передачи энергии в свободно-вихревом насосе .....              | 49  |
| <b>Курпа Л. В., Шматко Т. В.</b> Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій .....                       | 56  |
| <b>Литвин О. М., Першина Ю. І., Пасічник В. О.</b> Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної .....                                    | 67  |
| <b>Мельник О. С., Трохименко Н. В., Собченко А. О.</b> Нанопристрої з програмованими характеристиками .....                                                                  | 77  |
| <b>Назаренко О. М., Ніколасенко О. М.</b> Параметрична ідентифікація моделі Солоу макроекономічної системи .....                                                             | 82  |
| <b>Назаров О. І., Клец Д. М., Назаров І. О.</b> Математична модель зношування дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів в умовах експлуатації .....                | 91  |
| <b>Панамарьова О. Б.</b> Проектування диспергуючого пристрою для гідроагрегатів живлення гідросистем .....                                                                   | 102 |
| <b>Полянская Т. С.</b> Система интегральных уравнений первого рода на отрезке $[0, 2\pi]$ с логарифмическим ядром .....                                                      | 109 |

|                                                                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Ребров А. Ю.</b> Идентификация сельскохозяйственных тракторных шин численным методом .....                                                                                                          | 114 |
| <b>Редчиц В. В., Кальченко Б. И., Головина Е. В.</b> Математическая модель определения параметров криволинейного движения двухзвенного автопоезда при манёвре «поворот» на стадии проектирования ..... | 121 |
| <b>Рябенков И. А.</b> Условия повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей при шлифовании с фиксированным радиальным усилием .....                                                        | 127 |
| <b>Рябов Е. С.</b> Определение параметров накопителя энергии для электроподвижного состава с асинхронным тяговым приводом в режиме ограничения тока тяговой сети .....                                 | 132 |
| <b>Сахно В. П., Поляков В. М., Тімков О. М., Іванов О. С.</b> Методика визначення характеристик агрегатів ГСУ та режимів їх роботи для вантажних автомобілів в залежності від умов експлуатації .....  | 137 |
| <b>Семко А. Н., Ягудина Н. И.</b> Особенности пульсирующих струй жидкости высокой скорости .....                                                                                                       | 147 |
| <b>Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С.</b> Уточнение метода инвариантов для расчёта динамических параметров газа в трубопроводах пневмосистемы запуска ракетного двигателя .....           | 156 |
| <b>Шуклинов С. Н., Залогин М. Ю.</b> Математическое описание динамических процессов гидравлического механизма опрокидывания кабины грузового автомобиля .....                                          | 182 |
| <b>Янютин Е. Г., Егоров П. А.</b> Нестационарные колебания шарнирно-опёртой пластины, подкреплённой линейными рёбрами жёсткости (прямая и обратная задачи) .....                                       | 191 |
| <b>Ярошак С. В.</b> Один метод комплексного аналізу розв'язування задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах ....                                                     | 200 |
| <b>Реферати</b> .....                                                                                                                                                                                  | 209 |
| <b>Рефераты</b> .....                                                                                                                                                                                  | 215 |
| <b>Abstracts</b> .....                                                                                                                                                                                 | 222 |

## РЕФЕРАТИ

УДК 66.023

**Багатокритеріальна оптимізація параметрів лабіринтно-гвинтового насосу / П. М. Андренко, О. В. Дмитрієнко, А. Ю. Лебедєв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 3 – 12. Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2222-0631.**

За результатами аналізу літературних джерел обґрунтовано вибір методу оптимізації лабіринтно-гвинтового насоса. Наведено методику та результати багатокритеріальної оптимізації його конструктивних та робочих параметрів. Проведено аналіз впливу форми робочих органів та газовмісту робочої рідини на основні характеристики лабіринтно-гвинтового насоса виражені у безрозмірних значеннях. Отримані дані дозволяють на етапі проектування такого насоса визначити його конструктивні параметри які забезпечать раціональні значення потужності та максимальний ККД.

**Ключові слова:** лабіринтно-гвинтовий насос, робочі органи, гвинтова канавка, багатокритеріальна оптимізація, критерії якості.

УДК 661.152.3

**Моделювання впливу попереднього диспергування в технології одержання комплексного добрива / О. Р. Беляєвська, М. Д. Волошин, В. В. Кармазіна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 12 – 21. Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2222-0631.**

Наведено математичний опис процесу попереднього диспергування і відстоювання складового компоненту комплексного добрива – активного мулу. Математичний опис дозволяє спрогнозувати, наскільки зменшиться залишковий об'єм активного мулу, та враховує температуру розчину, початкову вологість мулу, тривалість диспергування та частоту обертання ротору диспергатора. Розраховані параметри роторного диспергатора, що дозволять підібрати диспергатор для застосування у промислових умовах. Достовірність отриманих статистичних залежностей та параметрів оцінена за величиною відносної похибки розрахунків. Встановлено, що в результаті диспергування активного мулу руйнується його гідратна оболонка, колоїдно зв'язана вода вивільнюється, процес відстоювання інтенсифікується. Визначено, що при підтримці критерію Рейнольдса  $4,49 \cdot 10^4$ , частоті коливання рідини  $533 \text{ c}^{-1}$ , тривалості диспергування 4...6 хвилин об'єм активного мулу зменшується з 1000 до  $320 \text{ мл/дм}^3$ . Запропоновано принципову технологічну схему одержання комплексного добрива на основі техногенних відходів, перевагою якої є підвищення корисного об'єму біореактору за рахунок підвищення концентрації відстоюного диспергованого активного мулу.

**Ключові слова:** диспергування, активний мул, техногенні відходи, комплексне добриво.

УДК 534.1: 539.3

**Ідентифікація імпульсного навантаження, що діє на в'язко-пружну балку / В. Т. Гришакін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 22 – 29. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Робота пропонує рішення задачі ідентифікації положення і амплітудного значення імпульсного зосередженого навантаження, що діє на шарнірно закріплену балку. Розв'язок побудований як на моделі балки Кірхгофа, так і на моделі Тимошенко, з урахуванням дисипації енергії коливань на основі співвідношень Фойгта. Процедура ідентифікації передбачає мінімізацію деякої цільової функції, що дозволяє на першому етапі визначити наближене положення точки прикладання навантаження, а на другому - обчислити її наближене амплітудне значення. При проведенні чисельного експерименту вихідні дані були взяті з результатів моделювання методом кінцевих елементів коливань балки, обумовлених імпульсним навантаженням. Показано, що використання моделі Тимошенко забезпечує більш близький до істинного значення результат ідентифікації з прийнятною для інженерної практики точністю.

**Ключові слова:** ідентифікація, зосереджене навантаження, дисипація, модель Фойгта, мінімізація.

**Математична модель гідравлічного опору фільтра твердих частинок дизеля. Частина 3: компоновальний коефіцієнт / О. М. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 29 – 40. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведено та описано математичну модель гідравлічного опору ФТЧ у реальних умовах експлуатації. Модель побудовано на основі витратної характеристики одного модуля ФТЧ, експериментально отриманій за постійної температури текучого середовища, і даних стендових випробувань автотракторного дизеля 2410,5/12, що обладнаний повнорозмірним ФТЧ. Модель дозволяє врахувати ряд факторів, що характеризують умови експлуатації ФТЧ у складі випускної системи цього дизеля. Врахування цих факторів проводиться шляхом введення відповідних коефіцієнтів. У даній частині роботи описано фізичний зміст та оцінено значення компоновального коефіцієнту моделі, що дозволяє врахувати розміщення ФТЧ вздовж випускного тракту дизеля, що впливає на максимальну температуру відпрацьованих газів на вході у ФТЧ.

**Ключові слова:** дизель, фільтр твердих частинок, гідравлічний опір, математична модель.

**Вибір основних параметрів вихрового діода для запобігання гідравлічних ударів у вертикальних трубопроводах / А. П. Кононенко, В. П. Овсянников, М. В. Оверко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 40 – 49. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Найбільш часто потужні вертикальні трубопроводи застосовуються на шахтних водовідливних установках. Небезпечний гідравлічний удар виникає в них при раптовому відключенні насоса. У цих умовах засобом захисту від небезпечних коливань тиску може бути гідравлічний діод, встановлений, наприклад, в середині трубопроводу. Найбільш прийнятним типом діода обраний вихровий струменевий діод. Трудністю при моделюванні перехідного процесу у вертикальному трубопроводі з вихровим діодом є його істотна інерційність. Задача була вирішена за допомогою локальної системи координат, яка вводиться в програму розрахунку на час існування зворотного струму рідини. Використовуючи розроблену модель, можна визначити розміри вихрового діода і розрахувати енергетичні втрати, які можуть виникнути при використанні даної схеми захисту.

**Ключові слова:** водовідливна установка, захист, трубопровід високого тиску, гідравлічний удар, гідравлічний діод.

**Оцінка впливу поперечних вихорів на процес передачі енергії в вільновихровому насосі / І. В. Криштоп, В. Ф. Герман, О. Г. Гусак, Л. М. Салтанова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 49 – 56. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

У статті розглянуто вплив поперечних вихорів на процес передачі енергії рідини в вільновихровому насосі. Представлені напірні та енергетичні характеристики цих насосів при різних способах заокруглення торців лопатей колеса, отримані експериментальним шляхом. Наведені результати чисельного дослідження течії в міжлопатевому каналі, які дозволяють уточнити картину течії рідини в проточній частині насоса.

**Ключові слова:** вільновихровий насос, поперечний вихор, лопать, міжлопатевий канал, чисельний експеримент.

**Аналіз геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок за допомогою теорії R-функцій / Л. В. Курпа, Т. В. Шматко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 56 – 66. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.**

Для дослідження геометрично-нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок зі складною геометричною формою пропонується метод, що суттєво базується на використанні теорії R-функцій. Математична постановка задачі виконана в рамках уточненої теорії першого порядку, яка враховує деформації зсуву. Зведення вихідної нелінійної системи ди-

ференціальних рівнянь з частинними похідними до нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь виконується в декілька етапів. Запропонований алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL, апробовано на тестових задачах та проілюстровано на прикладах оболонок зі складною формою плану.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали, геометрично-нелінійні коливання, теорія  $R$  – функцій, пологі оболонки зі складною формою плану.

УДК 519.6

**Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної / О. М. Литвин, Ю.І. Першина, В.О. Пасічник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 67 – 76. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розроблено та досліджено метод знаходження точок розриву та  $\varepsilon$  – розриву першого роду лінійної функції однієї змінної, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним лінійним сплайном. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття  $\varepsilon$  – неперервності функції однієї змінної. На його основі розроблено модифікований алгоритм виявлення розривів першого роду нелінійної функції однієї змінної, використовуючи розривний апроксимаційний лінійний сплайн. Розглянуто приклад, який підтверджує ефективність запропонованого методу. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

**Ключові слова:** розривна лінійна інтерполяція, розривна лінійна апроксимація,  $\varepsilon$  – розрив.

УДК 621.382:62-1/-9(045)

**Наносхеми з програмованими характеристиками / О. С. Мельник, Н. В. Трохименко, А. О. Собченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 77 – 81. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.**

Реалізовано автоматизоване проектування наноелектронних схем з програмованими характеристиками на квантових мажоритарних компонентах. Запропоновані методи побудови арифметико-логічних обчислювальних пристроїв комбінаційного та послідовностного типів, які реалізують практично повну систему логічних функцій як в мажоритарному, так і в булевому базисах.

**Ключові слова:** квантові автомати, мажоритарний елемент, наносхеми з програмованими характеристиками (НСПХ).

УДК 519.71

**Параметрична ідентифікація моделі Солоу макроекономічної системи / О. М. Назаренко, О.М. Ніколасенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 82 – 91. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглядається проблема специфікації та ідентифікації моделі Солоу макроекономічної системи, в якій інвестиції економіки в цілому зв'язані лінійним законом з випусками секторів. У ролі фазових координат виступають основні фонди, а керуваннями є випуски секторів. Траєкторії руху фазових координат розкладаються на трендову та періодичну складові. Поділ макроекономічної системи на сектори проводиться так, щоб властиві їм гармонічні хвилі налаштовувалися на частоти, характерні для даної системи. Оскільки траєкторії випусків секторів невідомі, то диференціальне рівняння руху задовольняється в цілочисельних точках періоду ідентифікації. Невідомі параметри моделі оцінюються методами економетрики, причому замість основних фондів використовуються заміщуючі змінні – прирости основних фондів, для яких відома статистична інформація. Апробація моделі проводиться на статистичних даних реальної макроекономічної динаміки. Економетричне моделювання дозволяє виділити значущі гармоніки, характерні для даної системи, і відновити невідомі статистичні дані по основним фондам та інвестиціям. Одержані траєкторії руху мають високі імітаційні та прогностні властивості. Аналіз гармонічних хвиль, які присутні в розкладі модельних кривих, дозволяє встановлювати причини підйомів і спадів в економічній країні та прогнозувати подальший економічний розвиток.

**Ключові слова:** специфікація, ідентифікація, циклічний процес, імітація, прогнозування.



**Математична модель зношування дискових гальмівних механізмів легкових автомобілів в умовах експлуатації / О.І. Назаров, Д.М. Клец, І.О. Назаров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 91 – 101. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано математичну модель зношування поверхонь тертя дискових гальмівних механізмів легкового автомобіля під час екстрених гальмувань в експлуатаційних умовах. Для конкретних легкових автомобілів розглянуто роботу створеного алгоритму, наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту. Також розглянуто перспективи подальших досліджень для підвищення ресурсу дискових гальмівних механізмів.

**Ключові слова:** легковий автомобіль, дисковий гальмівний механізм, експлуатація.

**Проектування диспергуючого пристрою для гідроагрегатів живлення гідросистем / О. Б. Панамарьова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 102 – 108. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглядається диспергуючий пристрій, застосування якого в гідроагрегатах живлення для гідросистем дозволяє підвищити ступінь очищення робочих рідин. Запропонована математична модель робочого процесу диспергуючого пристрою, на підставі якої проведені дослідження впливу його робочих параметрів на конструктивні. Результати моделювання профілю проточної частини диспергуючого пристрою дозволяють сформулювати рекомендації по вибору його раціональних параметрів, а наведена математична модель може бути застосована при моделюванні конструктивно подібних пристроїв.

**Ключові слова:** диспергуючий пристрій, робоча рідина, математична модель, робочий процес, гідроагрегат.

**Система інтегральних рівнянь першого роду на відрізку  $[0, 2\pi]$  з логарифмічним ядром / Т. С. Полянська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 109 – 114. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто систему інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічним ядром, до якої наводить ряд задач дифракції хвиль. Проведена дискретизація цієї системи на основі методу дискретних особливостей. Введені пари гільбертовому просторі і оператори, у них, відповідні задачі і дискретної задачі. З їх допомогою доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дано строге обґрунтування оцінки швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення системи інтегральних рівнянь.

**Ключові слова:** інтегральні рівняння, логарифмічне ядро, метод дискретних особливостей.

**Ідентифікація сільськогосподарських тракторних шин чисельним методом / О. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 114 – 121. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано метод ідентифікації сучасних тракторних радіальних шин з використанням математичної моделі, побудованої на універсальній характеристиці шин. Метод дозволяє ідентифікувати шини за нормою шаруватості і контурною площею плями контакту та використовувати математичну модель для теоретичних досліджень ефективності вітчизняних і закордонних сільськогосподарських тракторів, обладнаних сучасними радіальними шинами, у тому числі категорій IF та VF. Для адекватного моделювання радіальної деформації і площі плями контакту шин категорій IF та VF, які характеризуються високою еластичністю, запропоновано скоректувати математичну модель на основі універсальної характеристики шин.

**Ключові слова:** радіальні тракторні шини, універсальна характеристика шини, норма шаруватості, контурна площа плями контакту.

УДК 629.113

**Математична модель визначення параметрів криволінійного руху дволанкового автопоїзда при маневрі «поворот» на стадії проектування / В. В. Редниць, Б. І. Кальченко, О. В. Головіна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 121 – 126. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.**

На базі доопрацьованій математичної моделі криволінійного руху одиночного автомобіля запропоновано новий метод розрахунку параметрів криволінійного руху дволанкового автопоїзда при маневрі «поворот» з урахуванням часу запізнювання реакції автомобіля на керуючий вплив, але без урахування кутів відведення. Запропонований спосіб побудови траєкторії руху двухвзвального автопоїзда дозволяє в першому наближенні проводити імітацію маневру «поворот  $R_n = 35$  м» на жорстких колесах і давати попередню оцінку керованості і стійкості транспортно-го засобу на стадії проектування. Метод надалі планується використовувати при дослідженні динаміки маневру «поворот».

**Ключові слова:** кривизна траєкторії, кут складання, час запізнювання, вхід в поворот, керованість, стійкість.

УДК 621.923

**Умови підвищення точності та якості оброблюваних поверхонь при шліфуванні з фіксованим радіальним зусиллям / І. О. Рябенков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 127 – 132. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розроблено математичну модель процесу шліфування з фіксованим радіальним зусиллям і на її основі визначені умови підвищення точності та якості оброблюваних поверхонь. Теоретично встановлено, що на відміну від шліфування за жорсткою схемою, при шліфуванні з фіксованим радіальним зусиллям час обробки фактично не впливає на зниження показників точності та якості оброблюваних поверхонь у зв'язку з виключенням тертя зв'язки круга з оброблюваним матеріалом. Це є важливим чинником підвищення ефективності обробки високоточних деталей. При цьому температура різання збільшується не значно порівняно зі шліфуванням за жорсткою схемою.

**Ключові слова:** шліфування, складові сили різання, енергоємність обробки, коефіцієнт тертя, продуктивність обробки, час обробки, температура різання.

УДК 625.282:625.032.07

**Визначення параметрів накопичувача енергії для електрорухомого складу з асинхронним тяговим приводом в режимі обмеження струму тягової мережі / Є. С. Рябов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 132 – 137. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто використання накопичувачів енергії у складі тягового електроприводу електрорухомого складу. Показана доцільність їх використання в режимі обмеження струму тягової мережі при розташуванні накопичувача енергії на рухомому складі. Запропоновано спосіб визначення параметрів накопичувача при роботі в режимі обмеження струму тягової мережі при його використанні в складі асинхронного тягового приводу і отримані аналітичні розрахункові вирази для визначення параметрів накопичувача.

**Ключові слова:** асинхронний тяговий привід, накопичувач енергії, рухомий склад, тягова характеристика.

УДК 629.113+629.331

**Методика визначення характеристик агрегатів ГСУ та режимів їх роботи для вантажних автомобілів в залежності від умов експлуатації / В. П. Сахно, В. М. Поляков, О. М. Тімков, О. С. Іванов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 137 – 147. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розроблена методика, яка дозволяє встановити вплив розподілу потужності між агрегатами гібридної силової установки (ГСУ), алгоритму керування та експлуатаційного маршруту руху на показники тягово-швидкісних властивостей і паливної економічності вантажних автомобілів. В

якості оціночних критеріїв виступають показники тягово-швидкісних властивостей, паливної економічності та витрати електричної енергії автомобілем із ГСУ. Використаний ймовірнісний підхід до вибору раціональної величини потужності ГСУ, її розподілу між електродвигуном (ЕД) і двигуном внутрішнього згоряння (ДВЗ) та вибору режимів їх спільної роботи.

**Ключові слова:** автомобіль, алгоритм, потужність, електродвигун, тягово-швидкісні властивості, паливна економічність, енергія, маршрут руху, швидкість.

УДК 532.5:518.5

**Особливості пульсуючих струменів рідини високої швидкості / О. М. Семко, Н. І. Ягудина** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 147 – 156. Бібліогр.: 21 назва. – ISSN 2222-0631.

У роботі в акустичній постановці розглядалося одномірна задача без урахування руху поршня й витікання струменя. У газодинамічній постановці чисельно вирішувалася одномірна й двомірна задача з урахуванням руху поршня, витікання струменя й кавітації рідини. Проведене порівняння результатів розрахунків для різних моделей руху рідини, зроблені відповідні висновки. Показане, що пульсації швидкості струменя пов'язані із хвилювими процесами в установці.

**Ключові слова:** пульсуючі струмені рідини, рідкі диски, імпульсний генератор струменів, кавітація, чисельне моделювання.

УДК 621.646.42

**Уточнення методу інваріантів для розрахунку динамічних параметрів газу в трубопроводах пневмосистеми запуску ракетного двигуна / С. А. Шевченко, О. Л. Григор'єв, М. С. Степанов** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 156 – 181. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Виконаний аналіз процесів теплообміну газу із стінками у магістралях, що подають газ к турбонасосному агрегату, і у трубопроводах керування клапанами пневмосистеми запуску ракетного двигуна багатократного включення. Показано, що течію газу по витратних магістралях припустимо вважати адиабатичною, а по трубодах керування – ізотермічною. Виконане уточнення методу інваріантів Рімана, що дозволяє врахувати неізоентропійний характер течії в випускній магістралі, а також газодинамічний опір трубопроводів.

**Ключові слова:** газодинамічний розрахунок; континуальні моделі трубопроводів; одномірні течії; фактор газодинамічного опору; пневмосистема запуску.

УДК 629.35.02.001.57

**Математичне описання робочих процесів механізму опрокидування кабіни вантажного автомобіля / С. М. Шуклінов, М. Ю. Залогін** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 182 – 190. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Наведено математичний опис динамічних процесів гідравлічного механізму перекидання кабіни вантажного автомобіля. Математичний опис характеризує динамічні процеси гідравлічного привода механізму перекидання кабіни з гідравлічним циліндром двосторонньої дії і рух центру мас кабіни відносно осі повороту при його перекиданні. Математичний опис гідроприводу включає рівняння руху поршня насоса, рух рідини в трубопроводі, залежності, що визначають зміни тиску рідини у вузлах і рівняння руху штока гідроциліндра. Рівняння руху поршня насоса представлено у вигляді синусоїдального закону в функції часу та лінійної частоти рукоятки. Швидкість переміщення рідини в трубопроводі визначена з рівняння балансу тисків. Узагальнене навантаження, діюче на вихідну ланку гідроциліндра, визначено з диференціального рівняння руху кабіни для випадку лінійної узагальненої координати. Рівняння руху кабіни в узагальнених координатах отримано з рівняння Лагранжа другого роду, що описує рух центру мас кабіни відносно осі повороту для прийнятої плоскої кінематичної схеми механізму перекидання кабіни.

**Ключові слова:** математичний опис, динаміка, механізм перекидання кабіни, робочий процес, податливість, гідравлічний ланцюг, оператор.

УДК 539.3

**Нестационарні коливання шарнірно-обертої пластини, що підкріплена лінійними ребрами жорсткості (пряма та обернена задачі) / Є. Г. Янютин, П. А. Єгоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 191 – 200. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приводиться дослідження нестационарного деформування шарнірно-обертої ізотропної пластини, що підкріплена лінійними ребрами жорсткості. На прикладі механічної системи, яка складається із шарнірно-обертої пластини та підпиральної її балки, побудовано рішення прямої та оберненої задач. Достовірність отриманих результатів досліджується шляхом зіставлення з результатами, отриманими іншими авторами, при граничному переході. Також наводиться зіставлення аналітичного рішення з рішенням, отриманим з використанням методу скінченних елементів. Некоректність поставлених задач (прямої та оберненої) долається з використанням методу регуляризації А.М. Тихонова.

**Ключові слова:** пластина, ребро жорсткості, ряд Фур'є, перетворення Лапласа, умова контакту, рівняння Вольтерра, метод регуляризації.

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

**Один метод комплексного аналізу розв'язування задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах / С. В. Ярошак // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 200 – 206. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розроблено метод розв'язання задач фільтрації у неоднорідних просторово викривлених нафтогазових пластах, що ґрунтується на ідеях заміни реальної течії в пласті деякою близькою до неї кінематично схожою схемою руху та використанні методів комплексного аналізу, зокрема, розробленого числового методу квазіконформного відображення. Для випадку сферичного пласта побудовано систему ортогональних криволінійних координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , відносно якої отримано усереднені по координаті  $\zeta$  рівняння для визначення квазіпотенціалу швидкості фільтрації за відповідних граничних умов.

**Ключові слова:** багатозафазна фільтрація, квазіконформне відображення, числовий метод.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 66.023

**Многокритериальная оптимизация параметров лабиринтно-винтового насоса / П. Н. Андренко, О. В. Дмитриенко, А. Ю. Лебедев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 3 – 12. Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2222-0631.**

По результатам анализа литературных источников обоснован выбор метода оптимизации лабиринтно-винтового насоса. Приведена методика и результаты многокритериальной оптимизации его конструктивных и рабочих параметров. Проведен анализ влияния формы рабочих органов и газосодержания рабочей жидкости на основные характеристики насоса, выраженные в безразмерных значениях. Полученные данные позволяют на этапе проектирования такого насоса определить его конструктивные параметры, которые обеспечат рациональные значения мощности и максимальный КПД.

**Ключевые слова:** лабиринтно-винтовой насос, рабочие органы, винтовая канавка, многокритериальная оптимизация, критерии качества.

УДК 661.152.3

**Моделирование влияния предварительного диспергирования в технологии получения комплексного удобрения / А. Р. Белянская, Н. Д. Волошин, В. В. Кармазина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 12 – 21. Бібліогр.: 19 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведено математическое описание процесса предварительного диспергирования и отстаивания составляющего компонента комплексного удобрения - активного ила. Математическое описание позволяет спрогнозировать, на сколько уменьшится остаточный объем активного ила и

учитывает температуру раствора, начальную влажность ила, продолжительность диспергирования и частоту вращения ротора диспергатора. Рассчитаны параметры роторного диспергатора, позволяющие подобрать диспергатор для применения в промышленных условиях. Достоверность полученных статистических зависимостей и параметров оценена по величине относительной погрешности расчетов. Установлено, что в результате диспергирования активного ила разрушается его гидратная оболочка, коллоидно связанная вода освобождается, процесс отстаивания интенсифицируется. Определено, что при поддержке критерия Рейнольдса  $4,49 \cdot 10^4$ , частоте колебания жидкости  $533 \text{ с}^{-1}$ , продолжительности диспергирования 4...6 минут объем активного ила уменьшается с 1000 до  $320 \text{ мл/дм}^3$ . Предложена принципиальная технологическая схема получения комплексного удобрения на основе техногенных отходов, преимуществом которой является повышение полезного объема биореактора за счет повышения концентрации отстоявшегося диспергированного активного ила.

**Ключевые слова:** диспергирование, активный ил, техногенные отходы, комплексное удобрение.

УДК 534.1: 539.3

**Идентификация импульсной нагрузки, действующей на вязко-упругую балку / В. Т. Гришакин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 22 – 29. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Работа представляет решение задачи по идентификации положения и амплитудного значения импульсной сосредоточенной нагрузки, действующей на шарнирно закрепленную балку. Решение построено как на модели балки Кирхгофа, так и на модели Тимошенко, с учетом диссипации энергии колебаний на основе соотношений Фойгта. Процедура идентификации предполагает минимизацию некоторой целевой функции, позволяющей на первом этапе определить приближенное положение точки приложения нагрузки, а на втором – вычислить ее приближенное амплитудное значение. При проведении численного эксперимента исходные данные были взяты с результатов моделирования методом конечных элементов колебаний балки, обусловленных импульсной нагрузкой. Показано, что использование модели Тимошенко обеспечивает более близкий к истинному значению результат идентификации с приемлемой для инженерной практики точностью.

**Ключевые слова:** идентификация, сосредоточенная нагрузка, диссипация, модель Фойгта, минимизация.

УДК 621.43.068.4

**Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твердых частиц дизеля. Часть 3: компоновочный коэффициент / А. Н. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 29 – 40. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведена и описана математическая модель гидравлического сопротивления ФТЧ в реальных условиях эксплуатации. Модель построена на основе расходной характеристики одного модуля ФТЧ, экспериментально полученной при постоянной температуре текучей среды, и данных стендовых испытаний автотракторного дизеля 2Ч10,5/12, оснащенного полноразмерным ФТЧ. Модель позволяет учесть ряд факторов, характеризующих условия эксплуатации ФТЧ в составе выпускной системы этого дизеля. Учет этих факторов производится путем введения соответствующих коэффициентов. В данной части работы описан физический смысл и оценены значения компоновочного коэффициента модели, позволяющего учесть размещение ФТЧ по длине выпускного тракта дизеля, влияющего на максимальную температуру отработавших газов на входе в ФТЧ.

**Ключевые слова:** дизель, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление, математическая модель.

УДК 621.646.942

**Выбор основных параметров вихревого диода для предотвращения гидравлических ударов в вертикальных трубопроводах / А. П. Кононенко, В. П. Овсянников, М. В. Оверко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ**

«ХП», 2015. – №6 (1115). – С. 40 – 49. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Наиболее часто мощные вертикальные трубопроводы применяются на шахтных водоотливных установках. Опасный гидравлический удар возникает в них при внезапном отключении насоса. В этих условиях средством защиты от опасных колебаний давления может быть гидравлический диод, установленный, например, в середине трубопровода. Наиболее приемлемым типом диода выбран вихревой струйный диод. Трудностью при моделировании переходного процесса в вертикальном трубопроводе с вихревым диодом является его существенная инерционность. Задача была решена с помощью локальной системы координат, которая вводится в программу расчета на время существования обратного тока жидкости. Используя разработанную модель можно определить размеры вихревого диода и рассчитать энергетические потери, которые могут возникнуть при использовании данной схемы защиты.

**Ключевые слова:** водоотливная установка, защита, напорный трубопровод, моделирование, гидравлический удар, вихревой гидравлический диод.

УДК 621.65

**Оценка влияния поперечных вихрей на процесс передачи энергии в свободновихревом насосе / И. В. Криштоп, В. Ф. Герман, А. Г. Гусак, Л. М. Салтанова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №6 (1115). – С. 49 – 56. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

В статье рассмотрено влияние поперечных вихрей на процесс передачи энергии жидкости в свободновихревом насосе. Представлены напорные и энергетические характеристики этих насосов при различных способах скругления торцов лопастей колеса, полученные экспериментальным путем. Приведены результаты численных исследований течения в межлопастных каналах, которые позволяют уточнить картину течения жидкости в проточной части насоса.

**Ключевые слова:** свободновихревой насос, поперечный вихрь, лопасть, межлопастной канал, численный эксперимент.

УДК 539.3

**Анализ геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек с помощью теории R-функций / Л. В. Курпа, Т. В. Шматко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №6 (1115). – С. 56 – 66. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.**

Для исследования геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной геометрической формой предлагается метод, базирующийся на использовании теории  $R$  – функций. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка, которая учитывает деформации сдвига. Сведение получаемой нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений выполняется в несколько этапов. Предложенный алгоритм реализован в рамках системы POLE-RL, протестирован на тестовых задачах и проиллюстрирован на примерах оболочек со сложной формой плана.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы, геометрически нелинейные колебания, теория  $R$  – функций, пологие оболочки со сложной формой плана.

УДК 519.6

**Исследование метода нахождения точек разрыва первого рода функции одной переменной / О. Н. Литвин, Ю. И. Першина, В. А. Пасечник // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №6 (1115). – С. 67 – 76. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.**

Разработан и исследован метод нахождения точек разрыва и  $\varepsilon$  – разрыва первого рода линейной функции одной переменной, приближая ее разрывным интерполяционным или аппроксимационным линейным сплайном. Доказанные теоремы о необходимом количестве итераций предложенного метода для достижения требуемой точности. Введено понятие  $\varepsilon$  – непрерывности функции одной переменной. На его основе разработан модифицированный алгоритм обнаружения разрывов первого рода нелинейной функции одной переменной, используя разрывный аппроксимационный линейный сплайн. Рассмотрен пример, подтверждающий эффективность предложенного метода. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** разрывная линейная интерполяция, разрывная линейная аппроксимация,  $\varepsilon$  – разрыв.

УДК 621.382:62-1/-9(045)

**Наносхемы с программируемыми характеристиками / А. С. Мельник, Н. В. Трофименко, А. А. Собченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 77 – 81. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.

Предложены методы построения арифметико-логических вычислительных устройств комбинационного и последовательностного типов, которые реализуют практически полную систему логических функций как по мажоритарному, так и в булевом базисах. А также реализовано автоматизированное проектирование нанoeлектронных схем с программируемыми характеристиками на квантовых мажоритарных компонентах.

**Ключевые слова:** квантовые автоматы, мажоритарный элемент, наносхемы с программируемыми характеристиками (НСПХ).

УДК 519.71

**Параметрическая идентификация модели Солоу макроэкономической системы / А. М. Назаренко, А.М. Николаенко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 82 – 91. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассматривается проблема спецификации и идентификации модели Солоу макроэкономической системы, в которой инвестиции экономики в целом связаны линейным законом с выпусками секторов. В качестве фазовых координат выступают основные фонды, а управлениями являются выпуски секторов. Траектории движения фазовых координат раскладываются на трендовую и периодическую составляющие. Деление макроэкономической системы на секторы проводится так, чтобы свойственные им гармоничные волны настраивались на частоты, характерные для данной системы. Поскольку траектории выпусков секторов неизвестны, то дифференциальное уравнение движения удовлетворяется в целочисленных точках периода идентификации. Неизвестные параметры модели оцениваются методами эконометрики, причем вместо основных фондов используются замещающие переменные - приросты основных фондов, для которых известна статистическая информация. Апробация модели проводится на статистических данных реальной макроэкономической динамики. Эконометрическое моделирование позволяет выделить значимые гармоники, характерные для данной системы, и восстановить неизвестные статистические данные по основным фондам и инвестициям. Полученные траектории движения имеют высокие имитационные и прогнозные свойства. Анализ гармонических волн, присутствующих в разложении модельных кривых, позволяет устанавливать причины подъемов и спадов в экономике страны и прогнозировать дальнейшее экономическое развитие.

**Ключевые слова:** спецификация, идентификация, циклический процесс, имитация, прогнозирование.

УДК 629.083:621-113

**Математическая модель изнашивания дисковых тормозных механизмов легковых автомобилей в условиях эксплуатации / А.И. Назаров, Д.М. Клец, И.А. Назаров** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 91 – 101. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложена математическая модель изнашивания поверхностей трения дисковых тормозных механизмов легкового автомобиля при экстренных торможениях в эксплуатационных условиях. Для конкретных легковых автомобилей рассмотрена работа созданного алгоритма, приведены результаты работы программы и анализ результатов проведенного расчетного эксперимента. Также рассмотрены перспективы дальнейших исследований для повышения ресурса дисковых тормозных механизмов.

**Ключевые слова:** легковой автомобиль, дисковый тормозной механизм, эксплуатация.

УДК 62-82

**Проектирование диспергирующего устройства для гидроагрегатов питания гидросистем / О. Б. Панамарева** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та

технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 102 – 108. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассматривается диспергирующее устройство, применяемое в гидроагрегатах питания для гидросистем, позволяющее повысить степень очистки рабочих жидкостей. Предложена математическая модель рабочего процесса диспергирующего устройства, на основании которой проведены исследования влияния его рабочих параметров на конструктивные. Результаты моделирования профиля проточной части диспергирующего устройства позволяют сформулировать рекомендации по выбору его рациональных параметров, а приведенная математическая модель может быть применена при моделировании конструктивно подобных устройств.

**Ключевые слова:** диспергирующее устройство, рабочая жидкость, математическая модель, рабочий процесс, гидроагрегат.

УДК 517.968.519.6

**Система интегральных уравнений первого рода на отрезке  $[0, 2\pi]$  с логарифмическим ядром / Т. С. Полянская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 109 – 114. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрена система интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром, к которой приводит ряд задач дифракции волн. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Введены пары Гильбертовых пространств и операторы, в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению системы интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

УДК 631.37

**Идентификация сельскохозяйственных тракторных шин численным методом / А. Ю. Ребров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 114 – 121. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложен метод идентификации современных тракторных радиальных шин с использованием математической модели, построенной на универсальной характеристике шин. Метод позволяет идентифицировать шины по норме слойности и контурной площади пятна контакта, а также использовать математическую модель для теоретических исследований эффективности отечественных и зарубежных сельскохозяйственных тракторов, оборудованных современными радиальными шинами, в том числе категорий IF и VF. Для адекватного моделирования радиальной деформации и площади пятна контакта шин категорий IF и VF, которые характеризуются высокой эластичностью, предложено скорректировать математическую модель на основе универсальной характеристики шин.

**Ключевые слова:** радиальные тракторные шины, универсальная характеристика шин, норма слойности, контурная площадь пятна контакта.

УДК 629.113

**Математическая модель определения параметров криволинейного движения двухзвездного автопоезда при маневре «поворот» на стадии проектирования / В. В. Редчиц, Б. И. Кальченко, Е. В. Головина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 121 – 126. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.**

На базе доработанной математической модели криволинейного движения одиночного автомобиля предложен новый метод расчета параметров криволинейного движения двухзвездного автопоезда при маневре «поворот» с учетом времени запаздывания реакции автомобиля на управляющее воздействие, но без учета углов увода. Предложенный способ построения траектории движения двухзвездного автопоезда позволяет в первом приближении проводить имитацию маневра «поворот  $R_n = 35$  м» на жестких колесах и давать предварительную оценку управляемости и устойчивости транспортного средства на стадии проектирования. Метод в дальнейшем планируется использовать при исследовании динамики маневра «поворот».



**Ключевые слова:** кривизна траектории, угол складывания, время запаздывания, вход в поворот, управляемость, устойчивость.

УДК 621.923

**Условия повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей при шлифовании с фиксированным радиальным усилием / И. А. Рябенков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 127 – 132. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Разработана математическая модель процесса шлифования с фиксированным радиальным усилием и на ее основе определены условия повышения точности и качества обрабатываемых поверхностей. Теоретически установлено, что в отличие от шлифования по жесткой схеме, при шлифовании с фиксированным радиальным усилием время обработки фактически не влияет на снижение показателей точности и качества обрабатываемых поверхностей в связи с исключением трения связи круга с обрабатываемым материалом. Это является важным фактором повышения эффективности обработки высокоточных деталей. При этом температура резания увеличивается не столь значительно по сравнению с шлифованием по жесткой схеме. Это допускает достаточно продолжительный контакт круга с обрабатываемой деталью, тогда как при шлифовании по жесткой схеме с целью снижения температуры резания возможен непродолжительный контакт.

**Ключевые слова:** шлифование, составляющие силы резания, энергоемкость обработки, коэффициент трения, производительность обработки, время обработки, температура резания.

УДК 625.282:625.032.07

**Определение параметров накопителя энергии для электроподвижного состава с асинхронным тяговым приводом в режиме ограничения тока тяговой сети / Е. С. Рябов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 132 – 137. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрено использование накопителей энергии в составе тягового электропривода электроподвижного состава. Показана целесообразность их использования в режиме ограничения тока тяговой сети при расположении накопителя энергии на подвижном составе. Предложен способ определения параметров накопителя при работе в режиме ограничения тока тяговой сети при его использовании в составе асинхронного тягового привода и получены аналитические расчетные выражения для определения параметров накопителя.

**Ключевые слова:** асинхронный тяговый привод, накопитель энергии, подвижной состав, тяговая характеристика.

УДК 629.113+629.331

**Методика определения характеристик агрегатов ГСУ и режимов их работы для грузовых автомобилей в зависимости от условий эксплуатации / В. П. Сахно, В. М. Поляков, А. Н. Тимков, А. С. Иванов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 137 – 147. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

Разработана методика, позволяющая установить влияние распределения мощности между агрегатами гибридной силовой установки (ГСУ), алгоритма управления и эксплуатационного маршрута движения на показатели тягово-скоростных свойств и топливной экономичности грузовых автомобилей. В качестве оценочных критериев выступают показатели тягово-скоростных свойств, топливной экономичности и расхода электрической энергии автомобилем с ГСУ. Использован вероятностный подход к выбору рациональной величины мощности ГСУ, ее распределения между электродвигателем (ЭД), двигателем внутреннего сгорания (ДВС) и выбору режимов их совместной работы.

**Ключевые слова:** автомобиль, алгоритм, мощность, электродвигатель, тягово-скоростные свойства, топливная экономичность, энергия, маршрут движения, скорость.

УДК 532.5:518.5

**Особенности пульсирующих струй жидкости высокой скорости / А. Н. Семко, Н. И. Ягудина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 147 – 156. Бібліогр.: 21 назв. – ISSN 2222-0631.**

В работе в акустической и газодинамической постановках исследованы процессы в им-

пульсном генераторе струй жидкости. В акустической постановке рассматривалась одномерная задача без учета движения поршня и истечения струи. В газодинамической постановке численно решалась одномерная и осесимметричная задача с учетом движения поршня, истечения струи и кавитации жидкости. Проведено сравнение результатов расчетов для разных моделей движения жидкости, сделаны соответствующие выводы. Показано, что пульсации скорости струи связаны с волновыми процессами в установке.

**Ключевые слова:** пульсирующие струи жидкости, жидкие диски, импульсный генератор струй, кавитация, численное моделирование.

УДК 621.646.42

**Уточнение метода инвариантов для расчёта динамических параметров газа в трубопроводах пневмосистемы запуска ракетного двигателя / С. А. Шевченко, А. Л. Григорьев, М. С. Степанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 156 – 181. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.**

Выполнен анализ процессов теплообмена газа со стенками в магистралях, подающих газ к турбонасосному агрегату, и в трубопроводах управления клапанами пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения. Показано, что течение газа по расходным магистралям допустимо считать адиабатическим, а по трубопроводам управления – изотермическим. Выполнено уточнение метода инвариантов Римана, позволяющее учесть неизотропный характер течения в выпускной магистрали, а также газодинамическое сопротивление трубопроводов.

**Ключевые слова:** газодинамический расчёт; континуальные модели трубопроводов; одномерные течения; фактор газодинамического сопротивления; пневмосистема запуска.

УДК 629.35.02.001.57

**Математическое описание рабочих процессов механизма опрокидывания кабины грузового автомобиля / С. Н. Шуклинов, М. Ю. Залогин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 182 – 190. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведено математическое описание динамических процессов гидравлического механизма опрокидывания кабины грузового автомобиля. Математическое описание характеризует динамические процессы гидравлического привода механизма опрокидывания кабины с гидравлическим цилиндром двухстороннего действия и движение центра масс кабины относительно оси поворота при ее опрокидывании. Математическое описание гидропривода включает уравнение движения поршня насоса, движение жидкости в трубопроводе, зависимость, определяющие изменения давления жидкости в узлах, и уравнение движения штока гидроцилиндра. Уравнение движения поршня насоса представлено в виде синусоидального закона в функции времени и линейной частоты рукоятки. Скорость перемещения жидкости в трубопроводе определена из уравнения баланса давлений. Обобщенная нагрузка, действующая на выходное звено гидроцилиндра, определена из дифференциального уравнения движения кабины для случая линейной обобщенной координаты. Уравнение движения кабины в обобщенных координатах получено из уравнения Лагранжа второго рода, описывающее движение центра масс кабины относительно оси поворота для принятой плоской кинематической схемы механизма опрокидывания кабины.

**Ключевые слова:** математическое описание, динамика, механизм опрокидывания кабины, рабочий процесс, податливость, гидравлическая цепь, оператор.

УДК 539.3

**Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости (прямая и обратная задачи) / Е. Г. Янушин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 191 – 200. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приводится исследование нестационарного деформирования шарнирно-опертой изотропной пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости. На примере механической системы, состоящей из шарнирно-опертой пластины и подпирающей ее балки, построено решение прямой и обратной задач. Достоверность полученных результатов исследуется путем сопоставления с результатами, полученными другими авторами, при предельном переходе. Также приво-

дится сопоставление аналитического решения задачи с решением, полученным с использованием метода конечных элементов. Некорректность поставленных задач (прямой и обратной) преодолевается с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова.

**Ключевые слова:** пластина, ребро жесткости, ряд Фурье, преобразование Лапласа, условие контакта, уравнение Вольтерра, метод регуляризации.

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

**Один метод комплексного анализа решения задач фильтрации в неоднородных пространственно искривленных нефтегазовых пластах / С. В. Ярощак** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №6 (1115). – С. 200 – 206. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Разработан метод решения задач фильтрации в неоднородных пространственно искривленных нефтегазовых пластах, что основан на идеях замены реального течения в пласте некоторой близкой к нему кинематически похожей схемой движения и использовании методов комплексного анализа, в частности, разработанного численного метода квазиконформного отображения. Для случая сферического пласта построено систему ортогональных криволинейных координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , относительно которой получено усредненные по координате  $\zeta$  уравнения для определения квазипотенциала скорости фильтрации, при соответствующих граничных условиях.

**Ключевые слова:** многофазная фильтрация, квазиконформное отображение, численный метод.

## ABSTRACTS

UDC 66.023

**Labyrinth-screw pump parameters multi-criteria optimization / P. N. Andrenko, O. V. Dmitrienko, A. Y. Lebedev** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 3 – 12. Bibliog.: 15 titles. – ISSN 2222-0631.

Based on the analysis of literary sources an optimization method of a labyrinth-screw pump is chosen. The methodology and the results of the multi-criteria optimization of its design and operating parameters are presented. The influence of the shape of the working bodies and the working fluid gas content on the main characteristics of the pump expressed in dimensionless values is analyzed. The data obtained allow to determine the design parameters of the pump that will ensure rational values of the power and maximum efficiency at the pump design stage.

**Key words:** labyrinthine-screw pump, working bodies, screw groove, multiobjective optimization, quality criteria.

UDC 661.152.3

**Modeling the influence of preliminary dispersion in the technology of complex fertilizer / A. R. Belianskaya, N. D. Voloshin, V. V. Karmazina** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 12 – 21. Bibliog.: 19 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical description of activated sludge (a component of complex fertilizer) preliminary dispersion and settling process is given. The mathematical description allows to predict the degree of reduction of the residual volume of the activated sludge and takes into account the temperature of the solution, the initial moisture content of the sludge, the dispersion time and the disperser rotor speed. The parameters of the disperser rotor to be taken into account when choosing an industrial disperser are calculated. The validity of the statistical dependencies and parameters is estimated by the relative error of calculations. It is found that the dispersion of the activated sludge leads to destroying its hydrate shell, releasing the bound colloid water and intensification of the settling process. It is determined that maintaining the Reynolds number at  $4,49 \cdot 10^4$ , fluid vibration frequency at  $533s^{-1}$ , the dispersion time at 4...6 minute, the activated sludge volume decreases from 1000 to 320 ml/dm<sup>3</sup>. A flow chart for obtaining complex fertilizer using industrial waste, the advantage of which is increasing the useful volume of the bioreactor by increasing the concentration of the settled dispersed activated sludge, is designed.

**Key words:** dispersion, activated sludge, technogenic waste, complex fertilizer.

UDC 534.1: 539.3

**Identification of the impulse load on a visco-elastic beam / V. T. Grishakin** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 22 – 29. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

In this work the problem of identifying the position and the amplitude value of the pulse concentrated load acting on a hinged beam is solved. The solution is based on both the Kirchhoff beam model and the Timoshenko model, taking into account the energy dissipation through vibrations based on the Voigt ratios. The identification procedure involves minimizing a target function, which makes it possible to determine an approximate position of the point of the load application at the first stage of the procedure, and to calculate an approximate value of the load amplitude at its second stage. The initial data for the numerical experiment are obtained by modeling the vibrations of a beam under an impulse load by the finite element method. It is shown that the result of the load identification obtained by using the Timoshenko model is closer to the true value than the result obtained by using the Kirchhoff model, with the accuracy acceptable for engineering practice.

**Key words:** identification, concentrated load, dissipation, Voigt model, minimization.

UDC 621.43.068.4

**Mathematical model of the hydraulic resistance of the diesel particulate matter filter. Part 3: arrangement coefficient / A. N. Kondratenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 29 – 40. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

The article deals with a mathematical model, which describes the hydraulic resistance of a DPF under the real operating conditions. The model is based on the flow characteristics of a single module of the filter element of DPF, obtained experimentally at a constant temperature of fluid, and the data of bench tests of an 2Ch10.5/12 autotractor diesel, equipped with a full-sized DPF. The model allows to take into account a number of factors that characterize the operating conditions of a DPF in the exhaust system of this diesel. The factors are taken into account by introducing corresponding coefficients. The dependence of these coefficients on the operating and design parameters of the 2Ch10.5/12 diesel is experimentally obtained and described by the method of linear regression. In this part of the research we describe the physical meaning and evaluate the adjusting coefficient of this mathematical model, which allows to incorporate the results of the studies on the non-motorized installation and on the engine test band, and to take into account the type of the case design of the module of the filter element of the DPF. The flow characteristics of the exhaust stream (such as the mass flow rate per unit area of the inlet section of the module) should be taken into account when choosing the model dimensions of the module and the number of the module filter element of an industrial DPF.

**Key words:** diesel, particulate matter filter, hydraulic resistance, mathematical model.

UDC 621.646.942

**Choosing main parameters of vortex diode to prevent water hammer in vertical pipes / A. P. Kononenko, V. P. Ovsyannikov, M. V. Overko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 40 – 49. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Powerful vertical pipes are commonly applied for mine water drainage installations. The danger of a hydraulic shock arises in them at sudden stopping of the pump. In these conditions the hydraulic diode fixed, for example, in the middle of the pipe can protect from dangerous oscillations of pressure. The most acceptable type of the diode is a jet vortex diode. The main difficulty in modeling the transition process in a vertical pipe with a jet diode is its substantial inertia. The problem was solved by introducing a local coordinate system into the calculation program for the period of the presence of the reverse fluid flow. The main parameters of the vortex diode determining its ability to effectively dampen pressure surges should be considered as the ratio of the inverse hydraulic resistance and the direct resistance, the direct hydraulic resistance and the acceleration time of the liquid (time constant). It is confirmed that the inertial properties of the diode as a whole have a negative impact on the quality of controlled transient process. It is always possible to damp the water hammer in a drainage installation by changing the direct resistance of the vortex diode; however, this will increase the unit energy cost of fluid transfer. The developed mode can be applied for determining the proportions of the rotational diode and for calculating the energy losses which can arise when using the given protection scheme.

**Key words:** drainage installations, protection, discharge pipe, water hammer, vortex diode.

UDC 621.65

**The influence of transverse vortices on the transfer of the energy in a torque flow pump / I. V. Kryshchtop, V. F. German, A. G. Gusak, L. M. Saltanova** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 49 – 56. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

The article describes the influence of transverse vortices on the transfer of the energy of the liquid in a torque flow pump. The head-flow and energetic characteristic curves of these pumps for various ways of rounding the ends of the impeller blades obtained experimentally are presented. A numerical experiment for determining the flow in the channel between the blades was conducted, which allowed to precise the pattern of the flow in the pump.

**Key words:** torque flow pump, the transverse vortex, channel between the vanes, numerical experiment.

UDC 539.3

**Analysis of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells by means of R-function theory / L. V. Kurpa, T. V. Shmatko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 56 – 66. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

A method for investigating geometrically nonlinear vibrations of functionally graded shallow shells with a complex plan form based on the  $R$  – function theory is proposed. The mathematical problem is set in the framework of the first-order shear deformation theory. The obtained nonlinear system of partial differential equations is reduced in several steps to a nonlinear system of ordinary differential equations. The proposed algorithm is implemented by means of the POLE-RL system, tested on test problems and illustrated by shallow shells with complex plan form.

**Key words:** functionally graded materials, geometrically nonlinear vibrations,  $R$  – function theory, shallow shells with complex plan form.

UDC 519.6

**Studying a method for identifying the points of discontinuity of the first kind of functions of one variable / O. N. Lytyyn, Y.I. Pershyna, V.A. Pasichnik** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 67 – 76. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.

In the paper a method for finding points of discontinuity and  $\varepsilon$  – discontinuity of the first kind of a linear function of one variable by interpolating the function by a discontinuous spline or approximating it by a linear spline is developed and studied. The theorems about the required number of iterations of the proposed method to achieve the required accuracy are proved. The concept of  $\varepsilon$  – continuity of functions of one variable is introduced. Base on the concept a modified algorithm for detecting discontinuities of the first kind of non-linear functions of one variable, using a discontinuous linear spline approximation is developed. An example confirming the effectiveness of the proposed method is given. The prospects for further research are also discussed.

**Key words:** discontinuous linear interpolation, discontinuous linear approximation,  $\varepsilon$  – discontinuity.

UDC 621.382:62-1/-9(045)

**Nanocircuits with programmable characteristics / O. S. Melnik, N. V. Trokhymenko, A. O. Sobchenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 77 – 81. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

In the paper methods for constructing arithmetic and logical computing devices of combinational and sequential types that implement a virtually complete system of logic functions in both majority and Boolean bases are proposed. An automated scheme for designing nanoelectronic circuits with programmable characteristics on quantum majority components is also implemented.

**Key words:** quantum automata, majority element, field-programmable gate array (FPGA).

UDC 519.71

**Parametric identification of the Solow model of a macroeconomic system / O. M. Nazarenko, O. M. Nikolaenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 82 – 91.

Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

In the paper we study the problem of identification and specification of the Solow model of a macroeconomic system, in which the dependence between the investments of the economy as a whole and the releases of the sectors is linear. The phase coordinates are the fixed assets, and the controlled ones are the sector issues. The trajectories of the phase coordinates can be decomposed into trend and periodic components. The macroeconomic system is divided into sectors so that the inherent harmonic waves are tuned to the frequencies characteristic for the system. Since the trajectories of the sector issues are unknown, the differential equation of motion is satisfied at integer points of the identification period. The unknown model parameters are estimated by methods of econometrics, and the fixed assets are replaced by the gross fixed assets for which statistical information is known. The model is tested on the statistics of real macroeconomic dynamics. The econometric modeling allows to allocate significant harmonic characteristics of the system, and to restore the unknown statistical data from the fixed assets and investments. The resulting trajectories have high simulation and forecasting properties. The analysis of the harmonic waves present in the expansion of the model curves allows to determine the causes of ups and downs in the economy and to predict the future economic development.

**Key words:** specification, identification, cyclical process, simulation, prediction.

UDC 629.083:621-113

**A mathematical model of the disc brake wear for cars in operation / A. Nazarov, D. Klez, I. Nazarov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 91 – 101. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of wearing the friction surfaces of disk brake mechanisms of cars during emergency braking in an operational environment is proposed. For specific cars, the operation of the algorithm created, the results of the program, and the analysis of the results of the calculation experiment are given. Also the prospects for further research to improve the resource of disc brakes are discussed.

**Key words:** passenger car, disc brakes, operation.

UDC 62-82

**Modelling dispersing device for hydraulic power units of hydraulic systems / O. B. Panamariova** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 102 – 108. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

The article deals with a dispersing device used in the hydroelectric power units for hydraulic systems, that improves the degree of purification of the working fluids. A mathematical model of the dispersing device workflow is presented. Based on the model the influence of the operating parameters on the design ones is investigated. The results of modelling the flow profile of the dispersing device allow us to formulate recommendations on the choice of its rational parameters. The mathematical model presented can be applied for modelling structurally similar devices.

**Key words:** dispersing device, hydraulic fluid, mathematical model, workflow, hydraulic unit.

UDC 517.968.519.6

**A system of integral equations of the first kind with a logarithmic kernel on  $[0, 2\pi]$  / T. S. Poljanskaja** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 109 – 114. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A system of integral equations of the first kind with logarithmic kernel, which arises in a number of problems of the diffraction of waves, is studied. The sampling of the system is obtained by the method of discrete singularities. Pairs of Hilbert spaces and operators in them, corresponding to the set and discrete problems are introduced. Using them we prove the unique solvability of the discrete problem and provide a rigorous justification for estimating the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the integral equations.

**Key words:** integral equations, logarithmic kernel, the method of discrete singularities.

UDC 631.37

**Farm tractor tires identification by numeric method / A. Yu. Rebrov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 114 – 121. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

The author proposes a method for modern tractor radial tires identification using a mathematical model based on the universal characteristics of tires. The method allows to identify the tire ply rating and gross flat plate area, and to use the mathematical model for theoretical study of the efficiency of domestic and imported agricultural tractors equipped with modern radial tires, including categories IF and VF tires. For adequate simulation of radial deformation and gross flat plate area of IF and VF tires, which are characterized by high flexibility, it is proposed to adjust the mathematical model based on the universal characteristics of tires.

**Key words:** radial tractor pneumatic tire, universal characteristics of tires, tire ply rating, gross flat plate area.

UDC 629.113

**A mathematical model for calculating the parameters of the curvilinear motion of a two section road-train turning maneuver at the design stage / V. V. Redchits, B. I. Kalchenko, E. V. Golovina** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 121 – 126. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

A new method for calculating the parameters of the curvilinear motion of a two section road-train turning maneuver considering the influence of the effective deadtime of the vehicle response on the vehicle steerability but without taking into account slip angles is presented. The method is based on the modified mathematical model of single vehicle curvilinear motion. The method proposed for tracing a two section road-train allows carrying out simulation of the «turn  $R_n = 35$  m» maneuver by a circular spline in the first approximation and obtaining preliminary estimates of vehicle steerability and stability at the design stage. We plan to use the method for further studying the dynamics of turning maneuvers.

**Key words:** curvature of the trajectory, fold angle, effective deadtime, enter into a turn, steerability, stability.

UDC 621.923

**Conditions for improving accuracy and quality of machined surfaces when grinding with fixed radial force / I. A. Ryabekov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 127 – 132. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the grinding process with a fixed radial force is developed. Based on the model the conditions for improving the accuracy and quality of machined surfaces are determined. It is proved that in contrast to grinding by a rigid scheme, the duration of processing does not actually affect the decrease in accuracy and quality of machined surfaces when grinding with a fixed radial force which is due to eliminating the friction between the grinding wheel and treated material. This is an important factor for increasing the efficiency of processing high-precision parts. When grinding with a fixed radial force the cutting temperature increases less compared to grinding by the rigid circuit.

**Key words:** grinding, cutting force components, power consumption of the processing, the coefficient of friction, the processing performance, the processing time, the cutting temperature.

UDC 625.282:625.032.07

**Defining the parameters of an energy storage for an electrorolling stock with asynchronous traction drive under the limited current in the traction network / E. S. Ryabov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 132 – 137. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

Using an energy storage as a part of the traction drive of an electrorolling stock is considered. The expediency of using the storage in the operation mode of limited current in the traction network when it is located on the rolling stock is shown. A method for determining parameters of the storage operating in the mode of limited current in the traction network when it is used as a part of an asynchronous traction drive is proposed and analytical expressions for calculating the parameters of the drive are obtained.

**Key words:** asynchronous traction drive, energy storage, rolling stock, traction characteristics.

UDC 629.113+629.331

**Method of determining characteristics of HEV units and operation modes for trucks depending on operating conditions** / V. P. Sakhno, V. M. Polyakov, O. M. Timkov, O. S. Ivanov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 137 – 147. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

The technique developed allows to determine the influence of power distribution between the units of a HEV, control algorithm and operational route on the traction and speed properties and the fuel efficiency of trucks. The evaluation criteria are the indicators of traction and speed properties, fuel efficiency and electrical energy consumption of a truck with HEV. We use a probabilistic approach to choose the HEV rational power, its distribution between the electric motor (EM) and the internal combustion engine (ICE), and the modes of their collective work.

**Key words:** car, algorithm, power, motor, traction and speed properties, fuel economy, energy, route, speed.

UDC 532.5:518.5

**Features of pulsing liquid jets of high speed** / A. N. Semko, N. I Yagudina // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 147 – 156. Bibliog.: 21 titles. – ISSN 2222-0631.

The processes in a pulse generator of liquid jets were investigated in acoustic and gas-dynamic settings. In the acoustic setting a one-dimensional problem was considered without taking into account the piston movement and the jet outflow. In the gas-dynamic setting a one-dimensional and axisymmetric problem was solved numerically with taking into account the piston movement, jet outflow and liquid cavitation. The results of calculations for different models of fluid motion were compared. The appropriate conclusions were made. It was shown that the jet velocity pulsations were related to the wave processes in the installation.

**Key words:** pulsing jets of liquid, liquid disks, the pulse generator of jets, cavitation, numerical modeling.

UDC 621.646.42

**Improvement of the invariant method for calculating the dynamic parameters of gas in pipelines of rocket engine pneumatic starting system** / S. A. Shevchenko, A. L. Grigoriev, M. S. Stepanov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 156 – 181. Bibliog.: 17 titles. – ISSN 2222-0631.

The analysis of heat-exchange processes between gas and walls of pipelines, which supply gas to the turbo pump unit, as well as control tubes of valves in the pneumatic starting system of a multiple ignition rocket engine was made. It was shown that the gas flow in the pipelines can be considered as adiabatic flow, while in the control tubes – as isothermal one. There was made an improvement of the Riemann invariants method, which allowed taking into account nonisentropic flow in the exhaust pipeline and pipeline flow resistance.

**Key words:** gas-dynamic calculation, continual models of pipelines; one-dimensional flow; flow resistance factor; pneumatic starting system.

UDC 629.35.02.001.57

**Mathematical description of the workflow tilting mechanism truck cabs** / S. N. Shuklinov, M. Yu. Zalogin // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 182 – 190. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical description of the dynamic processes of the hydraulic tilting of a truck cab is proposed. The mathematical description characterizes the dynamic processes of the cab tilting mechanism hydraulic drive with double-acting hydraulic cylinder and the displacement of the center of mass of the cab relative to the axis of rotation when it is tilted. The mathematical description of the hydraulic drive includes the equation of motion of the pump piston, the fluid motion in the pipeline, the dependencies determining the changes of pressure of the liquid at the nodes, and the equation of motion of the hydraulic cylinder rod. The equation of motion of the pump piston is presented in the form of a sinusoidal law



of a function of time and the linear frequency of the handle. The speed of the liquid in the conduit is determined from the pressure balance equation. The generalized load on the cylinder output link is determined from the differential equations of motion of a cab for a linear generalized coordinate. The equation of motion of the cab in generalized coordinates is obtained from the Lagrange equation of the second kind, describing the motion of the center of mass relative to the axis of rotation of the cab for a plane kinematic scheme of cab tilting.

**Key words:** mathematical description, the dynamics, cab tilt mechanism, workflow, mechanical compliance, hydraulic circuit, the operator.

UDC 539.3

**Transient vibrations of a hinged plate ribbed by linear stiffeners (direct and inverse problems) / Ye. G. Yanyutin, P. A. Yegorov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 191 – 200. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

An investigation of transient vibrations of a hinged isotropic plate ribbed by linear stiffeners is presented. The solutions of the direct and inverse problems are built in terms of a mechanical system, which consists of a hinged plate and a supporting beam. The reliability of the obtained results is analyzed by comparing with the results obtained by other authors, when passing to the limit in some parameters. The comparison of the analytical solution with the solution obtained by using the finite element method is also given. The incorrectness of the formulated problems is overcome by using the Tikhonov regularization method.

**Key words:** plate, stiffener, Fourier series, Laplace transformation, contact condition, Volterra equation, regularization method.

UDC [519.876.5:530.182]:553.98

**A method of complex analysis and solving filtration problems in heterogeneous spatially curved oil and gas layers / S. V. Yaroshak** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №6 (1115). – pp. 200 – 206. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

A method for solving the problems of filtration in heterogeneous spatially curved oil-gas layers is developed. The method is based on the ideas of replacing the real flow in the layer by some close cinematically similar movement pattern and applying the methods of complex analysis, in particular, the numerical method of quasiconformal mapping developed by the authors. A system of orthogonal curvilinear coordinates ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) is introduced for the case of a spherical layer. Using this system we receive an averaged over the  $\zeta$  coordinate equation for determining the quasipotential of filtration velocity under the appropriate boundary conditions.

**Key words:** multiphase filtering, quasiconformal mapping, numerical method.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**  
**«ХПІ»**

**Збірник наукових праць**

Серія:  
Математичне моделювання  
в техніці та технологіях

№ 6 (1115)

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,  
Технічний редактор С. Д. Нижник  
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЙ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».

Кафедра вищої математики.

Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;

e-mail: [kpi\\_mmtt@mail.ru](mailto:kpi_mmtt@mail.ru)

Сайт: [web.kpi.kharkov.ua/mmtt](http://web.kpi.kharkov.ua/mmtt)

Обл.-вид. № 17 – 15.

Підп. до друку 20.04.2015 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.  
Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 10,0. Облік.-вид. арк. 10,0.  
Тираж 300 пр.(1-й завод 1 – 100) Зам. № ZE 1944. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта  
видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, віл Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня ТОВ «Цифрова друкарня №1»  
Ідент. код юридичної особи: 37190180 від 27.07.2010.  
61001, Харків, пл. Повстання, 7/8, тел. (057) 754-49-40, (057) 754-49-42.